



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

**SISTEMAS DE PARTÍCULAS ENTRELAZADOS: MEMORIA Y  
CONDICIONES INICIALES**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE  
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS  
APLICADAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

**PABLO IGNACIO ARAYA ZAMBRA**

PROFESOR GUÍA:  
DANIEL REMENIK ZISIS

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
JOAQUÍN FONTBONA TORRES  
NIKOLAS TAPIA MUÑOZ

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por: CMM ANID PIA AFB170001,  
CMM ANID BASAL ACE210010 y CMM ANID BASAL FB210005

SANTIAGO DE CHILE  
2022

RESUMEN TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE  
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,  
MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS  
Y MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO  
POR: **PABLO IGNACIO ARAYA ZAMBRA**  
FECHA: 2022  
PROF. GUÍA: DANIEL REMENIK

## **SISTEMAS DE PARTÍCULAS ENTRELAZADOS: MEMORIA Y CONDICIONES INICIALES**

En este trabajo de tesis, enmarcado en el estudio de procesos de interacciones de partículas, se detallan nuevas dinámicas no Markovianas que presentan generalizaciones a propiedades encontradas en dinámicas Markovianas para los procesos TASEP, PUSH-TASEP y los arreglos triangulares. Mas precisamente se presentan dinámicas sobre el arreglo triangular que permiten obtener en los procesos TASEP y PUSH-TASEP las dinámicas presentadas en [1].

Luego se detallan aplicaciones de las dinámicas Markovianas sobre problemas combinatoriales que son el embañosado del diamante Azteca y la generación de líneas no-intersectantes, para luego explicar como aplicar las nuevas dinámicas con memoria en estos problemas.

Finalmente, para la dinámica secuencial, al existir una relación entre los arreglos triangulares y el proceso TASEP se logra encontrar una condición inicial donde se logra elegir de una única forma el nivel superior del arreglo triangular para heredar al proceso TASEP un comportamiento Markoviano. También se muestra el problema que tiene el considerar una condición inicial como las presentadas en [2].

*Some will call it practice, some will call it luck  
But either way you're going to the history books*

***Hall of Fame - The Script***

# Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mis hermanos Cristobal, Diego y Sofia. Cada uno de ellos tuvo un rol importante en mi vida y sin ellos y su apoyo constante en todas las adversidades que me ha tocado vivir hubiese sido imposible llegar a estas instancias. Son mi referencia y mi modelo a seguir. Siempre han creído en mi y por ello estaré eternamente agradecido.

A mis padres Raul y Elizabeth que me dieron las bases para ser la persona que soy hoy en día y que siempre creyeron en mis capacidades. Ante cada duda siempre había una palabra de aliento de ambos que me guiaron y educaron para poder afrontar todas las dificultades que uno enfrenta diariamente. Estaré en deuda toda la vida por todo lo que me han dado.

A mi amigo José y su hermosa familia que me han acompañado casi toda la vida. Sin ti amigo querido no creo que hubiese podido llegar a estas instancias. No podría haber tenido un amigo mejor para sufrir todo lo que hemos sufrido juntos.

Quiero agradecer a mis profesor guía Daniel, fue un excelente guía en todo este trabajo y sin su gran apoyo esta tesis no seria lo que fue. A los profesores que confiaron en mi para ser auxiliar en los cursos que dictaban. A cada académico que tuve a lo largo de la carrera que me dieron las herramientas y me mostraron lo bellas que son las matemáticas. A cada compañero y compañera que pude tener a lo largo de la universidad. A la gente de la oficina 437, a la pulenta gente del DIM. A cada funcionario y funcionaria que me acompañó todos estos años en la carrera. A mis amigos de Plan Común que, si bien no nos vemos tanto como antes, siempre les tendré un lugar en mi corazón.

A mis amigos Pardo, Diego, Gaspar y Mati, con los que compartí gran parte de mi vida escolar y por ello los extraño cada día. Siempre tendrán un lugar especial en mi corazón por tantos años juntos por todo el apañe que siempre tuvieron.

Finalmente quiero agradecer a mi grupo de amigos llamado "Los Chacras". Al Bruniño, Vivi, Majo, Barry, Magaly, Pelela, Choco, Azocar, Sebastian Lopez, Javo, Nico, Chocho, y Benja. No podría haber elegido a un mejor grupo para sufrir y superar cada obstáculo que nos topamos en la carrera. Por todas las risas, juegos, enojos y carretes estaré siempre agradecido por toda su amistad. Mención honrosa a los 3 chiflados, al choro Matta y al KING.

# Tabla de Contenido

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Procesos Markovianos en interacción de partículas</b>	<b>3</b>
1.1. Partículas en $\mathbb{Z}$	3
1.1.1. TASEP a tiempo discreto	5
1.1.2. PUSH-TASEP a tiempo discreto	6
1.2. Arreglos Triangulares	7
1.2.1. Dinámica Secuencial	9
1.2.2. Dinámica Paralela	11
1.3. Extensión Dinámica Paralela	12
<b>2. Procesos estocásticos con Memoria</b>	<b>15</b>
2.1. Procesos estocásticos con memoria.	15
2.2. Interacción de partículas con memoria	19
2.2.1. Orugas en $\mathbb{Z}$	20
2.2.1.1. TASEP con memoria	20
2.2.1.2. PUSH-TASEP con memoria	21
2.2.2. Arreglos triangulares con memoria	21
2.3. Extensión Markoviana	33
<b>3. Aplicación sobre el Diamante Azteca y las líneas no intersectantes</b>	<b>35</b>
3.1. Diamante Azteca y Líneas No-intersectantes	35
3.2. Extensión con memoria	37
<b>4. Condiciones iniciales Markovianas sobre los arreglos triangulares</b>	<b>39</b>
4.1. Condición inicial uniforme por niveles	39
4.2. Condición inicial uniforme sobre $\mathbb{GT}$	47
<b>Conclusión</b>	<b>50</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>52</b>
<b>Anexo</b>	<b>53</b>

# Índice de Ilustraciones

1.1.	Ejemplo interacción de partículas en el proceso de exclusión. . . . .	4
1.2.	Ejemplo TASEP con dinámica secuencial . . . . .	5
1.3.	Ejemplo TASEP con dinámica paralela. . . . .	6
1.4.	Ejemplo de un patrón de Gelfand-Tsetlin para $\bar{x} \in \mathbb{GT}_5$ . . . . .	7
1.5.	Condición de entrelazamiento. . . . .	9
1.6.	Esquema dinámica secuencial. . . . .	9
1.7.	Esquema dinámica paralela. . . . .	11
1.8.	Esquema dinámica paralela extendida. . . . .	13
2.1.	Ejemplo posibles estados de la oruga para $m = 3$ . . . . .	20
2.2.	Esquema dinámica con memoria. . . . .	23
2.3.	Esquema dinámica con memoria extendida para $m = 2$ . . . . .	33
3.1.	Ejemplo Diamante Azteca $A_3$ . . . . .	35
3.2.	Ejemplo resultado algoritmo para embaldosar Diamantes Aztecas. . . . .	36
3.3.	Caso base algoritmo para el embaldosado del Diamante Azteca. . . . .	36
3.4.	Ejemplo Trominó. . . . .	38
4.1.	Comportamiento de $q$ y $Q$ . . . . .	40
4.2.	Caminos para $x_2^{N-1}   \{x_1^{N-1} = n, x_1^N = k_0\}$ . . . . .	42
4.3.	Forma alternativa para calcular la distribución de $x_j^i   \{x_{j-1}^i = k\}$ . . . . .	46
4.1.	Ejemplo evolución Líneas no-intersectantes y Diamante Azteca para $t = 1, 2$ y $3$ . . . . .	53
4.2.	Ejemplo evolución Líneas no-intersectantes para $t = 1, 2$ y $3$ . . . . .	54
4.3.	Ejemplo evolución Líneas no-intersectantes con memoria 2 para $t = 1, \dots, 6$ . . . . .	55

# Introducción

Este trabajo intenta entender en mayor detalle distintos procesos de partículas los cuales han sido estudiados en gran medida en las últimas décadas. Uno de ellos es el proceso TASEP el cual ha sido de gran relevancia en distintas áreas como las probabilidades, ecuaciones diferenciales parciales o problemas combinatoriales, esto gracias a su simplicidad. Este debe respetar una regla de exclusión a lo largo de su evolución la cual no permite que dos partículas ocupen el mismo lugar al mismo tiempo. Gracias a esto es posible definir distintas dinámicas sobre el, como por ejemplo la dinámica secuencial, la cual consiste en que cada partícula vea la partícula de su derecha en el tiempo presente. Para esta evolución existen condiciones iniciales que permiten obtener propiedades interesantes sobre el proceso como por ejemplo la condición empaquetada. Con ella es posible caracterizar el comportamiento a largo plazo obteniendo distribuciones que tienen relación con la teoría de matrices aleatorias (ver [3] o [4]). Uno de los objetivos será estudiar más a fondo esta dinámica en conjunto con un proceso más general que se definirá más adelante y tratar de encontrar alguna distribución más general que sea conservativa como la condición empaquetada.

Además de la dinámica anterior, es posible definir más dinámicas sobre el proceso como por ejemplo la dinámica paralela (ver [5]) o dinámicas con memoria (ver [1]). Para las dinámicas secuencial y paralela existe una relación con un proceso más general que son los patrones de Gelfand-Tsetlin. Este proceso (también conocido como arreglos triangulares) tiene varias aplicaciones en problemas combinatoriales como lo es el embaledado del Diamante Azteca o la generación de líneas no-intersectantes, ver [2]. Al igual que el proceso TASEP, los arreglos triangulares también presentan dos dinámicas de interés las cuales se diferencian únicamente en una propiedad de desfase temporal. Para ambas existen propiedades similares lo cual hace interesante el estudiar si al provocar un desfase temporal más grande se logran conseguir propiedades equivalentes a las anteriores y que permitan relacionar el proceso con las dinámicas con memoria. Más aún, si para nuevas dinámicas es posible encontrar aplicaciones en problemas combinatoriales similares a los ya mencionados. Todo lo anterior será uno de los objetivos a trabajar en esta tesis.

Dada la relación del proceso TASEP con los arreglos triangulares, es de interés el poder encontrar medidas conservativas en el arreglo triangular para así heredar al proceso TASEP este comportamiento. Es sabido que la condición empaquetada logra lo anterior, pero esta es determinista. El objetivo entonces será el tratar de encontrar alguna condición inicial aleatoria sobre los arreglos triangulares que permitan heredar al proceso TASEP una condición inicial en particular.

La estructura de esta memoria se divide en cuatro partes. Primero, se describen los procesos Markovianos en los que se centra esta tesis junto a distintas dinámicas y propiedades

para cada uno. Luego se describe una extensión temporal para los arreglos triangulares que permite su aplicación en los problemas mencionados anteriormente.

Posteriormente, el segundo capítulo se concentra en describir procesos más general que los procesos Markovianos y extensiones de los procesos definidos en el capítulo previo. Además se describen las dinámicas asociados a estos nuevos procesos y se estudian que propiedades se mantienen para estas nuevas dinámicas. Finalmente se describe una extensión Markoviana para los arreglos triangulares con memoria que será de utilidad en el siguiente capítulo.

Luego, el tercer capítulo se describe la aplicación de los arreglos triangulares con dinámica Markoviana en los problemas del embaledado del Diamante Azteca y el sistemas de líneas no-intersectantes. Después se explica como se pueden aplicar las generalizaciones definidas en capítulos previos en estos problemas.

Finalmente, el cuarto y último capítulo se estudian, bajo la dinámica secuencial, condiciones iniciales particulares que permiten heredar al proceso TASEP un comportamiento Markoviano. Además se estudian las problemáticas que con lleva el trabajar cierta condición inicial.

# Capítulo 1

## Procesos Markovianos en interacción de partículas

Este capítulo está dedicado a las definiciones y resultados básicos relacionados a las cadenas de Markov en interacciones de partículas, que serán de utilidad más adelante. En la primera sección se definirán dos ejemplos de procesos en interacciones de partículas en  $\mathbb{Z}$  junto a sus dinámicas respectivas y los resultados más relevantes sobre estos procesos. En la segunda sección se definirán lo que son los patrones de Gelfand-Tsetlin, sus dinámicas y la relación que tiene con los procesos anteriormente mencionados. Finalmente en la tercera sección se muestra una extensión de los patrones de Gelfand-Tsetlin al considerar una variable temporal que afecta a las matrices de transición involucradas.

### 1.1. Partículas en $\mathbb{Z}$

En esta sección definiremos dos procesos Markovianos que modelan comportamientos sobre las partículas en  $\mathbb{Z}$ . Para ello primero se dará un contexto a tiempo continuo sobre uno de los procesos y ciertos resultados asociados al proceso que son de interés para esta tesis, para luego mostrar un proceso análogo a tiempo discreto que será el principal estudio de esta tesis. Finalmente se detallarán dinámicas particulares sobre estos procesos.

Dado un conjunto  $S$  y una matriz  $P = (P(x, y), x, y \in S)$  estocástica, definimos el proceso de exclusión como la cadena de Markov  $(\eta_t)_{t \geq 0}$  a valores en  $\{0, 1\}^S$  definida como sigue:

- La función  $\eta_t$  se puede entender como la configuración de lugares en  $S$  que están siendo ocupados, es decir, para  $x \in S$ ,  $\eta(x) = 0$  representa que el lugar  $x$  no está siendo ocupado y para  $\eta(x) = 1$  lo contrario.
- Cada partícula intenta saltar a tasa 1 a los lugares dados por la distribución  $P(x, \cdot)$ . El salto ocurre si el lugar está libre y en caso contrario es ignorado.

Es importante notar que la interacción entre las partículas sigue una regla de exclusión donde no se permite que dos partículas utilicen el mismo lugar. La siguiente figura ilustra un ejemplo del funcionamiento de este proceso:

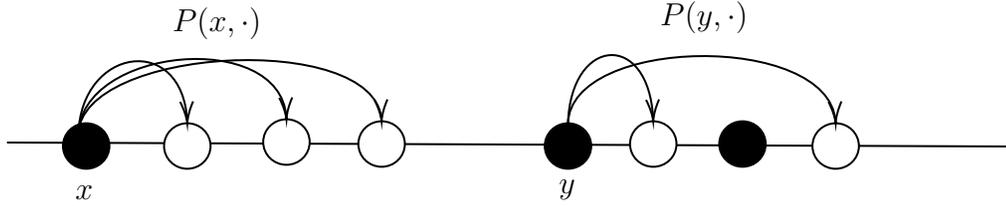


Figura 1.1: Ejemplo interacción de partículas en el proceso de exclusión.

Este proceso posee propiedades bien interesantes y ha sido uno de los más estudiados en esta clase de procesos dado que es uno de los más básicos. Cualquier detalle puede referirse a [6] o [7].

Un caso particular de interés es cuando se considera  $S = \mathbb{Z}$  y  $P(x, y) = \mathbb{1}_{y=x+1}$  el cual es llamado *Proceso de exclusión simple asimétrico (TASEP)*. El proceso en cuestión modela partículas sobre  $\mathbb{Z}$  que van saltando hacia su derecha o se quedan en el sitio dependiendo de si el lugar al que intentan saltar está libre o no. Este proceso ha sido estudiado en gran medida por distintos intereses los cuales se pueden consultar en [8] y [9].

La elección de  $S$  y  $P$  para el proceso TASEP permite que exista un orden entre las partículas que debe ser respetado. Gracias a esto podemos definir la siguiente notación para el proceso TASEP  $(X_t(i))_{i \in \mathbb{Z}}$ , donde  $X_t(i)$  es la posición de la partícula  $i$  a tiempo  $t$ . Este proceso posee un comportamiento interesante cuando  $t$  es muy grande para una cierta condición inicial:

**Teorema 1.1** ([3]) *Sea  $((X_t(i))_{i \in \mathbb{Z}})_{t \geq 0}$  el proceso TASEP a tiempo continuo con la condición inicial empaquetada:*

$$X_0(i) = \begin{cases} -i & \text{si } i \geq 1 \\ \infty & \text{si } i < 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

Entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( 2^{1/3} t^{-1/3} X_t \left( \left\lfloor \frac{t}{4} \right\rfloor \right) > -r \right) = F_{GUE}(r),$$

donde  $F_{GUE}(r)$  denota la distribución GUE de Tracy-Widom.

Para otra condición inicial se consigue un resultado similar al recién presentado:

**Teorema 1.2** ([4]) *Sea  $((X_t(i))_{i \in \mathbb{Z}})_{t \geq 0}$  el proceso TASEP a tiempo continuo con la siguiente condición inicial:*

$$X_0(i) = -2i, \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad (1.2)$$

Entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( 2^{1/3} t^{-1/3} X_t \left( \left\lfloor \frac{t}{4} \right\rfloor \right) > -r \right) = F_{GOE}(4^{1/3} r),$$

donde  $F_{GOE}(r)$  denota la distribución GOE de Tracy-Widom.

La demostración de estos teoremas puede ser consultada en [3] o [4]. Los resultados ante-

rios ilustran que para distintas condiciones iniciales se consigue un comportamiento distinto a largo plazo, lo que hace interesante el estudiar el comportamiento del proceso para distintos comportamientos iniciales. Para poder estudiar el comportamiento de este proceso primero se estudia un proceso equivalente a tiempo discreto en donde se tienen propiedades interesantes.

### 1.1.1. TASEP a tiempo discreto

Para  $p \in (0, 1)$ , definimos el proceso TASEP a tiempo discreto  $((X_n(i))_{n \in \mathbb{N}})_{i \in \mathbb{N}}$  donde cada  $X_n(i)$  representa la posición en  $\mathbb{Z}$  de la partícula  $i$  en el tiempo  $n$ . Gracias a la restricción de exclusión las partículas deben cumplir la siguiente inecuación:

$$X_n(i+1) < X_n(i), \forall i, n \in \mathbb{N}, \quad (1.3)$$

Este proceso puede evolucionar como una cadena de Markov de dos formas distintas las cuales se mencionan a continuación:

- **Dinámica Secuencial:** La posición de la partícula  $i$  se actualiza de la siguiente manera:

$$X_{n+1}(i) = \min\{X_n(i) + \xi(n+1, i), X_{n+1}(i-1) - 1\},$$

donde  $\xi(n+1, i)$  son variables aleatorias con ley  $Ber[p]$  independientes entre si. La siguiente figura ilustra el comportamiento de este proceso:

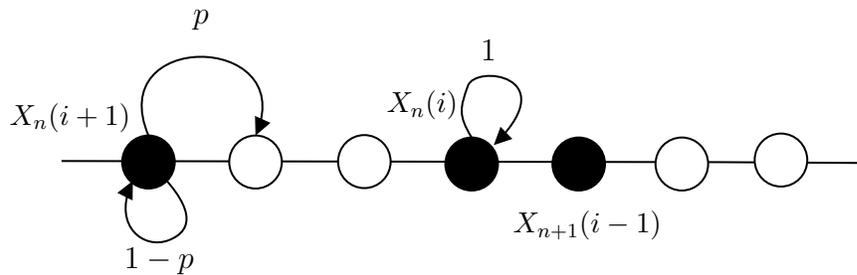


Figura 1.2: Ejemplo TASEP con dinámica secuencial

Cada partícula en  $\mathbb{Z}$  a tiempo  $n$  intentara saltar, en caso de tener libre el lugar de su derecha, con probabilidad  $p$  o se quedara en el lugar con probabilidad  $1 - p$ . En caso contrario si la partícula de su derecha ya intento saltar (i.e. esta a tiempo  $n + 1$ ) y se quedo en el lugar, entonces la partícula está obligada a quedarse en el mismo lugar. Por lo tanto, cada partícula ve la partícula de su derecha a tiempo  $n + 1$  lo que provoca que la evolución se deba de hacer en orden.

- **Dinámica Paralela:** La posición de la partícula  $i$  se actualiza de la siguiente manera:

$$X_{n+1}(i) = \min\{X_n(i) + \xi(n+1, i), X_n(i-1) - 1\},$$

donde  $\xi(n+1, i)$  son variables aleatorias con ley  $Ber[p]$  independientes entre si. La siguiente figura ilustra el comportamiento de este proceso:

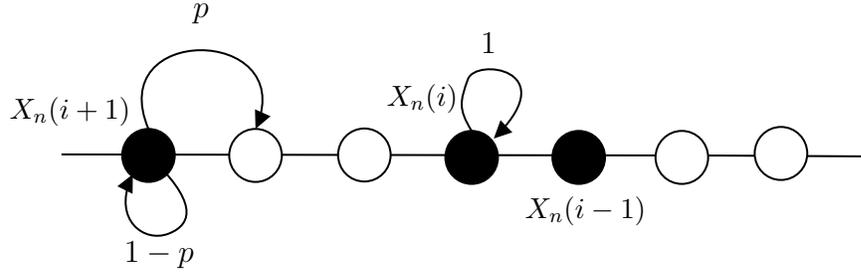


Figura 1.3: Ejemplo TASEP con dinámica paralela.

Al igual que antes cada partícula a tiempo  $n$  intentara saltar con probabilidad  $p$  o se quedara en el lugar con probabilidad  $1 - p$  mientras no tenga ninguna partícula bloqueándole el paso. Esta dinámica no presenta un orden al momento de actualizar la posición de las partículas pues cada partícula al intentar saltar ve la partícula de la derecha a tiempo  $n$ , es decir, esta bloqueada si tiene una partícula a su derecha que le impida el paso. Para mas detalle sobre esta dinámica el lector puede consultar [5].

La relación de este proceso con el proceso TASEP a tiempo continuo viene dado por el siguiente teorema:

**Teorema 1.3** *Sea  $((X_n(i))_{n \in \mathbb{N}})_{i \in \mathbb{N}}$  el proceso TASEP a tiempo discreto con dinámica secuencial y  $((Z_t(i))_{t \geq 0})_{i \in \mathbb{N}}$  el proceso TASEP a tiempo continuo. Entonces se tiene el siguiente límite en distribución:*

$$\lim_{a \rightarrow 0} (X_{\lceil t/a \rceil}(i))_{i=1, \dots, N} = (Z_t(i))_{i=1, \dots, N}$$

El estudio entonces se concentrará en el proceso TASEP a tiempo discreto. Existe un proceso similar al proceso TASEP pero que modifica la restricción de bloqueo a una de empuje. Esto provoca que para ciertas dinámicas se pierda la regla de exclusión.

### 1.1.2. PUSH-TASEP a tiempo discreto

Este proceso funciona de manera similar al proceso TASEP pero al cambiar la restricción de bloqueo. Para  $p \in (0, 1)$ , definimos el proceso PUSH-TASEP a tiempo discreto  $((X_n^{push}(i))_{n \in \mathbb{N}})_{i \in \mathbb{N}}$  donde cada  $X_n^{push}(i)$  representa la posición en  $\mathbb{Z}$  de la partícula  $i$  en el tiempo  $n$ . Este proceso debe cumplir una restricción similar a (1.3) dependiendo de la dinámica en cuestión. Al igual que antes este proceso puede evolucionar como una cadena de Markov de dos formas distintas las cuales se mencionan a continuación:

- **Dinámica Secuencial:** La posición de la partícula  $i$  se actualiza de la siguiente manera:

$$X_{n+1}^{push}(i) = \max\{X_n^{push}(i) + \xi(n+1, i), X_{n+1}^{push}(i-1) + 1\}$$

donde  $\xi(n+1, i)$  son variables aleatorias con ley  $Ber[p]$  independientes entre si. Lo anterior provoca que las partículas tengan que respetar la siguiente inecuación:

$$X_n^{push}(i+1) > X_n^{push}(i), \forall i, n \in \mathbb{N}.$$

Cada partícula no tiene impedimentos al querer saltar a su derecha pero en caso de toparse con otra la empuja provocando que esta avance hacia el siguiente lugar.

- **Dinámica Paralela:** La posición de la partícula  $i$  se actualiza de la siguiente manera:

$$X_{n+1}^{push}(i) = \max\{X_n^{push}(i) + \xi(n+1, i), X_n^{push}(i-1) + 1\}$$

donde  $\xi(n+1, i)$  son variables aleatorias con ley  $Ber[p]$  independientes entre si. Dado que cada partícula ve la partícula de su derecha con un desfase temporal de una unidad de tiempo la restricción que debe respetar se modifica a la siguiente:

$$X_n^{push}(i+1) \geq X_n^{push}(i), \forall i, n \in \mathbb{N}, \quad (1.4)$$

La formula anterior permite notar que la regla de exclusión ya no sigue rigiendo. Existe el empuje entre partículas pero solo cuando dejan de cumplir 1.4.

Los dos procesos anteriores tienen comportamiento similares pero se diferencian en la regla que deben seguir en cada transición. La relación entre ambos se detallara en la siguiente sección donde se detalla un proceso mas complejo sobre otro espacio de estados.

## 1.2. Arreglos Triangulares

En esta sección se definen los patrones de Gelfand-Tsetlin junto a dos dinámicas que son de interés pues tienen una relación con los procesos TASEP y PUSH-TASEP. Además se presenta un teorema para cada dinámica que caracteriza el comportamiento a futuro sobre este proceso al considerar una condición inicial en particular.

Para  $N \in \mathbb{N}$  se definen el conjunto de los patrones de Gelfand-Tsetlin como sigue:

$$\mathbb{GT}_N = \{X^N = (x^1, \dots, x^N), x^n = (x_1^n, \dots, x_n^n) \in \mathbb{Z}^n \mid x^n \prec x^{n+1}, 1 \leq n \leq N-1\}$$

donde

$$x^n \prec x^{n+1} \Leftrightarrow x_1^{n+1} < x_1^n \leq x_2^{n+1} < x_2^n \leq \dots < x_n^n \leq x_{n+1}^{n+1}$$

La siguiente figura ilustra los elementos de este conjunto:

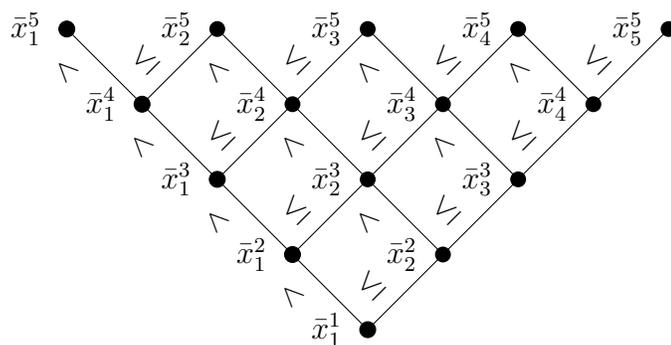


Figura 1.4: Ejemplo de un patrón de Gelfand-Tsetlin para  $\bar{x} \in \mathbb{GT}_5$ .

Como se puede observar en la figura este tipo de elementos tienen un cierto orden en su estructura, por lo tanto, la evolución del proceso debe ir preservando la estructura anterior. Más detalles pueden encontrarse en [2] o [10].

La cadena de Markov que se construye consta de dos procesos Markovianos, una en un nivel fijo y otra en un tiempo fijo. Para describir la dinámica Markoviana en un nivel fijo consideremos el espacio de los caminos no-intersectantes:

$$W_k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{Z}^k \mid x_i < x_{i+1}, \forall i = 1, \dots, k-1\}.$$

Diremos que  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es un paseo aleatorio Bernoulli si es un paseo aleatorio que toma  $Ber(p)$  pasos a la derecha. La matriz de transición asociada es la siguiente:

$$R(x, y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x + 1 \\ 1 - p & \text{si } y = x \end{cases} \quad R^n(x, y) = \binom{n}{y-x} p^{y-x} (1-p)^{n-(y-x)} 1_{0 \leq y-x \leq n}.$$

Además definimos  $Y_n = (Y_n(i))_{i=1, \dots, N}$  un sistema de  $k$  copias independientes del proceso  $Y$ . Diremos que el sistema es no intersectante en  $\llbracket 0, k \rrbracket := \{0, \dots, k\}$  si:

$$\forall m \in \llbracket 0, k \rrbracket, \forall i \neq j \in \{1, \dots, N\} : Y_m(i) \neq Y_m(j)$$

es decir, para todo tiempo en el intervalo  $\llbracket 0, k \rrbracket$  dos paseos no ocupan la misma posición. Dada una configuración  $x \in W_k$  de  $k$  paseos no-intersectantes se busca que este evolucione a un estado  $y \in W_k$  y se mantenga la no-intersección. La matriz de transición resultante es la siguiente:

**Teorema 1.4** ([2]) *La matriz de transición de la cadena de Markov al nivel  $k$  viene dada por:*

$$P_k(x, y) = \frac{\Delta_k(y)}{\Delta_k(x)} \det(R(x_i, y_j))_{i,j=1}^k$$

donde  $R$  es la matriz de transición de un paseo aleatorio Bernoulli,  $x, y \in W_k$  y  $\Delta_k$  es el determinante de Vandermonde.

La demostración de que esta es la matriz de transición que preserva la no intersección de caminos se puede revisar en [2]. Una vez obtenida la evolución en un nivel fijo se busca definir la evolución entre niveles a tiempo fijo. Dado un sistema de  $k$  paseos Bernoulli no-intersectantes  $x$  se busca elegir el nivel inferior  $k-1$  de alguna manera. Al igual que en [2] se elige la siguiente matriz de transición:

**Definición 1.1** ([2]) *Para  $k \in \llbracket 2, N \rrbracket$ , definimos el enlace Markoviano entre los niveles  $k$  y  $k-1$  por:*

$$\Lambda_{k-1}^k(x^k, x^{k-1}) := (k-1)! \frac{\Delta_{k-1}(x^{k-1})}{\Delta_k(x^k)} 1_{[x^{k-1} < x^k]}$$

donde  $x^k \in W_k$  y  $x^{k-1} \in W_{k-1}$

**Observación** Esta elección de matriz de transición permite que la elección del arreglo triangular completo sea uniforme dado el nivel superior  $N$ .

Gracias a estas matrices  $P$  y  $\Lambda$  se logra derivar una igualdad crucial para la definición de la evolución del arreglo triangular completo:

**Teorema 1.5** ([2]) Para  $k \in \llbracket 2, N \rrbracket$  definimos  $\Delta_{k-1}^k := P_k \Lambda_{k-1}^k$ . Entonces:

$$\Delta_{k-1}^k = \Lambda_{k-1}^k P_{k-1}$$

Es decir, se tiene el siguiente diagrama:

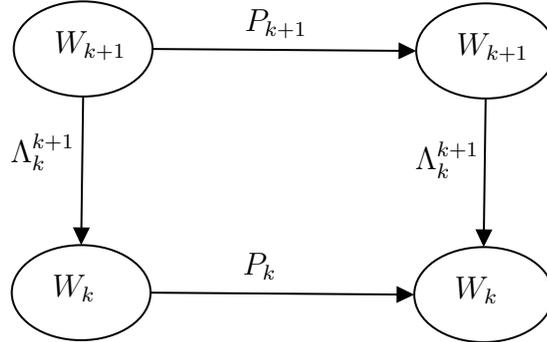


Figura 1.5: Condición de entrelazamiento.

**Observación** Lo anterior permite que en la evolución de cada nivel no importe el orden en que se haga.

Gracias a este teorema y a los elementos definidos previamente es posible definir dinámicas sobre los arreglos triangulares sin problemas.

### 1.2.1. Dinámica Secuencial

Llamaremos dinámica secuencial a la siguiente matriz de transición sobre  $\mathbb{GT}_N$ :

$$P_{\Lambda}^N(X^N(t), X^N(t+1)) = P_1(x^1(t), x^1(t+1)) \prod_{k=2}^N \frac{P_k(x^k(t), x^k(t+1)) \Lambda_{k-1}^k(x^k(t+1), x^{k-1}(t+1))}{\Delta_{k-1}^k(x^k(t), x^{k-1}(t+1))}$$

para  $X^N(t), X^N(t+1) \in \mathbb{GT}_N$ . La siguiente figura muestra el funcionamiento de esta dinámica:

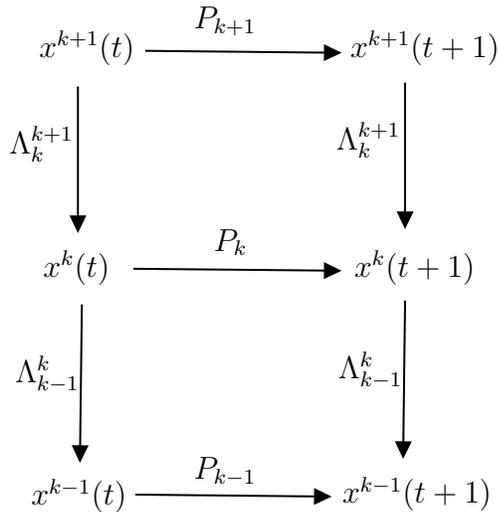


Figura 1.6: Esquema dinámica secuencial.

La evolución del proceso se debe ir realizando nivel por nivel en orden, desde el nivel 1 hasta el nivel  $N$ . Cada partícula intenta saltar al lugar de su derecha, con la restricción de que el espacio este libre o sea empujado por la partícula de su izquierda obligándolo a saltar debido a la condición de entrelazamiento.

El siguiente teorema ilustra la relación de los patrones de Gelfand-Tsetlin con los procesos TASEP y PUSH-TASEP a tiempo discreto con dinámica secuencial:

**Teorema 1.6** ([10]) *Sea  $(X^N(n))_{n \geq 0}$  que evoluciona según  $P_\Lambda^N$ . Entonces:*

1. *La proyección  $\{(x_1^k(n))_{k=1}^N\}_{n \geq 0}$  evoluciona como un proceso TASEP a tiempo discreto con dinámica secuencial.*
2. *La proyección  $\{(x_k^k(n) + k)_{k=1}^N\}_{n \geq 0}$  evoluciona como un proceso PUSH-TASEP a tiempo discreto con dinámica secuencial.*

El detalle de la demostración del teorema anterior se puede consultar en [10]. Lo anterior muestra explícitamente la relación de estos procesos lo que hace surgir una pregunta interesante de si es posible caracterizar la condición inicial sobre el proceso TASEP a través de la elección de la condición inicial sobre los arreglos triangulares. Para responder esta pregunta se enuncia el siguiente teorema que permite caracterizar la evolución del arreglo triangular para una cierta condición inicial.

**Teorema 1.7** ([2],[10]) *Sea  $\mu_N$  una medida de probabilidad sobre  $W_N$ . Consideremos la condición inicial sobre  $\mathbb{G}\mathbb{T}_N$ :*

$$M_N(X^N) = \mu_N(x^N) \prod_{k=2}^N \Lambda_{k-1}^k(x^k, x^{k-1}) \quad (1.5)$$

*Entonces:*

$$\left( M_N(P_\Lambda^N)^{(t)} \right) (\tilde{X}^N) = \left( \mu_N P_N^{(t)} \right) (\tilde{x}^N) \prod_{k=2}^N \Lambda_{k-1}^k(\tilde{x}^k, \tilde{x}^{k-1})$$

**Observación** Gracias a la condición inicial la evolución del arreglo triangular completo es equivalente a evolucionar el nivel  $N$  y luego elegir de manera uniforme el resto del triangulo.

Como consecuencia del teorema anterior, se obtiene una respuesta a la pregunta hecha anteriormente al considerar una condición inicial en particular:

**Teorema 1.8** *Sea  $X$  un proceso TASEP a tiempo discreto con dinámica secuencial y con condición inicial empaquetada 1.1. Para  $N \in \mathbb{N}$  consideremos  $(Y_i)_{i=1}^N$  un sistema de  $N$  paseos aleatorios no-intersectantes con condición inicial  $Y_i(0) = -N - 1 + i$ . Entonces la distribución marginal de  $(X_n(N))_{n \geq 0}$  es la misma que  $(Y_N(n))_{n \geq 0}$ .*

**Observación** La condición empaquetada permite que la evolución de la partícula de mas a la izquierda en ambos procesos (TASEP y marchas sin interseccion) sea la misma.

Lo anterior da una respuesta parcial a la pregunta hecha anteriormente dado que la condición empaquetada permite obtener una distribución particular sobre el proceso TASEP pero esta es determinista. Surge la pregunta si existen mas distribuciones que puedan hacer lo anterior. Esto sera el motivo de estudio en el capitulo 4.

### 1.2.2. Dinámica Paralela

Para esta dinámica se modificara el espacio de estados al siguiente conjunto:

$$\mathbb{S}_N = \{x^1 \in W_1, \dots, x^n \in W_n | \Delta_{k-1}^k(x^{k-1}, x^k) > 0, 0 \leq k \leq N\}.$$

Este espacio es similar al conjunto  $\mathbb{GT}_N$  pero se obtiene un efecto de desfase temporal entre niveles gracias a la condición  $\Delta_{k-1}^k(x^{k-1}, x^k) > 0$ . Para este conjunto de estados se define la probabilidad de transición paralela para la cadena de Markov discreta sobre el conjunto de estados  $\mathbb{S}_N$  como sigue:

$$P_{\Delta}^N(X^N(t), X^N(t+1)) = P_1(x^1(t), x^1(t+1)) \prod_{k=2}^N \frac{P_k(x^k(t), x^k(t+1)) \Lambda_{k-1}^k(x^k(t+1), x^{k-1}(t))}{\Delta_{k-1}^k(x^k(t), x^{k-1}(t))}$$

para  $X^N(t), X^N(t+1) \in \mathbb{S}_N$ . La siguiente figura muestra el funcionamiento de esta dinámica:

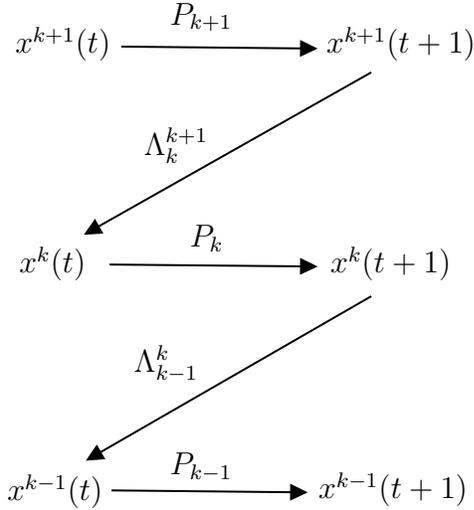


Figura 1.7: Esquema dinámica paralela.

Gracias a la condición de entrelazamiento el orden al momento de evolucionar cada nivel del arreglo triangular no importa, es decir, cada nivel evoluciona por separado.

Para esta dinámica se obtiene un resultado similar al teorema 1.6:

**Teorema 1.9** ([10]) *Sea  $(X^N(n))_{n \geq 0}$  que evoluciona según  $P_{\Delta}^N$ . Entonces:*

1. *La proyección  $\{(x_1^k(n))_{k=1}^N\}_{n \geq 0}$  evoluciona como un proceso TASEP a tiempo discreto con dinámica paralela.*
2. *La proyección  $\{(x_k^k(n) + k)_{k=1}^N\}_{n \geq 0}$  evoluciona como un proceso PUSH-TASEP a tiempo discreto con dinámica paralela.*

Para mas detalle sobre este teorema y el teorema 1.6 consultar [10]. Al igual que en el caso secuencial se tiene que la diagonal de mas a la izquierda y la diagonal de mas a la derecha son procesos TASEP y PUSH-TASEP respectivamente. Lo anterior da indicios la dinámica resultante sobre los procesos TASEP y PUSH-TASEP viene dada según el desfase entre niveles en el arreglo triangular.

A continuación se muestra un teorema semejante al 1.7 pero para esta nueva dinámica:

**Teorema 1.10** ([2],[10]) *Sea  $\mu_N$  una medida de probabilidad sobre  $W_N$ . Consideremos la condición inicial sobre  $\mathbb{GT}_N$ :*

$$M_N(X^N) = \mu_N(x^N) \prod_{k=2}^N \Delta_{k-1}^k(x^k, x^{k-1}) \quad (1.6)$$

Entonces:

$$\left( M_N(P_\Delta^N)^{(t)} \right) (\tilde{X}^N) = \left( \mu_N(P_N)^{(t)} \right) (\tilde{x}^N) \prod_{k=2}^N \Delta_{k-1}^k(\tilde{x}^k, \tilde{x}^{k-1})$$

**Observación** La elección de esta condición inicial que presenta un desfase temporal entre niveles permite caracterizar la evolución del arreglo triangular donde basta evolucionar el nivel  $N$  y luego elegir los niveles inferiores manteniendo el entrelazado y el desfase de tiempo.

Para ambas dinámicas se preservan propiedades similares y la única modificación fue la dependencia de los niveles lo que hace surgir la pregunta de que si al modificar mas la dependencia temporal entre niveles se logran obtener propiedades semejantes a las ya encontradas. El principal problema es que si un nivel depende del nivel inferior en un tiempo mas atrás que el actual provoca que el proceso deje de ser Markoviano. Entonces es necesario definir proceso mas generales que los procesos Markovianos lo cual es el motivo de estudio del siguiente capítulo. Existe una extensión a esta dinámica al considerar una componente temporal que sera de utilidad en capítulos siguientes que se detalla en la siguiente sección.

### 1.3. Extensión Dinámica Paralela

En esta sección se muestra una extensión de los arreglos triangulares en el caso paralelo presentado en [2] y [10] que sera de utilidad en siguientes capítulos. Esta consiste en la existencia de una dependencia temporal sobre las matrices de transición para cada nivel. Primero se enuncia la dependencia que tienen las matrices en función de la variable temporal para luego definir el espacio de estados extendido. Después se explica la dinámica resultante de extender el espacio de estados para, finalmente, enunciar un teorema similar a los teoremas 1.7 y 1.10 pero para este nuevo conjunto de estados.

Consideremos una variable temporal  $\tau$  la cual afecta a la matriz  $P_n, \forall n \geq 1$  pero manteniendo la condición 1.5, es decir:

$$P_n(\tau)\Lambda_{n-1}^n = \Lambda_{n-1}^n P_{n-1}(\tau). \quad (1.7)$$

Esta variable representa que tanto se debe retrasar cada matriz de transición según la posición horizontal en la siguiente figura:

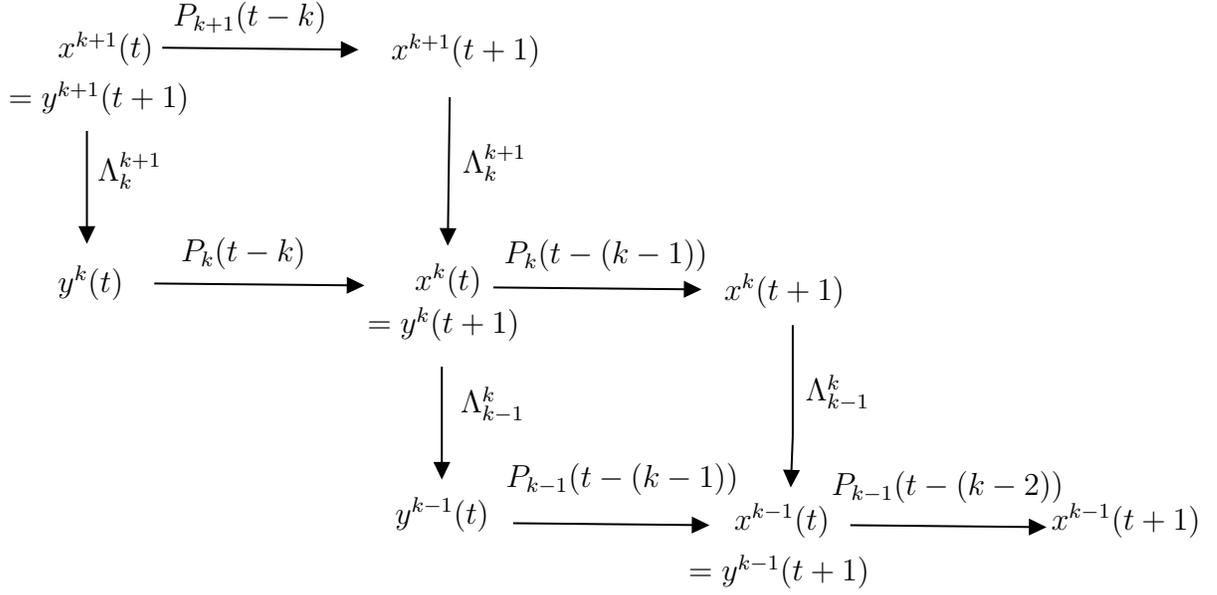


Figura 1.8: Esquema dinámica paralela extendida.

La variable anterior provoca un desfase de una unidad de tiempo entre los niveles.

El nuevo conjunto de estados considera la medida inducida por la acción consecutiva de las matrices  $\Lambda_{n-1}^n$  y  $P_{n-1}$ , es decir, se considera el punto intermedio  $y^{n-1}$  de  $(\Lambda_{n-1}^n \circ P_{n-1})(x^n, x^{n-1})$ . Por lo tanto el espacio de estados extendidos será el siguiente:

$$\mathbb{S}_N^{ext} = \{X \in \mathbb{S}_N, Y \in \mathbb{S}_{N-1} | y^{k-1} \prec x^k, k \in \llbracket 2, N \rrbracket\},$$

donde  $X = (x^1, \dots, x^N)$  e  $Y = (y^1, \dots, y^{N-1})$ . Luego la evolución viene dada como sigue:

- Las partículas  $y$  evolucionan de manera determinista siguiendo la historia pasada de las partículas  $x$ :

$$y^k(t+1) = x^k(t).$$

- Las partículas  $x$  evolucionan según la matriz  $P_{\Delta}^N$ .

A continuación se enuncia un teorema presentado en [10] que caracteriza la evolución del proceso  $(Y, X)$  para una condición inicial en particular:

**Teorema 1.11** ([10]) *Sea  $\mu_N$  una medida de probabilidad en  $W_N$ . Consideremos la siguiente condición inicial:*

$$\mathcal{M}_N^{ext}(Y, X) = \mu_N(x^N) \prod_{k=2}^N \Lambda_{k-1}^k(x^k, y^{k-1}) P_{k-1}(\tau + N - k)(y^{k-1}, x^{k-1}),$$

bajo la dinámica paralela extendida definida anteriormente. Entonces la evolución del proceso

es la siguiente:

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{M}_N^{ext}(P_N^{ext})^{(t)})(Y^t, X^t) \\
&= (\mu_N P_N(\tau) \dots P_N(\tau + t - 1))(x^{t,N}) \prod_{k=2}^N \Lambda_{k-1}^k(x^{t,k}, y^{t,k-1}) P_{k-1}(\tau + t + N - k)(y^{t-1,k-1}, x^{t,k-1})
\end{aligned}$$

**Observación** Al igual que en el teorema 1.10, al considerar una condición inicial que provoque un desfase de tiempo entre niveles, permite que la evolución del proceso solo dependa del nivel superior  $N$  y de preservar este desfase temporal.

Este teorema sera de utilidad en el capitulo 3, pues permite describir la evolución del arreglo triangular bajo esta dinámica extendida la cual tiene aplicaciones en distintos problemas combinatoriales como lo son el embaledado del Diamante Azteca o las lineas no-intersectantes.

# Capítulo 2

## Procesos estocásticos con Memoria

Este capítulo está dedicado a definir los procesos estocásticos con memoria y las dinámicas asociados a extensiones de los procesos vistos en el anterior capítulo. Primeramente se da un contexto general para establecer las bases de los procesos con memorias y detallar la relación que tienen con los procesos de Markov. Luego se aplican los conceptos definidos para detallar las extensiones de los procesos TASEP, PUSH-TASEP y arreglos triangulares a procesos con memoria. Posteriormente se explica la relación entre estos procesos y se demuestra una extensión a los teoremas 1.7 y 1.10 para arreglos triangulares con memoria. Finalmente se da una extensión similar a la dada en el capítulo anterior con un resultado similar al presentando en esa sección.

### 2.1. Procesos estocásticos con memoria.

En esta sección definiremos los procesos estocásticos con memoria, los cuales pueden ser pensados como una generalización de los procesos de Markov pero sobre un espacio más “grande”. Para más detalle sobre este tipo de procesos consultar [11].

Para todo lo que sigue se denotará a  $\mathbb{N} - m$  con  $m \in \mathbb{N}$  al siguiente conjunto

$$\{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1 - m\},$$

y  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N} - m}$  un proceso estocástico a valores en  $I$ .

**Definición 2.1** Diremos que  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N} - m}$  tiene memoria  $m \in \mathbb{N}$  si satisface  $\forall n \geq 1$ :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_{n-m+1} = i_{n-m+1}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_{1-m} = i_{1-m}) \quad (2.1)$$

para todo  $i_{1-m}, \dots, i_{n+1} \in I$  tal que  $\mathbb{P}(X_n = i_n, \dots, X_{1-m} = i_{1-m}) > 0$ . Además diremos que es Homógeno si  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_{n-m+1} = i_{n-m+1}) = \mathbb{P}(X_1 = i_{n+1} | X_0 = i_n, \dots, X_{1-m} = i_{n-m+1}), \quad (2.2)$$

es decir, no depende del tiempo en el que se esté viendo el proceso, sino de la cantidad de estados anteriores dependientes de la memoria del proceso.

**Observación** Notar que este tipo de procesos necesita estar definido en tiempos “negativos” pues la propiedad 2.1 depende de una historia pasada para quedar bien definido. Por lo tanto hay que elegir de alguna manera la historia pasada del proceso para poder describir la evolución de los procesos con memoria sin problemas.

Para todo lo que sigue solo se consideraran procesos con memoria homogéneos.

**Definición 2.2** Sea  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}-m}$  un proceso estocástico a valores en  $I$  con memoria  $m \in \mathbb{N}$ . Denotaremos a  $\mathcal{R}_m$  a la función de transición del proceso  $X$ , es decir:

$$\mathcal{R}_m : \begin{array}{ccc} I^m \times I & \longrightarrow & [0, 1] \\ ((x_{1-m}, \dots, x_0), x_1) & \longrightarrow & \mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0, \dots, X_{1-m} = x_{1-m}) \end{array}$$

la cual describe el comportamiento del proceso. Además definiremos  $\mathcal{M}_m$  a la distribución inicial del proceso  $X$ , es decir:

$$\mathcal{M}_m : \begin{array}{ccc} I^m & \longrightarrow & [0, 1] \\ (x_{1-m}, \dots, x_0) & \longrightarrow & \mathbb{P}(X_{1-m} = x_{1-m}, \dots, X_0 = x_0) \end{array}$$

la cual describe el comportamiento inicial del proceso.

Estas dos funciones permiten entender el funcionamiento de los procesos con memoria, pero surge una pregunta interesante que es si para que un proceso estocástico tenga memoria basta con que la función de transición y la distribución inicial cumplan alguna propiedad algebraica. La respuesta a esta pregunta es la siguiente propiedad:

**Proposición 2.1**  $X$  es un proceso con memoria  $m$  con función de transición  $\mathcal{R}_m$  y distribución inicial  $\mathcal{M}_m$  si y solo si:

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, \dots, X_{1-m} = i_{1-m}) = \mathcal{M}_m(i_{1-m}, \dots, i_0) \prod_{k=1}^n \mathcal{R}_m((i_{k-m}, \dots, i_{k-1}), i_k)$$

DEMOSTRACIÓN. Para la implicancia de izquierda a derecha:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = i_n, \dots, X_{1-m} = i_{1-m}) &= \mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_{1-m} = i_{1-m}) \\ &\quad \mathbb{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_{1-m} = i_{1-m}) \\ &= \mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_{n-m} = i_{n-m}) \\ &\quad \mathbb{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_{1-m} = i_{1-m}) \\ &= \mathcal{R}_m((i_{n-m}, \dots, i_{n-1}), i_n) \mathbb{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_{1-m} = i_{1-m}) \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se uso la propiedad de los procesos con memoria. Repitiendo inductivamente lo anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} &= \left( \prod_{k=1}^n \mathcal{R}_m((i_{k-m}, \dots, i_{k-1}), i_k) \right) \mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{1-m} = i_{1-m}) \\ &= \left( \prod_{k=1}^n \mathcal{R}_m((i_{k-m}, \dots, i_{k-1}), i_k) \right) \mathcal{M}_m(i_{1-m}, \dots, i_0) \end{aligned}$$

que concluye el resultado.

Para la otra implicancia primero se prueba que  $X$  es un proceso con memoria:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_{1-m} = i_{1-m}) &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}, \dots, X_{1-m} = i_{1-m})}{\mathbb{P}(X_n = i_n, \dots, X_{1-m} = i_{1-m})} \\
&= \frac{\left( \prod_{k=1}^{n+1} \mathcal{R}_m((i_{k-m}, \dots, i_{k-1}), i_k) \right) \mathcal{M}_m(i_{1-m}, \dots, i_0)}{\left( \prod_{k=1}^n \mathcal{R}_m((i_{k-m}, \dots, i_{k-1}), i_k) \right) \mathcal{M}_m(i_{1-m}, \dots, i_0)} \\
&= \mathcal{R}_m((i_{n-m+1}, \dots, i_n), i_{n+1})
\end{aligned}$$

en donde, en la segunda igualdad se utilizo la hipótesis. Para probar que  $\mathcal{R}_m$  es la función de transición del proceso basta notar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_{n-m+1} = i_{n-m+1}) \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}, \dots, X_{n-m+1} = i_{n-m+1})}{\mathbb{P}(X_n = i_n, \dots, X_{n-m+1} = i_{n-m+1})} \\
&= \frac{\sum_{i_{1-m}, \dots, i_{n-m} \in I} \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}, \dots, X_{1-m} = i_{1-m})}{\mathbb{P}(X_n = i_n, \dots, X_{n-m+1} = i_{n-m+1})} \\
&= \frac{\sum_{i_{1-m}, \dots, i_{n-m} \in I} \left( \mathcal{M}_m(i_{1-m}, \dots, i_0) \prod_{k=1}^n \mathcal{R}_m((i_{k-m}, \dots, i_{k-1}), i_k) \right)}{\mathbb{P}(X_n = i_n, \dots, X_{n-m+1} = i_{n-m+1})} \\
&= \frac{\sum_{i_{1-m}, \dots, i_{n-m} \in I} \mathbb{P}(X_n = i_n, \dots, X_{1-m} = i_{1-m}) \mathcal{R}_m((i_{n-m+1}, \dots, i_n), i_{n+1})}{\mathbb{P}(X_n = i_n, \dots, X_{n-m+1} = i_{n-m+1})} \\
&= \mathcal{R}_m((i_{n-m+1}, \dots, i_n), i_{n+1}) \frac{\mathbb{P}(X_n = i_n, \dots, X_{n-m+1} = i_{n-m+1})}{\mathbb{P}(X_n = i_n, \dots, X_{n-m+1} = i_{n-m+1})} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

donde se utilizo probabilidades totales sobre los tiempos  $1-m, \dots, n-m+1$ , la hipótesis y que el termino  $\mathcal{R}_m((i_{n-m+1}, \dots, i_n), i_{n+1})$  no depende de la suma por lo que la suma restante da justamente el termino  $\mathbb{P}(X_n = i_n, \dots, X_{n-m+1} = i_{n-m+1})$ .

Para derivar la distribución inicial del proceso  $X$  basta rehacer lo anterior pero aplicando probabilidades totales solo sobre el valor del primer paso:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{1-m} = i_{1-m}) &= \sum_{i_1 \in I} \mathbb{P}(X_1 = i_1, \dots, X_{1-m} = i_{1-m}) \\
&= \sum_{i_1 \in I} \mathcal{M}_m(i_{1-m}, \dots, i_0) \mathcal{R}_m((i_{1-m}, \dots, i_0), i_1) \\
&= \mathcal{M}_m(i_{1-m}, \dots, i_0)
\end{aligned}$$

Con lo que se concluye el resultado. □

Estos procesos cumplen propiedades bastante similares a las que tienen los procesos de Markov, en particular un proceso de Markov cumple con ser un proceso con memoria 1, por lo tanto, podemos llamarlos una generalización de los procesos de Markov. Más aún, existe una relación entre ambos tipos de procesos la cual se detalla a continuación:

**Proposición 2.2**  *$X$  es un proceso con memoria  $m \in \mathbb{N}$  si y solo si el proceso  $Y_n = (X_n, \dots, X_{n-m+2}, X_{n-m+1}), \forall n \in \mathbb{N}$  es una cadena de Markov Homogénea sobre  $I^m$ .*

DEMOSTRACIÓN. Para la implicancia de izquierda a derecha consideremos  $n \in \mathbb{N}$  y  $i_k = (j_1^k, \dots, j_m^k) \in I^m, \forall k = 0, \dots, n$  tal que  $\mathbb{P}(Y_n = i_n, \dots, Y_0 = i_0) > 0$ . Primero notemos que el evento  $\{Y_n = i_n, \dots, Y_0 = i_0\}$  nos da bastante información, pues las igualdades consecutivas con respecto a  $X$  provocan que:

$$j_\ell^k = j_{\ell+1}^{k+1}, \forall \ell \leq k.$$

Por lo tanto se tiene la siguiente igualdad de eventos:

$$\{Y_n = i_n, \dots, Y_0 = i_0\} = \{X_n = j_1^n, \dots, X_{-(m-1)} = j_1^{-(m-1)}\}. \quad (2.3)$$

Luego para probar que el proceso  $Y_n$  es una cadena de Markov, es necesario probar que:

$$\mathbb{P}(Y_n = i_n | Y_{n-1} = i_{n-1}, \dots, Y_0 = i_0) = \mathbb{P}(Y_n = i_n | Y_{n-1} = i_{n-1}),$$

pero gracias a la igualdad 2.3 podemos reemplazar el lado izquierdo de la igualdad por lo siguiente:

$$\mathbb{P}(Y_n = i_n | Y_{n-1} = i_{n-1}, \dots, Y_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_n = j_1^n | X_{n-1} = j_1^{n-1}, \dots, X_{1-m} = j_1^{1-m}),$$

en donde, como  $X$  es un proceso con memoria, solo son relevante los últimos  $m$  pasos:

$$\mathbb{P}(X_n = j_1^n | X_{n-1} = j_1^{n-1}, \dots, X_{1-m} = j_1^{1-m}) = \mathbb{P}(X_n = j_m^n | X_{n-1} = j_1^{n-1}, \dots, X_{n-m} = j_1^{n-m}),$$

nuevamente gracias a la igualdad 2.3 se obtiene:

$$\mathbb{P}(X_n = j_m^n | X_{n-1} = j_m^{n-1}, \dots, X_{n-m} = j_m^{n-m}) = \mathbb{P}(Y_n = i_n | Y_{n-1} = i_{n-1})$$

que es justamente lo que se quería probar. Para ver que es homogénea basta notar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_n = i_n | Y_{n-1} = i_{n-1}) &= \mathbb{P}(X_n = j_m^n | X_{n-1} = j_m^{n-1}, \dots, X_{n-m} = j_m^{n-m}) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = j_m^n | X_0 = j_m^{n-1}, \dots, X_{1-m} = j_m^{n-m}) \\ &= \mathbb{P}(Y_1 = i_n | Y_0 = i_{n-1}) \end{aligned}$$

Para la otra implicancia consideremos  $n \in \mathbb{N}$  y  $(j_k \in I, \forall k = 1 - m, \dots, n)$  tal que  $\mathbb{P}(X_n = j_n, \dots, X_{1-m} = j_{1-m}) > 0$ . Basta volver a utilizar la igualdad 2.3. Para ello si definimos los siguientes elementos:

$$i_k = (j_k, \dots, j_{k-m+1}), \forall k = 0, \dots, n,$$

entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = j_{n+1} | X_k = j_k, \forall k = 1 - m, \dots, n) &= \mathbb{P}(Y_{n+1} = i_{n+1} | Y_k = i_k, \forall k = 0, \dots, n) \\ &= \mathbb{P}(Y_{n+1} = i_{n+1} | Y_n = i_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = j_{n+1} | X_k = j_k, \forall k = n + 1 - m, \dots, n)\end{aligned}$$

Con lo que se concluye.  $\square$

La proposición anterior nos dice que si denotamos a  $P_Y$  como la matriz de transición del proceso  $Y$ , entonces:

$$P_Y((j_{-(m-1)}, \dots, j_0), (j_{-(m-2)}, \dots, j_1)) = \mathcal{R}_m((j_{-(m-1)}, \dots, j_0), j_1),$$

lo que nos dice que los procesos con memoria son, en cierta forma, procesos de Markov sobre espacios mas grandes. Gracias a esta igualdad es posible definir potencias de la función de transición de procesos con memoria:

**Proposición 2.3** *Sea  $X$  un proceso con memoria  $m$  sobre  $I$  con condición inicial  $(X_0, \dots, X_{1-m}) = (j_0, \dots, j_{1-m})$ . Para  $k \in \mathbb{N}$  denotaremos a  $\mathcal{R}^{(k)}$  a la función de transición en  $k$  pasos definida como sigue:*

$$\mathcal{R}_m^{(k)}((j_{1-m}, \dots, j_0), j_k) = \mathbb{P}(X_k = j_k | X_0 = j_0, \dots, X_{1-m} = j_{1-m}).$$

Entonces:

$$\mathcal{R}_m^{(k)}((j_{1-m}, \dots, j_0), j_k) = \sum_{j_1, \dots, j_{k-1} \in I} \prod_{\ell=1}^k \mathcal{R}_m((j_{\ell-m}, \dots, j_{\ell-1}), j_\ell)$$

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar probabilidades totales con respecto a los tiempos  $1, \dots, k-1$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_k = j_k | X_0 = j_0, \dots, X_{1-m} = j_{1-m}) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_{k-1} \in I} \prod_{\ell=1}^k \mathbb{P}(X_\ell = j_\ell | X_{\ell-1} = j_{\ell-1}, \dots, X_{1-m} = j_{1-m}) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_{k-1} \in I} \prod_{\ell=1}^k \mathbb{P}(X_\ell = j_\ell | X_{\ell-1} = j_{\ell-1}, \dots, X_{\ell-m} = j_{\ell-m}) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_{k-1} \in I} \prod_{\ell=1}^k \mathcal{R}_m((j_{\ell-m}, \dots, j_{\ell-1}), j_\ell)\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se utilizo la igualdad 2.1.  $\square$

Con esta ultima propiedad tenemos todo lo necesario para poder trabajar procesos con memoria en interacciones de partículas.

## 2.2. Interacción de partículas con memoria

En esta sección se definirán extensiones de los procesos TASEP, PUSH-TASEP y los arreglos triangulares pero ahora al considerar una dinámica con memoria. Además para cada

uno se definirán sus elementos como proceso con memoria y sus equivalentes Markovianos junto con teoremas que caracterizan la evolución de estos.

### 2.2.1. Orugas en $\mathbb{Z}$

Sea  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}^m$ . Diremos que  $x$  es una oruga de tamaño  $m \geq 1$  si:

$$\forall i \in \{1, \dots, m-1\}, x_i - x_{i+1} \in \{0, 1\}.$$

Además se denotara al espacio de las orugas de tamaño  $m \geq 1$  como  $\mathcal{K}_m^{\rightarrow}$ , es decir:

$$\mathcal{K}_m^{\rightarrow} = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}^m | x_i - x_{i+1} \in \{0, 1\}, \forall i \in \{1, \dots, m-1\}\}$$

A continuación se muestra un ejemplo de los posibles estados de una oruga cuando se considera  $m = 3$ :

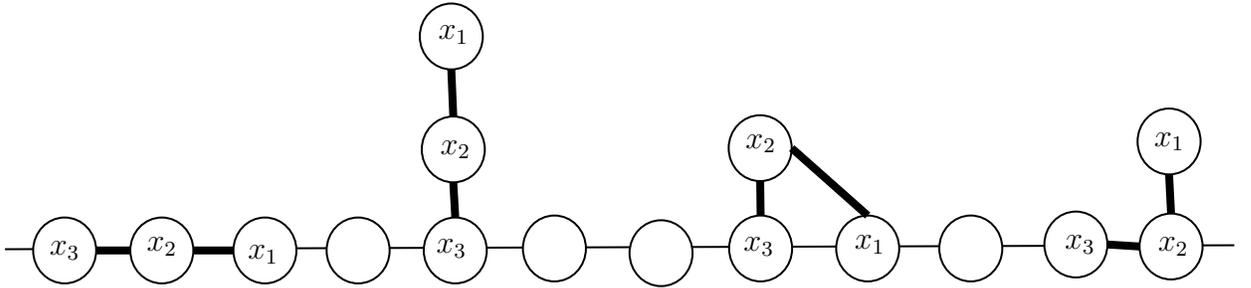


Figura 2.1: Ejemplo posibles estados de la oruga para  $m = 3$ .

Para una oruga  $x = (x_1, \dots, x_m)$  denotaremos a  $x_1$  y  $x_m$  a la *cabeza* y *cola* de la oruga  $x$  respectivamente. El sistema de interacción de  $N$  orugas de tamaño  $m$  tomara valores en el siguiente espacio:

$$W_{N,m} := \{X = (X(1), \dots, X(N)) \in (\mathcal{K}_m^{\rightarrow})^N | X^1(i+1) \leq X^N(i)\},$$

es decir, es un sistema donde dos orugas no se intersectan. Para mayor detalle el lector puede revisar [1]. Una vez definido el espacio de estados de la extensión de las partículas en  $\mathbb{Z}$  se procede a definir la extensión de las dinámicas sobre estas orugas.

#### 2.2.1.1. TASEP con memoria

La evolución de la oruga de tiempo  $n$  a  $n+1$  ocurre de la siguiente manera:

- La cabeza de cada oruga  $X^1(i)$  intenta saltar al lugar de su derecha con probabilidad  $p$  y se queda en el lugar con probabilidad  $1-p$  con la restricción de que el lugar al que intente saltar este libre.
- El resto de la oruga actualiza su posición siguiendo la historia de la partícula de su derecha, es decir:

$$X_{n+1}^j(i) = X_n^{j-1}(i).$$

Esta dinámica se puede entender como que la cabeza de cada oruga intenta moverse hacia la derecha pero puede ser bloqueada por la cola de la siguiente oruga. De esta manera se

logra definir una cadena de Markov sobre el sistema de interacción de  $N$  orugas de tamaño  $m$ . Gracias al teorema 2.2, al considerar el proceso marginal de las cabezas de cada oruga  $X^{head} = (X^1(i))_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket}$  se obtiene un proceso con memoria  $m - 1$ . Lo anterior es consecuencia de que las partículas en cada oruga que no son la cabeza van siguiendo la historia pasada de la partícula de su derecha, por lo tanto la cabeza de de cada oruga ve la cabeza de la siguiente oruga con un desfase de  $m - 1$  tiempos. Más aún el proceso  $X^{head}$  debe seguir la siguiente regla:

$$X_{n+1}^1(i) = \min\{X_n^1(i) + \xi(n+1, i), X_{n+1-m}^1(i-1) - 1\}, \quad (2.4)$$

donde  $\xi(n+1, i)$  son variables aleatorias con ley  $Ber[p]$  independientes entre si. Este proceso marginal es el que se denotara como TASEP con memoria.

### 2.2.1.2. PUSH-TASEP con memoria

La evolución de las orugas al considerar una restricción de empuje es la siguiente:

- La cabeza de cada oruga  $X^1(i)$  intenta saltar al lugar de su derecha con probabilidad  $p$  empujando, en caso de encontrar alguna partícula, y se queda en el lugar con probabilidad  $1 - p$ , a menos que sea empujada por el resto del cuerpo de la oruga.
- El resto de la oruga actualiza su posición siguiendo la historia de la partícula de su derecha, es decir:

$$X_{t+1}^j(i) = X_t^{j-1}(i).$$

Cada oruga puede intentar saltar al lugar de su derecha pero puede ser empujada por la oruga de su izquierda. Lo anterior provoca que al considerar el proceso marginal de las cabezas de cada oruga  $X^{head} = (X^1(i))_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ , este es un proceso con memoria  $m - 1$ , el cual se denotara como PUSH-TASEP con memoria. El proceso debe seguir la siguiente regla:

$$X_{n+1}^1(i) = \max\{X_n^1(i) + \xi(n+1, i), X_{n+1-m}^1(i-1) + 1\}. \quad (2.5)$$

El desfase temporal provoca que la regla de exclusión ya no siga siendo valida y, por lo tanto, el proceso debe respetar la siguiente restricción:

$$X_{n+1}^1(i) \leq X_{n+1}^1(i+1) + (m-1).$$

El empuje es provocado cuando alguna partícula deje de cumplir la desigualdad anterior.

Tanto para el proceso TASEP como para el proceso PUSH-TASEP existen formulas que caractericen la evolución del proceso para ciertas condiciones iniciales las cuales se pueden consultar en [1]. Dado que existen estas dinámicas con memoria para los procesos TASEP y PUSH-TASEP, surge la pregunta si uno puede definir dinámicas con memoria sobre el arreglo triangular que como proceso marginal tengan a estos procesos con estas dinámicas respectivamente. La siguiente subsección responde esta pregunta.

## 2.2.2. Arreglos triangulares con memoria

Primero se definirá la notación necesaria para poder trabajar mas cómodamente los arreglos triangulares con memoria. Para  $m, N \in \mathbb{N}$  y  $k \in \llbracket 2, N \rrbracket$  se define la siguiente matriz de

transición:

$$\Delta_{k-1}^{k,m}(x, y) = \left( \Lambda_{k-1}^k P_{k-1}^{(m)} \right) (x, y), \quad \forall (x, y) \in W_k \times W_{k-1}$$

**Observación** Notemos que los elementos en la composición se pueden colocar en cualquier orden, esto gracias a la condición de entrelazamiento, con el detalle de que las matrices que queden antes de la matriz  $\Lambda_{k-1}^k$  se cambian por  $P_k$ .

La matriz anterior es una matriz estocástica pues es una aplicación consecutiva de matrices estocásticas. Además el efecto que provoca en los niveles  $k$  y  $k-1$  es un desfase de  $m$  tiempos. Para  $m, N \in \mathbb{N}$  se define el espacio de los arreglos triangulares con memoria  $m$  como sigue:

$$\mathbb{M}_N^m = \{(x^1, \dots, x^N) \in W_1 \times \dots \times W_N \mid \Delta_{k-1}^{k,m}(x^k, x^{k-1}) > 0, 2 \leq k \leq N\}$$

Estos conjuntos cumplen una propiedad interesante la cual se enuncia a continuación:

**Proposición 2.4** Para todo  $m \in \mathbb{N} : \mathbb{M}_N^m \subset \mathbb{M}_N^{m+1}$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $X \in \mathbb{M}_N^m$  y sea  $k \in \mathbb{N}$ , entonces:

$$\exists y_1, \dots, y_m \in W_{k-1} : \Lambda_{k-1}^k(x^k, y_1) P_{k-1}(y_1, y_2) \dots P_{k-1}(y_m, x^{k-1}) > 0$$

Notemos que  $P_{k-1}(x^{k-1}, x^{k-1}) > 0$ , pues todas las marchas tienen probabilidad positiva de quedarse en el lugar. Por lo tanto al considerar  $y_{m+1} = x^{k-1}$  tendremos que:

$$\exists y_1, \dots, y_m, y_{m+1} \in W_{k-1} : \Lambda_{k-1}^k(x^k, y_1) P_{k-1}(y_1, y_2) \dots P_{k-1}(y_m, y_{m+1}) P_{k-1}(y_{m+1}, x^{k-1}) > 0$$

y, por lo tanto  $\Delta_{k-1}^{k,m+1}(x^k, x^{k-1}) > 0$ . □

**Observación** La igualdad no es alcanzada pues al considerar el elemento  $X$  definido como sigue:

$$x^k = \begin{cases} (-k, \dots, -1) & \text{si } k \neq 1 \\ (m) & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

se nota que como el nivel 2 corresponde a la condición empaquetada, entonces el único estado que alcanza al entrelazar con el nivel 1 es el estado  $(-1)$  (i.e.  $\Lambda_1^2((-2, -1), (-1)) = 1$ ) el cual para llegar al estado  $(m)$  debe de saltar  $m+1$  veces obligatoriamente lo cual lo imposibilita de llegar solo saltando  $m$  veces. Con esto es claro que  $X \in \mathbb{M}_N^{m+1}$  pero  $X \notin \mathbb{M}_N^m$ .

**Observación** Esta propiedad nos dice que a menor memoria hay menor cantidad de elementos, es decir, una memoria mas grande nos da procesos mas generales.

Con estos elementos definidos es posible definir la dinámica con memoria sobre los arreglos triangulares. Llamaremos dinámica con memoria  $m$  sobre los arreglos triangulares a la

siguiente función de transición:

$$P_{\Delta}^{N,m}(X^N(t+1)|X^N(t-i), i=0, \dots, m-1) = P_1(x^1(t), x^1(t+1)) \prod_{k=2}^N \frac{P_k(x^k(t), x^k(t+1)) \Lambda_{k-1}^k(x^k(t+1), x^{k-1}(t+1-m))}{\Delta_{k-1}^k(x^k(t), x^{k-1}(t+1-m))}$$

en donde,  $X^N(i) \in \mathbb{M}_N^m, \forall i \in \{t-m+1, \dots, t+1\}$ . La siguiente figura muestra el funcionamiento de esta dinámica:

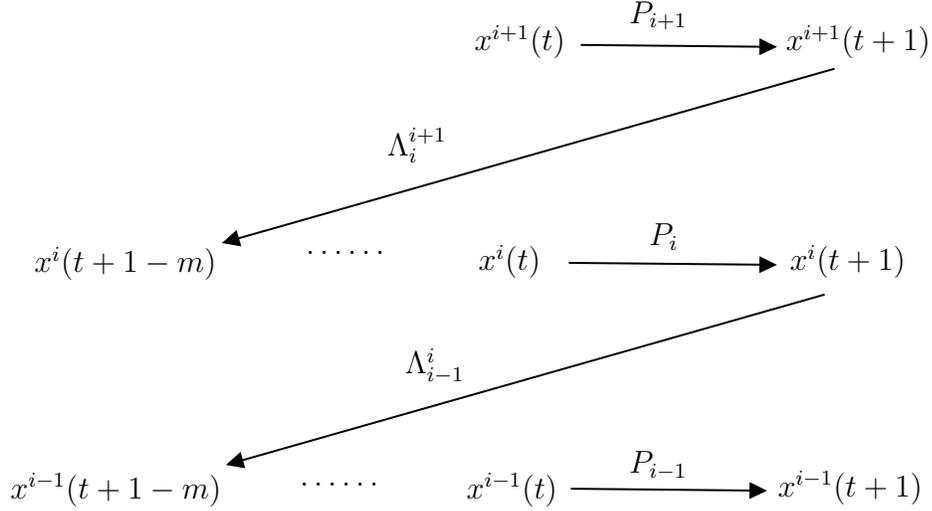


Figura 2.2: Esquema dinámico con memoria.

Al igual que en las dinámicas definidas en el capítulo 1, el comportamiento de esta dinámica se puede entender como que cada nivel sigue la historia del nivel inferior pero a un tiempo de desfase  $m$ .

Al igual que en el caso secuencial y paralelo se encuentra una relación entre los arreglos triangulares con memoria y los procesos TASEP y PUSH-TASEP con memoria:

**Teorema 2.1** Sea  $(X^N(n))_{n \geq 0}$  que evoluciona según  $P_{\Delta}^{N,m}$ . Entonces:

1. La proyección  $\{(x_1^k(n))_{k=1}^N\}_{n \geq 0}$  evoluciona como las cabezas de las orugas en el TASEP con memoria  $m$  a tiempo discreto.
2. La proyección  $\{(x_k^k(n)+k)_{k=1}^N\}_{n \geq 0}$  evoluciona como las cabezas de las orugas en el PUSH-TASEP con memoria  $m$  a tiempo discreto.

DEMOSTRACIÓN. Para la proyección  $\{(x_1^k(n))_{k=1}^N\}_{n \geq 0}$  no existen partículas que las empujen por lo tanto solo se restringen a respetar la restricción siguiente:

$$x_1^{k+1}(n) < x_1^k(n), \quad \forall k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \forall n \in \mathbb{N},$$

en donde, cada partícula  $x_1^{k+1}(n)$  a tiempo  $n$  ve la partícula de su derecha  $x_1^k$  a tiempo  $n-m$  debido a que el nivel  $k+1$  debe de estar entrelazado con el nivel  $k$  con desfase de tiempo  $m$  (i.e.  $\Lambda_k^{k+1}(x^{k+1}(n+1), x^k(n+1-m)) > 0$ ). Entonces por lo probado en los teoremas 1.6 y

1.10, la evolución de la partícula  $x_1^{k+1}$  sigue la siguiente regla:

$$x_1^k(n+1) = \min\{x_1^k(n) + \xi(n+1, k), x_1^{k-1}(n+1-m) - 1\}$$

donde  $\xi(n+1, k)$  es una variable aleatoria Bernoulli de parámetro  $p$ . Por lo tanto el proceso  $\{(x_1^k(n))_{k=1}^N\}_{n \geq 0}$  es un TASEP con memoria  $m$ .

Para la proyección  $\{(x_k^k(n) + k)_{k=1}^N\}_{n \geq 0}$  no existen partículas que las bloqueen por lo tanto solo se restringen a respetar la siguiente restricción:

$$x_k^k(n) + k \leq x_{k+1}^{k+1}(n) + k + 1 + (m-1), \quad \forall k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \forall n \in \mathbb{N},$$

en donde, cada partícula  $x_1^{k+1}$  a tiempo  $n$  ve la partícula de su derecha  $x_1^k$  a tiempo  $n-m$  debido a que el nivel  $k+1$  debe de estar entrelazado con el nivel  $k$  con desfase de tiempo  $m$  (i.e.  $\Lambda_k^{k+1}(x^{k+1}(n+1), x^k(n+1-m)) > 0$ ). Al igual que antes, la evolución de la partícula  $x_1^{k+1}$  sigue la siguiente regla:

$$x_k^k(n+1) + k = \max\{x_k^k(n) + k + \xi(n+1, k), x_{k-1}^{k-1}(n+1-m) + (k-1) + 1\}$$

donde  $\xi(n+1, k)$  es una variable aleatoria Bernoulli de parámetro  $p$ . Por lo tanto el proceso  $\{(x_1^k(n) + k)_{k=1}^N\}_{n \geq 0}$  es un PUSH-TASEP con memoria  $m$ .  $\square$

**Observación** Al igual que en los teoremas 1.6 y 1.10, la diagonal de la izquierda y de la derecha son procesos TASEP y PUSH-TASEP respectivamente pero que preservan el desfase temporal del arreglo triangular.

A continuación se enuncia el teorema principal de esta sección que describe el comportamiento de los procesos con memoria sobre los arreglos triangulares al considerar una condición inicial en particular:

**Teorema 2.2** *Sea  $\mu_N$  una medida de probabilidad sobre  $W_N$ . Consideremos la condición inicial sobre  $\underbrace{\mathbb{M}_N^m \times \dots \times \mathbb{M}_N^m}_{m \text{ veces}}$ :*

$$\mathcal{M}_N^m(X^{1-m}, \dots, X^0) = \mu_N(x^{0,N}) \left[ \prod_{k=2}^N \Delta_{k-1}^k(x^{0,k}, x^{1-m, k-1}) \left( \prod_{j=1}^{m-1} P_{k-1}(x^{-j, k-1}, x^{1-j, k-1}) \right) \right],$$

donde  $X^s = (x^{s,1}, \dots, x^{s,N}), \forall s \in \llbracket 1-m, 0 \rrbracket$ . Entonces:

$$\left( \mathcal{M}_N^m \left( P_{\Delta}^{N,m} \right)^{(t)} \right) (X^t) = \left( \mu_N P_N^{(t)} \right) (x^{t,N}) \prod_{k=2}^N \Delta_{k-1}^{k,m} (x^{t,k}, x^{t, k-1}),$$

donde  $X^t = (x^{t,1}, \dots, x^{t,N}) \in \mathbb{M}_N^m$ .

DEMOSTRACIÓN. Primero notemos que la función de transición  $P_{\Delta}^{N,m}$  la podemos reescribir

como sigue:

$$\begin{aligned}
P_{\Delta}^{N,m}(X^r|X^{r-i}, i = 1, \dots, m) &= P_1(x^{r-1,1}, x^{r,1}) \prod_{\ell=2}^N \frac{P_{\ell}(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \Lambda_{\ell-1}^{\ell}(x^{r,\ell}, x^{r-m,\ell-1})}{\Delta_{\ell-1}^{\ell}(x^{r-1,\ell}, x^{r-m+1,\ell-1})} \\
&= P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \prod_{\ell=1}^{N-1} \frac{P_{\ell}(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \Lambda_{\ell}^{\ell+1}(x^{r,\ell+1}, x^{r-m,\ell})}{\Delta_{\ell}^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell})}
\end{aligned}$$

Luego utilizando esta expresión para  $P_{\Delta}^{N,m}$  y la definición de  $\mathcal{M}_N^m(P_{\Delta}^{N,m})^{(t)}$ :

$$\begin{aligned}
&(M_N^m(P_{\Delta}^{N,m})^{(t)})(X^t) \\
&= \sum_{X^{1-m} \in \mathbb{M}_N^m} \cdots \sum_{X^{t-1} \in \mathbb{M}_N^m} \left( M_N^m(X^{1-m}, \dots, X^0) \prod_{r=1}^t P_{\Delta}^{N,m}(X^r|X^{r-i}, 1 \leq i \leq m) \right) \\
&= \sum_{X^{1-m} \in \mathbb{M}_N^m} \cdots \sum_{X^{t-1} \in \mathbb{M}_N^m} \mu_N(x^{0,N}) \left[ \prod_{k=2}^N \Delta_{k-1}^k(x^{0,k}, x^{-m+1,k-1}) \left( \prod_{j=1}^{m-1} P_{k-1}(x^{-j,k-1}, x^{-j+1,k-1}) \right) \right] \\
&\quad \prod_{r=1}^t \left( P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \prod_{\ell=1}^{N-1} \frac{P_{\ell}(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \Lambda_{\ell}^{\ell+1}(x^{r,\ell+1}, x^{r-m,\ell})}{\Delta_{\ell}^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell})} \right),
\end{aligned}$$

en donde, para ir formando los términos respectivos, se procede a juntar los términos asociados al nivel  $N$  desde el tiempo 1 al tiempo  $t$ :

$$\begin{aligned}
&\sum_{X^{1-m} \in \mathbb{M}_N^m} \cdots \sum_{X^{t-1} \in \mathbb{M}_N^m} \mu_N(x^{0,N}) \left[ \prod_{k=2}^N \Delta_{k-1}^k(x^{0,k}, x^{-m+1,k-1}) \left( \prod_{j=1}^{m-1} P_{k-1}(x^{-j,k-1}, x^{-j+1,k-1}) \right) \right] \\
&\quad \prod_{r=1}^t \left( P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \prod_{\ell=1}^{N-1} \frac{P_{\ell}(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \Lambda_{\ell}^{\ell+1}(x^{r,\ell+1}, x^{r-m,\ell})}{\Delta_{\ell}^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell})} \right) \\
&= \sum_{X^{1-m} \in \mathbb{M}_N^m} \cdots \sum_{X^{t-1} \in \mathbb{M}_N^m} \left( \mu_N(x^{0,N}) \prod_{r=1}^t P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \right) \left( \prod_{r=1}^t \prod_{\ell=1}^{N-1} \left( \frac{P_{\ell}(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \Lambda_{\ell}^{\ell+1}(x^{r,\ell+1}, x^{r-m,\ell})}{\Delta_{\ell}^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell})} \right) \right) \\
&\quad \left[ \prod_{k=2}^N \Delta_{k-1}^k(x^{0,k}, x^{-m+1,k-1}) \left( \prod_{j=1}^{m-1} P_{k-1}(x^{-j,k-1}, x^{-j+1,k-1}) \right) \right]
\end{aligned}$$

Intercambiando el orden de la pitatoria dependiente de  $r$  con la pitatoria de  $\ell$  y haciendo un cambio de índice en la penúltima pitatoria se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\sum_{X^{1-m} \in \mathbb{M}_N^m} \cdots \sum_{X^{t-1} \in \mathbb{M}_N^m} \left( \mu_N(x^{0,N}) \prod_{r=1}^t P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \right) \left( \prod_{r=1}^t \prod_{\ell=1}^{N-1} \left( \frac{P_{\ell}(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \Lambda_{\ell}^{\ell+1}(x^{r,\ell+1}, x^{r-m,\ell})}{\Delta_{\ell}^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell})} \right) \right) \\
&\quad \left[ \prod_{k=2}^N \Delta_{k-1}^k(x^{0,k}, x^{-m+1,k-1}) \left( \prod_{j=1}^{m-1} P_{k-1}(x^{-j,k-1}, x^{-j+1,k-1}) \right) \right] \\
&= \sum_{X^{1-m} \in \mathbb{M}_N^m} \cdots \sum_{X^{t-1} \in \mathbb{M}_N^m} \left( \mu_N(x^{0,N}) \prod_{r=1}^t P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \right) \left( \prod_{\ell=1}^{N-1} \prod_{r=1}^t \left( \frac{P_{\ell}(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \Lambda_{\ell}^{\ell+1}(x^{r,\ell+1}, x^{r-m,\ell})}{\Delta_{\ell}^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell})} \right) \right) \\
&\quad \left[ \prod_{k=1}^{N-1} \Delta_k^{k+1}(x^{0,k+1}, x^{-m+1,k}) \left( \prod_{j=1}^{m-1} P_k(x^{-j,k}, x^{-j+1,k}) \right) \right]
\end{aligned}$$

Juntando la pitatoria con respecto a  $\ell$  dentro de la misma pitatoria con respecto a  $k$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{X^{1-m} \in \mathbb{M}_N^m} \cdots \sum_{X^{t-1} \in \mathbb{M}_N^m} \left( \mu_N(x^{0,N}) \prod_{r=1}^t P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \right) \left( \prod_{\ell=1}^{N-1} \prod_{r=1}^t \left( \frac{P_\ell(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{r,\ell+1}, x^{r-m,\ell})}{\Delta_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell})} \right) \right) \\
& \quad \left[ \prod_{k=1}^{N-1} \Delta_k^{k+1}(x^{0,k+1}, x^{-m+1,k}) \left( \prod_{j=1}^{m-1} P_k(x^{-j,k}, x^{-j+1,k}) \right) \right] \\
&= \sum_{X^{1-m} \in \mathbb{M}_N^m} \cdots \sum_{X^{t-1} \in \mathbb{M}_N^m} \left( \mu_N(x^{0,N}) \prod_{r=1}^t P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \right) \prod_{\ell=1}^{N-1} \left[ \left( \prod_{r=1}^t \frac{P_\ell(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{r,\ell+1}, x^{r-m,\ell})}{\Delta_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell})} \right) \right. \\
& \quad \left. \Delta_\ell^{\ell+1}(x^{0,\ell+1}, x^{-m+1,\ell}) \left( \prod_{j=1}^{m-1} P_\ell(x^{-j,\ell}, x^{-j+1,\ell}) \right) \right]
\end{aligned}$$

En la pitatoria con respecto a  $\ell$  se pueden cancelar y agrupar términos al distribuir la pitatoria con respecto a  $r$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{X^{1-m} \in \mathbb{M}_N^m} \cdots \sum_{X^{t-1} \in \mathbb{M}_N^m} \left( \mu_N(x^{0,N}) \prod_{r=1}^t P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \right) \prod_{\ell=1}^{N-1} \left[ \left( \prod_{r=1}^t \frac{P_\ell(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{r,\ell+1}, x^{r-m,\ell})}{\Delta_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell})} \right) \right. \\
& \quad \left. \Delta_\ell^{\ell+1}(x^{0,\ell+1}, x^{-m+1,\ell}) \left( \prod_{j=1}^{m-1} P_\ell(x^{-j,\ell}, x^{-j+1,\ell}) \right) \right] \\
&= \sum_{X^{1-m} \in \mathbb{M}_N^m} \cdots \sum_{X^{t-1} \in \mathbb{M}_N^m} \left( \mu_N(x^{0,N}) \prod_{r=1}^t P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \right) \\
& \quad \prod_{\ell=1}^{N-1} \left( \frac{\left( \prod_{r=-m+2}^t P_\ell(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \right) \left( \prod_{r=1}^t \Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{r,\ell+1}, x^{r-m,\ell}) \right)}{\left( \prod_{r=2}^t \Delta_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell}) \right)} \right)
\end{aligned}$$

Ahora quitando términos de la primera pitatoria con respecto a  $r$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{X^{1-m} \in \mathbb{M}_N^m} \cdots \sum_{X^{t-1} \in \mathbb{M}_N^m} \left( \mu_N(x^{0,N}) \prod_{r=1}^t P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \right) \\
& \quad \prod_{\ell=1}^{N-1} \left( \frac{\left( \prod_{r=-m+2}^t P_\ell(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \right) \left( \prod_{r=1}^t \Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{r,\ell+1}, x^{r-m,\ell}) \right)}{\left( \prod_{r=2}^t \Delta_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell}) \right)} \right) \\
&= \sum_{X^{1-m} \in \mathbb{M}_N^m} \cdots \sum_{X^{t-1} \in \mathbb{M}_N^m} \left( \mu_N(x^{0,N}) \prod_{r=1}^t P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \right) \\
& \quad \prod_{\ell=1}^{N-1} \left( \frac{\left( \prod_{r=t-m+1}^t P_\ell(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \right) \left( \prod_{r=2}^t P_\ell(x^{r-m-1,\ell}, x^{r-m,\ell}) \right) \left( \prod_{r=1}^t \Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{r,\ell+1}, x^{r-m,\ell}) \right)}{\left( \prod_{r=2}^t \Delta_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell}) \right)} \right)
\end{aligned}$$

Luego en la pitatoria con los  $\Lambda$  se puede extraer el término  $t$ -ésimo y agrupar términos:

$$\begin{aligned}
& \sum_{X^{1-m} \in \mathbb{M}_N^m} \cdots \sum_{X^{t-1} \in \mathbb{M}_N^m} \left( \mu_N(x^{0,N}) \prod_{r=1}^t P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \right) \\
& \quad \prod_{\ell=1}^{N-1} \left( \frac{\left( \prod_{r=t-m+1}^t P_\ell(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \right) \left( \prod_{r=2}^t P_\ell(x^{r-m-1,\ell}, x^{r-m,\ell}) \right) \left( \prod_{r=1}^t \Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{r,\ell+1}, x^{r-m,\ell}) \right)}{\left( \prod_{r=2}^t \Delta_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell}) \right)} \right) \\
&= \sum_{X^{1-m} \in \mathbb{M}_N^m} \cdots \sum_{X^{t-1} \in \mathbb{M}_N^m} \left( \mu_N(x^{0,N}) \prod_{r=1}^t P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \right) \left( \prod_{\ell=1}^{N-1} \Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{t,\ell+1}, x^{t-m,\ell}) \right) \\
& \quad \prod_{\ell=1}^{N-1} \left( \frac{\left( \prod_{r=t-m+1}^t P_\ell(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \right) \left( \prod_{r=2}^t \Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m-1,\ell}) P_\ell(x^{r-m-1,\ell}, x^{r-m,\ell}) \right)}{\left( \prod_{r=2}^t \Delta_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell}) \right)} \right)
\end{aligned}$$

Luego juntando términos:

$$\begin{aligned}
& \sum_{X^{1-m} \in \mathbb{M}_N^m} \cdots \sum_{X^{t-1} \in \mathbb{M}_N^m} \left( \mu_N(x^{0,N}) \prod_{r=1}^t P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \right) \left( \prod_{\ell=1}^{N-1} \Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{t,\ell+1}, x^{t-m,\ell}) \right) \\
& \prod_{\ell=1}^{N-1} \left( \frac{\left( \prod_{r=t-m+1}^t P_\ell(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \right) \left( \prod_{r=2}^t \Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m-1,\ell}) P_\ell(x^{r-m-1,\ell}, x^{r-m,\ell}) \right)}{\left( \prod_{r=2}^t \Delta_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell}) \right)} \right) \\
& = \sum_{X^{1-m} \in \mathbb{M}_N^m} \cdots \sum_{X^{t-1} \in \mathbb{M}_N^m} \left[ \mu_N(x^{0,N}) \prod_{r=1}^t P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \right] \left[ \prod_{\ell=1}^{N-1} \Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{t,\ell+1}, x^{t-m,\ell}) \right. \\
& \left. \left( \prod_{r=t-m+1}^t P_\ell(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \right) \prod_{\ell=1}^{N-1} \prod_{r=2}^t \left( \frac{\Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m-1,\ell}) P_\ell(x^{r-m-1,\ell}, x^{r-m,\ell})}{\Delta_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell})} \right) \right]
\end{aligned}$$

Notemos que los términos que quedan dentro de los  $[ \ ]$  no dependen de  $x^{s-1,i}$  para todo  $s \in \{-m+2, \dots, t-m-1\}, i \in \{1, \dots, N\}$ . Además las sumas se pueden extender sobre todos los posibles niveles  $X^i = (x_1^i, \dots, x_i^i) \in W_1 \times \dots \times W_i$  dado que para los elementos fuera de  $\mathbb{M}_N^m$  el sumando se anula. Entonces se pueden reordenar las sumas de tal manera de dejar todos los elementos que van a pertenecer a  $W_i$  en una misma suma  $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{X^{1-m} \in \mathbb{M}_N^m} \cdots \sum_{X^{t-1} \in \mathbb{M}_N^m} \left[ \mu_N(x^{0,N}) \prod_{r=1}^t P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \right] \left[ \prod_{\ell=1}^{N-1} \Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{t,\ell+1}, x^{t-m,\ell}) \right. \\
& \left. \left( \prod_{r=t-m+1}^t P_\ell(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \right) \prod_{\ell=1}^{N-1} \prod_{r=2}^t \left( \frac{\Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m-1,\ell}) P_\ell(x^{r-m-1,\ell}, x^{r-m,\ell})}{\Delta_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell})} \right) \right] \\
& = \sum_{x^{1-m,N}, \dots, x^{t-m-1,N} \in W_N} \cdots \sum_{x^{2-m,1}, \dots, x^{t-m-1,1} \in W_1} \left[ \mu_N(x^{0,N}) \prod_{r=1}^t P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \right] \\
& \quad \left[ \prod_{\ell=1}^{N-1} \Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{t,\ell+1}, x^{t-m,\ell}) \left( \prod_{r=t-m+1}^t P_\ell(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \right) \right] \\
& \quad \prod_{\ell=1}^{N-1} \prod_{r=2}^t \left( \frac{\Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m-1,\ell}) P_\ell(x^{r-m-1,\ell}, x^{r-m,\ell})}{\Delta_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell})} \right)
\end{aligned}$$

Dado que el primer nivel no tiene ninguna dependencia con otros niveles se puede calcular la suma con respecto a los elementos pertenecientes a  $W_1$ . Primero se calcula la suma desde  $1-m$  hasta  $t-1-m$  y se nota que se pueden ir cancelando términos:

$$\begin{aligned}
& \sum_{x^{1-m,1}, \dots, x^{t-m-1,1} \in W_1} \prod_{r=2}^t \left( \frac{\Lambda_1^2(x^{r-1,2}, x^{r-m-1,1}) P_1(x^{r-m-1,1}, x^{r-m,1})}{\Delta_1^2(x^{r-1,2}, x^{r-m,1})} \right) \\
&= \sum_{x^{1-m,1} \in W_1} \cdots \sum_{x^{t-m-1,1} \in W_1} \prod_{r=2}^t \left( \frac{\Lambda_1^2(x^{r-1,2}, x^{r-m-1,1}) P_1(x^{r-m-1,1}, x^{r-m,1})}{\Delta_1^2(x^{r-1,2}, x^{r-m,1})} \right) \\
&= \sum_{x^{2-m,1} \in W_1} \cdots \sum_{x^{t-m-1,1} \in W_1} \prod_{r=3}^t \left( \frac{\Lambda_1^2(x^{r-1,2}, x^{r-m-1,1}) P_1(x^{r-m-1,1}, x^{r-m,1})}{\Delta_1^2(x^{r-1,2}, x^{r-m,1})} \right) \\
& \quad \sum_{x^{1-m,1} \in W_1} \left( \frac{\Lambda_1^2(x^{1,2}, x^{1-m,1}) P_1(x^{1-m,1}, x^{2-m,1})}{\Delta_1^2(x^{1,2}, x^{2-m,1})} \right) \\
&= \sum_{x^{2-m,1} \in W_1} \cdots \sum_{x^{t-m-1,1} \in W_1} \prod_{r=3}^t \left( \frac{\Lambda_1^2(x^{r-1,2}, x^{r-m-1,1}) P_1(x^{r-m-1,1}, x^{r-m,1})}{\Delta_1^2(x^{r-1,2}, x^{r-m,1})} \right) \\
& \quad \underbrace{\left( \frac{\sum_{x^{1-m,1} \in W_1} \Lambda_1^2(x^{1,2}, x^{1-m,1}) P_1(x^{1-m,1}, x^{2-m,1})}{\Delta_1^2(x^{1,2}, x^{2-m,1})} \right)}_1 \\
&= \sum_{x^{3-m,1} \in W_1} \cdots \sum_{x^{t-m-1,1} \in W_1} \prod_{r=4}^t \left( \frac{\Lambda_1^2(x^{r-1,2}, x^{r-m-1,1}) P_1(x^{r-m-1,1}, x^{r-m,1})}{\Delta_1^2(x^{r-1,2}, x^{r-m,1})} \right) \\
& \quad \sum_{x^{2-m,1} \in W_1} \left( \frac{\Lambda_1^2(x^{2,2}, x^{2-m,1}) P_1(x^{2-m,1}, x^{3-m,1})}{\Delta_1^2(x^{2,2}, x^{3-m,1})} \right) \\
&= \sum_{x^{3-m,1} \in W_1} \cdots \sum_{x^{t-m-1,1} \in W_1} \prod_{r=4}^t \left( \frac{\Lambda_1^2(x^{r-1,2}, x^{r-m-1,1}) P_1(x^{r-m-1,1}, x^{r-m,1})}{\Delta_1^2(x^{r-1,2}, x^{r-m,1})} \right) \\
& \quad \underbrace{\left( \frac{\sum_{x^{2-m,1} \in W_1} \Lambda_1^2(x^{2,2}, x^{2-m,1}) P_1(x^{2-m,1}, x^{3-m,1})}{\Delta_1^2(x^{2,2}, x^{3-m,1})} \right)}_1 \\
&= \sum_{x^{3-m,1} \in W_1} \cdots \sum_{x^{t-m-1,1} \in W_1} \prod_{r=4}^t \left( \frac{\Lambda_1^2(x^{r-1,2}, x^{r-m-1,1}) P_1(x^{r-m-1,1}, x^{r-m,1})}{\Delta_1^2(x^{r-1,2}, x^{r-m,1})} \right)
\end{aligned}$$

En lo anterior se nota que de manera iterativa se van cancelando los términos hasta la última

suma:

$$\begin{aligned}
& \sum_{x^{3-m,1} \in W_1} \cdots \sum_{x^{t-m-1,1} \in W_1} \prod_{r=4}^t \left( \frac{\Lambda_1^2(x^{r-1,2}, x^{r-m-1,1}) P_1(x^{r-m-1,1}, x^{r-m,1})}{\Delta_1^2(x^{r-1,2}, x^{r-m,1})} \right) \\
&= \sum_{x^{t-m-1,1} \in W_1} \left( \frac{\Lambda_1^2(x^{t-1,2}, x^{t-m-1,1}) P_1(x^{t-m-1,1}, x^{t-m,1})}{\Delta_1^2(x^{t-1,2}, x^{t-m,1})} \right) \\
&= \left( \sum_{x^{t-m-1,1} \in W_1} \frac{\Lambda_1^2(x^{t-1,2}, x^{t-m-1,1}) P_1(x^{t-m-1,1}, x^{t-m,1})}{\Delta_1^2(x^{t-1,2}, x^{t-m,1})} \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ahora, dado que los términos de la suma anterior dan 1, entonces no aportan en el resto de la suma (desde el tiempo  $t - m$  hasta el tiempo  $t - 1$ ), por lo tanto la suma restante da como resultado lo siguiente:

$$\sum_{x^{t-1,1}, \dots, x^{t-m,1} \in W_1} \Lambda_1^2(x^{t,2}, x^{t-m,1}) \left( \prod_{r=t-m+1}^t P_1(x^{r-1,1}, x^{r,1}) \right) = \Delta_1^{2,m}(x^{t,2}, x^{t,1})$$

Luego en la suma original queda lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \sum_{x^{1-m,N}, \dots, x^{t-m-1,N} \in W_N} \cdots \sum_{x^{2-m,1}, \dots, x^{t-m-1,1} \in W_1} \left[ \mu_N(x^{0,N}) \prod_{r=1}^t P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \right] \\
& \quad \left[ \prod_{\ell=1}^{N-1} \Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{t,\ell+1}, x^{t-m,\ell}) \left( \prod_{r=t-m+1}^t P_\ell(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \right) \right] \\
& \quad \prod_{\ell=1}^{N-1} \prod_{r=2}^t \left( \frac{\Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m-1,\ell}) P_\ell(x^{r-m-1,\ell}, x^{r-m,\ell})}{\Delta_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell})} \right) \\
&= \Delta_1^{2,m}(x^{t,2}, x^{t,1}) \sum_{x^{1-m,N}, \dots, x^{t-m-1,N} \in W_N} \cdots \sum_{x^{1-m,2}, \dots, x^{t-m-1,2} \in W_2} \left[ \mu_N(x^{0,N}) \prod_{r=1}^t P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \right] \\
& \quad \left[ \prod_{\ell=2}^{N-1} \Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{t,\ell+1}, x^{t-m,\ell}) \left( \prod_{r=t-m+1}^t P_\ell(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \right) \right] \\
& \quad \prod_{\ell=2}^{N-1} \prod_{r=2}^t \left( \frac{\Lambda_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m-1,\ell}) P_\ell(x^{r-m-1,\ell}, x^{r-m,\ell})}{\Delta_\ell^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell})} \right)
\end{aligned}$$

Al igual que antes se puede calcular la suma con respecto al nivel 2 pues perdió la dependencia con respecto al nivel 1 y de esta forma queda libre. Luego al calcular por separado la suma desde el tiempo  $1 - m$  hasta  $t - m - 1$  y desde el tiempo  $t - m$  hasta el tiempo  $t - 1$  se nota

que:

$$\begin{aligned}
& \sum_{x^{1-m,2}, \dots, x^{t-m-1,2} \in W_2} \prod_{r=2}^t \left( \frac{\Lambda_2^3(x^{r-1,3}, x^{r-m-1,2}) P_2(x^{r-m-1,2}, x^{r-m,2})}{\Delta_2^3(x^{r-1,3}, x^{r-m,2})} \right) \\
&= \sum_{x^{1-m,2} \in W_2} \cdots \sum_{x^{t-m-1,2} \in W_2} \prod_{r=2}^t \left( \frac{\Lambda_2^3(x^{r-1,3}, x^{r-m-1,2}) P_2(x^{r-m-1,2}, x^{r-m,2})}{\Delta_2^3(x^{r-1,3}, x^{r-m,2})} \right) \\
&= \sum_{x^{2-m,2} \in W_2} \cdots \sum_{x^{t-m-1,2} \in W_2} \prod_{r=3}^t \left( \frac{\Lambda_2^3(x^{r-1,3}, x^{r-m-1,2}) P_2(x^{r-m-1,2}, x^{r-m,2})}{\Delta_2^3(x^{r-1,3}, x^{r-m,2})} \right) \\
& \quad \sum_{x^{1-m,2} \in W_2} \left( \frac{\Lambda_2^3(x^{1,3}, x^{1-m,2}) P_2(x^{1-m,2}, x^{2-m,2})}{\Delta_2^3(x^{1,3}, x^{2-m,2})} \right) \\
&= \sum_{x^{2-m,2} \in W_2} \cdots \sum_{x^{t-m-1,2} \in W_2} \prod_{r=3}^t \left( \frac{\Lambda_2^3(x^{r-1,3}, x^{r-m-1,2}) P_2(x^{r-m-1,2}, x^{r-m,2})}{\Delta_2^3(x^{r-1,3}, x^{r-m,2})} \right) \\
& \quad \underbrace{\left( \frac{\sum_{x^{1-m,2} \in W_2} \Lambda_2^3(x^{1,3}, x^{1-m,2}) P_2(x^{1-m,2}, x^{2-m,2})}{\Delta_2^3(x^{1,3}, x^{2-m,2})} \right)}_{=1} \\
&= \sum_{x^{3-m,2} \in W_2} \cdots \sum_{x^{t-m-1,2} \in W_2} \prod_{r=4}^t \left( \frac{\Lambda_2^3(x^{r-1,3}, x^{r-m-1,2}) P_2(x^{r-m-1,2}, x^{r-m,2})}{\Delta_2^3(x^{r-1,3}, x^{r-m,2})} \right) \\
& \quad \sum_{x^{2-m,2} \in W_2} \left( \frac{\Lambda_2^3(x^{2,3}, x^{2-m,2}) P_2(x^{2-m,2}, x^{3-m,2})}{\Delta_2^3(x^{2,3}, x^{3-m,2})} \right) \\
&= \sum_{x^{3-m,2} \in W_2} \cdots \sum_{x^{t-m-1,2} \in W_2} \prod_{r=4}^t \left( \frac{\Lambda_2^3(x^{r-1,3}, x^{r-m-1,2}) P_2(x^{r-m-1,2}, x^{r-m,2})}{\Delta_2^3(x^{r-1,3}, x^{r-m,2})} \right) \\
& \quad \underbrace{\left( \frac{\sum_{x^{2-m,2} \in W_2} \Lambda_2^3(x^{2,3}, x^{2-m,2}) P_2(x^{2-m,2}, x^{3-m,2})}{\Delta_2^3(x^{2,3}, x^{3-m,2})} \right)}_{=1} \\
&= \sum_{x^{3-m,2} \in W_2} \cdots \sum_{x^{t-m-1,2} \in W_2} \prod_{r=4}^t \left( \frac{\Lambda_2^3(x^{r-1,3}, x^{r-m-1,2}) P_2(x^{r-m-1,2}, x^{r-m,2})}{\Delta_2^3(x^{r-1,3}, x^{r-m,2})} \right)
\end{aligned}$$

Al igual que antes, cada suma va dando como resultado 1 y, por lo tanto, no aportan en el resto de la suma. La suma restante da como resultado:

$$\sum_{x^{t-1,2}, \dots, x^{t-m,2} \in W_2} \Lambda_2^3(x^{t,3}, x^{t-m,2}) \left( \prod_{r=t-m+1}^t P_1(x^{r-1,2}, x^{r,2}) \right) = \Delta_2^{3,m}(x^{t,3}, x^{t,2})$$

Luego en la suma original queda:

$$\begin{aligned} & \left( \prod_{k=2}^3 \Delta_{k-1}^{k,m}(x^{t,k}, x^{t,k-1}) \right) \sum_{x^{1-m,N}, \dots, x^{t-m-1,N} \in W_N} \cdots \sum_{x^{1-m,3}, \dots, x^{t-m-1,3} \in W_3} \left[ \mu_N(x^{0,N}) \prod_{r=1}^t P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \right] \\ & \left[ \prod_{\ell=3}^{N-1} \Lambda_{\ell}^{\ell+1}(x^{t,\ell+1}, x^{t-m,\ell}) \left( \prod_{r=t-m+1}^t P_{\ell}(x^{r-1,\ell}, x^{r,\ell}) \right) \right] \\ & \prod_{\ell=3}^{N-1} \prod_{r=2}^t \left( \frac{\Lambda_{\ell}^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m-1,\ell}) P_{\ell}(x^{r-m-1,\ell}, x^{r-m,\ell})}{\Delta_{\ell}^{\ell+1}(x^{r-1,\ell+1}, x^{r-m,\ell})} \right) \end{aligned}$$

El procedimiento anterior se puede ir haciendo de manera iterativa hasta el penúltimo nivel, quedando así la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \left( \prod_{k=2}^N \Delta_{k-1}^{k,m}(x^{t,k}, x^{t,k-1}) \right) \sum_{x^{1-m,N}, \dots, x^{t-m-1,N} \in W_N} \left[ \mu_N(x^{0,N}) \prod_{r=1}^t P_N(x^{r-1,N}, x^{r,N}) \right] \\ & = \left( \prod_{k=2}^N \Delta_{k-1}^{k,m}(x^{t,k}, x^{t,k-1}) \right) (\mu_N P_N^{(t)})(x^{t,N}) \end{aligned}$$

Con lo que se concluye el resultado.  $\square$

**Observación** El teorema anterior nos dice que al iniciar el proceso con la distribución  $\mathcal{M}_N^m$  entonces la evolución del arreglo triangular es equivalente a evolucionar solo el nivel  $N$  y luego los niveles inferiores se escogen de tal manera de preservar la memoria  $m$ , es decir, que cada nivel se entrelace al anterior y luego evolucione  $m$  veces.

**Observación** Lo anterior asegura que el proceso TASEP  $\{x_1^k\}_{k=1}^N$  presenta el siguiente comportamiento inicial:

- La partícula  $x_1^N$  comienza en el lugar dado por la distribución  $\mu_N$ .
- Cada partícula  $x_1^k$  intentara saltar  $m$  veces hacia la derecha desde su punto de partida, es decir, provocando un desfase de  $m$  tiempos.

**Observación** En el teorema anterior no fue necesario especificar la historia pasada del nivel  $N$ , por lo tanto, para el proceso TASEP la historia pasada de la partícula  $N$  tampoco sera relevante.

Como se ha observado en esta sección el efecto de desfase no cambia demasiado al proceso, es decir, las propiedades solo se ven afectadas por un desfase temporal pero se siguen manteniendo para estas nuevas dinámicas. La próxima sección se detallara como extender estas dinámicas para obtener dinámicas similares a las mostradas en 1.3.

## 2.3. Extensión Markoviana

En la sección anterior se demostró que los arreglos triangulares con memoria preservan varias propiedades siempre y cuando, estas mantengan el desfase temporal. Para poder aplicar lo definido anteriormente se trabajara con la extensión Markoviana dada en el teorema 2.2 y se demostrara que cumplen una propiedad similar a la presentada en la sección 1.3.

Al igual que antes se considera una variable temporal  $\tau_m$  que afecta a las matrices de transición como en 1.7, pero que ahora representa la posición horizontal en un esquema como el siguiente:

$$\begin{array}{ccccc}
 & P_k(t-2(k-1)-1) & & P_k(t-2(k-1)) & \\
 y^{2,k}(t+1) & \longrightarrow & y^{1,k}(t+1) & \longrightarrow & x^k(t+1) \\
 & & & \downarrow & \\
 & & & P_{k-1}(t-2(k-2)-1) & P_{k-1}(t-2(k-2)) \\
 & & & y^{2,k-1}(t+1) & \longrightarrow & y^{1,k-1}(t+1) & \longrightarrow & x^{k-1}(t+1)
 \end{array}$$

Figura 2.3: Esquema dinámica con memoria extendida para  $m = 2$ .

El efecto que tiene la variable  $\tau_m$  es el de retrasar el comienzo de la evolución de niveles superiores pero con la sutileza de mantener el desfase temporal según la memoria. El conjunto de estados de este proceso se denotara como sigue:

$$\mathbb{M}_N^{m,ext} := \{X^0 \in \mathbb{M}_N^m, X^i \in \mathbb{M}_{N-1}^m, \forall i \in \llbracket -m, -1 \rrbracket \mid x^{0,k-1} \prec x^{1-m,k}, \forall k \in \llbracket 2, N \rrbracket\}$$

donde  $X^s = (x^{s,1}, \dots, x^{s,N-1}), \forall s \in \llbracket -m, -1 \rrbracket$  y  $X^0 = (x^{0,1}, \dots, y^{0,N})$ . La evolución para este nuevo espacio de estado se detalla a continuación:

- Las partículas  $x^s$  evolucionan de manera determinista:

$$x^{s,k}(t+1) = x^{s,k}(t), \forall s \in \llbracket -m, -1 \rrbracket,$$

- Las partículas  $x^0$  evolucionan según la matriz  $P_{\Delta}^N(\tau_m)$ .

A esta dinámica la denotaremos por  $P_{\Delta}^{N,m,ext}$ . A continuación se enuncia un teorema que generaliza el teorema 1.11 y caracteriza la evolución del proceso  $(X^{1-m}, \dots, X^0)$  para una condición inicial en particular:

**Teorema 2.3** *Sea  $\mu_N$  una medida de probabilidad sobre  $W_N$ . Consideremos la condición inicial sobre  $\mathbb{M}_N^{m,ext}$ :*

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_N^m(\tau_m)(X^{-m}, \dots, X^0) = & \mu_N(x^{0,N}) \left[ \prod_{k=2}^N \Lambda_{k-1}^k(x^{0,k}, x^{-m,k-1}) \right. \\
 & \left. \left( \prod_{j=1}^m P_{k-1}(\tau_m + N - km + j)(x^{-j,k-1}, x^{1-j,k-1}) \right) \right]
 \end{aligned}$$

donde  $X^s = (x^{s,1}, \dots, x^{s,N}), \forall s \in \llbracket -m, 0 \rrbracket$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \left( \mathcal{M}_N^m \left( P_{\Delta}^{N,m,ext} \right)^{(t)} \right) (X^{t-m}, \dots, X^t) &= (\mu_N P_N(\tau_m - tm) \dots P_N(\tau_m + t - m)) (x^{t,N}) \\ &\prod_{k=2}^N \Lambda_{k-1}^k (x^{t,k}, x^{t-m,k-1}) \\ &\left[ \prod_{s=t-m}^{t-1} P_k(\tau_m + t + N - km + j)(x^{s,k}, x^{s+1,k}) \right], \end{aligned}$$

donde  $X^s = (x^{s,1}, \dots, x^{s,N}), \forall s \in \llbracket t-m, t \rrbracket$ .

La demostración de este teorema es análoga a la hecha en el teorema 2.2. Con todo lo presentado en esta sección se tiene todo lo necesario para detallar la aplicación de estas dinámicas lo cual es el tema principal del siguiente capítulo.

# Capítulo 3

## Aplicación sobre el Diamante Azteca y las líneas no intersectantes

El objetivo de este capítulo es presentar aplicaciones de las dinámicas definidas en capítulos previos. En la primera sección se presenta el problema del embañosado del diamante azteca y las líneas no-intersectantes. Posteriormente se presenta la relación de estos procesos con la dinámicas de los arreglos triangulares y se postulan extensiones de estos al considerar una dinámica con memoria.

### 3.1. Diamante Azteca y Líneas No-intersectantes

En esta sección se explica el problema del embañosado del Diamante Azteca y su relación de las líneas no intersectantes. Dado  $N \in \mathbb{N}$ , definimos el Diamante Azteca  $A_N$  de tamaño  $N$  como la unión de los lattice cuadrados de la forma  $[m, m + 1] \times [n, n + 1]$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$  que están contenidos en la región  $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : |x| + |y| \leq N + 1\}$ . La siguiente figura muestra un ejemplo para  $N = 3$ :

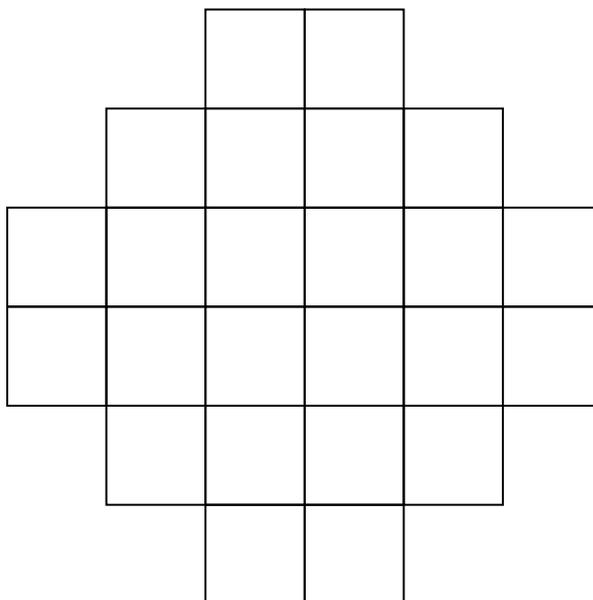


Figura 3.1: Ejemplo Diamante Azteca  $A_3$ .

En este contexto se define un embaledado del diamante Azteca como una configuración de  $N^2$  dominós (rectángulos de  $2 \times 1$ ) tal que  $A_N$  queda totalmente cubierto por dominós. Existe un algoritmo tipo shuffling que permite generar de manera aleatoria embaledados del diamante Azteca. La siguiente figura es un ejemplo de un embaledado resultante por este algoritmo:

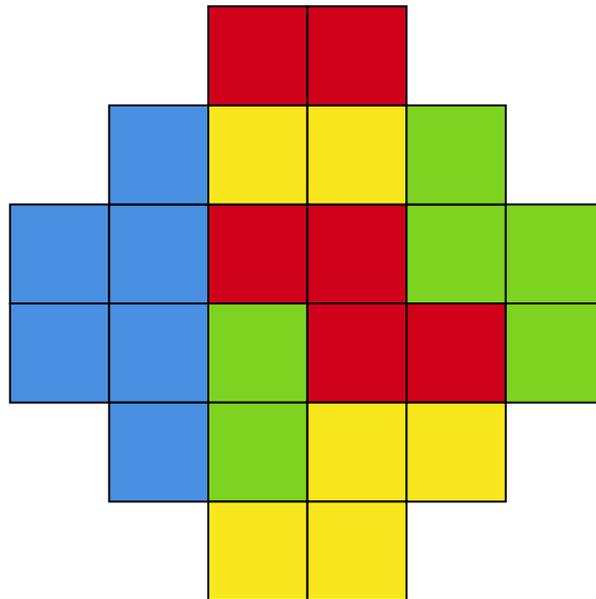


Figura 3.2: Ejemplo resultado algoritmo para embaledar Diamantes Aztecas.

El algoritmo en cuestión se detalla a continuación:

1. El algoritmo comienza sobre el cuadrado inicial para  $N = 1$  y según el resultado de una variable aleatoria Bernoulli de parámetro  $p$  se embaleda con 2 rectángulos horizontales o 2 rectángulos verticales. La siguiente figura ilustra el funcionamiento para el caso base:

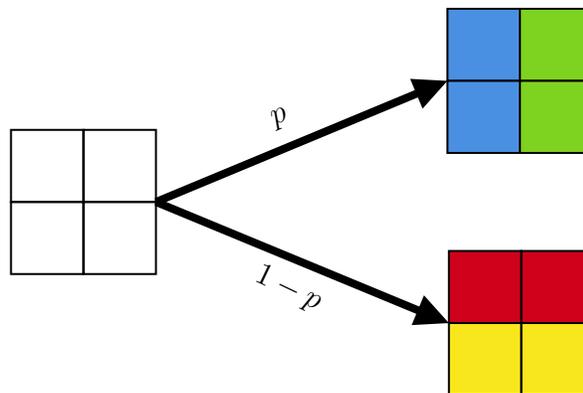


Figura 3.3: Caso base algoritmo para el embaledado del Diamante Azteca.

Para cada domino se le asigna un color respecto a la posición del rectángulo al embaledar el cuadrado de  $2 \times 2$

2. Para generar embaledados de tamaños mas grandes a partir de  $A_1$  se procede de manera recursiva:

- Cada domino de color azul se mueve hacia la izquierda una vez.
- Cada domino de color verde se mueve hacia la derecha una vez.
- Cada domino de color amarillo se mueve hacia abajo una vez.
- Cada domino de color rojo se mueve hacia arriba una vez

En caso de que dos dominós intercambien lugares se procede a eliminarlos. Luego la región resultante que no tiene aun dominós se puede dividir de una única manera en cuadrados de  $2 \times 2$  y en cada uno de ellos ocurre el paso 1. Con esto se consigue generar de manera iterativa embaldosados para diamantes cada vez mas grandes.

La figura 4.1 ilustra el funcionamiento de este algoritmo, para mas detalle el lector puede consultar [2]. Al colorear los dominós de esta manera se induce un proceso equivalente que son un sistema de líneas no-intersectantes, el cual se puede apreciar en 4.2. Estas se consiguen al aplicar una transformación geométrica sobre las líneas generadas en 4.1. Para mostrar explícitamente la relación de este problema con la dinámica de los arreglos triangulares se detalla donde se colocan las partículas del arreglo triangular en un sistema de líneas no-intersectantes junto con la matriz de transición del proceso. Consideremos  $(Y, X)$  un arreglo triangular con dinámica paralela extendida con la siguiente matriz de transición:

$$P(\tau)(x, y) = \begin{cases} p \cdot 1_{x=y-1} + (1-p) \cdot 1_{x=y} & \tau \geq 0 \\ 1_{x=y} & \tau < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Las partículas se colocan como sigue:

- Las partículas  $x$  se colocan en las coordenadas

$$(2k-1, x_j^k), \quad \forall 1 \leq j \leq k \leq N$$

- Las partículas  $y$  se colocan en las coordenadas

$$(2k, y_j^{k+1}), \quad \forall 1 \leq j \leq k \leq N-1$$

Gracias a la estructura del arreglo triangular se genera un sistema de líneas no-intersectantes como se puede apreciar en la figura 4.2. En [12] se probó el siguiente teorema:

**Teorema 3.1** ([12]) *Para cada embaldosado del diamante Azteca existe un conjunto de líneas no intersectantes de manera biyectiva.*

Por lo tanto basta explicitar la posición de cada partícula del arreglo triangular sobre las líneas no-intersectantes para obtener la evolución del embaldosado del diamante azteca. Con esta idea en la siguiente sección se propone una forma de colocar las partículas al momento de considerar una memoria mas grande.

## 3.2. Extensión con memoria

En esta sección se propone una configuración de líneas no-intersectantes para cualquier arreglo triangular con memoria. Posteriormente se menciona una posible extensión para ge-

nerar una figura como la del diamante Azteca.

Sea  $(Y^m, \dots, Y^1, X)$  un arreglo triangular con memoria  $m$ . Gracias a la estructura que debe respetar el arreglo triangular al considerar esta dinámica con memoria se consigue el siguiente teorema:

**Teorema 3.2** *El conjunto de líneas generadas por el proceso  $(Y^m, \dots, Y^1, X)$  al colocar las partículas como sigue:*

- *Las partículas  $x$  se colocan en las coordenadas*

$$((m+1)k - m, x_j^k), \forall 1 \leq j \leq k \leq N$$

- *Las partículas  $y^i$  se colocan en las coordenadas*

$$((m+1)k - (m-i), y_j^{k+1, i}), \forall 1 \leq j \leq k \leq N-1$$

*genera un sistema de líneas no-intersectantes.*

Este resulta es directo del entrelazamiento que debe tener cada nivel debido a la dinámica con memoria. La matriz de transición se escoge como en 3.1. Un ejemplo de esta configuración se muestra en la figura 4.3 para  $m = 2$  cuando se deja evolucionar el proceso para  $p = 0.5$ . Como se logra apreciar en la figura cada 2 tiempos se permite que cada línea pueda empezar a evolucionar con la restricción de no provocar una intersección al transicionar. Esto se explica gracias al teorema 2.3 y a la elección de la matriz de transición  $P(\tau)$ .

Gracias al teorema 3.1 se logra encontrar un equivalente a la elección de líneas no-intersectantes, lo que hace pensar que para este caso también debiesen existir alguna figura equivalente. Dado que para el caso  $m = 1$  el proceso  $(Y^1, X)$  se podía entender como un domino, al momento de considerar una memoria mas grande se podría extender este concepto y que el proceso  $(Y^m, \dots, Y^1, X)$  sea un Poliomínó, es decir, considerar componentes como la siguiente:

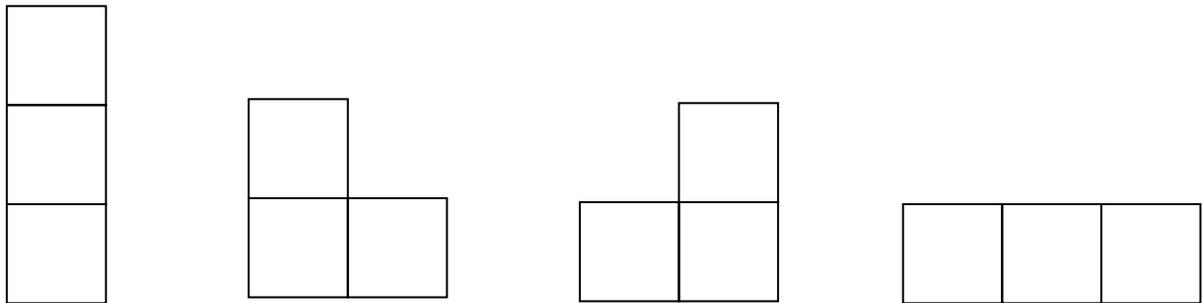


Figura 3.4: Ejemplo Trominó.

Con este tipo de estructuras iniciales se podrían conseguir figuras mas complejas y el problema se concentraría en estudiar como embaldosar estas nuevas figuras. Más aún, dada la dinámica con memoria se generaría un algoritmo similar al presentando al inicio de este capítulo. Tanto las figuras encontradas como el algoritmo que se genera queda como trabajo a futuro el poder caracterizarlos.

# Capítulo 4

## Condiciones iniciales Markovianas sobre los arreglos triangulares

En este capítulo se estudia el efecto que tienen condiciones iniciales Markovianas sobre el nivel  $N$  de los arreglos triangulares con dinámica secuencial. Gracias al teorema 1.6 es de interés el caracterizar la condición inicial sobre el proceso marginal  $\{x_1^i\}_{i=1}^N$  para alguna condición inicial sobre el arreglo triangular, como por ejemplo la condición inicial empaquetada 1.1, en donde se logran obtener formulas explicitas para el proceso TASEP obteniendo resultados como los mencionados en capítulos previos (Teorema 1.1 y Teorema 1.8). Es por esto que es de interés el estudiar si existen otras condiciones iniciales que hereden al proceso  $\{x_1^i\}_{i=1}^N$  un comportamiento Markoviano, como por ejemplo la distribución geométrica (caso estacionario) que es otro caso clásico donde en otros contextos se logran obtener formulas explicitas. Para ello primero se trabaja con una condición inicial donde existe una única manera de elegir el nivel  $N$  para preservar el comportamiento Markoviano en todo el arreglo, obteniendo en el proceso TASEP “gaps” geométricos. Mas adelante se estudia un caso mas general con la condición inicial 1.7, buscando obtener una distribución Markoviana como la de los “gaps” geométricos pero se detalla el problema que tiene el elegir esta distribución inicial particular.

### 4.1. Condición inicial uniforme por niveles

Consideremos la siguiente distribución inicial sobre  $W_N$ :

$$\mu_N(x^N) = \mathbb{1}_{x_1^N = k_0} \prod_{i=2}^N q(x_{i-1}^N, x_i^N) \quad (4.1)$$

donde  $q$  es una matriz estocástica. Este tipo de distribución implica que los “gaps” entre las partículas distribuyen según  $q$ , es decir, el nivel  $N$  son las transiciones de un proceso Markoviano. Consideremos además la siguiente elección para los niveles inferiores:

$$\mathbb{P}(x^k = y | x^{k+1} = z) = \prod_{j=1}^k \text{Unif}_d(z_{j+1} - z_j) \mathbb{1}_{y_j \in [z_j+1, z_{j+1}]}$$

donde  $\text{Unif}_d(s) = \frac{1}{s}$ . La elección de esta distribución para los niveles inferiores es debido a que provoca que la posición de cada partícula sea independiente de la posición el resto de

partículas con respecto al mismo nivel.

Gracias al teorema 1.6 una pregunta interesante es si existe alguna distribución  $q$  que permita heredar el efecto Markoviano inicial del nivel  $N$  al proceso TASEP  $\{(x_1^k)\}_{k=1}^N$ . Para responder esta pregunta es necesario comprender la relación entre los 2 procesos Markovianos. Si denotamos a  $Q$  la matriz de transición asociada a  $\{(x_1^k(0))\}_{k=1}^N$ , podemos encontrar la relación con  $q$  explícitamente calculando de 2 formas distintas la distribución inicial de  $x_1^{N-1}(0)|x_1^N(0) = k_0$  para  $N = 2$ . Para todo lo que sigue se omitirá la componente temporal de cada partícula. Consideremos  $Q$  una matriz estocástica sobre  $\mathbb{N}$  tal que:

$$\mathbb{P}(x_1^{N-1} = k | x_1^N = k_0) = Q(k_0, k) \quad (4.2)$$

y  $q$  una matriz estocástica sobre  $\mathbb{N}$  tal que:

$$\mathbb{P}(x_2^N = n | x_1^N = k_0) = q(k_0, n) \quad (4.3)$$

La siguiente figura ilustra el funcionamiento de  $q$  y  $Q$ :

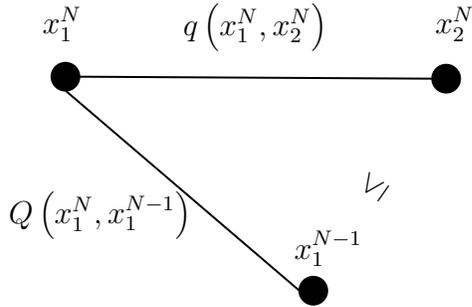


Figura 4.1: Comportamiento de  $q$  y  $Q$ .

De la estructura del arreglo triangular se obtiene que para  $k_0 > n$ :

$$q(k_0, n) = Q(k_0, n) = 0.$$

Para calcular de otra forma la distribución de  $x_1^{N-1}|x_1^N = k_0$  se puede aplicar probabilidades totales con respecto al valor de  $x_2^N$ , obteniendo:

$$\mathbb{P}(x_1^{N-1} = k | x_1^N = k_0) = \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(x_1^{N-1} = k | x_1^N = k_0, x_2^N = n) \mathbb{P}(x_2^N = n | x_1^N = k_0).$$

El primer termino corresponde a la densidad de una variable uniforme discreta de parámetro  $n - k_0$ . El segundo termino corresponde a una transición de la cadena de markov  $\{x_i^N\}_{i=1}^N$  la cual tiene como matriz de transición  $q$ . Reemplazando:

$$\mathbb{P}(x_1^{N-1} = k | x_1^N = k_0) = \sum_{n \geq k} \frac{1}{n - k_0} q(k_0, n).$$

Juntando las 2 expresiones para la probabilidad calculada:

$$Q(k_0, k) = \sum_{n \geq k} \frac{1}{n - k_0} q(k_0, n).$$

Notemos que el termino  $k$  solo afecta el numero de elementos sumados. Por lo tanto:

$$Q(k_0, k) - Q(k_0, k + 1) = \frac{1}{k - k_0} q(k_0, k),$$

obteniendo:

$$q(k_0, k) = (k - k_0) (Q(k_0, k) - Q(k_0, k + 1)) \quad (4.4)$$

De la ultima igualdad se logra apreciar que la matriz  $Q$  debe ser decreciente, pues  $q$  es una matriz positiva. Además  $q$  definida como antes es una matriz estocástica:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq k_0+1} q(k_0, k) &= \sum_{k \geq k_0+1} (k - k_0)(Q(k_0, k) - Q(k_0, k + 1)) \\ &= \sum_{k \geq k_0+1} (k - k_0)Q(k_0, k) - \sum_{k \geq k_0+1} (k - k_0)Q(k_0, k + 1) \\ &= Q(k_0, k_0 + 1) + \sum_{k \geq k_0+2} [(k - k_0)Q(k_0, k)] - \sum_{k \geq k_0+1} (k - k_0)Q(k_0, k + 1), \end{aligned}$$

en la primera sumatoria se puede sumar y resta el termino  $Q(k_0, k)$  con el objetivo de que ambas sumas se anulen:

$$\begin{aligned} Q(k_0, k_0 + 1) + \sum_{k \geq k_0+2} [Q(k_0, k) + ((k - k_0) - 1)Q(k_0, k)] - \sum_{k \geq k_0+1} (k - k_0)Q(k_0, k + 1) \\ = \sum_{k \geq k_0+1} Q(k_0, k) + \sum_{k \geq k_0+2} ((k - k_0) - 1)Q(k_0, k) - \sum_{k \geq k_0+1} (k - k_0)Q(k_0, k + 1) \\ = 1, \end{aligned}$$

en donde se utilizo que  $Q$  es una matriz estocástica provocando que la primera sumatoria de 1. Además la segunda y tercera sumatoria son la misma, por lo tanto la resta da 0, provocando así:

$$\sum_{k \geq k_0+1} q(k_0, k) = 1,$$

con lo que se corrobora que la formula encontrada para  $q$  es consistente.

A continuación se enuncia el teorema que caracteriza el comportamiento inicial de  $\{x_1^i\}$  y que responde a la pregunta hecha al inicio de esta sección:

**Teorema 4.1** *Sea  $N \in \mathbb{N}$ . Consideremos el proceso  $X^N = (x^1, x^2, \dots, x^N) \in \mathbb{GT}_N$  con distribución inicial como en 1.5 con  $\mu_N$  como en 4.1. Si el proceso  $\{x_1^i(0)\}_{i=1}^N$  es una cadena de Markov entonces su matriz de transición  $Q$  es  $Q(k_0, k) = p(1 - p)^{k - k_0 - 1} \mathbb{1}_{k > k_0}$ ,  $\forall k, k_0 \in \mathbb{N}$*

y la matriz  $q$  queda determinada:

$$q(x, y) = (y - x)p^2(1 - p)^{y-x-1}\mathbb{1}_{y>x}, \quad \forall x, y \in \mathbb{N}$$

con  $p = Q(0, 1)$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $N \in \mathbb{N}$  y  $k_0 \in \mathbb{N}$ . Primero se demostrara que  $Q$  corresponde a una distribución geométrica de parámetro  $Q(k_0, k_0 + 1)$  y luego que  $Q(k_0, k_0 + 1) = Q(0, 1)$ . Para lo primero la idea va a ser mostrar que  $Q$  satisface la siguiente recurrencia:

$$Q(k_0, k + 1) = Q(k_0, k) \frac{Q(0, 2)}{Q(0, 1)}, \quad \forall k_0, k \in \mathbb{N}, k_0 < k,$$

pues, la única distribución de probabilidad que satisface la recurrencia anterior es la distribución Geométrica. Para ello se calculara de 2 formas distintas la distribución de  $x_2^{N-1} | \{x_1^{N-1} = n, x_1^N = k_0\}$ . Estas se muestran en la siguiente figura:

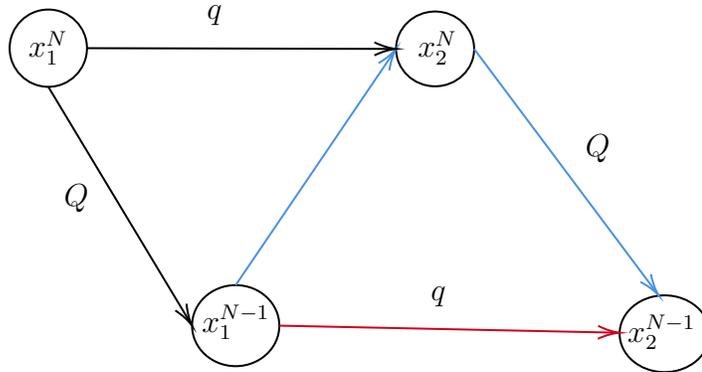


Figura 4.2: Caminos para  $x_2^{N-1} | \{x_1^{N-1} = n, x_1^N = k_0\}$ .

Notemos que la única distribución desconocida es la asociada a  $x_2^N | \{x_1^{N-1} = n, x_1^N = k_0\}$ . Esta se puede calcular utilizando el teorema de Bayes:

$$\mathbb{P}(x_2^N = m | x_1^{N-1} = n, x_1^N = k_0) = \frac{\mathbb{P}(x_1^{N-1} = n | x_2^N = m, x_1^N = k_0) \mathbb{P}(x_2^N = m | x_1^N = k_0)}{\mathbb{P}(x_1^{N-1} = n | x_1^N = k_0)}$$

Todas las probabilidades en cuestión son conocidas y son las siguientes:

- $x_1^{N-1} | x_2^N = m, x_1^N = k_0 \sim \text{Unif}_d(m - k_0)$
- $x_2^N | x_1^N = k_0 \sim q(k_0, \cdot)$
- $x_1^{N-1} | x_1^N = k_0 \sim Q(k_0, \cdot)$

Por lo tanto, la probabilidad buscada es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x_2^N = m | x_1^{N-1} = n, x_1^N = k_0) &= \frac{\frac{1}{m-k_0} q(k_0, m)}{Q(k_0, n)} \\ &= \frac{Q(k_0, m) - Q(k_0, m + 1)}{Q(k_0, n)} \end{aligned}$$

Dado que se conocen todas las distribuciones para los 2 caminos se pueden calcular ambos por separado. Por lo mostrado en 4.4 sabemos que:

$$\mathbb{P}(x_2^{N-1} = k | x_1^{N-1} = n, x_1^N = k_0) = (k - n)(Q(n, k) - Q(n, k + 1)),$$

lo que corresponde al camino en rojo. Para el segundo camino se utiliza el teorema de probabilidades totales con respecto a la variable  $x_2^N$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x_2^{N-1} = k | x_1^{N-1} = n, x_1^N = k_0) \\ = \sum_{m=n}^{k-1} \mathbb{P}(x_2^{N-1} = k | x_1^{N-1} = n, x_2^N = m, x_1^N = k_0) \mathbb{P}(x_2^N = m | x_1^{N-1} = n, x_1^N = k_0), \end{aligned}$$

en donde en la primera probabilidad se puede omitir el evento  $\{x_1^{N-1} = n\}$  pues no aporta nueva información relevante dado el evento  $\{x_2^N = m\}$ , obteniendo así la probabilidad de transición asociada a la matriz  $Q$ . El segundo termino corresponde a la probabilidad calculada al inicio de esta demostración, con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{m=n}^{k-1} \mathbb{P}(x_2^{N-1} = k | x_1^{N-1} = n, x_2^N = m, x_1^N = k_0) \mathbb{P}(x_2^N = m | x_1^{N-1} = n, x_1^N = k_0) \\ = \sum_{m=n}^{k-1} \mathbb{P}(x_2^{N-1} = k | x_2^N = m, x_1^N = k_0) \mathbb{P}(x_2^N = m | x_1^{N-1} = n, x_1^N = k_0) \\ = \sum_{m=n}^{k-1} Q(m, k) \frac{Q(k_0, m) - Q(k_0, m + 1)}{Q(k_0, n)}, \end{aligned}$$

Dado que ambos caminos corresponde a la misma probabilidad se pueden igualar:

$$(k - n)(Q(n, k) - Q(n, k + 1)) = \sum_{m=n}^{k-1} Q(m, k) \frac{Q(k_0, m) - Q(k_0, m + 1)}{Q(k_0, n)} \quad (4.5)$$

Lo anterior es valido para todo  $k_0 < n < k$  con  $n, k, k_0 \in \mathbb{N}$ . Tomando  $k = n + 1$  obtenemos en la ecuación 4.5 lo siguiente:

$$(Q(n, n + 1) - Q(n, n + 2)) = Q(n, n + 1) \frac{Q(k_0, n) - Q(k_0, n + 1)}{Q(k_0, n)}$$

de donde, al reordenar términos queda la siguiente expresión:

$$\frac{Q(k_0, n + 1)}{Q(k_0, n)} = \frac{Q(n, n + 2)}{Q(n, n + 1)}, \quad \forall k_0 < n \quad (4.6)$$

La expresión anterior nos dice que el cuociente entre valores consecutivos con igual punto de partida de la matriz  $Q$  es independiente de este punto de partida. Por lo tanto, al tomar  $k_0 = n - 1$  obtenemos:

$$\frac{Q(n, n + 2)}{Q(n, n + 1)} = \frac{Q(n - 1, n + 1)}{Q(n - 1, n)},$$

en donde al ser valida la igualdad para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces se puede iterar sobre el lado

derecho obteniendo así:

$$\frac{Q(n, n+2)}{Q(n, n+1)} = \frac{Q(0, 2)}{Q(0, 1)}$$

Luego al reemplazar esta igualdad en 4.6 se obtiene siguiente recurrencia:

$$Q(k_0, n+1) = Q(k_0, n) \frac{Q(0, 2)}{Q(0, 1)}$$

De la recurrencia anterior se deduce que  $Q(k_0, \cdot)$  es una distribución geométrica de parámetro  $p = Q(k_0, k_0 + 1)$ . Falta mostrar que  $p$  no depende de  $k_0$ , pero basta notar que al ser  $Q(k_0, \cdot)$  una distribución geométrica, entonces tiene la propiedad de pérdida de memoria, es decir, se tiene la siguiente igualdad:

$$Q(x, y) = Q(0, y - x)$$

en donde, al tomar  $x = k_0$  e  $y = k_0 + 1$  se obtiene la igualdad buscada. Finalmente calculemos la distribución  $q$ . Para ello basta recordar la igualdad 4.4:

$$\begin{aligned} q(k_0, k) &= (k - k_0)(Q(k_0, k) - Q(k_0, k + 1)) \\ &= (k - k_0)(p(1 - p)^{k - k_0 - 1} - p(1 - p)^{k - k_0}) \\ &= (k - k_0)p(1 - p)^{k - k_0 - 1}(1 - (1 - p)) \\ &= (k - k_0)p^2(1 - p)^{k - k_0 - 1} \end{aligned}$$

Con lo que se concluye el resultado. □

**Observación** La fórmula encontrada para  $q$  es más conocida por el nombre de distribución Flory–Schulz la cual de ahora en adelante denotaremos por  $FS(p)$ .

El teorema anterior nos asegura la existencia y unicidad de una condición inicial Markoviana con la propiedad de heredar esta Markovianidad al proceso  $\{x_1^i\}_{i=1}^N$ . Más aún, gracias a la pérdida de memoria de la distribución geométrica se puede notar que el punto de partida no afecta el comportamiento inicial en el arreglo triangular. A continuación se enuncia un corolario del teorema anterior el cual permite caracterizar todos los “gaps” entre partículas en el arreglo triangular:

**Corolario 4.1** Sea  $N \in \mathbb{N}$  y sea  $X^N = (x^1, x^2, \dots, x^N) \in \mathbb{GT}_N$  como en el teorema 4.1. Entonces para  $i \in \{2, \dots, N - 1\}, j \in \{2, \dots, i\}$ :

$$\mathbb{P}(x_j^i = n | x_{j-1}^i = k) = (n - k)p^2(1 - p)^{n - k - 1} \quad (4.7)$$

, es decir, los “gaps” entre las partículas en el proceso  $\{x_j^i\}_{j=1}^i$  son independientes y de la misma ley.

DEMOSTRACIÓN. Se demostrara utilizando inducción descendente sobre  $i$ :

- **Caso Base:** En este caso  $i = N - 1$  y sea  $j \in \{2, \dots, i\}$ . Se calculara la probabilidad

buscada

$$\mathbb{P}(x_j^{N-1} = n | x_{j-1}^{N-1} = k) = \sum_{m=k}^{n-1} \mathbb{P}(x_j^{N-1} = n | x_{j-1}^{N-1} = k, x_j^N = m) \mathbb{P}(x_j^N = m | x_{j-1}^{N-1} = k),$$

en donde en la primera probabilidad se puede omitir el evento  $\{x_{j-1}^{N-1} = k\}$  dado que no aporta nueva información con respecto al evento  $\{x_j^N = m\}$ . Por lo tanto esta probabilidad corresponde a  $Geom(p) - m$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{m=k}^{n-1} \mathbb{P}(x_j^{N-1} = n | x_{j-1}^{N-1} = k, x_j^N = m) \mathbb{P}(x_j^N = m | x_{j-1}^{N-1} = k) \\ &= \sum_{m=k}^{n-1} p(1-p)^{n-m-1} \mathbb{P}(x_j^N = m | x_{j-1}^{N-1} = k) \end{aligned} \quad (4.8)$$

La probabilidad faltante se puede calcular aplicando nuevamente probabilidades totales pero con respecto a la variable  $x_{j-1}^N$ :

$$\mathbb{P}(x_j^N = m | x_{j-1}^{N-1} = k) = \sum_{k'=k_0+j-2}^{m-1} \mathbb{P}(x_j^N = m | x_{j-1}^{N-1} = k, x_{j-1}^N = k') \mathbb{P}(x_{j-1}^N = k' | x_{j-1}^{N-1} = k) \quad (4.9)$$

El termino  $\mathbb{P}(x_j^N = m | x_{j-1}^{N-1} = k, x_{j-1}^N = k')$  se puede calcular utilizando el teorema de Bayes:

$$\mathbb{P}(x_j^N = m | x_{j-1}^{N-1} = k, x_{j-1}^N = k') = \frac{\mathbb{P}(x_j^N = m | x_{j-1}^N = k') \mathbb{P}(x_{j-1}^{N-1} = k | x_j^N = m, x_{j-1}^N = k')}{\mathbb{P}(x_{j-1}^{N-1} = k | x_{j-1}^N = k')}$$

Todas las probabilidades en cuestión son conocidas y son las siguientes:

- $x_{j-1}^{N-1} | x_{j-1}^N = k, x_j^N = k' \sim Uni_{fd}(m - k')$
- $x_j^N | x_{j-1}^N = k' \sim FS(p) - k'$
- $x_{j-1}^{N-1} | x_{j-1}^N = k' \sim Geom(p) - k'$

Por lo tanto, la probabilidad buscada es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x_j^N = m | x_{j-1}^{N-1} = k, x_{j-1}^N = k') &= \frac{\frac{1}{m-k'}(m-k')p^2(1-p)^{m-k'-1}}{p(1-p)^{k-k'-1}} \\ &= p(1-p)^{m-k} \end{aligned}$$

Reemplazando en 4.9:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x_j^N = m | x_{j-1}^{N-1} = k) &= \sum_{k'=k_0+j-2}^{m-1} p(1-p)^{m-k} \mathbb{P}(x_{j-1}^N = k' | x_{j-1}^{N-1} = k) \\ &= p(1-p)^{m-k} \sum_{k'=k_0+j-2}^{m-1} \mathbb{P}(x_{j-1}^N = k' | x_{j-1}^{N-1} = k) \\ &= p(1-p)^{m-k}, \end{aligned}$$

en donde, la suma restante da 1 pues suma sobre todos los posibles valores para  $x_{j-1}^N | x_{j-1}^{N-1} = k$ . Luego, reemplazando en 4.8 se obtiene lo buscado:

$$\begin{aligned} \sum_{m=k}^{n-1} p(1-p)^{n-m-1} \mathbb{P}(x_j^N = m | x_{j-1}^{N-1} = k) &= p^2 \sum_{m=k}^{n-1} (1-p)^{n-k-1} \\ &= (n-k)p^2(1-p)^{n-k-1} \end{aligned}$$

■ **Hipotesis Inductiva:** Supongamos que:

$$\mathbb{P}(x_j^i = n | x_{j-1}^i = k) = (n-k)p^2(1-p)^{n-k-1}$$

queremos probar que:

$$\mathbb{P}(x_j^{i+1} = n | x_{j-1}^{i+1} = k) = (n-k)p^2(1-p)^{n-k-1}$$

Para ello basta repetir el argumento hecho en el caso base pero para los niveles  $i$  y  $i+1$ :

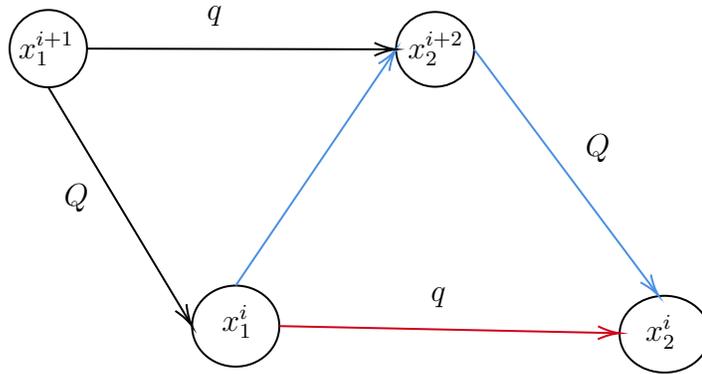


Figura 4.3: Forma alternativa para calcular la distribución de  $x_j^i | \{x_{j-1}^i = k\}$

con lo cual se concluye el resultado. □

El corolario anterior nos dice que la elección uniforme de los niveles inferiores al nivel  $N$  permite pasar las distribuciones de los “gaps” de un nivel a otros niveles inferiores y que se comporten de la misma forma. Más aún, en la demostración del corolario se calcularon otras distribuciones que se enuncian a continuación:

**Proposición 4.1** Sea  $N \in \mathbb{N}$  y sea  $X^N = (x^1, x^2, \dots, x^N) \in \mathbb{GT}_N$  como en el teorema 4.1. Entonces para  $i \in \llbracket 2, N \rrbracket, j \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$ :

$$\mathbb{P}(x_j^{i-1} = n | x_j^i = k) = p(1-p)^{n-k-1}, \quad (4.10)$$

es decir, los “gaps” para la diagonal  $\{x_j^{N-k}\}_{k=0}^{N-j}$  son independientes y de la misma ley  $\forall j \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ . Además para  $i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, j \in \llbracket 2, i \rrbracket$ :

$$\mathbb{P}(x_j^i = n | x_{j-1}^{i-1} = k) = p(1-p)^{n-k}, \quad (4.11)$$

es decir, los "gaps" para la diagonal  $\{x_{1+k}^{j+k}\}_{k=0}^{N-j}$  son independientes y de la misma ley  $\forall j \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ .

La proposición anterior permite caracterizar la condición inicial de los procesos marginales TASEP y PUSH-TASEP en el arreglo triangular pero, lamentablemente, no es posible que dada una condición inicial en el proceso TASEP encontrar una única condición inicial fija en el arreglo triangular como ocurría en el caso mencionado en el teorema 1.8. Dado que se tiene este comportamiento al considerar la condición inicial del teorema 1.7 se estudiará en la siguiente sección si es posible encontrar un teorema similar al teorema 4.1 bajo esta condición inicial.

## 4.2. Condición inicial uniforme sobre $\mathbb{GT}$

Al igual que antes se considera una distribución inicial como en 4.1. Es sabido que una medida conservativa sobre ambos procesos es la condición empaquetada. Esto se puede apreciar en el teorema 1.8 que permite caracterizar la evolución del proceso TASEP. Con esto surge la pregunta de si es posible encontrar otra distribución que permita generar un teorema similar, como por ejemplo la distribución geométrica que en la sección anterior no dependía del tamaño del arreglo triangular. Para ello primero estudiemos el caso  $N = 2$ . En este caso para ambas distribuciones iniciales se tiene la siguiente igualdad:

$$\Lambda_1^2(x^2, x^1) = \frac{1}{x_2^2 - x_1^2} = Unif_d(x_2^2 - x_1^2)$$

Con esto tendremos que  $q$  cumple la ecuación 4.4. La idea es verificar si esta igualdad se sigue manteniendo para el caso  $N = 3$  o en caso contrario, encontrar la nueva fórmula que relacione ambas matrices. Para ello se calcularán distribuciones marginales hasta llegar a la distribución deseada y se verá el porque no se puede mantener la ecuación 4.4. Primero se calcula la distribución marginal de  $x_1^2$  dado el nivel  $x^3$  utilizando la distribución conjunta de  $x^2$  dado el nivel  $x^3$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x_1^2 = k_1 | x^3 = (n_1, n_2, n_3)) &= \sum_{k_2=n_2+1}^{n_3} \mathbb{P}((x_1^2, x_2^2) = (k_1, k_2) | x^3 = (n_1, n_2, n_3)) \\ &= \sum_{k_2=n_2+1}^{n_3} \frac{2(k_2 - k_1)}{(n_3 - n_2)(n_2 - n_1)(n_3 - n_1)} \\ &= \frac{n_3 + n_2 + 1 - 2k_1}{(n_2 - n_1)(n_3 - n_1)} \end{aligned}$$

Luego, se calcula la distribución de  $x_1^2$  dada las partículas  $x_1^3, x_2^3$ :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(x_1^2 = k_1 | (x_1^3, x_2^3) = (n_1, n_2)\right) \\
&= \sum_{n_3 \geq n_2+1} \mathbb{P}\left(x_1^2 = k_1 | x^3 = (n_1, n_2, n_3)\right) \mathbb{P}\left(x_3^3 = n_3 | (x_1^3, x_2^3) = (n_1, n_2)\right) \\
&= \sum_{n_3 \geq n_2+1} \frac{n_3 + n_2 + 1 - 2k_1}{(n_2 - n_1)(n_3 - n_1)} q(n_2, n_3) \\
&= \frac{1}{(n_2 - n_1)} \sum_{n_3 \geq n_2+1} q(n_2, n_3) + \sum_{n_3 \geq n_2+1} \frac{n_2 + n_1 + 1 - 2k_1}{(n_2 - n_1)(n_3 - n_1)} q(n_2, n_3) \\
&= \frac{1}{(n_2 - n_1)} + \frac{n_2 + n_1 + 1 - 2k_1}{(n_2 - n_1)} \sum_{n_3 \geq n_2+1} \frac{q(n_2, n_3)}{n_3 - n_1},
\end{aligned}$$

en donde, se utilizo probabilidades totales con respecto a la partícula  $x_3^3$ . Finalmente se calcula la distribución de  $x_1^2$  dada la posición de  $x_1^3$  utilizando probabilidades totales pero ahora con respecto a la variable  $x_2^3$ :

$$\begin{aligned}
Q(n_1, k_1) &= \mathbb{P}\left(x_1^2 = k_1 | x_1^3 = n_1\right) \\
&= \sum_{n_2 \geq k_1} \mathbb{P}\left(x_1^2 = k_1 | (x_1^3, x_2^3) = (n_1, n_2)\right) \mathbb{P}\left(x_2^3 = n_2 | x_1^3 = n_1\right) \\
&= \sum_{n_2 \geq k_1} \left( \frac{1}{(n_2 - n_1)} + \frac{n_2 + n_1 + 1 - 2k_1}{(n_2 - n_1)} \sum_{n_3 \geq n_2+1} \frac{q(n_2, n_3)}{n_3 - n_1} \right) q(n_1, n_2) \\
&= \sum_{n_2 \geq k_1} \frac{q(n_1, n_2)}{(n_2 - n_1)} + \sum_{n_2 \geq k_1} \frac{q(n_1, n_2)}{(n_2 - n_1)} (n_2 + n_1 + 1 - 2k_1) \sum_{n_3 \geq n_2+1} \frac{q(n_2, n_3)}{n_3 - n_1}
\end{aligned}$$

En la ultima igualdad se nota que si la matriz  $q$  cumple la igualdad 4.4 entonces la primera serie da como resultado el termino  $Q(n_1, k_1)$  que se anula con el termino de la izquierda. Por lo tanto si tomamos  $k_1 = n_1 + 1$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n_2 \geq n_1+1} \frac{q(n_1, n_2)}{(n_2 - n_1)} (n_2 - n_1 - 1) \sum_{n_3 \geq n_2+1} \frac{q(n_2, n_3)}{n_3 - n_1} \\
&= \sum_{n_2 \geq n_1+2} \frac{q(n_1, n_2)}{(n_2 - n_1)} (n_2 - n_1 - 1) \sum_{n_3 \geq n_2+1} \frac{q(n_2, n_3)}{n_3 - n_1} \\
&\Rightarrow \forall n_2 \geq n_1 : q(n_1, n_2) = 0 \vee \sum_{n_3 \geq n_2+1} \frac{q(n_2, n_3)}{n_3 - n_1} = 0 \\
&\Rightarrow \forall n_2 \geq n_1 + 2 : q(n_1, n_2) = 0 \vee (\forall n_3 \geq n_2 + 1 : q(n_2, n_3) = 0)
\end{aligned}$$

A diferencia de la sección anterior, la partícula  $x_1^2$  es dependiente de la posición de la partícula  $x_3^3$ , por lo tanto la formula para el caso  $N = 2$  ya no sera valida. Más aún, el único caso en que fuese cierta seria el caso en que se fuerzan a ser independientes, lo cual solo ocurre cuando existe una única forma de determinar el nivel inferior, es decir, para el caso empaquetado. Por lo tanto la ecuación 4.4 no se cumple en general para todo  $N \in \mathbb{N}$ . La idea entonces sera intentar encontrar una expresión explicita para  $Q$  en función de  $q$ . Volviendo

a la formula encontrada anteriormente:

$$Q(n_1, k_1) = \sum_{n_2 \geq k_1} \frac{q(n_1, n_2)}{(n_2 - n_1)} + \sum_{n_2 \geq k_1} \frac{q(n_1, n_2)}{(n_2 - n_1)} (n_2 + n_1 + 1 - 2k_1) \sum_{n_3 \geq n_2+1} \frac{q(n_2, n_3)}{n_3 - n_1}$$

Calculando la diferencia de términos consecutivos:

$$\begin{aligned} & Q(n_1, k_1) - Q(n_1, k_1 + 1) \\ &= \frac{q(n_1, k_1)}{(k_1 - n_1)} + \frac{q(n_1, k_1)}{(k_1 - n_1)} (n_1 + 1 - k_1) \sum_{n_3 \geq k_1+1} \frac{q(k_1, n_3)}{n_3 - n_1} - 2 \sum_{n_2 \geq k_1+1} \frac{q(n_1, n_2)}{(n_2 - n_1)} \sum_{n_3 \geq n_2+1} \frac{q(n_2, n_3)}{n_3 - n_1} \end{aligned}$$

Calculando la diferencia de términos a distancia 2:

$$\begin{aligned} & Q(n_1, k_1) - Q(n_1, k_1 + 2) \\ &= \left( \frac{q(n_1, k_1)}{k_1 - n_1} - \frac{q(n_1, k_1 + 1)}{k_1 - n_1 + 1} \right) - 2 \frac{q(n_1, k_1 + 1)}{(k_1 + 1 - n_1)} \sum_{n_3 \geq k_1+2} \frac{q(k_1 + 1, n_3)}{n_3 - n_1} \\ &+ \left( \frac{q(n_1, k_1)}{(k_1 - n_1)} (n_1 + 1 - k_1) \sum_{n_3 \geq k_1+1} \frac{q(k_1, n_3)}{n_3 - n_1} - \frac{q(n_1, k_1 + 1)}{(k_1 + 1 - n_1)} (n_1 - k_1) \sum_{n_3 \geq k_1+2} \frac{q(k_1 + 1, n_3)}{n_3 - n_1} \right) \\ &= \left( \frac{q(n_1, k_1)}{k_1 - n_1} - \frac{q(n_1, k_1 + 1)}{k_1 - n_1 + 1} \right) - \frac{q(n_1, k_1 + 1)}{(k_1 + 1 - n_1)} \sum_{n_3 \geq k_1+2} \frac{q(k_1 + 1, n_3)}{n_3 - n_1} \\ &+ \frac{q(n_1, k_1)}{(k_1 - n_1)} \sum_{n_3 \geq k_1+1} \frac{q(k_1, n_3)}{n_3 - n_1} - \left( q(n_1, k_1) \sum_{n_3 \geq k_1+1} \frac{q(k_1, n_3)}{n_3 - n_1} + q(n_1, k_1 + 1) \sum_{n_3 \geq k_1+2} \frac{q(k_1 + 1, n_3)}{n_3 - n_1} \right) \end{aligned}$$

La ecuación anterior es una ecuación integral discreta la cual es compleja y las técnicas anteriormente utilizadas no parecieran ser útiles para la resolución de esta. Incluso, considerando el caso de interés cuando  $Q$  es una distribución geométrica la ecuación no se simplifica pues solo modifica el lado izquierdo de las igualdades anteriores:

$$\begin{aligned} & p^2(1 - p)^{k_1 - n_1 - 1} \\ &= \frac{q(n_1, k_1)}{(k_1 - n_1)} + \frac{q(n_1, k_1)}{(k_1 - n_1)} (n_1 + 1 - k_1) \sum_{n_3 \geq k_1+1} \frac{q(k_1, n_3)}{n_3 - n_1} - 2 \sum_{n_2 \geq k_1+1} \frac{q(n_1, n_2)}{(n_2 - n_1)} \sum_{n_3 \geq n_2+1} \frac{q(n_2, n_3)}{n_3 - n_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & p^2(1 - p)^{k_1 - n_1 - 1} (2 - p) \\ &= \left( \frac{q(n_1, k_1)}{k_1 - n_1} - \frac{q(n_1, k_1 + 1)}{k_1 - n_1 + 1} \right) - \frac{q(n_1, k_1 + 1)}{(k_1 + 1 - n_1)} \sum_{n_3 \geq k_1+2} \frac{q(k_1 + 1, n_3)}{n_3 - n_1} \\ &+ \frac{q(n_1, k_1)}{(k_1 - n_1)} \sum_{n_3 \geq k_1+1} \frac{q(k_1, n_3)}{n_3 - n_1} - \left( q(n_1, k_1) \sum_{n_3 \geq k_1+1} \frac{q(k_1, n_3)}{n_3 - n_1} + q(n_1, k_1 + 1) \sum_{n_3 \geq k_1+2} \frac{q(k_1 + 1, n_3)}{n_3 - n_1} \right) \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que encontrar una formula explícita es bastante difícil. Más aún, al considerar un  $N \in \mathbb{N}$  la ecuación se complejiza mas, con lo cual encontrar una forma explicita que relacione ambas matrices de transición se escapa de mis conocimientos y de los contenidos de esta tesis. Esto termina por convencer que si existe alguna otra distribución que haga lo mismo que la condición empaquetada no debiese tener una formula explícita.

# Conclusión

El estudio de los procesos TASEP y los arreglos triangulares ha sido estudiado por distintas razones, pues guarda relación con problemas en áreas de las ecuaciones en derivadas parciales, física estadística, etc. En este trabajo se dio mayor énfasis al efecto que puede provocar el arreglo triangular sobre el proceso TASEP y las aplicaciones asociadas a nuevas dinámicas no Markovianas sobre problemas específicos.

Uno de los objetivos logrados fue el definir dinámicas sobre los arreglos triangulares que permitieran mantener propiedades similares a las obtenidas en dinámicas Markovianas pero que se ven modificadas por un efecto de desfase temporal, en donde se obtuvieron resultados que permitieron relacionar estas dinámicas a las presentadas en [1].

Dentro de las aplicaciones que tienen los arreglos triangulares se logro detallar como se ven afectadas al momento de considerar dinámicas con memoria extendidas y una forma equivalente para generar un sistemas de lineas no-intersectates. También se logro apreciar el efecto de desfase al momento de simular estas lineas pues gracias a la variable temporal se retrasa el inicio de ciertas partículas.

En la dinámica secuencial se observo que el efecto que provoca el considerar una elección uniforme por niveles en el arreglo triangular permite heredar este efecto a niveles inferiores y, por lo tanto, heredar la Markovianidad a todo el arreglo triangular y al proceso marginal TASEP. Más aún, se demostró que existe una única forma de hacerlo la cual permite observar al proceso TASEP con una condición inicial geométrica la cual no depende del punto de partida. Lamentablemente para la condición inicial que permitía caracterizar la evolución del arreglo triangular completo no se logro el objetivo de encontrar una formula explicita pero se explico la problemática que trae el considerar una condición inicial de esa forma y que todo pareciera indicar que no existe una formula explicita que tenga esta propiedad.

Una primera continuación de este trabajo puede ser el estudiar que otras propiedades sobre los arreglos triangulares con dinámica Markoviana se pueden mantener para dinámicas con memoria en donde el rol de la memoria es vital debido al desfase temporal que provoca entre las partículas. También si es posible extender esta condición inicial uniforme por niveles para dinámicas con memoria y lograr encontrar un teorema similar al presentando en el capitulo 4 (Teorema 4.1) pues se lograría encontrar una medida conservativa para el proceso TASEP en estas dinámicas.

Otra pregunta que surge es si existen mas formas de colocar las partículas para dinámicas con memoria que generen un sistemas de lineas no-intersectantes pero que la figura resultante sea una del mismo tipo como lo que ocurre con el diamante Azteca. Una posible extensión

sería ir considerando los pares de la forma  $(X, Y)$  pues estos van generando dominós y de esta manera se podrían generar figuras relacionadas al diamante Azteca como por ejemplo embaldosar una sub-área de la figura completa.

# Bibliografia

- [1] K. Matetski and D. Remenik, “Tasep and generalizations: Method for exact solution,” *arXiv preprint arXiv:2107.07984*, 2021.
- [2] A. Borodin and P. Ferrari, “Random tilings and markov chains for interlacing particles, preprint (2015),” *arXiv preprint arXiv:1506.03910*.
- [3] K. Johansson, “Shape fluctuations and random matrices,” *Communications in mathematical physics*, vol. 209, no. 2, pp. 437–476, 2000.
- [4] K. Matetski, J. Quastel, and D. Remenik, “The kpz fixed point,” *arXiv preprint arXiv:1701.00018*, 2016.
- [5] A. Borodin, P. L. Ferrari, and T. Sasamoto, “Large time asymptotics of growth models on space-like paths ii: Png and parallel tasep,” *Communications in mathematical physics*, vol. 283, no. 2, pp. 417–449, 2008.
- [6] T. M. Liggett *et al.*, *Stochastic interacting systems: contact, voter and exclusion processes*, vol. 324. springer science & Business Media, 1999.
- [7] T. M. Liggett and T. M. Liggett, *Interacting particle systems*, vol. 2. Springer, 1985.
- [8] Y. Arai, “The kpz fixed point for discrete time taseps,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 53, no. 41, p. 415202, 2020.
- [9] T. M. Liggett, “Te harris’ contributions to interacting particle systems and percolation,” *The Annals of Probability*, vol. 39, no. 2, pp. 407–416, 2011.
- [10] A. Borodin and P. L. Ferrari, “Anisotropic growth of random surfaces in 2+ 1 dimensions,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 325, no. 2, pp. 603–684, 2014.
- [11] S.-J. Wu and M. T. Chu, “Markov chains with memory, tensor formulation, and the dynamics of power iteration,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 303, pp. 226–239, 2017.
- [12] K. Johansson, “The arctic circle boundary and the airy process,” *The annals of probability*, vol. 33, no. 1, pp. 1–30, 2005.

# Anexo

## Figuras

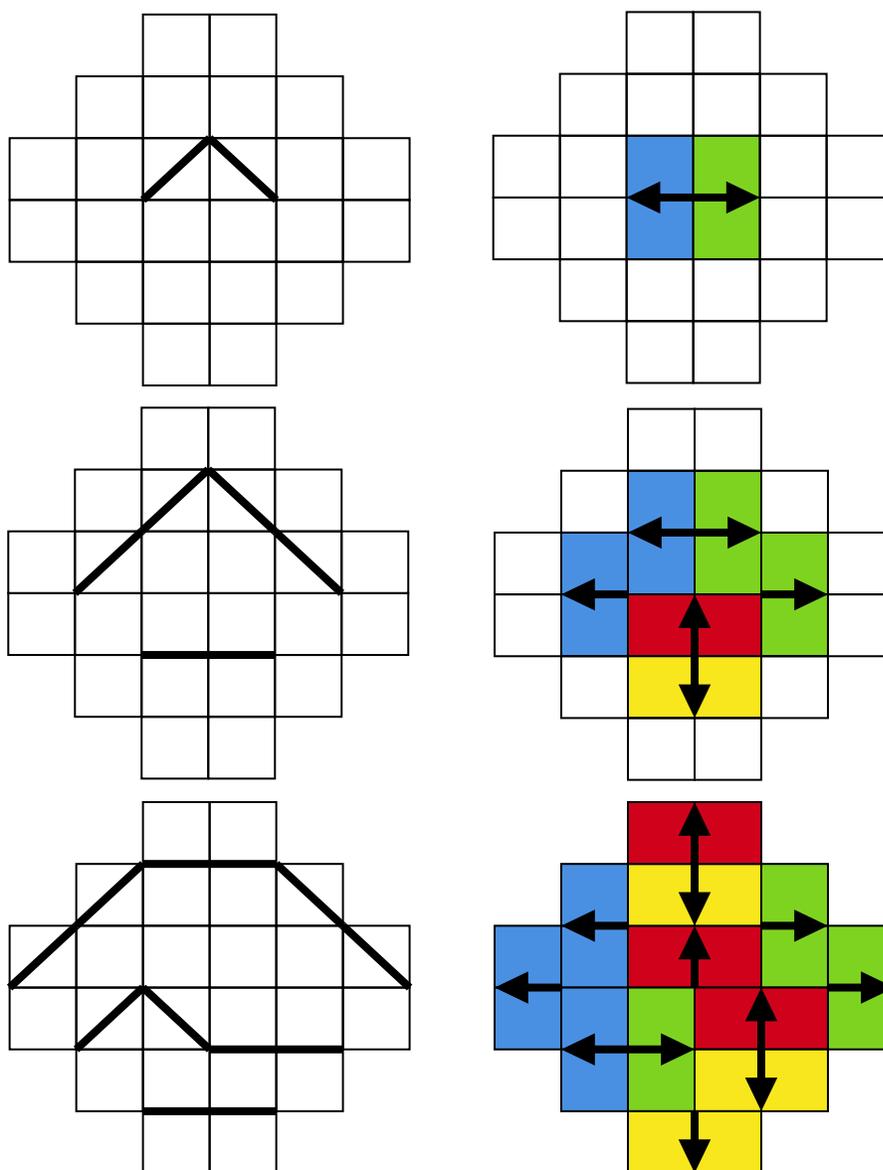
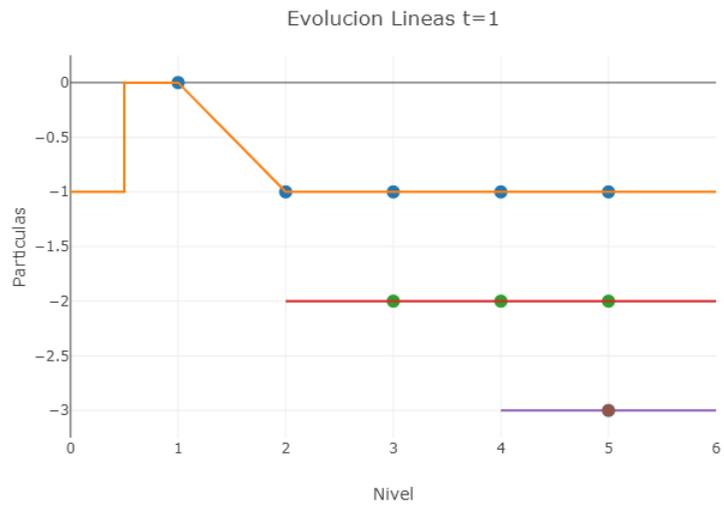
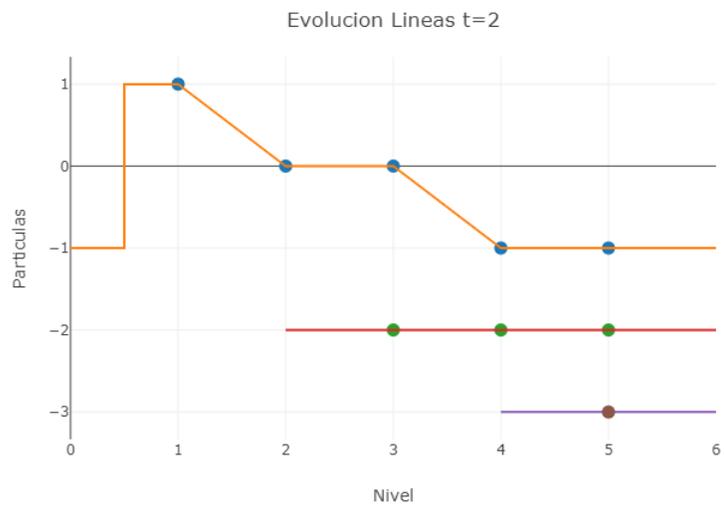


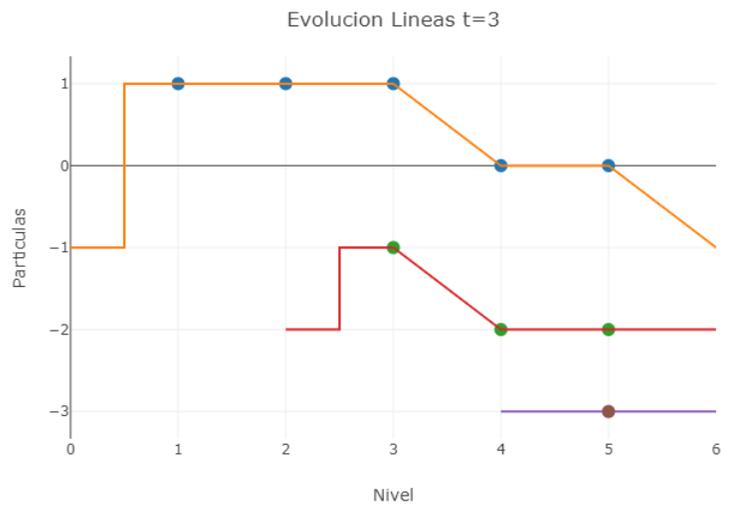
Figura 4.1: Ejemplo evolución Líneas no-intersectantes y Diamante Azteca para  $t = 1, 2$  y  $3$ .



(a)  $t = 1$

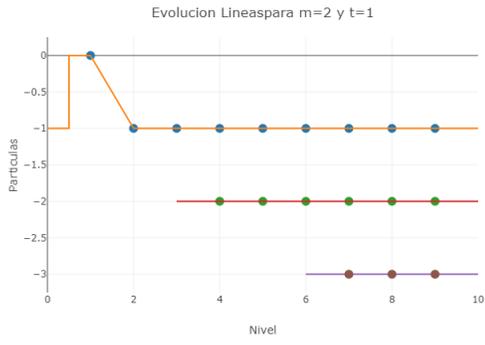


(b)  $t = 2$

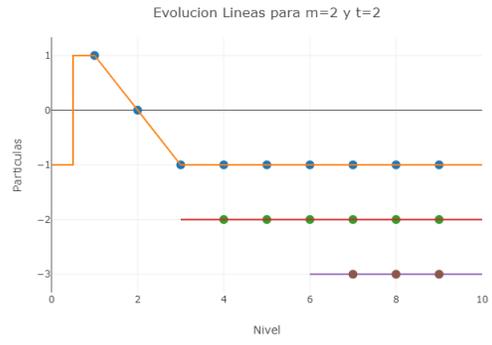


(c)  $t = 3$

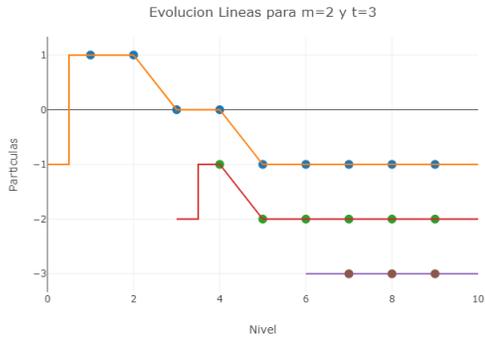
Figura 4.2: Ejemplo evolución Líneas no-intersectantes para  $t = 1, 2$  y  $3$ .



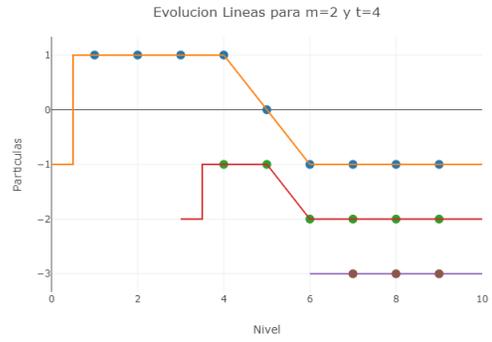
(a)  $t = 1$



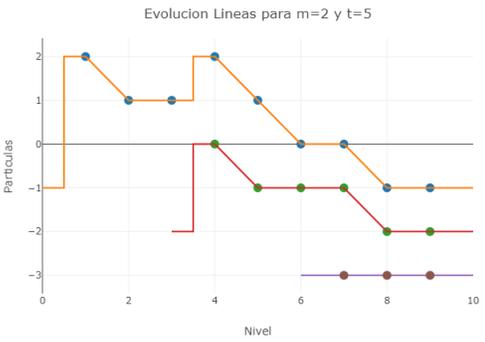
(b)  $t = 2$



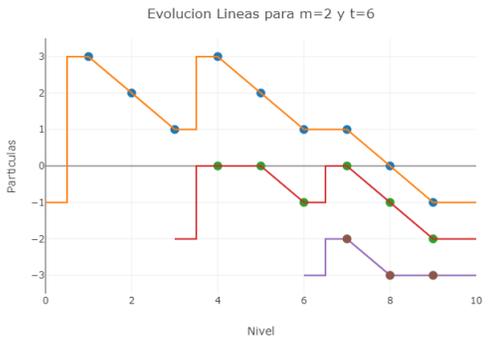
(c)  $t = 3$



(d)  $t = 4$



(e)  $t = 5$



(f)  $t = 6$

Figura 4.3: Ejemplo evolución Líneas no-intersectantes con memoria 2 para  $t = 1, \dots, 6$ .