

UCH-FC
DOC-M
E776
c.1



Dominios fundamentales en ciertos cuerpos de números

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias
por

Milton Alfonso Espinoza Espinoza

Julio, 2012

Director de Tesis: Dr. Eduardo Friedman

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato

Milton Alfonso Espinoza Espinoza

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día

Director de Tesis:

Dr. Eduardo Friedman

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Luis Arenas

Dr. Yves Martin

Dr. Andrés Navas

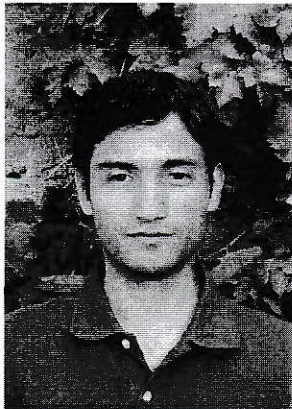
Eduardo Friedman
.....
Luis Arenas
.....
Yves Martin
.....
Andrés Navas
.....



FACULTAD DE CIENCIAS
BIBLIOTECA
CENTRAL
UNIVERSIDAD DE CHILE



A mi familia.



Nací el 27 de Abril de 1983 en Quilpué, ciudad donde he residido la mayor parte de mi vida y en la cual realicé mis estudios básicos. En esa época, siendo alumno del Colegio Camilo Henríquez, mis intereses eran muy variados. Ellos iban desde la literatura hasta la matemática, pasando por las ciencias naturales. Ciertamente, no formaban parte de aquel selecto grupo la historia, las técnicas manuales ni las artes plásticas. Es por esto que quizás sorprenda mi decisión de cursar la enseñanza media en la sección técnico-profesional del Colegio Salesiano Valparaíso, donde me especialicé en Electromecánica. Es

durante este periodo que el estudio de la matemática cobró especial interés en mí, a pesar de (o gracias a) la poca necesidad que en aquel régimen tenían de enseñárnosla. Su capacidad de afrontar misterios a veces poco intuitivos de una manera creativa, combinada con el cultivo sistemático de un conocimiento objetivo es lo que terminó por inclinarme hacia una carrera relacionada con ella en vez de hacia alguna de índole humanista o técnica. Poco me demoré en decidir estudiar matemática pura. Luego de realizar mi práctica profesional, comencé mi preparación para la PAA. Mis resultados en ella fueron bastante buenos y pude decidir libremente entre todas las universidades del país donde se impartía la licenciatura en matemática. En 2002 me matriculé en la Universidad de Valparaíso desde donde egresé el año 2005. Ya con una motivación fuerte y constante, ingresé en 2006 a la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile con el fin de cursar mis estudios de postgrado. Allí, luego de un periodo de indecisión respecto al área de especialización, he tenido el agrado de trabajar bajo la tutela del profesor Eduardo Friedman en teoría de números.

No ha sido la acumulación ostentosa de conocimiento, el gusto excluyente por un área específica del quehacer humano, ni menos la obsesión por algún problema en particular lo que me ha traído hasta acá, sino el deseo de entender por entender. Hasta la fecha, he podido aprender cosas maravillosas y conocer ideas extraordinarias. Sólo puedo decir, para finalizar, que deseo y confío en que esta travesía continúe extendiéndose hacia las fronteras del mundo posible.



Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi tutor Eduardo Friedman por todo el tiempo, dedicación y preocupación que tan generosamente ha invertido en este proyecto. Cuando decidí preguntarle al profesor Friedman si era posible que guiara mi tesis de doctorado, lo hice convencido que era alguien de quien podría aprender mucho. Así ha sido. Sus consejos, tanto en la dimensión académica como en la humana, han tenido gran relevancia en mi formación durante estos últimos años y los he apreciado en función del alto valor que ellos merecen.

Agradezco a los profesores y funcionarios del Departamento de matemáticas de la Facultad de ciencias de la Universidad de Chile. Ellos hicieron posible en base a su calidad personal, profesional o académica que mi estadía allí fuera tan grata como rica en aprendizaje. También quiero agradecer a mis compañeros de oficina, los designados y los auto-designados; agradecerles los ratos de estudio, su apoyo, consideración y su sentido del humor.

Quisiera agradecer muy especialmente a mi familia, por haber creado un ambiente adecuado para que yo haya podido llegar hasta acá y por haber alentado cada una de las decisiones que tomé hasta trazar el camino.

Agradezco a la Universidad de Chile por su apoyo económico, el cual fue muy importante para la concreción de este trabajo. Y finalmente, agradezco el apoyo de los proyectos FONDECYT N°1085153 y N°1110277.

Resumen

Damos un dominio fundamental “virtual” para la acción sobre $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r$ de las unidades totalmente positivas $E(k)_+$ de un cuerpo de números k , provisto de exactamente un par de incrustaciones complejas y r incrustaciones reales (*i. e.* $[k : \mathbb{Q}] = r + 2$). Este dominio fundamental virtual, formado a partir de conos simpliciales, es tan conveniente para el estudio de funciones zeta de Dedekind como lo es un verdadero dominio fundamental. Sin embargo, mientras no existe una construcción general de un verdadero dominio fundamental, en esta tesis construimos un dominio fundamental virtual a partir de cualquier conjunto de unidades fundamentales de k .

Abstract

We give a “virtual” fundamental domain for the action on $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r$ of the totally positive units $E(k)_+$ of a number field k with r real embeddings and one pair of complex embeddings (*i. e.* $[k : \mathbb{Q}] = r + 2$). This virtual fundamental domain, built of simplicial cones, is as convenient as a true fundamental domain for the purpose of studying Dedekind zeta functions. However, while there is no general construction of a true fundamental domain, in this thesis we construct a virtual fundamental domain from any set of fundamental units of k .

Índice general

Introducción	1
1. Resultados	5
1.1. Algoritmo de los siete pasos	5
1.2. Ejemplos	9
1.3. Corolarios del teorema principal	16
2. Construcción de f	18
2.1. Dominio fundamental virtual	18
2.2. El argumento en la incrustación compleja	18
2.3. Dominio de f	28
2.4. La función afín por trozos f	41
3. Demostración del teorema principal	52
3.1. Dos funciones entre toros	52
3.2. Algunos resultados previos	59
3.3. Cálculo de grados	62
3.3.1. Grado global	62
3.3.2. Grado local: El caso fácil	63
3.3.3. Grado local: El caso general	63
3.4. Prueba del teorema principal	64

Introducción

Motivado por el estudio de valores especiales de funciones L sobre cuerpos de números totalmente reales, Takuro Shintani introdujo en 1976 [7] un método geométrico que le permitió escribir cualquier función zeta parcial asociada a un cuerpo de números totalmente real como una suma finita de ciertas series de Dirichlet, las cuales pueden considerarse como una generalización natural de la función zeta de Hurwitz. Posteriormente [8] el mismo Shintani extendió estos resultados a cuerpos de números en general. Jürgen Neukirch [4, p. 506] escribió acerca de dicho método: “Es un raro y especial evento que una nueva idea sustancial sea añadida a los fundamentos de la teoría algebraica de números”.

Con el fin de enunciar el resultado geométrico de Shintani, fijemos un cuerpo de números k , provisto de s pares de incrustaciones complejas y r incrustaciones reales (*i. e.* $[k : \mathbb{Q}] = 2s + r$), y escribamos como $E(k)$ su grupo de unidades. Dado un conjunto $\tau_i : k \rightarrow \mathbb{C}$ ($1 \leq i \leq s + r$) de incrustaciones de k , de modo que

$$\underbrace{\tau_1, \bar{\tau}_1, \tau_2, \bar{\tau}_2, \dots, \tau_s, \bar{\tau}_s}_{\text{complejas}}, \underbrace{\tau_{s+1}, \tau_{s+2}, \dots, \tau_{s+r}}_{\text{reales}} \quad (1)$$

es el conjunto completo de incrustaciones, podemos considerar $k \subset \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}^r$ identificando $x \in k$ con

$$(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(s+r)}) \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}^r,$$

donde $x^{(i)} := \tau_i(x)$. Mediante esta identificación, pongamos

$$E(k)_+ := E(k) \cap (\mathbb{C}^s \times \mathbb{R}_+^r) \quad \text{y} \quad k_+ := k \cap ((\mathbb{C}^*)^s \times \mathbb{R}_+^r),$$

donde $\mathbb{R}_+^r := (0, \infty)^r$. Entonces, el grupo $E(k)_+$ de unidades totalmente positivas de k actúa sobre $(\mathbb{C}^*)^s \times \mathbb{R}_+^r$ por multiplicación componente a componente, donde $(\mathbb{C}^*)^s := (\mathbb{C} \setminus \{0\})^s$. Por otro lado, si $v_1, v_2, \dots, v_d \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}^r$ ($1 \leq d \leq 2s + r$) es un conjunto de vectores \mathbb{R} -linealmente independientes, llamaremos al conjunto

$$C(v_1, v_2, \dots, v_d) := \{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_d v_d \mid t_i > 0\}, \quad (2)$$

un cono simplicial d -dimensional con generadores v_1, v_2, \dots, v_d .

Según Shintani [8, Proposition 2], existe un conjunto finito $\{C_j \mid j \in J\}$ ($|J| < \infty$) de conos simpliciales, todos con generadores en k_+ , tales que

$$(\mathbb{C}^*)^s \times \mathbb{R}_+^r = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{\varepsilon \in E(k)_+} \varepsilon C_j \quad (\text{unión disjunta}).$$

Equivalentemente, lo anterior dice que la unión finita y disjunta sobre el conjunto $\{C_j \mid j \in J\}$ es un dominio fundamental para la acción de $E(k)_+$ sobre $(\mathbb{C}^*)^s \times \mathbb{R}_+^r$. Como ya mencionamos, este resultado permitió a Shintani lograr una fórmula [8, Proposition 3] que relaciona funciones zeta parciales con ciertas series de Dirichlet, hoy llamadas funciones zeta de Shintani. Sin embargo, ni dicho resultado, ni su demostración, entregan muchas luces respecto de cómo escoger aquellos conos, o cuántos de ellos se necesitan para describir un tal dominio fundamental, o qué dimensiones deben tener. Pierre Colmez, interesado en dar una fórmula para el residuo de una función zeta p -ádica, es el primero en mostrar que una respuesta a estas interrogantes puede ser de utilidad.

Para el caso en que k es un cuerpo de números totalmente real (*i. e.* $s = 0$ y $[k : \mathbb{Q}] = r$), Colmez demuestra [1][2] la existencia de unidades especiales $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{r-1} \in E(k)_+$, tales que si ponemos

$$f_{1,\sigma} := 1 \quad \text{y} \quad f_{j,\sigma} := \eta_{\sigma(1)} \eta_{\sigma(2)} \cdots \eta_{\sigma(j-1)} \quad (2 \leq j \leq r),$$

para σ en el grupo simétrico S_{r-1} , la unión finita y disjunta

$$\{C_\sigma := C(f_{1,\sigma}, \dots, f_{r,\sigma}) \mid \sigma \in S_{r-1}\}$$

(junto a algunas caras en la frontera de los C_σ) es un dominio fundamental de \mathbb{R}_+^r bajo la acción del subgrupo U generado por las η_i . Lamentablemente, no se conoce un algoritmo práctico para encontrar estas unidades especiales cuando $r \geq 4$.

En 2011, Francisco Díaz y Díaz y Eduardo Friedman [3] lograron superar este inconveniente considerando dominios fundamentales “virtuales”. Más precisamente, si $\eta_1, \dots, \eta_{r-1}$ es cualquier conjunto de unidades independientes en $E(k)_+$, entonces los conos de Colmez C_σ , junto a algunas de las caras en sus fronteras, forman un dominio fundamental “virtual” para la acción sobre \mathbb{R}_+^r del subgrupo U generado por las η_i . Es decir,

$$\sum_{\substack{w_\sigma=+1 \\ \sigma \in S_{r-1}}} \sum_{z \in C_\sigma \cap U \cdot x} 1 - \sum_{\substack{w_\sigma=-1 \\ \sigma \in S_{r-1}}} \sum_{z \in C_\sigma \cap U \cdot x} 1 = 1 \quad (x \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r), \quad (3)$$

donde todas las sumas son finitas, y $w_\sigma = \pm 1$ es un signo asociado al cono C_σ .¹ Estos dominios fundamentales virtuales son tan convenientes como los verdaderos dominios fundamentales para aplicar el método de Shintani a funciones zeta parciales. Además, tienen la ventaja de poder ser construidos explícitamente a partir de cualquier conjunto de unidades independientes $\eta_1, \dots, \eta_{r-1} \in E(k)_+$.

Para la prueba de este resultado, Díaz y Díaz y Friedman utilizaron la teoría del grado topológico sobre la variedad cociente $\mathbb{R}_+^r/E(k)_+$. La invarianza del grado topológico por homotopías les permitió controlar la deformación de un dominio fundamental curvo (el cual es casi inútil, pero fácil de describir) a uno descrito a través de conos simpliciales k -racionales. El signo w_σ asociado al cono C_σ se debe a que durante la homotopía pueden ocurrir cruces, lo que hace necesario tener que restar algunos de los conos.

Para el caso en que k es un cuerpo de números no totalmente real, no es mucho lo que se sabe respecto a estos dominios fundamentales expresados como unión de conos simpliciales explícitos. Es posible encontrar algunos ejemplos en el artículo [6] de Robert Sczech y Tian Ren, quienes escribieron conos explícitos para dar evidencia numérica de su refinamiento de la conjetura de Stark sobre cuerpos de números cúbicos complejos. Un tratamiento algo más general es el que realiza Ryotaro Okazaki [5], quien también construye conos explícitos para el cuerpo definido por el polinomio $X^3 + kX - 1$.

Fijemos en adelante un cuerpo de números k con exactamente un par de incrustaciones complejas conjugadas (*i. e.* $s = 1$ y $[k : \mathbb{Q}] = r + 2$). El objetivo de esta tesis es extender los resultados de Díaz y Díaz-Friedman al cuerpo k . Para tal extensión nos encontramos con dos complicaciones fundamentales. La primera de ellas es que, a diferencia del caso totalmente real, en el cual los conos de Colmez están generados por los $f_{i,\sigma}$ ($1 \leq i \leq [k : \mathbb{Q}]$), aquí

$$[k : \mathbb{Q}] - \text{rank}(E(k)_+) = 2,$$

donde $\text{rank}(E(k)_+)$ es el rango del grupo $E(k)_+$. Esto hace necesario tener que escoger elementos en k_+ que junto a las unidades dadas generen conos de dimensión $[k : \mathbb{Q}]$. La otra complicación nace de la no-convexidad del espacio $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r$, en contraposición a la convexidad del espacio \mathbb{R}_+^r del caso totalmente real. Aquí, tener elementos \mathbb{R} -linealmente independientes en $k_+ \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r$ no asegura que el cono que ellos generan esté contenido en $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r$. Esto trae consecuencias en la utilización de la teoría del grado topológico, pues no es obvio cómo construir homotopías en un subconjunto no convexo.

¹De hecho, en [1], las unidades especiales η_i están caracterizadas por la condición $w_\sigma = +1$ para todo $\sigma \in S_{r-1}$.

Esta tesis está dividida en tres capítulos. En el primero de ellos se exponen, sin demostración, los principales resultados. En particular, el Teorema 1 da, para cualquier conjunto de unidades independientes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r \in E(k)_+$, un algoritmo que construye un dominio fundamental virtual de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r$ bajo la acción del subgrupo que generan las ε_i . Además, mostramos un par de ejemplos de la utilización de este algoritmo. También demostramos que un dominio fundamental virtual es tan útil como uno verdadero para aplicar el método de Shintani a funciones zeta parciales. El segundo capítulo, el meollo de esta tesis, está orientado a lidiar con la no-convexidad del espacio $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r$. En particular, escogemos ahí generadores de los conos de dimensión $[k : \mathbb{Q}]$ que componen nuestro dominio fundamental virtual y construimos una función afín por trozos que será esencial en la prueba del Teorema 1. Finalmente, en el capítulo 3 definimos las funciones sobre un toro que nos permitirán luego trabajar con homotopías. Siguiendo las líneas de [3], probamos el Teorema 1 usando la teoría del grado topológico. Además, determinamos qué parte de la frontera de los conos se incluye en el dominio fundamental virtual.

Capítulo 1

Resultados

Empecemos por notar que cuando k es un cuerpo de números cuadrático complejo, $E(k)_+$ es un grupo cíclico finito, por lo que es fácil describir un dominio fundamental de \mathbb{C}^* bajo la acción de $E(k)_+$. En adelante, no consideraremos este caso.

Para $r = \text{rank}(E(k)_+) > 0$, fijemos en adelante un conjunto de unidades independientes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \in E(k)_+$, y pongamos $V \subset E(k)_+$ el subgrupo que ellas generan. Siguiendo la notación de Colmez [1], definimos

$$f_{t,\sigma} := \varepsilon_{\sigma(1)} \varepsilon_{\sigma(2)} \cdots \varepsilon_{\sigma(t-1)} = \prod_{j=1}^{t-1} \varepsilon_{\sigma(j)} \quad (1 \leq t \leq r+1, \sigma \in S_r). \quad (1.1)$$

Para $t = 1$, entendemos $f_{1,\sigma} := 1 = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r$. Así, claramente $f_{t,\sigma} \in E(k)_+ \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r$. Definimos además

$$\xi_{t,t',\sigma} := \tau_1(f_{t,\sigma}^{-1} f_{t',\sigma}) \in \mathbb{C}^* \quad (1 \leq t, t' \leq r+1, \sigma \in S_r). \quad (1.2)$$

Cuando en (1.2) tengamos $t = r+1$, escribiremos simplemente

$$\xi_{t',\sigma} := \xi_{r+1,t',\sigma} \quad (1 \leq t' \leq r+1, \sigma \in S_r). \quad (1.3)$$

Aquí, $\tau_1 : k \rightarrow \mathbb{C}$ es una de las dos incrustaciones complejas de k que hemos fijado en (1).

1.1. Algoritmo de los siete pasos

Con las convenciones anteriores, los siguientes pasos conducen a la obtención de un dominio fundamental virtual al estilo Díaz y Díaz–Friedman para la acción sobre $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r$ del grupo V (ver (3)).

1. Fijamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq 3$. En general, no incluiremos N en la notación, ya que siempre estará fijo en todo el algoritmo. El caso $N = 3$ es la elección que da lugar al mínimo de conos.

2. Para cada $t \in \mathbb{Z}$, escogemos $\alpha_t = \alpha(t) \in k_+$ tales que

$$\alpha_t = \alpha_{t'} \quad \text{si } t \equiv t' \pmod{N}, \quad \arg\left(\alpha_t^{(1)} \cdot \exp(-2\pi it/N)\right) \in \left(\frac{-\pi}{2N}, \frac{\pi}{2N}\right), \quad (1.4)$$

donde $\arg(z)$ representa, aquí y en adelante, el argumento del número complejo $z \in \mathbb{C}^*$ en el rango $[-\pi, \pi)$.¹ En general, tampoco incluiremos la elección de $\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}$ en la notación.

3. Sea $m : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ la función definida mediante

$$m(z) := \left\lceil \frac{-N \arg(z)}{2\pi} \right\rceil \quad (z \in \mathbb{C}), \quad -\frac{N}{2} < m(z) \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \quad (1.5)$$

donde la función techo $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ cumple $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$. Para $\sigma \in S_r$ y $1 \leq t \leq r + 1$ ($t \in \mathbb{Z}$), definamos

$$\theta_{t,\sigma} := \arg\left(\xi_{t,\sigma} \cdot \exp(2\pi im(\xi_{t,\sigma})/N)\right), \quad (1.6)$$

con $\xi_{t,\sigma}$ como en (1.3). Ordenamos² el conjunto $\{t \in \mathbb{Z} ; 1 \leq t \leq r + 1\}$ según $\sigma \in S_r$ mediante

$$t \prec_\sigma t' \iff (\theta_{t,\sigma} < \theta_{t',\sigma} \text{ ó } (\theta_{t,\sigma} = \theta_{t',\sigma} \text{ y } t' < t)). \quad (1.7)$$

4. Para $\sigma \in S_r$ tomamos $\rho_\sigma \in S_{r+1}$ tal que

$$\rho_\sigma(r+1) \prec_\sigma \rho_\sigma(r) \prec_\sigma \dots \prec_\sigma \rho_\sigma(2) \prec_\sigma \rho_\sigma(1). \quad (1.8)$$

5. Para $\mu = (\sigma, q, n)$, con $\sigma \in S_r$, $1 \leq q \leq r + 1$, $0 \leq n \leq N - 1$, $1 \leq t \leq r + 1$, definimos

$$f_{t,\mu} = f_{t,\sigma,q,n} := \begin{cases} f_{t,\sigma} \cdot \alpha(m(\xi_{t,\sigma}) + n) & \text{si } t \not\prec_\sigma \rho_\sigma(q), \\ f_{t,\sigma} \cdot \alpha(m(\xi_{t,\sigma}) + n + 1) & \text{si } t \prec_\sigma \rho_\sigma(q). \end{cases} \quad (1.9)$$

¹Pareciera más natural considerar como conjunto indexador de los α_t a los enteros módulo N . Sin embargo, hemos decidido no hacerlo para aligerar la notación.

²Es claro que el orden total estricto $<$ de \mathbb{R} induce en la relación \prec_σ , definida en (1.7), la cualidad de ser un orden total estricto del conjunto $\{t \in \mathbb{Z} ; 1 \leq t \leq r + 1\}$.

Para $t = r + 2$ definimos

$$f_{t,\mu} = f_{t,\sigma,q,n} := f_{\rho_\sigma(q),\sigma} \cdot \alpha(\mathfrak{m}(\xi_{\rho_\sigma(q),\sigma}) + n + 1). \quad (1.10)$$

Claramente, $f_{t,\mu} \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r$ para todo $1 \leq t \leq r+2$. Frecuentemente, abreviaremos $(\sigma, q, n) =: \mu$, de manera que $f_{t,\sigma,q,n} =: f_{t,\mu}$. Igualmente, abreviaremos

$$\tilde{S}_r := S_r \times \{1, 2, \dots, r+1\} \times \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (1.11)$$

y escribiremos $\mu \in \tilde{S}_r$. Notemos que la cardinalidad de \tilde{S}_r es $N \cdot (r+1)! = N \cdot ([k : \mathbb{Q}] - 1)!$.

6. Para $\mu = (\sigma, q, n) \in \tilde{S}_r$, definimos $w_\mu = \pm 1$ ó 0 como

$$w_\mu := \frac{\text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sign}(\det(f_{1,\mu}, f_{2,\mu}, \dots, f_{r+2,\mu}))}{\text{sign}(\det(\text{Log } \varepsilon_1, \text{Log } \varepsilon_2, \dots, \text{Log } \varepsilon_r))}, \quad (1.12)$$

donde $\text{sgn}(\sigma)$ es el signo usual (*i. e.* ± 1) de la permutación $\sigma \in S_r$,

$$\text{Log } \varepsilon_i \in \mathbb{R}^r, \quad (\text{Log } \varepsilon_i)^{(j)} := \log |\varepsilon_i^{(j)}| \quad (1 \leq j \leq r),$$

los $f_{i,\mu} \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r$ son considerados como elementos de \mathbb{R}^{r+2} mediante

$$(z, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}) \mapsto (\text{Re}(z), \text{Im}(z), x^{(1)}, \dots, x^{(r)}) \quad (z \in \mathbb{C}, x^{(i)} \in \mathbb{R}) \quad (1.13)$$

y $\text{sign}(\det(v_1, v_2, \dots, v_\ell))$ es el signo del determinante de la matriz de $\ell \times \ell$ que tiene por columnas a los v_i .

Notemos que el valor absoluto del determinante en el denominador de (1.12) es la mitad³ del regulador de las unidades independientes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$, y por ende no es nulo.

En adelante, cuando digamos que $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^\ell = \mathbb{R}^{\ell+2}$ como \mathbb{R} -espacio vectorial, nos estaremos refiriendo a la identificación de elementos dada por el isomorfismo (1.13) con $r = \ell$.

7. Notamos que para $\mu \in \tilde{S}_r$, con $w_\mu \neq 0$,⁴ el cono cerrado

$$\bar{C}_\mu := \sum_{t=1}^{r+2} \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot f_{t,\mu} \subset (\mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^r) \cup \{0\}$$

³Esto debido a que hemos considerado un cuerpo de números k con sólo un par de incrustaciones complejas.

⁴De (1.12), queda claro que $w_\mu \neq 0$ si, y sólo si, los vectores $f_{1,\mu}, \dots, f_{r+2,\mu}$ forman una base del espacio vectorial real $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^r$.

tiene un interior no vacío, y que cada hiperplano

$$H_{i,\mu} := \sum_{\substack{1 \leq t \leq r+2 \\ t \neq i}} \mathbb{R} \cdot f_{t,\mu} \quad (1 \leq i \leq r+2) \quad (1.14)$$

separa dos semi-espacios disjuntos en $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^r$, es decir,

$$\mathbb{C} \times \mathbb{R}^r = H_{i,\mu}^+ \cup H_{i,\mu} \cup H_{i,\mu}^-, \quad (1.15)$$

donde $H_{i,\mu}^+$ es el semi-espacio que contiene a $f_{i,\mu}$.⁵ Así, definimos $C_\mu = C_\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$ mediante

$$C_\mu := \mathbb{R}_{1,\mu} \cdot f_{1,\mu} + \mathbb{R}_{2,\mu} \cdot f_{2,\mu} + \dots + \mathbb{R}_{r+2,\mu} \cdot f_{r+2,\mu}, \quad (1.16)$$

donde

$$\mathbb{R}_{i,\mu} := \begin{cases} [0, \infty) & \text{si } e_{r+2} \in H_{i,\mu}^+, \\ (0, \infty) & \text{si } e_{r+2} \in H_{i,\mu}^-, \end{cases} \quad (1 \leq i \leq r+2), \quad (1.17)$$

con $e_{r+2} := [0, 0, \dots, 0, 1] \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r$. El hecho que e_{r+2} nunca puede estar contenido en ningún $H_{i,\mu}$ será probado en el Lema 24.

Este algoritmo, que llamaremos *algoritmo de los siete pasos*, nos lleva al principal resultado de esta tesis.

Teorema 1. *Sea k un cuerpo de números con $r > 0$ incrustaciones reales y exactamente un par de incrustaciones complejas conjugadas. Supongamos que las unidades $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ generan un subgrupo V , de índice finito en el grupo de unidades totalmente positivas de k . Entonces, los conos con signo $\{(C_\mu, w_\mu)\}_{w_\mu \neq 0}$ definidos en (1.12) y (1.16) forman un dominio fundamental virtual para la acción de V sobre $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r := (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times (0, \infty)^r$. Esto es,*

$$\sum_{\substack{w_\mu = +1 \\ \mu \in \tilde{S}_r}} \sum_{z \in C_\mu \cap V \cdot x} 1 - \sum_{\substack{w_\mu = -1 \\ \mu \in \tilde{S}_r}} \sum_{z \in C_\mu \cap V \cdot x} 1 = 1 \quad (x \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r), \quad (1.18)$$

donde todas las sumas son sobre conjuntos finitos y de cardinalidad acotada independientemente de x .

⁵Para $v \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^r = \mathbb{R}^{r+2}$, podemos calcular fácilmente cuándo $v \in H_{i,\mu}^\pm$. En el lado derecho de (1.12), reemplazamos la columna $f_{i,\mu}$ por v para obtener una función $v \mapsto w_{i,\mu}(v)$, que se anula en $H_{i,\mu}$ y que toma el valor $\pm w_\mu$ en $H_{i,\mu}^\pm$. Alternativamente, si escribimos $v = \sum_{i=1}^{r+2} c_i f_{i,\mu}$, entonces $v \in H_{i,\mu}^+$ si, y sólo si, $c_i > 0$.

Probaremos el Teorema 1 interpretando el lado izquierdo en (1.18) como una suma de grados locales de una cierta función continua $F : \widehat{T} \rightarrow T$ entre el $(r + 1)$ -toro canónico \widehat{T} y el $(r + 1)$ -toro T . Por un resultado en topología algebraica, esta suma de grados locales es igual al grado global de F . Calcularemos este grado global probando que F es homotópica a un homeomorfismo F_0 , cuyo grado es fácil de calcular. Este método es el utilizado por Díaz y Díaz y Friedman [3]. Nuestro aporte es la construcción de F , que es bastante más complicada que la correspondiente función en el caso totalmente real.

1.2. Ejemplos

En esta sección mostramos tres ejemplos de la utilización del algoritmo de los siete pasos (A7P). Nuestros resultados numéricos han sido realizados considerando un error menor a 10^{-28} .

Caso cúbico. Sea $k = \mathbb{Q}(\gamma)$ el cuerpo cúbico complejo dado por $\gamma^3 + \gamma^2 - 1 = 0$, donde $E(k)_+$ está generado por

$$\varepsilon_1 = \gamma = [(-0.8774388\dots) + (-0.7448617\dots)i, 0.7548776\dots].$$

Siguiendo el A7P, fijemos $N = 3$ y pongamos

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 1 = [1, 1], \\ \alpha_1 &= 2\gamma^2 + 2\gamma + 1 = [(-0.3247179\dots) + (1.1245590\dots)i, 3.6494359\dots], \\ \alpha_2 &= 2\gamma + 1 = [(-0.7548776\dots) + (-1.4897235\dots)i, 2.5097553\dots].\end{aligned}$$

Se verifica que

$$\begin{aligned}\arg(\alpha_0^{(1)}) &= 0, \\ \arg(\alpha_1^{(1)} \cdot \exp(-2\pi i/3)) &= -0.2424935\dots, \\ \arg(\alpha_2^{(1)} \cdot \exp(-4\pi i/3)) &= 0.0545869\dots,\end{aligned}$$

están contenidos en el intervalo $(-\pi/6, \pi/6) = (-0.5235987\dots, 0.5235987\dots)$. Además, continuando con los pasos 3 y 4,

$$\theta_2 = 0 < \theta_1 = 0.3433398\dots,$$

por lo que $2 \prec 1$ y $\rho \in S_2$ es la permutación identidad (hemos excluido, y excluirémos durante los ejemplos que consideren k como un cuerpo cúbico, a $\sigma \in S_1$ de la notación establecida en el A7P, pues S_1 es el grupo trivial).

Luego, se verifica que $m(\xi_1) = -1$, $m(\xi_2) = 0$ y, utilizando las definiciones (1.9) y (1.10), calculamos

$$\begin{array}{lll} f_{1,2,0} = 2\gamma + 1, & f_{2,2,0} = \gamma, & f_{3,2,0} = \gamma + 2, \\ f_{1,1,0} = 2\gamma + 1, & f_{2,1,0} = \gamma + 2, & f_{3,1,0} = 1, \\ f_{1,2,1} = 1, & f_{2,2,1} = \gamma + 2, & f_{3,2,1} = 2\gamma^2 + \gamma, \\ f_{1,1,1} = 1, & f_{2,1,1} = 2\gamma^2 + \gamma, & f_{3,1,1} = 2\gamma^2 + 2\gamma + 1, \\ f_{1,2,2} = 2\gamma^2 + 2\gamma + 1, & f_{2,2,2} = 2\gamma^2 + \gamma, & f_{3,2,2} = \gamma, \\ f_{1,1,2} = 2\gamma^2 + 2\gamma + 1, & f_{2,1,2} = \gamma, & f_{3,1,2} = 2\gamma + 1. \end{array}$$

A continuación, determinamos los signos $w_{q,n}$ por (1.12)⁶, usando que $\text{Log } \varepsilon_1 = 0.1405997\dots$;

$$\begin{array}{ll} \det(f_{1,2,0}, f_{2,2,0}, f_{3,2,0}) = 0, & w_{2,0} = 0, \\ \det(f_{1,1,0}, f_{2,1,0}, f_{3,1,0}) = 0, & w_{1,0} = 0, \\ \det(f_{1,2,1}, f_{2,2,1}, f_{3,2,1}) = -4.7958315\dots, & w_{2,1} = -1, \\ \det(f_{1,1,1}, f_{2,1,1}, f_{3,1,1}) = 4.7958315\dots, & w_{1,1} = +1, \\ \det(f_{1,2,2}, f_{2,2,2}, f_{3,2,2}) = 4.7958315\dots, & w_{2,2} = +1, \\ \det(f_{1,1,2}, f_{2,1,2}, f_{3,1,2}) = 4.7958315\dots, & w_{1,2} = +1. \end{array}$$

Finalmente, usando la nota 5 de pie de página, para saber qué parte de la frontera se debe considerar en cada uno de los conos, resolvemos (para cada cono) un cierto sistema de ecuaciones lineales no homogéneo, y luego observamos los signos de las coordenadas del vector solución. Así, nuestros resultados son

$$\begin{aligned} e_3 &= (-0.36810\dots)f_{1,2,1} + (0.38980\dots)f_{2,2,1} + (0.01553\dots)f_{3,2,1} \\ &= (0.02169\dots)f_{1,1,1} + (-0.23448\dots)f_{2,1,1} + (0.38980\dots)f_{3,1,1} \\ &= (0.41149\dots)f_{1,2,2} + (-0.25618\dots)f_{2,2,2} + (-0.02169\dots)f_{3,2,2} \\ &= (0.15531\dots)f_{1,1,2} + (-0.27787\dots)f_{2,1,2} + (0.25618\dots)f_{3,1,2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los conos del dominio fundamental virtual para este caso son

$$\begin{aligned} C_{2,1} &= \{t_1 + t_2(\gamma + 2) + t_3(2\gamma^2 + \gamma) \mid t_1 > 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0\}, \\ C_{1,1} &= \{t_1 + t_2(2\gamma^2 + \gamma) + t_3(2\gamma^2 + 2\gamma + 1) \mid t_1 \geq 0, t_2 > 0, t_3 \geq 0\}, \\ C_{2,2} &= \{t_1(2\gamma^2 + 2\gamma + 1) + t_2(2\gamma^2 + \gamma) + t_3\gamma \mid t_1 \geq 0, t_2 > 0, t_3 > 0\}, \\ C_{1,2} &= \{t_1(2\gamma^2 + 2\gamma + 1) + t_2\gamma + t_3(2\gamma + 1) \mid t_1 \geq 0, t_2 > 0, t_3 \geq 0\}. \end{aligned}$$

⁶Cuando la evidencia numérica muestra que el determinante en el numerador de (1.12) se anula, hemos verificado que los elementos $f_{1,\mu}, f_{2,\mu}, \dots, f_{r+2,\mu}$, pensados como elementos del \mathbb{Q} -espacio vectorial k , son \mathbb{Q} -linealmente dependientes.

Notemos que, según el Teorema 1, los conos con signo $w_{g,n} = 0$ no se consideran en el dominio fundamental virtual. La Figura 1.1 representa la intersección del plano $\{(z, 1) \mid z \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ con los conos expuestos arriba.

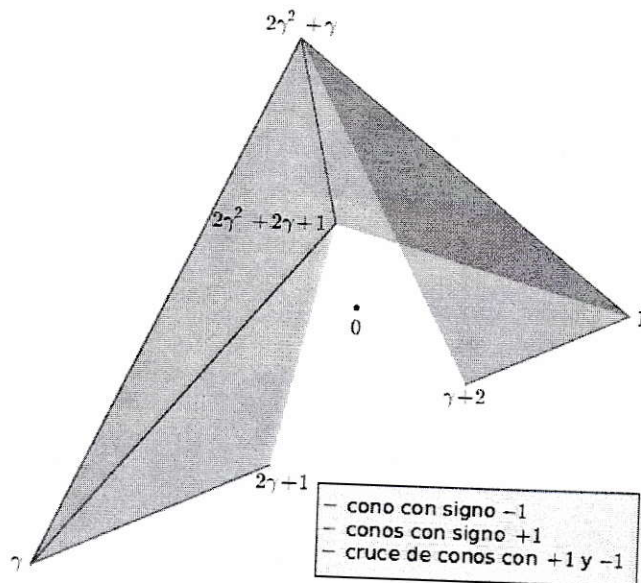


Figura 1.1: Dominio fundamental virtual para la acción de $\langle \gamma \rangle$ sobre $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+$, donde $\gamma^3 + \gamma^2 - 1 = 0$, con $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2\gamma^2 + 2\gamma + 1$ y $\alpha_2 = 2\gamma + 1$.

Manteniendo el mismo cuerpo $k = \mathbb{Q}(\gamma)$, $\gamma^3 + \gamma^2 - 1 = 0$, el mismo grupo $\langle \gamma \rangle$ de unidades totalmente positivas de k , y la misma elección $N = 3$, podemos obtener otro dominio fundamental virtual para la acción de $\langle \gamma \rangle$ sobre $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$ variando la elección de los α_i . Sean

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1 = [1, 1], \\ \alpha_1 &= \gamma^2 + \gamma = [(-0.6623589\dots) + (0.5622795\dots)i, 1.3247179\dots], \\ \alpha_2 &= \gamma = [(-0.8774388\dots) + (-0.7448617\dots)i, 0.7548776\dots], \end{aligned}$$

verificamos que

$$\begin{aligned} \arg(\alpha_0^{(1)}) &= 0, \\ \arg(\alpha_1^{(1)} \cdot \exp(-2\pi i/3)) &= 0.3433398\dots, \\ \arg(\alpha_2^{(1)} \cdot \exp(-4\pi i/3)) &= -0.3433398\dots, \end{aligned}$$

están todos en el intervalo $(-\pi/6, \pi/6) = (-0.5235987\dots, 0.5235987\dots)$. Luego, como los valores de $\theta_1, \theta_2, m(\xi_1)$ y $m(\xi_2)$ no dependen de la elección de los α_i , se mantiene $\rho \in S_2$ como la permutación identidad, y podemos calcular

$$\begin{aligned} f_{1,2,0} &= \gamma, & f_{2,2,0} &= \gamma, & f_{3,2,0} &= 1, \\ f_{1,1,0} &= \gamma, & f_{2,1,0} &= 1, & f_{3,1,0} &= 1, \\ f_{1,2,1} &= 1, & f_{2,2,1} &= 1, & f_{3,2,1} &= \gamma^2, \\ f_{1,1,1} &= 1, & f_{2,1,1} &= \gamma^2, & f_{3,1,1} &= \gamma^2 + \gamma, \\ f_{1,2,2} &= \gamma^2 + \gamma, & f_{2,2,2} &= \gamma^2, & f_{3,2,2} &= \gamma, \\ f_{1,1,2} &= \gamma^2 + \gamma, & f_{2,1,2} &= \gamma, & f_{3,1,2} &= \gamma. \end{aligned}$$

Determinamos los signos $w_{q,n}$ usando nuevamente el valor de $\text{Log } \varepsilon_1$;

$$\begin{aligned} \det (f_{1,2,0}, f_{2,2,0}, f_{3,2,0}) &= 0, & w_{2,0} &= 0, \\ \det (f_{1,1,0}, f_{2,1,0}, f_{3,1,0}) &= 0, & w_{1,0} &= 0, \\ \det (f_{1,2,1}, f_{2,2,1}, f_{3,2,1}) &= 0, & w_{2,1} &= 0, \\ \det (f_{1,1,1}, f_{2,1,1}, f_{3,1,1}) &= 2.3979157\dots, & w_{1,1} &= +1, \\ \det (f_{1,2,2}, f_{2,2,2}, f_{3,2,2}) &= 0, & w_{2,2} &= 0, \\ \det (f_{1,1,2}, f_{2,1,2}, f_{3,1,2}) &= 0, & w_{1,2} &= 0. \end{aligned}$$

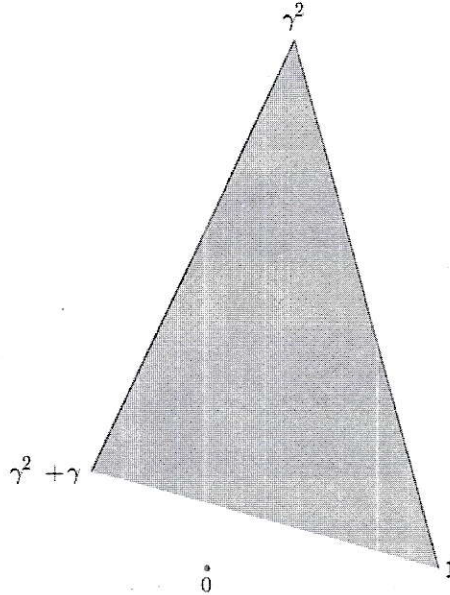


Figura 1.2: Dominio fundamental virtual, formado por sólo un cono de signo positivo, para la acción de $\langle \gamma \rangle$ sobre $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+$, donde $\gamma^3 + \gamma^2 - 1 = 0$, con $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = \gamma^2 + \gamma$ y $\alpha_2 = \gamma$.

Finalmente, para saber la parte de la frontera a considerar del único cono con signo $w_{q,n} \neq 0$, tenemos

$$e_3 = (0.41149\dots)f_{1,1,1} + (-0.23448\dots)f_{2,1,1} + (0.54511\dots)f_{3,1,1}.$$

Por lo tanto, el cono

$$C_{1,1} = \{t_1 + t_2\gamma^2 + t_3(\gamma^2 + \gamma) \mid t_1 \geq 0, t_2 > 0, t_3 \geq 0\}$$

es un dominio fundamental virtual (de hecho, un dominio fundamental) para la acción de $\langle \gamma \rangle$ sobre $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$. La Figura 1.2 representa la intersección de este cono con el plano $\{(z, 1) \mid z \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

Caso cuártico. Sea $k = \mathbb{Q}(\gamma)$ el cuerpo cuártico, provisto de exactamente un par de incrustaciones complejas, dado por $\gamma^4 + \gamma - 1 = 0$. Aquí, $E(k)_+$ está generado por

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \gamma^2 = [(-1.0075\dots) + (-0.5131\dots)i, 1.4902\dots, 0.5248\dots], \\ \varepsilon_2 &= \gamma^2 + 1 = [(-0.0075\dots) + (-0.5131\dots)i, 2.4902\dots, 1.5248\dots]. \end{aligned}$$

Escogemos

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1 = [1, 1, 1], \\ \alpha_1 &= \gamma^2 - \gamma + 1 = [(-0.2556\dots) + (0.5208\dots)i, 3.7109\dots, 0.8003\dots], \\ \alpha_2 &= \gamma^2 + \gamma = [(-0.7594\dots) + (-1.5470\dots)i, 0.2694\dots, 1.2493\dots], \end{aligned}$$

quienes verifican

$$\begin{aligned} \arg(\alpha_0^{(1)}) &= 0, \\ \arg(\alpha_1^{(1)} \cdot \exp(-2\pi i/3)) &= -0.0672805\dots, \\ \arg(\alpha_2^{(1)} \cdot \exp(-4\pi i/3)) &= 0.0672805\dots \end{aligned}$$

Luego, obtenemos que

$$\begin{aligned} \theta_{3,(1)} &= 0 < \theta_{1,(1)} = 0.0672805\dots < \theta_{2,(1)} = 1.5855138\dots, \\ \theta_{3,(12)} &= 0 < \theta_{1,(12)} = 0.0672805\dots < \theta_{2,(12)} = 0.5761617\dots, \end{aligned}$$

donde (1) y (12) son las dos permutaciones del grupo S_2 escritas como ciclos. Así que

$$3 \prec_{(1)} 1 \prec_{(1)} 2, \quad 3 \prec_{(12)} 1 \prec_{(12)} 2 \quad \text{y} \quad \rho_{(1)} = \rho_{(12)} = (12) \in S_3.$$

Después de calcular

$$\begin{aligned} m(\xi_{1,(1)}) &= 1, \quad m(\xi_{2,(1)}) = 0, \quad m(\xi_{3,(1)}) = 0, \\ m(\xi_{1,(12)}) &= 1, \quad m(\xi_{2,(12)}) = -1, \quad m(\xi_{3,(12)}) = 0 \end{aligned}$$

y usando nuevamente (1.9) y (1.10), podemos determinar los $f_{t,\sigma,q,n}$ como en los ejemplos anteriores. Esta vez, sólo enlistaremos los $f_{t,\sigma,q,n}$ tales que $w_{\sigma,q,n} \neq 0$.

$$\left. \begin{aligned} f_{1,(1),2,0} &= \gamma^2 - \gamma + 1, \\ f_{2,(1),2,0} &= \gamma^2, \\ f_{3,(1),2,0} &= -2\gamma^3 + 3\gamma^2 - 3\gamma + 2, \\ f_{4,(1),2,0} &= \gamma^2 + \gamma, \end{aligned} \right\} w_{(1),2,0} = +1,$$

$$\left. \begin{aligned} f_{1,(1),3,1} &= \gamma^2 + \gamma, \\ f_{2,(1),3,1} &= -\gamma^3 + \gamma^2 - \gamma + 1, \\ f_{3,(1),3,1} &= -2\gamma^3 + 3\gamma^2 - 3\gamma + 2, \\ f_{4,(1),3,1} &= 1, \end{aligned} \right\} w_{(1),3,1} = +1,$$

$$\left. \begin{aligned} f_{1,(12),1,0} &= \gamma^2 + \gamma, \\ f_{2,(12),1,0} &= \gamma^3 + \gamma^2 + 1, \\ f_{3,(12),1,0} &= -2\gamma^3 + 3\gamma^2 - 3\gamma + 2, \\ f_{4,(12),1,0} &= \gamma^2 + 1, \end{aligned} \right\} w_{(12),1,0} = +1,$$

$$\left. \begin{aligned} f_{1,(12),3,1} &= \gamma^2 + \gamma, \\ f_{2,(12),3,1} &= \gamma^2 + 1, \\ f_{3,(12),3,1} &= -2\gamma^3 + 3\gamma^2 - 3\gamma + 2, \\ f_{4,(12),3,1} &= 1, \end{aligned} \right\} w_{(12),3,1} = +1,$$

donde los signos $w_{\sigma,q,n}$ han sido calculados, por la fórmula (1.12), utilizando que

$$\det(\text{Log } \varepsilon_1, \text{Log } \varepsilon_2) = 0.3781993\dots$$

y que

$$\begin{aligned} \det(f_{1,(1),2,0}, f_{2,(1),2,0}, f_{3,(1),2,0}, f_{4,(1),2,0}) &= 16.822603\dots, \\ \det(f_{1,(1),3,1}, f_{2,(1),3,1}, f_{3,(1),3,1}, f_{4,(1),3,1}) &= 16.822603\dots, \\ \det(f_{1,(12),1,0}, f_{2,(12),1,0}, f_{3,(12),1,0}, f_{4,(12),1,0}) &= -33.645207\dots, \\ \det(f_{1,(12),3,1}, f_{2,(12),3,1}, f_{3,(12),3,1}, f_{4,(12),3,1}) &= -16.822603\dots \end{aligned}$$

Finalmente, para determinar la parte de la frontera a considerar de los conos con signo no nulo, tenemos que e_4 es igual a las cuatro combinaciones lineales

$$\begin{aligned}
 & (0.9\dots)f_{1,(1),2,0} + (-0.6\dots)f_{2,(1),2,0} + (-0.1\dots)f_{3,(1),2,0} + (0.5\dots)f_{4,(1),2,0}, \\
 & (0.2\dots)f_{1,(1),3,1} + (-1.2\dots)f_{2,(1),3,1} + (0.4\dots)f_{3,(1),3,1} + (0.9\dots)f_{4,(1),3,1}, \\
 & (-0.1\dots)f_{1,(12),1,0} + (0.1\dots)f_{2,(12),1,0} + (-0.1\dots)f_{3,(12),1,0} + (0.6\dots)f_{4,(12),1,0}, \\
 & (-0.3\dots)f_{1,(12),3,1} + (1.2\dots)f_{2,(12),3,1} + (-0.1\dots)f_{3,(12),3,1} + (-0.3\dots)f_{4,(12),3,1}.
 \end{aligned}$$

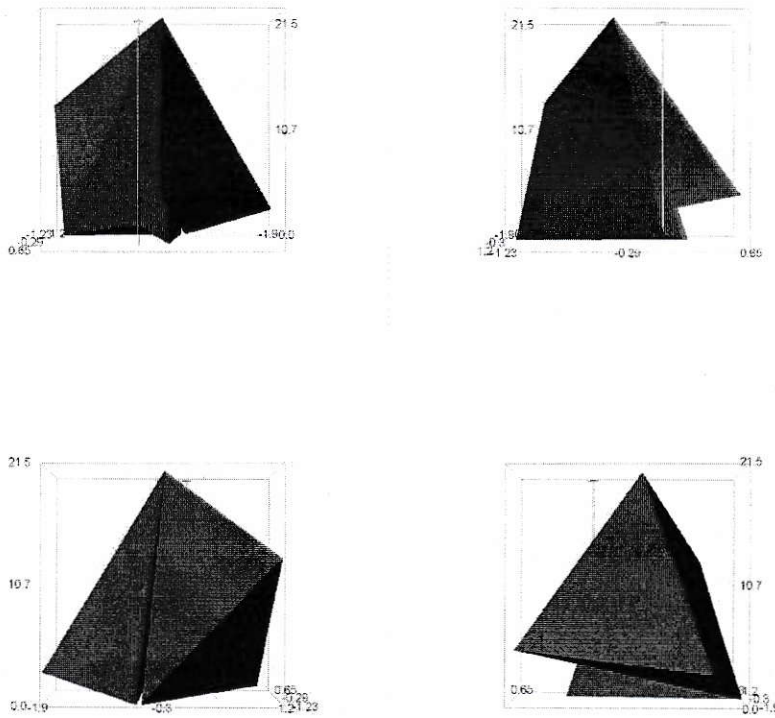


Figura 1.3: Cuatro vistas del mismo dominio fundamental virtual, compuesto de cuatro conos de signo positivo, para la acción de $\langle \gamma^2, \gamma^2 + 1 \rangle$ sobre $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^2$, donde $\gamma^4 + \gamma - 1 = 0$, con $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \gamma^2 - \gamma + 1$ y $\alpha_2 = \gamma^2 + \gamma$. La flecha de color amarillo representa el rayo $\{0\} \times \mathbb{R}_+ \times \{1\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+ \times \{1\}$.

Por lo tanto, los conos dados por (1.16)

$$C_{(1),2,0} = [0, \infty)f_{1,(1),2,0} + (0, \infty)f_{2,(1),2,0} + (0, \infty)f_{3,(1),2,0} + [0, \infty)f_{4,(1),2,0},$$

$$C_{(1),3,1} = [0, \infty)f_{1,(1),3,1} + (0, \infty)f_{2,(1),3,1} + [0, \infty)f_{3,(1),3,1} + [0, \infty)f_{4,(1),3,1},$$

$$C_{(12),1,0} = (0, \infty)f_{1,(12),1,0} + [0, \infty)f_{2,(12),1,0} + (0, \infty)f_{3,(12),1,0} + [0, \infty)f_{4,(1),1,0},$$

$$C_{(12),3,1} = (0, \infty)f_{1,(12),3,1} + [0, \infty)f_{2,(12),3,1} + (0, \infty)f_{3,(12),3,1} + (0, \infty)f_{4,(12),3,1},$$

forman un dominio fundamental virtual (de hecho, un dominio fundamental) para la acción de $\langle \gamma^2, \gamma^2 + 1 \rangle$ sobre $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^2$. La Figura 1.3 representa cuatro vistas de la intersección de este dominio fundamental virtual con el semi-espacio $\{(z, x, 1) \mid z \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2$.

1.3. Corolarios del teorema principal

Ahora mostramos algunas consecuencias del Teorema 1. En primer lugar, si $w_\mu \neq -1$ para todo $\mu \in \tilde{S}_r$, entonces $V \cdot x$ debe intersectar a sólo uno de los C_μ , y sólo una vez a él. Esto implica el siguiente resultado.

Corolario 2. *Supongamos que $w_\mu \neq -1$ para todo $\mu \in \tilde{S}_r$, entonces*

$$\bigcup_{\substack{\mu \in \tilde{S}_r \\ w_\mu \neq 0}} C_\mu$$

es un verdadero dominio fundamental para la acción de V sobre $\mathbb{C}^ \times \mathbb{R}_+^r$.*

Tal como en [3], el siguiente corolario muestra que un dominio fundamental virtual es tan útil como uno verdadero cuando se trabaja con funciones zeta parciales asociadas a k . Su demostración es igual a la de [3, Corollary 7], por lo que la omitimos.

Sea $\zeta(\bar{\mathfrak{a}}, s) := \sum_{\mathfrak{b} \in \bar{\mathfrak{a}}} N\mathfrak{b}^{-s}$ ($\text{Re}(s) > 1$) la función zeta parcial de Dedekind asociada a la clase de rayos módulo $\mathfrak{f}\infty$ representada por el ideal entero \mathfrak{a} relativamente primo con \mathfrak{f} . Aquí, \mathfrak{f} es un ideal entero de k , ∞ es el producto formal de todas las incrustaciones reales de k , \mathfrak{b} corre sobre todos los ideales enteros en $\bar{\mathfrak{a}}$ y N es la norma absoluta.

Corolario 3. *Supongamos que $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ generan al grupo $E(k)_+^{\mathfrak{f}}$ de unidades totalmente positivas de k que son congruentes a 1 módulo \mathfrak{f} , y supongamos que hemos escogido $\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1} \in \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}$ en el paso 2 del A7P. Entonces, $f_{t,\mu} \in \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}$ ($1 \leq t \leq r+2$, $\mu \in \tilde{S}_r$) y*

$$\zeta(\bar{\mathfrak{a}}, s) = N\mathfrak{a}^{-s} \sum_{\substack{\mu \in \tilde{S}_r \\ w_\mu \neq 0}} w_\mu \sum_{x \in R_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}, C_\mu)} \zeta_{\mathfrak{f}}(C_\mu, x, s) \quad (\text{Re}(s) > 1),$$

donde

$$\zeta_f(C_\mu, x, s) := \sum_{n_1, \dots, n_{r+2}=0}^{\infty} \left| x^{(1)} + \sum_{t=1}^{r+2} n_t f_{t,\mu}^{(1)} \right|^{-2s} \cdot \prod_{j=2}^{r+2} \left(x^{(j)} + \sum_{t=1}^{r+2} n_t f_{t,\mu}^{(j)} \right)^{-s},$$

$$R_f(\mathbf{a}, C_\mu) := \left\{ x \in 1 + \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f} \mid x = \sum_{t=1}^{r+2} y_t f_{t,\mu}, y_t \in I_{t,\mu} \right\},$$

$$I_{t,\mu} := \begin{cases} [0, 1) & \text{si } e_{r+2} \in H_{t,\mu}^+, \\ (0, 1] & \text{si } e_{r+2} \in H_{t,\mu}^-. \end{cases}$$

Capítulo 2

Construcción de f

2.1. Dominio fundamental virtual

Definición 4. (Díaz y Díaz-Friedman) *Un dominio fundamental virtual $\{(X_i, w_i)\}_i$ para la acción de un grupo G sobre un conjunto X es una sucesión finita de subconjuntos $X_i \subset X$ y pesos $w_i \in \mathbb{C}$ para los cuales existe una constante $K \in \mathbb{R}$, tal que para todo $x \in X$ la cardinalidad $|X_i \cap G \cdot x| \leq K$ ($1 \leq i \leq M$), y*

$$\sum_{i=1}^M w_i |X_i \cap G \cdot x| = 1.$$

Notemos que si $Y \subset X$ es un G -espacio, *i. e.* $g \cdot y \in Y$ para todo $y \in Y$ y $g \in G$, y $\{(X_i, w_i)\}_i$ es como en la Definición 4, entonces $\{(Y \cap X_i, w_i)\}_i$ es un dominio fundamental virtual para la acción de G sobre Y .

2.2. El argumento en la incrustación compleja

Como hemos mencionado en la introducción, la prueba del Teorema 1 que presentamos está basada en el cálculo de grados locales y globales de ciertas funciones continuas. Para facilitar nuestro trabajo con homotopías, nos será de gran utilidad descomponer \mathbb{C}^* en ciertas regiones convexas. Para $N \in \mathbb{N}$ con $N \geq 3$ (con N fijo de ahora y en adelante), definimos la región

$$\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_{0,N} := \{z \in \mathbb{C}^* \mid \arg(z) \in [-\pi/2N, 5\pi/2N]\},$$

y con ella las regiones

$$\mathcal{S}_t = \mathcal{S}_{t,N} := \exp(2\pi it/N) \cdot \mathcal{S}_0 \quad (t \in \mathbb{Z}). \quad (2.1)$$

Es fácil ver que las \mathcal{S}_t son convexas, su unión (que no disjunta) forma todo \mathbb{C}^* y $\mathcal{S}_t = \mathcal{S}_{t'}$ si, y sólo si, $t \equiv t' \pmod{N}$. En la Figura 2.1 mostramos el caso $N = 3$.

Otras regiones de \mathbb{C}^* que nos resultarán útiles son las “aspas” \mathcal{A}_t definidas mediante

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{t,N} := \exp(2\pi it/N) \cdot \mathcal{A}_0 \quad (t \in \mathbb{Z}), \quad (2.2)$$

donde

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_{0,N} := \{z \in \mathbb{C}^* \mid \arg(z) \in [-\pi/2N, \pi/2N]\}.$$

Como el ángulo asociado a \mathcal{A}_0 mide π/N , las \mathcal{A}_t satisfacen

$$\mathcal{A}_t \cap \mathcal{A}_{t'} \neq \emptyset \iff \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{t'} \iff t \equiv t' \pmod{N}, \quad (2.3)$$

$$z \cdot \mathcal{A}_{t+k} = z' \cdot \mathcal{A}_{t'+k} \iff z \cdot \mathcal{A}_t = z' \cdot \mathcal{A}_{t'} \quad (k, t, t' \in \mathbb{Z}; z, z' \in \mathbb{C}^*). \quad (2.4)$$

Además, como \mathcal{A}_0 y el interior $\overset{\circ}{\mathcal{A}}_1$ de \mathcal{A}_1 están contenidos en \mathcal{S}_0 , tenemos

$$\mathcal{A}_t \subset \mathcal{S}_t, \quad \overset{\circ}{\mathcal{A}}_{1+t} \subset \mathcal{S}_t, \quad \mathcal{A}_{1+t} \not\subset \mathcal{S}_t \quad (t \in \mathbb{Z}). \quad (2.5)$$

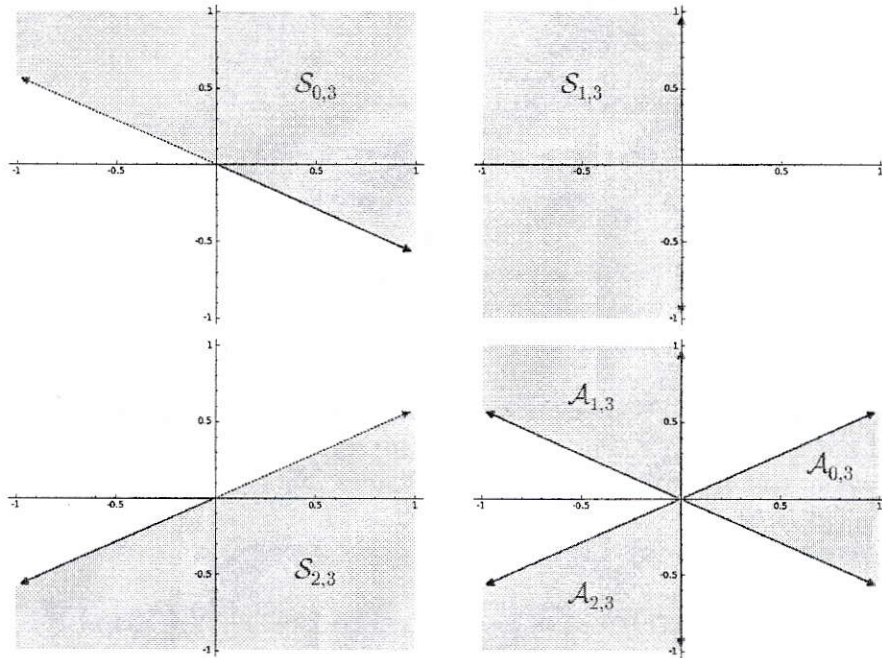


Figura 2.1: Regiones \mathcal{S}_t y \mathcal{A}_t para $N = 3$.

El siguiente lema muestra algunas propiedades de la función $m : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ definida en (1.5), y especialmente la relación que existe entre m y las regiones \mathcal{A}_t y \mathcal{S}_t .

Lema 5. Sean $z, w \in \mathbb{C}^*$ y sean $t, k \in \mathbb{Z}$. Entonces tenemos que

(i) Si $\text{Arg}(z)$ es cualquier rama del argumento de z , entonces

$$m(z) \equiv \left\lceil \frac{-N \text{Arg}(z)}{2\pi} \right\rceil \pmod{N}.$$

(ii) Si $\arg(z) \notin \{2\pi t/N \mid t \in \mathbb{Z}\}$, entonces

$$m(z) + m(z^{-1}) \equiv 1 \pmod{N}.$$

(iii) Si $\arg(z) \in \{2\pi t/N \mid t \in \mathbb{Z}\}$, entonces

$$m(z) + m(z^{-1}) \equiv 0 \pmod{N}.$$

(iv) $m(zw)$ sólo puede ser congruente a $m(z) + m(w) \pmod{N}$, o bien, a $m(z) + m(w) - 1 \pmod{N}$.

(v) $0 \leq \arg\left(z \cdot \exp(2\pi i m(z)/N)\right) < 2\pi/N$. En particular, en relación a (1.6) tenemos que

$$0 \leq \theta_{t,\sigma} < 2\pi/N \quad (\sigma \in S_r, 1 \leq t \leq r+1).$$

(vi) $z \cdot \mathcal{A}_t \subset \mathcal{S}_k \iff t - k \equiv m(z) \pmod{N}$.

(vii) $z \cdot \mathcal{A}_{m(z)} \subset \mathcal{S}_0$.

Demostración. Para probar (i), notemos que existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tal que $\text{Arg}(z) = \arg(z) + 2\pi\ell$. Luego, expandiendo el lado derecho de la congruencia en (i), y teniendo en cuenta la identidad $\lceil x + \ell' \rceil = \lceil x \rceil + \ell'$ ($x \in \mathbb{R}$, $\ell' \in \mathbb{Z}$), obtenemos lo requerido.

Es fácil ver que $\lceil x \rceil + \lceil -x \rceil$ es igual a 0 o 1 dependiendo, respectivamente, de si $x \in \mathbb{Z}$ o $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Por ende, (ii) y (iii) siguen directamente de (i). Por otro lado, (iv) sigue de (i) y las desigualdades $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil - 1 \leq \lceil x + y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ahora probemos (v). Usando (i), un rápido cálculo nos muestra que

$$\begin{aligned} m\left(z \cdot \exp(2\pi i m(z)/N)\right) &\equiv \left\lceil \frac{-N}{2\pi} (\arg(z) + 2\pi m(z)/N) \right\rceil \pmod{N} \\ &\equiv m(z) - m(z) \pmod{N} \\ &\equiv 0 \pmod{N}. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $w' \in \mathbb{C}^*$ es tal que $m(w') \equiv 0 \pmod{N}$, entonces

$$\lceil -N \arg(w')/2\pi - Nq \rceil = 0,$$

para algún $q \in \mathbb{Z}$. Pero lo anterior equivale a que $0 \leq \arg(w') + 2\pi q < 2\pi/N$, o sea $q = 0$. Por lo tanto,

$$0 \leq \arg\left(z \cdot \exp(2\pi im(z)/N)\right) < 2\pi/N.$$

En particular, poniendo $z = \xi_{t,\sigma}$, tenemos que $0 \leq \theta_{t,\sigma} < 2\pi/N$, lo que completa la demostración de (v).

Para probar (vi), empecemos por suponer que $z \cdot \mathcal{A}_t \subset \mathcal{S}_k$. De (2.2), es claro que $z \cdot \mathcal{A}_t = \exp(i \arg(z)) \cdot \mathcal{A}_t$. Así que, de (2.1),

$$\exp(i \arg(z)) \cdot \exp(2\pi it/N) \cdot \exp(-2\pi ik/N) \cdot w' \in \mathcal{S}_0,$$

para todo $w' \in \mathcal{A}_0$. Por lo tanto, poniendo $w' = \exp(-\pi i/2N)$ y luego $w' = \exp(\pi i/2N)$, existen $q, q' \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{aligned} -\pi/2N &\leq \arg(z) + 2\pi t/N - 2\pi k/N - \pi/2N + 2\pi q < 5\pi/2N, \\ -\pi/2N &\leq \arg(z) + 2\pi t/N - 2\pi k/N + \pi/2N + 2\pi q' < 5\pi/2N. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} -3/2 &< -N \arg(z)/2\pi - t + k - Nq \leq 0, \\ -1 &< -N \arg(z)/2\pi - t + k - Nq' \leq 1/2. \end{aligned}$$

O sea, si $m(z) - t + k \not\equiv 0 \pmod{N}$, lo anterior diría que

$$m(z) - t + k \equiv -1 \pmod{N} \quad y \quad m(z) - t + k \equiv 1 \pmod{N},$$

lo cual es absurdo, pues $N \geq 3$. Recíprocamente, supongamos que $t - k \equiv m(z) \pmod{N}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} z \cdot \mathcal{A}_t &= z \cdot \exp(2\pi it/N) \mathcal{A}_0 \\ &= z \cdot \exp(2\pi im(z)/N) \cdot \exp(2\pi ik/N) \cdot \mathcal{A}_0. \end{aligned}$$

Si $w' \in \mathcal{A}_0$, entonces $\arg(w') \in [-\pi/2N, \pi/2N]$. Por otro lado,

$$\arg\left(z \cdot \exp(2\pi im(z)/N) \cdot w'\right) = \arg\left(z \cdot \exp(2\pi im(z)/N)\right) + \arg(w') + 2\pi t',$$

para algún $t' \in \mathbb{Z}$. Pero, por (v), sabemos que

$$\arg\left(z \cdot \exp(2\pi im(z)/N)\right) \in [0, 2\pi/N),$$

así que

$$\arg(z \cdot \exp(2\pi im(z)/N) \cdot w') - 2\pi t' \in [-\pi/2N, 5\pi/2N) \subset [-\pi, \pi).$$

Por ende, $t' = 0$ y tenemos la contención

$$z \cdot \mathcal{A}_t \subset \exp(2\pi ik/N) \mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_k.$$

La aseveración (vii) sigue de (vi), poniendo $t = m(z)$ y $k = 0$. \square

Recordemos el orden total estricto sobre el conjunto $\{t \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq t \leq r+1\}$ definido en (1.7). Dado $\sigma \in S_r$,

$$t \prec_{\sigma} t' \iff (\theta_{t,\sigma} < \theta_{t',\sigma} \text{ ó } (\theta_{t,\sigma} = \theta_{t',\sigma} \text{ y } t' < t)),$$

para $1 \leq t, t' \leq r+1$, donde $\theta_{t,\sigma} := \arg(\xi_{t,\sigma} \cdot \exp(2\pi im(\xi_{t,\sigma})/N))$, y $\xi_{t,\sigma} := \tau_1(f_{r+1,\sigma}^{-1} f_{t,\sigma}) \in \mathbb{C}^*$. A continuación mostraremos una caracterización de este orden que nos permitirá relacionarlo con la función m y las regiones de \mathbb{C}^* definidas en esta sección.

Lema 6. Sean $\sigma \in S_r$, $z \in \mathbb{C}^*$, $\ell \in \mathbb{Z}$ y sean $1 \leq t, t' \leq r+1$. Entonces tenemos que

(i) Si $z \cdot \mathcal{A}_{\ell} \subset \mathcal{S}_0$, entonces

$$z \cdot \mathcal{A}_{\ell} = \left\{ w \in \mathbb{C}^* \mid \frac{-\pi}{2N} \leq \arg(w) - \arg(z \cdot \exp(2\pi i \ell / N)) \leq \frac{\pi}{2N} \right\}.$$

(ii) $\theta_{t,\sigma} = \theta_{t',\sigma} \iff \xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t,\sigma})} = \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t',\sigma})}$.

(iii) $\theta_{t,\sigma} \leq \theta_{t',\sigma} \iff \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t',\sigma})} \subset \xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{S}_{m(\xi_{t,\sigma})}$.

Demostración. Probemos (i). Si $w \in z \cdot \mathcal{A}_{\ell}$, entonces podemos escribir $w = z z'$ con $z' \in \mathbb{C}^*$ y $\arg(z' \cdot \exp(-2\pi i \ell / N)) \in [-\pi/2N, \pi/2N]$. Luego, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\arg(w) = \arg(z \cdot \exp(2\pi i \ell / N)) + \arg(z' \cdot \exp(-2\pi i \ell / N)) + 2\pi q.$$

Además, como $z \cdot \mathcal{A}_{\ell} \subset \mathcal{S}_0$, $\arg(w) \in [-\pi/2N, 5\pi/2N)$, así que

$$\begin{aligned} \arg(w) - \arg(z' \cdot \exp(-2\pi i \ell / N)) &= \arg(z \cdot \exp(2\pi i \ell / N)) + 2\pi q \\ &\in [-\pi/N, 3\pi/N). \end{aligned}$$

Como $N \geq 3$, se deduce que $q = 0$ y

$$\begin{aligned} \arg(w) - \arg(z \cdot \exp(2\pi i \ell / N)) &= \arg(z' \cdot \exp(-2\pi i \ell)) \\ &\in [-\pi/2N, \pi/2N], \end{aligned}$$

lo que demuestra

$$z \cdot \mathcal{A}_\ell \subset \left\{ w \in \mathbb{C}^* \mid \frac{-\pi}{2N} \leq \arg(w) - \arg(z \cdot \exp(2\pi i \ell / N)) \leq \frac{\pi}{2N} \right\}.$$

Por otro lado, si $w \in \mathbb{C}^*$ es tal que

$$\frac{-\pi}{2N} \leq \arg(w) - \arg(z \cdot \exp(2\pi i \ell / N)) \leq \frac{\pi}{2N},$$

entonces

$$\arg(z^{-1}w \cdot \exp(-2\pi i \ell / N)) = \arg(w) - \arg(z \cdot \exp(2\pi i \ell / N)).$$

Por ende, $z^{-1}w \in \mathcal{A}_\ell$, lo que demuestra (i).

Por el Lema 5 (vii), sabemos que

$$\xi_{t,\sigma} \mathcal{A}_{m(\xi_{t,\sigma})}, \xi_{t',\sigma} \mathcal{A}_{m(\xi_{t',\sigma})} \subset \mathcal{S}_0. \quad (2.6)$$

Para probar (ii), comencemos suponiendo que $\theta_{t,\sigma} = \theta_{t',\sigma}$. Usando (2.6) y (i), tenemos que

$$\begin{aligned} w \in \xi_{t,\sigma} \mathcal{A}_{m(\xi_{t,\sigma})} &\iff -\pi/2N \leq \arg(w) - \theta_{t,\sigma} \leq \pi/2N \\ &\iff -\pi/2N \leq \arg(w) - \theta_{t',\sigma} \leq \pi/2N \\ &\iff w \in \xi_{t',\sigma} \mathcal{A}_{m(\xi_{t',\sigma})}, \end{aligned}$$

por ende, $\xi_{t,\sigma} \mathcal{A}_{m(\xi_{t,\sigma})} = \xi_{t',\sigma} \mathcal{A}_{m(\xi_{t',\sigma})}$. Recíprocamente, si

$$\xi_{t,\sigma} \mathcal{A}_{m(\xi_{t,\sigma})} = \xi_{t',\sigma} \mathcal{A}_{m(\xi_{t',\sigma})},$$

por (2.6) y (i), existe $w \in \mathbb{C}^*$ tal que

$$\arg(w) - \theta_{t,\sigma} = -\pi/2N \quad \text{y} \quad -\pi/2N \leq \arg(w) - \theta_{t',\sigma} \leq \pi/2N.$$

Por lo tanto, $0 \leq \theta_{t,\sigma} - \theta_{t',\sigma} \leq \pi/N$. Análogamente, existe $w' \in \mathbb{C}^*$ tal que $\arg(w') - \theta_{t,\sigma} = \pi/2N$, y esto implica que $-\pi/N \leq \theta_{t,\sigma} - \theta_{t',\sigma} \leq 0$. Así que $\theta_{t,\sigma} = \theta_{t',\sigma}$, lo que demuestra (ii).

Finalmente, para probar (iii), usando el Lema 5 (v) tenemos que $\theta_{t,\sigma} \leq \theta_{t',\sigma}$ si, y sólo si, $0 \leq \theta_{t',\sigma} - \theta_{t,\sigma} < 2\pi/N$. Por otro lado, como $\xi_{t,t',\sigma} = \xi_{t',\sigma} \xi_{t,\sigma}^{-1}$, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\theta_{t',\sigma} - \theta_{t,\sigma} = \arg(\xi_{t,t',\sigma}) + \frac{2\pi m(\xi_{t',\sigma})}{N} - \frac{2\pi m(\xi_{t,\sigma})}{N} + 2\pi q. \quad (2.7)$$

Por lo tanto, $\theta_{t,\sigma} \leq \theta_{t',\sigma}$ es equivalente a

$$-1 < \frac{-N \arg(\xi_{t,t',\sigma})}{2\pi} - m(\xi_{t',\sigma}) + m(\xi_{t,\sigma}) - Nq \leq 0. \quad (2.8)$$

Si suponemos que $\theta_{t,\sigma} \leq \theta_{t',\sigma}$, de (2.8) deducimos que

$$m(\xi_{t',t,\sigma}) \equiv m(\xi_{t',\sigma}) - m(\xi_{t,\sigma}) \pmod{N},$$

lo que, por el Lema 5 (vi), es equivalente a que $\xi_{t,t',\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t',\sigma})} \subset \mathcal{S}_{m(\xi_{t,\sigma})}$. Multiplicando esta última contención por $\xi_{t,\sigma}$, obtenemos que

$$\xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t',\sigma})} \subset \xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{S}_{m(\xi_{t,\sigma})}.$$

Recíprocamente, supongamos que $\xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t',\sigma})} \subset \xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{S}_{m(\xi_{t,\sigma})}$. Si $\theta_{t,\sigma} > \theta_{t',\sigma}$, entonces podemos concluir de (2.7) que

$$0 < \frac{-N \arg(\xi_{t,t',\sigma})}{2\pi} - m(\xi_{t',\sigma}) + m(\xi_{t,\sigma}) - Nq < 1.$$

Pero esto implica que

$$m(\xi_{t,t',\sigma}) \equiv m(\xi_{t',\sigma}) - m(\xi_{t,\sigma}) + 1 \pmod{N},$$

lo que, por el Lema 5 (vi), contradice a $\xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t',\sigma})} \subset \xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{S}_{m(\xi_{t,\sigma})}$. Por lo tanto, $\theta_{t,\sigma} \leq \theta_{t',\sigma}$. \square

Con el lema precedente, hemos conseguido la siguiente caracterización del orden \prec_σ . Consideremos las condiciones

$$\xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t,\sigma})} \neq \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t',\sigma})}, \quad (2.9)$$

$$\xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t',\sigma})} \subset \xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{S}_{m(\xi_{t,\sigma})}, \quad (2.10)$$

$$\xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t,\sigma})} = \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t',\sigma})}, \quad (2.11)$$

$$t' < t. \quad (2.12)$$

Corolario 7. Para todos $1 \leq t, t' \leq r+1$, tenemos que $t \prec_\sigma t'$ si, y sólo si, el par ordenado (t, t') satisface, para σ , las condiciones (2.9) y (2.10), o bien, (2.11) y (2.12).

Supongamos que $t \prec_\sigma t'$. Si

$$m(\xi_{t',t,\sigma}) \equiv m(\xi_{t,\sigma}) - m(\xi_{t',\sigma}) \pmod{N},$$

entonces, por Lema 5 (vi), tenemos que $\xi_{t',t,\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t,\sigma})} \subset \mathcal{S}_{m(\xi_{t',\sigma})}$, lo cual equivale a $\xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t,\sigma})} \subset \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{S}_{m(\xi_{t',\sigma})}$. Como \prec_σ es un orden total, la

condición (2.10) implica que $\xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t,\sigma})} = \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t',\sigma})}$. Por lo tanto, (2.4) implica que $\xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{A}_{1+m(\xi_{t,\sigma})} = \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{A}_{1+m(\xi_{t',\sigma})}$ y, por (2.5),

$$\xi_{t,\sigma} \cdot \overset{\circ}{\mathcal{A}}_{1+m(\xi_{t,\sigma})} = \xi_{t',\sigma} \cdot \overset{\circ}{\mathcal{A}}_{1+m(\xi_{t',\sigma})} \subset \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{S}_{m(\xi_{t',\sigma})}.$$

Por otro lado, si

$$m(\xi_{t',t,\sigma}) \equiv m(\xi_{t,\sigma}) - m(\xi_{t',\sigma}) + 1 \pmod{N},$$

similarmente concluimos que $\xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{A}_{1+m(\xi_{t,\sigma})} \subset \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{S}_{m(\xi_{t',\sigma})}$. En ambos casos, se tiene que

$$\xi_{t,\sigma} \cdot \overset{\circ}{\mathcal{A}}_{1+m(\xi_{t,\sigma})} \subset \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{S}_{m(\xi_{t',\sigma})}.$$

Así, hemos obtenido el siguiente resultado.

Corolario 8. *Si $t \prec_{\sigma} t'$, entonces*

$$\xi_{t,\sigma} \cdot \overset{\circ}{\mathcal{A}}_{1+m(\xi_{t,\sigma})} \subset \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{S}_{m(\xi_{t',\sigma})},$$

y si además, $\xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t,\sigma})} \neq \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t',\sigma})}$, entonces tenemos que

$$\xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{A}_{1+m(\xi_{t,\sigma})} \subset \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{S}_{m(\xi_{t',\sigma})}.$$

Para finalizar esta sección, probaremos un lema que nos será de gran utilidad más adelante. Por definición, el orden \prec_{σ} depende de la permutación $\sigma \in S_r$. No nos interesará estudiar el comportamiento de \prec_{σ} basándonos en la relación entre σ y alguna otra permutación dada, excepto en el caso especial a continuación.

Lema 9. *Sea $\sigma \in S_r$. Definimos $\tilde{\sigma} \in S_r$ tal que $\tilde{\sigma}(1) := \sigma(r)$ y, para cada $2 \leq j \leq r$, $\tilde{\sigma}(j) := \sigma(j-1)$. Además, consideremos el conjunto*

$$B_{\sigma} := \left\{ 1 \leq t \leq r+1 \mid m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)} \cdot \xi_{t,\sigma}) \equiv m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)}) + m(\xi_{t,\sigma}) \pmod{N} \right\}$$

y su complemento $B_{\sigma}^c \subset \{1, \dots, r+1\}$. Entonces

- (i) $f_{t+1,\tilde{\sigma}} = \varepsilon_{\sigma(r)} \cdot f_{t,\sigma}$ y $\xi_{t+1,\tilde{\sigma}} = \varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)} \cdot \xi_{t,\sigma}$ ($1 \leq t \leq r$).
- (ii) $t \prec_{\sigma} t' \iff t+1 \prec_{\tilde{\sigma}} t'+1$ ($1 \leq t, t' \leq r$; $t, t' \in B_{\sigma}$ ó $t, t' \in B_{\sigma}^c$).
- (iii) $\xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t,\sigma})} = \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t',\sigma})} \implies (t, t' \in B_{\sigma} \text{ ó } t, t' \in B_{\sigma}^c)$.
- (iv) $t \prec_{\sigma} t' \implies t'+1 \prec_{\tilde{\sigma}} t+1$ ($1 \leq t, t' \leq r$; $t \in B_{\sigma}$; $t' \in B_{\sigma}^c$).
- (v) $t \in B_{\sigma}^c, t' \in B_{\sigma} \implies t' \prec_{\sigma} t$ ($1 \leq t, t' \leq r$).

Notemos que $B_\sigma \neq \emptyset$, ya que, como $\xi_{r+1,\sigma} = 1$ y $m(1) = 0$, se tiene que $r+1 \in B_\sigma$ para todo $\sigma \in S_r$.

Demostración. Que $f_{t+1,\tilde{\sigma}} = \varepsilon_{\sigma(r)} \cdot f_{t,\sigma}$ sigue fácilmente de la definición (1.1) de $f_{t,\sigma}$ y de la definición de $\tilde{\sigma}$. Además, como el vector $f_{r+1,\sigma}$ no depende de σ , de la definición (1.3) de $\xi_{t,\sigma}$, obtenemos (i).

Probemos (ii). Si $t, t' \in B_\sigma$, usando (i) obtenemos que

$$\begin{aligned} \xi_{t+1,\tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t+1,\tilde{\sigma}})} &= \xi_{t'+1,\tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t'+1,\tilde{\sigma}})} \\ &\iff \varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)} \xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)} \xi_{t,\sigma})} = \varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)} \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)} \xi_{t',\sigma})} \\ &\iff \xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)})+m(\xi_{t,\sigma})} = \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)})+m(\xi_{t',\sigma})} \\ &\iff \xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t,\sigma})} = \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t',\sigma})}. \end{aligned}$$

Esto implica que el par $(t+1, t'+1)$ satisface (2.9) para $\tilde{\sigma}$ si, y sólo si, (t, t') satisface (2.9) para σ . Por otro lado,

$$\begin{aligned} \xi_{t'+1,\tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t'+1,\tilde{\sigma}})} &\subset \xi_{t+1,\tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{S}_{m(\xi_{t+1,\tilde{\sigma}})} \\ &\iff \varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)} \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)} \xi_{t',\sigma})} \subset \varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)} \xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{S}_{m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)} \xi_{t,\sigma})} \\ &\iff \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)})+m(\xi_{t',\sigma})} \subset \xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{S}_{m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)})+m(\xi_{t,\sigma})} \\ &\iff \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t',\sigma})} \subset \xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{S}_{m(\xi_{t,\sigma})}. \end{aligned}$$

Entonces, $(t+1, t'+1)$ satisface (2.10) para $\tilde{\sigma}$ si, y sólo si, (t, t') satisface (2.10) para σ . Además, claramente $(t+1, t'+1)$ satisface (2.12) para $\tilde{\sigma}$ si, y sólo si, (t, t') lo hace para σ . Por ende, hemos probado (ii) cuando $t, t' \in B_\sigma$. Si $t, t' \in B_\sigma^c$, la prueba de (ii) es análoga al caso anterior. Basta notar que

$$\ell \in B_\sigma^c \iff m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)} \cdot \xi_{\ell,\sigma}) \equiv m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)}) + m(\xi_{\ell,\sigma}) - 1 \pmod{N} \quad (2.13)$$

(ver Lema 5 (iv)).

Para demostrar (iii), sea $\xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t,\sigma})} = \xi_{t',\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t',\sigma})}$. Multiplicando esta identidad por $\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)}$, obtenemos $\xi_{t+1,\tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t,\sigma})} = \xi_{t'+1,\tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t',\sigma})}$. Si asumimos, sin pérdida de generalidad, que $t \in B_\sigma$ y $t' \in B_\sigma^c$, entonces

$$\xi_{t+1,\tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t+1,\tilde{\sigma}})-m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)})} = \xi_{t'+1,\tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t'+1,\tilde{\sigma}})-m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)})-1},$$

pero, por (2.4), esto implica que

$$\begin{aligned} \xi_{t+1,\tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t+1,\tilde{\sigma}})} &= \xi_{t'+1,\tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t'+1,\tilde{\sigma}})-1} & \text{y} \\ \xi_{t+1,\tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{A}_{1+m(\xi_{t+1,\tilde{\sigma}})} &= \xi_{t'+1,\tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t'+1,\tilde{\sigma}})}. \end{aligned}$$

Luego, usando el Lema 5 (vi), las dos identidades anteriores implican, respectivamente,

$$\begin{aligned} \xi_{t+1, \tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t+1, \tilde{\sigma}})} \not\subset \xi_{t'+1, \tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{S}_{m(\xi_{t'+1, \tilde{\sigma}})} \quad \text{y} \\ \xi_{t'+1, \tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t'+1, \tilde{\sigma}})} \not\subset \xi_{t+1, \tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{S}_{m(\xi_{t+1, \tilde{\sigma}})}, \end{aligned}$$

lo cual contradice que \prec_{σ} es un orden total, probando (iii).

Para probar (iv), como $t \in B_{\sigma}$ y $t' \in B_{\sigma}^c$, notemos que (iii) implica que $\xi_{t, \sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t, \sigma})} \neq \xi_{t', \sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t', \sigma})}$. Luego, usando el Corolario 8, tenemos que

$$\xi_{t, \sigma} \cdot \mathcal{A}_{1+m(\xi_{t+1, \tilde{\sigma}})-m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)})} \subset \xi_{t', \sigma} \cdot \mathcal{S}_{1+m(\xi_{t'+1, \tilde{\sigma}})-m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)})}$$

o, equivalentemente,

$$\xi_{t+1, \tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t+1, \tilde{\sigma}})} \subset \xi_{t'+1, \tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{S}_{m(\xi_{t'+1, \tilde{\sigma}})}. \quad (2.14)$$

Si

$$\xi_{t+1, \tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t+1, \tilde{\sigma}})} \neq \xi_{t'+1, \tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t'+1, \tilde{\sigma}})},$$

entonces (2.14) implicaría (iv), o sea, implicaría que $t' + 1 \prec_{\tilde{\sigma}} t + 1$, pues las condiciones (2.9) y (2.10) serían satisfechas por el par $(t' + 1, t + 1)$ respecto de $\tilde{\sigma}$. Si, por el contrario, suponemos que

$$\xi_{t+1, \tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t+1, \tilde{\sigma}})} = \xi_{t'+1, \tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t'+1, \tilde{\sigma}})}$$

o, equivalentemente, que

$$\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)} \xi_{t, \sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t, \sigma})+m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)})} = \varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)} \xi_{t', \sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t', \sigma})+m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)})-1},$$

tendríamos

$$\xi_{t, \sigma} \cdot \mathcal{A}_{1+m(\xi_{t, \sigma})} = \xi_{t', \sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t', \sigma})}.$$

Como $t \prec_{\sigma} t'$, esta última identidad, junto al Lema 6 (iii) y (1.7), implicarían que

$$\xi_{t, \sigma} \cdot \mathcal{A}_{1+m(\xi_{t, \sigma})} \subset \xi_{t, \sigma} \cdot \mathcal{S}_{m(\xi_{t, \sigma})},$$

lo cual, según (2.5), es imposible. De esta manera hemos probado (iv).

Finalmente, probemos (v) por reducción al absurdo. Si $t \in B_{\sigma}^c$, $t' \in B_{\sigma}$ y $t \prec_{\sigma} t'$, entonces (iii) y el Corolario 8 implican que

$$\xi_{t+1, \tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t+1, \tilde{\sigma}})+2} \subset \xi_{t'+1, \tilde{\sigma}} \cdot \mathcal{S}_{m(\xi_{t'+1, \tilde{\sigma}})}. \quad (2.15)$$

En vista del Lema 5 (vi), la ecuación (2.15) nos dice que

$$m(\xi_{t+1, \tilde{\sigma}} \xi_{t'+1, \tilde{\sigma}}^{-1}) + m(\xi_{t'+1, \tilde{\sigma}}) - 2 \equiv m(\xi_{t+1, \tilde{\sigma}}) \pmod{N},$$

pero esto contradice el Lema 5 (iv). \square

2.3. Dominio de f

En esta sección definiremos el $(r+1)$ -toro \widehat{T} , dominio de las funciones F y F_0 mencionadas luego del Teorema 1. Notemos que

$$\xi_{r+1,\sigma} = \tau_1(f_{r+1,\sigma}^{-1} f_{r+1,\sigma}^{-1}) = 1 \quad (\sigma \in S_r).$$

Entonces $m(\xi_{r+1,\sigma}) = 0$. Sigue de la definición (1.7) del orden \prec_σ y del Lema 5 (v) que $r+1 \prec_\sigma t$, para todo $t \neq r+1$ y todo $\sigma \in S_r$.

Como $\xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t,\sigma})} \subset \mathcal{S}_0$, para todo $1 \leq t \leq r+1$ y $\sigma \in S_r$, tenemos que existe un único $d_{t,\sigma} \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\sum_{j=1}^t \arg(\varepsilon_{\sigma(j-1)}^{(1)}) - \sum_{j=1}^{r+1} \arg(\varepsilon_{\sigma(j-1)}^{(1)}) + \frac{2\pi}{N} m(\xi_{t,\sigma}) + 2\pi d_{t,\sigma} \in \left[-\frac{\pi}{2N}, \frac{5\pi}{2N} \right), \quad (2.16)$$

donde $\sum_{j=1}^{r+1} \arg(\varepsilon_{\sigma(j-1)}^{(1)})$ es independiente de σ y los sumandos correspondientes a $j=1$ son considerados como 0. Notemos que

$$\rho_\sigma(r+1) = r+1. \quad (2.17)$$

Teniendo en cuenta (2.16), y considerando la permutación $\rho_\sigma \in S_{r+1}$ definida por (1.8), llegamos a la siguiente definición.

Definición 10. Para $1 \leq t \leq r+1$, $\mu = (\sigma, q, n) \in \widetilde{S}_r$ y $j \in \mathbb{Z}$, sea $a_{t,\sigma,j} \in \mathbb{R}$ definida por

$$a_{t,\sigma,j} := \frac{1}{N} (m(\xi_{t,\sigma}) + j) + d_{t,\sigma}.$$

Definimos $\phi_{t,\mu}$ y $\phi_{r+2,\mu} \in \mathbb{R}^{r+1}$ como

$$\phi_{t,\mu} = \phi_{t,\sigma,q,n} := \begin{cases} \sum_{j=1}^t e_{\sigma(j-1)} + a_{t,\sigma,n} \cdot e_{r+1} & \text{si } t \not\prec_\sigma \rho_\sigma(q), \\ \sum_{j=1}^t e_{\sigma(j-1)} + a_{t,\sigma,n+1} \cdot e_{r+1} & \text{si } t \prec_\sigma \rho_\sigma(q), \end{cases}$$

$$\phi_{r+2,\mu} = \phi_{r+2,\sigma,q,n} := \sum_{j=1}^{\rho_\sigma(q)} e_{\sigma(j-1)} + a_{\rho_\sigma(q),\sigma,n+1} \cdot e_{r+1}.$$

Acá, por definición, $e_{\sigma(0)} = e_0 := 0$ y los vectores e_1, e_2, \dots, e_{r+1} son la base usual de \mathbb{R}^{r+1} .

Lema 11. Para cada $\mu = (\sigma, q, n) \in \widetilde{S}_r$, el conjunto $\{\phi_{t,\mu}\}_{1 \leq t \leq r+2}$ es afínmente independiente.

Recordemos que un subconjunto $\{w_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de un espacio vectorial real V es afinmente independiente si, y sólo si, el conjunto $\{w_i - w_j\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}}$ es \mathbb{R} -linealmente independiente para algún $j \in \{1, \dots, n\}$ fijo.

Demostración. Probaremos el lema mostrando que $\{\phi_{t,\mu} - \phi_{r+2,\mu}\}_{1 \leq t \leq r+1}$ es linealmente independiente en \mathbb{R}^{r+1} . Sabemos que el conjunto $\{e_{\sigma(t-1)}\}_{1 \leq t \leq r+1}$ es afinmente independiente en \mathbb{R}^{r+1} . Esto implica la independencia lineal del conjunto $\{v_t\}_{\substack{1 \leq t \leq r+1 \\ t \neq \rho_\sigma(q)}}$, donde

$$v_t := \sum_{j=1}^t e_{\sigma(j-1)} - \sum_{j=1}^{\rho_\sigma(q)} e_{\sigma(j-1)},$$

con el producto $v_t e_{r+1}^T = 0$. Luego, la matriz de tamaño $(r+1) \times (r+1)$

$$(v_t ; \phi_{\rho_\sigma(q),\mu} - \phi_{r+2,\mu})_{\substack{1 \leq t \leq r+1 \\ t \neq \rho_\sigma(q)}}, \quad (2.18)$$

cuyas columnas son los vectores v_t y el vector $\phi_{\rho_\sigma(q),\mu} - \phi_{r+2,\mu}$, tiene determinante no nulo, pues de la Definición 10 tenemos que

$$\phi_{\rho_\sigma(q),\mu} - \phi_{r+2,\mu} = \frac{-1}{N} \cdot e_{r+1}. \quad (2.19)$$

Además, notemos que

$$\phi_{t,\mu} - \phi_{r+2,\mu} := \begin{cases} v_t + (a_{t,\sigma,n} - a_{\rho_\sigma(q),\sigma,n+1}) \cdot e_{r+1} & \text{si } \rho_\sigma(q) \prec_\sigma t, \\ v_t + (a_{t,\sigma,n+1} - a_{\rho_\sigma(q),\sigma,n+1}) \cdot e_{r+1} & \text{si } t \prec_\sigma \rho_\sigma(q), \end{cases}$$

para todo $1 \leq t \leq r+1$ con $t \neq \rho_\sigma(q)$. Por lo tanto, es posible llevar la matriz en (2.18) a la matriz

$$(\phi_{t,\mu} - \phi_{r+2,\mu})_{1 \leq t \leq r+1},$$

mediante operaciones elementales, lo cual implica que el conjunto de vectores $\{\phi_{t,\mu} - \phi_{r+2,\mu}\}_{1 \leq t \leq r+1}$ es linealmente independiente en \mathbb{R}^{r+1} . \square

El lema anterior implica que todo subconjunto no vacío de $\{\phi_{t,\mu}\}_{1 \leq t \leq r+2}$ es afinmente independiente en \mathbb{R}^{r+1} .

Ahora necesitamos establecer cierta notación. Si w_1, \dots, w_ℓ son elementos de un espacio vectorial real W , el polítopo (cerrado) que ellos generan es el conjunto de sumas convexas

$$P = P(w_1, \dots, w_\ell) := \left\{ w \in W \mid w = \sum_{t=1}^{\ell} b_t w_t, \quad b_t \geq 0, \quad \sum_{t=1}^{\ell} b_t = 1 \right\}.$$

En general, si $w = \sum_{t=1}^{\ell} b_t w_t$, $b_t \in \mathbb{R}$ y $\sum_{t=1}^{\ell} b_t = 1$, los escalares b_t se llaman coordenadas baricéntricas de w respecto al conjunto w_1, \dots, w_{ℓ} . Si además w_1, \dots, w_{ℓ} es afínmente independiente, las coordenadas baricéntricas de w están únicamente determinadas por w y podemos escribir $b_t = b_t(w)$.

Sea $\sigma \in S_r$ y sean

$$v_t := \sum_{j=1}^t e_{\sigma(j-1)} + v_t^{(r+1)} e_{r+1}, \quad w_t := \sum_{j=1}^t e_{\sigma(j-1)} + w_t^{(r+1)} e_{r+1} \quad (1 \leq t \leq r+1).$$

Si $x, y \in \mathbb{R}^{r+1}$ son vectores tales que $x^{(j)} = y^{(j)}$ ($1 \leq j \leq r$), entonces

$$x = \sum_{t=1}^{r+1} b_t v_t, \quad y = \sum_{t=1}^{r+1} b'_t w_t, \quad \sum_{t=1}^{r+1} b_t = \sum_{t=1}^{r+1} b'_t = 1 \implies b_t = b'_t \quad (1 \leq t \leq r+1). \quad (2.20)$$

Para probar esto, es fácil ver que

$$b_{r+1} + \dots + b_{j+1} = b'_{r+1} + \dots + b'_{j+1} \quad (1 \leq j \leq r),$$

multiplicando x e y por el vector traspuesto $e_{\sigma(j)}^T$ y usando $x^{(j)} = y^{(j)}$ ($1 \leq j \leq r$). Luego, es claro que $b_t = b'_t$ ($2 \leq j \leq r+1$), pero como la suma de las coordenadas baricéntricas debe ser 1, también tenemos $b_1 = b'_1$.

Con esta notación en mente ponemos, para $\mu = (\sigma, q, n) \in \tilde{S}_r$,

$$P_{1,\mu} = P_{1,\sigma,q,n} := P\left(\{\phi_{t,\mu}\}_{1 \leq t \leq r+1}\right) \quad \text{y}$$

$$P_{2,\mu} = P_{2,\sigma,q,n} := P\left(\{\phi_{t,\mu}\}_{\substack{1 \leq t \leq r+2 \\ t \neq \rho_{\sigma}(q)}}\right).$$

El siguiente lema nos permitirá dar una descripción alternativa del polítopo generado por los vértices $\phi_{1,\mu}, \phi_{2,\mu}, \dots, \phi_{r+2,\mu}$.

Lema 12. *Sea $\mu = (\sigma, q, n) \in \tilde{S}_r$. Si $x^{(1)}, \dots, x^{(r)} \in [0, 1]$ satisfacen*

$$x^{(\sigma(1))} \geq x^{(\sigma(2))} \geq \dots \geq x^{(\sigma(r))},$$

entonces existen unos únicos $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ de modo que

$$(x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, y_1) \in P_{1,\mu} \quad \text{y} \quad (x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, y_2) \in P_{2,\mu}.$$

Más aún, tales y_1 e y_2 cumplen $y_1 \leq y_2$.

Demostración. Pongamos $b_1 := 1 - x^{(\sigma(1))}$, $b_t := x^{(\sigma(t-1))} - x^{(\sigma(t))}$ ($2 \leq t \leq r$) y $b_{r+1} := x^{(\sigma(r))}$. Claramente $b_t \geq 0$, para todo $1 \leq t \leq r+1$. Además,

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{r+1} b_t &= b_1 + \sum_{t=2}^r b_t + b_{r+1} \\ &= 1 - x^{(\sigma(1))} + (x^{(\sigma(1))} - x^{(\sigma(r))}) + x^{(\sigma(r))} = 1. \end{aligned}$$

Así,

$$v := \sum_{t=1}^{r+1} b_t \phi_{t,\mu} \in P_{1,\mu} \quad (2.21)$$

y podemos comprobar que $ve_{\sigma(j)}^T = x^{(\sigma(j))}$, para cada $1 \leq j \leq r$, ya que

$$ve_{\sigma(j)}^T = b_{r+1} + \cdots + b_{j+1} = b_{r+1} + (x^{(\sigma(j))} - x^{(\sigma(r))}) = x^{(\sigma(j))}.$$

Por lo tanto, poniendo $y_1 := ve_{r+1}^T$, la unicidad sigue de (2.20). La prueba de existencia y unicidad de y_2 es análoga, usando (2.19).

Para probar la última parte del lema, de (2.20) se sabe que los vectores $v_{y_1} := (x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, y_1)$ y $v_{y_2} := (x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, y_2)$ tienen coordenadas baricéntricas iguales sobre los conjuntos $\{\phi_{t,\mu}\}_{1 \leq t \leq r+1}$ y $\{\phi_{t,\mu}\}_{1 \leq t \leq r+2}$ respectivamente. Como $\{\phi_{t,\mu}\}_{1 \leq t \leq r+1}$ y $\{\phi_{t,\mu}\}_{1 \leq t \leq r+2}$ difieren sólo en los elementos $\phi_{\rho_\sigma(q)}$ y $\phi_{r+2,\mu}$, se deduce que

$$v_{y_2} - v_{y_1} = b(\phi_{r+2,\mu} - \phi_{\rho_\sigma(q),\mu}) = \frac{b}{N} e_{r+1},$$

con b una de las coordenadas baricéntricas de v_{y_2} respecto de $\{\phi_{t,\mu}\}_{1 \leq t \leq r+2}$.

Por lo tanto, $(v_{y_2} - v_{y_1})e_{r+1}^T = y_2 - y_1 \geq 0$. \square

Notemos que tanto y_1 como y_2 en el Lema 12 dependen de $\mu \in \tilde{S}_r$ y de $x^{(1)}, \dots, x^{(r)} \in [0, 1]$. Entonces, dados $\mu = (\sigma, q, n) \in \tilde{S}_r$ y $x \in \mathbb{R}^{r+1}$ tal que sus primeras r coordenadas satisfacen

$$1 \geq x^{(\sigma(1))} \geq x^{(\sigma(2))} \geq \cdots \geq x^{(\sigma(r))} \geq 0,$$

en adelante escribiremos

$$y_{i,\mu}(x) = y_{i,\sigma,q,n}(x) := y_i \quad (i = 1, 2).$$

Notemos además de (2.21) que $v = v(x)$ es una función continua de x , ya que cada $b_t = b_t(x)$ lo es. Por lo tanto, $y_1(x) = v(x)e_{r+1}^T$ también es continua. Lo mismo para $y_2(x)$.

Definición 13. Sea $\mu = (\sigma, q, n) \in \tilde{S}_r$. Definimos

$$D_\mu = D_{\sigma, q, n} := \left\{ x \in \mathbb{R}^{r+1} \mid \begin{array}{l} 1 \geq x^{(\sigma(1))} \geq x^{(\sigma(2))} \geq \dots \geq x^{(\sigma(r))} \geq 0, \\ y_{1, \mu}(x) \leq x^{(r+1)} \leq y_{2, \mu}(x). \end{array} \right\}.$$

Dado $\mu = (\sigma, q, n) \in \tilde{S}_r$, del Lema 12 deducimos, por la convexidad de $P_{1, \mu}$ y $P_{2, \mu}$, que

$$(1-t)y_{i, \mu}(x) + ty_{i, \mu}(z) = y_{i, \mu}((1-t)x + tz) \quad (i = 1, 2; t \in [0, 1]; x, z \in D_\mu).$$

Con esta identidad, queda claro que D_μ es convexo. Además, cada $\phi_{t, \mu} \in D_\mu$ ($1 \leq t \leq r+2$). Para verificar esto último, basta notar dos cosas. La primera es que

$$\phi_{t, \mu}^{(\sigma(j))} = \begin{cases} 1 & \text{si } j < t, \\ 0 & \text{si } j \geq t, \end{cases} \quad \phi_{r+2, \mu}^{(\sigma(j))} = \begin{cases} 1 & \text{si } j < \rho_\sigma(q), \\ 0 & \text{si } j \geq \rho_\sigma(q), \end{cases}$$

para $1 \leq j, t \leq r+1$. La segunda es que

$$\phi_{t, \mu}^{(r+1)} = y_{1, \mu}(\phi_{t, \mu}) \quad \text{y} \quad \phi_{r+2, \mu}^{(r+1)} = y_{2, \mu}(\phi_{r+2, \mu}),$$

pues $\phi_{t, \mu} \in P_{1, \mu}$ y $\phi_{r+2, \mu} \in P_{2, \mu}$, para todo $1 \leq t \leq r+1$. Así, podemos concluir

$$P(\phi_{1, \mu}, \phi_{2, \mu}, \dots, \phi_{r+2, \mu}) \subset D_\mu.$$

Por otro lado, todo $v \in D_\mu$ está contenido en el segmento recto que une los puntos

$$(v^{(1)}, \dots, v^{(r)}, y_{1, \mu}(v)) \in P_{1, \mu} \quad \text{y} \quad (v^{(1)}, \dots, v^{(r)}, y_{2, \mu}(v)) \in P_{2, \mu},$$

así que

$$P(\phi_{1, \mu}, \phi_{2, \mu}, \dots, \phi_{r+2, \mu}) = D_\mu. \quad (2.22)$$

Por el Lema 11, tenemos que D_μ es un $(r+1)$ -símplice. Otra propiedad importante de los $D_\mu = D_{\sigma, q, n}$ es que, fijando $\sigma \in S_r$ y haciendo correr q y n de cierta manera, es posible "apilarlos uno encima del otro" de tal forma que los símlices contiguos se intersecten en un r -símplice. Más precisamente, dado $\sigma \in S_r$, de (1.8) y de la Definición 10 se verifica que

$$\phi_{t, \sigma, q-1, n} = \phi_{t, \sigma, q, n} \quad \text{y} \quad \phi_{\rho_\sigma(q), \sigma, q-1, n} = \phi_{r+2, \sigma, q, n} \quad (2.23)$$

($1 \leq t \leq r+1$, $t \neq \rho_\sigma(q)$; $2 \leq q \leq r+1$; $0 \leq n \leq N-1$). También se verifica que

$$\phi_{t, \sigma, r+1, n+1} = \phi_{t, \sigma, 1, n} \quad \text{y} \quad \phi_{\rho_\sigma(1), \sigma, r+1, n+1} = \phi_{r+2, \sigma, 1, n}$$

($1 \leq t \leq r+1$, $t \neq \rho_\sigma(1)$; $0 \leq n \leq N-2$). Como consecuencia inmediata de estas identidades tenemos que

$$\begin{aligned} P_{1,\sigma,q-1,n} &= P_{2,\sigma,q,n} & (2 \leq q \leq r+1; 0 \leq n \leq N-1), \\ P_{1,\sigma,r+1,n+1} &= P_{2,\sigma,1,n} & (0 \leq n \leq N-2). \end{aligned}$$

Luego, aplicando el Lema 12 a esto último, obtenemos la cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} y_{1,\sigma,r+1,0}(x) &\leq y_{1,\sigma,r,0}(x) \leq \cdots \leq y_{1,\sigma,2,0}(x) \leq y_{1,\sigma,1,0}(x) \leq \\ y_{1,\sigma,r+1,1}(x) &\leq y_{1,\sigma,r,1}(x) \leq \cdots \leq y_{1,\sigma,2,1}(x) \leq y_{1,\sigma,1,1}(x) \leq \\ &\vdots \\ y_{1,\sigma,r+1,N-2}(x) &\leq y_{1,\sigma,r,N-2}(x) \leq \cdots \leq y_{1,\sigma,2,N-2}(x) \leq y_{1,\sigma,1,N-2}(x) \leq \\ y_{1,\sigma,r+1,N-1}(x) &\leq y_{1,\sigma,r,N-1}(x) \leq \cdots \leq y_{1,\sigma,2,N-1}(x) \leq y_{2,\sigma,1,N-1}(x), \end{aligned} \quad (2.24)$$

para cada $x \in [0, 1]^r \times \mathbb{R}$ tal que $x^{(\sigma(1))} \geq \cdots \geq x^{(\sigma(r))}$.

Notemos que esta cadena acaba con el término $y_{2,\sigma,1,N-1}(x)$. De hecho, este término es el único de la cadena indexado por 2 en primer lugar en vez de por 1. Sin embargo, es posible cambiar esto debido a que

$$\begin{aligned} P_{2,\sigma,1,N-1} &= P(\{\phi_{t,\sigma,1,N-1}\}_{\substack{1 \leq t \leq r+2 \\ t \neq \rho_\sigma(1)}}) \\ &= P(\{\phi_{t,\sigma,r+1,0} + e_{r+1}\}_{1 \leq t \leq r+1}) \\ &= P_{1,\sigma,r+1,0} + e_{r+1}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

por lo que

$$y_{2,\sigma,1,N-1}(x) = 1 + y_{1,\sigma,r+1,0}(x),$$

siendo $y_{1,\sigma,r+1,0}(x)$ el primer término de la cadena. Por esto abreviaremos

$$y_\mu(x) = y_{\sigma,q,n}(x) := y_{1,\mu}(x) \quad (\mu = (\sigma, q, n) \in \tilde{S}_r), \quad (2.26)$$

para cada $x \in [0, 1]^r \times \mathbb{R}$ tal que $x^{(\sigma(1))} \geq \cdots \geq x^{(\sigma(r))}$.

Con los comentarios del párrafo anterior hemos encontrado que, si ponemos

$$\Delta_\sigma := \left\{ x \in \mathbb{R}^{r+1} \mid \begin{array}{l} 1 \geq x^{(\sigma(1))} \geq x^{(\sigma(2))} \geq \cdots \geq x^{(\sigma(r))} \geq 0, \\ y_{\sigma,r+1,0}(x) \leq x^{(r+1)} \leq 1 + y_{\sigma,r+1,0}(x). \end{array} \right\},$$

entonces

$$D := \bigcup_{\sigma \in S_r} \Delta_\sigma = \bigcup_{\mu \in \tilde{S}_r} D_\mu. \quad (2.27)$$

Son tres las características que nos interesarán de D . Una de ellas es que, siendo la unión finita de conjuntos compactos, es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^{r+1} . Además, D es la clausura topológica de un dominio fundamental del grupo aditivo \mathbb{R}^{r+1} bajo la acción del subgrupo \mathbb{Z}^{r+1} . De hecho, el conjunto

$$\mathfrak{D} := \bigcup_{\sigma \in S_r} \mathfrak{D}_\sigma, \quad (2.28)$$

$$\mathfrak{D}_\sigma := \left\{ x \in \mathbb{R}^{r+1} \mid \begin{array}{l} 1 > x^{(\sigma(1))} \geq x^{(\sigma(2))} \geq \dots \geq x^{(\sigma(r))} \geq 0, \\ y_{\sigma, r+1, 0}(x) \leq x^{(r+1)} < 1 + y_{\sigma, r+1, 0}(x). \end{array} \right\},$$

es tal dominio fundamental, por lo que el cuociente

$$\widehat{T} := D / \sim \quad (2.29)$$

es homeomorfo al $(r+1)$ -toro canónico $\mathbb{R}^{r+1}/\mathbb{Z}^{r+1}$, donde \sim es la identificación de elementos en la misma órbita respecto de la acción mencionada.

Finalmente, concluiremos esta sección probando que los conjuntos convexos D_μ conforman una descomposición simplicial de D . En vista de (2.27), para mostrar esto, sólo necesitamos verificar que los D_μ se intersectan exclusivamente en caras. Recordemos que las caras de un símlice P son los símlices generados por subconjuntos del conjunto de vértices de P .

Lema 14. Sean $\sigma, \sigma' \in S_r$. Si $w \in \mathbb{R}^r$ es tal que

$$w^{(\sigma(1))} \geq w^{(\sigma(2))} \geq \dots \geq w^{(\sigma(r))} \quad \text{y} \quad w^{(\sigma'(1))} \geq w^{(\sigma'(2))} \geq \dots \geq w^{(\sigma'(r))},$$

entonces $w^{(\sigma(j))} = w^{(\sigma'(j))}$, para todo $1 \leq j \leq r$.

Demostración. Supongamos que $w^{(\sigma(j))} \neq w^{(\sigma'(j))}$, para algún $1 \leq j \leq r$ (sin pérdida de generalidad, supongamos que $w^{(\sigma(j))} < w^{(\sigma'(j))}$). Como $w^{(\sigma(j))} < w^{(\sigma'(j))} \leq w^{(\sigma'(i))}$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, j\}$, tenemos que hay al menos j coordenadas de w estrictamente mayores que $w^{(\sigma(j))}$, pero esto contradice

$$w^{(\sigma(1))} \geq \dots \geq w^{(\sigma(j))} \geq \dots \geq w^{(\sigma(r))},$$

lo cual dice que hay a lo más $j-1$ de tales coordenadas. Por lo tanto, $w^{(\sigma(j))} = w^{(\sigma'(j))}$, para todo $1 \leq j \leq r$. \square

Lema 15. Sean $\mu = (\sigma, q, n)$, $\mu' = (\sigma', q', n') \in \tilde{S}_r$. Llamaremos $\mathfrak{B}_{\sigma, \sigma'} \subset \mathbb{Z}$ al conjunto

$$\left\{ 2 \leq t \leq r+1 \mid \{\sigma(j-1) ; 2 \leq j \leq t\} = \{\sigma'(j-1) ; 2 \leq j \leq t\} \right\} \cup \{1\}.$$

Entonces valen las siguientes aseveraciones.

(i) Sea $v \in [0, 1]^r \times \mathbb{R}$ tal que

$$v^{(\sigma(1))} \geq \dots \geq v^{(\sigma(r))} \quad \text{y} \quad v^{(\sigma'(1))} \geq \dots \geq v^{(\sigma'(r))}.$$

Si

$$v = \sum_{t=1}^{r+1} b_t \phi_{t,\mu} \quad \text{ó} \quad v = (b_{\rho_\sigma(1)}/N)e_{r+1} + \sum_{t=1}^{r+1} b_t \phi_{t,\sigma,1,N-1},$$

con $b_t \in \mathbb{R}$, entonces $b_t = 0$ cuando $t \notin \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}$.

(ii) $t \prec_\sigma t' \iff t \prec_{\sigma'} t' \quad (t, t' \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'})$.

(iii) $a_{t,\sigma,\ell} = a_{t,\sigma',\ell} \quad (\ell \in \mathbb{Z}; t \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'})$.

(iv) Si $A \subset \{\phi_{t,\mu}\}_{1 \leq t \leq r+1}$ y $A' \subset \{\phi_{t,\mu'}\}_{1 \leq t \leq r+1}$, entonces

$$P(A) \cap P(A') = P(A \cap A').$$

Además, esta afirmación se mantiene si reemplazamos ambos (o uno de los) conjuntos $\{\phi_{t,\mu}\}_{1 \leq t \leq r+1}$ y $\{\phi_{t,\mu'}\}_{1 \leq t \leq r+1}$ por $\{\phi_{t,\sigma,1,N-1}\}_{\substack{1 \leq t \leq r+2 \\ t \neq \rho_\sigma(1)}}$ y $\{\phi_{t,\sigma',1,N-1}\}_{\substack{1 \leq t \leq r+2 \\ t \neq \rho_{\sigma'}(1)}}$, respectivamente. Acá, consideramos $P(\emptyset) := \emptyset$.

(v) Dados $\sigma, \sigma' \in S_r$, $1 \leq q \leq r+1$ y $0 \leq n \leq N-1$, existen $1 \leq \hat{q} \leq r+1$ y $0 \leq \hat{n} \leq N-1$ tales que

$$y_{\sigma,q,n}(v) = y_{\sigma',\hat{q},\hat{n}}(v) \quad \text{ó} \quad y_{\sigma,q,n}(v) = 1 + y_{\sigma',r+1,0}(v),$$

para todo $v \in [0, 1]^r \times \mathbb{R}$ que satisface

$$v^{(\sigma(1))} \geq \dots \geq v^{(\sigma(r))} \quad \text{y} \quad v^{(\sigma'(1))} \geq \dots \geq v^{(\sigma'(r))}.$$

Además, $y_{\sigma,r+1,0}(v) = y_{\sigma',r+1,0}(v)$ para todos estos v .

Demostración. Para probar (i) comencemos por notar que

$$v^{(\sigma(j))} = v e_{\sigma(j)}^T = b_{r+1} + \dots + b_{j+1} \quad (1 \leq j \leq r). \quad (2.30)$$

Si $2 \leq t \leq r+1$ es tal que $\{\sigma(j-1) \mid 2 \leq j \leq t\} \neq \{\sigma'(j-1) \mid 2 \leq j \leq t\}$ (notemos $t \neq r+1$), entonces existe $2 \leq j \leq t$ tal que $\sigma(j-1) = \sigma'(i)$ con $t \leq i \leq r$. Esto implica que

$$1 \geq \dots \geq v^{(\sigma'(j-1))} \geq \dots \geq v^{(\sigma'(t-1))} \geq \dots \geq v^{(\sigma(j-1))} \geq \dots \geq 0,$$

y como por Lema 14 se sabe que $v^{(\sigma'(j-1))} = v^{(\sigma(j-1))}$, tenemos que $v^{(\sigma'(t-1))} = v^{(\sigma'(t))}$. Por lo tanto, $v^{(\sigma'(t-1))} = v^{(\sigma(t))}$ y de (2.30) concluimos que $b_t = 0$.

Para probar (ii) basta notar que $\xi_{t,\sigma} = \xi_{t,\sigma'}$ y $\xi_{t',\sigma} = \xi_{t',\sigma'}$ para todos $t, t' \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}$. Luego, (ii) sigue de las condiciones (2.9) a (2.12) que caracterizan al orden \prec_σ .

La afirmación (iii) sigue directamente de (2.16) y de la definición de $a_{t,\sigma,\ell}$ (ver Definición 10).

Ahora probemos la primera parte de (iv). Es claro que $A \cap A' \subset P(A) \cap P(A')$, más aún, como $P(A) \cap P(A')$ es convexo tenemos $P(A \cap A') \subset P(A) \cap P(A')$. Para probar la otra inclusión, supongamos que $P(A) \cap P(A') \neq \emptyset$ (en caso contrario la inclusión es obvia). Recordemos que, por el Lema 11, $\{\phi_{t,\mu}\}_{t=1}^{r+1}$ es afinmente independiente, e igualmente para $\{\phi_{t,\mu'}\}_{t=1}^{r+1}$. Tomemos $v \in P(A) \cap P(A')$ y expandámoslo en sus coordenadas baricéntricas respecto a A y A' .

$$v = \sum_{t=1}^{r+1} b_t \phi_{t,\mu} = \sum_{t=1}^{r+1} b'_t \phi_{t,\mu'},$$

donde $b_t, b'_t \geq 0$; $\sum_{t=1}^{r+1} b_t = \sum_{t=1}^{r+1} b'_t = 1$; $b_t = 0$ si $\phi_{t,\mu} \notin A$ y $b'_t = 0$ si $\phi_{t,\mu'} \notin A'$. Como de (2.22) sabemos que $P(A) \subset D_\mu$ y $P(A') \subset D_{\mu'}$, tenemos que

$$v^{(\sigma(1))} \geq \dots \geq v^{(\sigma(r))} \quad \text{y} \quad v^{(\sigma'(1))} \geq \dots \geq v^{(\sigma'(r))},$$

por lo que $v^{(\sigma(j))} = v^{(\sigma'(j))}$ y entonces $b_t = b'_t$ (ver el Lema 14 y (2.30)). Así, de (i) sabemos que

$$\sum_{t \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}} b_t (\phi_{t,\mu} - \phi_{t,\mu'}) = 0. \quad (2.31)$$

Luego, supongamos (sin pérdida de generalidad) que $n \leq n'$. Si $n < n'$, entonces Definición 10 y (iii) implica $(\phi_{t,\mu} - \phi_{t,\mu'})e_{r+1}^T \leq 0$, para todo $t \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}$. Por lo tanto, de (2.31),

$$b_t = b'_t > 0 \implies \phi_{t,\mu} = \phi_{t,\mu'},$$

así que $v \in P(A \cap A')$. Si $n = n'$, supongamos que existen $1 \leq t, t' \leq r+1$ tales que

$$(\phi_{t,\mu} - \phi_{t,\sigma',q',n})e_{r+1}^T < 0, \quad (2.32)$$

$$(\phi_{t',\mu} - \phi_{t',\sigma',q',n})e_{r+1}^T > 0. \quad (2.33)$$

O sea, $t \neq t'$. Si $t \prec_\sigma t'$, tenemos por (2.33), (iii) y Definición 10 que $t \prec_\sigma t' \prec_\sigma \rho_\sigma(q)$, es decir, $(\phi_{t,\mu} - \phi_{t,\sigma',q',n})e_{r+1}^T \geq 0$, lo que contradice (2.32). Si

$t' \prec_\sigma t$, por (2.32) (ii), (iii) y Definición 10, $t' \prec_\sigma t \prec_\sigma \rho_\sigma(q')$. Por lo tanto $(\phi_{t',\mu} - \phi_{t',\sigma',q',n})e_{r+1}^T \leq 0$, que contradice (2.33). Así, procediendo como en el caso $n < n'$, deducimos que $v \in P(A \cap A')$.

Para demostrar la segunda parte de (iv), notemos que la prueba de que

$$P(A) \cap P(A') \supset P(A \cap A')$$

sigue como en la primera parte de (iv), así que no la repetiremos. Para la inclusión reversa, primero verifiquemos el caso en que $A \subset \{\phi_{t,\sigma,1,N-1}\}_{\substack{1 \leq t \leq r+2 \\ t \neq \rho_\sigma(1)}}$ y $A' \subset \{\phi_{t,\mu'}\}_{1 \leq t \leq r+1}$. Sea $v \in P(A) \cap P(A')$. Expandiendo v en sus coordenadas baricéntricas respecto a A y A' , tenemos

$$v = (b_{\rho_\sigma(1)}/N)e_{r+1} + \sum_{t=1}^{r+1} b_t \phi_{t,\sigma,1,N-1} = \sum_{t=1}^{r+1} b'_t \phi_{t,\mu'}.$$

Usando nuevamente (2.30), llegamos a que $b_t = b'_t$. Luego, lo anterior junto a (i) nos da que $\sum_{t \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}} b_t \delta_t = 0$, donde δ_t es de la forma

$$\phi_{t,\sigma,1,N-1} - \phi_{t,\mu'} \quad (t \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}, t \neq \rho_\sigma(1)),$$

o bien,

$$\phi_{r+2,\sigma,1,N-1} - \phi_{\rho_\sigma(1),\mu'} \quad (\rho_\sigma(1) \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}).$$

En cualquiera de estos casos, Definición 10 y (iii) nos muestran que $\delta_t e_{r+1}^T \geq 0$. Por lo tanto, cada vez que $b_t > 0$, tendremos que $\delta_t = 0$, lo que implica que $v \in P(A \cap A')$.

El caso en que $A \subset \{\phi_{t,\mu}\}_{1 \leq t \leq r+1}$ y $A' \subset \{\phi_{t,\sigma',1,N-1}\}_{\substack{1 \leq t \leq r+2 \\ t \neq \rho_{\sigma'}(1)}}$ sigue, por simetría, como el anterior.

Supongamos que $A \subset \{\phi_{t,\sigma,1,N-1}\}_{\substack{1 \leq t \leq r+2 \\ t \neq \rho_\sigma(1)}}$, $A' \subset \{\phi_{t,\sigma',1,N-1}\}_{\substack{1 \leq t \leq r+2 \\ t \neq \rho_{\sigma'}(1)}}$ y $v \in P(A) \cap P(A')$. Expandiendo nuevamente v en sus coordenadas baricéntricas respecto a A y A' , nos encontramos con

$$v = (b_{\rho_\sigma(1)}/N)e_{r+1} + \sum_{t=1}^{r+1} b_t \phi_{t,\sigma,1,N-1} = (b'_{\rho_{\sigma'}(1)}/N)e_{r+1} + \sum_{t=1}^{r+1} b'_t \phi_{t,\sigma',1,N-1}.$$

En vista, una vez más, de (2.30), tenemos la igualdad de las coordenadas baricéntricas $b_t = b'_t$, donde, por (i), sólo nos interesan los índices $t \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}$. Por otro lado, de Definición 10 y (iii), tenemos los siguientes casos.

1. $\phi_{t,\sigma,1,N-1} = \phi_{t,\sigma',1,N-1} \quad (t \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}, t \neq \rho_\sigma(1), t \neq \rho_{\sigma'}(1)),$
2. $\phi_{r+2,\sigma,1,N-1} = \phi_{\rho_\sigma(1),\sigma',1,N-1} \quad (\rho_\sigma(1) \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}, \rho_{\sigma'}(1) \neq \rho_\sigma(1)),$

3. $\phi_{r+2,\sigma,1,N-1} = \phi_{r+2,\sigma',1,N-1}$ ($\rho_\sigma(1) \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}, \rho_{\sigma'}(1) = \rho_\sigma(1)$),
4. $\phi_{\rho_{\sigma'}(1),\sigma,1,N-1} = \phi_{r+2,\sigma',1,N-1}$ ($\rho_{\sigma'}(1) \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}, \rho_{\sigma'}(1) \neq \rho_\sigma(1)$).

Por lo tanto, $v \in P(A \cap A')$.

Finalmente, para probar (v), pongámonos en tres escenarios. Primero supongamos que $t \prec_\sigma \rho_\sigma(q)$, para todo $t \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}$, y que $n \leq N - 2$. De esta manera, usando (iii) tenemos que $\phi_{t,\mu} = \phi_{t,\sigma',r+1,n+1}$ para todo $t \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}$ ($\widehat{q} = r + 1$ y $\widehat{n} = n + 1$), pues $t \not\prec_{\sigma'} r + 1$ para todo $1 \leq t \leq r + 1$. En segundo lugar, supongamos que $t \prec_\sigma \rho_\sigma(q)$, para todo $t \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}$, y que $n = N - 1$. En este caso, como $a_{t,\sigma,N} = 1 + a_{t,\sigma,0}$, procediendo como en el caso anterior obtenemos que $\phi_{t,\mu} = e_{r+1} + \phi_{t,\sigma',r+1,0}$ para todo $t \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}$. En tercer y último lugar, si existe $t \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}$ con $t \not\prec_\sigma \rho_\sigma(q)$, pongamos

$$t_0 := \min_{t \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}} \{t \not\prec_\sigma \rho_\sigma(q)\}.$$

Es decir,

$$t' \not\prec_\sigma \rho_\sigma(q), \quad t' \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}, \quad t' \neq t_0 \quad \implies \quad t_0 \prec_\sigma t'$$

(notemos que $\mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'} \neq \emptyset$, ya que $1 \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}$). Definamos $\widehat{q} := (\rho_{\sigma'})^{-1}(t_0)$. Luego, si $t \prec_\sigma \rho_\sigma(q)$ con $t \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}$, entonces $t \prec_\sigma t_0 = \rho_{\sigma'}(\widehat{q})$. Si $t \not\prec_\sigma \rho_\sigma(q)$ con $t \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}$, tenemos que $t \not\prec_\sigma t_0$ (por definición de t_0). Usando (ii) y (iii) se verifica que $\phi_{t,\mu} = \phi_{t,\sigma',\widehat{q},n}$ para todo $t \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}$ ($\widehat{n} = n$). En particular, $\phi_{t,\sigma,r+1,0} = \phi_{t,\sigma',r+1,0}$ para todo $t \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}$ ($t_0 = r + 1 = r + 1$). Esto concluye nuestro análisis de los tres escenarios posibles. Por otro lado, si $v \in \mathbb{R}^{r+1}$ satisface $v^{(\sigma(1))} \geq \dots \geq v^{(\sigma(r))}$ y $v^{(\sigma'(1))} \geq \dots \geq v^{(\sigma'(r))}$, del Lema 12 y (i) sabemos que podemos escribir

$$(v^{(1)}, \dots, v^{(r)}, y_\mu(v)) = \sum_{t \in \mathfrak{B}_{\sigma,\sigma'}} b_t \phi_{t,\mu}.$$

Por lo tanto, (v) sigue del Lema 12 y de los tres escenarios anteriores. \square

Proposición 16. Sean $\mu = (\sigma, q, n)$, $\mu' = (\sigma', q', n') \in \widetilde{S}_r$.

$$D_\mu \cap D_{\mu'} = P(\{\phi_{t,\mu}\}_{1 \leq t \leq r+2} \cap \{\phi_{t,\mu'}\}_{1 \leq t \leq r+2}). \quad (2.34)$$

Demostración. Iniciamos esta demostración verificando que el conjunto en el lado izquierdo de la ecuación (2.34) está contenido en el conjunto del lado derecho. Sea $v \in D_\mu \cap D_{\mu'}$. Por la Definición 13, tenemos que

$$y_{1,\mu}(v) \leq v^{(r+1)} \leq y_{2,\mu} \quad \text{e} \quad y_{1,\mu'}(v) \leq v^{(r+1)} \leq y_{2,\mu'}. \quad (2.35)$$

Además, la Definición 13 nos muestra que, para probar

$$v \in P(\{\phi_{t,\mu}\}_{1 \leq t \leq r+2} \cap \{\phi_{t,\mu'}\}_{1 \leq t \leq r+2}), \quad (2.36)$$

debemos verificar tres posibilidades (sin pérdida de generalidad).

$$\begin{aligned} y_{1,\mu}(v) < y_{2,\mu}(v), \quad y_{1,\mu'}(v) &= y_{2,\mu'}(v) & \text{ó} \\ y_{1,\mu}(v) &= y_{2,\mu}(v), \quad y_{1,\mu'}(v) &= y_{2,\mu'}(v) & \text{ó} \\ y_{1,\mu}(v) < y_{2,\mu}(v), \quad y_{1,\mu'}(v) &< y_{2,\mu'}(v). \end{aligned}$$

Supongamos que $y_{1,\mu}(v) < y_{2,\mu}(v)$ e $y_{1,\mu'}(v) = y_{2,\mu'}(v)$. Como en este caso tenemos que

$$y_{1,\mu'}(v) = y_{2,\mu'}(v) = v^{(r+1)},$$

quedan inmediatamente descartadas

$$y_{1,\mu'}(v) = y_{2,\mu'}(v) < y_{1,\mu}(v) \quad \text{e} \quad y_{2,\mu}(v) < y_{1,\mu'}(v) = y_{2,\mu'}(v)$$

(ver (2.35)). Además, tampoco podemos tener

$$y_{1,\mu}(v) < y_{1,\mu'}(v) = v^{(r+1)} < y_{2,\mu}(v). \quad (2.37)$$

Para verificar esta última aseveración, notemos que el Lema 15 (v) implica que existen $1 \leq \hat{q} \leq r+1$ y $0 \leq \hat{n} \leq N-1$ tales que

$$y_{1,\mu'}(v) = y_{\sigma, \hat{q}, \hat{n}}(v) \quad \text{ó} \quad y_{1,\mu'}(v) = 1 + y_{\sigma, r+1, 0}(v).$$

Dicho de otra forma, el Lema 15 (v) implica que cada valor en la cadena (2.24), para σ' (respectivamente σ), es algún valor en la cadena (2.24), para σ (respectivamente σ'). Pero entonces (2.37) es imposible, pues las ecuaciones de polítopos anteriores a (2.24) muestran que $y_{2,\mu}(v)$ es el eslabón (a la derecha) inmediatamente siguiente a $y_{1,\mu}(v)$ en la cadena (2.24), para σ , y no puede ocurrir que

$$y_{1,\mu}(v) < y_{\sigma, \hat{q}, \hat{n}}(v) < y_{2,\mu}(v) \quad \text{ó} \quad y_{1,\mu}(v) < 1 + y_{\sigma, r+1, 0}(v) < y_{2,\mu}(v).$$

Por ende, las únicas posibilidades en este caso son que

$$\begin{aligned} v^{(r+1)} &= y_{1,\mu'}(v) = y_{2,\mu'}(v) = y_{1,\mu}(v) & \text{ó} \\ v^{(r+1)} &= y_{1,\mu'}(v) = y_{2,\mu'}(v) = y_{2,\mu}(v), \end{aligned}$$

así que el Lema 12 implica que $v \in P_{1,\mu'} \cap P_{1,\mu}$ ó $v \in P_{1,\mu'} \cap P_{2,\mu}$, respectivamente. O sea, v está en la intersección de polítopos como en el Lema 15 (iv), lo cual prueba la inclusión (2.36).

La segunda posibilidad es que $y_{1,\mu}(v) = y_{2,\mu}(v)$ e $y_{1,\mu'}(v) = y_{2,\mu'}(v)$. En este caso, como por (2.35) tenemos que

$$v^{(r+1)} = y_{1,\mu}(v) = y_{2,\mu}(v) = y_{1,\mu'}(v) = y_{2,\mu'}(v),$$

el Lema 12 implica que $v \in P_{1,\mu} \cap P_{1,\mu'}$, lo que nos permite aplicar nuevamente el Lema 15 (iv) para probar la inclusión (2.36).

La posibilidad restante es que $y_{1,\mu}(v) < y_{2,\mu}(v)$ e $y_{1,\mu'}(v) < y_{2,\mu'}(v)$. Nuevamente, en vista de (2.35), y ocupando el Lema 15 (v) y (2.24) como en el análisis de la primera posibilidad, obtenemos tres "subposibilidades".

1. $y_{2,\mu'}(v) = y_{1,\mu}(v)$,
2. $y_{1,\mu'}(v) = y_{2,\mu}(v)$,
3. $y_{1,\mu'}(v) = y_{1,\mu}(v)$ e $y_{2,\mu'}(v) = y_{2,\mu}(v)$.

De hecho, si no se diera 1, ni 2, ni $y_{1,\mu'}(v) = y_{1,\mu}(v)$, tendríamos que $y_{1,\mu'}(v) < y_{2,\mu}(v)$ (ver (2.35)). Además, es imposible que

$$y_{1,\mu}(v) < y_{1,\mu'}(v) < y_{2,\mu}(v),$$

debido a la correspondencia de eslabones que da el Lema 15 (v) en (2.24), para σ y σ' . Por ende, $y_{1,\mu'}(v) < y_{1,\mu}(v)$, pero tampoco se puede tener $y_{2,\mu'}(v) < y_{1,\mu}(v)$ (ver (2.35)), entonces

$$y_{1,\mu'}(v) < y_{1,\mu}(v) < y_{2,\mu'}(v),$$

lo que contradice la correspondencia de eslabones mencionada. Por lo tanto, debe darse 1 ó 2 ó $y_{1,\mu'}(v) = y_{1,\mu}(v)$. Análogamente se prueba que debe tenerse 1 ó 2 ó $y_{2,\mu'}(v) = y_{2,\mu}(v)$.

Ahora, analizaremos las tres "subposibilidades".

1. Aquí, en vista de (2.35), tenemos que

$$v^{(r+1)} = y_{2,\mu'}(v) = y_{1,\mu}(v),$$

por lo que $v \in P_{1,\mu} \cap P_{2,\mu'}$, y podemos aplicar el Lema 15 (iv) como en los casos anteriores para probar (2.36).

2. Es análogo a 1.

3. En este caso, v está en el segmento recto que une los puntos

$$(v^{(1)}, \dots, v^{(r)}, y_{1,\mu}(v)) \quad \text{y} \quad (v^{(1)}, \dots, v^{(r)}, y_{2,\mu}(v)).$$

Como $y_{1,\mu'}(v) = y_{1,\mu}(v)$ e $y_{2,\mu'}(v) = y_{2,\mu}(v)$, estos puntos están, por el Lema 12, en $P_{1,\mu} \cap P_{1,\mu'}$ y $P_{2,\mu} \cap P_{2,\mu'}$, respectivamente. Entonces, el Lema 15 (iv) implica que ambos puntos están en el polítopo

$$P(\{\phi_{t,\mu}\}_{1 \leq t \leq r+2} \cap \{\phi_{t,\mu'}\}_{1 \leq t \leq r+2}),$$

así que por convexidad se tiene (2.36).

Con lo anterior, hemos probado que el conjunto del lado izquierdo de (2.34) está contenido en el conjunto del derecho. La otra inclusión es obvia (ver primer párrafo de la demostración de Lema 15 (iv)). \square

2.4. La función afín por trozos f

En esta sección mostramos la existencia de una función afín por trozos que utilizaremos para definir la función F mencionada luego del Teorema 1 (ver Capítulo 1).

Consideremos la función

$$\ell : (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^r) \setminus \{x^{(r+1)} = 0\} \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{r-1}$$

dada por la fórmula

$$\ell(x) := \left(\frac{x^{(1)}}{x^{(r+1)}}, \frac{x^{(2)}}{x^{(r+1)}}, \dots, \frac{x^{(r)}}{x^{(r+1)}} \right) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{r-1}, \quad (2.38)$$

válida para cualquier $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(r+1)}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^r$ (i. e. $x^{(1)} \in \mathbb{C}$ y $x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(r+1)} \in \mathbb{R}$) con última coordenada $x^{(r+1)}$ no nula. Con esto, definimos $\tilde{V} := \ell(V) = \langle \tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_r \rangle$, donde $V := \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \rangle$ y $\tilde{\varepsilon}_j := \ell(\varepsilon_j)$ ($1 \leq j \leq r$). Claramente \tilde{V} actúa por multiplicación componente a componente sobre $\ell(\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r) = \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}$.

Sea $\mu = (\sigma, q, n) \in \tilde{S}_r$. Escojamos $\alpha_t = \alpha(t) \in k \cap (\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r)$, para cada $t \in \mathbb{Z}$, como en el paso 2 del A7P (ver Capítulo 1). Se verifica inmediatamente de (2.2) que

$$\alpha_t^{(1)} \in \mathring{\mathcal{A}}_t \quad (t \in \mathbb{Z}). \quad (2.39)$$

Como el conjunto $\{\phi_{t,\mu}\}_{1 \leq t \leq r+2}$ es afinmente independiente (ver Lema 11), definimos $A_\mu : \mathbb{R}^{r+1} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{r-1}$ como la única función afín tal que

$$A_\mu(\phi_{t,\mu}) := \varphi_{t,\mu} \quad (1 \leq t \leq r+2), \quad (2.40)$$

donde $\varphi_{t,\mu} := \ell(f_{t,\mu})$ y $f_{t,\mu}$ es definido mediante

$$\begin{aligned} f_{t,\mu} = f_{t,\sigma,q,n} &:= \begin{cases} f_{t,\sigma} \cdot \alpha(Na_{t,\sigma,n}) & \text{si } t \not\prec_{\sigma} \rho_{\sigma}(q), \\ f_{t,\sigma} \cdot \alpha(Na_{t,\sigma,n+1}) & \text{si } t \prec_{\sigma} \rho_{\sigma}(q), \end{cases} & (1 \leq t \leq r+1) \\ f_{r+2,\mu} = f_{r+2,\sigma,q,n} &:= f_{\rho_{\sigma}(q),\sigma} \cdot \alpha(Na_{\rho_{\sigma}(q),\sigma,n+1}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Notemos que esta definición de $f_{t,\mu}$ coincide con la dada en (1.9) y (1.10), sólo hemos abreviado el índice de los α_t ocupando notación vista en la Definición 10. De hecho, es fácil ver que estos índices satisfacen

$$a_{t,\sigma,j+1} - a_{t,\sigma,j} = 1/N \quad \text{y} \quad Na_{t,\sigma,j} \equiv m(\xi_{t,\sigma}) + j \pmod{N}, \quad (2.42)$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$. Además, aquí $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{r-1} = \mathbb{R}^{r+1}$ como \mathbb{R} -espacio vectorial

Una propiedad de las funciones afines nos permite calcular fácilmente el valor de A_{μ} en un punto $v \in \mathbb{R}^{r+1}$, cuando v está escrito en función de sus coordenadas baricéntricas respecto del conjunto afinmente independiente $\{\phi_{t,\mu}\}_{1 \leq t \leq r+2}$. De hecho,

$$v = \sum_{t=1}^{r+2} b_t \phi_{t,\mu}, \quad b_t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{t=1}^{r+2} b_t = 1 \quad \implies \quad A_{\mu}(v) = \sum_{t=1}^{r+2} b_t \varphi_{t,\mu}. \quad (2.43)$$

En principio, no sabemos si la imagen de A_{μ} restringida a D_{μ} está contenida en $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}$ o no. Este asunto cobrará importancia cuando definamos la función F a partir de las A_{μ} . El siguiente lema nos da una respuesta a esta interrogante.

Lema 17. *Sea $\mu = (\sigma, q, n) \in \tilde{S}_r$. Para todo $1 \leq t \leq r+2$ se tiene que*

$$A_{\mu}(\phi_{t,\mu}) \in (f_{\rho_{\sigma}(q),\sigma}^{(1)} \cdot \mathcal{S}_{Na_{\rho_{\sigma}(q),\sigma,n}}) \times \mathbb{R}_+^{r-1}.$$

Por lo tanto,

$$A_{\mu}(D_{\mu}) \subset (f_{\rho_{\sigma}(q),\sigma}^{(1)} \cdot \mathcal{S}_{Na_{\rho_{\sigma}(q),\sigma,n}}) \times \mathbb{R}_+^{r-1} \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}.$$

Demostración. Empecemos por notar un par de propiedades de la función ℓ definida en (2.38) que utilizaremos durante esta demostración. Si $x \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r$, entonces

$$\arg(\ell(x)^{(1)}) = \arg(x^{(1)}) \quad \text{y} \quad \ell(x)^{(j)} \in \mathbb{R}_+ \quad (2 \leq j \leq r). \quad (2.44)$$

En particular, estas propiedades se cumplen cuando $x = f_{t,\mu}$, para cualquier $t \in \mathbb{Z}$.

Para probar la primera parte del lema, comencemos por estudiar el caso en que $1 \leq t \leq r+1$ y $t \prec_{\sigma} \rho_{\sigma}(q)$. Por (2.40),

$$A_{\mu}(\phi_{t,\mu}) := \ell(f_{t,\sigma} \cdot \alpha_{Na_{t,\sigma,n+1}}). \quad (2.45)$$

Como $t \prec_{\sigma} \rho_{\sigma}(q)$, por Corolario 8 tenemos

$$\xi_{t,\sigma} \cdot \overset{\circ}{\mathcal{A}}_{1+m(\xi_{t,\sigma})} \subset \xi_{\rho_{\sigma}(q),\sigma} \cdot \mathcal{S}_{m(\xi_{\rho_{\sigma}(q),\sigma})}.$$

Multiplicando esta última inclusión por $\tau_1(f_{r+1,\sigma}) \cdot \exp(2\pi in/N)$, y en vista de (2.42), obtenemos

$$f_{t,\sigma}^{(1)} \cdot \overset{\circ}{\mathcal{A}}_{Na_{t,\sigma,n+1}} \subset f_{\rho_{\sigma}(q),\sigma}^{(1)} \cdot \mathcal{S}_{Na_{\rho_{\sigma}(q),\sigma,n}}.$$

Luego, usando (2.45), (2.39) y (2.44), la última inclusión implica que

$$A_{\mu}(\phi_{t,\mu}) \in (f_{\rho_{\sigma}(q),\sigma}^{(1)} \cdot \mathcal{S}_{Na_{\rho_{\sigma}(q),\sigma,n}}) \times \mathbb{R}_+^{r-1},$$

lo que prueba la primera parte del lema en este caso.

Pasemos ahora a verificar la primera parte del lema cuando $1 \leq t \leq r+1$ y $t \not\prec_{\sigma} \rho_{\sigma}(q)$. Por (2.40),

$$A_{\mu}(\phi_{t,\mu}) := \ell(f_{t,\sigma} \cdot \alpha_{Na_{t,\sigma,n}}). \quad (2.46)$$

Como $t \not\prec_{\sigma} \rho_{\sigma}(q)$, (2.10) (respectivamente (2.5)) implica que

$$\xi_{t,\sigma} \cdot \mathcal{A}_{m(\xi_{t,\sigma})} \subset \xi_{\rho_{\sigma}(q),\sigma} \cdot \mathcal{S}_{m(\xi_{\rho_{\sigma}(q),\sigma})}$$

cuando $\rho_{\sigma}(q) \prec_{\sigma} t$ (respectivamente $t = \rho_{\sigma}(q)$). En vista de (2.42), multiplicando esta inclusión por $\tau_1(f_{r+1,\sigma}) \cdot \exp(2\pi in/N)$, obtenemos que

$$f_{t,\sigma}^{(1)} \cdot \mathcal{A}_{Na_{t,\sigma,n}} \subset f_{\rho_{\sigma}(q),\sigma}^{(1)} \cdot \mathcal{S}_{Na_{\rho_{\sigma}(q),\sigma,n}}.$$

Luego, utilizando (2.46), (2.39) y (2.44), de la última contención concluimos

$$A_{\mu}(\phi_{t,\mu}) \in (f_{\rho_{\sigma}(q),\sigma}^{(1)} \cdot \mathcal{S}_{Na_{\rho_{\sigma}(q),\sigma,n}}) \times \mathbb{R}^{r-1},$$

lo cual prueba la primera parte del lema en este caso.

Para finalizar la primera parte del lema, si $t = r+2$, por (2.40) tenemos que

$$A_{\mu}(\phi_{t,\mu}) := \ell(f_{\rho_{\sigma}(q),\sigma} \cdot \alpha_{Na_{\rho_{\sigma}(q),\sigma,n+1}}). \quad (2.47)$$

Notemos de (2.5) que

$$\overset{\circ}{\mathcal{A}}_{1+n+m(\xi_{\rho_{\sigma}(q),\sigma})} \subset \mathcal{S}_{n+m(\xi_{\rho_{\sigma}(q),\sigma})}.$$

Usando (2.42) y multiplicando por $f_{\rho\sigma(q),\sigma}^{(1)}$, esta última inclusión es equivalente a

$$f_{\rho\sigma(q),\sigma}^{(1)} \cdot \mathring{\mathcal{A}}_{Na_{\rho\sigma(q),\sigma,n+1}} \subset f_{\rho\sigma(q),\sigma}^{(1)} \cdot \mathcal{S}_{Na_{\rho\sigma(q),\sigma,n}},$$

así que de (2.47) y (2.44) sigue que

$$A_\mu(\phi_{t,\mu}) \in (f_{\rho\sigma(q),\sigma}^{(1)} \cdot \mathcal{S}_{Na_{\rho\sigma(q),\sigma,n}}) \times \mathbb{R}^{r-1},$$

lo que concluye la demostración de la primera parte del lema.

La segunda parte del lema sigue directamente de (2.22), (2.43) y de la convexidad del conjunto

$$(f_{\rho\sigma(q),\sigma}^{(1)} \cdot \mathcal{S}_{Na_{\rho\sigma(q),\sigma,n}}) \times \mathbb{R}_+^{r-1},$$

el cual es un producto de conjuntos convexos. \square

Con el objetivo de definir la función F mencionada luego del Teorema 1, construiremos una función f definida en D (ver (2.27)) que tenga la cualidad de pasar al cociente \widehat{T} descrito en la sección anterior (ver (2.29)). Esta función f será una función afín por trozos construida a partir de las funciones afines A_μ que hemos estudiado. La siguiente discusión y el próximo lema son los últimos pasos que necesitamos antes de establecer dicha f en la Proposición 19.

Dado $\sigma \in S_r$, pongamos $\tilde{\sigma} \in S_r$ tal que $\tilde{\sigma}(1) := \sigma(r)$ y, para cada $2 \leq j \leq r$, $\tilde{\sigma}(j) := \sigma(j-1)$. Además, recordemos el conjunto

$$B_\sigma := \left\{ 1 \leq t \leq r+1 \mid m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)} \cdot \xi_{t,\sigma}) \equiv m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)}) + m(\xi_{t,\sigma}) \pmod{N} \right\}$$

definido en el Lema 9. Usando (2.13), para cada $1 \leq t \leq r$, existe $\kappa'_{t,\sigma} \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m(\xi_{t,\sigma} \varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)}) = \begin{cases} m(\xi_{t,\sigma}) + m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)}) + \kappa'_{t,\sigma} N & \text{si } t \in B_\sigma \\ m(\xi_{t,\sigma}) + m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)}) + \kappa'_{t,\sigma} N - 1 & \text{si } t \in B_\sigma^c \end{cases}. \quad (2.48)$$

Por otro lado, notemos que (2.16) y la definición de $\tilde{\sigma}$ implican

$$2\pi d_{t+1,\tilde{\sigma}} - 2\pi d_{t,\sigma} + \arg(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)}) + \frac{2\pi}{N} m(\xi_{t+1,\tilde{\sigma}}) - \frac{2\pi}{N} m(\xi_{t,\sigma}) \in \left(-\frac{3\pi}{N}, \frac{3\pi}{N} \right)$$

($1 \leq t \leq r$). Multiplicando esta última expresión por $-N/2\pi$, concluimos que

$$-Nd_{t+1,\tilde{\sigma}} + Nd_{t,\sigma} - \frac{N}{2\pi} \arg(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)}) - m(\xi_{t+1,\tilde{\sigma}}) + m(\xi_{t,\sigma}) \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

Luego, utilizando (1.5) y analizando la parte entera por arriba [] de la expresión anterior, obtenemos que

$$-Nd_{t+1,\tilde{\sigma}} + Nd_{t,\sigma} + m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)}) - m(\xi_{t+1,\tilde{\sigma}}) + m(\xi_{t,\sigma}) \in \{-1, 0, 1, 2\}.$$

O, equivalentemente,

$$d_{t+1,\tilde{\sigma}} - d_{t,\sigma} - \frac{1}{N}m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)}) + \frac{1}{N}m(\xi_{t+1,\tilde{\sigma}}) - \frac{1}{N}m(\xi_{t,\sigma}) \in \left\{ \frac{1}{N}, 0, -\frac{1}{N}, -\frac{2}{N} \right\}.$$

Como $N \geq 3$, el Lema 9 (i) y (2.48) implican que

$$d_{t+1,\tilde{\sigma}} - d_{t,\sigma} + \kappa'_{t,\sigma} = 0 \quad (1 \leq t \leq r, \sigma \in S_r). \quad (2.49)$$

Lema 18. Sea $\mu = (\sigma, q, n) \in \tilde{S}_r$ tal que $\rho_\sigma(q) \neq r+1$. Pongamos $\tilde{\sigma} \in S_r$ tal que $\tilde{\sigma}(1) := \sigma(r)$ y, para cada $2 \leq j \leq r$, $\tilde{\sigma}(j) := \sigma(j-1)$. Entonces, existen $\kappa_\mu \in \mathbb{Z}$, $\tilde{q} \in \{1, 2, \dots, r+1\}$ y $\tilde{n} \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ tales que

$$\phi_{t,\mu} + e_{\sigma(r)} + \kappa_\mu e_{r+1} = \phi_{t+1,\tilde{\mu}} \in D_{\tilde{\mu}} \quad (1 \leq t \leq r), \quad (2.50)$$

$$\phi_{r+2,\mu} + e_{\sigma(r)} + \kappa_\mu e_{r+1} = \phi_{r+2,\tilde{\mu}} \in D_{\tilde{\mu}}, \quad (2.51)$$

donde $\tilde{\mu} := (\tilde{\sigma}, \tilde{q}, \tilde{n}) \in \tilde{S}_r$.

Demostración. Sea $\tilde{q} := (\rho_{\tilde{\sigma}})^{-1}(1 + \rho_\sigma(q))$. Dividiremos la demostración del lema en función de dos casos, cuando $\rho_\sigma(q) \in B_\sigma$ y cuando no.

Caso 1 ($\rho_\sigma(q) \in B_\sigma$). Pongamos $\kappa_\mu \in \mathbb{Z}$ de modo que

$$0 \leq n - m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)}) + \kappa_\mu N \leq N - 1.$$

Así, definimos

$$\tilde{n} := n - m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)}) + \kappa_\mu N$$

y ponemos $\tilde{\mu} := (\tilde{\sigma}, \tilde{q}, \tilde{n}) \in \tilde{S}_r$. En vista de la Definición 10, (2.48) y (2.49), tenemos que para cada $1 \leq t \leq r$,

$$\begin{aligned} a_{t+1,\tilde{\sigma},\tilde{n}} - a_{t,\sigma,n} &= \begin{cases} \kappa'_{t,\sigma} + \kappa_\mu + d_{t+1,\tilde{\sigma}} - d_{t,\sigma} & \text{si } t \in B_\sigma \\ \kappa'_{t,\sigma} + \kappa_\mu + d_{t+1,\tilde{\sigma}} - d_{t,\sigma} - 1/N & \text{si } t \in B_\sigma^c \end{cases} \\ &= \begin{cases} \kappa_\mu & \text{si } t \in B_\sigma \\ \kappa_\mu - 1/N & \text{si } t \in B_\sigma^c \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Para probar (2.50), consideraremos cuatro posibilidades para $1 \leq t \leq r$, en función de si $t \prec_\sigma \rho_\sigma(q)$ o no, y si $t \in B_\sigma$ o no.

Si $1 \leq t \leq r$, $t \prec_{\sigma} \rho_{\sigma}(q)$ y $t \in B_{\sigma}$, usando la Definición 10, (2.52), el Lema 9 (ii) y (2.22),

$$\begin{aligned}
\phi_{t,\mu} + e_{\sigma(r)} + \kappa_{\mu} e_{r+1} &= \sum_{i=1}^{t+1} e_{\bar{\sigma}(i-1)} + (\kappa_{\mu} + a_{t,\sigma,n+1}) e_{r+1} && [\text{Def. 10}] \\
&= \sum_{i=1}^{t+1} e_{\bar{\sigma}(i-1)} + a_{t+1,\bar{\sigma},\bar{n}+1} e_{r+1} && [(2.52)] \\
&= \phi_{t+1,\bar{\mu}} \in D_{\bar{\mu}} && [\text{Def. 10, Lema 9 (ii) y (2.22)}]
\end{aligned} \tag{2.53}$$

(recordar que $a_{t,\sigma,n+1} = a_{t,\sigma,n} + 1/N$ y $a_{t+1,\bar{\sigma},\bar{n}+1} = a_{t+1,\bar{\sigma},\bar{n}} + 1/N$).

Si $1 \leq t \leq r$, $t \not\prec_{\sigma} \rho_{\sigma}(q)$ y $t \in B_{\sigma}$, usando nuevamente la Definición 10, (2.52), el Lema 9 (ii) y (2.22), se verifica que

$$\begin{aligned}
\phi_{t,\mu} + e_{\sigma(r)} + \kappa_{\mu} e_{r+1} &= \sum_{i=1}^{t+1} e_{\bar{\sigma}(i-1)} + (\kappa_{\mu} + a_{t,\sigma,n}) e_{r+1} && [\text{Def. 10}] \\
&= \sum_{i=1}^{t+1} e_{\bar{\sigma}(i-1)} + a_{t+1,\bar{\sigma},\bar{n}} e_{r+1} && [(2.52)] \\
&= \phi_{t+1,\bar{\mu}} \in D_{\bar{\mu}} && [\text{Def. 10, Lema 9 (ii) y (2.22)}].
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Si $1 \leq t \leq r$, $t \not\prec_{\sigma} \rho_{\sigma}(q)$ y $t \in B_{\sigma}^c$, usando la Definición 10, (2.52), el Lema 9 (iv) y (2.22), tenemos que

$$\begin{aligned}
\phi_{t,\mu} + e_{\sigma(r)} + \kappa_{\mu} e_{r+1} &= \sum_{i=1}^{t+1} e_{\bar{\sigma}(i-1)} + (\kappa_{\mu} + a_{t,\sigma,n}) e_{r+1} && [\text{Def. 10}] \\
&= \sum_{i=1}^{t+1} e_{\bar{\sigma}(i-1)} + a_{t+1,\bar{\sigma},\bar{n}+1} e_{r+1} && [(2.52)] \\
&= \phi_{t+1,\bar{\mu}} \in D_{\bar{\mu}} && [\text{Def. 10, Lema 9 (iv) y (2.22)}].
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Debido al Lema 9 (v), es imposible que $1 \leq t \leq r$, $t \prec_{\sigma} \rho_{\sigma}(q)$ y $t \in B_{\sigma}^c$, así que de (2.53), (2.54) y (2.55) sigue (2.50).

Para probar (2.51), usando la Definición 10, (2.54), la definición de \tilde{q} y

(2.22), tenemos

$$\begin{aligned}
 \phi_{r+2,\mu} + e_{\sigma(r)} + \kappa_\mu e_{r+1} &= \phi_{\rho_\sigma(q),\sigma,q,\tilde{n}} + (1/N)e_{r+1} + e_{\sigma(r)} + \kappa_\mu e_{r+1} && [\text{Def. 10}] \\
 &= \phi_{\rho_\sigma(q)+1,\tilde{\sigma},\tilde{q},\tilde{n}} + (1/N)e_{r+1} && [(2.54)] \\
 &= \phi_{\rho_{\tilde{\sigma}}(\tilde{q}),\tilde{\sigma},\tilde{q},\tilde{n}} + (1/N)e_{r+1} && [\tilde{q} := (\rho_{\tilde{\sigma}})^{-1}(1 + \rho_\sigma(q))] \\
 &= \phi_{r+2,\tilde{\mu}} \in D_{\tilde{\mu}} && [\text{Def. 10 y (2.22)}].
 \end{aligned}$$

Así, hemos concluido la demostración del lema en el Caso 1.

Caso 2 ($\rho_\sigma(q) \in B_\sigma^c$). Definamos $\kappa_\mu \in \mathbb{Z}$ de modo que

$$0 \leq n - m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)}) + 1 + \kappa_\mu N \leq N - 1$$

(notar que la definición de κ_μ en este caso difiere de la del Caso 1). Así, ponemos

$$\tilde{n} := n + 1 - m(\varepsilon_{\sigma(r)}^{(1)}) + \kappa_\mu N$$

y $\tilde{\mu} := (\tilde{\sigma}, \tilde{q}, \tilde{n})$. Análogamente al Caso 1, la Definición 10, (2.48) y (2.49) implican que

$$a_{t+1,\tilde{\sigma},\tilde{n}} - a_{t,\sigma,n} = \begin{cases} \kappa_\mu + 1/N & \text{si } t \in B_\sigma \\ \kappa_\mu & \text{si } t \in B_\sigma^c \end{cases}. \quad (2.56)$$

Para probar (2.50), como en el Caso 1 consideraremos las cuatro posibilidades para $1 \leq t \leq r$, en función de si $t \prec_\sigma \rho_\sigma(q)$ o no, y si $t \in B_\sigma$ o no.

Si $1 \leq t \leq r$, $t \prec_\sigma \rho_\sigma(q)$ y $t \in B_\sigma$,

$$\begin{aligned}
 \phi_{t,\mu} + e_{\sigma(r)} + \kappa_\mu e_{r+1} &= \sum_{i=1}^{t+1} e_{\tilde{\sigma}(i-1)} + (\kappa_\mu + a_{t,\sigma,n+1})e_{r+1} && [\text{Def. 10}] \\
 &= \sum_{i=1}^{t+1} e_{\tilde{\sigma}(i-1)} + a_{t+1,\tilde{\sigma},\tilde{n}}e_{r+1} && [(2.56)] \\
 &= \phi_{t+1,\tilde{\mu}} \in D_{\tilde{\mu}} && [\text{Def. 10, Lema 9 (iv) y (2.22)}]. \\
 &&& (2.57)
 \end{aligned}$$

Si $1 \leq t \leq r$, $t \prec_\sigma \rho_\sigma(q)$ y $t \in B_\sigma^c$,

$$\begin{aligned}
 \phi_{t,\mu} + e_{\sigma(r)} + \kappa_\mu e_{r+1} &= \sum_{i=1}^{t+1} e_{\tilde{\sigma}(i-1)} + (\kappa_\mu + a_{t,\sigma,n+1})e_{r+1} && [\text{Def. 10}] \\
 &= \sum_{i=1}^{t+1} e_{\tilde{\sigma}(i-1)} + a_{t+1,\tilde{\sigma},\tilde{n}+1}e_{r+1} && [(2.56)] \\
 &= \phi_{t+1,\tilde{\mu}} \in D_{\tilde{\mu}} && [\text{Def. 10, Lema 9 (ii) y (2.22)}]. \\
 &&& (2.58)
 \end{aligned}$$

Si $1 \leq t \leq r$, $t \notin \rho_\sigma(q)$ y $t \in B_\sigma^c$,

$$\begin{aligned}
 \phi_{t,\mu} + e_{\sigma(r)} + \kappa_\mu e_{r+1} &= \sum_{i=1}^{t+1} e_{\bar{\sigma}(i-1)} + (\kappa_\mu + a_{t,\sigma,n})e_{r+1} && [\text{Def. 10}] \\
 &= \sum_{i=1}^{t+1} e_{\bar{\sigma}(i-1)} + a_{t+1,\bar{\sigma},\bar{n}}e_{r+1} && [(2.56)] \\
 &= \phi_{t+1,\bar{\mu}} \in D_{\bar{\mu}} && [\text{Def. 10, Lema 9 (ii) y (2.22)}].
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Además, es imposible que $1 \leq t \leq r$, $t \notin \rho_\sigma(q)$ y $t \in B_\sigma$, debido al Lema 9 (v). Por ende, de (2.57), (2.58) y (2.59) sigue (2.50).

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 \phi_{r+2,\mu} + e_{\sigma(r)} + \kappa_\mu e_{r+1} &= \phi_{\rho_\sigma(q),\sigma,q,n} + (1/N)e_{r+1} + e_{\sigma(r)} + \kappa_\mu e_{r+1} && [\text{Def. 10}] \\
 &= \phi_{\rho_\sigma(q)+1,\bar{\sigma},\bar{q},\bar{n}} + (1/N)e_{r+1} && [(2.58)] \\
 &= \phi_{\rho_{\bar{\sigma}}(\bar{q}),\bar{\sigma},\bar{q},\bar{n}} + (1/N)e_{r+1} && [\bar{q} := (\rho_{\bar{\sigma}})^{-1}(1 + \rho_\sigma(q))] \\
 &= \phi_{r+2,\bar{\mu}} \in D_{\bar{\mu}} && [\text{Def. 10 y (2.22)}],
 \end{aligned}$$

lo que demuestra (2.51). De esta manera, hemos concluido la prueba del lema en el Caso 2 y, por ende, del Lema 18. \square

Proposición 19. *Existe una función continua $f : D \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}$ con las siguientes propiedades:*

- (i) Si $x \in D_\mu$, entonces $f(x) = A_\mu(x)$.
- (ii) Si $x \in D$ y $x + e_{r+1} \in D$, entonces $f(x + e_{r+1}) = f(x)$.
- (iii) Si $x \in D$ y $x + e_j + \beta e_{r+1} \in D$, para algún vector e_j de la base canónica de \mathbb{R}^{r+1} , distinto de e_{r+1} , y algún $\beta \in \mathbb{Z}$, entonces

$$f(x + e_j + \beta e_{r+1}) = \tilde{\varepsilon}_j \cdot f(x) \quad (1 \leq j \leq r).$$

Demostración. Como tenemos una descomposición simplicial para D , para probar (i) sólo necesitamos mostrar que si $x \in D_\mu \cap D_{\mu'}$, entonces $A_\mu(x)$ es igual a $A_{\mu'}(x)$. Si $v = \phi_{t,\mu}$ ($1 \leq t \leq r+2$) es un vértice de D_μ , entonces usando la Definición 10, (2.40), (2.41) y (1.1), tenemos que

$$A_\mu(v) = \ell(\alpha(Nv^{(r+1)})) \cdot \prod_{1 \leq j \leq r} \tilde{\varepsilon}_j^{v(j)} \tag{2.60}$$

(para más detalles de la verificación de esta identidad, ver la demostración de [3, Proposition 12]). Como esta última expresión es independiente de μ , tenemos que $A_\mu(v) = A_{\mu'}(v)$ si v es un vértice de D_μ y $D_{\mu'}$. Pero por la Proposición 16, $D_{\mu'} \cap D_\mu$ es un d -símplice (para algún $1 \leq d \leq r$) cuyos $d+1$ vértices son también vértices de D_μ y $D_{\mu'}$. Una función afín sobre un d -símplice está únicamente determinada por sus valores sobre los $d+1$ vértices, así que $A_\mu(x) = A_{\mu'}(x)$, para todo $x \in D_{\mu'} \cap D_\mu$.

Para probar (ii), (2.27) nos muestra que $x \in P_{1,\sigma,r+1,0} \subset D_{\sigma,r+1,0}$, para algún $\sigma \in S_r$. Si escribimos x en sus coordenadas baricéntricas respecto a $P_{1,\sigma,r+1,0}$,

$$x = \sum_{t=1}^{r+1} b_t \phi_{t,\sigma,r+1,0}, \quad b_t \geq 0, \quad \sum_{t=1}^{r+1} b_t = 1,$$

entonces

$$\begin{aligned} x + e_{r+1} &= \sum_{t=1}^{r+1} b_t (\phi_{t,\sigma,r+1,0} + e_{r+1}) \\ &= b_{\rho_\sigma(1)} (\phi_{\rho_\sigma(1),\sigma,r+1,0} + e_{r+1}) + \sum_{\substack{1 \leq t \leq r+1 \\ t \neq \rho_\sigma(1)}} b_t (\phi_{t,\sigma,r+1,0} + e_{r+1}) \\ &= b_{\rho_\sigma(1)} \phi_{r+2,\sigma,1,N-1} + \sum_{\substack{1 \leq t \leq r+1 \\ t \neq \rho_\sigma(1)}} b_t \phi_{t,\sigma,1,N-1} \quad [(2.25)] \\ &\in D_{\sigma,1,N-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando (i), (2.43), (2.40) y (2.42), se verifica que

$$\begin{aligned} f(x) &= A_{\sigma,r+1,0}(x) = \sum_{t=1}^{r+1} b_t \varphi_{t,\sigma,r+1,0} \quad [(i), (2.43) \text{ y } (2.40)] \\ &= b_{\rho_\sigma(1)} \varphi_{\rho_\sigma(1),\sigma,r+1,0} + \sum_{\substack{1 \leq t \leq r+1 \\ t \neq \rho_\sigma(1)}} b_t \varphi_{t,\sigma,r+1,0} \\ &= b_{\rho_\sigma(1)} \varphi_{r+2,\sigma,1,N-1} + \sum_{\substack{1 \leq t \leq r+1 \\ t \neq \rho_\sigma(1)}} b_t \varphi_{t,\sigma,1,N-1} \quad [(2.40) \text{ y } (2.42)] \\ &= A_{\sigma,1,N-1}(x + e_{r+1}) = f(x + e_{r+1}) \quad [(2.43), (2.40) \text{ y } (i)], \end{aligned}$$

lo que prueba (ii).

Ahora probemos (iii). Como $x \in D$ y $x + e_j + \beta e_{r+1} \in D$, se tiene que $x \in D_\mu$, para algún $\mu = (\sigma, q, n) \in \tilde{S}_r$, donde podemos suponer $\sigma(r) = j$, pues

$x^{(j)} = 0$ (ver Definición 13). Escribiendo x en sus coordenadas baricéntricas respecto a D_μ ,

$$x = \sum_{t=1}^{r+2} b_t \phi_{t,\mu}, \quad b_t \geq 0, \quad \sum_{t=1}^{r+2} b_t = 1,$$

podemos notar que

$$0 = x^{(j)} = x^{(\sigma(r))} = x e_{\sigma(r)}^T = \begin{cases} b_{r+2} + b_{r+1} & \text{si } \rho_\sigma(q) = r+1 \\ b_{r+1} & \text{si } \rho_\sigma(q) \neq r+1 \end{cases}.$$

Entonces, dividiremos la demostración en dos casos, cuando $\rho_\sigma(q) = r+1$ y cuando no. Primero supongamos que $\rho_\sigma(q) \neq r+1$. Como $\sum_{t=1}^{r+2} b_t = 1$ y $b_{r+1} = 0$, el Lema 18 implica que existen $\kappa_\mu \in \mathbb{Z}$ y $\tilde{\mu} = (\tilde{\sigma}, \tilde{q}, \tilde{n}) \in \tilde{S}_r$ tales que

$$\begin{aligned} x + e_j + \kappa_\mu e_{r+1} &= b_{r+2}(\phi_{r+2,\mu} + e_j + \kappa_\mu e_{r+1}) + \sum_{t=1}^r b_t(\phi_{t,\mu} + e_j + \kappa_\mu e_{r+1}) \\ &= b_{r+2}\phi_{r+2,\tilde{\mu}} + \sum_{t=1}^r b_t\phi_{t+1,\tilde{\mu}} \in D_{\tilde{\mu}} \subset D, \end{aligned}$$

donde $\tilde{\sigma}(1) := \sigma(r)$ y $\tilde{\sigma}(j) := \sigma(j-1)$ ($2 \leq j \leq r$). Más aún, como también se tiene que $x + e_j + \beta e_{r+1} \in D$, de la definición (2.27) se deduce que $\kappa_\mu \in \{\beta-1, \beta, \beta+1\}$. Por lo tanto, usando (ii),

$$f(x + e_j + \beta e_{r+1}) = f(x + e_j + \kappa_\mu e_{r+1}). \quad (2.61)$$

Luego, (i), (2.43) y (2.40) nos dicen que

$$f(x + e_j + \kappa_\mu e_{r+1}) = A_{\tilde{\mu}}(x + e_j + \kappa_\mu e_{r+1}) = b_{r+2}\varphi_{r+2,\tilde{\mu}} + \sum_{t=1}^r b_t\varphi_{t+1,\tilde{\mu}}. \quad (2.62)$$

Por otro lado, poniendo $v = \phi_{r+2,\mu}$, podemos usar (2.60) para calcular

$$\begin{aligned} \varphi_{r+2,\tilde{\mu}} &=: A_{\tilde{\mu}}(\phi_{r+2,\tilde{\mu}}) = A_{\tilde{\mu}}(\phi_{r+2,\mu} + e_j + \kappa_\mu e_{r+1}) \\ &= \ell(\alpha(Nv^{(r+1)} + N\kappa_\mu)) \cdot \prod_{1 \leq i \leq r} \tilde{\varepsilon}_i^{(v^{(i)} + e_j^{(i)})} = \tilde{\varepsilon}_j \cdot \ell(\alpha(Nv^{(r+1)})) \cdot \prod_{1 \leq i \leq r} \tilde{\varepsilon}_i^{v^{(i)}} \\ &= \tilde{\varepsilon}_j \cdot \varphi_{r+2,\mu} = \tilde{\varepsilon}_j \cdot A_\mu(\phi_{r+2,\mu}). \end{aligned} \quad (2.63)$$

De manera análoga, poniendo $w = \phi_{t,\mu}$ ($1 \leq t \leq r$),

$$\begin{aligned}
 \varphi_{t+1,\tilde{\mu}} &=: A_{\tilde{\mu}}(\phi_{t+1,\tilde{\mu}}) = A_{\tilde{\mu}}(\phi_{t,\mu} + e_j + \kappa_\mu e_{r+1}) \\
 &= \ell(\alpha(Nw^{(r+1)} + N\kappa_\mu)) \cdot \prod_{1 \leq i \leq r} \tilde{\varepsilon}_i^{(w^{(i)} + e_j^{(i)})} = \tilde{\varepsilon}_j \cdot \ell(\alpha(Nw^{(r+1)})) \cdot \prod_{1 \leq i \leq r} \tilde{\varepsilon}_i^{w^{(i)}} \\
 &= \tilde{\varepsilon}_j \cdot \varphi_{t,\mu} = \tilde{\varepsilon}_j \cdot A_\mu(\phi_{t,\mu}) \quad (1 \leq t \leq r). \tag{2.64}
 \end{aligned}$$

Así que por (2.63), (2.64), (2.43) y (i), el lado derecho de (2.62) es igual a

$$\tilde{\varepsilon}_j \cdot \left(b_{r+2} A_\mu(\phi_{r+2,\mu}) + \sum_{t=1}^r b_t A_\mu(\phi_{t,\mu}) \right) = \tilde{\varepsilon}_j \cdot A_\mu(x) = \tilde{\varepsilon}_j \cdot f(x),$$

lo cual, junto a (2.61), prueba la Proposición 19 en este caso.

Ahora supongamos que $\rho_\sigma(q) = r + 1$. Entonces, $q = r + 1$ ya que $\rho_\sigma(r + 1) = r + 1$ (ver (2.17)). Además, notemos que $b_{r+2} = b_{r+1} = 0$ ya que $b_{r+2} + b_{r+1} = 0$ y $b_{r+2}, b_{r+1} \geq 0$. Aquí,

$$x \in D_\mu = D_{\sigma,r+1,n} \implies x \in D_{\sigma,r,n},$$

pues de (2.23) tenemos que $\phi_{t,\sigma,r+1,n} = \phi_{t,\sigma,r,n}$ ($1 \leq t \leq r$). O sea, la demostración se reduce al caso $\rho_\sigma(q) \neq r + 1$. \square

Capítulo 3

Demostración del teorema principal

3.1. Dos funciones entre toros

Recordemos el $(r+1)$ -toro \widehat{T} , definido en (2.29) mediante la identificación de elementos de

$$D := \bigcup_{\sigma \in S_r} \left\{ x \in \mathbb{R}^{r+1} \mid \begin{array}{l} 1 \geq x^{(\sigma(1))} \geq x^{(\sigma(2))} \geq \dots \geq x^{(\sigma(r))} \geq 0, \\ y_{\sigma, r+1, 0}(x) \leq x^{(r+1)} \leq 1 + y_{\sigma, r+1, 0}(x). \end{array} \right\}$$

que están en la misma órbita respecto de la acción sobre el grupo aditivo \mathbb{R}^{r+1} del subgrupo \mathbb{Z}^{r+1} . Recordemos además que el conjunto

$$\mathfrak{D} := \bigcup_{\sigma \in S_r} \left\{ x \in \mathbb{R}^{r+1} \mid \begin{array}{l} 1 > x^{(\sigma(1))} \geq x^{(\sigma(2))} \geq \dots \geq x^{(\sigma(r))} \geq 0, \\ y_{\sigma, r+1, 0}(x) \leq x^{(r+1)} < 1 + y_{\sigma, r+1, 0}(x). \end{array} \right\}$$

definido en (2.28) es un dominio fundamental para esta acción. La Proposición 19 nos dice que la función afín por trozos $f : D \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}$ descrita allí desciende a una función (continua) F de \widehat{T} al cociente $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1})/\widetilde{V}$, el cual proviene de la acción de $\widetilde{V} := \langle \widetilde{\varepsilon}_1, \dots, \widetilde{\varepsilon}_r \rangle$ sobre $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}$ por multiplicación componente a componente. Más precisamente, esta función $F : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1})/\widetilde{V}$ está definida por el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1} \\ \downarrow \widehat{\pi} & & \downarrow \pi \\ \widehat{T} & \xrightarrow{F} & (\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1})/\widetilde{V} \end{array}, \quad (3.1)$$

donde $\widehat{\pi}$ y π son las proyecciones al cociente y f es la función de la Proposición 19.

Además de F , existe otra función de \widehat{T} a $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1})/\widetilde{V}$ que naturalmente proviene de una función con dominio D . Definimos $f_0 : D \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}$ mediante

$$(f_0(x))^{(j)} := \begin{cases} (\widetilde{\varepsilon}_1^{(1)})^{x^{(1)}} \cdots (\widetilde{\varepsilon}_r^{(1)})^{x^{(r)}} \cdot \exp(2\pi i x^{(r+1)}) & \text{si } j = 1, \\ (\widetilde{\varepsilon}_1^{(j)})^{x^{(1)}} \cdots (\widetilde{\varepsilon}_r^{(j)})^{x^{(r)}} & \text{si } 2 \leq j \leq r, \end{cases} \quad (3.2)$$

para todo $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(r+1)}) \in D$, donde las potencias están definidas con la rama del argumento en $[-\pi, \pi)$. De (3.2) queda claro que f_0 es una función continua que satisface las propiedades (ii) y (iii) de la Proposición 19. Entonces, f_0 desciende a una función continua $F_0 : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1})/\widetilde{V}$ definida por el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f_0} & \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1} \\ \downarrow \widehat{\pi} & & \downarrow \pi \\ \widehat{T} & \xrightarrow{F_0} & (\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1})/\widetilde{V} \end{array}, \quad (3.3)$$

donde $\widehat{\pi}$ y π son las proyecciones al cociente y f_0 es la función definida en (3.2).

El siguiente lema es un resultado análogo a [3, Lemma 20]. Aunque su demostración es esencialmente la misma, la incluimos aquí ya que en [3] está hecha sólo para el caso en que k es un cuerpo de números totalmente real. Para distinguir dominios, escribiremos

$$\text{LOG} : \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1} \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad (\text{LOG}(x))^{(j)} := \log |x^{(j)}| \quad (1 \leq j \leq r), \quad (3.4)$$

$$\text{Log} : \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad (\text{Log}(x))^{(j)} := \log |x^{(j)}| \quad (1 \leq j \leq r). \quad (3.5)$$

La función en (3.5) se utiliza en el paso 6 del A7P.

Lema 20. Sean LOG y Log las funciones definidas respectivamente en (3.4) y (3.5). Entonces

$$\det(\text{LOG}(\widetilde{\varepsilon}_1), \dots, \text{LOG}(\widetilde{\varepsilon}_r)) = (r+2) \det(\text{Log}(\varepsilon_1), \dots, \text{Log}(\varepsilon_r)). \quad (3.6)$$

En particular, ninguno de los dos determinantes en (3.6) se anula, ambos tienen el mismo signo y

$$\Lambda := \sum_{1 \leq j \leq r} \mathbb{Z} \cdot \text{LOG}(\widetilde{\varepsilon}_j) \subset \mathbb{R}^r$$

es un reticulado de dimensión máxima.

Demostración. Utilizando la identidad $|\varepsilon_j^{(1)}|^2 \cdot \prod_{i=2}^r \varepsilon_j^{(i)} = 1/\varepsilon_j^{(r+1)}$ ($1 \leq j \leq r$), (3.6) se reduce a probar que $r+2 = \det(I_r + B_r)$, donde las matrices I_r y B_r (de tamaño $r \times r$) son respectivamente la identidad y la matriz cuya primera columna tiene sólo entradas iguales a 2 y el resto sólo 1's. Pero $\det(\lambda I_r - B_r) = \lambda^{r-1}(\lambda - (r+1))$, usando los valores propios 0 y $r+1$ de B_r . Reemplazando $\lambda = -1$ se concluye la prueba. \square

Es fácil ver que $f_0(\mathfrak{D})$ es un dominio fundamental para la acción de \tilde{V} sobre $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}$. Para esto, notemos que si $\nu : \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1} \rightarrow \mathbb{R}_+^r$ es la función definida por la fórmula $(\nu(x))^{(j)} := |x^{(j)}|$ ($1 \leq j \leq r$), entonces el Lema 20 implica que $(\nu \circ f_0)(\mathfrak{D})$ es un dominio fundamental para la acción de $\nu(\tilde{V})$ sobre \mathbb{R}_+^r . Luego, como la exponencial $\exp(2\pi i x^{(r+1)})$ en (3.2) restringida a los $x \in \mathfrak{D}$ recorre el círculo unitario exactamente una vez, es claro que cualquier elemento $x \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}$ está relacionado a algún $\tilde{x} \in f_0(\mathfrak{D})$ bajo la acción de \tilde{V} . Además, si existieran dos elementos $\tilde{x}, \tilde{y} \in f_0(\mathfrak{D})$ relacionados por la acción de \tilde{V} , entonces $\nu(\tilde{x}), \nu(\tilde{y}) \in (\nu \circ f_0)(\mathfrak{D})$ estarían relacionados bajo la acción de $\nu(\tilde{V})$, lo cual implica $\nu(\tilde{x}) = \nu(\tilde{y})$. Esto, a su vez, implica $\tilde{x}^{(j)} = \tilde{y}^{(j)}$ para $j \geq 2$, $|\tilde{x}^{(1)}| = |\tilde{y}^{(1)}|$, lo cual no es posible para dos elementos distintos en la misma órbita (ver (3.24)). Por lo tanto, $f_0(\mathfrak{D})$ es un dominio fundamental de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}$ bajo la acción de \tilde{V} y $F_0 : \hat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1})/\tilde{V}$ es sobreyectiva.

Otra consecuencia de (3.6) es la siguiente. Si $f_1 : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}$ es la función definida por

$$(f_1(x))^{(j)} := (\tilde{\varepsilon}_1^{(j)})^{x^{(1)}} \dots (\tilde{\varepsilon}_r^{(j)})^{x^{(r)}} \quad (1 \leq j \leq r),$$

entonces por (3.6) la composición $(\text{LOG} \circ f_1) : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ es un homeomorfismo que satisface

$$(\text{LOG} \circ f_1)(x) = (\text{LOG} \circ f_0)(x, b) \quad (x \in [0, 1]^r, b \in \mathbb{R}, (x, b) \in D). \quad (3.7)$$

Por ende, la definición (3.2) y (3.7) implican que f_0 es inyectiva en \mathfrak{D} . Ahora, tomemos dos elementos $x, y \in \mathfrak{D}$. Si $F_0([x]) = F_0([y])$ con $[x], [y] \in \hat{T}$, usando (3.3) tenemos que $f_0(x) = u \cdot f_0(y)$ para algún $u \in \tilde{V}$. Es decir, tanto $f_0(y)$ como $u \cdot f_0(y)$ están en $f_0(\mathfrak{D})$, lo cual implica que $u = 1$ ya que $f_0(\mathfrak{D})$ es un dominio fundamental para la acción de \tilde{V} sobre $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}$. Luego, como f_0 es inyectiva en \mathfrak{D} , tenemos que $x = y$. Por lo tanto, $F_0 : \hat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1})/\tilde{V}$ es una función continua y biyectiva definida sobre un conjunto compacto. O sea, F_0 es un homeomorfismo y el cociente

$$T := (\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1})/\tilde{V} \quad (3.8)$$

es un $(r + 1)$ -toro.

Ahora mostramos un resultado para f_0 similar al Lema 17, que nos permitirá establecer una homotopía entre las funciones F y F_0 . Antes de esto, recordemos que

$$(f_0(x))^{(1)} = |\tilde{\varepsilon}_1^{(1)}|^{x^{(1)}} \dots |\tilde{\varepsilon}_r^{(1)}|^{x^{(r)}} \cdot \exp(\omega(x)i) \quad (x \in D), \quad (3.9)$$

donde $\omega : \mathbb{R}^{r+1} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función \mathbb{R} -lineal

$$\omega(x) := 2\pi x^{(r+1)} + \sum_{j=1}^r \arg(\tilde{\varepsilon}_j^{(1)}) x^{(j)}. \quad (3.10)$$

Lema 21. Sea $\mu = (\sigma, q, n) \in \tilde{S}_r$. Entonces

$$f_0(D_\mu) \subset (f_{\rho_\sigma(q), \sigma}^{(1)} \cdot \mathcal{S}_{Na_{\rho_\sigma(q), \sigma, n}}) \times \mathbb{R}_+^{r-1}.$$

Demostración. En vista de (3.2), sólo debemos preocuparnos de la primera coordenada (la compleja) de los elementos en $f_0(D_\mu)$. Debido a (2.16), (1.3) y (1.6) tenemos

$$\theta_{t, \sigma} = \sum_{j=1}^t \arg(\varepsilon_{\sigma(j-1)}^{(1)}) - \sum_{j=1}^{r+1} \arg(\varepsilon_{\sigma(j-1)}^{(1)}) + \frac{2\pi}{N} m(\xi_{t, \sigma}) + 2\pi d_{t, \sigma}.$$

Si $1 \leq t \leq r + 1$ es tal que $t \prec_\sigma \rho_\sigma(q)$, entonces de la Definición 10 se verifica que

$$\omega(\phi_{t, \mu}) - \omega(\phi_{\rho_\sigma(q), \mu}) = \theta_{t, \sigma} - \theta_{\rho_\sigma(q), \sigma} + 2\pi/N,$$

pues $\arg(\varepsilon_j^{(1)}) = \arg(\tilde{\varepsilon}_j^{(1)})$ para todo $1 \leq j \leq r$. Luego, por la definición (1.7) del orden \prec_σ y por el Lema 5 (v), obtenemos que

$$\omega(\phi_{t, \mu}) - \omega(\phi_{\rho_\sigma(q), \mu}) \in (0, 2\pi/N].$$

Si $t \not\prec_\sigma \rho_\sigma(q)$ ($1 \leq t \leq r + 1$), de manera análoga al caso $t \prec_\sigma \rho_\sigma(q)$, se tiene que

$$\omega(\phi_{t, \mu}) - \omega(\phi_{\rho_\sigma(q), \mu}) = \theta_{t, \sigma} - \theta_{\rho_\sigma(q), \sigma} \in [0, 2\pi/N)$$

y, además,

$$\omega(\phi_{r+2, \mu}) - \omega(\phi_{\rho_\sigma(q), \mu}) = 2\pi/N.$$

Por lo tanto, utilizando la linealidad de ω y la convexidad de D_μ y $[0, 2\pi/N]$, los cálculos anteriores nos permiten afirmar que

$$\begin{aligned} \omega(D_\mu) &\subset [\omega(\phi_{\rho_\sigma(q), \mu}), \omega(\phi_{\rho_\sigma(q), \mu}) + 2\pi/N] \\ &\subset [\omega(\phi_{\rho_\sigma(q), \mu}) - \pi/2N, \omega(\phi_{\rho_\sigma(q), \mu}) + 5\pi/2N]. \end{aligned}$$

Así, el lema sigue de la definición (2.1) y de la identidad

$$\omega(\phi_{\rho\sigma(q),\mu}) = 2\pi a_{\rho\sigma(q),\sigma,n} + \sum_{j=1}^{\rho\sigma(q)-1} \arg(\tilde{\varepsilon}_{\sigma(j)}^{(1)}).$$

□

El siguiente lema resume las propiedades de F y F_0 que utilizaremos más adelante.

Lema 22. Sean $F, F_0 : \widehat{T} \rightarrow T$ las funciones definidas por los diagramas (3.1) y (3.3), donde $T := (\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1})/\tilde{V}$. Entonces, F es homotópica a F_0 y F_0 es un homeomorfismo entre los $(r+1)$ -toros \widehat{T} y T .

Demostración. En vista de la discusión posterior al Lema 20, basta probar que F y F_0 son homotópicas. Para $x \in D$ y $\lambda \in [0, 1]$, consideremos $f_\lambda(x) := \lambda f(x) + (1-\lambda)f_0(x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^{r-1}$. Como $x \in D$, existe $\mu = (\sigma, q, n) \in \tilde{S}_r$ tal que $x \in D_\mu$. Por los lemas 17 y 21, tenemos

$$f(x)^{(1)} \in f_{\rho\sigma(q),\sigma}^{(1)} \cdot \mathcal{S}_{Na_{\rho\sigma(q),\sigma,n}} \quad \text{y} \quad f_0(x)^{(1)} \in f_{\rho\sigma(q),\sigma}^{(1)} \cdot \mathcal{S}_{Na_{\rho\sigma(q),\sigma,n}}.$$

Como $f_{\rho\sigma(q),\sigma}^{(1)} \cdot \mathcal{S}_{Na_{\rho\sigma(q),\sigma,n}} \subset \mathbb{C}^*$ es un conjunto convexo, tenemos que $f_\lambda(x) := \lambda f(x) + (1-\lambda)f_0(x) \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}$. Por tanto podemos definir $f_\lambda : D \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}$ por

$$f_\lambda(x) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f_0(x).$$

Claramente, $(\lambda, x) \mapsto f_\lambda(x)$ es continua.

Si $x \in D$ y $x + e_{r+1} \in D$, entonces, por el Lema 19 (ii) y (3.2),

$$\begin{aligned} f_\lambda(x + e_{r+1}) &= (1-\lambda)f_0(x + e_{r+1}) + \lambda f(x + e_{r+1}) \\ &= (1-\lambda)f_0(x) + \lambda f(x) \\ &= f_\lambda(x). \end{aligned}$$

Si $x \in D$ y $x + e_j + \beta e_{r+1} \in D$, para algún elemento e_j de la base canónica de \mathbb{R}^{r+1} , distinto de e_{r+1} , y algún $\beta \in \mathbb{Z}$, entonces, usando el Lema 19 (iii) y (3.2),

$$\begin{aligned} f_\lambda(x + e_j + \beta e_{r+1}) &= (1-\lambda)f_0(x + e_j + \beta e_{r+1}) + \lambda f(x + e_j + \beta e_{r+1}) \\ &= (1-\lambda)\tilde{\varepsilon}_j f_0(x) + \lambda \tilde{\varepsilon}_j f(x) \\ &= \tilde{\varepsilon}_j f_\lambda(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, f_λ desciende a una homotopía $F_\lambda : \widehat{T} \rightarrow T$ entre F_0 y F . □

Finalizamos esta sección mostrando un par de cálculos respecto a f y f_0 que necesitaremos más adelante, cuando determinemos el grado topológico local y global de F y F_0 .

Lema 23. Consideremos $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{r-1} = \mathbb{R}^{r+1}$ como \mathbb{R} -espacio vectorial. Para $\mu \in \tilde{S}_r$, definimos $L_\mu : \mathbb{R}^{r+1} \rightarrow \mathbb{R}^{r+1}$ como la parte lineal de la función afín A_μ definida en (2.40). Es decir, L_μ es la única transformación lineal tal que $A_\mu - L_\mu$ es constante. Entonces,

$$\text{sign}(\det(L_\mu)) = (-1)^{r+1} \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sign}(\det(f_{1,\mu}, f_{2,\mu}, \dots, f_{r+2,\mu})), \quad (3.11)$$

donde $\det(L_\mu)$ es el determinante de L_μ y $\det(f_{1,\mu}, f_{2,\mu}, \dots, f_{r+2,\mu})$ es el determinante de la matriz de tamaño $(r+2) \times (r+2)$ que tiene a los $f_{i,\mu}$ como columnas.

Por otro lado, si P es un punto interior del conjunto D definido en (2.27), entonces

$$\text{sign}(\det(d[f_0]_P)) = (-1)^{r+1} \text{sign}(\det(\text{LOG}(\tilde{\varepsilon}_1), \dots, \text{LOG}(\tilde{\varepsilon}_r))), \quad (3.12)$$

donde $\det(d[f_0]_P)$ es la jacobiana en el punto P de la función $f_0 : D \rightarrow \mathbb{R}^{r+1}$ definida en (3.2), $\text{LOG} : \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1} \rightarrow \mathbb{R}^r$ está definido por $(\text{LOG}(x))^{(j)} := \log |x^{(j)}|$ ($1 \leq j \leq r$) y $\det(\text{LOG}(\tilde{\varepsilon}_1), \dots, \text{LOG}(\tilde{\varepsilon}_r))$ es el determinante de la matriz de tamaño $r \times r$ que tiene a los $\text{LOG}(\tilde{\varepsilon}_i)$ como columnas.

Demostración. Comencemos por demostrar la fórmula (3.11). De la definición de parte lineal de una función afín se verifica que

$$L_\mu(x) = A_\mu(x + \phi_{r+2,\mu}) - A_\mu(\phi_{r+2,\mu}) \quad (x \in \mathbb{R}^{r+1}).$$

Entonces, usando la Definición (2.40),

$$L_\mu(\phi_{t,\mu} - \phi_{r+2,\mu}) = \varphi_{t,\mu} - \varphi_{r+2,\mu} \quad (1 \leq t \leq r+1). \quad (3.13)$$

Ahora calculemos los valores de L_μ en la base usual $\{e_j\}_{1 \leq j \leq r+1}$ de \mathbb{R}^{r+1} . Como $\phi_{r+2,\mu} - \phi_{\rho_\sigma(q),\mu} = (1/N)e_{r+1}$, poniendo $t = \rho_\sigma(q)$ en (3.13) concluimos que

$$L_\mu(e_{r+1}) = N(\varphi_{r+2,\mu} - \varphi_{\rho_\sigma(q),\mu}). \quad (3.14)$$

Luego, de la Definición 10 se verifica que para cada $1 \leq t \leq r$,

$$e_{\sigma(t)} = (\phi_{t+1,\mu} - \phi_{r+2,\mu}) - (\phi_{t,\mu} - \phi_{r+2,\mu}) - (\phi_{t+1,\mu}^{(r+1)} - \phi_{t,\mu}^{(r+1)})e_{r+1}.$$

Así, usando (3.13) y (3.14),

$$L_\mu(e_{\sigma(t)}) = \varphi_{t+1,\mu} - \varphi_{t,\mu} - N(\phi_{t+1,\mu}^{(r+1)} - \phi_{t,\mu}^{(r+1)})(\varphi_{r+2,\mu} - \varphi_{\rho_\sigma(q),\mu}) \quad (1 \leq t \leq r). \quad (3.15)$$

Sea $P_{\bar{\sigma}} : \mathbb{R}^{r+1} \rightarrow \mathbb{R}^{r+1}$ la transformación lineal determinada por $P_{\bar{\sigma}}(e_t) := e_{\bar{\sigma}(t)}$, donde $\bar{\sigma} \in S_{r+1}$ se define mediante $\bar{\sigma}(t) := \sigma(t)$ para $1 \leq t \leq r$ y $\bar{\sigma}(r+1) := r+1$. Notemos que $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\bar{\sigma}) = \det(P_{\bar{\sigma}})$. Entonces, ya hemos probado que

$$\text{sgn}(\sigma) \cdot \det(L_{\mu}) = \det(L_{\mu} \circ P_{\bar{\sigma}}) = \det(L_{\mu}(e_{\sigma(1)}), \dots, L_{\mu}(e_{\sigma(r)}), L_{\mu}(e_{r+1})). \quad (3.16)$$

En vista de (3.14) y (3.15), usando operaciones elementales tenemos que el lado derecho de (3.16) es igual a

$$N \det(\varphi_{2,\mu} - \varphi_{1,\mu}, \varphi_{3,\mu} - \varphi_{2,\mu}, \dots, \varphi_{r+1,\mu} - \varphi_{r,\mu}, \varphi_{r+2,\mu} - \varphi_{\rho_{\sigma}(q),\mu}).$$

Luego, sumando la primera columna a la segunda, luego la segunda a la tercera y así sucesivamente hasta llegar a sumar la $(r-1)$ -ésima columna a la r -ésima, encontramos que

$$\begin{aligned} & \text{sgn}(\sigma) \cdot \det(L_{\mu}) = \\ & N \det(\varphi_{2,\mu} - \varphi_{1,\mu}, \varphi_{3,\mu} - \varphi_{1,\mu}, \dots, \varphi_{r+1,\mu} - \varphi_{1,\mu}, \varphi_{r+2,\mu} - \varphi_{\rho_{\sigma}(q),\mu}). \end{aligned}$$

Si $\rho_{\sigma}(q) \neq 1$, sumando la columna $\varphi_{\rho_{\sigma}(q),\mu} - \varphi_{1,\mu}$ a la última columna, obtenemos

$$\begin{aligned} & \text{sgn}(\sigma) \cdot \det(L_{\mu}) = \\ & N \det(\varphi_{2,\mu} - \varphi_{1,\mu}, \varphi_{3,\mu} - \varphi_{1,\mu}, \dots, \varphi_{r+1,\mu} - \varphi_{1,\mu}, \varphi_{r+2,\mu} - \varphi_{1,\mu}). \quad (3.17) \end{aligned}$$

Como $\varphi_{\mu} := \ell(f_{t,\mu}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{r-1} = \mathbb{R}^{r+1}$, el determinante de tamaño $(r+1) \times (r+1)$ en (3.17) está relacionado al determinante de tamaño $(r+2) \times (r+2)$ en el lado derecho de (3.11) por la identidad

$$\begin{aligned} & \text{sign}(\det(w_1, \dots, w_{r+2})) = \\ & (-1)^{r+1} \text{sign}\left(\det(\ell(w_2) - \ell(w_1), \dots, \ell(w_{r+1}) - \ell(w_1), \ell(w_{r+2}) - \ell(w_1))\right), \end{aligned}$$

válida para todo $w_t \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^r = \mathbb{R}^{r+2}$ con $w_t^{(r+1)} > 0$ ($1 \leq t \leq r+2$)¹. Combinando esto último con (3.17), tenemos la fórmula (3.11).

Para probar la identidad (3.12), consideremos la función $\tilde{f}_0 : D \rightarrow \mathbb{R}^{r+1}$ definida por

$$\tilde{f}_0(x) := \left(|f_0(x)^{(1)}|, \omega(x), f_0(x)^{(2)}, \dots, f_0(x)^{(r)} \right) \quad (x \in D),$$

¹Una demostración de esta identidad puede encontrarse en [3], nota de pie de página 6.

donde ω es la función \mathbb{R} -lineal definida en (3.10). Para calcular $\text{sign}(\det(d[f_0]_P))$, podemos utilizar el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &: \mathbb{R}_+ \times (\omega(P) - \pi, \omega(P) + \pi) \times \mathbb{R}^{r-1} \rightarrow \mathbb{R}^{r+1}, \\ \mathcal{C}(R, \vartheta, x^{(1)}, \dots, x^{(r-1)}) &:= (R \cos \vartheta, R \sin \vartheta, x^{(1)}, \dots, x^{(r-1)}), \end{aligned}$$

con el cual $f_0 = \mathcal{C} \circ \tilde{f}_0$ en alguna vecindad de P y

$$\det(d[\mathcal{C}]_{\tilde{f}_0(P)}) = |f_0(P)^{(1)}|.$$

Calculando las correspondientes derivadas parciales, obtenemos

$$\begin{aligned} \det(d[f_0]_P) &= \det(d[\mathcal{C} \circ \tilde{f}_0]_P) = \det(d[\mathcal{C}]_{\tilde{f}_0(P)}) \cdot \det(d[\tilde{f}_0]_P) = \\ &(-1)^{r+1} 2\pi \cdot \det(\text{LOG}(\tilde{\varepsilon}_1), \dots, \text{LOG}(\tilde{\varepsilon}_r)) \cdot |f_0(P)^{(1)}|^2 \cdot \prod_{i=2}^r f_0(P)^{(i)}, \end{aligned}$$

lo que demuestra la fórmula (3.12). \square

3.2. Algunos resultados previos

En esta sección exponemos algunos resultados en miras de probar el Teorema 1. A estos resultados los podemos separar en tres tipos. Uno de ellos es el que corresponde a mostrar que, para conseguir el deseado dominio fundamental virtual para la acción de V sobre $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r$, basta encontrar uno para la acción de \tilde{V} sobre $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}$, donde la relación entre ambos está determinada por la función ℓ definida en (2.38). Otro tipo es el que establece una herramienta útil para calcular el grado local de la función $F : \hat{T} \rightarrow T$ en ciertos puntos “incómodos”. Estos dos tipos de resultados hacen pie tanto en la estructura de \mathbb{R} -espacio vectorial de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r$, como en su estructura de anillo (con el producto componente a componente) y como en su estructura de espacio topológico (con la topología usual), así que no hay novedades en sus demostraciones respecto de sus análogos para el caso totalmente real detallados en [3]. Por ende, omitiremos aquí sus pruebas.

Por último, el tercer tipo de resultados (que es uno solo) merece apenas un poco más de revisión. Para su demostración no sólo basta la estructura de espacio vectorial o de anillo de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r$, sino que también la manera en que identificamos el cuerpo k allí (*i. e.* importan las incrustaciones). Más precisamente, sea $Q \subset \mathfrak{K} \subset K \subset R$ una torre de cuerpos, con K/Q una extensión de Galois finita. Sean $v_1, v_2, \dots, v_\ell \in \mathfrak{K}$ con $\ell < n := [\mathfrak{K} : Q]$, supongamos que $\tau_j : \mathfrak{K} \rightarrow R$ son los n distintos homomorfismos de cuerpo de

\mathfrak{K} en R que fijan Q ($1 \leq j \leq n$), y definamos $J : \mathfrak{K} \rightarrow R^n$ por $(J(v))^{(j)} := \tau_j(v)$ para $v \in \mathfrak{K}$. Siguiendo a Díaz y Díaz–Friedman [3, Lemma 10], sabemos que $e_n := [0, 0, \dots, 0, 1] \in R^n$ no puede estar contenido en el R -subespacio

$$R \cdot J(v_1) + R \cdot J(v_2) + \dots + R \cdot J(v_\ell) \subset R^n.$$

Usando este hecho, el próximo lema muestra que el vector $[0, 0, \dots, 0, 1] \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^r$ no puede estar contenido en ningún hiperplano $H_{i,\mu}$ ($\mu \in \tilde{S}_r$), como adelantamos en el paso 7 del A7P (ver (1.14)). Como siempre, suponemos $r > 0$.

Lema 24. Sean $v_1, v_2, \dots, v_\ell \in k$ con $\ell < [k : \mathbb{Q}] = r + 2$, sean $\tau_j : k \rightarrow \mathbb{C}$ las $r + 2$ incrustaciones distintas de k en \mathbb{C} (con τ_1 y τ_{r+2} las no reales, $\bar{\tau}_1 = \tau_{r+2}$) y definamos $\tilde{J} : k \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}^r$ mediante $(\tilde{J}(v))^{(j)} := \tau_j(v)$ para $v \in k$ y $1 \leq j \leq r + 1$. Entonces $e_{r+2} := [0, 0, \dots, 0, 1] \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^r$ no está contenido en el \mathbb{R} -subespacio

$$\mathbb{R} \cdot \tilde{J}(v_1) + \mathbb{R} \cdot \tilde{J}(v_2) + \dots + \mathbb{R} \cdot \tilde{J}(v_\ell) \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}^r.$$

Demostración. Supongamos que

$$e_{r+2} \in \mathbb{R} \cdot \tilde{J}(v_1) + \mathbb{R} \cdot \tilde{J}(v_2) + \dots + \mathbb{R} \cdot \tilde{J}(v_\ell).$$

Esto quiere decir que existen escalares $c_j \in \mathbb{R}$ tales que

$$[0, 0, \dots, 0, 1] = c_1 \tilde{J}(v_1) + \dots + c_\ell \tilde{J}(v_\ell) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^r.$$

Usando la definición de \tilde{J} , de la primera coordenada de esta ecuación tenemos $c_1 \tau_1(v_1) + \dots + c_\ell \tau_1(v_\ell) = 0$ (recordemos que $r > 0$). Entonces, conjugando,

$$0 = \overline{c_1 \tau_1(v_1) + \dots + c_\ell \tau_1(v_\ell)} = c_1 \tau_{r+2}(v_1) + \dots + c_\ell \tau_{r+2}(v_\ell).$$

Por lo tanto, si definimos $J : k \rightarrow \mathbb{C}^{r+2}$ por $(J(v))^{(1)} := \tau_1(v)$, $(J(v))^{(2)} := \tau_{r+2}(v)$, $(J(v))^{(j)} := \tau_{j-1}(v)$, para todo $v \in k$ y $3 \leq j \leq r + 2$, tenemos que el vector $[0, 0, \dots, 0, 1] \in \mathbb{C}^{r+2}$ puede escribirse como $c_1 J(v_1) + \dots + c_\ell J(v_\ell)$, lo cual contradice lo expuesto en el párrafo anterior a este lema (poniendo $Q = \mathbb{Q}$, $\mathfrak{K} = k$, K la clausura galoisiana de \mathfrak{K} y $R = \mathbb{C}$). \square

Como adelantamos al principio de esta sección, probaremos que

$$\{C_\mu, w_\mu\}_{w_\mu \neq 0}$$

(ver (1.16) y (1.12)) es un dominio fundamental virtual para la acción de V sobre $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r$ mostrando, en realidad, que él está relacionado a un dominio

fundamental virtual para la acción de \tilde{V} sobre $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}$ mediante la función ℓ definida en (2.38). Para $\mu = (\sigma, q, n) \in \tilde{S}_r$, definimos

$$c_\mu := \left\{ y \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1} \mid y = \sum_{t=1}^{r+2} b_t \varphi_{t,\mu}, \sum_{t=1}^{r+2} b_t = 1, b_t \in J_{t,\mu} \right\}, \quad (3.18)$$

$$\varphi_{t,\mu} := \ell(f_{t,\mu}), \quad J_{i,\sigma} := \begin{cases} [0, 1] & \text{si } e_{r+2} \in H_{i,\mu}^+, \\ (0, 1] & \text{si } e_{r+2} \in H_{i,\mu}^-, \end{cases}$$

para cada $w_\mu \neq 0$ y $1 \leq t \leq r+2$, donde $f_{t,\mu} \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r$ está definido en (2.41). Definimos además el polítopo

$$\bar{c}_\mu := P(\varphi_{1,\mu}, \dots, \varphi_{r+2,\mu}) = f(D_\mu) = A_\mu(D_\mu), \quad (3.19)$$

donde f es la función definida en la Proposición 19.

Lema 25. (i) $C_\mu = \{x \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r \mid \ell(x) \in c_\mu\}$.

(ii) Si $\{c_\mu, w_\mu\}_{w_\mu \neq 0}$ es un dominio fundamental virtual para la acción de \tilde{V} sobre $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}$, entonces $\{C_\mu, w_\mu\}_{w_\mu \neq 0}$ es un dominio fundamental virtual para la acción de V sobre $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^r$.

(iii) El polítopo \bar{c}_μ es un $(r+1)$ -símplice en el espacio vectorial real $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}$ (i. e. sus $r+2$ vértices son afínmente independientes) si, y sólo si, $w_\mu \neq 0$. Equivalentemente, la función afín A_μ es invertible si, y sólo si, $w_\mu \neq 0$.

Demostración. En [3, Proposition 11] se demuestra (i) y (ii). En [3, Lemma 16] se demuestra (iii). \square

Para finalizar, una definición que nos será de gran utilidad cuando calculemos ciertos grados locales de la función $F : \hat{T} \rightarrow T$ es la siguiente. Supongamos $P \subset W$ es un subconjunto de algún espacio vectorial real W de dimensión finita. Para $x, y \in W$, diremos que $\overrightarrow{x, y}$ penetra en P si $y \in P$ y el segmento recto cerrado $\overrightarrow{x, y}$ que conecta x e y intersecta el interior $\overset{\circ}{P}$ de P . En particular, si $\overset{\circ}{P} = \emptyset$ ningún $\overrightarrow{x, y}$ penetra en P . Ahora, exponemos algunos resultados que relacionan esta definición con (3.18) y (3.19).

Lema 26. (i) Sea P un $(r+1)$ -símplice en un espacio vectorial real W de dimensión $r+1$ y sea $x \in P$. Si z está en el interior $\overset{\circ}{P}$ de P , entonces todos los puntos de $\overrightarrow{z, x}$ son puntos interiores de P , excepto posiblemente x .

- (ii) Supongamos que $w_\mu \neq 0$ y $z \in \bar{c}_\mu$. Entonces $z \in c_\mu$ si, y sólo si, $\overrightarrow{0, z}$ penetra en el $(r+1)$ -símplice \bar{c}_μ .
- (iii) $\ell(e_{r+2}) = 0 \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{r-1}$ no está contenido en ningún

$$h_{i,\mu} := \left\{ \sum_{\substack{1 \leq j \leq r+2 \\ j \neq i}} b_j \varphi_{j,\mu} \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{r-1} \mid b_j \in \mathbb{R}, \sum_{\substack{1 \leq j \leq r+2 \\ j \neq i}} b_j = 1 \right\},$$

donde $1 \leq i \leq r+2$ y $\mu = (\sigma, q, n) \in \tilde{S}_r$.

Demostración. En [3, Lemma 14] se prueba (i), en [3, Lemma 17] se prueba (ii) y en [3, Lemma 19] se demuestra (iii). \square

3.3. Cálculo de grados

Tanto las propiedades como las notaciones respecto a la teoría del grado topológico que ocuparemos en esta sección pueden ser encontradas en [3, Proposition 22].

Recordemos los $(r+1)$ -toros $\hat{T} := D / \sim$ y $T := (\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}) / \tilde{V}$ definidos respectivamente en (2.29) y (3.8). Recordemos además los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f_0} & \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1} \\ \downarrow \hat{\pi} & & \downarrow \pi \\ \hat{T} & \xrightarrow{F_0} & T \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1} \\ \downarrow \hat{\pi} & & \downarrow \pi \\ \hat{T} & \xrightarrow{F} & T \end{array} \quad , \quad (3.20)$$

expuestos en (3.3) y (3.1) que definen F_0 y F . Ahora, fijemos una orientación aquí y en adelante del \mathbb{R} -espacio vectorial $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{r-1} = \mathbb{R}^{r+1}$ y usémosla para fijar orientaciones en \hat{T} y T . Como $\hat{\pi} : D \rightarrow \hat{T}$ restringida a \mathring{D} es un homeomorfismo local y los toros son conexos y orientables, orientamos \hat{T} declarando a $\hat{\pi}$ como una función que preserva orientación. Aquí, el conjunto abierto $\mathring{D} \subset \mathbb{R}^{r+1}$ tiene la orientación inducida. Así, el grado local de $\hat{\pi}$ en cualquier punto de \mathring{D} es $+1$. Para orientar T , damos a $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{r-1} = \mathbb{R}^{r+1}$ la orientación inducida y orientamos T declarando al homeomorfismo local $\pi : \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1} \rightarrow T$ de grado local $+1$.

3.3.1. Grado global

Sea $F : \hat{T} \rightarrow T$ la función definida en la Proposición 19. Entonces, el grado de F $\deg(F)$ está definido ya que F es una función continua entre

variedades compactas y orientadas. Demostraremos que

$$\deg(F) = (-1)^{r+1} \text{sign}(\det(\text{Log } \varepsilon_1, \dots, \text{Log } \varepsilon_r)). \quad (3.21)$$

Para verificar esta fórmula, notemos que el Lema 22 muestra que $\deg(F) = \deg(F_0)$ [3, Proposition 22 (f)]. Así que basta probar que $\deg(F_0)$ está dado por el lado derecho de (3.21). Como F_0 es un homeomorfismo entre variedades conexas, $\deg(F_0)$ es igual al grado local $\text{locdeg}_{\hat{\pi}(P)}(F_0)$ de F_0 en $\hat{\pi}(P)$, para cualquier punto $P \in \mathring{D}$. O sea, $\deg(F_0) = \text{locdeg}_{\hat{\pi}(P)}(F_0)$, para todo $P \in \mathring{D}$. Por (3.20), $F_0 \circ \hat{\pi} = \pi \circ f_0$, y f_0 es un homeomorfismo local alrededor de P , entonces

$$\deg(F_0) = \text{locdeg}_{\hat{\pi}(P)}(F_0) = \text{locdeg}_P(f_0) \quad (P \in \mathring{D})$$

[3, Proposition 22 (g)], pues π y $\hat{\pi}$ tienen grado local $+1$. Por otro lado, el grado local en P del difeomorfismo local f_0 está dado por (3.12) [3, Proposition 23]. Por lo tanto, (3.21) sigue de (3.6).

3.3.2. Grado local: El caso fácil

El grado local de la función $F : \hat{T} \rightarrow T$ en (3.20) se calcula fácilmente en puntos donde F es un difeomorfismo local. Si x es un punto interior en el simplejo D_μ , y $w_\mu \neq 0$, entonces el grado local $\text{locdeg}_{\hat{\pi}(x)}(F)$ de F en $\hat{\pi}(x)$ está definido y

$$\text{locdeg}_{\hat{\pi}(x)}(F) = v_\mu := (-1)^{r+1} \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sign}(\det(f_{1,\mu}, \dots, f_{r+2,\mu})). \quad (3.22)$$

Para probar la validez de esta fórmula, recordemos de (3.20) que $F \circ \hat{\pi} = \pi \circ f$. Como f restringida a D_μ es la función afín biyectiva A_μ cada vez que $w_\mu \neq 0$ (ver Lema 25 (iii)), es claro que f es un difeomorfismo local alrededor de x . Pero $\hat{\pi}$ y π son difeomorfismos locales de grado $+1$, así que F es un difeomorfismo local alrededor de $\hat{\pi}(x)$. Entonces, $\text{locdeg}_{\hat{\pi}(x)}(F) = \text{locdeg}_x(f)$. Finalmente, usando [3, Proposition 23], (3.22) sigue de (3.11).

3.3.3. Grado local: El caso general

El problema de calcular el grado de F en vecindades de puntos donde esta función no es necesariamente un difeomorfismo local es más complicado. La estrategia para realizar este cálculo es la misma utilizada en [3] para el problema análogo en el caso totalmente real.

La función continua $F : \hat{T} \rightarrow T$ entre variedades compactas y orientadas tiene grado ± 1 . Como $\deg(F) \neq 0$, F es sobreyectiva [3, Proposition 22 (c)].

Para cualquier $\alpha \in T$, su imagen inversa $F^{-1}(\alpha) \subset \widehat{T}$ es compacta y no vacía, entonces $F^{-1}(\alpha) = \cup_i \Delta_i$, una unión finita de componentes conexas y compactas. La siguiente proposición muestra el cálculo del grado de F en una vecindad de Δ_i . En vista de los lemas 26 y 25, su demostración es la misma que la de [3, Proposition 26], por lo que la omitiremos.

Proposición 27. *Sea $\alpha \in T$, sea Δ una componente conexa de $F^{-1}(\alpha) \subset \widehat{T}$, sea $U \subset \widehat{T}$ un conjunto abierto que contiene a Δ tan pequeño que $U \cap F^{-1}(\alpha) = \Delta$, sea F_U la función F restringida a U , y demos a U la orientación inducida de \widehat{T} . Entonces $\deg_\alpha(F_U)$ está definido y*

$$\deg_\alpha(F_U) = \sum_{\substack{\mu \in \tilde{S}_r \\ w_\mu \neq 0}} \sum_{\substack{x \in D_\mu, \hat{\pi}(x) \in \Delta \\ \overrightarrow{0, f(x)} \text{ penetra } \bar{c}_\mu}} v_\mu, \quad (3.23)$$

donde todas las sumas son finitas, $v_\mu = \pm 1$ está dado por el lado derecho de (3.22), w_μ está dado por (1.12), penetrar fue definido en el párrafo antes del Lema 26, y \bar{c}_μ en (3.19).

Por supuesto, una suma vacía es considerada como 0. Notemos que aunque puede pasar que $w_\mu = 0$ (o equivalentemente $v_\mu = 0$) para algún $\mu \in \tilde{S}_r$, el resultado final es que tales $\mu \in \tilde{S}_r$ no contribuyen a $\deg_\alpha(F_U)$.

3.4. Prueba del teorema principal

Antes de probar el Teorema 1, necesitamos una pequeña consideración geométrica. Si $\ell(\varepsilon) = \tilde{\varepsilon} \in \tilde{V}$ es tal que $|\tilde{\varepsilon}^{(j)}| = 1$, para todo $1 \leq j \leq r$, entonces $|\varepsilon^{(1)}| = \varepsilon^{(2)} = \dots = \varepsilon^{(r)} = \varepsilon^{(r+1)}$, por lo que

$$1 = |\varepsilon^{(1)}|^2 \cdot \varepsilon^{(2)} \dots \varepsilon^{(r)} \cdot \varepsilon^{(r+1)} = (\varepsilon^{(r+1)})^{r+2}.$$

Siendo $\varepsilon^{(r+1)} > 0$, lo anterior nos dice que

$$\ell(\varepsilon) = \tilde{\varepsilon} \in \tilde{V}, \quad |\tilde{\varepsilon}^{(j)}| = 1 \quad (1 \leq j \leq r) \implies \varepsilon = 1, \quad (3.24)$$

ya que $r > 0$.

Por el Lema 25 (ii) y la Definición 4, para probar el Teorema 1 necesitamos mostrar que

$$\sum_{\substack{\mu \in \tilde{S}_r \\ w_\mu \neq 0}} \sum_{z \in c_\mu \cap \tilde{V} \cdot y} w_\mu = 1 \quad (y \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}), \quad (3.25)$$

y que el número de elementos de $c_\mu \cap \tilde{V} \cdot y$ es acotado independientemente de y . Esta última parte sigue de aplicar el homomorfismo sobreyectivo de grupos $\text{LOG} : \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1} \rightarrow \mathbb{R}^r$, definido en (3.4). Así, como $\text{LOG}(\bar{c}_\mu)$ es compacto y $\text{LOG}(\tilde{V})$ es un reticulado, basta probar que no pueden existir dos elementos distintos $u, v \in \tilde{V}$ tales que $\text{LOG}(u \cdot y) = \text{LOG}(v \cdot y)$. De hecho,

$$\text{LOG}(u \cdot y) = \text{LOG}(v \cdot y) \implies \text{LOG}(uv^{-1}) = 0 \implies |(uv^{-1})^{(j)}| = 1,$$

para todo $1 \leq j \leq r$. Por lo tanto, como $\tilde{V} = \ell(V)$, de (3.24) tenemos que $u = v$.

Sea $y \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^{r-1}$. Escribamos $F^{-1}(\pi(y)) = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_M$, una unión disjunta de componentes conexas y compactas. Sea $U_i \subset \hat{T}$ un abierto que contiene a Δ_i suficientemente pequeño como para que $U_i \cap F^{-1}(\pi(y)) = \Delta_i$. Sabemos que $\deg(F) = \deg_{\pi(y)}(F) = \sum_{i=1}^M \deg_{\pi(y)}(F_{U_i})$ [3, Proposition 22 (f) e (i)]. Luego, usando la Proposición 27, tenemos que

$$\begin{aligned} \deg(F) &= \deg_{\pi(y)}(F) = \sum_{i=1}^M \deg_{\pi(y)}(F_{U_i}) = \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{\mu \in \tilde{S}_r \\ w_\mu \neq 0}} \sum_{\substack{x \in D_\mu, \hat{\pi}(x) \in \Delta_i \\ 0, f(x) \text{ penetra } \bar{c}_\mu}} v_\mu \\ &= \sum_{\substack{\mu \in \tilde{S}_r \\ w_\mu \neq 0}} \sum_{\substack{x \in D_\mu, F(\hat{\pi}(x)) = \pi(y) \\ 0, f(x) \text{ penetra } \bar{c}_\mu}} v_\mu \\ &= \sum_{\substack{\mu \in \tilde{S}_r \\ w_\mu \neq 0}} \sum_{\substack{x \in D_\mu, f(x) \in \tilde{V} \cdot y \\ f(x) \in c_\mu}} v_\mu \quad [(3.20) \text{ y Lema 26 (ii)}] \\ &= \sum_{\substack{\mu \in \tilde{S}_r \\ w_\mu \neq 0}} \sum_{z \in c_\mu \cap \tilde{V} \cdot y} v_\mu \quad [\text{Lema 25 (iii)}] \\ &= \deg(F) \sum_{\substack{\mu \in \tilde{S}_r \\ w_\mu \neq 0}} \sum_{z \in c_\mu \cap \tilde{V} \cdot y} w_\mu \quad [(1.12), (3.21) \text{ y } (3.22)]. \end{aligned}$$

De esta manera, (3.25) sigue de dividir ambos lados por $\deg(F)$.

Bibliografía

- [1] P. Colmez, *Résidu en $s = 1$ des fonctions zêta p -adiques*, Invent. Math. **91** (1988), 371–389.
- [2] ———, *Algébricité de valeurs spéciales de fonctions- L* , Invent. Math. **95** (1989), 161–205.
- [3] F. Díaz y Díaz and E. Friedman, *Signed Shintani-Colmez cones*, preprint, 2011.
- [4] J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [5] R. Okazaki, *On a shintani decomposition for a cubic field defined by $X^3+kX-1=0$* , Number Theory: Diophantine, Computational and Algebraic Aspects. Proceedings of the International Conference Held in Eger, Hungary, J ([De Gruyter Proceedings in Mathematics]) (1998), 445–451.
- [6] T. Ren and R. Sczech, *A refinement of stark's conjecture over complex cubic number fields*, Journal of Number Theory **129** (2009), 831–857.
- [7] T. Shintani, *On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integeres*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **Sec. IA 23** (1976), 393–417.
- [8] ———, *A remark on zeta functions of algebraic number fields*, Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic (Bombay Colloquium 1979), Springer, Berlin Heidelberg New York, 1981.