

UCH-FC
DOC-f
C 764

Estructura Hamiltoniana de la gravitación de primer orden

**Tesis
Entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en Física**

Facultad de Ciencias

por

Mauricio Osvaldo Contreras González

Julio, 1996



Director de Tesis: Dr. Jorge Zanelli I.



**INFORME DE APROBACION
TESIS DE DOCTORADO**

Se informa al Comité del Programa de Doctorado en Ciencias con mención en Física que la Tesis presentada por el candidato

Mauricio Osvaldo Contreras González

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito para la obtención del grado de Doctor en Ciencias con mención en Física.

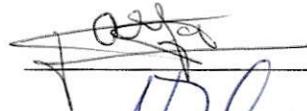
Director de Tesis

Dr. Jorge Zanelli

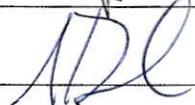


Comisión Informante de Tesis

Dr. Jorge Alfaro



Dr. Máximo Bañados



Dr. Roberto Hojman



Dr. Carlos López



A

mi abuela, mi madre y mi hija

AGRADECIMIENTOS

Quiero en esta ocasión dar las gracias a todos mis profesores de la Facultad de Ciencias: Rodrigo Ferrer, Patricio Fuentealba, Luis Gomberoff, David Gottlieb, Roberto Hojman, Sergio Hojman, Luis Moraga, Roberto Morales, Jaime Roessler, quienes fueron el pilar de mis primeros años de formación. En especial quiero saludar al Dr. Herbert Massmann por ser mi primer profesor de Física en la Facultad y por permitirme conocer un poco más sobre la Física Nuclear.

También quiero agradecer al Dr. Claudio Teitelboim por darme la oportunidad de participar en los distintos seminarios y actividades que se realizan en el Centro de Estudios Científicos de Santiago, donde he compartido gratos momentos en un ambiente cálido y estimulante para el desarrollo de las ideas.

A mi compañero y amigo Ricardo Troncoso un abrazo muy especial, por todos los carretes del fin de semana, y las gratificantes discusiones sobre supersimetría y temas anexos en los viajes en el Metro.

Deseo agradecer a Máximo Bañados su constante apoyo y estímulo durante el desarrollo de este proyecto, sin quien no hubiera llegado a buen término, y por no dejarnos botados con Ricardo en Londres. Sos Grande Max!

Por último quiero saludar al gestor de este proyecto, mi estimado Jorge Zanelli, gracias por tu gran paciencia, tu constante apoyo en todas las formas du-

rante estos años que no han sido fáciles para mi. Gracias Jorge por enseñarme que se puede ser grande y humilde a la vez. Te debo una Jorge.

Mi permanencia en el Programa de Doctorado ha sido posible gracias a una beca de doctorado de CONICYT, institución a la cual agradezco. El desarrollo de la presente tesis ha sido financiado por el proyecto 2950006/95 de Fondecyt, y por el proyecto PG-24-95 de la Universidad de Chile.

ABSTRACT

The Hamiltonian structure of gravitation theory in first order form is examined. Two points of view are used in the analysis.

In the first, which we call **the tetrad formalism**, we perform a transformation that brings the spin connection ω_{μ}^{ab} into new variables π_a^i and ω_{mn} . These variables correspond to the momenta canonically conjugate to the tetrad (π_a^i) and auxiliary variables (ω_{mn}). These last variables can be eliminated using their own equations of motion. The hamiltonian is the sum of constraints that correspond to the $SO(3,1)$ local rotation generators in the tangent space and the generators of diffeomorphism in the space-time manifold. The above transformation can be generalized to higher dimensions for Hilbert-Einstein type actions, that is, actions in which the curvature occurs linearly.

The second point of view, which we call **the spin connection formalism** the action is rewritten in terms of the spin connection and its canonically conjugate momenta. In this case, apart from the first class constraints associated with the rotation and diffeomorphism invariance, there are 12 second class constraints that represent the presence of redundant fields in the phase space. When the Dirac brackets between the symmetry generators are evaluated, they satisfy the usual diffeomorphism-rotation algebra. This second point of view is closely related to the Ashtekar formulation based on the $SO(3) \times SO(3)$ decomposition of the $SO(3,1)$ group.

RESUMEN

Se analiza la estructura hamiltoniana de la gravitación de primer orden en 4 dimensiones. Para esto se utilizan dos enfoques.

En el primero, que denominamos **enfoque de la tétrada**, se construye una transformación que lleva a la conexión de espín ω_k^{ab} a nuevas variables π_a^i y ω_{mn} , donde π corresponde al momento conjugado de la tétrada, mientras que ω_{mn} son variables auxiliares que pueden ser eliminadas de su ecuación de movimiento.

El Hamiltoniano de esta teoría es la suma de vínculos que corresponden a los generadores de rotaciones locales $SO(3,1)$ en el espacio tangente y a los generadores de difeomorfismos en la variedad espacio-temporal.

La transformación de ω_i^{ab} a π_a^i, ω_{mn} es generalizada a dimensiones mayores para acciones del tipo Hilbert, esto es, aquellas que contienen una sola curvatura y productos de la tétrada.

El segundo enfoque, que llamaremos **enfoque de la conexión de espín**, se escribe la acción de Hilbert sólo en términos de la conexión de espín y su momento canónico conjugado. En este caso aparte de los vínculos asociados a la invariancia bajo rotaciones y difeomorfismos, aparecen vínculos de segunda clase, que corresponden a la necesidad de eliminar variables no dinámicas redundantes. Al evaluar los corchetes de Dirac entre los generadores de simetría, se encuentra que estos satisfacen el álgebra usual de difeomorfismos y rotaciones. El segundo formalismo es semejante al de Ashtekar basado en la descomposición del grupo $SO(3,1)$ en $SO(3) \times SO(3)$.

Contenido

Dedicatoria	ii
Agradecimientos	iii
Resumen	v
1 Introducción	1
1.1 Teorías de Gauge	3
1.2 Relatividad General	5
1.3 Formulación de primer orden	6
2 Formulación en base a la tétrada	10
2.1 Introducción	10
2.2 La acción de Hilbert en 4 dimensiones en primer orden.	13
2.3 Término cinético	14
2.4 El generador de rotaciones	15
2.5 Foliación del espacio-tiempo	17
2.6 Ecuaciones de movimiento	20
2.7 Grados de libertad	23
2.8 Relación entre T_{ij}^a , J_{ab} y $\Phi^{(mn)}$	24
2.9 Dependencia del Hamiltoniano en las variables ω_{mn}	25
2.10 Difeomorfismos y el generador P	27
3 Formulación en base a la conexión de espín	30
3.1 Introducción	30
3.2 Gravitación en términos de la conexión de espín.	32
3.3 Grados de libertad	36
3.4 Eliminación de χ y ϕ	36
3.5 La teoría de Ashtekar	39
3.6 Conexión con la teoría de Asthekar	40

4	Gravitación en dimensiones mayores	42
4.1	Introducción	42
4.2	La acción de Lovelock en D dimensiones.	42
5	Conclusiones	45
	Apéndices	46
A	Vectores nulos	47
B	Algunas relaciones importantes	48
C	El generador de rotaciones.	50
D	Relación entre T_{ij}^a, J_{ab} y Φ^{mn}.	54
E	Acción de P sobre la tétrada	56
F	Acción de P sobre el momentum conjugado	57
G	Acción de los difeomorfismos	59
	Bibliografía	61

Capítulo 1

Introducción

A comienzos de este siglo se establecieron los tres grandes pilares de la física actual: la relatividad especial, la mecánica cuántica, y la relatividad general. De la unión de las dos primeras teorías surgió la teoría cuántica de campos, que es hoy una de las principales herramientas para entender la naturaleza a escala microscópica. También en el transcurso de este siglo se ha comprendido la importancia del papel de las simetrías en la naturaleza. Las simetrías en física pueden ser agrupadas en dos clases: simetrías globales, tales como las que se encuentran en mecánica cuántica ordinaria al imponer, por ejemplo, que los observables sean invariantes ante rotaciones rígidas del sistema de coordenadas del laboratorio; y las simetrías locales, que describen la invariancia bajo la acción de un grupo de transformaciones en cada punto del espacio-tiempo en forma independiente. Las simetrías locales de este segundo tipo son la piedra fundamental en la construcción de teorías que describen las interacciones fundamentales.

Sabemos hoy, que todas las fuerzas de la naturaleza pueden ser descritas por teorías de gauge. Las fuerzas electromagnéticas corresponden a una teoría de gauge para el grupo $U(1)$. El electromagnetismo ha sido unificado con las interacciones débiles mediante una teoría de gauge para el grupo $SU(2) \times U(1)$. Las interacciones fuertes por otro lado, pueden ser descritas por una teoría de gauge para el grupo $SU(3)$. Todas las teorías anteriores son compatibles con la mecánica cuántica y se ha

demostrado que éstas son renormalizables. Esto es, es posible sustraer los infinitos que aparecen en el formalismo, obteniendo valores numéricos que pueden ser contrastados con resultados experimentales.

La fuerza gravitacional por otro lado, está descrita por la Relatividad General, que también es una teoría de gauge, en este caso para el grupo $GL(4, \mathbb{R})$, pero tiene una estructura distinta a las teorías mencionadas anteriormente. Las teorías de gauge son formuladas en términos de una variable de campo llamada conexión. La Relatividad General en su forma original (formulación de segundo orden), es una teoría de campos para el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y no puede ser escrita puramente en términos de una conexión. Además en el caso gravitacional, el grupo de simetrías actúa sobre la variedad espacio-temporal, mientras que en las teorías de gauge usuales el grupo de simetrías actúa en un espacio abstracto (espacio de la representación del grupo de simetrías). La relatividad general en su forma estándar ha mostrado ser incompatible con la mecánica cuántica al generar una teoría no renormalizable.

Así surge naturalmente la pregunta ¿ Es posible describir la relatividad general en forma similar a las teorías de gauge no gravitacionales y obtener así una teoría cuántica renormalizable ? La respuesta vino a mediados de la década del '80, cuando Ashtekar introdujo un nuevo conjunto de variables, con las que reformuló la relatividad general de una manera similar a las teorías de gauge estándar. Gracias a esto se desarrollaron nuevas técnicas, tales como la representación de lazos para tratar el problema de gravedad cuántica. Sin embargo, la teoría de Ashtekar introduce un término imaginario en la acción de Hilbert usual, de tal forma que está describiendo la gravitación en términos de campos complejos. Una nueva pregunta surge ahora, ¿ Será posible escribir la teoría de la gravitación en forma análoga a la de Ashtekar pero usando variables reales?

La gravitación de primer orden al parecer puede dar una respuesta a esta pregunta y es el tema del cual nos ocuparemos en esta tesis.

1.1 Teorías de Gauge

Como decíamos más arriba, las teorías de Gauge están basadas sobre el concepto de simetría local. Esto es, la acción del grupo de transformaciones actúa independientemente en cada punto del espacio-tiempo. Las teorías de gauge para las interacciones electro-débiles y fuertes son teorías de campo definidas en un espacio-tiempo plano (de Minkowsky). La covariancia del Lagrangiano bajo transformaciones de Lorentz obliga a utilizar más variables que las que son dinámicamente independientes. Esto da lugar a la necesidad de introducir vínculos o constricciones entre las variables del espacio de fase. De estos vínculos en principio se pueden despejar las variables auxiliares en términos de las verdaderamente dinámicas, sin embargo esto conduce a una teoría con relaciones no-locales entre los campos, lo que la hace en general inmanejable. La presencia de vínculos, es una característica general de todas las teorías de gauge. [1] [2]

Dirac, desarrolló un método [3] [4] [5] para analizar los sistemas de gauge de una manera sistemática en el formalismo Hamiltoniano. El espacio de fase está definido por las variables canónicas (q) y sus respectivos momentos conjugados (p), y el corchete de Poisson usual entre dos funcionales $A(p, q)$ y $B(p, q)$ es

$$\{A(p, q), B(p, q)\} = \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - (A \leftrightarrow B). \quad (1.1)$$

El Hamiltoniano de los sistemas de gauge es una suma de vínculos multiplicados por funciones arbitrarias llamadas multiplicadores de Lagrange. La preservación en el tiempo de los vínculos implica que el paréntesis de Poisson entre dos de tales contricciones debe ser una combinación lineal de los mismos vínculos. El conjunto de contricciones, junto con el paréntesis de Poisson forman lo que comunmente los matemáticos denominan un álgebra. Esta álgebra es una representación explícita de las simetrías de la teoría inicial. Por ejemplo a partir de una teoría invariante ante rotaciones locales, se espera que aparezca un conjunto de vínculos $J_i(p, q)$ asociados con el momento angular, tal que el paréntesis de Poisson entre estos vínculos satisfaga

el álgebra de rotaciones:

$$\{J_i(p, q), J_k(p, q)\} = \epsilon_{ikl} J_l(p, q). \quad (1.2)$$

El conjunto de constricciones de una teoría de gauge puede separarse en dos grupos: los de primera clase, que generan las simetrías y que tienen paréntesis nulos con todo el conjunto de vínculos; y los de segunda clase, que permiten fijar los multiplicadores de Lagrange y que no satisfacen la propiedad anterior. Los vínculos de segunda clase pueden ser eliminados usando una modificación de lo paréntesis de Poisson que introdujo Dirac. [1]

Cuando el método de Dirac se aplica a los sistemas generalmente covariantes, se encuentra que deben aparecer cuatro vínculos denominados H_{\perp} y H_i . Estos vínculos tiene un significado geométrico bien definido: Consideremos un sistema de coordenadas arbitrario u^{α} y elijamos una de estas coordenadas como parámetro temporal (en este caso u^0). Para cada valor de $u^0 = cte$ esto define una 3-superficie en el espacio de cuatro dimensiones. Esta superficie tiene una métrica propia g_{ij} inducida por la métrica del espacio-tiempo. Sobre esta superficie tridimensional podemos hacer transformaciones generales de coordenadas (espaciales). El vínculo H_i genera las transformaciones generales de coordenadas sobre la 3-superficie. Esto es, si $q \rightarrow q^i + \eta^i(q)$, el cambio de una función $A(p, q)$ en el espacio de fase inducido por esta transformación infinitesimal de coordenadas es

$$\delta A(p, q) = \{A(p, q), \int \eta^i H_i\} \quad (1.3)$$

Por otra parte, H_{\perp} genera desplazamientos perpendiculares a la 3-superficie $u^0 = cte$ en cada punto de ésta, y por tanto genera el desplazamiento de la 3-superficie en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones. El álgebra que satisfacen estos vínculos está dada por [6]

$$\{H_{\perp}(x), H_{\perp}(x')\} = (H^r(x) + H^r(x')) \delta_{,r}(x, x'), \quad (1.4)$$

$$\{H_r(x), H_\perp(x')\} = H_\perp(x)\delta_{,r}(x, x'), \quad (1.5)$$

$$\{H_r(x), H_s(x')\} = H_r(x')\delta_{,s}(x, x') + H_s(x)\delta_{,r}(x, x') \quad (1.6)$$

donde

$$H^r = g^{rs} H_s \quad (1.7)$$

y g^{rs} es la inversa de la 3-métrica g_{ij} , y $\delta_{,s}(x, x')$ es la derivada de la función delta respecto a la coordenada x^s .

1.2 Relatividad General

La Relatividad General desarrollada por Einstein cambió nuestra manera de interpretar la naturaleza en su sentido más profundo. Esta nos enseña que vivimos en un mundo de cuatro dimensiones, donde el tiempo es una coordenada más y en que el concepto de tiempo universal de Newton no tiene cabida.

Las fuerzas gravitacionales fueron reemplazadas por la noción de curvatura del espacio-tiempo, así desde este punto de vista la materia "le indica" al espacio como curvarse y esta curvatura le indica a la masa como debe moverse en el espacio-tiempo. La geometría de éste espacio-tiempo es una geometría no Euclidea, donde la noción de distancia está dada localmente en términos del tensor métrico $g_{\mu\nu}$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.8)$$

Todos los objetos matemáticos con significado invariante en Relatividad General (tensores) están definidos localmente, esto es, en cada punto del espacio-tiempo. Con el fin de comparar tensores asociados a puntos distintos, se debe introducir la noción de transporte paralelo desde un punto del espacio-tiempo a otro. Esto se hace mediante la introducción de un nuevo campo: la conexión afín, $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$. Así por ejemplo, si se traslada paralelamente un vector V de x a $x + dx$, sus componentes en el nuevo punto están dados por

$$V_{\parallel}^\mu(x + dx) = V^\mu(x) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha dx^\beta. \quad (1.9)$$

En la formulación de Einstein, la conexión se escribe en términos de la métrica $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(g_{\mu\nu})$.

Las ecuaciones de Einstein son ecuaciones de campo de segundo orden para la métrica y por esto este enfoque se llama también formalismo de segundo orden y permiten encontrar la geometría que induce la materia en el espacio-tiempo. Estas ecuaciones se pueden obtener de un principio de acción variando el Lagrangiano de Hilbert respecto a la métrica.

Ahora bien, la Relatividad General es invariante ante transformaciones generales de coordenadas (covariancia general), por lo tanto deben aparecer en ella los cuatro vínculos H_{\perp} y H_i que satisfacen el álgebra mencionada anteriormente, y que generan la transformación de coordenadas $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x'^{\mu}(x)$

Arnowitt, Dessler y Misner [7] desarrollaron el formalismo canónico para la Relatividad General (formulación ADM) y encontraron expresiones explícitas para H_{\perp} y H_i en términos de las variables canónicas, es decir, en términos de la métrica g_{ij} y su momentum conjugado π^{ij} .

1.3 Formulación de primer orden

La Relatividad General puede reescribirse en el lenguaje moderno de la geometría diferencial (formas diferenciales)[11] en términos de otros dos campos denominados la tétrada e_{μ}^a , y la conexión de espín, ω_{μ}^{ab} . En esta formulación el espacio-tiempo es dotado de una nueva estructura, el espacio tangente en cada punto de la variedad. Los campos e y ω representan las propiedades métricas y afines, respectivamente. La tétrada está relacionada con el tensor métrico a través de la expresión

$$\eta_{ab}e_{\mu}^ae_{\nu}^b = g_{\mu\nu}. \quad (1.10)$$

Por su parte, la conexión de espín ω_μ^{ab} está asociada al transporte paralelo de tensores (en el espacio tangente) entre puntos distintos del espacio-tiempo:

$$V_{\parallel}^a(x + dx) = V^a(x) + \omega_{b\ \mu}^a V^b(x) dx^\mu. \quad (1.11)$$

De esta manera, la teoría de la gravitación está descrita por una acción de la forma

$$S = S[\omega, \epsilon], \quad (1.12)$$

donde la tétrada y la conexión de espín son los campos fundamentales de la teoría y son variados independientemente en el principio de acción (formulación de primer orden).

Diversos autores han estudiado la estructura Hamiltoniana de la gravitación en primer orden. Castellani y van Nieuwenhuizen [12] encuentra que además de los generadores H_\perp y H_i aparece un vínculo extra que corresponde al generador de rotaciones del grupo $SO(3,1)$ en el espacio tangente. En este trabajo se hacen suposiciones adicionales sobre la geometría (torsión nula) y, a nuestro parecer, esta manera de atacar el problema aporta muy poco a la claridad de las ideas.

Henneaux[14] [13] también estudió la estructura Hamiltoniana para la gravitación en cuatro dimensiones. Partiendo de la teoría métrica y utilizando la relación entre la tétrada y el tensor métrico este autor escribe la acción Hamiltoniana en términos de la tétrada y su momento conjugado. Henneaux encuentra un álgebra para los vínculos que es más general que la usada por Castellani y van Nieuwenhuizen. Este análisis, puesto que parte de la teoría métrica, también asume la torsión del espacio como nula.

Nuestro propósito es desarrollar un formalismo canónico, pero partiendo de primeros principios y en que no se invoquen propiedades adicionales del espacio-tiempo. Esto es, la acción a estudiar será la acción de Hilbert como funcional de la

tétrada y la conexión de espín independientemente.

En este espíritu hemos encontrado dos maneras de atacar el problema. En el primero, que denominamos enfoque de la tétrada, desarrollado en el capítulo 2, se construye una transformación que lleva a la conexión de espín a nuevas variables π_c^j y ω_{mn} . Estas corresponden al momento canónico conjugado de la tétrada y a un conjunto de 6 variables auxiliares respectivamente. Estas variables auxiliares pueden ser eliminadas utilizando sus propias ecuaciones de movimiento. El hamiltoniano de esta teoría es la suma de vínculos, que corresponden a los generadores de rotaciones locales $SO(3,1)$ en el espacio tangente (J_{ab}), y a los generadores de difeomorfismos en la variedad espacio-temporal.

La descomposición de ω_i^{ab} en π_a^j , ω_{mn} puede ser generalizada para dimensiones mayores si la acción es del tipo Hilbert (es decir, si contiene una sola curvatura y productos de la tétrada). Esto se desarrolla en el capítulo 4.

El segundo enfoque, que llamamos enfoque de la conexión de espín, se analiza en el capítulo 3. En éste, se reescribe la acción de Hilbert en términos de la conexión de espín y su momento canónico conjugado. En este caso además de los vínculos asociados a la invariancia bajo rotaciones y difeomorfismos, aparecen vínculos de segunda clase, los que se eliminan utilizando el paréntesis de Dirac. En este corchete los generadores de simetrías satisfacen el álgebra usual de difeomorfismos y rotaciones.

La estructura de los generadores de rotaciones y difeomorfismos en función de las variables canónicas es similar a las obtenidas por Ashtekar en su reformulación de la Relatividad General. De hecho, nuestra teoría corresponde a dos copias de la teoría de Ashtekar, una definida con una conexión autodual y otra antidual.

Es importante señalar, que si se aplica el formalismo de Dirac directamente a la acción de Hilbert, introduciendo los respectivos momentos canónicos a la tétrada

y la conexión de espín, los vínculos de primera y segunda clase aparecen mezclados y no es posible separarlos en forma simple. Así, las transformaciones anteriores permiten acortar camino en la identificación de las variables dinámicas de la teoría.

Finalmente, en el capítulo 5 se dan las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2

Formulación en base a la tétrada

2.1 Introducción

La teoría de la relatividad general usualmente se describe por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, en que las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

dan la dinámica del espacio-tiempo para alguna configuración de materia, expresada en el tensor de energía momentum $T_{\mu\nu}$. Aquí $R_{\mu\nu}$ es la contracción del tensor de Riemann $R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$ y R es el escalar de Ricci. En esta tesis se estudiará el campo gravitacional en ausencia de materia, esto es, se supondrá que $T_{\mu\nu} = 0$.

Las ecuaciones de Einstein para el caso libre pueden ser deducidas a partir de la acción de Hilbert-Einstein

$$S[g] = \int R\sqrt{-g}d^4x, \quad (2.2)$$

cuando se varía respecto al tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Ahora bien, existe otro conjunto de variables, llamadas tétrada e_μ^a y la conexión de espín ω_ν^{ab} con las cuales se puede reformular la teoría de la relatividad. Para establecer la relación entre estas nuevas variables y el tensor métrico consideremos la figura 1.

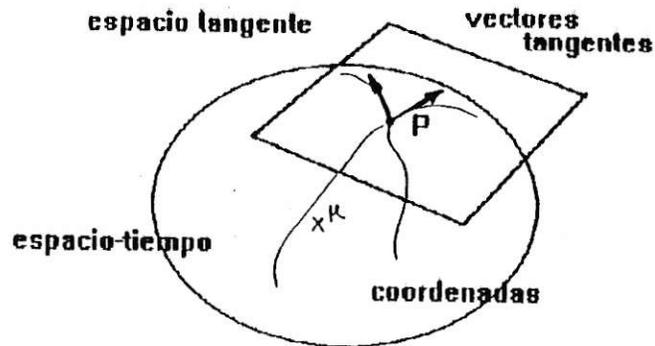


Figura 1. Región del espacio-tiempo alrededor de un punto arbitrario P, donde se aprecian los vectores tangentes a las líneas coordenadas, y el espacio tangente a P.

En esta figura se aprecia una región del espacio-tiempo cercana a un punto P arbitrario, donde se pueden ver las líneas de coordenadas trazadas sobre la variedad y los vectores tangentes ∂_μ a las líneas coordenadas en el punto P, que están definidos en el espacio tangente a P, simulado por el plano M. El producto interno entre ∂_μ y ∂_ν está dado por

$$\partial_\mu \bullet \partial_\nu = g_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

Aparte de la base coordenada $\{\partial_\mu\}$ en el punto P, se puede elegir otra base, la base ortonormal $\{e_a\}$ tal que

$$e_a \bullet e_b = \eta_{ab}, \quad (2.4)$$

donde η_{ab} es la métrica de Minkowski.

Obviamente ambas bases deben estar relacionadas por una transformación lineal

$$\partial_\mu = e_\mu^a e_a. \quad (2.5)$$

Así la tétrada e_μ^a no es nada más que la matriz de cambio de base de entre los dos conjuntos de vectores. La transformación inversa a (2.5) está dada por

$$e_a = e_a^\mu \partial_\mu, \quad (2.6)$$

donde la matriz e_a^μ es la inversa de e_μ^a

$$e_\mu^a e_b^\mu = \delta_a^b \quad (2.7)$$

$$e_a^\mu e_\mu^b = \delta_a^b. \quad (2.8)$$

De esta forma, cualquier vector V definido en el espacio tangente M , puede ser expandido en cualquiera de las bases anteriores

$$V = V^\mu \partial_\mu = V^a e_a. \quad (2.9)$$

Utilizando las ecuaciones (2.6) y (2.5) se encuentra que las componentes V^μ y V^a están relacionadas por

$$V^a = e_\mu^a V^\mu, \quad (2.10)$$

$$V^\mu = e_a^\mu V^a. \quad (2.11)$$

Por ser la relatividad general una teoría sobre espacios curvos, los objetos geométricos, tales como vectores y tensores están definidos en cada punto del espacio tiempo, y en principio vectores y tensores asociados a dos puntos distintos no están relacionados entre sí. Con el objeto de establecer una comparación entre estos, se debe introducir la conexión afin $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, que define el transporte paralelo de vectores y tensores asociados a la base coordenada. La conexión de espín ω_μ^{ab} define el transporte paralelo de vectores y tensores asociados a la base ortonormal e_a entre espacios tangentes definidos en dos puntos distintos como muestra la figura 2.

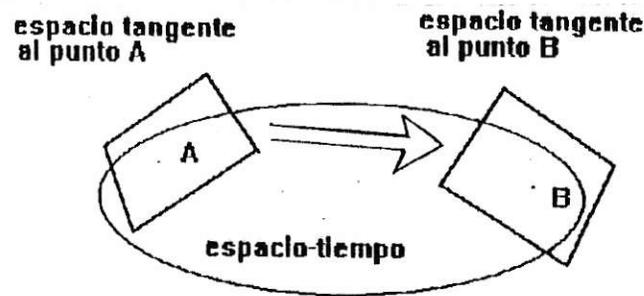


Figura 2. La conexión de espín define el transporte paralelo de objetos geométricos referidos a la base ortonormal, entre dos espacios tangentes asociados a puntos distintos del espacio tiempo.

La acción de Hilbert (2.2) da ecuaciones de segundo orden para la métrica, en cambio si se reescribe la acción (2.2) en términos de los nuevos campos, se obtiene una acción $S[\omega, e]$ que al ser variada independientemente respecto a la tétrada y a la conexión de espín da origen a ecuaciones de primer orden para estos campos. Se habla así de un formalismo de primer orden.

2.2 La acción de Hilbert en 4 dimensiones en primer orden.

El punto de partida es la acción de Hilbert-Einstein en cuatro dimensiones escrita en primer orden [11]

$$S[\omega, e] = \int \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d. \quad (2.12)$$

donde la 2-forma de curvatura está definida por:

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb} = \frac{1}{2} R_{ij}^{ab} dx^i \wedge dx^j. \quad (2.13)$$

Si la variedad tiene la topología $\Sigma \times R$, las 1-formas ω y e se pueden descomponer en la forma:

$$e^a = e_0^a dt + e_i^a dx^i \quad (2.14)$$

$$\omega^{ab} = \omega_0^{ab} dt + \omega^{ab}{}_i dx^i. \quad (2.15)$$

Usando esta descomposición, aparte de los términos de superficie (los cuales hemos descartado), la acción puede ser escrita como:

$$S = \int (2\omega_k^{ab} \epsilon_{abcd} e_i^c e_j^d \epsilon^{ijk} - \omega_0^{ab} J_{ab} - e_0^a P_a) d^3x dt, \quad (2.16)$$

donde J_{ab} y P_a están dados por:

$$J_{ab} = \epsilon_{abcd} e_i^c T_{jk}^d \epsilon^{ijk}, \quad (2.17)$$

y

$$P_a = \epsilon_{abcd} R_{ij}^{bc} e_k^d \epsilon^{ijk}, \quad (2.18)$$

con $\epsilon^{ijk} = \epsilon^{ijk0}$. T^a es la 2-forma de Torsión definida por

$$T^a = d \wedge e^a + \omega^a{}_b \wedge e^b = \frac{1}{2} T_{ij}^a dx^i \wedge dx^j, \quad (2.19)$$

y vemos así que la acción está dada en la forma

$$S = \int 2\omega_k^{ab} \epsilon_{abcd} e_i^c e_j^d \epsilon^{ijk} - H, \quad (2.20)$$

donde el Hamiltoniano es

$$H = \omega_0^{ab} J_{ab} + e_0^a P_a. \quad (2.21)$$

2.3 Término cinético

Estudiaremos ahora el término cinético

$$2\omega_k^{ab}\epsilon_{abcd}\dot{e}_i^c\dot{e}_j^d\epsilon^{ijk} \quad (2.22)$$

de la acción anterior en detalle. En primer lugar podemos reescribirlo en la forma

$$\omega^{ab}{}_k\Omega_{abc}{}^{kj}\dot{e}_j^c, \quad (2.23)$$

donde

$$\Omega_{abc}{}^{ij} = 2\epsilon_{abcd}\epsilon^{ijk}\epsilon_k^d. \quad (2.24)$$

La matriz Ω es de 18×12 donde se consideran como índices matriciales los conjuntos $\binom{i}{a}$ y $\binom{j}{bc}$. Puede mostrarse que esta matriz tiene seis vectores propios nulos.

Denotaremos estos seis vectores por $U^{(ij)}$, donde (ij) es un índice colectivo simétrico bajo $i \leftrightarrow j$ ($i, j = 1, 2, 3$). Este índice rotula a los seis vectores nulos de 18 componentes. Obviamente estos vectores satisfacen la ecuación:

$$\Omega_{abc}{}^{ij}U_i^{(mn)ab} = 0 \quad (2.25)$$

En el apéndice A se dan las expresiones explícitas para los vectores U en términos de la tétrada.

La matriz Ω tiene una inversa por la izquierda, que denotaremos $\Theta_{ij}{}^{abc}$.

Así, Θ satisface la relación

$$\Theta_{ik}{}^{abc}\Omega_{abc}{}^{kj} = \delta_d^c\delta_i^j. \quad (2.26)$$

Las expresiones para Θ en términos de la tétrada se dan en el apéndice A.

La matriz Θ se puede ver como un conjunto de 12 vectores de 18 componentes. Este conjunto, más los seis vectores U forman una base del espacio de vectores de 18 componentes. En particular, podemos expandir entonces la conexión de espín en la forma:

$$\omega_i^{ab} = \frac{1}{2}\omega_{mn}U_i^{(mn)ab} + \pi_c^j\Theta_{ij}{}^{abc} \quad (2.27)$$

Ahora si reemplazamos esta expansión en el término cinético se obtiene:

$$\omega_i^{ab}\Omega_{abc}{}^{ij}\dot{e}_j^c = \pi_c^j\dot{e}_j^c, \quad (2.28)$$

así π_c^j es el momentum canónico conjugado a la tetrada y está dado por

$$\pi_c^j = \omega_k^{ab} \Omega_{abc}^{kj}. \quad (2.29)$$

La ecuación (2.27) es un cambio de variables para la conexión de espín, de tal forma que el término cinético de la acción se diagonaliza en las nuevas variables, quedando en la forma canónica usual, $p\dot{q}$.

Sabemos del teorema de Darboux, que siempre existe un sistema de coordenadas en el espacio de fase tal que se pueden identificar las variables dinámicas y sus momentos conjugados. La transformación anterior es un ejemplo concreto de este teorema aplicado al caso gravitacional.

Luego, las variables serán desde ahora en adelante la tetrada e_i^a , su momentum conjugado π_a^i y las variables ω_{mn} . Estos dos últimos campos reemplazan obviamente a la conexión de espín ω_k^{ab} como funcional de los nuevos campos y la acción es

$$S[e_i^a, \pi_a^i, \omega_{mn}, \omega_{0,0}^{cd}, e_0^a] = \int \pi_a^i \dot{e}_i^a - \omega_{0,0}^{ab} J_{ab}[\pi_c^i, e_j^d] - e_0^a P_a[\pi_c^i, e_j^d, \omega_{mn}], \quad (2.30)$$

donde J_{ab} no depende de ω_{mn} como mostraremos en la sección (2.4).

De esta forma las variables canónicas son e y π , en tanto que ω_{mn} corresponden a variables no dinámicas como los multiplicadores de lagrange. Así el corchete de Poisson entre dos funcionales $A[e, \pi]$, $B[e, \pi]$ de las variables canónicas está dado por:

$$\{A, B\} = \int \frac{\delta A}{\delta e_i^a} \frac{\delta B}{\delta \pi_a^i} - \frac{\delta B}{\delta e_i^a} \frac{\delta A}{\delta \pi_a^i}. \quad (2.31)$$

2.4 El generador de rotaciones

Como mostramos en el apéndice B el generador de rotaciones que aparece en (2.30) es

$$J_{ab} = 2\epsilon_{abcd} \frac{\partial e_j^c}{\partial x^i} e_k^d \epsilon^{ijk} - \frac{1}{2} (\pi_a^i e_{bi} - \pi_b^i e_{ai}), \quad (2.32)$$

y satisface el álgebra del grupo de Lorentz local $SO(3,1)_{local}$

$$\{J[M], J[N]\} = J[M \times N], \quad (2.33)$$

donde $J[M]$ es el generador definido por

$$J[M] = \int M^{ab} J_{ab} d^3x, \quad (2.34)$$

y $M \times N$ está definido por

$$M \times N^{ab} = -(M_f^a N^{fb} - M_f^b N^{fa}). \quad (2.35)$$

Consideremos la acción de J_{ab} sobre los campos dinámicos. En primer lugar la variación de la tétrada bajo rotaciones es

$$\delta e_i^a = \{e_i^a, J[M]\} = \frac{\delta J[M]}{\delta \pi_a^i}, \quad (2.36)$$

es decir,

$$\delta e_i^a = -M^{af} e_{fi}. \quad (2.37)$$

En otras palabras, la tétrada transforma en la representación vectorial del grupo de Lorentz.

La transformación para el momentum es:

$$\delta \pi_a^i = \{\pi_a^i, J[M]\} = \frac{\delta J[M]}{\delta e_i^a}. \quad (2.38)$$

Esta variación puede ser calculada fácilmente usando la expansión para la conexión de espín

$$\omega_i^{ab} = \frac{1}{2} \omega_{mn} U_i^{(mn)ab} + \pi_c^j \Theta_{ij}^{abc}. \quad (2.39)$$

Multiplicando esta ecuación por Ω encontramos

$$\pi_c^j = \Omega_{abc}^{ij} \omega_i^{ab}. \quad (2.40)$$

Si variamos esta ecuación encontramos:

$$\delta \pi_c^j = \Omega_{abc}^{ij} \delta \omega_i^{ab} + \omega_i^{ab} \frac{\delta \Omega_{abc}^{ij}}{\delta e_l^f} \delta e_l^f. \quad (2.41)$$

Por ser conexión para el grupo $SO(3,1)$, ω_i^{ab} bajo transformaciones de Lorentz, transforma como la derivada covariante del parámetro M^{ab} ,

$$\delta \omega_i^{ab} = D_i M^{ab} = \frac{\partial M^{ab}}{\partial x^i} + \omega_{ci}^a M^{cb} + \omega_{ci}^b M^{ac}. \quad (2.42)$$

Usando la transformación para la tétrada bajo rotaciones obtenemos finalmente

$$\delta\pi_c^j = \Omega_{abc}^{ij} D_i M^{ab} + \omega_i^{ab} 2\epsilon_{abcd} \epsilon^{ijl} M^{dl} e_{fl}. \quad (2.43)$$

Al reemplazar la expansión para la conexión en términos de la tétrada, su momentum conjugado y las variables ω_{mn} (ecuación (2.27)), se encuentra

$$\delta\pi_c^j = \Omega_{abc}^{ij} \frac{\partial M^{ab}}{\partial x^i} - M_c^f \pi_f^j. \quad (2.44)$$

Así el momento conjugado de la tétrada transforma de una manera mixta, debido a que es parte de la conexión de espín.

2.5 Foliación del espacio-tiempo

Se vio en la introducción que en el espacio tangente al punto P existían dos bases, la base coordenada y la base ortonormal, y que éstas estaban relacionadas a través de la tétrada. Se introducirá ahora un nuevo vector $\hat{\eta}$, que es normal a los vectores coordenados espaciales

$$\hat{\eta} \bullet \partial_i = 0. \quad (2.45)$$

En la figura 3 se muestran los vectores coordenados y $\hat{\eta}$ (llamada normal).

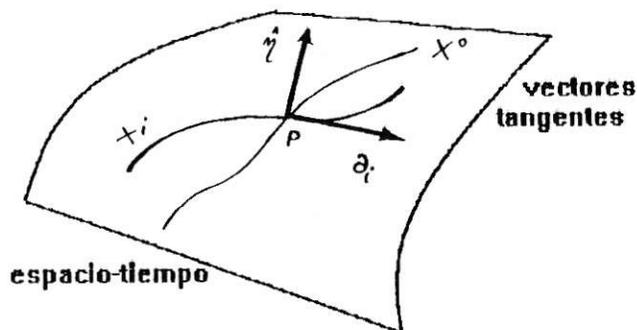


Figura 3. Normal y vectores coordenados espaciales.

Se puede definir una nueva base dada por el conjunto de vectores $\{\hat{\eta}, \partial_i\}$ de tal forma que un vector \mathbf{V} admite también la descomposición

$$V = V^\perp \hat{\eta} + V^{(i)} \partial_i. \quad (2.46)$$

La normal puede ser descompuesta en la forma usual

$$\hat{\eta} = \eta^\mu \partial_\mu = \eta^a e_a, \quad (2.47)$$

de donde se deduce que

$$\eta^a = e_\mu^a \eta^\mu. \quad (2.48)$$

Ecuación (2.45) puede ser expresada en términos de las componentes de la base ortonormal de acuerdo a

$$\eta_a e_i^a = 0. \quad (2.49)$$

De hecho, de ecuaciones (2.45) y (2.47) se deduce que

$$\eta^\mu g_{\mu i} = 0, \quad (2.50)$$

y si se multiplica (2.48) por e_{ai} se obtiene

$$\eta_a e_i^a = \eta^\mu g_{\mu i}, \quad (2.51)$$

y en vista de (2.50) concluimos (2.49).

Las componentes η^a se puede expresar explícitamente en términos de la tétrada en la forma

$$\eta_a = \frac{1}{6} \epsilon_{abcd} \epsilon_{ijk} e_i^b e_j^c e_k^d, \quad (2.52)$$

donde se ha adoptado la normalización

$$\eta^a \eta_a = -1. \quad (2.53)$$

De especial interés, es saber qué relación existe entre las componentes V^a , V^\perp y $V^{(i)}$ de un vector dado. Usando las ecuaciones (2.46) y (2.5) se encuentra que éstas están relacionadas de acuerdo a

$$V^a = V^\perp \eta^a + V^{(i)} e_i^a. \quad (2.54)$$

Introduzcamos ahora la matriz de 4×4 definida por

$$E_\mu^a = (\eta^a, e_i^a), \quad (2.55)$$

donde en vista de (2.54) se deduce que ésta corresponde a la matriz de cambio de base entre los conjuntos de vectores $\{\epsilon_a\}$ y $\{\hat{\eta}, \partial_i\}$. La matriz E_μ^a es por definición invertible. Denotaremos su inversa por E_a^μ donde

$$E_\mu^a E_a^\nu = \delta_\mu^\nu, \quad (2.56)$$

y

$$E_\mu^a E_b^\mu = \delta_b^a. \quad (2.57)$$

A partir de estas ecuaciones encontramos las expresiones explícitas para E_a^μ (ver apéndice C)

$$E_a^\mu = (-\eta_a, E_a^i), \quad (2.58)$$

donde

$$E_a^i = \frac{1}{2\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \epsilon_{abcd} e_j^b e_k^c \eta^d, \quad (2.59)$$

y

$$g = \det(g_{ij}) = \det(e_i^a e_{aj}). \quad (2.60)$$

De esta manera, podemos descomponer cualquier índice a de un vector arbitrario Q^a en una componente normal y las componentes espaciales, en la forma

$$Q^a = Q\eta^a + Q^i e_i^a. \quad (2.61)$$

Donde, invirtiendo para Q y Q^i , encontramos

$$Q = -\eta_a Q^a, \quad (2.62)$$

y

$$Q^i = E_a^i Q^a. \quad (2.63)$$

En particular, podemos descomponer en esta forma e_0^a y P_a :

$$e_0^a = N\eta^a + N^i e_i^a, \quad (2.64)$$

$$P_a = -H_\perp \eta_a + H_i E_a^i, \quad (2.65)$$

donde $N = -\eta_a e_0^a$, $N^i = E_a^i e_0^a$, $H_\perp = \eta^a P_a$ y $H_i = e_i^a P_a$.

Luego, el último término del Hamiltoniano (2.21) puede escribirse como

$$e_0^a P_a = NH_\perp + N^i H_i. \quad (2.66)$$

Así la acción puede escribirse en la forma

$$S[e, \pi, \omega_{mn}, \omega_0^{ab}, N, N^i] = \int \pi_c^j \dot{e}_j^c - H[e, \pi, \omega_{mn}, \omega_0^{ab}, N, N^i], \quad (2.67)$$

donde el Hamiltoniano está dado por

$$H = \omega_0^{ab} J_{ab}[\pi, e] + NH_\perp[\pi, e, \omega_{mn}] + N^i H_i[\pi, e, \omega_{mn}]. \quad (2.68)$$

2.6 Ecuaciones de movimiento

Consideremos nuevamente la acción de Hilbert-Einstein, pero esta vez como un funcional de la conexión de espín completa y de la tetrada

$$S[\omega, e] = \int \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d. \quad (2.69)$$

Si se varía independientemente con respecto a la tetrada e_i^a y a la conexión de espín ω_j^{ab} , la acción anterior da origen a ecuaciones de primer orden. Es natural entonces preguntarse si estas ecuaciones son Hamiltonianas, esto es, si pueden escribirse en la forma

$$\dot{z}^A = J^{AB} \frac{\partial H}{\partial z^B}, \quad (2.70)$$

más algunos vínculos. Aquí z^A representa los campos dinámicos sin incluir los multiplicadores de Lagrange.

La función $H(z)$ es llamado el Hamiltoniano y J^{AB} define la estructura del paréntesis de Poisson. J^{AB} debe ser no degenerado y debe satisfacer la identidad de Jacobi.

Las ecuaciones "dinámicas" que siguen de la acción (2.69) son

$$\Omega_{abc}^{ij} \dot{\omega}_i^{ab} = -\frac{\partial H}{\partial e_j^c}, \quad (2.71)$$

y

$$\Omega_{abc}^{ij} \dot{e}_j^c = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial \omega_i^{ab}}, \quad (2.72)$$

donde H está dado por ecuación (2.21). Si la matriz Ω fuera invertible, entonces las ecuaciones (2.71) y (2.72) deberían ser de la forma (2.70). Para $2 + 1$ dimensiones, por ejemplo, esta matriz es invertible, y en esa teoría la triada y la conexión de espín son pares conjugados. Pero en $3 + 1$, y en dimensiones mayores, Ω no es invertible y no se puede inferir de las ecuaciones (2.71) y (2.72) la estructura del paréntesis de Poisson de una manera directa.

Como una consecuencia de la no invertibilidad de la matriz Ω , las ecuaciones (2.71) y (2.72) no son todas dinámicas. De hecho, si se multiplica la ecuación (2.72) por los vectores propios nulos U^{mn} de la matriz Ω se obtiene

$$\Phi^{ij} \equiv U_k^{ab(ij)} \frac{\partial H}{\partial \omega_k^{ab}} = 0. \quad (2.73)$$

que es un vínculo, pues no contiene derivadas temporales. La presencia de estos seis vínculos se debe simplemente a que la ecuación de movimiento que proviene de variar la acción (2.69) respecto a la conexión de espín ω_k^{ab} implica el tensor de Torsión es nulo, de tal forma que las componentes espaciales satisfacen

$$T_{ij}^a = 0. \quad (2.74)$$

Estos son doce vínculos y son equivalentes a los seis Φ^{ij} más los seis J_{ab} del hamiltoniano (2.21). Esta equivalencia se demuestra más adelante en la sección (2.7).

Retornemos ahora a la línea de pensamiento original y estudiemos las ecuaciones de movimiento de la acción dada en ecuación (2.68). Si se varía la acción con respecto a e_j^c y π_c^j , se obtienen las ecuaciones Hamiltonianas

$$\dot{e}_j^c = \frac{\delta H}{\delta \pi_c^j}, \quad (2.75)$$

$$\dot{\pi}_c^j = -\frac{\delta H}{\delta e_j^c}. \quad (2.76)$$

Variando con respecto a ω_0^{ab} , N y N^i , se obtienen los vínculos

$$J_{ab} = 0, \quad (2.77)$$

$$H_{\perp} = 0, \quad (2.78)$$

$$H_i = 0. \quad (2.79)$$

La ecuación más interesante se obtiene al variar la acción respecto a ω_{mn}

$$\frac{\delta S}{\delta \omega_{mn}} = 0, \quad (2.80)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\delta}{\delta \omega_{mn}} [NH_{\perp} + N^i H_i] = 0. \quad (2.81)$$

Explícitamente en términos de ω_{mn} esta tiene la forma

$$-2\sqrt{g}N\Phi^{(mn)} - N^{(m}e_p^a e_q^b J_{ab}\epsilon^{n)pq} = 0, \quad (2.82)$$

donde

$$\Phi^{(mn)} = E_a^{(m} T_{pq}^{n)}. \quad (2.83)$$

donde el paréntesis indica simetrización en m,n.

Como $J_{ab} = 0$, obtenemos un nuevo vínculo

$$\Phi^{(mn)} = 0. \quad (2.84)$$

El vínculo $\Phi^{(mn)}$ posee algunas propiedades notables. Por ejemplo satisface

$$\frac{\delta \Phi^{(mn)}}{\delta \omega^{pq}} = -4gG^{mnpq}, \quad (2.85)$$

donde G es la "supermétrica" [15]

$$G^{ijkl} = 2g^{ij}g^{kl} - g^{il}g^{kj} - g^{ik}g^{lj}, \quad (2.86)$$

la cual es invertible (para dimensión ≥ 3), y su inversa G_{ijkl} es

$$G_{mnij} = \frac{1}{2}(g_{mn}g_{ij} - g_{mj}g_{in} - g_{mi}g_{jn}), \quad (2.87)$$

y satisface

$$G^{mnpq}G_{pqrs} = \delta_{rs}^{mn}. \quad (2.88)$$

Si se reemplaza la expansión (2.27) para la conexión ω_k^{ab} en la ecuación (2.83) se encuentra que Φ^{mn} puede escribirse como

$$\Phi^{(mn)} = -2gG^{mnpq}\omega_{pq} + 2E_a^{(m}\frac{\partial e_i^a}{\partial x^j}\epsilon^{ijn)}, \quad (2.89)$$

el cual es lineal en ω_{pq} . Como G_{mnl} es invertible, se puede eliminar ω_{mn} de su propia ecuación de movimiento, de tal forma que la acción es ahora sólo un funcional de la tetrada y su momentum canónico conjugado:

$$S[e, \pi, \omega_{mn}] \rightarrow S[e, \pi]. \quad (2.90)$$

2.7 Grados de libertad

Debido a la presencia de vínculos, el número de grados de libertad de una teoría de gauge no es igual al número de variables con las que se describe la teoría. Por cada vínculo de primera clase, se debe restar un grado de libertad, puesto que en principio, de esta restricción puede despejarse una variable en términos de las restantes. Los vínculos de segunda clase en cambio, no solo fijan las variables del espacio de fase, sino que fijan los multiplicadores de Lagrange asociados a estas mismas constricciones. Puesto que los vínculos de segunda clase aparecen en número par, puede pensarse que la mitad de ellos fijan a los multiplicadores de Lagrange, quedando la otra mitad para fijar las variables del espacio de fase. Por tanto el número de grados de libertad de una teoría de gauge viene dado por

$$N^\circ \text{ grados de libertad} = NC - NVPC - \frac{1}{2}NVSC, \quad (2.91)$$

donde NC es el número de campos con los cuales se describe la teoría, $NVPC$ es el número de vínculos de primera clase y por último, $NVSC$ corresponde al número de constricciones de segunda clase.

En nuestro caso aparecen sólo vínculos de primera clase, que están asociados al generador de rotaciones J_{ab} (seis vínculos) y a los generadores de difeomorfismos H_\perp y H_i (cuatro vínculos). Los campos de la teoría corresponden a la tetrada e_i^a (12 variables). Aplicando la fórmula anterior se encuentra que el número de grados de libertad de la gravitación de primer orden en términos de la tetrada es 2. Este mismo resultado se obtiene en el formalismo métrico, donde estos grados de libertad están asociados a las dos polarizaciones del gravitón.

2.8 Relación entre T_{ij}^a , J_{ab} y $\Phi^{(mn)}$

Notemos que las ecuaciones

$$J_{ab} = \epsilon_{abcd} T_{ij}^c \epsilon_k^d \epsilon^{ijk}, \quad (2.92)$$

$$\Phi^{(mn)} = E_a^{(m} T_{pq}^a \epsilon^{pqn)}, \quad (2.93)$$

son 12 ecuaciones de tal forma que, en principio, se pueden despejar las 12 componentes espaciales del tensor de Torsión en términos de J_{ab} y $\Phi^{(mn)}$.

Sí se define

$$T^{ak} = T_{ij}^a \epsilon^{ijk} \quad (2.94)$$

y proyectando T^{ak} de la manera señalada en la sección 2.5 se tiene que:

$$T^{ai} = \eta^a T^i + \epsilon_j^a T^{ij}, \quad (2.95)$$

como se muestra en el apéndice D los coeficientes T^i y T^{ij} están dados por

$$T^k = \frac{-1}{2\sqrt{g}} J_{ab} \epsilon_i^a \epsilon_j^b \epsilon^{ijk}, \quad (2.96)$$

y

$$T^{mn} = \frac{1}{2} \Phi^{(mn)} - \frac{1}{4} E_a^m E_b^n \epsilon^{abcd} J_{cd}. \quad (2.97)$$

Invirtiendo ecuación (2.94) para T_{ij}^a se encuentra

$$T_{ij}^a = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} T^{ak}, \quad (2.98)$$

esto es,

$$T_{ij}^a = \frac{1}{2} \epsilon_{ijm} (\eta^a T^m + \epsilon_n^a T^{mn}), \quad (2.99)$$

o explícitamente en términos de J_{ab} y Φ^{mn}

$$T_{ij}^a = \frac{1}{4} \epsilon_{ijm} \left[\eta^a \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon_p^f \epsilon_q^g J_{fg} \epsilon^{pqm} \right) + \epsilon_n^a (\Phi^{mn} - \frac{1}{2} E_f^m E_g^n \epsilon^{fgcd} J_{cd}) \right]. \quad (2.100)$$

Así, las componentes espaciales de la torsión se anulan por que son una combinación de los vínculos J_{ab} y $\Phi^{(mn)}$, y no porque se imponga esto de antemano.

2.9 Dependencia del Hamiltoniano en las variables

ω_{mn} .

Es de interés conocer la dependencia del Hamiltoniano en las variables ω_{mn} . Una manera fácil de obtener este resultado, es expandir el Hamiltoniano en serie de Taylor en potencias de ω_{mn} en torno a $\omega_{mn} = 0$

$$H = H_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial \omega_{mn}} \omega_{mn} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 H}{\partial \omega_{mn} \partial \omega_{kl}} \omega_{mn} \omega_{kl} + \dots, \quad (2.101)$$

donde las derivadas están dadas por

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_{mn}} = -2\sqrt{g}N\Phi^{(mn)} - N^{(m} \epsilon_p^a \epsilon_q^b J_{ab} \epsilon^n)^{pq}, \quad (2.102)$$

y

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \omega_{mn} \partial \omega_{kl}} = -2\sqrt{g}N \frac{\partial \Phi^{mn}}{\partial \omega_{kl}} = 8g^{3/2} N G^{mnlk}. \quad (2.103)$$

Puesto que la supermétrica sólo depende de la tétrada, derivadas de tercer orden y superiores del Hamiltoniano son nulas, y por lo tanto la expansión en serie termina en segundo orden en ω_{mn} .

Ahora bien, el vínculo $\Phi^{(mn)}$ puede ser escrito en la forma

$$\Phi^{(mn)} = -2gG^{mnpq}(\omega_{pq} - \omega_{pq}^0), \quad (2.104)$$

donde se ha definido ω_{pq}^0 de tal forma que

$$2gG^{mnpq}\omega_{pq}^0 = 2E_a^{(m} \partial_i \epsilon_j^a \epsilon^{ijn)}. \quad (2.105)$$

Si se despeja ω_{kl} de ecuación (2.104) se encuentra

$$\omega_{kl} = \omega_{kl}^0 - \frac{1}{4g} G_{klmn} \Phi^{(mn)}, \quad (2.106)$$

y al reemplazar en la expansión (2.101) se obtiene

$$\begin{aligned} H = & H_0 - g^{3/2} N G^{mnpq} \omega_{mn}^0 \omega_{pq}^0 - \frac{1}{2} N^{(m} \epsilon_i^a \epsilon_j^b J_{ab} \epsilon^{pqn)} \omega_{mn}^0 \\ & + \frac{1}{8g} G_{mnlk} N^{(m} \epsilon_i^a \epsilon_j^b J_{ab} \epsilon^{pqn)} \Phi^{(kl)} \\ & + \frac{N}{8\sqrt{g}} G_{klpq} \Phi^{kl} \Phi^{pq}. \end{aligned} \quad (2.107)$$

y vemos que el hamiltoniano de depende de ω_{mn} sólo a través del vínculo $\Phi^{(pq)}$. Obviamente la dependencia en ω_{mn} de la acción puede ser anulada si redefinimos el Hamiltoniano por:

$$\bar{H} = H - \frac{1}{8\sqrt{g}} G_{mnpq} \Phi^{mn} \Phi^{pq} - \frac{1}{8g} G_{mnpq} N^{(m} e_r^a e_s^b J_{ab} \epsilon^{r,sn)} \Phi^{pq}, \quad (2.108)$$

donde \bar{H} satisface

$$\frac{\delta \bar{H}}{\delta \omega_{mn}} = 0. \quad (2.109)$$

Las ecuaciones de movimiento no son alteradas por ésta redefinición del Hamiltoniano, porque las ecuaciones de movimiento provenientes de \bar{H} son las antiguas módulo los vínculos, los cuales se anulan sobre la superficie del espacio de fase en la cual, las contricciones se satisfacen. Ahora si se despeja ω_{mn} del vínculo $\Phi^{(mn)}$ y se reemplaza en la acción, el hamiltoniano que se obtiene es precisamente el dado en ecuación (2.107) con $\Phi^{(mn)} = 0$, esto es \bar{H} .

El término H_0 puede ser obtenido al reemplazar $\omega_{mn} = 0$ en ecuación (2.21), de tal forma que

$$H_0 = \omega_0^{ab} J_{ab}(\pi, e) + \epsilon_0^a P_a(e, \pi, \omega_{mn} = 0). \quad (2.110)$$

Cuando $\omega_{mn} = 0$, ω_i^{ab} está dado por

$$\omega_i^{ab} = \Theta_{ij}^{abc} \pi_c^j, \quad (2.111)$$

y si reemplaza esta expresión en ecuación (2.18) se obtiene

$$P_a = \partial_i \pi_a^i + \eta_a G_{\perp ij}^{ab} \pi_a^i \pi_b^j + E_a^l G_{ij}^{ab} \pi_a^i \pi_b^j + \frac{1}{2g} \epsilon_{abcd} \partial_i e_k^d \epsilon^{ijk} (e_j^b \eta^c e_l^g - e_j^b \epsilon_l^g \eta^g - e_l^b \eta^c e_j^g) \pi_g^l, \quad (2.112)$$

donde

$$G_{\perp ij}^{ab} = \frac{1}{16\sqrt{g}} [e_i^a e_j^b - 2e_j^a e_i^b - g_{ij} \eta^a \eta^b], \quad (2.113)$$

y

$$G_{mij}^{ab} = \frac{1}{16\sqrt{g}} [g_{ij} \eta^a e_m^b + 2g_{im} (e_j^a \eta^b - e_j^b \eta^a)]. \quad (2.114)$$

Los generadores $H_{\perp} = \eta^a P_a$ y $H_i = e_i^a P_a$ para $\omega_{pq} = 0$ pueden ser obtenidos de (2.112) y están dados por

$$H_{\perp} = \eta^a \partial_i \pi_a^i - \frac{1}{2\sqrt{g}} E_d^s \partial_l [e_s^d \eta^g \pi_g^l - G_{\perp ij}^{ab} \pi_a^i \pi_b^j], \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned}
H_m = & \frac{1}{2\sqrt{g}}(E_d^s \partial_i e_k^d \epsilon_{m l s} \epsilon^{i j k} e_j^g - E_d^s \partial_{[m} e_{s]}^d e_l^g + \eta_d \partial_{[m} \epsilon_{l]}^d \eta^g) \pi_g^l \\
& + e_m^a \partial_i \pi_a^i + G_{m i j}^{a b} \pi_a^i \pi_b^j.
\end{aligned} \tag{2.116}$$

2.10 Difeomorfismos y el generador P

En la sección (2.3) se mostró que el generador J_{ab} corresponde al generador de rotaciones locales $SO(3,1)$. En esta sección investigaremos qué clase de simetría genera el vínculo P_a . Para esto consideremos nuevamente la acción (2.68), la cual es un funcional de la tétrada e_i^a , su momentum conjugado π_b^j y las variables ω_{mn} . Se sabe que del vínculo $\Phi^{ij} = 0$ se puede despejar ω_{mn} en términos de la tétrada e_i^a , esto es:

$$\omega_{mn} = \omega_{mn}(e_i^a), \tag{2.117}$$

y si se reemplaza en la acción (2.68) obtenemos una acción que sólo depende de la tétrada y su momento conjugado. En vez de hacer esto directamente en la acción (2.68) podemos reemplazar en ecuación (2.27), de manera que la conexión llega a ser una función de e_i^a y π_c^j

$$\omega_i^{ab}(e, \pi) = \frac{1}{2} \omega_{mn}(e) U_i^{(mn)ab} + \pi_c^j \Theta_{ij}^{abc}, \tag{2.118}$$

y por tanto el vínculo P_a tiene la dependencia

$$P_a = P_a[e, \omega(e, \pi, \omega_{mn}(e))], \tag{2.119}$$

en las variables canónicas.

Calculemos la variación de la tétrada generada por P_a

$$\delta e_i^a = \{e_i^a, P[N]\} = \frac{\delta P[N]}{\delta \pi_a^i}, \tag{2.120}$$

donde $P[N]$ está dado por

$$P[N] = \int N^a P_a d^3x = \int N^a \epsilon_{abcd} R_{ij}^{bc}(e, \pi) e_k^d \epsilon^{ijk} d^3x \tag{2.121}$$

El cálculo explícito de δe se hace en el apéndice E, por ahora sólo presentamos el resultado

$$\delta e_i^a = -2D_i(N^a) + N^b \epsilon_{bcde} T_{mn}^e \epsilon^{mnk} \Theta_{k i}^{cda}. \tag{2.122}$$

Para la variación de π_a^i se tiene

$$\delta\pi_a^i = \{\pi_a^i, P[N]\} = -\frac{\delta P[N]}{\delta\epsilon_i^a}. \quad (2.123)$$

En el apéndice F se demuestra que $\delta\pi$ está dado en términos de la tetrada y su momentum conjugado por

$$\delta\pi_a^k = 2\epsilon_{abcd}\epsilon^{imn}\omega_m^{bc}D_n(N^d) - \epsilon_{abcd}R_{mn}^{bc}\epsilon^{imn}N^d + \epsilon_{bcde}\frac{\delta\omega_k^{bc}(e, \pi)}{\delta\epsilon_i^a}N^d T_{mn}^e \epsilon^{kmn}. \quad (2.124)$$

La acción (2.12) es invariante ante transformaciones generales de coordenadas y esperamos por tanto que P_a genere de algún modo difeomorfismos. Descamos ver si las transformaciones dadas por las ecuaciones (2.122) y (2.124) corresponden a aquéllas dadas por difeomorfismos actuando sobre las variables canónicas.

Bajo un difeomorfismo de parámetro ϵ^μ la tetrada y la conexión de espín transforman de acuerdo a

$$\delta e_\mu^a = T_{\mu\nu}^a \epsilon^\nu - D_\mu(\epsilon^\lambda \epsilon_\lambda^a), \quad (2.125)$$

$$\delta\omega_\mu^{ab} = R_{\mu\nu}^{ab} \epsilon^\nu. \quad (2.126)$$

Para evaluar la acción de un difeomorfismo sobre π_c^j se puede despejar π de la ecuación (2.118) dando

$$\pi_c^j = \Omega_{abc}^{kj} \omega_k^{ab} \quad (2.127)$$

variando esta ecuación y usando (2.125) y (2.126) se muestra en el Apéndice G, que el momento canónico de la tetrada transforma bajo difeomorfismos de acuerdo a

$$\begin{aligned} \delta\pi_c^j &= \epsilon_{abcd}\epsilon^{kjl}\omega_k^{ab}(e, \pi)\Theta_{pl}^{fgd}\epsilon_{fgeh}\epsilon^{pqr}T_{qr}^e \epsilon_0^h \epsilon^0 \\ &+ \epsilon_{abcd}\epsilon^{kjl}\omega_k^{ab}(e, \pi)T_{lm}^d \epsilon^m - \epsilon_{abcd}\epsilon^{kjl}\omega_k^{ab}(e, \pi)D_l(\epsilon^\nu \epsilon_\nu^d) \\ &\quad - \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}\epsilon^{mnj}R_{mn}^{ab} \epsilon_\mu^d \epsilon^\mu + \frac{1}{2}P_c \epsilon^j. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Ahora bien, sobre la superficie de los vínculos $P_a \approx 0$, $J_{ab} \approx 0$ y $T_{ij}^a \approx 0$, de tal forma que las transformaciones (2.122) y (2.124) coinciden con (2.125) y (2.128) respectivamente. Pero si dos transformaciones coinciden sobre la superficie de los vínculos, son la misma transformación, luego el vínculo P_a efectivamente genera

difeomorfismos.

Se puede ahora evaluar el corchete de Poisson de P_a consigo mismo

$$\{P[M], P[N]\} = \int \frac{\delta P[M]}{\delta e_i^a} \frac{\delta P[N]}{\delta \pi_a^i} - \frac{\delta P[N]}{\delta e_i^a} \frac{\delta P[M]}{\delta \pi_a^i} d^3x, \quad (2.129)$$

y si se hace uso de (2.122) y (2.124) se encuentra que el corchete de P_a es

$$\{P[M], P[N]\} \sim T + T^2 + T \cdot P \quad (2.130)$$

mientras que el corchete de P_a con J_{ab} es

$$\{P_a(x), J_{bc}(y)\} = (\eta_{ba}P_c - \eta_{ca}P_b)\delta(x, y), \quad (2.131)$$

es decir, P_a transforma como vector bajo rotaciones.

Capítulo 3

Formulación en base a la conexión de espín

3.1 Introducción

En el capítulo anterior la conexión de espín ω_i^{ab} fue descompuesta en dos términos, uno proporcional al momento canónico conjugado a la tétrada y otro proporcional a las variables ω_{mn} , las cuales al ser eliminadas permitían expresar la acción de Hilbert como un funcional de la tétrada y su momentum conjugado $S = S[e_i^a, \pi_b^j]$. Las expresiones para los vínculos de la teoría en términos de estas variables son bastante complicadas (ecs. 2.115, 2.116) así, si se desea hacer mecánica cuántica, la cuantización canónica de las constricciones dará como resultado ecuaciones tipo Schrödinger muy difíciles de resolver. Este mismo problema ocurre en la formulación A.D.M. de la gravitación, en que el campo fundamental es el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, y donde los vínculos H_\perp y H_i están dados por las expresiones

$$H_\perp = \frac{1}{2}g^{-\frac{1}{2}}(g_{ik}g_{jl} + g_{il}g_{jk} - g_{ij}g_{kl})\pi^{ij}\pi^{kl} - g^{\frac{1}{2}}R, \quad (3.1)$$

$$H_i = -2g_{ik}\pi_j^{kj} - (2g_{ki,j} - g_{kj,i})\pi^{kj}, \quad (3.2)$$

y en este caso sólo se conocen soluciones al problema cuántico en algunos casos particulares, como el minisuperespacio.

Cabe entonces preguntarse si existirá un conjunto de variables en las cuales la expresiones para estas conricciones se simplifiquen. En 1986 Abhay Ashtekar introdujo un nuevo conjunto de variables, con las que reformuló la teoría de la gravitación, y en las cuales las expresiones para las conricciones H_{\perp} y H_i se simplifican notablemente (de hecho son funciones polinómicas de estas variables).

Esto abrió toda una línea de investigación, en la cual se desarrollaron nuevas técnicas (tales como la representación de lazos) para tratar el problema de una manera no perturbativa, y que permitió establecer una conexión entre gravedad cuántica y la teoría de nudos. También en estas nuevas variables la estructura matemática de la relatividad General es muy semejante a las teorías de Gauge usuales.

Ashtekar en su formalismo introduce una conexión compleja autodual, de tal forma que se esta describiendo la gravitación en términos de números complejos. Surge entonces la pregunta de si es posible describir la teoría de la relatividad en término de variables reales de una manera análoga a la realizada por Ashtekar. En este capítulo daremos una respuesta a esta interrogante, para esto agrandaremos el espacio de fase sobre el cual están definidas las conricciones y veremos que la acción de Hilbert puede escribirse en términos de la conexión de espín y su momentum conjugado ($S = S[\omega_{\mu}^{ab}, P_{ab}^{\mu}]$). Las expresiones de los generadores de rotaciones y difeomorfismos en términos de estas variables tienen la misma estructura que las obtenidas por Ashtekar. En nuestro formalismo además de las conricciones de primera clase (asociadas a la invariancia ante rotaciones y difeomorfismos), aparecen vínculos de segunda clase. Esta últimas conricciones pueden ser eliminadas usando el paréntesis de Dirac, y en este corchete los vínculos de primera clase satisfacen el álgebra usual de difeomorfismos.

También se verá de que manera se relaciona nuestro formalismo con la teoría de Ashtekar y encontraremos que esta corresponde a la suma de dos copias de Ashtekar, la primera definida por una conexión compleja autodual y la segunda por una antidual.

3.2 Gravitación en términos de la conexión de espín.

Consideremos nuevamente la acción (2.12), la que al hacer la descomposición en 3 + 1 se escribe

$$S = \int (\dot{\omega}_k^{ab} \epsilon_{abcd} e_i^c e_j^d \epsilon^{ijk} + \omega_0^{ab} J_{ab} + e_0^a P_a) d^3 x dt, \quad (3.3)$$

la cual difiere de (2.20) por una derivada total. El vínculo J_{ab} aún está dado por la ecuación (2.17), la cual puede reescribirse en la forma

$$J_{ab} = \frac{1}{2} D_k (\epsilon_{abcd} e_i^c e_j^d \epsilon^{ijk}). \quad (3.4)$$

Luego resulta natural definir la variable

$$P_{ab}^k(e) = \epsilon_{abcd} e_i^c e_j^d \epsilon^{ijk}, \quad (3.5)$$

de tal forma que el término cinético y el generador de rotaciones de la acción quedan expresados en términos de $P_{ab}^j(e)$ de acuerdo a

$$S = \int (\dot{\omega}_k^{ab} P_{ab}^k(e) + \omega_0^{ab} J_{ab}[\omega, P(e)] + e_0^a P_a[\omega, e]) d^3 x dt, \quad (3.6)$$

donde $J_{ab}[\omega, P(e)] = \frac{1}{2} D_k (P_{ab}^k(e))$. Lamentablemente no es posible escribir P_a en términos de $P_{ab}^k(e)$, pero si usamos la descomposición

$$e_0^a P_a = N H_{\perp} + N^i H_i. \quad (3.7)$$

los vínculos

$$H_{\perp}[\omega, e] = \eta^a P_a[\omega, e], \quad (3.8)$$

$$H_i[\omega, e] = e_i^a P_a[\omega, e], \quad (3.9)$$

se pueden expresar en términos de las variables ω_i^{ab} y $P_{ab}^j(e)$ como

$$H_{\perp}[\omega, P(e)] = P_{ac}^i(e) P_b^{cj}(e) R_{ij}^{ab}, \quad (3.10)$$

$$H_i[\omega, P(e)] = P_{ab}^j(e) R_{ij}^{ab}, \quad (3.11)$$

de tal manera que la acción completa es funcional de ω_i^{ab} y de la tétrada a través de la combinación $P_{ab}^j(e)$

$$S = \int (\dot{\omega}_k^{ab} P_{ab}^k(e) + \omega_0^{ab} J_{ab}[\omega, P(e)] + NH_{\perp}[\omega, P(e)] + N^i H_i[\omega, P(e)]) d^3x dt. \quad (3.12)$$

Se puede ahora elevar $P_{ab}^i(e)$ a la categoría de variable independiente, de modo que la acción (3.12) llega a ser un funcional de 36 campos (18 ω_i^{ab} más 18 P_{ab}^i). La acción (3.6) en cambio es un funcional de 30 campos (18 ω_i^{ab} más 12 ϵ_j^a), de manera que nuestra nueva teoría posee seis grados de libertad adicionales. Si queremos que ambas teorías sean equivalentes estas deben poseer el mismo número de campos. Así debemos suplementar a la acción (3.12) con un conjunto de seis vínculos adicionales. Además esperamos que estos seis vínculos se satisfagan idénticamente cuando P_{ab}^i se reemplaza por la expresión (3.5) en términos de la tétrada.

En este espíritu hacemos el siguiente ansatz para las seis constricciones mencionadas anteriormente, definiéndolas primeramente por

$$\phi^{ij} = \epsilon^{abcd} P_{ab}^i P_{cd}^j, \quad (3.13)$$

expresión que es simétrica en i, j de tal forma que el índice colectivo (i, j) recorre seis valores y luego imponiendo la condición

$$\phi^{ij} = 0. \quad (3.14)$$

Para que la nueva teoría sea consistente, debemos sumar estas constricciones a la acción multiplicadas por su respectivo multiplicador de Lagrange. Así la acción que se estudiará de aquí en adelante está dada por

$$S = \int \dot{\omega}_k^{ab} P_{ab}^k - H[\omega, P], \quad (3.15)$$

donde

$$H[\omega, P] = \omega_0^{ab} J_{ab} + NH_{\perp} + N^i H_i + \lambda_{ij} \phi^{ij}. \quad (3.16)$$

El paréntesis de Poisson entre dos funcionales $A[\omega, P]$ y $B[\omega, P]$ de las variables canónicas viene dado en este caso por:

$$\{A, B\} = \frac{1}{2} \int \frac{\delta A}{\delta \omega_k^{ab}} \frac{\delta B}{\delta P_{ab}^k} - \frac{\delta B}{\delta \omega_k^{ab}} \frac{\delta A}{\delta P_{ab}^k} \quad (3.17)$$

Ahora bien, la preservación del vínculo ϕ^{ij} en el tiempo

$$\dot{\phi}^{ij} = \{\phi^{ij}, H\} = 0, \quad (3.18)$$

da el resultado

$$\omega_0^{ab} \{\phi^{ij}, J_{ab}\} + N \{\phi^{ij}, H_{\perp}\} + N^k \{\phi^{ij}, H_k\} + \lambda_{mn} \{\phi^{ij}, \phi^{mn}\} = 0. \quad (3.19)$$

Los conmutadores de Φ^{ij} con el resto de las constricciones están dados por

$$\{J[N^{ab}], \phi[\lambda^{ij}]\} = 0, \quad (3.20)$$

$$\{\phi[\lambda_{ij}], \phi[\sigma_{kl}]\} = 0, \quad (3.21)$$

$$\{\phi[\lambda_{ij}], H[N^i]\} = \int 2[M^k(\partial_k \lambda_{ij}) + (\partial_j M^k)\lambda_{ik} + (\partial_i M^k)\lambda_{kj} - (\partial_k M^k)\lambda_{ij}]\phi^{ij}, \quad (3.22)$$

y por último:

$$\{\phi[\lambda_{ij}], H[N]\} = \int \chi[N\lambda_{ij}], \quad (3.23)$$

donde

$$\chi^{lk} = D_i(P_{\epsilon c}^k)P_{ab}^l P_f^{ci} \epsilon^{abfe} \quad (3.24)$$

de modo que (3.19) arroja una nueva constricción

$$\chi^{ij} = \{\phi^{ij}, H_{\perp}\} = 0. \quad (3.25)$$

El resto del álgebra está dada por

$$\{H[N], H[M]\} = \int (M\partial_i N - N\partial_i M)(g^{ij}H_i - \phi^{ij}H_i^*), \quad (3.26)$$

donde

$$H_i^* = \epsilon_{cd}^{ab} P_{ab}^j R_{ij}^{cd}, \quad (3.27)$$

$$\{H[N], H[M^i]\} = \int (M^i \partial_i N - N \partial_i M^i) H_{\perp}, \quad (3.28)$$

$$\{H[N^i], H[M^j]\} = \int (N^l \partial_l M^m - M^l \partial_l N^m) H_m + \frac{1}{2} N^i M^j J_{ab} R_{ij}^{ab}, \quad (3.29)$$

$$\{J[N^{ab}], J[M^{cd}]\} = J[(M \times N)^{ab}], \quad (3.30)$$

$$\{J[N^{ab}], H[M]\} = 0, \quad (3.31)$$

$$\{J[N^{ab}], H[M^i]\} = 0, \quad (3.32)$$

Por último el paréntesis de Poisson de Φ con χ está dado por

$$\{\phi[\lambda_{ij}], \chi[\sigma_{kl}]\} = \int \lambda_{ij} \sigma_{mn} (G^{ijmn}(g) + G^{ijmn}(\phi)), \quad (3.33)$$

donde $G^{ijmn}(g)$ es la supermétrica en g^{ij}

$$G^{ijkl}(g) = 2g^{ij}g^{kl} - g^{il}g^{kj} - g^{ik}g^{lj}, \quad (3.34)$$

y $G^{ijmn}(\phi)$ es la supermétrica evaluada en ϕ^{ij} :

$$G^{ijkl}(\phi) = 2\phi^{ij}\phi^{kl} - \phi^{il}\phi^{kj} - \phi^{ik}\phi^{lj}. \quad (3.35)$$

Luego las contricciones ϕ^{ij} y χ^{mn} forman un conjunto de segunda clase.

De la teoría de Dirac se sabe que los vínculos de segunda clase pueden ser eliminados, utilizando en vez del paréntesis de Poisson, el corchete de Dirac, el cual está definido por

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \{A, \varphi^\alpha\} C_{\alpha\beta} \{\varphi^\beta, B\} \quad (3.36)$$

donde φ^α corresponde a un conjunto de vínculos de segunda clase. La matriz $C_{\alpha\beta}$ es la inversa de la matriz definida por los paréntesis de Poisson

$$C^{\alpha\beta} = \{\varphi^\alpha, \varphi^\beta\}. \quad (3.37)$$

El corchete de Dirac de alguna constricción A con un vínculo de segunda clase φ^α es nulo

$$\{A, \varphi^\alpha\}^* = 0, \quad (3.38)$$

así una vez evaluados los paréntesis de Dirac, se pueden hacer todas las constricciones de segunda clase fuertemente iguales a cero y por tanto eliminarlas.

3.3 Grados de libertad

Apliquemos ahora la fórmula obtenida en el capítulo anterior para los grados libertad de una teoría de gauge. En esta segunda formulación las variables de campo corresponden a la conexión de espín ω_i^{ab} (18 campos). Ahora, además de los 10 vínculos de primera clase (J_{ab}, H_{\perp} y H_i) aparecen 12 constricciones de segunda clase (χ^{ij} y ϕ^{kl}). Luego el número de grados de libertad en este formalismo es

$$N^{\circ} \text{ grados de libertad} = 18 - 10 - \frac{12}{2} = 2, \quad (3.39)$$

que es el mismo resultado obtenido en la formulación anterior.

3.4 Eliminación de χ y ϕ .

En nuestro caso particular, la matriz $C^{\alpha\beta}$ tiene índices $C_{AB}^{ijmn}(x, y)$, donde A, B recorren los símbolos χ, ϕ , y está dada por

$$C_{AB}^{ijmn}(x, y) = \begin{pmatrix} \{\chi^{ij}(x), \chi^{mn}(y)\} & \{\chi^{ij}(x), \phi^{mn}(y)\} \\ \{\phi^{ij}(x), \chi^{mn}(y)\} & \{\phi^{ij}(x), \phi^{mn}(y)\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{\chi, \chi} & C_{\chi, \phi} \\ C_{\phi, \chi} & C_{\phi, \phi} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

esta matriz es de la forma:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

La inversa de $C_{AB}^{ijmn}(x, y)$ será denotada por $C_{ijmn}^{-1 AB}(x, y)$ y está definida por

$$\frac{1}{2} \int d^3 z C_{ijkl}^{-1 AC}(x, z) C_{CB}^{klmn}(z, y) = \delta_{kl}^{mn} \delta_B^A \delta^3(x - y). \quad (3.42)$$

La matriz inversa tiene la forma

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} C_{\chi, \chi}^{-1} & C_{\chi, \phi}^{-1} \\ C_{\phi, \chi}^{-1} & C_{\phi, \phi}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -B^{-1} \\ B^{-1} & B^{-1} A B^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Así debemos encontrar la inversa de la submatriz B, es decir de la matriz:

$$B^{ijmn}(x, y) = \{\chi^{ij}(x), \phi^{mn}(y)\} = (G^{ijmn}(g(x)) + G^{ijmn}(\phi(x)))\delta(x - y). \quad (3.44)$$

Denotemos por $B_{ijmn}(x, y)$ a la inversa de $B^{ijmn}(x, y)$. Puesto que B es diagonal en los índices continuos, B^{-1} también debe serlo, así escribimos $B_{ijmn}(x, y) = B_{ijmn}(x)\delta(x - y)$, luego de (3.42) se deduce la relación

$$B_{ijkl}(x)(G^{klmn}(g(x)) + G^{klmn}(\phi(x))) = \delta_{(mn)}^{(ij)}. \quad (3.45)$$

Si multiplicamos por $G_{mnpq}(g)$ la ecuación anterior se obtiene:

$$B_{ijpq} = G_{ijpq}(g) - B_{ijkl}G^{klmn}(\phi)G_{mnpq}(g), \quad (3.46)$$

que se puede escribir sin índices como

$$B^{-1} = G(g) - B^{-1}G(\phi)G(g), \quad (3.47)$$

esta última ecuación puede iterarse, obteniendo así un desarrollo en serie para $B_{ijmn}(x)$:

$$B^{-1} = G(g) - G(g)G(\phi)G(g) + G(g)G(\phi)G(g)G(\phi)G(g) + \dots \quad (3.48)$$

Luego la matriz inversa $C^{-1} = C_{\alpha\beta}$ de $C^{\alpha\beta}$ puede ser calculada explícitamente.

El corchete de Dirac entre dos funcionales A y B está dado explícitamente por

$$\begin{aligned} \{A, B\}^* = & \{A, B\} - \{A, \chi\}C_{\chi\phi}^{-1}\{\phi, B\} \\ & - \{A, \phi\}C_{\phi\chi}^{-1}\{\chi, B\} - \{A, \phi\}C_{\phi\phi}^{-1}\{\phi, B\}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde una integración sobre los índices continuos es entendida.

Calculemos ahora los corchetes de Dirac para el conjunto de vínculos J_{ab} , H_{\perp} y H_i .

En vista de (3.49) obtenemos para el corchete de Dirac de H_{\perp} consigo mismo

$$\begin{aligned} \{H[N], H[M]\}^* = & \{H[N], H[M]\} - \{H[N], \chi\}C_{\chi\phi}^{-1}\{\phi, H[M]\} \\ & - \{H[N], \phi\}C_{\phi\chi}^{-1}\{\chi, H[M]\} - \{H[N], \phi\}C_{\phi\phi}^{-1}\{\phi, H[M]\}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

pero como $\{H_{\perp}, \phi\} \sim \chi$ y tomando en el lado derecho de (3.50) todas las constricciones de segunda clase fuertemente iguales a cero, obtenemos haciendo uso de (3.26)

$$\{H[N], H[M]\}^* = \int (M\partial_i N - N\partial_i M)g^{ij}H_i. \quad (3.51)$$

El corchete de Dirac de H_{\perp} con H_i está dado por

$$\begin{aligned} \{H[N], H[M^i]\}^* &= \{H[N], H[M^i]\} - \{H[N], \chi\} C_{\chi\phi}^{-1} \{\phi, H[M^i]\} \\ &\quad - \{H[N], \phi\} C_{\phi\chi}^{-1} \{\chi, H[M^i]\} - \{H[N], \phi\} C_{\phi\phi}^{-1} \{\phi, H[M^i]\}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

nuevamente el lado derecho contiene términos proporcionales a $\chi \sim \{H_{\perp}, \phi\}$, de modo que al hacer los vínculos de segunda clase igual a cero se obtiene

$$\{H[N], H[M^i]\}^* = \int (M^i \partial_i N - N \partial_i M^i) H_{\perp}. \quad (3.53)$$

Para el paréntesis de H_i consigo mismo se encuentra

$$\begin{aligned} \{H[M^i], H[M^j]\}^* &= \{H[M^i], H[M^j]\} - \{H[M^i], \chi\} C_{\chi\phi}^{-1} \{\phi, H[M^j]\} \\ &\quad - \{H[M^i], \phi\} C_{\phi\chi}^{-1} \{\chi, H[M^j]\} - \{H[M^i], \phi\} C_{\phi\phi}^{-1} \{\phi, H[M^j]\}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

pero $\{H_i, \phi\} \sim \phi$, de tal forma que estos términos se anulan cuando se hacen iguales a cero las contricciones de segunda clase

$$\{H[M^i], H[M^j]\}^* = \int (N^l \partial_l M^m - M^l \partial_l N^m) H_m + \frac{1}{2} N^i M^j J_{ab} R_{ij}^{ab}. \quad (3.55)$$

Lo mismo es válido para los corchetes que incluyen el generador de momento angular

$$\{J[N^{ab}], J[M^{cd}]\}^* = \int J[(M \times N)^{ab}], \quad (3.56)$$

$$\{J[N^{ab}], H[M]\}^* = 0, \quad (3.57)$$

$$\{J[N^{ab}], H[M^i]\}^* = 0. \quad (3.58)$$

Vemos así que el álgebra de Dirac de los vínculos se reduce al álgebra usual.

3.5 La teoría de Ashtekar

La relatividad General puede ser reformulada en términos de la tetrada e_μ^A y una conexión compleja autodual A_μ^{MN} . (En esta sección denotaremos los índices asociados al espacio tangente por letras mayúsculas: $A = 0,1,2,3$). Para llevar a la conexión de espín a una conexión autodual primero que nada notamos que la integral

$$I[e, \omega] = \int d^4x \epsilon \epsilon_I^\mu \epsilon_J^\sigma \epsilon^{IJ}{}_{MN} R_{\mu\nu}^{MN}, \quad (3.59)$$

es una derivada total, (acá e_I^μ es la inversa de la tetrada e_μ^I , mientras que ϵ es el determinante de e_μ^I) de tal forma que puede ser sumada a la acción de Hilbert sin cambiar las ecuaciones de movimiento.

Por otra parte la acción de Hilbert puede ser escrita como

$$S[e, \omega] = \int d^4x \epsilon \epsilon_I^\mu \epsilon_J^\nu R_{\mu\nu}^{IJ}, \quad (3.60)$$

De esta forma podemos restar a la acción anterior la integral I multiplicada por $\frac{i}{2}$ y considerar la acción

$$S'[e, \omega] = S[e, \omega] - \frac{i}{2} I[e, \omega] \quad (3.61)$$

esto es

$$S'[e, \omega] = \int d^4x \epsilon \epsilon_I^\mu \epsilon_J^\nu (R_{\mu\nu}^{IJ} - \frac{1}{2} i \epsilon^{IJ}{}_{MN} R_{\mu\nu}^{MN}). \quad (3.62)$$

Ahora definiremos la conexión autodual A_μ^{IJ} de acuerdo a

$$A_\mu^{IJ} = \omega^{IJ} - \frac{1}{2} i \epsilon^{IJ}{}_{MN} \omega_\mu^{MN}, \quad (3.63)$$

de esta definición se puede mostrar que A satisface la condición de autodualidad

$$A_\mu^{MN} = -\frac{1}{2} i \epsilon^{MN}{}_{IJ} A_\mu^{IJ}. \quad (3.64)$$

Denotaremos la curvatura asociada a la conexión A_μ^{IJ} por $F_{\mu\nu}^{IJ}$, el punto clave aquí, es que la curvatura F de la conexión autodual A es precisamente la parte autodual de la curvatura R de ω

$$F_{\mu\nu}^{IJ} = R_{\mu\nu}^{IJ} - \frac{1}{2} i \epsilon^{IJ}{}_{MN} R_{\mu\nu}^{MN}. \quad (3.65)$$

De esta forma podemos escribir la acción (3.62) en términos de la conexión autodual de acuerdo a

$$S'[\epsilon, \omega] = \int d^4x \epsilon \epsilon_I^\mu \epsilon_J^\nu F_{\mu\nu}^{IJ}, \quad (3.66)$$

que puede ser escrita también como

$$S'[\epsilon, \omega] = \int d^4x \epsilon_{I\mu} \epsilon_{J\nu} F_{\lambda\sigma}^{IJ} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}. \quad (3.67)$$

Ahora si se hace la separación hamiltoniana del espacio-tiempo se puede mostrar que la acción anterior puede escribirse en la forma

$$S'[\epsilon, N, N^a, A_0^a] = \int d^4x -i\dot{A}_i^a P_a^i + iA_0^a J_a + iN^i H_i + NH_{\text{pert}}, \quad (3.68)$$

donde el índice a recorre las componentes espaciales del espacio tangente y los vínculos J_a, H_i, H_\perp están dados por

$$J_a = D_i P_a^i = \partial_i P_a^i + \epsilon_a{}^{bc} A_{bi} P_c^i, \quad (3.69)$$

$$H_i = F_{ij}^a P_a^j, \quad (3.70)$$

$$H_\perp = P_a^i P_b^j F_{ij}^{ab}, \quad (3.71)$$

donde se ha definido

$$A_i^a = \epsilon_a{}^{bc} A_{bc}^i, \quad (3.72)$$

y

$$F_{ij}^a = \epsilon_a{}^{bc} F_{ij}^{bc}. \quad (3.73)$$

Notamos inmediatamente la semejanza entre estas expresiones para las contricciones y las encontradas por nosotros en término de la conexión de espín. En la próxima sección estableceremos una conexión entre nuestra teoría y la de Ashtekar.

3.6 Conexión con la teoría de Asthekar

En esta sección estableceremos contacto con la teoría de Asthekar, de hecho mostraremos que nuestro formalismo corresponde a dos copias de la teoría de

Ashtekar ,una dual y la otra antidual. Para esto notemos que la conexión de espín puede escribirse en la forma

$$\omega_{\mu}^{AB} = \omega_{\mu}^{(+)AB} + \omega_{\mu}^{(-)AB}, \quad (3.74)$$

donde

$$\omega_{\mu}^{(+)AB} = \frac{1}{2}(\omega_{\mu}^{AB} + \frac{1}{2}i\epsilon^{AB}{}_{CD}\omega_{\mu}^{AB}), \quad (3.75)$$

y

$$\omega_{\mu}^{(-)AB} = \frac{1}{2}(\omega_{\mu}^{AB} - \frac{1}{2}i\epsilon^{AB}{}_{CD}\omega_{\mu}^{AB}), \quad (3.76)$$

donde ω^{+} y ω^{-} corresponden a conexiones duales y antiduales respectivamente, esto es, satisfacen

$$\omega_{\mu}^{(\pm)AB} = \pm \frac{1}{2}i\epsilon^{AB}{}_{CD}\omega_{\mu}^{(\pm)AB}. \quad (3.77)$$

Si ecuación (3.74) se reemplaza en la curvatura R se obtiene

$$R_{\mu\nu}^{AB}(\omega) = R_{\mu\nu}^{(+)AB}(\omega^{+}) + R_{\mu\nu}^{(-)AB}(\omega^{-}), \quad (3.78)$$

esto es, la curvatura se separa en una curvatura para la conexión dual y otra para la conexión antidual.

Luego la acción de Hilbert se separa en la suma de dos copias de la teoría de Ashtekar.

$$S[e, \omega] = S^{+}[e, \omega^{+}] + S^{-}[e, \omega^{-}]. \quad (3.79)$$

Capítulo 4

Gravitación en dimensiones mayores

4.1 Introducción

La generalización de la relatividad general a dimensiones mayores fue hecha por Lovelock. Este autor encontró la acción más general que da ecuaciones de segundo orden para la métrica en un espacio-tiempo de D dimensiones. El formalismo hamiltoniano de estas teorías de mayor dimensionalidad ha sido estudiado en referencia [18] en las cuales la variable dinámica es el tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Deseamos en este capítulo señalar algunos caminos para analizar el problema de la gravitación de primer orden en dimensiones mayores para ciertos casos especiales.

4.2 La acción de Lovelock en D dimensiones.

La acción de Lovelock escrita en términos de la tetrada y la conexión de espín para una dimensión del espacio-tiempo arbitraria D está dada por

$$S_L = \sum_{p=0}^{[D/2]} \alpha_p S_p, \quad (1.1)$$

con:

$$S_p = \int \epsilon_{a_1 a_2 a_3 \dots a_D} R^{a_1 a_2} \wedge R^{a_3 a_4} \dots \wedge R^{a_{2p-1} a_{2p}} \wedge \dots \wedge e^{a_{2p+1}} \wedge \dots \wedge e^{a_D}, \quad (4.2)$$

donde α_p son coeficientes arbitrarios.

Si nuevamente se hace la separación del espacio-tiempo en la forma señalada en el capítulo 2 se encuentra

$$S_L = \int -\dot{\omega}_k^{ab} P_{ab}^k + \omega_0^{ab} J_{ab} + \epsilon_0^a P_a, \quad (4.3)$$

donde:

$$P_{ab}^k = \sum_{p=0}^{[D/2]} p \alpha_p R_{k_3 k_4}^{a_3 a_4} \dots R_{k_{2p-1} k_{2p}}^{a_{2p-1} a_{2p}} \epsilon_{k_{2p+1}}^{a_{2p+1}} \dots \epsilon_{k_{2p+1}}^{a_{2p+1}} \dots \epsilon_{k_D}^{a_D} \epsilon_{a b a_3 \dots a_D} \epsilon^{k k_3 \dots k_D}, \quad (4.4)$$

$$J_{ab} = D_k P_{ab}^k, \quad (4.5)$$

y

$$P_a = \sum_{p=0}^{[D/2]} (D - 2p) \alpha_p R_{k_1 k_2}^{a_1 a_2} \dots R_{k_{2p-1} k_{2p}}^{a_{2p-1} a_{2p}} \epsilon_{k_{2p+1}}^{a_{2p+1}} \dots \epsilon_{k_{2p+1}}^{a_{2p+1}} \dots \epsilon_{k_{D-1}}^{a_{D-1}} \epsilon_{a a_1 \dots a_{D-1}} \epsilon^{k_1 \dots k_{D-1}}. \quad (4.6)$$

No podemos aplicar nuestro método directamente, puesto que la matriz Ω_{abc}^{ij} depende en este caso de la conexión de espín. En cambio nuestro análisis puede ser generalizado fácilmente para lagrangianos del tipo "Hilbert" dados por los términos con $p = 1$ en la acción de Lovelock

$$S_1 = \int \epsilon_{a_1 a_2 a_3 \dots a_D} R^{a_1 a_2} \wedge e^{a_3} \wedge \dots \wedge e^{a_D} \quad (4.7)$$

En este caso la matriz Ω_{abc}^{kj} está dada por

$$\Omega_{abc}^{kj} = (D - 2) \alpha_1 \epsilon_{a b a_3 \dots a_{D-1} c} \epsilon^{k k_3 \dots k_{D-1} j} e_{k_3}^{a_3} \dots e_{k_{D-1}}^{a_{D-1}}. \quad (4.8)$$

Esta es una matriz rectangular de $\frac{D(D-1)(D-1)}{2} \times D(D-1)$ en los índices colectivos $\binom{k}{ab}$ y $\binom{j}{c}$, y puede mostrarse que tiene un número N de vectores propios nulos igual a la diferencia entre el número de filas y columnas, esto es, $N = \frac{D(D-1)(D-3)}{2}$. Si designamos estos vectores propios por

$$U_k^{(\alpha)ab} \quad (4.9)$$

($\alpha = 1, \dots, N$), y la matriz inversa por la izquierda por Θ_{ij}^{abc} , nuevamente podemos expandir la conexión de espín en la forma

$$\omega_k^{ab} = \Theta_{kj}^{abc} \pi_c^j + U_k^{(\alpha)ab} \omega_\alpha \quad (4.10)$$

y al reemplazar en la acción, el término cinético se diagonaliza y se puede repetir el análisis hecho para el caso de 4 dimensiones.

El caso general es un problema bastante difícil, y por ahora su solución espera una respuesta.

Capítulo 5

Conclusiones

Se han presentado dos conjuntos distintos de variables, con los cuales se puede describir la gravitación de primer orden en cuatro dimensiones.

En el primer conjunto (enfoque de la tétrada), las variables de campo son la tétrada e_i^a y su momento conjugado π_b^j . Aquí se construye una transformación que lleva a la conexión de espín a las variables π_c^j y ω_{mn} , donde éstas últimas corresponden a variables auxiliares, que pueden ser eliminadas de sus propias ecuaciones de movimiento. En este caso la conexión de espín pierde todo su significado geométrico. El Hamiltoniano de ésta teoría es la suma de vínculos, que corresponden a los generadores de rotaciones locales $SO(3,1)$ en el espacio tangente, y a los generadores de difeomorfismos en la variedad espacio-temporal. La tétrada transforma como un vector bajo rotaciones, mientras que su momento conjugado lo hace de manera mixta, semejante a una conexión (de hecho, π_a^i es una proyección de la conexión de espín).

Esta construcción puede ser generalizada a dimensiones mayores para acciones del tipo Hilbert (es decir, aquellas que contienen una sola curvatura y productos de la tétrada).

En el segundo conjunto (enfoque de la conexión de espín), las variables de campo corresponden a la conexión de espín ω_i^{ab} y su momento canónico conjugado

P_{ab}^i . En este caso además de los vínculos asociados a la invariancia bajo rotaciones y difeomorfismos, aparecen vínculos de segunda clase, los cuales son eliminados utilizando el paréntesis de Dirac. En este corchete los generadores de simetrías satisfacen el álgebra usual de difeomorfismos y rotaciones.

La estructura de los generadores de rotaciones y difeomorfismos en función de las variables canónicas es similar a las obtenidas por Ashtekar en su reformulación de la Relatividad General. De hecho, nuestra teoría corresponde a dos copias de la teoría de Ashtekar, una definida con una conexión autodual y otra antidual.

Sería de interés estudiar a futuro la manera de implementar los formalismos desarrollados en el contexto de la teoría de Ashtekar, tales como las variables de lazos, a nuestros resultados.

Lamentablemente no es claro cómo generalizar este segundo enfoque a dimensiones mayores del espacio-tiempo.

Es importante señalar, que si se aplica el formalismo de Dirac directamente a la acción de Hilbert, introduciendo los respectivos momentos canónicos a la tétrada y la conexión de espín, los vínculos de primera y segunda clase aparecen mezclados y no es posible separarlos de una manera simple. Así, las transformaciones anteriores permiten acortar camino en la identificación de las variables dinámicas de la teoría.

Por último cabe destacar, que el análisis de la estructura Hamiltoniana de la teoría de Lovelock en una dimensión arbitraria del espacio-tiempo, sigue siendo un problema abierto. La dificultad en este caso, radica en el hecho que la matriz Ω_{abc}^{ij} depende explícitamente de la conexión de espín.

Apéndice A

Vectores nulos

Los seis vectores nulos de la matriz Ω están dados explícitamente por

$$U_k^{(mn)ab} = \delta_k^{(m} \epsilon^{n)pq} e_p^a e_q^b \quad (\text{A.1})$$

mientras que la matriz Θ está dada por:

$$\Theta_{ij}^{abc} = \frac{1}{4g} [e_i^{[a} \eta^{b]} e_j^c - e_i^{[a} e_j^{b]} \eta^c - 2e_j^{[a} \eta^{b]} e_i^c], \quad (\text{A.2})$$

donde los paréntesis cuadrados indican antisimetrización.

Apéndice B

Algunas relaciones importantes

Encontraremos ahora la inversa de

$$E_\mu^a = (E_0^a, E_i^a) = (\eta^a, e_i^a) \quad (\text{B.1})$$

denotada por:

$$E_a^\mu = (E_a^0, E_a^i) \quad (\text{B.2})$$

Ahora bien, las relaciones:

$$E_\mu^a E_a^\nu = \delta_\mu^\nu \quad (\text{B.3})$$

podemos escribirlas separadamente para $\mu = 0$ y $\mu = i$:

$$E_0^a E_a^0 = \eta^a E_a^0 = 1 \quad (\text{B.4})$$

la cual se cumple si hacemos:

$$E_a^0 = -\eta_a \quad (\text{B.5})$$

la componente $\mu = i$ y $\nu = 0$ se satisface trivialmente:

$$E_i^a E_a^0 = e_i^a \eta_a = 0 \quad (\text{B.6})$$

La componente $\mu = 0$ y $\nu = i$ impone:

$$E_0^a E_a^i = \eta^a E_a^i = 0 \quad (\text{B.7})$$

esta última ecuación nos dice que E_a^i debe ser proporcional a la tetrada:

$$E_a^i = \lambda^{ij} e_{aj} \quad (\text{B.8})$$

y de la componente $\mu = i$ y $\nu = j$ se obtiene:

$$E_i^a E_a^j = e_i^a \lambda^{jk} e_{ak} = g_{ik} \lambda^{jk} = \delta_i^j \quad (\text{B.9})$$

esto es λ^{ij} es la inversa de g_{ij} :

$$\lambda^{ij} = g^{ij} \quad (\text{B.10})$$

con lo cual obtenemos:

$$E_a^i = g^{ij} e_{aj} \quad (\text{B.11})$$

E_a^i puede escribirse también en términos de la tetrada como:

$$E_a^i = \frac{-1}{2g} \epsilon^{ijk} \epsilon_{abcd} e_j^b e_k^c \eta^d. \quad (\text{B.12})$$

Por último, de la relación:

$$E_a^\mu E_\mu^b = \delta_a^b \quad (\text{B.13})$$

encontramos

$$E_a^0 E_0^b + E_a^i E_i^b = \delta_a^b \quad (\text{B.14})$$

ó

$$\eta_a \eta^b + E_a^i e_i^b = \delta_a^b \quad (\text{B.15})$$

es decir, el producto de normales se reescribe como:

$$\eta_a \eta^b = \delta_a^b + E_a^i e_i^b \quad (\text{B.16})$$

Apéndice C

El generador de rotaciones.

Mostraremos ahora que el generador de rotaciones J_{ab} no depende de las variables ω_{mn} .

Consideremos el generador de rotaciones:

$$J_{ab} = \epsilon_{abcd} T_{ij}^c e_k^d \epsilon^{ijk} \quad (\text{C.1})$$

ó

$$J_{ab} = 2\epsilon \left[\frac{\partial e_j^c}{\partial x^i} + \omega_i^{ce} e_{ej} \right] e_k^d \epsilon^{ijk} \quad (\text{C.2})$$

Si reemplazamos la ecuación (2.27) en (2.17) obtenemos:

$$J = J_1 + J_2 + J_3, \quad (\text{C.3})$$

donde

$$J_1 = 2\epsilon \frac{\partial e_j^c}{\partial x^i}, \quad (\text{C.4})$$

$$J_2 = \epsilon_{abcd} \Theta_{il}^{ceg} \pi_g^l e_{ej} e_k^d \epsilon^{ijk}, \quad (\text{C.5})$$

y

$$J_3 = 2\epsilon_{abcd} U_i^{(mn)ce} \omega_{mn} e_{ej} e_k^d \epsilon^{ijk}. \quad (\text{C.6})$$

Cuando Θ es reemplazado por su expresión en términos de la tétrada, el término J_2 se separa a su vez en dos subtérminos

$$J_2 = J_{2,1} + J_{2,2} \quad (\text{C.7})$$

con

$$J_{2,1} = -\epsilon_{abcd} \frac{-1}{4\sqrt{g}} e_i^c g_{lj} \eta^g \pi_g^l e_k^d \epsilon^{ijk}, \quad (\text{C.8})$$

y

$$J_{2,2} = 2\epsilon_{abcd} \frac{-1}{4\sqrt{g}} g_{lj} \eta^c e_i^g \pi_g^l e_k^d \epsilon^{ijk}. \quad (\text{C.9})$$

Ahora definamos el momento angular L_{ab} por:

$$L_{ab} = \pi_a^l e_{bl} - \pi_b^l e_{al}, \quad (\text{C.10})$$

de tal forma que multiplicando por η^a y E^{bm} encontramos:

$$E^{bm} \eta^a L_{ab} = g_{nm} \eta^a \pi_a^m. \quad (\text{C.11})$$

Así al reemplazar en (C.8), se obtiene

$$J_{2,1} = -\epsilon_{abcd} \frac{-1}{4\sqrt{g}} e_i^c e_j^g e_k^d \epsilon_{ijk} \eta^f L_{fg}, \quad (\text{C.12})$$

el cual puede escribirse en términos de la normal como

$$J_{2,1} = \frac{1}{4} \epsilon_{abcd} \epsilon^{gcd} \eta_e \eta^f L_{fg}, \quad (\text{C.13})$$

y usando las propiedades del tensor ϵ_{abcd} se obtiene finalmente

$$J_{2,1} = \frac{-1}{2} [\eta_b \eta^f L_{fa} - \eta_a \eta^f L_{fb}]. \quad (\text{C.14})$$

Ahora bien $J_{2,2}$ está dado por:

$$J_{2,2} = 2\epsilon_{abcd} \frac{-1}{4\sqrt{g}} e_i^f \pi_f^l g_{lj} \eta^c e_k^d \epsilon^{ijk}. \quad (\text{C.15})$$

que puede ser escrito como:

$$J_{2,2} = -2[e_{ap} e_{bq} e_{dr} \epsilon_{pqr} \frac{1}{4g} e_i^f \pi_f^l g_{lj} e_k^d] \epsilon^{ijk} \quad (\text{C.16})$$

ó

$$J_{2,2} = -2e_{ap} e_{bq} g_{rk} g_{lj} \epsilon_{pqr} \epsilon^{ijk} \frac{1}{4g} e_i^f \pi_f^l. \quad (\text{C.17})$$

Haciendo uso de la relación

$$\epsilon_k^{pq} \epsilon^{ijk} = g_{kr} \epsilon^{pqr} \epsilon^{ijk} = g(h^{pq} h^{ij} - h^{pi} h^{qj}), \quad (\text{C.18})$$

obtenemos para $J_{2,2}$

$$J_{2,2} = -2e_{ap}e_{bq}g_{lj}g(h^{pi}h^{qj} - h^{pj}h^{qi})\frac{1}{4g}e_i^f\pi_f^l, \quad (\text{C.19})$$

esto es

$$J_{2,2} = \frac{-1}{2}e_{ap}e_{bq}(h^{pi}\delta_j^q - \delta_l^p h^{qi})e_i^f\pi_f^l, \quad (\text{C.20})$$

y puesto que

$$E_a^i = e_{al}h^{li}, \quad (\text{C.21})$$

obtenemos finalmente

$$J_{2,2} = \frac{-1}{2}e_{ap}e_{bq}(E^{fp}\pi_f^q - E^{fq}\pi_f^p) = \frac{-1}{2}e_{ap}e_{bq}E^{f[p}\pi_f^{q]}. \quad (\text{C.22})$$

Ahora de

$$L_{ab} = \pi_a^l e_{bl} - \pi_b^l e_{al}, \quad (\text{C.23})$$

al multiplicar por E^{am} y E^{bn} encontramos haciendo uso de la ortogonalidad de E con e que

$$E^{am}E^{bn}L_{ab} = E^{am}\pi_a^n - E^{bn}\pi_b^m = E^{a[m}\pi_a^{n]}. \quad (\text{C.24})$$

Así $J_{2,2}$ queda expresado como

$$J_{2,2} = \frac{-1}{2}(E^{fp}e_{ap})(E^{gq}e_{bq})L_{fg}. \quad (\text{C.25})$$

Por último de la relación de ortogonalidad de los E_a^i y e_j^b se tiene que:

$$E_a^i e_i^b = \delta_a^b + \eta_a \eta^b, \quad (\text{C.26})$$

por lo tanto

$$J_{2,2} = \frac{-1}{2}(\delta_a^f + \eta^f \eta_a)(\delta_b^g + \eta^g \eta_b)L_{fg}, \quad (\text{C.27})$$

es decir

$$J_{2,2} = -\frac{1}{2}L_{ab} - \frac{1}{2}(L_{ag}\eta^g\eta_b - L_{bg}\eta^g\eta_a). \quad (\text{C.28})$$

Ahora bien $J_{2,1}$ puede ser escrito como:

$$J_{2,1} = \frac{1}{2}(L_{af}\eta^f\eta_b - L_{bf}\eta^f\eta_a), \quad (\text{C.29})$$

de modo que:

$$J_2 = J_{2,1} + J_{2,2} = -\frac{1}{2}L_{ab}. \quad (\text{C.30})$$

Por último encontremos J_3

Al reemplazar la expresión explícita para los vectores nulos:

$$J_3 = 2\epsilon_{abcd}\delta_i^{(m}e_p^c e_q^f e^{pqn)}\omega_{mn}e_{fj}\epsilon_k^d \epsilon^{ijk}, \quad (\text{C.31})$$

que puede reescribirse como

$$J_3 = 2\epsilon_{abcd}\epsilon_p^c \epsilon_k^d \epsilon_j^{(np} \epsilon^{jki)}\omega_{in}. \quad (\text{C.32})$$

Pero

$$\epsilon_j^{(np} \epsilon^{jki)} = \frac{1}{4g}G^{mipk}, \quad (\text{C.33})$$

por lo tanto

$$J_3 = \frac{g}{2}\epsilon_{abcd}\epsilon_p^c \epsilon_k^d G^{mipk}\omega_{in}. \quad (\text{C.34})$$

pero el producto de las tétradas es antisimétrico en (p,k) mientras que la supermétrica es simétrica, luego:

$$J_3 = 0. \quad (\text{C.35})$$

Así, al reemplazar la expansión (2.27) en J_{ab} obtenemos finalmente:

$$J_{ab} = 2\epsilon_{abcd}\frac{\partial e_j^c}{\partial x^i}\epsilon_k^d \epsilon^{ijk} - \frac{1}{2}(\pi_a^l e_{bl} - \pi_b^l e_{al}). \quad (\text{C.36})$$

Se puede mostrar que el generador anterior J_{ab} satisface efectivamente el álgebra del grupo SO(3,1). Si se utiliza el generador

$$J[M] = \int M^{ab}J_{ab}, \quad (\text{C.37})$$

y se evalúa el corchete

$$\{J[M], J[N]\} = \int \frac{\delta J[M]}{\delta e_f^i} \frac{\delta J[N]}{\delta \pi_f^l} - \frac{\delta J[N]}{\delta e_f^i} \frac{\delta J[M]}{\delta \pi_f^l}, \quad (\text{C.38})$$

se obtiene que

$$\{L[M], L[N]\} = L[M \times N], \quad (\text{C.39})$$

donde

$$(M \times N)^{ab} = -(M_f^a N^{fb} - M_f^b N^{fa}). \quad (\text{C.40})$$

Apéndice D

Relación entre T_{ij}^a , J_{ab} y Φ^{mn} .

Si se define

$$T^{ak} = T_{ij}^a \epsilon^{ijk} \quad (\text{D.1})$$

y proyectando T^{ak} de la manera señalada en la sección 2 se tiene que:

$$T^{ai} = \eta^a T^i + \epsilon_j^a T^{ij}, \quad (\text{D.2})$$

al invertir para los coeficientes T^i and T^{ij} se encuentra que:

$$T^i = \eta_a T^{ai} \quad (\text{D.3})$$

y

$$T^{ij} = E_a^i T^{aj} \quad (\text{D.4})$$

Ahora bien, T^k viene dado explícitamente por:

$$T^k = \epsilon^{ijk} \eta_a T_{ij}^a \quad (\text{D.5})$$

al reemplazar la expresión para η en términos de la tétrada encontramos:

$$T^k = J_{ab} \epsilon_i^a \epsilon_j^b \epsilon^{ijk} \quad (\text{D.6})$$

Evaluemos ahora T^{ij} . Para esto consideremos el generador de rotaciones:

$$J_{ab} = \epsilon_{abcd} T_{ij}^c \epsilon_k^d \quad (\text{D.7})$$

multiplicando por ϵ^{fgab} encontramos:

$$\epsilon^{fgab} J_{ab} = \epsilon f g a b \epsilon_{abcd} T_{ij}^c \epsilon_k^d \quad (D.8)$$

$$= -2\delta_{[ab]}^{[fg]} T^{ck} \epsilon_k^d \quad (D.9)$$

esto es:

$$-\frac{1}{2}\epsilon^{fgab} J_{ab} = -2(T^{fk} \epsilon_k^g - T^{gk} \epsilon_k^f) \quad (D.10)$$

si esta última ecuación la multiplicamos por E_f^m y E_g^n obtenemos:

$$-\frac{1}{2}E_f^m E_g^n \epsilon^{fgab} J_{ab} = -2(T^{fk} E_f^m E_g^n \epsilon_k^g - T^{gk} E_f^m E_g^n \epsilon_k^f) \quad (D.11)$$

que se reduce a:

$$-\frac{1}{2}E_f^m E_g^n \epsilon^{fgab} J_{ab} = (T^{fn} E_f^m - T^{gm} E_g^n) \quad (D.12)$$

esto es:

$$-\frac{1}{2}E_f^m E_g^n \epsilon^{fgab} J_{ab} = T^{f[n} E_f^{m]} \quad (D.13)$$

por otro lado el vínculo Φ esta dado por:

$$\Phi^{(mn)} = E_a^{(m} T^{an)} \quad (D.14)$$

Podemos entonces escribir:

$$T^{mn} = E_a^m T^{an} = \frac{1}{2}E_a^{[m} T^{an]} \frac{1}{2}E_a^{(m} T^{an)} \quad (D.15)$$

es decir

$$T^{mn} = \frac{1}{2}\Phi^{(mn)} - \frac{1}{4}E_a^{(m} E_b^n \epsilon^{abcd} J_{cd} \quad (D.16)$$

Por lo tanto podemos escribir finalmente el tensor de Torsión como:

$$T_{ij}^a = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk} T^{ak} \quad (D.17)$$

$$T_{ij}^a = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijm} (\eta^a T^{mm} + e_n^a T^{mn}) \quad (D.18)$$

o explícitamente:

$$T_{ij}^a = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijm} [\eta^a (\epsilon_p^f \epsilon_q^g J_{fg} \epsilon^{pqm}) - e_n^a (\frac{1}{2}\Phi^{mn} + \frac{1}{2}E_f^m E_g^n \epsilon^{fgcd} J_{cd})] \quad (D.19)$$

Apéndice E

Acción de P sobre la tetrada

La variación de la tetrada generada por P_a

$$\delta e_i^a = \{e_i^a, P[N]\} = \frac{\delta P[N]}{\delta \pi_a^i}, \quad (\text{E.1})$$

donde $P[N]$ está dado por

$$P[N] = \int N^a P_a d^3x = \int N^a \epsilon_{abcd} R_{ij}^{bc}(e, \pi) e_k^d \epsilon^{ijk} d^3x. \quad (\text{E.2})$$

Se debe variar esta ecuación respecto a π , para esto variamos primero respecto a la conexión de espín y puesto que

$$\delta R_{ij}^{ab} = D_i \delta \omega_j^{ab} - (i \leftrightarrow j) \quad (\text{E.3})$$

se encuentra

$$\delta P[N] = -2 \int D_i (N^a) \epsilon_{abcd} e_k^d \epsilon^{ijk} \delta \omega_j^{bc} - \int N^a \epsilon_{abcd} T_{ik}^d \epsilon^{ijk} \delta \omega_j^{bc}. \quad (\text{E.4})$$

Recordando que ω_k^{ab} es una función de la tetrada y de su momento conjugado a través de la ecuación (2.118) se encuentra para $\delta \omega$

$$\delta \omega_j^{bc} = \Theta_{jl}^{bce} \delta \pi_\epsilon^l. \quad (\text{E.5})$$

Reemplazando en (E.4) obtenemos el resultado

$$\delta P[N] = -2 \int (D_l (N^\epsilon) + N^a \epsilon_{abcd} T_{mn}^d \epsilon^{kmn} \Theta_{kl}^{bce}) \delta \pi_\epsilon^l. \quad (\text{E.6})$$

Luego

$$\delta e_i^\epsilon = \frac{\delta P[N]}{\delta \pi_\epsilon^l} = -2 D_l (N^\epsilon) + N^a \epsilon_{abcd} T_{mn}^d \epsilon^{kmn} \Theta_{kl}^{bce}. \quad (\text{E.7})$$

Apéndice F

Acción de P sobre el momentum conjugado

Para la variación de π_a^i se tiene

$$\delta\pi_a^i = \{\pi_a^i, P[N]\} = -\frac{\delta P[N]}{\delta e_i^a}. \quad (\text{F.1})$$

Si se varía $P[N]$ respecto a la tétrada se obtiene:

$$\delta P[N] = \int N^a \epsilon_{abcd} R_{ij}^{bc} \delta e_k^d \epsilon^{ijk} - 2 \int D_i(N^a) \epsilon_{abcd} e_k^d \epsilon^{ijk} \delta \omega_j^{bc} - \int N^a \epsilon_{abcd} T_{ik}^d \epsilon^{ijk} \delta \omega_j^{bc}. \quad (\text{F.2})$$

La variación de la conexión de espín respecto a la tétrada se obtiene de la ecuación (2.118)

$$\delta \omega_k^{ab} = \left(\frac{\delta \Theta_{kj}^{abc}}{\delta e_l^d} \delta e_l^d \right) \pi_c^j + \left(\frac{\delta U_k^{(mn)ab}}{\delta e_l^d} \delta e_l^d \right) \omega_{mn}(\epsilon) + U_k^{(mn)ab}(\epsilon) \frac{\delta \omega_{mn}}{\delta e_l^d} \delta e_l^d. \quad (\text{F.3})$$

El segundo término de (F.2) puede ser reescrito como

$$2 \int D_i(N^a) \Omega_{bca}^{ji} \delta \omega_j^{bc}, \quad (\text{F.4})$$

al reemplazar (F.3) en la ecuación anterior, esto da origen a tres términos, el último de los cuales es nulo debido a una contracción de Ω con su vector nulo U . Si se derivan las ecuaciones

$$\Theta_{kj}^{abc} \Omega_{abf}^{kr} = \delta_f^c \delta_j^r, \quad (\text{F.5})$$

y

$$\Omega_{abf}^{kr} U_k^{(mn)ab} = 0, \quad (\text{F.6})$$

respecto a la t etra se encuentran las relaciones

$$\frac{\delta \Theta_{kj}^{abc}}{\delta e_l^d} \Omega_{abf}^{kr} + \Theta_{kj}^{abc} \frac{\delta \Omega_{abf}^{kr}}{\delta e_l^d} = 0, \quad (\text{F.7})$$

$$\frac{\delta \Omega_{abf}^{kr}}{\delta e_l^d} U_k^{(mn)ab} + \Omega_{abf}^{kr} \frac{\delta U_k^{(mn)ab}}{\delta e_l^d} = 0. \quad (\text{F.8})$$

las cuales permiten reescribir los dos términos sobrevivientes de (F.4) como

$$-2 \int D_i(N^a) \frac{\delta \Omega_{bca}^{ji}}{\delta e_l^d} (\Theta_{jk}^{bce} \pi_e^k + U_j^{(mn)bc} \omega_{mn}) \delta e_l^d. \quad (\text{F.9})$$

Puesto que

$$\frac{\delta \Omega_{bca}^{ji}}{\delta e_l^d} = \epsilon_{bcad} \epsilon^{jil} \quad (\text{F.10})$$

encontramos finalmente que (F.4) está dado por

$$-2 \int D_i(N^a) \epsilon_{bcad} \epsilon^{jil} \omega_j^{bc} \delta e_l^d. \quad (\text{F.11})$$

por tanto, $\delta \pi$ queda expresado finalmente como

$$\delta \pi_a^k = 2 \epsilon_{abcd} \epsilon^{imn} \omega_m^{bc} D_n(N^d) - \epsilon_{abcd} R_{mn}^{bc} \epsilon^{imn} N^d + \epsilon_{bcde} \frac{\delta \omega_k^{bc}(\epsilon, \pi)}{\delta e_i^a} N^d T_{mn}^e \epsilon^{kmn}. \quad (\text{F.12})$$

Apéndice G

Acción de los difeomorfismos

Bajo difeomorfismos la tétrada y la conexión de espín transforman de acuerdo a las ecuaciones (2.125) y (2.126). Para evaluar la acción de un difeomorfismo sobre π_c^j se puede despejar π de la ecuación (2.118) dando

$$\pi_c^j = \Omega_{abc}^{kj} \omega_k^{ab} \quad (\text{G.1})$$

variando esta ecuación y usando (2.125) y (2.126) se encuentra

$$\begin{aligned} \delta \pi_c^j &= \epsilon_{abcd} \epsilon^{kjl} \omega_k^{ab} T_{l0}^d \epsilon^0 + \epsilon_{abcd} \epsilon^{kjl} \omega_k^{ab} T_{lm}^d \epsilon^m \\ &- \epsilon_{abcd} \epsilon^{kjl} \omega_k^{ab} D_l (\epsilon^\nu e_\nu^d) + \Omega_{abc}^{kj} R_{k0}^{ab} \epsilon^0 + \Omega_{abc}^{kj} R_{kl}^{ab} \epsilon^l, \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

donde se ha separado la componente temporal de la espacial de parámetro ϵ^a en los términos con torsión y curvatura.

Ahora bien, las ecuaciones de movimiento que provienen de variar la acción (2.69) respecto a la conexión y a la tétrada son respectivamente

$$2\epsilon_{abcd} \epsilon^{ijk} T_{0i}^c e_j^d + \epsilon_{abcd} \epsilon^{ijk} T_{ij}^c e_0^d = 0, \quad (\text{G.3})$$

y

$$\epsilon_{abcd} \epsilon^{ijk} R_{0i}^{bc} e_j^d + \epsilon_{abcd} \epsilon^{ijk} R_{ij}^{bc} e_0^d = 0. \quad (\text{G.4})$$

De estas ecuaciones se puede despejar T_{0i}^c y el producto ΩR de acuerdo a

$$T_{0n}^f = -\frac{1}{2} \Theta_{kn}^{abf} \epsilon_{abcd} \epsilon^{ijk} T_{ij}^c e_0^d, \quad (\text{G.5})$$

y

$$\Omega_{abc}^{kj} R_{k0}^{ab} = -\frac{1}{2} \epsilon_{cabd} \epsilon^{mnj} R_{mn}^{ab} \epsilon_0^d. \quad (\text{G.6})$$

Si reemplazamos estas dos últimas ecuaciones en (G.2) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta \pi_c^j &= \epsilon_{abcd} \epsilon^{kjl} \omega_k^{ab} \Theta_{pl}^{efd} \epsilon_{efgh} \epsilon^{pqr} T_{qr}^g \epsilon_0^h \epsilon^0 \\ &\quad + \epsilon_{abcd} \epsilon^{kjl} \omega_k^{ab} T_{lm}^d \epsilon^m \\ &\quad - \epsilon_{abcd} \epsilon^{kjl} \omega_k^{ab} D_l(\epsilon^\nu \epsilon_\nu^d) \\ &\quad - \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} \epsilon^{mnj} R_{mn}^{ab} (\epsilon_0^d \epsilon^0) + \epsilon_{abcd} \epsilon^{kjl} \epsilon_l^d R_{km}^{ab} \epsilon^m. \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

Necesitamos reescribir el último término de la ecuación anterior. Para esto consideremos la expresión

$$\epsilon_{abcd} R_{[ij}^{bc} \epsilon_k^d] \quad (\text{G.8})$$

donde el paréntesis cuadrado indica antisimetrización en los tres índices. Se cumple entonces que

$$\epsilon_{abcd} R_{[ij}^{bc} \epsilon_k^d] = \epsilon_{ijk} S_a \quad (\text{G.9})$$

multiplicando por ϵ^{ijk} se encuentra que $S_a = P_a$. Si escribimos explícitamente el lado izquierdo de (G.8) obtenemos

$$2\epsilon_{abcd} R_{ij}^{bc} \epsilon_k^d + 2\epsilon_{abcd} R_{ki}^{bc} \epsilon_j^d + 2\epsilon_{abcd} R_{jk}^{bc} \epsilon_i^d = \epsilon_{ijk} P_a. \quad (\text{G.10})$$

Multiplicando la ecuación anterior por ϵ^{imk} se encuentra que

$$\epsilon_{cabd} R_{km}^{ab} \epsilon_l^d \epsilon^{kjl} = -\frac{1}{2} \epsilon_{cabd} R_{lk}^{ab} \epsilon_m^d \epsilon^{kjl} + \frac{1}{2} \delta_m^j P_a. \quad (\text{G.11})$$

de manera que al reemplazar el lado derecho de esta ecuación en el último término de (G.7) se obtiene finalmente la ley de transformación de π bajo difeomorfismos

$$\begin{aligned} \delta \pi_c^j &= \epsilon_{abcd} \epsilon^{kjl} \omega_k^{ab}(e, \pi) \Theta_{pl}^{fgd} \epsilon_{fgeh} \epsilon^{pqr} T_{qr}^g \epsilon_0^h \epsilon^0 \\ &\quad + \epsilon_{abcd} \epsilon^{kjl} \omega_k^{ab}(e, \pi) T_{lm}^d \epsilon^m - \epsilon_{abcd} \epsilon^{kjl} \omega_k^{ab}(e, \pi) D_l(\epsilon^\nu \epsilon_\nu^d) \\ &\quad - \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} \epsilon^{mnj} R_{mn}^{ab} \epsilon_\mu^d \epsilon^\mu + \frac{1}{2} P_c \epsilon^j. \end{aligned} \quad (\text{G.12})$$

Bibliografía

- [1] A. Hanson, T. Regge y C. Teitelboim *Constrained Hamiltonian Systems* Accademia Nazionale dei Lincei, Roma 1976.
- [2] M. Henneaux y C. Teitelboim *Quantization of Gauge Systems* Princeton University Press, 1992
- [3] P.A.M. Dirac *Canad. J. Math.* **2** 129, (1950)
- [4] P.A.M. Dirac *Canad. J. Math.* **3** 1, (1950)
- [5] P.A.M. Dirac *Proc. Roy. Soc.* **A246** 333, (1958)
- [6] P.A.M. Dirac *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York 333, (1958)
- [7] R. Arnowitt, S. Deser y C. Misner *Gravitation: An Introduction to current Research* [L. Witten Eds.], Wiley, New York.
- [8] D. Lovelock *J. Math. Phys.* **12**, 498 (1971).
- [9] C. Teitelboim y Zanelli, *Class. & Quant. Grav.* **4**, L125 (1987).
- [10] C. Teitelboim y Zanelli, *Constraint Theory and Relativistic Dynamics*. Editado por G. Longhi y L. Lusana, (World Scientific, Singapore, 1987)
- [11] T. Eguchi, P.B. Gilkey y A.J. Hanson *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*. **Phys. Rep.** **9C**, 214-389 (1984).
- [12] L. Castellani y P. van Nieuwenhuizen *Phys. Rev.* **D26**, 352 (1982).

- [13] M. Henneaux *Phys. Rev.* **27**, 986, (1983).
- [14] J. M. Charap, M. Henneaux y J. E. Nelson *Class. Quantum Grav.* **5**, 1405, (1988).
- [15] B. S. De Witt *Phys. Rev.*, **160**, 1113, (1967)
- [16] A. Ashtekar *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2244, (1986).
- [17] C. Rovelli *Class. & Quant. Grav.* **8**, 1613, (1991).
- [18] C. Teitelboim y J. Zanelli *Class. & Quant. Grav.* **4**, L125, (1987)