

Anomalías en Teorías de la Gravitación con Torsión

Tesis
Entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en Física

Facultad de Ciencias

por

Oswaldo Mario Chandía Quevedo

Octubre, 1997



Director de Tesis: Dr. Jorge Zanelli I.

**INFORME DE APROBACION
TESIS DE DOCTORADO**

Se informa al Comité del Programa de Doctorado en Ciencias con mención en Física que la Tesis presentada por el candidato

Oswaldo Mario Chandía Quevedo

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito para la obtención del grado de Doctor en Ciencias con mención en Física.

Director de Tesis

Dr. Jorge Zanelli



Comisión Informante de Tesis

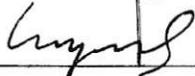
Dr. Ninoslav Bralić



Dr. Nelson Zamorano



Dr. Sergio Hojman (Presidente)



Para
Marcela y Gabriel

AGRADECIMIENTOS

Quisiera expresar mi gratitud y agradecimientos a algunas personas o instituciones que me han guiado, ayudado o acompañado durante la realización de mis estudios.

En primer lugar quiero agradecer a mi familia por el constante apoyo y empuje en especial durante los momentos difíciles. Sobre todo a mi esposa Marcela, a mis padres, a mis hermanos y a mis abuelos.

También quiero agradecer a los profesores de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile por sus enseñanzas y consejos. En especial a los profesores Ricardo Baeza, Rodrigo Ferrer, David Gottlieb, Roberto Hojman, Sergio Hojman, Manuel Pinto y Jaime Roessler. También a los profesores de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile Romualdo Tabensky y Nelson Zamorano.

Mención aparte merece mi tutor Jorge Zanelli. Quiero agradecer no sólo su apoyo como guía sino también innumerables consejos y apoyo de todo tipo.

A mis compañeros de la Facultad de Ciencias David Groisman y Fernando Méndez por su amistad.

A Víctor Muñoz por su ayuda en la construcción de algunas figuras que aparecen en esta tesis y por su disposición en cuanto pregunta le hiciera.

Quisiera agradecer al Centro de Estudios Científicos de Santiago donde esta tesis se llevó a cabo, en especial al profesor Claudio Teitelboim por sus consejos.

También quiero agradecer a Rodrigo Aros, Máximo Bañados, Mauricio Contreras, Andrés Gomberoff, Cristián Martínez y Ricardo Troncoso por discusiones que han sido relevantes para el desarrollo de esta tesis.

Finalmente quiero agradecer a CONICYT por una beca de doctorado.

ABSTRACT

In a spacetime with nonvanishing torsion there can occur topologically stable configurations associated with the frame bundle which are independent of the curvature. The relevant topological invariants are integrals of local scalar densities first discussed by Nieh and Yan (N-Y).

In this thesis we study the role of these invariants in the chiral anomaly for Fermions interacting with the gravitational field. It is shown that the chiral anomaly contains a torsional term besides the usual Pontryagin term from the space curvature.

Moreover, we study field configurations which the torsional topological invariants are quantized. In four dimensions, the N-Y form $N = (T^a \wedge T_a - R_{ab} \wedge e^a \wedge e^b)$ is the only closed 4-form invariant under local Lorentz rotations associated with the torsion of the manifold. The integral of N over a compact D-dimensional (Euclidean) manifold is shown to be a topological invariant related to the Pontryagin classes of $SO(D+1)$ and $SO(D)$. An explicit example of a topologically nontrivial configuration carrying non vanishing instanton number proportional to $\int N$ is constructed. The chiral anomaly in a four-dimensional spacetime with torsion is also shown to contain a contribution proportional to N , besides the usual Pontryagin density related to the spacetime curvature. The violation of chiral symmetry can thus depend on the instanton number of the tangent frame bundle of the manifold. On the other hand, a field configuration on the four dimensional sphere is constructed analogous to the Wu-Yang one's.

The integral of the chiral anomaly is the index for the Dirac operator defined on the space under consideration. Then the violation to the chiral current

conservation via a torsional term implies that the index for the Dirac operator is affected by torsion. We do the explicit computation of the index for the Dirac operator using tools developed in supersymmetry theories context.

RESUMEN

En un espaciotiempo con torsión no nula pueden ocurrir configuraciones topológicamente estables asociadas a la base ortonormal local las que son independientes de la curvatura. Los invariantes topológicos relevantes son integrales de densidades escalares locales discutidas primero por Nieh y Yan (NY).

En esta tesis estudiamos el rol de estos invariantes en la anomalía quirral para un sistema de Fermiones interactuando con el campo gravitacional. Se muestra que esta anomalía contiene un término torsional aparte del de Pontryagin proveniente de la curvatura del espacio.

Además estudiamos configuraciones en que los invariantes topológicos torsionales están cuantizados. Por ejemplo, en cuatro dimensiones, la forma de Nieh-Yan $N = (T^a \wedge T_a - R_{ab} \wedge e^a \wedge e^b)$ es la única 4-forma cerrada invariante bajo rotaciones locales de Lorentz asociada a la torsión de la variedad. Se muestra que la integral de N sobre una variedad compacta (Euclídea) de D dimensiones es un invariante topológico relacionado con las clases de Pontryagin de $SO(D + 1)$ y $SO(D)$. Un ejemplo explícito de una configuración de campos topológicamente no trivial que lleva un número tipo instantón no nulo proporcional a $\int N$ es construido. Se muestra que la anomalía quirral en un espaciotiempo de cuatro dimensiones con torsión no nula contiene una contribución proporcional a N , aparte de la densidad de Pontryagin asociada a la curvatura del espaciotiempo. Así, la violación de la simetría quirral puede depender del número de instantón de la base ortonormal local de la variedad. Por otro lado, sobre la esfera cuadridimensional se construye una configuración del tipo Wu-Yang.

La integral de la anomalía quirral es el índice del operador de Dirac definido

sobre el espacio en consideración. Por lo tanto la violación en la conservación de la corriente quiral vía un término torsional implica que el índice del operador de Dirac se ve afectado por la torsión. Hacemos el cálculo explícito del índice de este operador usando herramientas desarrolladas en el contexto de teorías supesimétricas.

Contenido

Dedicatoria	ii
Agradecimientos	iii
Resumen	iv
1 Introducción	1
2 Anomalía Quiral	7
2.1 Introducción	7
2.2 Método de Fujikawa-acoplamiento a un Potencial de Gauge	8
2.3 Regularización	12
2.4 Acoplamiento a Gravitación	15
2.5 Discusión	18
3 Anomalía Quiral e Invariantes Topológicos	21
3.1 Introducción	21
3.2 Cuantización de la Anomalía e Instantones	25
3.3 Invariantes Topológicos Torsionales	28
3.3.1 Invariante de Nieh-Yan	29
3.3.2 Más dimensiones	31
3.4 Cuantización de la Anomalía Quiral en Gravitación con Torsión	31
3.4.1 Instantón en S^4	31
3.4.2 Instantón en \mathbb{R}^4 y \mathbb{R}^8	32
4 Índice del Operador de Dirac	35
4.1 Introducción-Índice de Witten	35
4.2 Representación de Integral de Camino del Índice de Witten	40
4.3 Lagrangiano Supersimétrico con Torsión	44
4.4 Cálculo del Índice	47
5 Conclusiones	55

A Teorías de Gauge y Gravitación	57
B Matrices de Dirac	67
Bibliografía	69

Capítulo 1

Introducción

La fuerza de gravedad es la más antigua, y a la vez menos comprendida, entre las interacciones fundamentales de la Naturaleza. Desde tiempos inmemoriales el hombre ha estudiado sus efectos, por ejemplo en el movimiento de los planetas y estrellas. Pero no fue sino hasta Newton que se comenzó a situarla en un marco teórico que permitiera su comprensión.

Newton postuló “la acción a distancia” de las interacciones y de aquí dedujo una ley para la interacción gravitacional que permite explicar muchos de los fenómenos gravitatorios que ocurren a nivel del sistema solar, al menos. Sin embargo, no hay una explicación del origen de la interacción que aparece cuando dos o más objetos se sitúan a alguna distancia. Esta interrogante fue despejada por Einstein quien, incluyendo al espaciotiempo como variable a considerar, formuló la Relatividad General. En esta teoría se postula que los cuerpos masivos deforman el espaciotiempo en su entorno, de tal manera que si otro objeto se encuentra en su cercanía “sentirá” la presencia del primero vía la curvatura del espaciotiempo. Esta teoría permite explicar algunos fenómenos tales como la deflexión de la luz por un cuerpo masivo (como el Sol) y la precesión del perihelio de Mercurio [1].

A pesar de la belleza en la formulación de la Relatividad General y sus éxitos experimentales no ha sido posible formular una teoría consistente que incluya al resto de las interacciones fundamentales de la Naturaleza. Este paradigma se ha transformado en el principal problema que han enfrentado los físicos teóricos

durante este siglo. De hecho, el propio Einstein intentó formular una teoría de este estilo usando las ideas de la Relatividad General, fallando en tal empresa [2].

El obstáculo en formular una teoría unificada de las interacciones fundamentales es la imposibilidad de obtener una “teoría cuántica de la gravitación”. Por otro lado, el resto de las interacciones pueden ser formuladas consistentemente como teorías cuánticas. Específicamente, éstas pueden ser formuladas como teorías de gauge o Yang-Mills cuya renormalizabilidad (manejo consistente de infinitos en la teoría cuántica) fue demostrada por 't Hooft [3].

En la formulación de teorías cuánticas de campos la presencia de inconsistencias está relacionada con el quiebre de ciertas simetrías que posee la teoría clásica. Por ejemplo, en el caso de teorías de gauge la simetría de interés es precisamente la simetría de gauge, la teoría cuántica debe respetar esta simetría. La razón de esta exigencia es que la Naturaleza respeta estas simetrías.

No es trivial que una simetría clásica sea respetada a nivel cuántico. Clásicamente un sistema se estudia a través de un funcional de los campos que llamamos acción $S[\phi]$, una simetría clásica es una invariancia que posee la acción. Cuánticamente el objeto de interés es la integral funcional de Feynman

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \quad (1.1)$$

donde $\mathcal{D}\phi$ es la medida de integración de esta integral y se entiende con ella la consideración de todas las configuraciones de campo compatibles con las condiciones de borde. Si bien una simetría clásica deja invariante S , no necesariamente deja invariante la medida de integración $\mathcal{D}\phi$.

Si la teoría cuántica quiebra la simetría de la acción estamos en presencia de una anomalía, esto es si la integral funcional Z no tiene las mismas simetrías que la acción S . Debido a que se suman sobre todas las configuraciones de campo, la anomalía solo puede depender de características globales del sistema. Por ejemplo, del espacio donde se definen los campos. Tales características globales son “invariantes topológicos”, como veremos más adelante.

Puesto que en la teoría cuántica las simetrías de gauge se deben preser-

var, anomalías asociadas a estas simetrías son indeseables. Luego, debemos exigir que potenciales anomalías de gauge se cancelen. Esta cancelación da lugar a fuertes restricciones y sólo algunas teorías las satisfacen. Por ejemplo, en el “modelo standard” las anomalías en las corrientes de gauge para los quarks deben cancelarse con las que provienen de los leptones, esto impone que el número de familias leptónicas y de quarks deben ser iguales [4]. Otra interesante mención a este respecto se encuentra en las “teorías de supercuerdas” en que la cancelación de anomalías del grupo superconforme (asociada a las simetrías de la hoja de mundo de la cuerda) impone el número de dimensiones del espaciotiempo igual a 10 [5].

Las simetrías susceptibles de ser rotas que hemos mencionado hasta ahora son de gauge o locales. También existen anomalías asociadas a transformaciones globales de los campos y su existencia es producto de la cancelación de anomalías de gauge. En el primer cálculo de una anomalía [6], se consideró spinores interactuando con electromagnetismo en cuatro dimensiones. Este sistema tiene simetría bajo transformaciones de gauge $U(1)$ y además transformación quiral sobre los spinores. Haciendo teoría de perturbaciones en la versión cuántica de la teoría, Adler, Bell y Jackiw evaluaron el primer diagrama de Feynman anómalo. Este consiste en acoplar dos corrientes de gauge y una quiral en las patas externas. Requiriendo la conservación de las corrientes eléctricas se obtiene una violación en la corriente quiral $J_5^\mu = \bar{\psi}\Gamma^\mu\Gamma_5\psi$, donde ψ es el spinor y las Γ son matrices de Dirac. La forma explícita en que esta corriente es violada a nivel cuántico, como veremos en el desarrollo de esta tesis, es

$$\langle\partial_\mu J_5^\mu\rangle = \frac{1}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho} \quad (1.2)$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor de Maxwell.

Esto permite explicar el decaimiento del pión neutro π^0 en dos fotones γ [6] como se ilustra en la figura 1.

Este resultado se puede extender a la interacción con un potencial de gauge de un grupo de Lie G , el resultado es simplemente

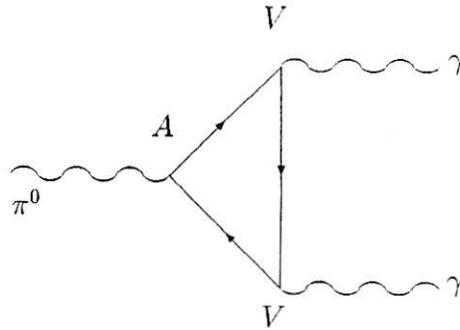


Figura 1.1: Diagrama de Feynman para la evaluación del decaimiento del π^0 . Dos corrientes vectoriales V se acoplan a una axial A , imponiendo la conservación de las corrientes vectoriales la axial es anómala.

$$\langle \partial_\mu J_5^\mu \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \text{Tr} F \wedge F \quad (1.3)$$

donde F es la 2-forma curvatura del grupo de gauge G y la Tr es sobre los índices de grupo de F . Además se elige la normalización $\text{Tr} J_a J_b = \delta_{ab}$ para la traza del producto de dos generadores de G .

Lo notable de esta expresión es que la integral de la anomalía tiene significado topológico, cuenta la manera en que se mapea la esfera en infinito S^3 en el grupo de gauge G . Estos mapeos están clasificados en clases de equivalencia y el conjunto de las clases de equivalencia tiene la estructura de grupo, llamado en este caso, tercer grupo de homotopía de G y denotado por $\pi_3(G)$. Para grupos de Lie compactos es un resultado de topología que este grupo de homotopía corresponde a los números enteros \mathcal{Z} . De tal manera que la integral de la anomalía (1.3) está cuantizada. También se puede realizar la misma discusión en dimensiones $D \neq 4$, siempre será de interés el $(D - 1)$ grupo de homotopía $\pi_{D-1}(G)$ [12].

El mismo análisis puede ser llevado a cabo si en vez de un grupo de gauge interno consideramos la interacción de spinores con la geometría del espaciotiempo [13] [14] [15]. Nuevamente aparece una anomalía asociada a la transformación quirral, que en cuatro dimensiones se lee

$$\langle \partial_\mu J_5^\mu \rangle = \frac{1}{8\pi^2} R^{ab} \wedge R_{ab} \quad (1.4)$$

donde $R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b$ es la 2-forma curvatura y ω es la 1-forma conexión de spin.

De nuevo, la integral de esta anomalía es un invariante topológico. Aquí el grupo de interés es el grupo de rotaciones $SO(4)$ (estamos considerando signatura Euclidea del espacio) cuyo tercer grupo de homotopía es $\mathcal{Z} + \mathcal{Z}$ por lo que la integral de (1.4) depende de dos enteros [12].

Resumiendo este recuento podemos deducir que la anomalía quiral se expresan como funciones de los campos y sus integrales son invariantes topológicos.

Para obtener la anomalía (1.4) se considera nula de partida otra 2-forma independiente de la curvatura, el tensor de torsión $T^a = de^a + \omega^a_b e^b$ donde e^a es la base ortonormal local o vielbein¹. La pregunta que surge de inmediato es si la torsión contribuye a la anomalía quiral. Como ya hemos establecido, si la torsión contribuye entonces debe existir una 4-forma, que se anula en ausencia de torsión, tal que su integral es un invariante topológico. Como veremos más adelante existe una contribución a la anomalía quiral debido a la torsión del espaciotiempo [7].

Otro ingrediente topológico que entra en este juego es el índice del operador de Dirac. El índice de un operador D es la diferencia entre los autoestados de valor propio nulo de D y de D^* , donde D^* es el operador adjunto de D . El “Teorema de Atiyah-Singer” [8] establece que tal diferencia es un invariante topológico y que se puede expresar en términos de una integral de funciones locales. En el caso del operador de Dirac su índice es precisamente la integral de la anomalía quiral.

En esta tesis investigamos el rol de la torsión en la anomalía quiral. En el capítulo 2 calculamos la anomalía quiral para varios sistemas vía un método no perturbativo introducido por Fujikawa. En el capítulo 3 estudiamos invariantes topológicos con especial énfasis a los invariantes asociados a la torsión. En este caso obtenemos explícitamente que estos invariantes corresponden a números enteros (decimos que están cuantizados). El capítulo 4 está dedicado al índice del operador de Dirac, aquí calculamos este índice para el caso de spinores interactuando con

¹En gravitación los objetos fundamentales son la conexión de spin, asociada al transporte paralelo de objetos definidos en el espaciotiempo, y el vielbein, asociado al concepto de distancia entre puntos del espaciotiempo. A partir de aquí podemos construir dos tensores, la curvatura y la torsión. Estos son los requerimientos que exigiremos al espaciotiempo.

el campo gravitacional con torsión. El cálculo usa herramientas de supersimetría. Las conclusiones están contenidas en el capítulo 5. Finalmente en los apéndices se encuentran algunas herramientas básicas que usamos en el desarrollo de la tesis.

Capítulo 2

Anomalía Quiral

2.1 Introducción

El teorema de Noether establece que cada simetría de la acción tiene asociada una ley de conservación. Como vimos en el capítulo 1 una simetría de la acción no significa necesariamente una simetría de la integral de camino, objeto de interés en la formulación cuántica de la teoría. Aparte de la acción, la integral de camino tiene otro ingrediente a considerar, su medida de integración. Precisamente, la no invariancia de la medida es la responsable de la existencia de anomalías. Esta es la observación crucial que permite desarrollar un método, debido a Fujikawa, para calcular anomalías [9].

Para el caso gravitacional no imponemos ninguna restricción a los campos externos, en particular no anulamos desde el comienzo al tensor de torsión. Este caso ha sido estudiado anteriormente usando distintos métodos [10] [17] [46] [18]. En todos estos casos se obtuvo que la torsión no contribuye a la anomalía quiral. Sin embargo, en estos trabajos se impuso una condición sobre los campos gravitacionales que anulan la contribución de la torsión a la anomalía quiral [7] [19], como veremos en el desarrollo de este capítulo.

En este capítulo se usa este método para calcular la anomalía quiral de spinores de Dirac interactuando con campos de gauge y gravitacionales externos.

2.2 Método de Fujikawa–acoplamiento a un Potencial de Gauge

Consideremos un spinor de Dirac sin masa, ψ , interactuando con un campo de Yang-Mills externo, siendo el espaciotiempo plano y de dimensión par [11]. Este sistema está descrito por la acción

$$S = i \int \bar{\psi} \mathcal{D} \psi, \quad (2.1)$$

donde $\bar{\psi} = \gamma^0 \psi$ es el conjugado de Dirac del spinor, $\mathcal{D} = \gamma^\mu D_\mu$ siendo D_μ la derivada covariante en la representación spinorial del grupo de gauge,

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu^a J_a. \quad (2.2)$$

Aquí A_μ^a es el campo de Yang-Mills y J_a son los generadores del grupo de gauge en la representación spinorial. Además, las matrices γ son las usuales matrices de Dirac. Una breve introducción sobre grupos de gauge se presenta en el el apéndice A.

Este sistema tiene dos simetrías una local y otra global. La primera es la simetría de gauge,

$$\begin{aligned} \psi &\longrightarrow g\psi, \\ A_\mu^a &\longrightarrow g^{-1} A_\mu^a g - g^{-1} \partial_\mu g, \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde g es un elemento del grupo G . Desde el teorema de Noether encontramos una carga conservada. Esto se refleja en la conservación de la corriente tipo eléctrica generada por el campo spinorial

$$\partial_\mu J_a^\mu = 0, \quad (2.4)$$

donde $J_a^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu J_a \psi$.

La simetría global es la transformación quirral de ψ . Bajo esta transformación los campos de gauge no se ven afectados. Esta transformación requiere la existencia de la matriz quirral γ_5 que en 4 dimensiones es el producto de las 4 matrices de Dirac. La existencia de la matriz quirral impone que la dimensión del espacio sea par así que solo en estas dimensiones existe la simetría quirral. En dimensiones impares el producto de todas las matrices de Dirac es proporcional a la identidad. Una breve discusión de matrices de Dirac se encuentra en el apéndice B.

La invariancia bajo la transformación quirral

$$\psi \longrightarrow e^{i\varepsilon\gamma_5} \psi, \quad (2.5)$$

da origen a la conservación de la corriente quirral $J_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ via teorema de Noether,

$$\partial_\mu J_5^\mu = 0. \quad (2.6)$$

Para formular la versión cuántica de este sistema nos interesa la integral funcional

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-S[\psi,A_\mu]}. \quad (2.7)$$

La acción S transforma en una derivada total bajo la transformación quirral infinitesimal (2.5)

$$\delta S = \int \varepsilon(\partial_\mu J_5^\mu). \quad (2.8)$$

Por otro lado, necesitamos conocer la manera en que transforma la medida de integración en Z . Para ello suponemos que este sistema está definido en un espacio compacto de modo que el problema de autovalores del operador de Dirac toma la forma

$$\mathcal{D}\psi_n = \lambda_n\psi_n. \quad (2.9)$$

Dado que este operador es hermítico, el conjunto $\{\psi_n\}$ generado por los autoestados de este operador es completo, por lo tanto satisface las relaciones de ortonormalidad y completitud siguientes

$$\begin{aligned}\int \bar{\psi}_n \psi_m &= \delta_{nm}, \\ \sum_n \bar{\psi}_n(x) \psi_n(y) &= \delta(x, y).\end{aligned}\tag{2.10}$$

Estas relaciones permiten expandir los spinores en el espacio de funciones generado por esta base, esto es

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_n \alpha_n \psi_n, \\ \bar{\psi} &= \sum_n \beta_n \bar{\psi}_n,\end{aligned}\tag{2.11}$$

donde α_n y β_n son números de Grassmann.

Definimos la medida de integración como la suma sobre todas las configuraciones de campo permitidas. En términos de la expansión en la base completa esto significa todas las elecciones de coeficientes α_n y β_n , de modo que la medida de integración está definida por

$$\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi = \prod_{n,m} d\alpha_n d\beta_n.\tag{2.12}$$

Veamos cómo transforma (2.12) bajo la transformación quiral. Para ello notamos que tanto el spinor como su transformado pueden ser expresados en la misma base:

$$\psi' = e^{i\varepsilon\gamma_5} \psi = \sum_n \alpha_n e^{i\varepsilon\gamma_5} \psi_n,\tag{2.13}$$

mientras,

$$\psi' = \sum_n \alpha'_n \psi_n.\tag{2.14}$$

Igualando ambas expresiones encontramos la forma en que cambian los α_n ,

$$\alpha'_n = \sum_m C_{nm} \alpha_m,\tag{2.15}$$

donde la matriz de transformación C tiene componentes

$$C_{nm} = \int \psi_n^\dagger e^{i\varepsilon\gamma_5} \psi_m.\tag{2.16}$$

Notemos que los β_n transforman del mismo modo,

$$\beta'_n = \sum_n C_{nm} \beta_m. \quad (2.17)$$

Dado que estas variables son de Grassmann, la transformación en la medida es diferente al caso de variables conmutantes. Para ver esto se necesita definir integrales sobre variables anticonmutantes, esto se hace a través de las integrales de Berezin [36] que para el caso de una variable fermiónica θ son

$$\begin{aligned} \int d\theta &= 0, \\ \int d\theta\theta &= 1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Notemos que esto define completamente las integrales sobre variables de Grassmann ya que toda función es polinomial en estas variables (todo desarrollo es serie de potencias de las funciones es de finitos términos puesto que $\theta = 0$).

Ahora tomemos el cambio de variables $\theta' = \alpha\theta$, donde α es una variable conmutante. Para respetar la definición dada en (2.18)

$$\int d\theta'\theta' = \int d\theta'\alpha\theta = \int d\theta\theta \quad (2.19)$$

se debe cumplir que la medida de integración debe transformar según $d\theta' = \frac{1}{\alpha}d\theta$.

Aplicemos esta observación al caso de la transformación quiral en la medida de integración en (2.7), de (2.15) obtenemos

$$\prod_n d\alpha'_n = (\det C)^{-1} \prod_n d\alpha_n \quad (2.20)$$

y análogamente para β . Por lo tanto la transformación de la medida es

$$\mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi' = (\det C)^{-2}\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi. \quad (2.21)$$

Uniendo las transformaciones de la acción y de la medida de integración y considerando que Z es invariante bajo cambio de nombre de las variables de integración encontramos que la ley de conservación (2.6) es rota a nivel cuántico de la siguiente manera

$$\langle \partial_\mu J_5^\mu \rangle = 2i\mathcal{A}(x), \quad (2.22)$$

donde $\langle X \rangle$ es el valor de expectación de X , en términos de la integral funcional se escribe

$$\langle X \rangle = \frac{1}{Z} \int X e^{-S}, \quad (2.23)$$

y el lado derecho en (2.22) es

$$\mathcal{A}(x) = \sum_n \psi_n^\dagger(x) \gamma_5 \psi_n(x). \quad (2.24)$$

2.3 Regularización

Notemos que la expresión (2.22) es ambigua. De hecho si ponemos los índices spinoriales explícitamente y hacemos uso de la relación de completitud de la base $\{\psi_n\}$ vemos que la anomalía dada en (2.24) es del tipo $\text{Tr} \gamma_5 \delta(x, x) = 0 \times \infty$. Por otro lado, si usamos una representación de la matriz quirral $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y la relación de completitud de la base la expresión (2.24) toma la forma $\infty - \infty$. De esto se desprenden los valores 0 o ∞ , por lo tanto la anomalía debe ser regularizada para obtener un valor no ambiguo.

Parte de la ambigüedad en la anomalía viene del producto de funciones en el mismo punto, lo primero que se hace es separar estos puntos del espacio introduciendo el límite

$$\mathcal{A}(x) = \lim_{y \rightarrow x} \sum_n \psi_n^\dagger(y) \gamma_5 \psi_n(x). \quad (2.25)$$

Luego insertamos el factor regulador $e^{\beta \not{p}^2}$ donde β es un parámetro introducido por dimensiones,

$$\mathcal{A}(x) = \lim_{y \rightarrow x} \sum_n \psi_n^\dagger(y) \gamma_5 e^{\beta \not{p}^2} \psi_n(x) \quad (2.26)$$

Finalmente haciendo explícitos los índices spinoriales y usando la relación de completitud obtenemos

$$\mathcal{A}(x) = \lim_{y \rightarrow x} \text{Tr} \gamma_5 e^{\beta \not{p}^2} \delta(x, y) \quad (2.27)$$

donde la Tr recorre los índices spinoriales y de grupo.

El parámetro β , introducido en la regularización, no debe afectar la expresión final de la anomalía, es decir la anomalía debe ser independiente de este parámetro. Para ver esto, notemos que la integral de la anomalía es el objeto de interés en relación a las cargas conservadas a nivel clásico. Luego consideremos la integral de la expresión (2.26)

$$\begin{aligned}\int \mathcal{A} &= \int \sum_n \psi_n^\dagger(y) \gamma_5 e^{\beta \not{D}^2} \psi_n(x) \\ &= \int \sum_n \psi_n^\dagger(y) \gamma_5 e^{\beta \lambda_n^2} \psi_n(x).\end{aligned}\tag{2.28}$$

Debido a que la matriz quiral γ_5 anticonmuta con el operador de Dirac, a cada autoestado con autovalor $\lambda_n \neq 0$ corresponde un autoestado $\gamma_5 \psi_n$ con autovalor $-\lambda_n$. Sin embargo, para autovalor nulo no se puede afirmar tal propiedad así que si la suma en (2.28) se separa en autovalores cero y los no cero vemos que esta última contribución se anula idénticamente debido a la ortonormalidad entre los autoestados. Por lo tanto, la integral de la anomalía quiral resulta ser

$$\int \mathcal{A} = \nu_+ - \nu_-\tag{2.29}$$

donde ν_+ (ν_-) es el número de autovalor cero con quiralidad positiva (negativa). Esta expresión se denomina “índice” del operador de Dirac en la literatura matemática [12].

Por lo tanto, la integral de la anomalía es independiente del parámetro β . Usualmente la independencia en este parámetro hace que algunos autores, incluyendo al inventor de este método [9], calculen la anomalía en el límite $\beta \rightarrow 0$. Sin embargo, este límite no es necesario y el resultado es de todas maneras independiente del parámetro regulador.

Calculemos ahora la anomalía quiral en el caso en que la dimensión del espaciotiempo es $D = 4$. Para obtener una expresión que sólo dependa explícitamente de los campos de gauge debemos evaluar las trazas que aparecen en (2.27). El cuadrado del operador de Dirac se puede expresar en términos de los campos de gauge y de matrices gamma

$$\not{D}^2 = D^\mu D_\mu + J^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.30)$$

donde $J^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ y $F_{\mu\nu}$ es la curvatura del grupo de gauge (ver apéndice A).

Además la delta de Dirac puede expresarse en su representación integral de la siguiente forma

$$\delta(x, y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot (x-y)}. \quad (2.31)$$

En la expresión para la anomalía hacemos un desarrollo en serie de potencias del factor regulador y usamos la expresión (2.30) para el cuadrado del operador de Dirac.

$$\mathcal{A} = \lim_{y \rightarrow x} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \gamma_5 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m}{m!} (D^\mu D_\mu + J^{\mu\nu} F_{\mu\nu})^m e^{ik \cdot (x-y)}. \quad (2.32)$$

Al calcular término a término esta expresión notamos que los únicos términos no nulos son los proporcionales a $\text{Tr} \gamma_5 J^{\mu\nu} J^{\lambda\rho}$ el resto son nulos debido a traza de matrices gama y a integrales sobre k del tipo $\int d^4 k k_1 \cdots k_{2l-1}$ las que se anulan idénticamente.

De este modo notando que

$$\text{Tr} \gamma_5 J^{\mu\nu} J^{\lambda\rho} = \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \quad (2.33)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} \beta^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-\beta k^2} \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \text{Tr} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde Tr recorre los índices de grupo.

De tal manera la anomalía queda expresada de la manera siguiente

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4\pi^2} \text{Tr} F \wedge F \quad (2.35)$$

donde F es la 2-forma curvatura $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$.

Análogamente para dimensiones pares $D = 2k$ la anomalía quirral queda expresada en la forma

$$\mathcal{A} = \frac{1}{(2\pi)^k} \text{Tr} F^k \quad (2.36)$$

donde F^k es una abreviación para el producto exterior de k 2-formas diferenciales F .

De esta manera se establece la forma en que es rota una ley de conservación clásica a nivel cuántico. Lo notable del resultado es que su integral es un invariante topológico llamado la k -ésima clase de Chern [12], además veremos en los próximos capítulos la conexión entre la anomalía y el índice del operador de Dirac, lo que muestra que la anomalía quiral está íntimamente relacionado con la topología del espacio donde definimos nuestro sistema. Esta relación se establece a través del teorema de Atiyah-Singer [8] que demuestra la equivalencia entre el índice de operadores diferenciales e invariantes topológicos del espacio donde se definen los sistemas. En la próxima sección tomaremos otro tipo de interacción para los spinores, la interacción con el campo gravitacional.

2.4 Acoplamiento a Gravitación

En esta sección usaremos el método de Fujikawa para calcular la anomalía quiral en el caso en que el campo de Dirac está acoplado a la geometría. Supondremos que la geometría del espacio no está sometida a restricción alguna. En particular, supondremos torsión no nula.

El grupo de invariancia que posee el campo gravitacional es el grupo de transformaciones generales de coordenadas, llamado también grupo lineal general $GL(R; d)$ donde R se refiere a que las transformaciones toman valores en los números reales y d es la dimensión del espacio. Debido a que este grupo no tiene representaciones spinoriales no podemos describir la interacción del campo de Dirac con la geometría como lo haríamos con un vector, por ejemplo. Afortunadamente existe el principio de equivalencia, el que establece que localmente es posible anular el efecto de la gravitación. Es decir en cada punto del espaciotiempo podemos elegir un sistema de coordenadas ortonormal, en general tal sistema no puede ser elegida globalmente si el espacio no es un plano. Así, si en cada punto existe un sistema de referencia plano entonces podemos referir en este sistema un campo de Dirac. La

pregunta es cómo incorporamos la interacción con el campo gravitacional. En el caso de la sección anterior lo que hicimos fue usar el acoplamiento minimal reemplazando derivadas parciales por derivadas covariantes en el grupo de interés. En nuestro caso podemos hacer lo mismo considerando que el grupo local de invariancias es simplemente el grupo de rotaciones $SO(D)$ (si la signatura del espacio fuera Minkowskiana el grupo sería el de Lorentz $SO(D-1, 1)$), de tal manera que la derivada covariante es

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_\mu^{ab} J_{ab}, \quad (2.37)$$

donde ω_μ^{ab} es la conexión asociada al campo gravitacional y $J_{ab} = \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b]$ es el generador de rotaciones en la representación spinorial. Aquí hemos reemplazado el símbolo D por ∇ sólo para distinguir el caso gravitacional del caso de la sección anterior.

Hasta ahora hemos usado el principio de equivalencia para introducir la derivada covariante del campo de Dirac. Consideremos ahora la presencia de los infinitos sistemas inerciales locales a través del espacio. La noción de sistema inercial corresponde a la posibilidad de cancelar localmente, esto es en la vecindad de cualquier punto del espaciotiempo, el campo gravitatorio cambiándose a un sistema en caída libre (sistema localmente inercial). Este cambio de sistema de referencia corresponde a un cambio de coordenadas a otro en que la métrica sea la de un sistema inercial: la métrica de Minkowski. Si las coordenadas no inerciales son x^μ y las del sistema inercial son z^a , entonces $dz^a = e^a_\mu dx^\mu$. La matriz e^a_μ se llama sistema de referencia móvil o vielbein (viel significa varios y bein patas en alemán, en el caso de tener un espacio de cuatro dimensiones este campo se denomina vierbein o tetrada) y con esta matriz podemos referir los objetos del sistema local en el sistema de coordenadas y viceversa. Una discusión más extensa en este lenguaje se encuentra en el apéndice A.

La tetrada, y por tanto la torsión, tiene unidades de longitud. Luego si tenemos alguna esperanza que estos campos contribuyen a la anomalía quiral (que depende de invariantes topológicos) deben ser acompañados de un factor que les quite las unidades. Esto se logra si consideramos a la tetrada y a la conexión de spin como partes de la conexión del grupo de de Sitter. En este caso el factor que le quita unidades a la tetrada es el radio del universo l , de modo que los campos relevantes

de la teoría son la conexión de spin ω^{ab} y la tétrada normalizada e^a/l .

La acción de un campo de Dirac interactuando con el campo gravitacional bajo estas condiciones está dado por

$$S = i \int d^D x \bar{e} \bar{\psi} \not{\nabla} \psi + \text{h.c.} \quad (2.38)$$

donde la tétrada \bar{e}^a corresponde a e^a/l , \bar{e} es el determinante de la tétrada y

$$\not{\nabla} \equiv \bar{e}_a^\mu \gamma^a \nabla_\mu. \quad (2.39)$$

Este sistema posee invariancia local de rotaciones, equivalente a la invariancia de gauge en la sección anterior, y simetría quiral. Nuevamente nos preguntamos si es violada y en qué forma la simetría quiral en la formulación cuántica de este sistema. Este problema fue resuelto por métodos perturbativos en [13], [14] y [15]. Suponiendo la torsión nula desde el principio.

Usando el método de la sección anterior (método de Fujikawa [9]) obtenemos que la violación de la ley de conservación de la corriente quiral es de la forma

$$\langle \partial_\mu J_5^\mu \rangle = 2i\mathcal{A}(x), \quad (2.40)$$

donde $J_5^\mu = \bar{e}(x) \bar{e}_a^\mu \bar{\psi} \gamma^a \gamma_5 \psi$ y

$$\mathcal{A}(x) = \sum_n \bar{e}(x) \psi_n^\dagger(x) \gamma_5 \psi_n(x), \quad (2.41)$$

donde la base ortonormal $\{\psi_n\}$ resuelve el problema de autovalores del operador de Dirac hermítico dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \psi_n &= \lambda_n \psi_n, \\ \tilde{\nabla} &= \nabla + \frac{1}{2} \gamma^\mu T_{\mu\lambda}^\lambda \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde $\tilde{\nabla}$ es el operador hermítico en espacios con torsión [23]. Notemos que el término extra en (2.42) puede interpretarse como un acoplamiento $U(1)$ a los spinores. Así que su efecto en la anomalía será simplemente el carácter de Chern para su curvatura.

Nuevamente (2.41) está mal definido y debe ser regularizado. Usando el procedimiento descrito en la sección anterior obtenemos

$$\mathcal{A}(x) = \lim_{y \rightarrow x} \text{Tr} \gamma_5 e^{\mathbb{V}^2} \delta(x, y). \quad (2.43)$$

Respecto al caso de la sección anterior no es necesario acompañar de un factor el regulador pues en las unidades usadas en la acción para este sistema el operador de Dirac es sin unidades.

En espacios curvos la delta de Dirac puede ser representada como una integral en el espacio de momentum

$$\delta(x, y) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik^\mu \nabla_\mu \Sigma(x, y)}, \quad (2.44)$$

donde $\Sigma(x, y)$ es el biescalar geodésico, que se reduce a $\frac{1}{2}(x - y)^2$ si el espacio es plano [16].

El cuadrado del operador de Dirac se descompone de la siguiente manera:

$$\mathbb{V}^2 = \nabla^\mu \nabla_\mu - \tilde{e}_a^\mu \tilde{e}_b^\nu \tilde{e}_c^\lambda J^{ab} \tilde{T}_{\mu\nu}^c \nabla_\lambda + \frac{1}{2} \tilde{e}_a^\mu \tilde{e}_b^\nu J^{ab} J^{cd} R_{cd\mu\nu}, \quad (2.45)$$

donde $\tilde{T}_{\mu\nu}^a$ es el tensor de torsión y $R_{ab\mu\nu}$ es el tensor de curvatura.

Concentrémonos en el caso de cuatro dimensiones. Al igual que en la sección anterior debemos detectar los términos relevantes, i.e. aquellos que no se anulan al tomar las trazas de matrices gamma o al integrar el momentum.

Al hacer esto los únicos términos que no se anulan son los proporcionales a $\text{Tr} \gamma_5 J^2$ y $\text{Tr} \gamma_5 J^4$. Por lo tanto el resultado de la anomalía para el caso gravitacional asumiendo torsión no nula es

$$\mathcal{A} = \frac{1}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} [\tilde{R}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \tilde{R}_{\alpha\beta\lambda\rho} - 4\tilde{R}_{\lambda\rho\mu\nu} + 2\tilde{T}_{\mu\nu}^\alpha \tilde{T}_{\alpha\mu\nu}] \quad (2.46)$$

en términos de la 2-forma curvatura $R^{ab} = \frac{1}{2} R^a{}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ y de la 2-forma torsión $T^a = \frac{1}{2} T^a{}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ y reestableciendo la longitud del universo obtenemos

$$\mathcal{A} = \frac{1}{8\pi^2} [R^{ab} \wedge R_{ab} - \frac{2}{l^2} (R_{ab} \wedge e^a \wedge e^b - T^a \wedge T_a)] \quad (2.47)$$

Notemos que este resultado es equivalente al carácter de Chern del grupo de de Sitter. Así que la violación de la corriente quirral en espacios con torsión es el carácter de Chern del grupo de de Sitter.

2.5 Discusión

La contribución torsional a la anomalía quirral es proporcional a

$$N = T_a \wedge T^a - R_{ab} \wedge e^a \wedge e^b = d(e_a \wedge T^a). \quad (2.48)$$

Si la torsión es cero esperamos que la anomalía se reduzca a la expresión obtenida en las referencias [13] [14] [15] donde la torsión es nula como condición inicial. En tal caso vemos que si $T^a = 0$ el invariante N se anula como se aprecia en (2.48). Por lo que recuperamos el caso conocido.

Como se dijo en la introducción a este capítulo, la anomalía quirral en espacios con torsión había sido estudiada previamente por algunos autores [10] [17] [18] [46]. El resultado obtenido en estos trabajos fue que la torsión no contribuye a la anomalía quirral. Sin embargo, en [17] [46] se supuso una condición extra sobre los campos externos, a saber que el tensor de torsión satisfaga la condición, en términos de formas diferenciales

$$e_a \wedge T^a = 0, \quad (2.49)$$

esto se denomina la condición de “torsión H”. La condición (2.49) equivale a cancelar el término torsional en la anomalía quirral (2.47), en efecto

$$d(e_a \wedge T^a) = T_a \wedge T^a - R_{ab} \wedge e^a \wedge e^b = 0 \quad (2.50)$$

por lo que no existe contradicción entre el resultado mostrado en estos trabajos y el mostrado en esta tesis.

Por otro lado en las referencias [10] y [18], la condición (2.49) no es impuesta. Ellos usaron explícitamente el límite $\beta \rightarrow 0$ y expandieron la anomalía en potencias de β . Al hacer esto aparece un término proporcional a $1/\beta$ que aparece multiplicado por el invariante torsional que encontramos en (2.47). Al tomar el límite, este término es divergente. A pesar de esto, en estas referencias no se preocupan del problema y obtienen como resultado el término que depende sólo de la curvatura en (2.47).

Lo que hemos hecho en la presentación del resultado de este capítulo es considerar a la torsión como parte de la curvatura del grupo de rotaciones del espacio

tangente a la variedad en una dimensión mayor de modo que el resultado es el invariante de este grupo en cuatro dimensiones y no aparecen infinitos.

Como mostramos en este capítulo, la anomalía quirral permite obtener el índice del operador de Dirac definido sobre alguna variedad dada.

Históricamente se ha desestimado la contribución de la torsión al índice del operador de Dirac. El origen de tal aseveración se encuentra en la referencia [24]. La propiedad central que usan estos autores es la imposibilidad de generar invariantes a través de la modificación continua de la conexión de spin

$$\omega'^{ab} = \omega^{ab} + \lambda^{ab} \quad (2.51)$$

donde ω es la conexión que tiene torsión nula y λ es un tensor que permite incluir torsión a la conexión de spin. Debido a que la integral del término que depende sólo de la curvatura en la anomalía quirral, llamado invariante de Pontryagin, es un invariante topológico cualquier transformación continua en la conexión no modifica su valor. En particular, la transformación (2.51) no lo modifica así que la torsión no puede afectar desde este punto el índice del operador de Dirac. Sin embargo, existe otro invariante, independiente de la torsión, que sí modifica la anomalía y, en consecuencia, el índice de este operador en espacios torsionales.

Continuaremos con esta discusión en los siguientes capítulos. En particular, calcularemos explícitamente el índice del operador de Dirac en espacios con torsión en el capítulo 4.

Capítulo 3

Anomalía Quiral e Invariantes Topológicos

3.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos la relación entre anomalías e invariantes topológicos.

Para comenzar debemos decir qué es un invariante topológico. Estos son propiedades que dependen únicamente de la estructura global de una variedad. Un tipo especial de invariantes topológicos son los invariantes bajo deformaciones o de homotopía, i.e., una propiedad que se mantiene sin alteración bajo deformaciones de la variedad.

Por ejemplo, consideremos un triángulo. Una de las propiedades fundamentales de este objeto es que la suma de sus ángulos interiores es siempre igual a π , de modo que si deformamos el triángulo a otro, la suma de los ángulos interiores se preserva. Luego esta cantidad es un invariante topológico para triángulos. Los invariantes topológicos que veremos son análogos a esta propiedad invariante en el triángulo.

Un invariante topológico de gran importancia en geometría es el invariante de Euler. Consideremos polihedros dibujados en el espacio tridimensional. Asociado a cualquier polihedro existe el invariante o característica de Euler que se define como

$$\chi = V - L + C, \tag{3.1}$$

donde V , L y C son el número de vértices, de lados y de caras del polihedro respectivamente.

Calculemos la característica de Euler de un tetrahedro regular. Este posee 4 vértices, 6 lados y 4 caras, de modo que su número de Euler es $\chi = 2$. Para un cubo se tiene: 8 vértices, 12 lados y 6 caras, de modo que su número de Euler es también $\chi = 2$.

Notemos que si cambiamos un polihedro agregando una cara de un polihedro y lo unimos a los K vértices de la cara, entonces ocurren los siguientes cambios: $V \rightarrow V+1$, $L \rightarrow L+K$ y $C \rightarrow C+K-1$. De modo que el número de Euler permanece constante. La siguiente operación tampoco modifica este invariante: cortar una cara no triangular con una diagonal, el número de vértices no se modifica y $L \rightarrow L+1$, $C \rightarrow C+1$ y χ queda siempre igual. Finalmente, todos los polihedros que se pueden inscribir a una esfera tienen la misma característica de Euler.

Realizando muchas operaciones del tipo anterior podemos acercarnos tanto como queramos a una esfera sin cambiar χ , de modo que es posible definir $\chi(\text{esfera}) = 2$. Similarmente, podemos considerar deformaciones de la esfera, sin romperla sólo estirándola o encogiéndola, sin cambiar este número. Por lo tanto la característica de Euler es un invariante de todas las superficies homotópicas a la esfera.

Si a una esfera le hacemos dos orificios y los pegamos de tal manera de obtener un toro, la característica de Euler se modifica (ver figura 3.1). Luego si dos superficies tienen distintas características de Euler, entonces no son deformables una en la otra.

Calculemos la característica de Euler de un toro. Para ello usamos la propiedad de invariancia bajo deformaciones de este número y aplicamos la fórmula (3.1) a un polihedro dibujado sobre un toro. Un polihedro que nos permite obtener χ es el de la figura 3.1, con 16 vértices, 32 lados y 16 caras. Por lo tanto la característica de Euler del toro es $\chi(\text{toro}) = 0$.

La característica de Euler de todas las superficies bidimensionales se pueden obtener de la misma manera, el resultado es

$$\chi = 2(1 - g), \quad (3.2)$$

donde g es el número de agujeros o “genus” de la superficie.

Una notable propiedad de algunos invariantes topológicos es su relación con

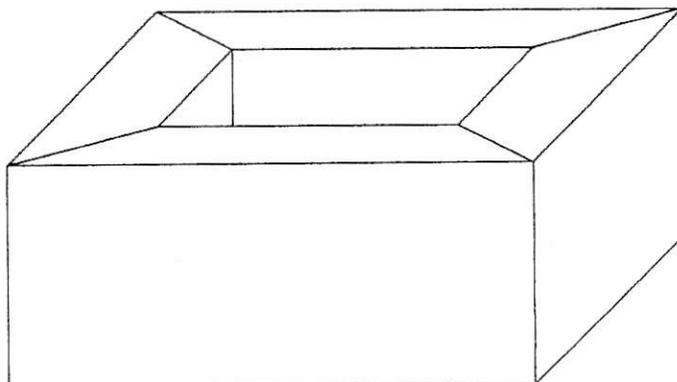


Figura 3.1: El toro puede ser obtenido vía deformaciones de este polihedro

expresiones integrales de funciones locales de la superficie. Este tipo de invariantes son los que tiene interés para la existencia de anomalías en teorías de campos. El invariante de Euler es uno de estos invariantes.

El invariante de Euler se puede escribir en términos de la integral de la curvatura de la superficie en consideración. Este es el famoso teorema de Gauss-Bonnet: una superficie bidimensional compacta y sin borde Σ tiene característica de Euler

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \varepsilon^{ab} R_{ab}, \quad (3.3)$$

donde R^a_b es la 2-forma curvatura.

La expresión (3.3) es la integral de una 2-forma cerrada (su derivada exterior es nula) en virtud de la identidad de Bianchi (ver apéndice A). En general, estaremos interesados en invariantes topológicos de este tipo: una D -forma diferencial cerrada en un espacio de D dimensiones.

Aparte de la variedad en sí, estamos interesados en acoplar grupos de gauge a los campos definidos sobre la variedad. De esta manera, la variedad se puede identificar con el espacio base de un fibrado, donde la fibra corresponde al grupo de gauge definido en cada punto de ella.

Esta variedad así concebida posee más estructura que la anterior. Por lo tanto, es deseable que existan nuevos invariantes asociados al grupo de gauge. Pensemos en el caso bidimensional: Un invariante topológico derivado de un grupo

de gauge Abeliano es

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_2} F, \quad (3.4)$$

donde F es la curvatura del grupo.

Veremos en la próxima sección que (3.4), llamado “winding number”, depende de la relación entre el grupo de gauge y la variedad bidimensional Σ_2 .

Esta relación puede ser extendida a más dimensiones. Por ejemplo en cuatro dimensiones el invariante es el número de Pontryagin

$$I_4 = \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr} \int_{\Sigma_4} F \wedge F, \quad (3.5)$$

también este número relaciona el grupo de gauge con el espacio Σ_4 .



Figure 3.2: Superficies bidimensionales con distinto número de agujeros o genus g .

En ausencia de un grupo de gauge, además del invariante de Euler, se puede construir otro invariante topológico asociado a la geometría de Σ_4 . Este tiene la forma (3.5) y recibe el mismo nombre

$$P_4 = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\Sigma_4} R^{ab} \wedge R_{ab}. \quad (3.6)$$

En más dimensiones aparecen muchas expresiones de este estilo, en geometría diferencial se denominan “clases características” (para mayor precisión ver [12] [20]).

Todas estas clases características determinan el comportamiento de soluciones de ecuaciones diferenciales. Y como todas estas expresiones son invariantes topológicos, la estructura global de la variedad restringe la forma de los campos

locales. Uno de los resultados más importante en topología que relaciona invariantes topológicos y expresiones locales es el “teorema del índice” [8]. Precisamente son propiedades como el índice del operador de Dirac las que determinan la anomalía quirral.

En este capítulo nos concentraremos en invariantes topológicos en teorías de gauge y gravitación. Respecto a estos últimos estudiaremos invariantes topológicos torsionales y construiremos configuraciones de campo con números topológicos torsionales no nulos.

3.2 Cuantización de la Anomalía e Instantones

En esta sección revisaremos la cuantización del “winding number” en un espacio bidimensional y el número de Pontryagin para el grupo $SU(2)$. La referencia básica en esta sección es [21].

Consideremos spinores interactuando con un grupo de gauge Abeliano, a saber tomemos al grupo de rotaciones en el plano complejo $U(1)$.

El potencial de gauge es la 1-forma diferencial

$$A = A_\mu dx^\mu, \quad (3.7)$$

y la curvatura es simplemente su derivada exterior

$$F = dA, \quad (3.8)$$

que en componentes corresponde al tensor de Maxwell

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.9)$$

Es trivial, en el lenguaje de las formas diferenciales, probar la identidad de Bianchi

$$dF = 0, \quad (3.10)$$

pues la operación d es nilpotente.

Debido a la identidad de Bianchi la 2-forma curvatura es localmente la derivada exterior de una 1-forma. Es decir la expresión (3.8) es local. Esto nos indica

que debemos ser cuidadosos al escribir la integral de F . Ingenuamente, haciendo uso del teorema de Stokes

$$\int_{\Sigma} F = \int_{\Sigma} dA = \int_{\partial\Sigma} A, \quad (3.11)$$

que se cancela si nuestra variedad no tiene borde. El error está en poner el signo integral, una operación global, en una expresión local.

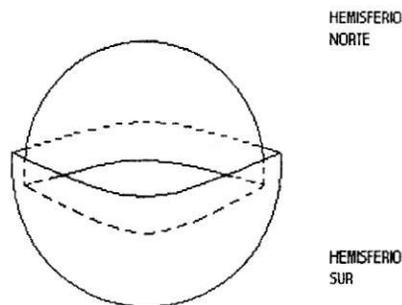


Figure 3.3: La esfera S^2 tiene dos parches de coordenadas que se traslapan en torno al ecuador.

Supongamos que la variedad Σ consta de dos subvariedades tal que en cada una de ellas F es exacta globalmente, es decir $F = dA_1$ y $F = dA_2$ respectivamente en cada vecindad. Para fijar ideas consideremos la esfera bidimensional S^2 , esta superficie no puede ser globalmente descrita por un sistema de coordenadas se necesita al menos dos. Tomemos como dos subvariedades a los hemisferios norte y sur que denotamos por S_+^2 y S_-^2 respectivamente. Los potenciales de gauge son para cada hemisferio A_+ y A_- . Estas regiones se interceptan en el ecuador, que es un círculo S^1 . En la región de traslape los potenciales de gauge deben diferir en una transformación de gauge con el propósito de tener una curvatura bien definida sobre toda la esfera, recordemos que la curvatura es una cantidad invariante bajo el grupo de gauge $U(1)$

$$A_+ = A_- + dX, \quad (3.12)$$

donde dX es una función bien definida en S^1 . Todas las funciones aquí definidas son mapeos que identifican un punto de la esfera con un elemento del grupo $U(1)$, en particular dX toma puntos de S^1 y los lleva al mismo grupo

$$dX : S^1 \longrightarrow U(1), \quad (3.13)$$

para tener una función dX bien definida sobre S^1 se debe cumplir que

$$dX[\phi + 2\pi] = dX[\phi], \quad (3.14)$$

donde hemos elegido la coordenada ϕ tomando valores entre 0 y 2π en el círculo, estando los valores extremos identificados. Como $dX[\phi]$ es un elemento de $U(1)$ este se puede escribir de la forma $e^{i\nu(\phi)}$, siendo $\nu(\phi)$ una función real, por lo tanto la condición (3.14) implica que el exponente puede ser modificado por un término múltiplo entero de 2π y la función ν debe ser periódica en el círculo.

Nosotros queremos calcular el “winding number” sobre la esfera, la construcción anterior nos permite escribir esta cantidad como

$$\int_{S^2} F = \int_{S_+^2} F + \int_{S_-^2} F = \int_{\partial S_+^2} A_+ + \int_{\partial S_-^2} A_-, \quad (3.15)$$

donde en la última igualdad hemos usado el teorema de Stokes. Notemos que $\partial S_+^2 = S^1$ y $\partial S_-^2 = -S^1$ por lo tanto llegamos a

$$\int_{S^2} F = \int_{S^1} dX = \int_{S^1} \frac{dX}{d\phi} d\phi = 2\pi n, \quad (3.16)$$

donde n es un número entero.

En resumen, hemos demostrado que el winding number es un número entero para la esfera

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^2} F = n, \quad (3.17)$$

además este entero cuenta el número de veces que el grupo $U(1)$ da vueltas cuando damos una vuelta en S^1 como se aprecia en (3.13). Otra manera de ver este resultado es que (3.17) refleja el hecho que el grupo de las transformaciones del círculo en

el grupo de gauge están clasificadas por el primer grupo de homotopía de $U(1)$, denotado por $\pi_1(U(1))$ que es igual a los enteros.

Otro punto importante de notar es la invariancia de (3.17) bajo deformaciones del círculo. Esto se muestra notando que una deformación de se expresa de la forma

$$\delta X = \delta\lambda X, \quad (3.18)$$

donde $\delta\lambda$ es una función bien comportada en el círculo. Luego el “winding number” que es proporcional a dX cambia en una derivada total y, por lo tanto, queda inalterado.

Igual análisis puede ser llevado a cabo para grupos no Abelianos. El ejemplo standard es el grupo $SU(2)$ en cuatro dimensiones compactificadas, la esfera de cuatro dimensiones S^4 . La generalización del “winding number” en este caso es el número de Pontryagin

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^4} F \wedge F = n, \quad (3.19)$$

El contacto con grupos de homtopía es el siguiente. El análogo al ecuador de la esfera es un hiperecuador S^3 , por lo que ahora interesan mapeos entre S^3 y el grupo de gauge $SU(2)$. Entonces estamos tratando el tercer grupo de homotopía del grupo, que corresponde a $\mathcal{Z} + \mathcal{Z}$. Configuraciones de campo que son extremos de la acción de Yang-Mills en cuatro dimensiones se denominan “instantones”, para más detalles ver [12].

3.3 Invariantes Topológicos Torsionales

Como vimos en la introducción a este capítulo, el campo gravitacional posee invariantes topológicos asociados como el invariante de Pontryagin. Nosotros estamos interesados en invariantes topológicos que se pueden construir a partir de la torsión. Veremos que el invariante torsional que contribuye a la anomalía quirial calculado en el capítulo anterior, que llamaremos invariante de Nieh-Yan por ser estos autores sus descubridores [22], tiene una interpretación de clases características.

3.3.1 Invariante de Nieh-Yan

En cuatro dimensiones existen dos invariantes topológicos construibles a partir de la 2-forma curvatura, estos son la característica de Euler χ y el número de Pontryagin P_4

$$\chi = \int_{\Sigma_4} \varepsilon^{abcd} R_{ab} \wedge R_{cd}, \quad (3.20)$$

$$P_4 = \int_{\Sigma_4} R^{ab} \wedge R_{ab}. \quad (3.21)$$

Los integrandos de estos invariantes son 4-formas cerradas en virtud de la identidad de Bianchi. Además son localmente exactas debido al lema de Poincaré. Se puede probar, en una construcción análoga a la presentada en la sección anterior, que estas integrales son números enteros.

La última propiedad, fácil de mostrar, es que tanto χ como P_4 son invariantes bajo deformaciones de la conexión de spin. Esta propiedad que es fruto del ser invariantes topológicos llevó por largo tiempo a considerar a la torsión como un objeto incapaz de generar un invariante topológico [24]. En efecto, la manera de incluir torsión en una variedad es deformar la conexión de spin desde una que tiene torsión nula, y como el invariante de Pontryagin, y el de Euler, son insensibles a deformaciones entonces se tiene que la torsión no generaría ningún invariante topológico.

Todo estaría bien si no existiera ninguna 4-forma localmente exacta que se pueda construir a partir de la torsión. Sin embargo, tal objeto existe y fue introducido por Nieh y Yan [22]. Este objeto es precisamente la contribución de la torsión a la anomalía quiral que encontramos en el capítulo anterior. Recordemos la expresión del invariante de Nieh-Yan

$$N = T^a \wedge T_a - R_{ab} \wedge e^a \wedge e^b. \quad (3.22)$$

Esta forma es localmente exacta, en efecto

$$N = d(e_a \wedge T^a), \quad (3.23)$$

además su integral es invariante bajo deformaciones de la conexión y de la tetrada.

Una manera en que queda de manifiesto la naturaleza topológica del invariante de Nieh-Yan y los invariantes similares en dimensiones del espacio mayores, es a través de la inmersión del grupo de Lorentz (grupo local de simetrías para teorías que involucran al campo gravitacional) en el grupo de de Sitter, el grupo de rotaciones en una dimensión mayor $SO(D+1)$. La inmersión se realiza tomando a la conexión de spin $\omega^a{}_b$ y la base ortonormal o vielbein e^a . Por unidades, el vielbein necesita un parámetro l con dimensiones de longitud para que forme parte de una conexión [26]. La conexión del grupo $SO(D+1)$ escrita en términos de la conexión de $SO(D)$ y del vielbein resulta ser [25]

$$W^{AB} = \begin{bmatrix} \omega^{ab} & \frac{1}{l}e^a \\ -\frac{1}{l}e^b & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

La curvatura asociada a esta conexión se escribe en términos de la curvatura en la dimensión menor y la torsión

$$\begin{aligned} F^{AB} &= dW^{AB} + W^{AC} \wedge W^{CB} \\ &= \begin{bmatrix} R^{ab} - \frac{1}{l^2}e^a \wedge e^b & \frac{1}{l}T^a \\ -\frac{1}{l}T^b & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Especialicemos al caso cuadridimensional. El invariante de Pontryagin asociado al grupo de de Sitter se descompone de la siguiente manera

$$F^{AB} \wedge F_{AB} = R^{ab} \wedge R_{ab} + \frac{2}{l^2} [T^a \wedge T_a - R^{ab} \wedge e_a \wedge e_b]. \quad (3.26)$$

de donde concluimos que el invariante de Nieh-Yan es simplemente la diferencia de la clase de Chern de $SO(5)$ y la de $SO(4)$.

La integral del lado izquierdo de (3.26) está cuantizada en virtud que el tercer grupo de homotopía de $SO(5)$ es el conjunto de los números enteros $\pi_3(SO(5)) = \mathcal{Z}$. Por otro lado, la integral del primer término del lado derecho de (3.26) depende de dos enteros debido a que $\pi_3(SO(4)) = \mathcal{Z} + \mathcal{Z}$. De tal manera la integral del invariante de Nieh-Yan es también un número entero.

3.3.2 Más dimensiones

En más dimensiones la inmersión hecha en (3.24) es válida, por lo que podemos construyendo distintos polinomios invariantes con la 2-forma curvatura F [12], obtenemos expresiones invariantes con la curvatura R^a_b y la torsión T^a . Por ejemplo, en $D = 8$ dimensiones el carácter de Chern es proporcional a

$$F^4 = R^4 + \frac{4}{l^2} e_a (R^3)^a_b e^b - \frac{2}{l^4} (e_a R^a_b e^b)^2 - \frac{4}{l^2} T_a (R^2)^a_b T^b + \frac{8}{l^4} (e_a T^a) (e_b R^b_c T^c) + \frac{2}{l^4} (T^a T_b)^2, \quad (3.27)$$

donde el producto exterior \wedge es asumido.

De esta manera generamos todos los invariantes topológicos torsionales en dimensiones mayores [27].

3.4 Cuantización de la Anomalía Quiral en Gravitación con Torsión

En esta sección construiremos configuraciones de campo tipo instantones para los invariantes topológicos asociados a la torsión. En las dos primeras subsecciones analizaremos el caso cuatridimensional, mientras que en la última subsección trataremos una configuración de campos para $D = 8$ dimensiones.

3.4.1 Instantón en S^4

Consideremos la esfera de cuatro dimensiones. Esta variedad puede ser descrita inmersándola en el espacio Euclídeo de cinco dimensiones. Los puntos de \mathbb{R}^5 que satisfacen la ecuación

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 + (x_5)^2 = 1, \quad (3.28)$$

se encuentran sobre S^4 .

Este espacio tiene curvatura constante, es decir existe una relación entre la curvatura y la tétrada dada por

$$R^{ab} = \frac{1}{l^2} e^a \wedge e^b, \quad (3.29)$$

donde l^2 es la curvatura de la 4-esfera.

La densidad de Pontryagin para este espacio se anula idénticamente por lo tanto el carácter de Chern de $SO(5)$ es igual al invariante de Nieh-Yan

$$\int_{S^4} F^{AB} \wedge F_{AB} = \frac{2}{l^2} \int_{S^4} T^a \wedge T_a. \quad (3.30)$$

Con el fin de evaluar el valor del carácter de Chern podemos usar la construcción de Wu-Yang [28]. El carácter de Chern para un grupo es proporcional a la integral de $\text{Tr}F^2$. La construcción de Wu-Yang está en el mismo espíritu de la evaluación del “winding number” que hicimos en la sección 3.2. Consideramos el cubrimiento de S^4 por dos regiones, S^4_+ y S^4_- , que se intersectan en el ecuador de esta hiperesfera. De modo que el carácter de Chern llega a ser

$$\int_{S^4} \text{Tr}F^2 = \int_{\partial S^4_+} \mathcal{N}_+ + \int_{\partial S^4_-} \mathcal{N}_-, \quad (3.31)$$

donde \mathcal{N} es tal que localmente se satisface $\text{Tr}F^2 = d\mathcal{N}$ y se denomina forma de Chern-Simons, los subíndices de \mathcal{N} representan la zona de S^4 donde esta forma toma su valor. Si juntamos los bordes de las regiones S^4_+ y S^4_- obtenemos la tresfera S^3 . Recordemos que las formas de Chern-Simons están relacionadas en S^3 por elementos del grupo de gauge. En nuestro caso el grupo de gauge es $SO(5)$, de modo que la integral (3.31) toma los valores que dicta el tercer grupo de homotopía de $SO(5)$ que son los enteros. Por lo tanto, el invariante de Nieh-Yan está cuantizado en la forma

$$\frac{2}{l^2} \int_{S^4} T^a \wedge T_a = 16\pi^2 n, \quad (3.32)$$

siendo n un entero.

Este procedimiento puede ser repetido en 8 dimensiones tomando en cuenta que $\pi_7(SO(9)) = \mathcal{Z}$.

3.4.2 Instantón en \mathbb{R}^4 y \mathbb{R}^8

Consideremos la situación en que la conexión de spin es nula, de modo que la curvatura se anula idénticamente mientras la torsión no, pues depende de la tétrada. Consideremos a la tétrada aproximándose regularmente a S^3 en infinito. La integral que queremos evaluar está dada por

$$\int_{S^3_\infty} e_a \wedge de^a. \quad (3.33)$$

Esta integral tendrá sentido sólo si podemos definir sobre la S^3 una base global. Esto se puede hacer debido a un teorema clásico en matemáticas, debido a Adams. Este establece que S^1 , S^3 y S^7 son las únicas esferas que admiten una base globalmente definidas sobre ellas [29].

Construyamos las bases de esta esferas. La primera de ellas es el círculo. Denotemos por $z = xdx + ydy$ un punto de S^1 , donde x, y son coordenadas cartesianas. Debemos encontrar un punto perpendicular a z y definido sobre todo el círculo. Para ello notemos que el círculo puede ser representado en el plano complejo donde obtener el punto perpendicular a z equivale rotar en $\pi/2$ el punto z . Luego, el punto perpendicular a z es iz . En coordenadas cartesianas $iz = -ydx + xdy$.

El caso simple de S^1 nos ilustra el procedimiento que usamos en las otras esferas paralelizables [30]. En S^3 usamos los cuaterniones para generar la base ortonormal local. Multiplicamos por las tres bases de los cuaterniones q_1, q_2 y q_3 al elemento que representa un punto en la tres-esfera $q = x + yq_1 + zq_2 + uq_3$. Cada elemento de la base de los cuaterniones es -1 al cuadrado y entre ellos satisfacen el álgebra de las matrices de Pauli, es decir $q_1q_2 = q_3$ y cíclicamente.

De tal manera la base sobre S^3 de radio r es

$$\begin{aligned} e^1 &= \frac{l}{r^2}(ydx - xdy - udz + zdu) \\ e^2 &= \frac{l}{r^2}(-zdx - udy + xdz + ydu) \\ e^3 &= \frac{l}{r^2}(udx - zdy + ydz - xdu). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Evaluamos el invariante de Nieh-Yan en esta configuración y obtenemos

$$\frac{1}{(2\pi l)^2} \int_{S^3_\infty} e_a \wedge de^a = 3. \quad (3.35)$$

El valor 3 viene del hecho que hemos sumado este número de campos independientes en la integral. La manera de generar otro número entero es eligiendo, por ejemplo, una tétrada recorrer distinto número de veces S^3 que los otros elementos de la base. De modo que en general,

$$\frac{1}{(2\pi l)^2} \int_{S_\infty^3} e_a \wedge de^a = n_1 + n_2 + n_3, \quad (3.36)$$

donde n_1 , n_2 y n_3 son enteros.

Vamos al caso de $D = 8$ dimensiones del espacio. Notemos que si ponemos la conexión de spin igual a cero, el único término torsional en el carácter de Chern (3.27) es $T^a \wedge T_a$. Con el fin de obtener un valor para la integral de esta expresión necesitamos una base en la siete-esfera en infinito de \mathfrak{R}^8 . Al igual que en la tres-esfera, necesitamos un conjunto de números que genere esta base. Esto se obtiene usando los octoniones. La base de este conjunto, que denotamos por $\{j_1, \dots, j_7\}$ satisfacen relaciones similares a la de los cuaterniones. Por ejemplo, $j_2 j_5 = j_7$ y cíclicamente. Además cada elemento al cuadrado es -1 . Usando estas propiedades de la base de los octoniones construimos una base global sobre S^7 . El primero es

$$\begin{aligned} e^1 = & -x_2 dx_1 + x_1 dx_2 - x_4 dx^3 + x_3 dx^4 \\ & -x_6 dx^5 + x_5 dx^6 - x_8 dx^7 + x_7 dx^8, \end{aligned} \quad (3.37)$$

Usando la base completa evaluamos la integral de $T^a \wedge T_a$ en infinito y obtenemos

$$\frac{1}{(2\pi l)^4} \int_{S_\infty^7} e_a \wedge de^a \wedge de_b \wedge de^b = 7^2. \quad (3.38)$$

Nuevamente, eligiendo la base que recorra distinto número de veces a la siete-esfera encontramos

$$\frac{1}{(2\pi l)^4} \int_{S_\infty^7} e_a \wedge de^a \wedge de_b \wedge de^b = (n_1 + \dots + n_7)^2, \quad (3.39)$$

donde n_1, \dots, n_7 son enteros.

Capítulo 4

Índice del Operador de Dirac

4.1 Introducción—Índice de Witten

En este capítulo estudiaremos la relación entre invariantes topológicos y soluciones de ecuaciones diferenciales. La relación se establece entre el índice del operador involucrado en la ecuación diferencial y los invariantes topológicos en la forma establecida por el teorema de Atiyah-Singer [8]. En particular, nosotros estamos interesados en el operador de Dirac. En este caso el índice viene dado por

$$\text{ind}\nabla = \nu_+ - \nu_-, \quad (4.1)$$

donde ν_+ (ν_-) es el número de autoestados con valor propio nulo de quiralidad positiva (negativa).

Establezcamos que el lado izquierdo de (2.29) es la integral de la anomalía quiral. Como se mostró en el capítulo 2, la anomalía viene de la no invariancia de la medida en la integral de camino. Recordemos que la anomalía está dada por

$$\mathcal{A}(x) = \sum_n \psi_n^\dagger(x) \Gamma \psi_n(x), \quad (4.2)$$

donde $\psi_n(x)$ son autoestados del operador de Dirac.

Notemos que la ecuación de autovalores del operador de Dirac, que viene dada por

$$\nabla \psi_n(x) = \lambda_n \psi_n(x), \quad (4.3)$$

tiene una importante propiedad. Si el espacio en que está construida la teoría es de dimensión par, entonces podemos definir la matriz quirral $\Gamma = \Gamma^1 \cdots \Gamma^D$, siendo D la dimensión del espacio. La matriz quirral tiene las propiedades

$$\begin{aligned}\Gamma^2 &= 1, \\ \{\Gamma, \Gamma^a\} &= 0.\end{aligned}\tag{4.4}$$

De estas propiedades se desprende que la matriz quirral anticonmuta con el operador de Dirac. Por lo tanto, a un estado ψ_n con valor propio λ_n tiene asociado un estado $\Gamma\psi_n$ con valor propio $-\lambda_n$. Si separamos la expresión regulada de (4.2) en los estados de valor propio nulo y el resto obtenemos

$$\begin{aligned}\int \mathcal{A}(x) &= \int \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \psi_n^\dagger(x) \Gamma e^{\frac{\lambda_n^2}{M^2}} \psi_n(x) \\ &= \int \sum_0 \psi_0^\dagger(x) \Gamma \psi_0(x) \\ &+ \int \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n \neq 0} \psi_n^\dagger(x) \Gamma e^{\frac{\lambda_n^2}{M^2}} \psi_n(x),\end{aligned}\tag{4.5}$$

notemos que debido a que $\Gamma\psi$ es un estado del operador de Dirac distinto a ψ , la relación de ortonormalidad de la base $\{\psi_n\}$ el segundo término de la última expresión se anula término a término. Sólo nos queda

$$\int \mathcal{A}(x) = \int \sum_0 \psi_0^\dagger(x) \Gamma \psi_0(x).\tag{4.6}$$

Por otro lado, la matriz quirral discrimina según su quiralidad a los estados del operador de Dirac. Puesto que $\Gamma^2 = 1$ los estados tienen dos posibles quiralidades $+1$ para la positiva y -1 para la negativa. De esta forma, separamos la suma en (4.6) en autoestados de quiralidad positiva y en negativa

$$\begin{aligned}\int \mathcal{A}(x) &= \int \sum_0 \psi_0^\dagger(x) \Gamma \psi_0(x) + \int \sum_0 \psi_0^\dagger(x) \Gamma \psi_0(x) \\ &= \int \sum_{0^+} \psi_0^\dagger(x) \psi_0(x) - \int \sum_{0^-} \psi_0^\dagger(x) \psi_0(x) \\ &= \nu_+ - \nu_-.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Por lo tanto, la integral de la anomalía corresponde al índice del operador de Dirac.

$$\text{ind}\mathcal{D} = \int \mathcal{A}(x). \quad (4.8)$$

En el caso en que acoplamos la geometría al campo de Dirac, vimos que la anomalía quirál recibe una contribución de la torsión, por lo que el índice del operador de Dirac también se ve afectado por la torsión. En el desarrollo de este capítulo mostraremos que si calculamos explícitamente el índice del operador de Dirac para este caso, entonces la torsión contribuye de una forma compatible con el resultado de la anomalía quirál obtenida en el capítulo 2.

El cálculo del índice será realizado a través de un método desarrollado en el contexto de teorías supersimétricas.

Consideremos un sistema mecánico supersimétrico. Este sistema está descrito por un par de generadores de supersimetría S y S^\dagger que satisfacen la relación de anticonmutación

$$\{S, S^\dagger\} = 2H, \quad (4.9)$$

donde H es Hamiltoniano del sistema. Completa el álgebra las relaciones de conmutación

$$[S, H] = 0, \quad (4.10)$$

$$[S^\dagger, H] = 0, \quad (4.11)$$

lo que indica que el Hamiltoniano es invariante bajo supersimetría.

Por comodidad, tomemos como carga supersimétrica $Q = (S + S^\dagger)/2$, de tal manera que el álgebra queda

$$Q^2 = H, \quad (4.12)$$

$$[Q, H] = 0. \quad (4.13)$$

Dado el problema de autovalores del Hamiltoniano $H\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$, vemos que puesto que Q y H conmutan pueden ser diagonalizados simultáneamente. Por lo que Q otorga un nuevo número cuántico a los estados del Hamiltoniano. Estos nuevos

número los llamamos B (Bosónico) y F (Fermiónico). Q actúa de la siguiente manera sobre los estados del sistema

$$\begin{aligned} Q\psi_\lambda^B &= \sqrt{\lambda}\psi_\lambda^F, \\ Q\psi_\lambda^F &= \sqrt{\lambda}\psi_\lambda^B. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Esto indica que los estados de H con valor propio no nulo están agrupados de a pares, uno Bosónico y otro Fermiónico. Con el fin de definir cantidades invariantes en teorías supersimétricas, Witten introdujo el operador $(-1)^F$ que determina si un estado es Bosónico o Fermiónico [31]

$$\begin{aligned} (-1)^F\psi_\lambda^F &= -\psi_\lambda^F, \\ (-1)^F\psi_\lambda^B &= +\psi_\lambda^B, \end{aligned} \quad (4.15)$$

además $(-1)^F$ anticonmuta con la carga supersimétrica Q .

La cantidad definida por $\text{Tr}(-1)^F$ es conocido como el índice de Witten. Y es una cantidad que depende de la diferencia entre los estados Bosónicos y Fermiónicos con autovalor cero, en efecto esta apropiadamente regularizada

$$\begin{aligned} \text{Tr}(-1)^F e^{-\beta H} &= \sum_{\lambda,B} \psi_\lambda^{B\dagger} (-1)^F e^{-\beta H} \psi_\lambda^B + \sum_{\lambda,F} \psi_\lambda^{F\dagger} (-1)^F e^{-\beta H} \psi_\lambda^F \\ &= \sum_{\lambda=0,B} \psi_\lambda^{B\dagger} (-1)^F \psi_\lambda^B + \sum_{\lambda=0,F} \psi_\lambda^{F\dagger} (-1)^F \psi_\lambda^F \\ &= n_B(\lambda=0) - n_F(\lambda=0), \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde $n_B(\lambda=0)$ ($n_F(\lambda=0)$) es el número de estados Bosónicos (Fermiónicos) con autovalor nulo.

Por otro lado, el índice de Q , corresponde a esta diferencia. Por lo tanto llegamos al resultado

$$\text{ind}Q = \text{Tr}(-1)^F e^{-\beta H}, \quad (4.17)$$

notemos que esta expresión es independiente del parámetro β .

La similitud entre (2.29) y (4.17) descansa en una conexión bien definida. Podemos representar la ecuación de autovalores del operador de Dirac como un

sistema supersimétrico en que \mathbb{V} es la carga Q y el cuadrado del operador de Dirac es el Hamiltoniano. La ecuación de Dirac se obtiene como primera cuantización de un sistema clásico supersimétrico. Como ilustración, consideremos el operador de Dirac libre en un espacio plano \mathbb{R}^2 . Su problema de autovalores se obtiene cuantizando el sistema dado por la acción

$$S = \frac{1}{2} \int \delta_{\mu\nu} [\dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + \psi^\mu \dot{\psi}^\nu], \quad (4.18)$$

donde q^μ son las coordenadas Bosónicas y ψ^μ son las coordenadas Fermiónicas. Note que las coordenadas Fermiónicas son variables anticonmutantes o de Grassmann.

Este sistema es supersimétrico, las transformaciones son

$$\begin{aligned} \delta q^\mu &= \varepsilon \psi^\mu, \\ \delta \psi^\mu &= -\varepsilon \dot{q}^\mu, \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde ε es un número de Grassmann. Esta simetría es generada por la carga

$$Q = \psi^\mu p_\mu, \quad (4.20)$$

donde p_μ es el momentum asociado a las coordenadas Bosónicas.

Notemos que para cuantizar este sistema, debemos encontrar previamente su formulación Hamiltoniana. El problema es que si queremos encontrar el momentum asociados a las variables anticonmutantes, encontramos una identidad y no una ecuación. Un camino para evitar esta inconsistencia es seguir el método de Dirac [32] [33]. Afortunadamente, este sistema es de primer orden en estas coordenadas, esto es, uno puede leer de la acción cuál es la estructura simpléctica (estructura de paréntesis de Poisson). A saber

$$\begin{aligned} \{q^\mu, p_\nu\} &= \delta_\nu^\mu, \\ \{\psi^\mu, \psi^\nu\} &= \delta^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Al cuantizar estos paréntesis, encontramos la relación de conmutación standard para las variable Bosónicas y la relación de anticonmutación entre las variables de Grassmann cuánticas

$$\{\hat{\psi}^\mu, \hat{\psi}^\nu\} = \delta^{\mu\nu}. \quad (4.22)$$

Vemos que esta relación es satisfecha por las matrices de Dirac. Además el momentum \hat{p}_μ es realizado por la derivada parcial ∂_μ . Por lo tanto la carga supersimétrica Q es, salvo una constante multiplicativa

$$Q = \Gamma^\mu \partial_\mu \equiv \not{\partial}. \quad (4.23)$$

Por lo tanto hemos establecido la relación, mediante un ejemplo, entre un sistema supersimétrico y el problema de autovalores del operador de Dirac. Notemos que en la cuantización, el espacio de Hilbert es realizado por los spinores.

4.2 Representación de Integral de Camino del Índice de Witten

En esta sección revisaremos la representación de integral de camino del índice. Esta representación nos permitirá calcular el índice del operador de Dirac acoplado al campo gravitacional y a campos de gauge. Esta representación se denomina “holomórfica” [34] [35].

Aunque nosotros estamos interesados en grados de libertad Fermiónicos, a modo de introducción usaremos grados Bosónicos.

Consideremos el oscilador armónico unidimensional. Este sistema tiene Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2). \quad (4.24)$$

Este sistema se puede resolver introduciendo los operadores de creación y aniquilación, a y a^\dagger respectivamente. Estos operadores satisfacen la relación de conmutación

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (4.25)$$

De esta manera el Hamiltoniano se escribe en términos del operador de número $N = a^\dagger a$ en la forma $H = N + 1/2$.

Queremos encontrar un espacio en que las relaciones de conmutación se realicen de manera simple. Esto lo obtenemos en el espacio de las funciones complejas de una variable $f(z^*)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} a^\dagger f(z^*) &= z^* f(z^*), \\ a f(z^*) &= \frac{d}{dz^*} f(z^*). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Es trivial darse cuenta que esta realización satisface las relaciones de conmutación del sistema.

Ahora necesitamos definir un producto interno en el espacio de las funciones complejas tal que a y a^\dagger sean el operador adjunto uno del otro. Esto se produce con el producto interno siguiente

$$(f_1, f_2) = \int \frac{dz dz^*}{2\pi i} f_1^* f_2 e^{-zz^*}, \quad (4.27)$$

de modo que se cumple $(f_1, a f_2) = (a^\dagger f_1, f_2)$ por lo tanto a y a^\dagger son adjuntos el uno del otro.

Queremos encontrar la forma que toman operadores en esta representación. Notemos que el espacio de las funciones complejas puede ser generado por la base $\{\psi_n(z^*) = z^{*n}/n!\}$. La forma integral de un operador A está definida por

$$A f(z^*) = \int \frac{d\xi d\xi^*}{2\pi i} e^{-\xi\xi^*} A(z^*, \xi) f(\xi), \quad (4.28)$$

donde $A(z^*, z)$ es la expansión del operador A en la base del espacio complejo

$$A(z^*, z) = \sum_{nm} A_{nm} \frac{z^{*n} z^m}{\sqrt{n!m!}}, \quad (4.29)$$

siendo A_{nm} los elementos de matriz del operador en la misma base.

De esta se obtiene que el producto de dos operadores es simplemente

$$A_1 A_2(z^*, z) = \int \frac{d\xi d\xi^*}{2\pi i} e^{-\xi\xi^*} A_1(z^*, \xi) A_2(\xi^*, z). \quad (4.30)$$

Ahora calculemos la traza del operador A en esta representación, esta corresponde a

$$\text{Tr} A = \int \frac{dz dz^*}{2\pi i} e^{-z^*z} A(z^*, z). \quad (4.31)$$

Usando el mismo procedimiento encontramos la Tr de un producto de operadores

$$\begin{aligned} \text{Tr} A_1 \cdots A_n &= \int \frac{d\xi d\xi^*}{2\pi i} \int \prod_{k=1}^{n-1} \frac{d\xi_k d\xi_k^*}{2\pi i} e^{-\xi\xi^* - \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k \xi_k^*} \\ &A_1(\xi^*, \xi_1) A_2(\xi_1^*, \xi_2) \cdots A_n(\xi_{n-1}^*, \xi). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Ya estamos en condiciones de representar $\text{Tre}^{-\beta H}$. Puesto que la exponencial puede ser obtenida como un límite sobre el producto de muchos operadores, a saber

$$e^{-\beta H} = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon H)^N, \quad (4.33)$$

donde $\varepsilon = \beta/N$.

Aplicando sucesivamente la fórmula (4.30) y tomando traza obtenemos

$$\text{Tre}^{-\beta H} = \int \frac{d\xi d\xi^*}{2\pi i} \int \prod_{k=1}^{n-1} \frac{d\xi_k d\xi_k^*}{2\pi i} e^{-\xi\xi^* - \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k \xi_k^*} e^{\Gamma_1}, \quad (4.34)$$

donde

$$\Gamma_1 = \xi^* \xi_1 + \cdots + \xi_{n-1}^* \xi - \varepsilon \left(H(\xi^*, \xi_1) + \cdots + H(\xi_{n-1}^*, \xi) \right). \quad (4.35)$$

Desarrollado las exponenciales llegamos a

$$\text{Tre}^{-\beta H} = \int \frac{d\xi d\xi^*}{2\pi i} \int \prod_{k=1}^{n-1} \frac{d\xi_k d\xi_k^*}{2\pi i} e^{\Gamma_2}, \quad (4.36)$$

donde

$$\Gamma_2 = -\xi^*(\xi - \xi_1) - \xi_1^*(\xi_1 - \xi_2) - \cdots - \xi_{n-1}^*(\xi_{n-1} - \xi) \varepsilon \left(H(\xi^*, \xi_1) + \cdots + H(\xi_{n-1}^*, \xi) \right). \quad (4.37)$$

Tomando el límite $N \rightarrow \infty$ la expresión se transforma en una integral de camino, teniendo en cuenta que el campo $\xi_k \rightarrow \xi(t)$ se convierte en una función continua con las condiciones de borde $\xi(0) = \xi(\beta)$ como se ve en (4.36). Finalmente

$$\text{Tre}^{-\beta H} = \int_{\text{CBP}} \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\xi^* e^{\int_0^\beta \xi^* \frac{d\xi}{dt} - H(\xi^*, \xi)}, \quad (4.38)$$

donde CBP se refiere a “Condiciones de Borde Periódicas”.

Con el fin de obtener una expresión análoga a (4.38) para el índice de Witten, debemos desarrollar el procedimiento anterior para variables Fermiónicas. Es decir, en vez de integrar sobre variables complejas debemos hacerlo sobre variables de Grassmann.

Teniendo en cuenta las reglas básicas de integración sobre variables anti-conmutantes [36]

$$\begin{aligned}\int dz z &= 1, \\ \int dz &= 0,\end{aligned}\tag{4.39}$$

obtenemos, mediante un desarrollo similar al del caso Bosónico,

$$\text{Tr}e^{-\beta H} = \int_{\text{CBA}} \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\xi^* e^{\int_0^\beta \xi^* \frac{d\xi}{dt} - H(\xi^*, \xi)}.\tag{4.40}$$

donde CBA se refiere a “Condiciones de Borde Antiperiódicas”.

Si insertamos el operador $(-1)^F$ en el cálculo de la traza, entonces se tiene el efecto de cambiar las condiciones de borde a periódicas. Por lo tanto, la representación de integral de camino para el índice de Witten resulta ser [37]

$$\text{Tr}(-1)^F e^{-\beta H} = \int_{\text{CBP}} \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\xi^* e^{\int_0^\beta \xi^* \frac{d\xi}{dt} - H(\xi^*, \xi)}.\tag{4.41}$$

Para el operador de Dirac recordemos que Γ cumple el rol de $(-1)^F$ y que el Hamiltoniano es el cuadrado del operador de Dirac. Además en este caso no sólo están presentes campos Fermiónicos sino también Bosónicos, por lo que debemos combinar las expresiones (4.38) y (4.41). Por lo tanto, notando que la integral en la exponencial del lado derecho de (4.41) es una acción para los campos del sistema, obtenemos la expresión para el índice del operador de Dirac

$$\text{ind}\mathcal{D} = \int_{\text{CBP}} \mathcal{D}q^\mu \mathcal{D}\psi^\nu e^{-S[q^\mu, \psi^\nu]},\tag{4.42}$$

donde q^μ y ψ^ν son las coordenadas Bosónicas y Fermiónicas respectivamente, además la acción S es la realización clásica del problema de autovalores del operador de Dirac.

En la próxima sección encontraremos una acción supersimétrica compatible con la inclusión de torsión en el espacio. Usando la acción encontrada, en la sección subsiguiente calcularemos el índice del operador de Dirac a partir de (4.42).

4.3 Lagrangiano Supersimétrico con Torsión

Debemos obtener un Lagrangiano para una superpartícula que sea invariante bajo supesimetría y que, bajo primera cuantización, el generador de la supersimería corresponda al operador de Dirac.

La superpartícula libre fue considerada en la ecuación (4.18), donde observamos que bajo cuantización este sistema corresponde a la ecuación de autovalores del operador de Dirac libre. Si acoplamos gravitación o equivalentemente ponemos el sistema en un espacio curvo, debemos cambiar la acción para tener un sistema invariante bajo transformaciones generales de coordenadas. La manera de acoplar la geometría sigue los mismos principios del acoplamiento minimal de un grupo de gauge. Explícitamente, sean los índices locales a, b, \dots referidos a un sistema local de referencia y los índices de mundo μ, ν, \dots a un sistema general de coordenadas. El término de las coordenadas Bosónicas tiene la modificación de reemplazar la métrica plana en la métrica del espacio curvo. Mayor atención requiere el término Fermiónico. Refirámonos a estos objetos en un sistema ortonormal local, debemos reemplazar derivadas por aquellas covariantes, luego el término con derivada temporal en la coordenada Fermiónica debe ser reemplazada por una derivada temporal a lo largo de una derivada covariante, es decir

$$\dot{\psi}^a = \dot{q}^\lambda \frac{\partial \psi^a}{\partial q^\lambda} \rightarrow \dot{q}^\lambda \left(\frac{\partial \psi^a}{\partial q^\lambda} + \omega^a{}_{b\lambda} \dot{q}^b \right), \quad (4.43)$$

donde $\omega^a{}_{b\lambda}$ es la conexión de spin del campo gravitacional.

Por lo tanto la generalización natural del Lagrangiano (4.18) es

$$L = \frac{1}{2} \left[g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + i\eta_{ab} \left(\psi^a \dot{\psi}^b + \dot{q}^\lambda \omega^b{}_{c\lambda} \psi^c \right) \right]. \quad (4.44)$$

El sistema descrito por este Lagrangiano tiene la simetría (4.19) y luego es supersimétrico. Sin embargo, esta afirmación es válida sólo si la torsión es impuesta

igual a cero. Debemos modificar la acción de (4.44) con el propósito de considerar efectos sobre el índice del operador de Dirac que vienen de la torsión.

A pesar de este inconveniente, cuanticemos este sistema a modo de ilustración [38]. Este sistema posee el mismo problema con las variables anticonmutantes, hay vínculos al hacer el formalismo Hamiltoniano canónico. Resolvemos el problema usando el método de Dirac o notando que la acción es de primer orden en estas variables por lo que el paréntesis de Poisson se lee de la acción. Siendo p_μ el momento canónico conjugado de la coordenada q^μ , la estructura de paréntesis de Poisson resulta ser

$$\begin{aligned}\{q^\mu, p_\nu\} &= \delta_\nu^\mu, \\ \{\psi^a, \psi^b\} &= \eta^{ab}.\end{aligned}\tag{4.45}$$

La supersimetría de este sistema se refleja en su generador

$$Q = e_{a\mu}\psi^a\dot{q}^\mu.\tag{4.46}$$

Cuantización canónica consiste en reemplazar funciones de las variables clásicas en operadores que actúan en un espacio abstracto llamado espacio de Hilbert. Además preservando la estructura simpléctica aunque en nuevos tipos de paréntesis. Para variables Bosónicas el paréntesis de Poisson se reemplaza por un conmutador y para las Fermiónicas por un anticonmutador. Incluyendo la constante \hbar obtenemos

$$\begin{aligned}[\hat{q}^\mu, \hat{p}_\nu] &= i\hbar\delta_\nu^\mu, \\ \{\hat{\psi}^a, \hat{\psi}^b\} &= i\hbar\eta^{ab}.\end{aligned}\tag{4.47}$$

En el espacio de las funciones spinoriales, como el campo de Dirac, estas relaciones son representadas por los operadores

$$\begin{aligned}\hat{q}^\mu &= q^\mu, \\ \hat{p}_\nu &= i\hbar\partial_\nu, \\ \hat{\psi}^a &= \sqrt{i\hbar/2}\Gamma^a\end{aligned}\tag{4.48}$$

donde Γ^a es una matriz de Dirac.

Del Lagrangiano obtenemos que la relación entre el momentum y las velocidades es

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu} = g_{\mu\nu} \dot{q}^\nu + \frac{i}{2} \omega_{ab\mu} \psi^a \psi^b, \quad (4.49)$$

luego usando esto en la carga supersimétrica (4.46) y cuantizando con(4.48)

$$Q = e_a^\mu \Gamma^a \left(\partial_\mu + \frac{1}{2} \omega^{ab}{}_\mu J_{ab} \right) = \mathbb{V}. \quad (4.50)$$

El Lagrangiano que buscamos debe poseer una supersimetría tal que su generador corresponda al operador de Dirac en primera cuantización. Además que en el límite de torsión nula recuperemos la expresión (4.44).

El Hamiltoniano clásico corresponde al cuadrado del operador de Dirac en la teoría cuántica. De modo que obtendremos la acción del sistema “descuantizando”. Por “descuantizar” entendemos como la acción de tomar el límite $\hbar \rightarrow 0$. El cuadrado del operador de Dirac está dado por

$$\mathbb{V}^2 = \nabla^\mu \nabla_\mu - e_a^\mu e_b^\nu e_c^\lambda J^{ab} T_{\mu\nu}^c \nabla_\lambda + \frac{1}{2} e_a^\mu e_b^\nu J^{ab} J^{cd} R_{cd\mu\nu}, \quad (4.51)$$

donde $J_{ab} = \frac{1}{4} [\gamma_a, \gamma_b]$ es el generador de $SO(D)$ en la representación spinorial.

Esta expresión la identificamos con el Hamiltoniano cuántico \hat{H} de la teoría clásica que estamos buscando, salvo una constante multiplicativa. En efecto pongamos

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \mathbb{V}^2. \quad (4.52)$$

Además mantenemos la estructura simpléctica (4.47) pues estamos considerando las mismas variables que en el caso anterior.

Tomando el límite $\hbar \rightarrow 0$ y despejando el momentum de la ecuación de Hamilton

$$\dot{q}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}, \quad (4.53)$$

obtenemos el Lagrangiano

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2} \left[g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + i\eta_{ab} \left(\psi^a \dot{\psi}^b + \dot{q}^\lambda \omega^b{}_{c\lambda} \psi^c \right) \right] \\
& - \frac{i}{2} g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu T^\nu{}_{\lambda\rho} \psi^\lambda \psi^\rho - \frac{1}{8} \left(g_{\alpha\beta} T^\alpha{}_{\mu\nu} T^\beta{}_{\lambda\rho} - 2R_{\mu\nu\lambda\rho} \right) \psi^\mu \psi^\nu \psi^\lambda \psi^\rho. \quad (4.54)
\end{aligned}$$

Por otro lado “descuantizando” el operador de Dirac obtenemos el generador de supersimetría

$$Q = g_{\mu\nu} \left(\psi^\mu \dot{q}^\nu - \frac{i}{2} T^\mu{}_{\lambda\rho} \psi^\nu \psi^\lambda \psi^\rho \right), \quad (4.55)$$

de donde podemos encontrar la manera en que transforman las coordenadas

$$\begin{aligned}
\delta q^\mu &= \{q^\mu, \varepsilon Q\} = \varepsilon \psi^\mu, \\
\delta \psi^\mu &= \{\psi^\mu, \varepsilon Q\} = -\varepsilon \dot{q}^\mu,
\end{aligned} \quad (4.56)$$

que son las mismas transformaciones del caso sin torsión y para la superpartícula libre.

Se puede probar que estas transformaciones dejan invariante la acción dada por (4.54) salvo un término de borde (que es la carga Q) que se anula considerando condiciones de borde periódicas.

Finalmente hemos encontrado el Lagrangiano necesario para calcular el índice del operador de Dirac definido en un espacio curvo donde la torsión se asume no nula. En la próxima sección calcularemos la expresión

$$\text{ind} \mathcal{V} = \int_{\text{CBP}} \mathcal{D}q^\mu \mathcal{D}\psi^\nu e^{-\int_0^\beta dt L(q^\mu, \psi^\nu, \omega^a{}_{b\mu}, e^a{}_\mu)}, \quad (4.57)$$

usando el Lagrangiano (4.54).

4.4 Cálculo del Índice

El propósito de esta sección es calcular la integral de camino que aparece en (4.57) [39]. Notemos que este cálculo constituye una demostración del Teorema de Atiyah-Singer. Esto se ha calculado previamente en el caso sin torsión y acoplado campos de Yang-Mills [41] [40] [42] [43] [44] [45].

Previo a esto consideremos un caso más simple donde las integraciones sobre variables Fermiónicas y Bosónicas sirven de guía para el caso que nos interesa.

Sea la integral de camino

$$Z = \int_{\text{CBP}} \mathcal{D}q^\mu \mathcal{D}\psi^\nu e^{-\int_0^\beta dt \frac{1}{2} [\delta_{\mu\nu} (\dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + \psi^\mu \dot{\psi}^\nu) + \omega_{\mu\nu} \psi^\mu \dot{\psi}^\nu]}, \quad (4.58)$$

donde ω es una matriz antisimétrica.

Las condiciones de borde periódicas nos permiten expandir las coordenadas en la base generada por las funciones $e^{\frac{2i\pi}{\beta} nt}$ donde n es un número entero. De modo que

$$\begin{aligned} q^\mu(t) &= \sum_n q_n^\mu e^{\frac{2i\pi}{\beta} nt}, \\ \psi^\mu(t) &= \sum_n \psi_n^\mu e^{\frac{2i\pi}{\beta} nt}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

donde q_n^μ es un número real y ψ_n^μ es anticonmutante.

Notemos que el resultado del índice es independiente del parámetro β . Luego, al final tomaremos el límite $\beta \rightarrow 0$. En este espíritu, la matriz ω sólo interesa su parte constante de su desarrollo de Fourier (modo cero), luego supongamos que esta matriz es constante.

Debemos definir la medida de integración. Esta es todas las configuraciones de campo compatibles con las condiciones de borde del problema. En nuestro caso esto equivale a todas las elecciones en las constantes de la expansión (4.59). Por otro lado, debido a que los campos son reales, no deben considerarse en la medida de integración los complejos conjugados de los coeficientes de la expansión. Por lo tanto la medida es

$$\mathcal{D}q^\mu \mathcal{D}\psi^\nu = dq_0 d\psi_0 \prod_{n=1}^{\infty} d\psi_n d\psi_{-n} dq_n dq_{-n}, \quad (4.60)$$

donde, por ejemplo, dq_n es una abreviación para $dq_n^1 \dots dq_n^D$ siendo D la dimensión del espacio.

La expansión en modos de Fourier también permite hacer las integrales que aparecen en el exponente en Z . Tras esto y hacer un reescalamiento en las coordenadas q y los modos cero de ψ ($q \rightarrow \sqrt{\beta} q$ y $\psi_0 \rightarrow 1/\sqrt{\beta} \psi_0$) [40] obtenemos

$$Z = \int dq_0 d\psi_0 \prod_{n=1}^{\infty} d\psi_n d\psi_{-n} dq_n dq_{-n} e^{-\Omega}, \quad (4.61)$$

donde Ω está dado por

$$\Omega = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \psi_0^\mu \psi_0^\nu + \sum_{n=1}^{\infty} 4\pi^2 \delta_{\mu\nu} q_n^\mu q_{-n}^\nu - (2i\pi n \delta_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu}) \psi_n^\mu \psi_{-n}^\nu. \quad (4.62)$$

Notemos que la suma puede ser absorbida en el producto infinito, luego debemos hacer tres tipo de integrales

$$\begin{aligned} Z_1 &= \int dq_n dq_{-n} e^{-4\pi^2 \delta_{\mu\nu} q_n^\mu q_{-n}^\nu}, \\ Z_2 &= \int d\psi_0 e^{-\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \psi_0^\mu \psi_0^\nu}, \\ Z_3 &= \int d\psi_n d\psi_{-n} e^{(2i\pi n \delta_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu}) \psi_n^\mu \psi_{-n}^\nu}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

La integral Z_1 no es Gaussiana, pero puede llevarse a una de este tipo vía el cambio de variable

$$\begin{aligned} q_n^\mu &= \frac{1}{2} (\alpha_n^\mu - i\beta_n^\mu), \\ q_{-n}^\mu &= \frac{1}{2} (\alpha_n^\mu + i\beta_n^\mu), \end{aligned} \quad (4.64)$$

se obtiene $2D$ integrales Gaussianas. En todo caso el resultado de la integración es un factor de normalización.

Miremos ahora Z_2 . Puesto que estamos integrando variables de Grassmann, casi todos los términos del desarrollo en serie de potencias de la exponencial se anulan, ya sea porque se eleva al cuadrado una variable anticonmutante o porque se integra un término que no depende en una o más variables. Sólo un término de la expansión permanecerá tras la integración y éste es aquel que tiene iguala número de variables que número de variables de integración. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Z_2 &= \int d\psi_0^1 \cdots d\psi_0^D e^{-\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \psi_0^\mu \psi_0^\nu} \\ &= \frac{1}{(D/2)!} \left(\frac{-1}{2}\right)^{D/2} \int d\psi_0^1 \cdots d\psi_0^D \omega_{\mu_1 \mu_2} \cdots \omega_{\mu_{D-1} \mu_D} \psi_0^{\mu_1} \cdots \psi_0^{\mu_D} \\ &= \frac{1}{(D/2)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{D/2} \varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_D} \omega_{\mu_1 \mu_2} \cdots \omega_{\mu_{D-1} \mu_D}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

hemos supuesto que la dimensión del espacio es par, en caso contrario la integración es nula.

Pasemos a Z_3 . Puesto que hay variables de Grassmann involucradas, las integraciones las hacemos de la misma forma que el caso anterior, llamemos $\sigma_{\mu\nu} = 2i\pi n\delta_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
Z_3 &= \int d\psi_n^1 \cdots d\psi_n^D d\psi_{-n}^1 \cdots d\psi_{-n}^D e^{\sigma_{\mu\nu} \psi_n^\mu \psi_{-n}^\nu} \\
&= \frac{1}{D!} \int d\psi_n^1 \cdots d\psi_n^D d\psi_{-n}^1 \cdots d\psi_{-n}^D \sigma_{\mu_1 \nu_1} \cdots \sigma_{\mu_D \nu_D} \psi_n^{\mu_1} \psi_{-n}^{\nu_1} \cdots \psi_n^{\mu_D} \psi_{-n}^{\nu_D} \\
&= \frac{1}{D!} \varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_D} \varepsilon^{\nu_1 \cdots \nu_D} \sigma_{\mu_1 \nu_1} \cdots \sigma_{\mu_D \nu_D} \\
&= \det \sigma.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Al unir los tres resultados en Z vemos que aparece un producto infinito que es necesario calcular. Hasta ahora, modulo normalización

$$\begin{aligned}
Z &= \int dq_0 \frac{1}{(D/2)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{D/2} \varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_D} \omega_{\mu_1 \mu_2} \cdots \omega_{\mu_{D-1} \mu_D} \\
&\quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^D \det \sigma.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

El producto infinito que nos interesa es de la forma

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right), \tag{4.68}$$

que tiene la expresión [40]

$$f(z) = \frac{z}{\sin z}. \tag{4.69}$$

Finalmente llegamos a la expresión final par Z , definimos la 2-forma diferencial $\omega = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} dq_0^\mu \wedge dq_0^\nu$

$$Z = \int \omega^{D/2} \det f(\omega_{\mu\nu}/2\pi i). \tag{4.70}$$

Pasemos a calcular el índice del operador de Dirac vía la fórmula (4.57). Seguimos el procedimiento que acabamos de describir, es decir: hacemos expansión de los campos en modos de Fourier (4.59), luego hacemos el reescalamiento de las

coordenadas Bosónicas y del modo cero de las Fermiónicas. En este caso debemos hacer un reescalamiento extra, esto se obtiene de notar que la integración del término que depende de potencias cuárticas en las variables anticonmutantes después del reescalamiento usual no elimina la dependencia en el parámetro β . Esto se logra haciendo un reescalamiento en el vielbein, similar al que hicimos en el capítulo 2 con el fin de obtener un resultado finito de la anomalía quiral. En resumen los reescalamientos necesarios son

$$\begin{aligned} q^\mu &\rightarrow \sqrt{\beta} q^\mu, \\ \psi_0^\mu &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\beta}} \psi_0^\mu, \\ e^a{}_\mu &\rightarrow \frac{\sqrt{\beta}}{l} e^a{}_\mu. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Todos los campos que son funciones de las coordenadas, suponemos que dependen de las configuraciones constantes de las coordenadas, es decir son campos constantes.

Además usamos coordenadas Bosónicas normales, en que la conexión de spin se anula mas no sus derivadas. Este procedimiento es igual al caso sin torsión puesto que este campo no afecta las geodésicas Bosónicas necesarias para definir las coordenadas normales [46]. De modo que el término dependiente de la conexión de spin en el Lagrangiano (4.54) resulta ser igual

$$\omega_{ab\mu} \dot{q}^\mu \psi^a \psi^b = \frac{1}{2} R_{ab\lambda\rho} \psi^a \psi^b q^\lambda \dot{q}^\rho. \quad (4.72)$$

Así que usando estas coordenadas el Lagrangiano resulta ser

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} (\dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + \psi^\mu \dot{\psi}^\nu) - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \dot{q}^\mu T^\nu{}_{\lambda\rho} \psi^\lambda \psi^\rho \\ &+ \frac{1}{4} R_{\mu\nu\lambda\rho} \psi^\mu \psi^\nu q^\lambda \dot{q}^\rho + \frac{1}{8} (\delta_{\alpha\beta} T^\alpha{}_{\mu\nu} T^\beta{}_{\lambda\rho} - 2R_{\mu\nu\lambda\rho}) \psi^\mu \psi^\nu \psi^\lambda \psi^\rho \end{aligned} \quad (4.73)$$

Usamos las mismas técnicas empleadas en el ejemplo anterior, obtenemos integrando en el tiempo

$$\text{ind}\mathcal{V} = \int dq_0 d\psi_0 \prod_{n=1}^{\infty} d\psi_n d\psi_{-n} dq_n dq_{-n} e^{-\Omega}, \quad (4.74)$$

$$\text{ind}\mathcal{V} = \int dq_0 d\psi_0 \mathcal{N} e^{-\frac{1}{8}(\delta_{\alpha\beta} T^\alpha{}_{\mu\nu} T^\beta{}_{\lambda\rho} - 2R_{\mu\nu\lambda\rho}) \psi_0^\mu \psi_0^\nu \psi_0^\lambda \psi_0^\rho} \prod_{n=1}^{D/2} \frac{R_n}{\sinh R_n}, \quad (4.86)$$

donde \mathcal{N} es una constante de normalización.

Cabe decir que en (4.86) sólo aparecerán D -formas diferenciales.

Especialicemos al caso de $D = 4$ dimensiones del espacio, en este caso recordando la expansión en serie de potencia de la función que aparece en el producto

$$\frac{R_n}{\sinh R_n} = 1 + \frac{1}{2} (R_n)^2 + \frac{7}{360} (R_n)^4 + \dots \quad (4.87)$$

Veamos la expansión del integrando en (4.86)

$$\left[1 - \frac{1}{8} (\delta_{\alpha\beta} T^\alpha{}_{\mu\nu} T^\beta{}_{\lambda\rho} - 2R_{\mu\nu\lambda\rho}) \psi_0^\mu \psi_0^\nu \psi_0^\lambda \psi_0^\rho \right] \left[1 + \frac{1}{2} (R_1)^2 \right] \left[1 + \frac{1}{2} (R_2)^2 \right], \quad (4.88)$$

considerando la integración en la variable de Grassmann, sólo contribuyen a la integral

$$\frac{1}{2} (R_1^2 + R_2^2) - \frac{1}{8} (\delta_{\alpha\beta} T^\alpha{}_{\mu\nu} T^\beta{}_{\lambda\rho} - 2R_{\mu\nu\lambda\rho}) \psi_0^\mu \psi_0^\nu \psi_0^\lambda \psi_0^\rho. \quad (4.89)$$

Los dos primeros términos se juntan para originar el término de Pontryagin. Notemos que la integración en $d\psi_0$ entrega un símbolo de Levi-Civita que junto a dq forman el elemento de volumen $dq^{\mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_D}$. Finalmente llegamos a la expresión del índice en $D = 4$

$$\text{ind}\mathcal{V} = \mathcal{N} \int R^{ab} \wedge R_{ab} + \frac{2}{l^2} (T^a \wedge T_a - R_{ab} \wedge e^a \wedge e^b). \quad (4.90)$$

Esta expresión para el índice es compatible con el resultado del capítulo 2 de la anomalía quiral si escogemos la constante de normalización $\mathcal{N} = \frac{1}{8\pi^2}$. Esta constante de normalización depende de la dimensión y puede ser evaluada en cada caso haciendo la torsión igual a cero y comparando el resultado con el índice del operador de Dirac conocido.

Capítulo 5

Conclusiones

Hemos estudiado la contribución de la torsión a la anomalía quirial o, equivalentemente, al índice del operador de Dirac definido sobre un espacio que admite torsión y curvatura.

Antes de los trabajos obtenidos de esta tesis ([7], [19] y [39]) era un hecho establecido que la torsión no debía contribuir al índice del operador de Dirac por el argumento puesto en la referencia [24] y que hemos repetido en el capítulo 3. Sin embargo, nosotros hemos demostrado que esta aseveración es incompleta debido a la existencia de invariantes topológicos torsionales. Es decir, si no existieran invariantes topológicos asociados a la torsión el argumento de la referencia [24] sería válido para espacios con torsión.

El efecto que tiene la torsión sobre la anomalía quirial tiene el aspecto de clase característica. En efecto, en $D = 4$ dimensiones el invariante de Nieh-Yan es la diferencia de las clases de Chern para el grupo de de Sitter y para el de rotaciones cuadridimensionales. Esta interpretación de los invariantes torsionales se basa en la inmersión del grupo de rotaciones en D dimensiones en el de rotaciones en $D + 1$ dimensiones o grupo de de Sitter como discutimos en el capítulo 3. Por lo tanto, el quiebre de la simetría quirial respeta esta simetría más que la de rotaciones D dimensionales. Esto lo interpretamos como que la teoría cuántica es a altas energías invariante de de Sitter más que de Lorentz.

Por otro lado, construimos ejemplos de configuraciones de campo en que invariantes topológicos torsionales poseen valores no nulos. Así que la contribución de la torsión al índice del operador de Dirac en estos casos es no trivial. La cuantización

de estos valores es posible gracias a que los grupos de homotopía relevantes en estos casos son $\pi_3(SO(D+1)) = \mathcal{Z}$ y $\pi_3(SO(D)) = \mathcal{Z} + \mathcal{Z}$ si la dimensión es múltiplo de 4 ($D = 4k$) [47].

A esta altura se hace necesario calcular explícitamente el índice del operador de Dirac definido en un espacio con torsión y curvatura no triviales. Esto lo hicimos en el capítulo 4 y obtuvimos la contribución de la torsión en dimensiones pares.

La conclusión final que obtenemos en esta tesis es que la torsión modifica el índice del operador de Dirac.

Veamos algunas proyecciones que se pueden obtener de esta tesis.

En primer lugar, quisiéramos investigar el rol de la torsión en anomalías de gauge, sobre todo en el contexto de cancelación de anomalías. Recordemos que este es una fuerte restricción sobre las teorías susceptibles de ser construidas (por ejemplo ver [48] y [49]).

La existencia de números topológicos permite investigar sobre la presencia de Fermiones con o sin masa en diversas dimensiones del espacio [50]. Luego quisiéramos obtener el efecto de los números topológicos torsionales sobre la presencia de estos fermiones [24].

Por otro lado en la compactificación de teorías de cierta dimensión a una menor el rol de los invariantes topológicos es crucial en el análisis del contenido de partículas en esta dimensión (por ejemplo, desde teorías de cuerdas en $D = 10$). A partir de este análisis podríamos estudiar el rol de la torsión en construcciones similares.

Apéndice A

Teorías de Gauge y Gravitación

En este apéndice revisaremos algunos aspectos de teorías de Yang-Mills especialmente su formulación en formas diferenciales. Además formularemos la teoría de la relatividad general como una teoría de Yang-Mills.

Para comenzar definamos los ingredientes necesarios en una teoría de Yang-Mills.

Sea G un grupo de Lie. Sus generadores satisfacen un álgebra de Lie

$$[J_a, J_b] = f_{ab}^c J_c, \quad (\text{A.1})$$

donde J_a son los generadores y f_{ab}^c las constantes de estructura del grupo. El índice a cuenta el número de generadores del grupo.

Las constantes de estructura satisfacen dos propiedades fundamentales. Ambas son heredadas de la estructura de conmutador que aparece en el lado izquierdo de (A.1). La primera viene de $[A, B] = -[B, A]$, luego

$$f_{ab}^c = -f_{ba}^c, \quad (\text{A.2})$$

y la segunda es la identidad de Jacobi

$$f_{bc}^a f_{de}^c + f_{ec}^a f_{bd}^c + f_{dc}^a f_{eb}^c = 0. \quad (\text{A.3})$$

Infinitesimalmente el grupo actúa sobre un espacio vectorial en la forma

$$\delta V^A = \varepsilon^a (J_a)^A_B V^B, \quad (\text{A.4})$$

donde ε^a son los parámetros de la transformación que pueden depender localmente de la posición.

Con el fin de tener una teoría dinámica es necesario introducir el concepto de derivada. Notemos que la derivada de un vector transforma inhomogéneamente bajo la acción del grupo G . Para tener una derivada que transforme en forma homogénea debemos definir la “derivada covariante”

$$D_\mu V^A = \partial_\mu V^A + A^a{}_\mu (J_a)^A{}_B V^B, \quad (\text{A.5})$$

donde $A^a{}_\mu$ es la conexión o potencial de gauge.

Es fácil de probar que (A.5) transforma covariantemente, i.e., como un vector bajo (A.4) si el potencial de gauge transforma de la siguiente manera

$$\delta A^a{}_\mu = -D_\mu \varepsilon^a. \quad (\text{A.6})$$

Definamos la 1-forma diferencial $A^a = A^a{}_\mu dx^\mu$. De tal forma la derivada covariante es una operación que toma un p -forma diferencial y la transforma en una $p + 1$ -forma diferencial.

Como la conexión no transforma covariantemente, es necesario obtener un objeto covariante a partir de ella. Este objeto es la curvatura, una generalización del tensor de Maxwell

$$F^a = dA^a + \frac{1}{2} f_{bc}^a A^a \wedge A^b, \quad (\text{A.7})$$

otra manera de obtener este objeto es vía el cuadrado de la derivada covariante

$$D \wedge D = F^a J_a. \quad (\text{A.8})$$

La curvatura de Yang-Mills juega un papel crucial en la descripción de teorías de gauge. La acción de Yang-Mills en $D = 4$ dimensiones se escribe en términos de este campo

$$S_{\text{YM}} = \int F \wedge *F, \quad (\text{A.9})$$

donde $*F$ es dual de Hodge de F [20].

La derivada covariante de la curvatura es idénticamente nula

$$DF \equiv 0, \quad (\text{A.10})$$

esta relación se conoce como identidad de Bianchi.

Pasemos a Gravitación. Los elementos fundamentales para describir la gravitación son las nociones de distancia y de transporte paralelo.

La primera es equivalente a tener la noción de métrica $g_{\mu\nu}$ sobre el espacio, la distancia entre dos puntos infinitesimalmente próximos está dada por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{A.11})$$

Una vez que se tiene la noción de distancia entre puntos de la variedad queremos definir objetos sobre ella tales como vectores, tensores, etc. Luego de esto si queremos definir una teoría dinámica necesitamos definir derivada. En la definición de derivada está presente la noción de comparar objetos en puntos infinitesimalmente cercanos. Aquí aparece la necesidad de transportar paralelamente objetos de un punto a otro, esta noción de transporte paralelo introduce el símbolo de Christoffel Γ . Finalmente podemos definir el concepto de derivada covariante, por ejemplo para un vector, ver figura A.1

$$D_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} V^\lambda. \quad (\text{A.12})$$

Usemos el principio de equivalencia para ubicar en cada punto del espacio un sistema ortonormal de referencia. Transformamos un objeto definido en un sistema general de coordenadas con índices μ, ν, \dots al sistema local denotados por los índices a, b, \dots con la matriz de transformación e^a_μ que llamamos vielbein.

La noción de transporte paralelo sigue presente, esta vez la derivada covariante sobre un vector local es

$$D_\mu V^a = \partial_\mu V^a + \omega^a_{b\mu} V^b. \quad (\text{A.13})$$

donde $\omega^a_{b\mu}$ es la conexión de spin, no es otra cosa que la transformación del símbolo de Christoffel al sistema local de referencia.

Los elementos básicos para describir la gravitación son el vielbein y la conexión de spin. Vemos que el vielbein transforma homogéneamente bajo trans-

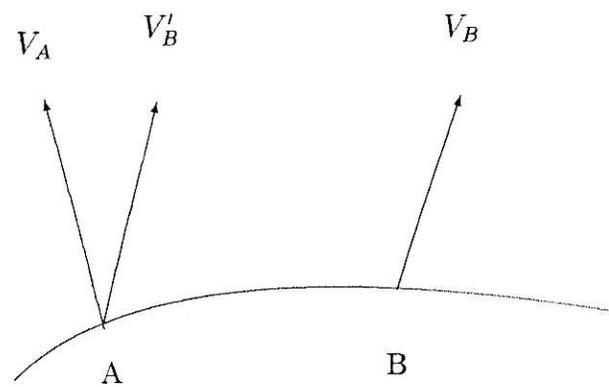


Figura A.1: Par definir derivada de un vector necesitamos comparar dos de ellos infinitesimalmente cercanos. Para ello se transporta paralelamente el vector V_2 para generar V'_2 .

formaciones locales de rotación, mientras que la conexión de spin transforma como dice su nombre.

Notemos que localmente el grupo de simetría presente es el de rotaciones en D dimensiones. Si usamos este grupo para construir una teoría tipo Yang-Mills veremos que la conexión de spin es el análogo al campo de Yang-Mills. Sin embargo, el vielbein no tiene análogo, esto hace la diferencia entre las teorías de gauge usuales y gravitación.

A partir del vielbein y de la conexión podemos definir 1-formas diferenciales

$$\begin{aligned} e^a &= e^a{}_\mu dx^\mu, \\ \omega^a{}_b &= \omega^a{}_{b\mu} dx^\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Como notamos previamente, la conexión no transforma covariantemente bajo rotaciones locales. Sin embargo podemos definir un objeto que llamamos 2-forma curvatura del espacio que sí es covariante

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b, \quad (\text{A.15})$$

además con la ayuda del vielbein existe la 2-forma de torsión

$$T^a = de^a + \omega^a{}_b e^b. \quad (\text{A.16})$$

Estas propiedades del espacio tienen interpretaciones geométricas como se aprecia en las figuras A.2 y A.3.

Tanto la curvatura como la torsión satisfacen relaciones de consistencia que llamamos identidades de Bianchi

$$\begin{aligned} DR^a{}_b &= 0, \\ DT^a &= R^a{}_b \wedge e^b. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

A partir de estas relaciones vemos que las siguientes cantidades son localmente exactas

$$\begin{aligned} P &= R^{ab} \wedge R_{ab}, \\ N &= T^a \wedge T_a - R_{ab} \wedge e^a \wedge e^b, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

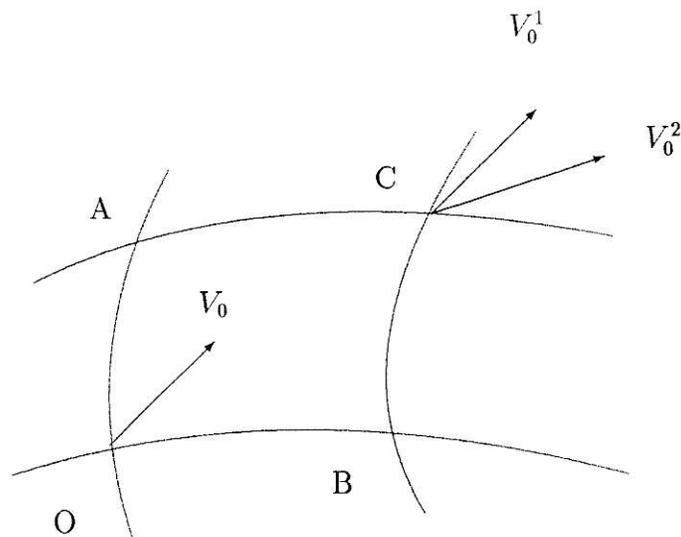


Figura A.2: La presencia de curvatura en el espacio hace que el vector V_0 trasladado paralelamente por la trayectoria **OAC** sea distinto al ser trasladado paralelamente por **OBC**.

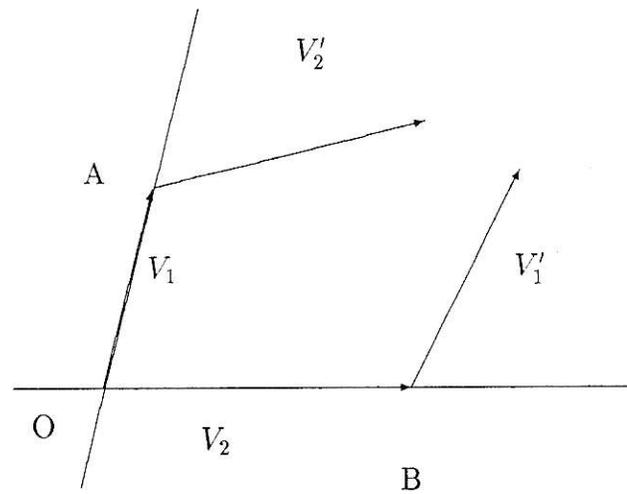


Figura A.3: El vector V_1 se transporta paralelamente a lo largo de V_2 y produce V_1' . Análogamente se obtiene V_2' al transportar paralelamente V_2 por V_1 . La figura no se cierra debido a la presencia de torsión.

que en cuatro dimensiones corresponden a las densidades de Pontryagin y de Nieh-Yan.

En más dimensiones existen relaciones de este tipo, de hecho en $D = 8$, por ejemplo, el cuadrado de estas cantidades son localmente exactas [27].

Antes de terminar este apéndice, discutiremos sobre el acoplamiento de spinores al campo gravitacional. Para ello usamos el principio de equivalencia, es decir, la posibilidad de poner en cada punto del espacio una base ortonormal. Localmente el grupo de simetría es el grupo de rotaciones en D dimensiones. Los generadores de este grupo satisfacen la siguiente álgebra de Lie

$$[J_{ab}, J_{cd}] = -\eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac} + \eta_{ad}J_{bc} + \eta_{bc}J_{ad}, \quad (\text{A.19})$$

donde los índices toman valores de 1 a D . El espacio donde actúan los generadores se llama representación del grupo. En nuestro caso las representaciones son de diversos tipos y están niveladas por el spin. Concentrémonos en dos representaciones; la vectorial y la spinorial.

En el primer caso el objeto de interés es un vector V^a que transforma infinitesimalmente bajo rotaciones del modo siguiente

$$\delta V^a = \frac{1}{2}\varepsilon^{cd}(J_{cd})^a{}_b V^b = \varepsilon^a{}_b V^b, \quad (\text{A.20})$$

de donde encontramos el generador de rotaciones en la representación vectorial

$$(J_{cd})^a{}_b = \delta_c^a \eta_{db} - \delta_d^a \eta_{cb}, \quad (\text{A.21})$$

es un ejercicio verificar que estos generadores satisfacen la relación de conmutación (A.19).

Pasemos a la representación spinorial. El generador en esta representación está dado por el conmutador de dos matrices de Dirac, de hecho

$$J_{ab} = \frac{1}{4}[\Gamma_a, \Gamma_b], \quad (\text{A.22})$$

donde hemos suprimido los índices de la representación debido a que es usual esta práctica en la literatura, pero no debemos olvidarlos.

Usando este generador, los spinores transforman de la siguiente manera bajo rotaciones locales

$$\delta\psi = \frac{1}{8}\varepsilon^{ab}[\Gamma_a, \Gamma_b]. \quad (\text{A.23})$$

En general los generadores son invariantes bajo las transformaciones que ellos mismos generan. En nuestro caso esto equivale a la invariancia de las matrices de Dirac bajo rotaciones locales. Verifiquemos esta propiedad. Notemos que las matrices de Dirac tiene tres tipos de índices; uno en la representación vectorial y dos en la spinorial. Considerando esto vemos que

$$\delta\Gamma^a = \varepsilon^a_b\Gamma^b - \frac{1}{2}\varepsilon^{cd}[\Gamma^a, J_{cd}], \quad (\text{A.24})$$

donde el primer término refleja la transformación del índice vectorial y el segundo de los índices spinoriales. Usando propiedades del álgebra de Clifford que satisfacen las matrices de Dirac encontramos que estos dos términos se cancelan mutuamente, por lo tanto

$$\delta\Gamma^a = 0. \quad (\text{A.25})$$

Para tener una teoría dinámica de spinores necesitamos la derivada covariante en esta representación en el grupo de rotaciones. De la discusión para teorías de gauge podemos escribir la derivada covariante sobre spinores que buscamos

$$D\psi = d\psi + \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab}\psi, \quad (\text{A.26})$$

como el grupo de rotaciones local es heredado de propiedades del campo gravitacional, identificamos la conexión en la derivada covariante con la conexión de spin del campo gravitacional.

El propósito de encontrar la derivada covariante es introducir interacciones en el Lagrangiano libre para spinores, esto es

$$L_0 = \bar{\psi}\Gamma^\mu\partial_\mu\psi, \quad (\text{A.27})$$

el acoplamiento con la interacción se hace reemplazando la derivada parcial por la derivada covariante [51]. En el caso de gravitación esto no es suficiente. Notemos que en (A.27) los índices del espacio está sumados. En gravitación para lograr esta contracción necesitamos una matriz que transforme los índices del espacio en

índices locales. Esto lo hace el vielbein introducido anteriormente. Por lo tanto, el Lagrangiano para spinores interactuando con el campo gravitacional es

$$L = \det e^a{}_{\mu} \bar{\psi} e_a{}^{\mu} \Gamma^a D_{\mu} \psi. \quad (\text{A.28})$$

Apéndice B

Matrices de Dirac

Las matrices de Dirac se definen a través del álgebra que ellas satisfacen. Esta es el álgebra de Clifford

$$\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2\eta^{ab}, \quad (\text{B.1})$$

donde η^{ab} es la métrica plana del espacio.

Las representaciones de esta álgebra son matrices de $2^{\lfloor D/2 \rfloor} \times 2^{\lfloor D/2 \rfloor}$. Por ejemplo, en cuatro y cinco dimensiones la matrices de Dirac son de 4×4 y en dimensiones siete y ocho de 16×16 .

En dimensiones pares se puede definir la matriz quiral dada por el producto de todas las matrices Γ , es decir $\Gamma = \Gamma^1 \cdots \Gamma^D$. Esta matriz satisface las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= 1, \\ \{\Gamma, \Gamma^a\} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Nosotros estamos interesados en calcular trazas de estas matrices. Primero notamos que las matrices Γ , incluida la quiral, tienen trazas nulas. Además se pueden obtener los siguientes resultados de trazas

$$\begin{aligned} \text{Tr} \Gamma^a \Gamma^b &= D \eta^{ab}, \\ \text{Tr} \Gamma \Gamma^a &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Para calcular la anomalía quiral en $D = 4$ necesitamos la traza del producto entre la matriz quiral y dos generadores de rotaciones J^{ab} . Para ello separamos este producto en la siguiente forma

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\Gamma J^{ab}J^{cd} &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\mathrm{Tr}[J^{ab}, J^{cd}] + \{J^{ab}, J^{cd}\}\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Gamma\{J^{ab}, J^{cd}\},\end{aligned}\tag{B.4}$$

el conmutador de dos generadores es proporcional a una combinación de generadores y en esta dimensión la traza del producto de la matriz quiral con un generador es nulo. En cuatro dimensiones el anticonmutador tiene la siguiente expresión

$$\{J^{ab}, J^{cd}\} = \frac{1}{2}\left[\Gamma\varepsilon^{abcd} + \left(\eta^{ac}\eta^{bd} - \eta^{ad}\eta^{bc}\right)\right],\tag{B.5}$$

de tal forma la traza que buscamos (2.33) es

$$\mathrm{Tr}\Gamma J^{ab}J^{cd} = \varepsilon^{abcd}.\tag{B.6}$$

Este procedimiento puede ser extendido a dimensiones pares mayores, si la dimensión es $D = 2n$ el resultado general es

$$\mathrm{Tr}\Gamma J^{a_1 a_2} \dots J^{a_{2n-1} a_{2n}} = \frac{n}{2^{n-1}}\varepsilon^{a_1 \dots a_{2n}}.\tag{B.7}$$

Bibliografía

- [1] S. Weinberg, *Gravity and Cosmology* (John Wiley & Sons, New York 1972)
- [2] A. Einstein y P. Bergmann, *Annals Math.* **39**, 683 (1938).
- [3] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B33**, 173 (1971)
- [4] D. Gross y R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D6**, 477 (1972); C. Bouchiat, J. Iliopoulos y P. Meyer, *Phys. Lett.* **38B**, 519 (1972); H. Georgi y S. Glashow, *Phys. Rev.* **D6**, 492 (1972).
- [5] Para una revisión del tema ver: M. B. Green, J. H. Schwarz y E. Witten, *Superstrings* (Cambridge University Press, Cambridge 1987).
- [6] S. Adler, *Phys. Rev.* **177**, 2426 (1969); J. Bell y R. Jackiw, *Nuovo Cimento* **60A**, 47 (1969).
- [7] O. Chandía y J. Zanelli, *Phys. Rev.* **D55**, 7580 (1997).
- [8] M. F. Atiyah y I.M. Singer, *Ann. of Math.* **93**, 119 (1971).
- [9] K. Fujikawa, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1195 (1979); *Phys. Rev.* **D21**, 2848 (1980).
- [10] Y. N. Obukhov, *Nucl. Phys.* **B212**, 237 (1983).
- [11] Ver capítulo 5 de W. Dittrich y M. Reuter, *Selected Topics in Gauge Theories* Lecture Notes in Physics (Springer Verlag, Berlin 1985).
- [12] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (Adam Hilger, Bristol 1991).
- [13] T. Kimura, *Prog. Theoretical Phys.* **42**, 1191 (1969).
- [14] R. Delbourgo y A. Salam, *Phys. Lett.* **40B**, 381 (1972).

- [15] T. Eguchi y P. Freund, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 1251 (1976).
- [16] B. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields* (Blackie, London and Glasgow 1965).
- [17] T. Kimura y S. Yajima, *Prog. Theoretical Phys.* **74**, 866 (1985).
- [18] S. Yajima, *Class. Quantum Grav.* **13**, 2423 (1996).
- [19] O. Chandía y Jorge Zanelli, por aparecer en *Meeting on Trends in Theoretical Physics* La Plata 1997.
- [20] T. Eguchi, P. B. Gilkey y A. J. Hanson, *Phys. Rep.* **66**, 213 (1980).
- [21] S. Coleman, en A. Zichichi (ed.), *The Whys of Subnuclear Physics* (Plenum, New York 1977).
- [22] H. T. Nieh y M. L. Yan, *J. Math. Phys.* **23**, 373 (1982).
- [23] H. T. Nieh y M. L. Yan, *Ann. Phys.* **138**, 237 (1982).
- [24] Y-S. Wu y A. Zee, *J. Math. Phys.* **25**, 2696 (1984).
- [25] B. Zumino, *Phys. Rep.* **137**, 109 (1986).
- [26] M. Bañados, C. Teitelboim y J. Zanelli, *Phys. Rev.* **D49**, 975 (1994); J. Zanelli, *Phys. Rev.* **D51**, 490 (1995).
- [27] A. Mardones y J. Zanelli, *Class. Quantum Grav.* **8**, 1545 (1991).
- [28] T. T. Wu y C. N. Yang, *Phys. Rev.* **D12**, 3845 (1975).
- [29] D. Husemoller, *Fibre Bundles*, McGraw-Hill, N.Y. (1966).
- [30] P. van Nieuwenhuizen, *An Introduction to Simple Supergravity and the Kaluza-Klein Program*, en *Relativity, Groups and Topology II*, Les Houches 1983, B. S. De Witt and R. Stora (eds.), Elsevier Science Publishers, 1984.
- [31] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B202**, 253 (1982).
- [32] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Academic Press, London 1967).

- [33] C. Teitelboim, *Anales de Física* (España) **80A**, 58 (1984).
- [34] L. Faddeev y A. Slavnov, *Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory* (The Benjamin/Cummings Publishing Company, Reading, Massachusetts 1980).
- [35] L. Alvarez-Gaumé, en *Supersymmetry* (Proceedings, Bonn 1984).
- [36] F. A. Berezin, *The Method of Second Quantization* (Academic Press, New York 1966).
- [37] S. Cecotti y L. Girardello, *Phys. Lett.* **110B**, 39 (1982).
- [38] L. Alvarez-Gaumé, en *Progress in Gauge Field Theory* (Proceedings, Cargesse 1983); L. Alvarez-Gaumé, en G. Velo y A. S. Wightman (eds.) *Fundamental Problems in Gauge Field Theory* (Plenum Press, New York 1986).
- [39] O. Chandía y J. Zanelli, en preparación.
- [40] P. Windey, *Acta Phys. Polonica* **B15**, 435 (1984).
- [41] L. Alvarez-Gaumé, *Com. Math. Phys* **90**, 161 (1983).
- [42] D. Friedan y P. Windey, *Nucl. Phys.* **B235**, 395 (1984).
- [43] J. Mañes y B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B270**, 651 (1986).
- [44] M. Goodman, *Com. Math. Phys.* **107**, 391 (1986).
- [45] L. Girardello, C. Imbimbo y S. Mukhi, *Phys. Lett.* **132B**, 691 (1982).
- [46] N. Mavromatos, *J. Phys.* **A21**, 2279 (1988).
- [47] I. M. James (ed.), *Handbook of Algebraic Topology* (North Holland, Amsterdam 1995).
- [48] L. Alvarez-Gaumé y E. Witten, *Nucl. Phys.* **B234**, 269 (1984).
- [49] M. B. Green y J. H. Schwarz, *Phys.Lett.* **151B**, 21 (1985).
- [50] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B186**, 57 (1977).
- [51] C.N. Yang y R. L. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954); R. Utiyama, *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956).