

**Estructura geodésica del agujero negro  
y  
estabilidad estelar en tres dimensiones**

Tesis  
entregada a la  
Universidad de Chile  
en cumplimiento parcial de los requisitos  
para optar al grado de  
Doctor en Ciencias con Mención en Física

Facultad de Ciencias

por  
Norman Cruz Marín  
Octubre, 1995

Director de Tesis : Dr. Jorge Zanelli.



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

**INFORME DE APROBACION  
TESIS DE DOCTORADO**

Se informa al Comité del Programa de Doctorado en Ciencias con mención en Física que la Tesis presentada por el candidato

Norman Cruz

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito para la obtención del grado de Doctor en Ciencias con mención en Física, en el examen de Defensa de Tesis rendido el Día. 12 del mes de....Junio.....de 1995.

**Director de Tesis:**

Dr. Jorge Zanelli

**Comisión Informante de Tesis**

Dr. Nelson Zamorano (presidente)

Dr. Romualdo Tabensky

Dr. Sergio del Campo

Dr. Roberto Hojman

## Agradecimientos

Esta tesis se desarrollo con el constante estímulo del profesor Jorge Zanelli. Su dedicación a la investigación y el espíritu que le anima al hacer física fueron, según mi parecer, el mejor aporte que yo recibí durante el transcurso de este trabajo.

Quiero, además, expresar mis agradecimientos a Cristian Martínez con quien compartí gratos momentos realizando en conjunto parte de la investigación que conforma esta Tesis.

No puedo dejar de manifestar mi reconocimiento a la comunidad de profesores del programa de doctorado en física de la Universidad de Chile por su esfuerzo en la concreción del postgrado en Chile.

Los congresos internacionales y las reuniones de trabajo en el Centro de Estudios Científicos de Santiago constituyeron una experiencia que valoro en gran medida.

Mis estudios de Doctorado han sido posible gracias al plan de perfeccionamiento del Departamento de Física de la Universidad de Santiago. Esta investigación fue financiada también por los proyectos: PG/083/93 del Departamento de Post-grado y Post-título de la Universidad de Chile; 04-9331CM de DICYT, Universidad de Santiago, y los proyectos 2930007/93 y 193.0910/93 de FONDECYT.

*... en principio es absolutamente incorrecto  
tratar de basar una teoría únicamente  
sobre magnitudes observables. En realidad lo que  
sucede es exactamente lo contrario.  
Es la teoría la que decide lo que podemos observar.*

Albert Einstein\*

\*Conversaciones con W. Heisenberg, en *Physics and Beyonds*,  
(Nueva York, Harper and Row,1971).

# INDICE

## I. INTRODUCCION

## II. AGUJERO NEGRO EN 2+1 DIMENSIONES

1. Introducción
2. Principio de Acción y Soluciones
3. Termodinámica del Agujero Negro en 2+1 Dimensiones
4. Propiedades geométricas y estructura causal
  - 4.1 Construcción geométrica del agujero negro
  - 4.2 Diagramas de Penrose

## III. ESTRUCTURA GEODESICA DEL AGUJERO NEGRO

1. Introducción
2. Ecuaciones geodésicas
3. Soluciones y trayectorias geodésicas
4. Potenciales efectivos y Proceso de Penrose
5. Discusión

## IV. EQUILIBRIO ESTELAR EN 2+1 DIMENSIONES

1. Introducción
2. Equilibrio hidrostático de fluidos perfectos en 2+1 dimensiones
  - 2.1 La ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkov
  - 2.2 Lemas que rigen el equilibrio estelar en 2+1 dimensiones
  - 2.3 Teorema de Buchdahl
  - 2.4 Estrellas de densidad uniforme
3. Discusión

## V. LA EVAPORACION DEL AGUJERO NEGRO

1. Introducción
2. Unidades de masa en 2+1 dimensiones
3. La validez de la aproximación semiclásica

4. Discusión

**Conclusiones**

**Referencias**

## RESUMEN

Se determinan las geodésicas nulas y tipo tiempo en torno al agujero negro en 2+1 dimensiones (solución BTZ). Existen geodésicas completas de los dos tipos en el campo de un agujero con rotación, pero no en el caso estático. Se dan los límites superiores e inferiores para los radios de las órbitas en todos los casos y se discute la posibilidad de pasar desde un espaciotiempo exterior del agujero negro a otro usando los diagramas de Penrose. El movimiento de las partículas es analizado, además, por medio del potencial efectivo y los gráficos de las órbitas.

El equilibrio hidrostático de una estrella, constituida por un fluido perfecto en 2+1 dimensiones, es discutido en un espacio asintóticamente anti-de Sitter. La geometría interior del fluido empalma con la geometría exterior correspondiente a la métrica del agujero negro. Existe un límite superior para la magnitud de la masa del fluido, análogo al teorema de Buchdahl en 3+1 dimensiones. Se discute la posibilidad de colapso y se resuelve exactamente el caso con densidad uniforme, presentándose una nueva solución interior.

Se considera, finalmente, la termodinámica del agujero BTZ. Se discuten las escalas de masa relevantes en la evaporación debido a la radiación de Hawking y las limitaciones en la descripción térmica de los agujeros negros extremos.

## ABSTRACT

Null and timelike geodesics around a 2+1 black hole are determined. Complete geodesics of both types exist in the rotating black-hole background, but not in the spinless case. Upper and lower bounds for the radial size of the orbits are given in all cases and the possibility of passing from one black hole exterior spacetime to another is discussed using the Penrose diagrams. An analysis of particle motions by means of effective potentials and orbit graphs are also included.

The hydrostatic equilibrium of a 2 + 1 dimensional perfect fluid star in asymptotically anti-de Sitter space is discussed. The interior geometry matches the exterior 2 + 1 black-

hole solution. An upper mass limit is found, analogous to Buchdahl's theorem in 3+1, and the possibility of collapse is discussed. The case of a uniform matter density is solved exactly and a new interior solution is presented.

Finally, the thermodynamics of the BTZ black hole is considered. The mass scales which are relevant for the evaporation due to Hawking radiation and the limitations on the thermal description for extreme black holes are discussed.

# CAPITULO I.

## INTRODUCCION

Los modelos de menor dimensionalidad han constituido un medio muy importante en física para el estudio de problemas que en las cuatro dimensiones habituales resultan de gran complejidad. Un caso notable son los modelos unidimensionales utilizados en mecánica cuántica para el cálculo de los niveles de energía y coeficientes de transmisión en potenciales cuadrados. En teoría de campos el modelo bidimensional de Schwinger para la electrodinámica cuántica, así como el campo escalar en dos dimensiones son utilizados para la discusión de anomalías y del quiebre espontáneo de simetría.

La teoría de la gravitación de Einstein ha resultado ser uno de los modelos más fértiles en física. Desde su formulación en la segunda década de nuestro siglo, las ideas relativas a la evolución del universo, la estructura estelar, la dinámica del espacio-tiempo y, en general, la estructura dinámica de la gravitación, se han visto brillantemente apoyadas por las observaciones y, en el plano teórico, han mostrado un alto grado de consistencia y belleza. Como toda buena teoría, la gravitación de Einstein ha generado enormes desafíos en el plano conceptual, destacándose particularmente la tarea de encontrar una síntesis con la mecánica cuántica. Estos mismos desafíos han orientado la investigación hacia la gravitación en menos dimensiones donde la complejidad matemática es menor y pueden ensayarse nuevos enfoques con más facilidad. Por otra parte, estos modelos de menor dimensionalidad tienen un interés en sí mismos, como teorías de campo con la posibilidad de nuevas situaciones físicas.

Sin lugar a dudas, la primera solución encontrada a las ecuaciones de Einstein para una distribución estática y esféricamente simétrica de materia ha resultado ser con el transcurso del tiempo la que mayores desafíos plantea, a saber, la solución de Schwarzschild, que da lugar a la posibilidad de agujeros negros. Desde el punto de vista clásico, la solución de Schwarzschild plantea el problema de las singularidades espacio-temporales, que surgen como una consecuencia inevitable de la estructura de la gravitación einsteniana. Por

otra parte, esta solución impone restricciones a la magnitud de las masas de fluidos en equilibrio bajo interacción gravitacional. Investigaciones en este sentido condujeron, al considerar las presiones internas que podían alcanzarse por la presión degenerativa de electrones y neutrones, al límite de Chandrasekhar para las masas de las enanas blancas, y a los límites superiores de masa en los modelos de estrellas de neutrones (pulsares).

El descubrimiento de Hawking [1] de que los agujeros negros emitirían una radiación térmica al considerar los efectos cuánticos puso en una base sólida la idea original de Bekenstein [2] de que estos objetos tenían una entropía asociada. Este descubrimiento es un hito en el intento de comprender la gravitación bajo la luz de la mecánica cuántica. La radiación de Hawking ha abierto la puerta hacia algunas de las mayores interrogantes que motivan hoy la investigación en de los aspectos cuánticos de la gravitación: i) ¿cuál es la descripción microscópica de los estados que dan lugar a dicha entropía?, ii) ¿cómo puede resolverse consistentemente la pérdida neta de información de los estados puros que evolucionan en el agujero negro hacia estados mixtos? [3].

La investigación de modelos de menor dimensionalidad en gravitación se ha orientado hacia las respuestas de preguntas tan fundamentales como las planteadas más arriba. Los trabajos en 1+1 dimensiones, por ejemplo, han permitido nuevos enfoques importantes en los procesos de evaporación y formación de agujeros negros. El descubrimiento de una solución tipo agujero negro en 2+1 dimensiones ha resultado de gran interés, ya que no se esperaba encontrar este tipo de soluciones en una teoría que no contine gravitones. Esta solución, encontrada por M. Bañados, J. Zanelli y C. Teitelboim [4] ha sido objeto de numerosas investigaciones tanto desde el punto de vista clásico como cuántico. S. Carlip ha realizado [5] una revisión completa de los trabajos publicados en los últimos tres años en relación con este agujero negro. En el capítulo II se presentan las principales características del agujero negro en 2+1 dimensiones. En la presente investigación nos abocamos a aspectos clásicos de esta solución y en la parte final a propiedades térmicas propias de la radiación asociadas a este agujero negro. El capítulo III trata de la estructura geodésica, esto es, lo relativo al movimiento de partículas en el campo del agujero negro.

El estudio de las geodésicas constituye una de las maneras más directas de visualizar las propiedades generales de un espaciotiempo. Esta solución tiene la particularidad que sólo las partículas sin masa pueden escapar hacia el infinito. Se encuentra también que el agujero negro dotado de rotación admite la posibilidad de extraerle energía (proceso de Penrose) [6].

El colapso de una esfera de polvo en 2+1 dimensiones cuando se incluye una constante cosmológica negativa fue realizado en [7]. Este cálculo fue el primer intento de mostrar que la solución del agujero negro en 2+1 dimensiones podía entenderse como el estado final de un colapso de materia. Los resultados que se muestran en el capítulo IV fueron motivados por la idea de entender hasta qué punto podía extenderse esta interpretación. Se encontró que, efectivamente, una distribución esférica constituida por un fluido perfecto en equilibrio hidrostático presenta un límite para la razón entre la masa y el radio luego del cual el colapso se hace inevitable.

Discutiremos a continuación aspectos generales de la gravitación en 2+1 dimensiones, especialmente en relación al comportamiento de las soluciones que incluyen fluidos.

### (i) Gravitación en 2+1 dimensiones

La gravitación en tres dimensiones ha sido objeto de un creciente interés debido a su simplicidad y los efectos globales y topológicos que presenta. Una gran cantidad de referencias sobre la gravitación en dos y tres dimensiones hasta 1986 se encuentra en el libro de J.D. Brown [8]. En tres dimensiones, la teoría general de la relatividad no contiene grados de libertad dinámicos, es decir, no existen gravitones. El tensor de curvatura es proporcional al tensor de Ricci, de modo que fuera de las fuentes la curvatura es nula (no existe límite newtoniano para esta teoría). La presencia de una fuente puntual se manifiesta, sin embargo, en efectos globales, dando lugar a las soluciones con singularidades cónicas. Deser, Jackiw and 't Hooft encontraron este tipo de soluciones para un número arbitrario de partículas puntuales masivas cuando la constante cosmológica se consideraba

igual a cero [9].

La expresión para el tensor de Ricci en presencia de materia con la inclusión de la constante cosmológica,  $\Lambda$ , es

$$R_{\mu\nu} = (2\Lambda - kT)g_{\mu\nu} + kT_{\nu\mu}, \quad (1)$$

donde  $k$  es la constante de la gravitación en 2+1 dimensiones y  $T$  es la traza del tensor energía-momentum,  $T_{\nu\mu}$ , del fluido. El tensor de Riemann tiene en este caso la siguiente expresión

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = \Lambda(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\nu\lambda}g_{\mu\rho}) + k(g_{\mu\lambda}T_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}T_{\mu\lambda} - g_{\mu\rho}T_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}T_{\mu\rho}). \quad (2)$$

Fuera de la materia es claro que las soluciones serán espacios con curvatura constante. Dentro del fluido la curvatura es en general no nula y, por supuesto, no constante. Sin embargo, como el tensor de Weyl es siempre nulo en tres dimensiones, una partícula dentro del fluido experimentará sólo influencias locales. Se discutirá esto en el capítulo IV cuando se encuentre la ecuación que gobierna el equilibrio hidrostático de fluidos en 2 + 1 dimensiones.

Un estudio general que incluía la presencia de soluciones de fluidos perfectos fue realizado por S. Giddings, J. Abbott y K. Kuchar [10]. En ese trabajo se incluyeron soluciones cosmológicas y se calculó la estructura de una estrella con densidad constante sin constante cosmológica. Es de interés mencionar que estos autores niegan la posibilidad de obtener soluciones tipo agujero negro en 2 + 1 dimensiones debido a que la gravitación no puede propagarse (ausencia de gravitones). Posteriormente, Barrow *et al* [11] consideraron modelos cosmológicos con fluidos perfectos con ecuaciones de estado de la forma  $p = (\gamma - 1)\rho$ , donde  $\gamma$  es una constante. No encuentran, sin embargo, las soluciones analíticas que gobiernan la evolución del escalar del universo. Estas soluciones, para algunos casos extremos como polvo y radiación, fueron encontradas por Cornish y Frankel [12]. Estos autores consideran, además, el problema de la existencia de horizontes de partícula y el de la evolución de las fluctuaciones de densidad y presión en el universo

primitivo. En general, los casos estudiados no presentan diferencias cualitativas importantes respecto a los resultados en cuatro dimensiones, existiendo también singularidades de curvatura en  $t = 0$ .

Otras investigaciones [13] mostraron que cualquier distribución esféricamente simétrica de fluidos perfectos en  $2 + 1$  dimensiones tenía una masa  $M$ , igual (salvo factores en la elección al normalizar la acción) a

$$M = \frac{1}{k} \quad (3)$$

Este resultado no depende de la ecuación de estado ni de la forma en que varía la densidad dentro de la estrella; sólo depende de una constante fundamental de la teoría. Esta masa, característica de la gravitación en estas dimensiones, juega, por lo mismo, un rol importante cuando se considera los estados finales posibles de la evaporación del agujero negro en  $2+1$  dimensiones. Al incluir una constante cosmológica negativa, el comportamiento de los fluidos cambia significativamente y las *estrellas* no tienen una masa universal como la mencionada más arriba. En el capítulo IV se muestran resultados generales para fluidos en equilibrio hidrostático en  $2+1$  dimensiones. Estos resultados muestran una estrecha similitud con el comportamiento de fluidos en  $3+1$  dimensiones.

Por otra parte, la existencia de un agujero negro sugiere la posibilidad de que un fluido en  $2 + 1$  dimensiones pudiera colapsar, como ocurre con aquellas estrellas en cuatro dimensiones que tienen una masa mayor que el límite superior para materia fría en equilibrio hidrostático al término de su fase termonuclear. En el capítulo IV exploramos la estabilidad de una distribución esférica de materia (*estrella*) descrita por una ecuación de estado general que relacione la presión ( $p$ ) y la densidad de energía ( $\rho$ ):  $p = p(\rho)$ ,  $\rho \leq \rho_0$ . Se supone que esta *estrella* en  $2+1$  dimensiones está en equilibrio hidrostático y que la geometría exterior es asintóticamente anti-de Sitter. Se encuentra un límite superior para la masa bajo las siguientes supuestas adicionales i) la densidad de energía es positiva:  $\rho \geq 0$ , y, ii) la materia es microscópicamente estable:  $dp/d\rho \geq 0$ .

## (ii) Termodinámica de agujeros negros

Los sistemas estelares emiten radiación debido a los procesos termonucleares que se desarrollan en su interior. Una consecuencia directa del teorema del virial en sistemas bajo interacción gravitacional es el hecho de que las estrellas aumenten su temperatura a medida que se contraen o, dicho de otra forma, su radiación aumenta a medida que pierden masa. El calor específico de estos sistemas es, por consiguiente, negativo.<sup>1</sup> Los agujeros negros también participan de esta propiedad pese a ser objetos que han colapsado completamente y cuya radiación es de origen cuántico (cuantización de un campo escalar en un fondo dado por la métrica de Schwarzschild). En este sentido los agujeros negros se comportan en la forma usual para sistemas bajo interacción gravitacional. La temperatura de un agujero negro de Schwarzschild es inversamente proporcional a su masa y posee una entropía proporcional al cuadrado de la masa. Una estimación numérica de esta entropía muestra que el número de estados disponibles ( $\sim e^S = \exp(4\pi GM^2/\hbar)$ ) es del orden de  $10^{10^{77}}$ , para un agujero negro con la masa del sol. Este número que es incomparablemente mayor que el deducible de los estados de la radiación de una estrella como el sol. Esto es una consecuencia de la gran información perdida al terminar el proceso de colapso, quedando el agujero negro caracterizado sólo por su masa  $M$ , su carga  $Q$  y su momento angular  $J$ .

La evaporación final de un agujero de Schwarzschild resulta un ser un proceso bastante complejo desde el punto de vista conceptual. Se espera que a masas cercanas a la de Planck, la descripción semiclásica ya no sea válida y, por consiguiente, sólo una teoría cuántica completa de la gravitación podría describir este proceso. La descripción termodinámica de un agujero negro de Schwarzschild deja de ser válida cuando se alcanza la masa de Planck, como se prueba en [14].

---

<sup>1</sup>En la formulación de Lovelock para la gravitación en dimensiones arbitrarias, las soluciones de agujero negro presentan un calor específico positivo cuando la dimensión es impar. En estos casos no existen gravitones y en consecuencia no es aplicable el teorema del virial.

De gran interés actual son los agujeros negros extremos presentes en la solución de Kerr-Newman. La expresión general para la temperatura de un agujero negro de Kerr-Newman de masa  $M$ , carga  $Q$ , y momento angular  $J$  viene dada por la expresión ( $\hbar = c = G = 1$ )

$$8\pi MT = 2z^{\frac{1}{2}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{J^2}{M^2} + z^{\frac{1}{2}} \right]^{-1}, \quad (4)$$

donde

$$z = 1 - \frac{Q^2}{M^2} - \frac{J^2}{M^4}, \quad (5)$$

La solución de Kerr-Newman tiene un horizonte de eventos sólo para  $z \geq 0$ . Los agujeros negros extremos satisfacen  $z = 0$  y tienen, por lo tanto, temperatura cero. Si  $z > 0$ , el agujero radía hasta alcanzar el estado extremo. Este hecho es consistente con la hipótesis de censura cósmica, puesto que de seguir radiando el agujero dejaría tras de sí una singularidad desnuda. Recientemente se encontró que la entropía de estos agujeros es cero [15]. Este comportamiento sugiere fuertemente que los agujeros extremos se comportan como partículas elementales.

En el capítulo V se discute el proceso de evaporación de un agujero negro en 2+1 dimensiones. La solución en 2+1 dimensiones presenta propiedades termodinámicas similares a la solución de Schwarzschild. Existe una radiación de Hawking y una entropía asociada (proporcional al perímetro, en este caso). Las diferencias, sin embargo, son interesantes. En primer lugar, la temperatura es proporcional a la masa, razón por lo cual el agujero se enfría a medida que se evapora, tal como le ocurre a un sólido común. Esto es una consecuencia de la ausencia de interacción gravitacional en 2+1 dimensiones, lo que da lugar a un calor específico positivo, propio de la materia cohesionadas por interacciones electromagnéticas y donde la gravitación no juega ningún papel. Es claro que el agujero en 2+1 dimensiones es una suerte de agujero extremo en la fase final de la evaporación cuando su temperatura es cero. Por otra parte, la solución lleva una escala de longitud asociada a través de la constante cosmológica. Esta escala permite definir, junto con las constantes universales de la teoría, otras dos unidades de masa distintas de la masa de

Planck. Estas masas deben analizarse con cierto detalle para encontrar explícitamente su rol en la termodinámica del proceso. En el capítulo V se analizan estas masas junto con la validez de la descripción termodinámica de la radiación de Hawking de un agujero negro en 2+1 dimensiones.

### (iii) El espacio Anti-de Sitter

En 3+1 dimensiones las soluciones de agujero negro que usualmente son estudiadas corresponden a espacios que son asintóticamente planos y que corresponden, por lo tanto, a soluciones de agujeros negros que pueden tener una realidad astrofísica. Sin embargo, en 2+1 dimensiones el agujero negro es un espacio localmente anti-de Sitter. Es razonable preguntarse entonces por las justificaciones físicas de incluir espacios no asintóticamente planos, especialmente en soluciones no cosmológicas.

En el contexto de 2+1 dimensiones, la inclusión de la constante cosmológica permite la existencia de variedades de curvatura constante, permitiendo extender grandemente las posibilidades de una teoría que, en su simplicidad, no contiene gravitones. Si la constante cosmológica considerada es negativa, tenemos una solución de agujero negro y, como se prueba en el capítulo IV, la posibilidad de tener fluidos en equilibrio hidrostático, con un comportamiento que se asemeja al caso en cuatro dimensiones.<sup>2</sup>

En 3+1 dimensiones, el problema de la constante cosmológica se remonta al año 1917, cuando Einstein la introdujo en la formulación de un modelo de universo. Hasta el día de hoy no se encuentra una explicación satisfactoria de los 120 órdenes de magnitud en que difieren los valores teóricos predichos para la constante con los límites observacionales. S. Weinberg realiza en [16] una revisión de los trabajos orientados a resolver este problema.

El espacio anti-de Sitter presenta dificultades adicionales en cuanto a su interés en física. En primer lugar, una constante cosmológica negativa corresponde a una densidad

---

<sup>2</sup>En la formulación de Lovelock para la gravitación en dimensiones arbitrarias la constante cosmológica es necesaria para la construcción de soluciones con horizonte de eventos.

de energía negativa, si es interpretada como la energía del vacío. Por otra parte, la topología de este espacio es  $S^1 \times R^3$ , donde  $S^1$  es tipo tiempo. Estas líneas tipo tiempo cerradas pueden removerse desenrollando el círculo  $S^1$ , con lo cual se obtiene el espacio  $R^4$ . Este espacio, que no contiene curvas tipo tiempo cerradas y cuya topología es  $R^4$  recibe el nombre de cubrimiento universal del espacio anti-de Sitter; no es globalmente hiperbólico. Para que el problema de Cauchy quede bien definido es necesario especificar tanto la configuración inicial como las condiciones de borde que describen la radiación que viene del infinito [17]

L. Abbott y S. Deser [18] demostraron que son estables todas las métricas que tienden asintóticamente a un espacio anti-de Sitter. La demostración implica la definición de una energía asociada a un vector de Killing tipo tiempo asociado a los generadores de simetría del grupo  $O(3,2)$ <sup>3</sup>. La estabilidad se establece probando que la energía definida es positiva para todas las fluctuaciones que asintóticamente se anulan, sean pequeñas o grandes.

---

<sup>3</sup>Las superficies tipo espacio del espacio anti-de Sitter son abiertas, poseyendo el sistema una simetría  $O(3,2)$  en el infinito tipo espacio, lo cual permite definir cantidades conservadas [19]

## CAPITULO II.

### AGUJERO NEGRO EN 2+1 DIMENSIONES

#### 1 Introducción

La solución de Schwarzschild en 3+1 dimensiones ha sido de gran interés en la física teórica de las últimas décadas, dando lugar a nuevas ideas y resultados en el campo de los sistemas ligados gravitacionalmente. Por ejemplo, el estudio de estrellas densas (pulsares y enanas blancas) ha permitido verificar los límites superiores que pueden tener las masas de sistemas estelares en equilibrio en relatividad general (esto juega un papel central en la identificación observacional de agujeros negros). Por otra parte, los agujeros negros como objetos colapsados, que pueden emitir radiación al considerar procesos cuánticos, constituyen la arena para construir una síntesis de la gravitación, la termodinámica y la mecánica cuántica. La investigación de la gravitación en 2+1 dimensiones recibió, por consiguiente, una proyección importante desde el descubrimiento de una solución con las propiedades características de un agujero negro, es decir, la existencia de un horizonte de eventos y una temperatura de Hawking asociada [4]. Si bien esta solución despliega un comportamiento que sigue de cerca a su contraparte cuadrimensional, algunas propiedades térmicas son diferentes, como es el caso del calor específico que, por ser positivo, indica que la evaporación de este agujero se realiza a medida que el sistema se enfría.

M. Bañados [20] expone ampliamente la construcción del agujero negro en 2+1 dimensiones, así como el estudio de su estructura causal, sus propiedades geométricas y la termodinámica asociada. Estos resultados fueron publicados en [21]. Expondremos en este capítulo sólo una descripción general de esta solución y sus propiedades que sirva de guía al lector.

## 2 Principio de acción y soluciones

La acción para gravitación con constante cosmológica en 2+1 dimensiones es

$$I = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{-g} (R + 2l^{-2}) d^2x dt + B, \quad (2.1)$$

donde  $B$  es un término de superficie y,  $l = (-\Lambda)^{-1/2}$ , el radio de curvatura, que provee la longitud de escala necesaria para la existencia de un horizonte (en 2 + 1 dimensiones la masa no tiene dimensiones). Las ecuaciones de Einstein admiten una solución de agujero negro dada por

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 (N^\phi dt + d\phi)^2, \quad (2.2)$$

donde el cuadrado de la función *lapse*,  $N^2$ , y el corrimiento angular,  $N^\phi$ , están dadas por

$$N^2 = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \quad \text{and} \quad N^\phi = -\frac{J}{2r^2}, \quad (2.3)$$

con  $-\infty < t < \infty$ ,  $0 < r < \infty$ , y  $0 \leq \phi < 2\pi$ .

La constante de integración  $M$  es la carga conservada asociada con la invariancia asintótica bajo desplazamientos temporales (masa) y  $J$  es la carga asociada con la invariancia rotacional (momentum angular). La función  $N^2$  se anula para dos valores de  $r$  dados por

$$r_{\pm} = lM^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml}\right)^2}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.4)$$

donde  $r_+$  es el horizonte del agujero negro ( $M > 0$  y  $|J| \leq Ml$ ).

La superficie de corrimiento al rojo infinito (*ergosfera*) está dada por la relación  $g_{tt}(r = r_{\text{erg}}) = 0$ , donde  $r_{\text{erg}} = lM^{\frac{1}{2}}$ . Estos tres valores obedecen la desigualdad  $r_- \leq r_+ \leq r_{\text{erg}}$ .

En ausencia de fuentes el horizonte se anula ( $M = 0$ ). Este no es un espacio plano, sino uno de curvatura constante negativa. Las soluciones con masas negativas tienen singularidades cónicas desnudas en el origen. Sin embargo, en el caso  $M = -1$ , ( $J = 0$ ) se obtiene el espacio de anti-de Sitter,

$$ds^2 = - \left( 1 + \frac{r^2}{l^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{l^2}} + r^2 d\phi^2 \quad (2.5)$$

que no presenta horizontes ni singularidades, y aparece como un estado ligado separado del espectro continuo de masas.

### 3 Termodinámica del agujero negro en 2+1 dimensiones

La termodinámica del agujero negro en 2+1 dimensiones fue estudiada en [4] usando la aproximación de punto silla de la acción Euclídea [22] que está dada por la energía libre del sistema dividida por la temperatura

$$I_E = \beta U - S - \sum_i \mu_i Q^i, \quad (3.1)$$

donde  $\beta$  es el inverso de la temperatura,  $U$  es la energía interna,  $\mu_i$  es el potencial químico conjugado a la carga  $Q^i$  y  $S$  la entropía.

La temperatura del agujero viene dada por la expresión

$$\begin{aligned} T &= \left[ 4\pi \left( \frac{\partial r_+}{\partial M} \right)_J \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{2\pi r_+} \left[ \frac{r_+^2}{l^2} - \frac{J^2}{4r_+^2} \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

La primera ley de la termodinámica,  $dU - TdS - \sum_i \mu_i dQ^i = 0$ , para el agujero negro 2+1 es

$$dM + \frac{2}{r_+} \left( \frac{r_+^2}{l^2} - \frac{J^2}{4r_+^2} - \frac{Q^2}{4} \right) dr_+ + \frac{JdJ}{2r_+^2} - QdQ \ln(r_+) = 0 \quad (3.3)$$

de donde pueden identificarse la temperatura, entropía y el potencial químico:

$$T = \frac{1}{2\pi r_+} \left[ \frac{r_+^2}{l^2} - \frac{J^2}{4r_+^2} - \frac{Q^2}{4} \right] \quad (3.4)$$

$$S = 4\pi r_+ \quad (3.5)$$

$$\mu_J = \frac{J}{2r_+^2} \quad (3.6)$$

$$\mu_Q = -Q \ln(r_+) \quad (3.7)$$

En el caso del agujero negro extremo, la temperatura es cero. Una consecuencia directa de la expresión para la temperatura es que el agujero negro en  $2+1$  tiene calor específico positivo, es decir, el sistema se enfría a medida que se evapora debido a la radiación de Hawking. En el caso  $3+1$ , el agujero negro eleva su temperatura a medida que pierde energía por radiación, abriendo la posibilidad de terminar la evaporación en una violenta explosión.

## 4 Propiedades geométricas y estructura causal

### 4.1 Construcción geométrica del agujero negro

En la gravitación en 2+1 dimensiones el tensor de Weyl es nulo en toda la variedad, de modo que no existe propagación del campo gravitacional. Como se dijo, el tensor de Riemann queda completamente determinado por el tensor de Ricci y este, a su vez, por el tensor de energía-momentum, de acuerdo a las ecuaciones de Einstein. Fuera de la materia, el tensor de Riemann toma la siguiente forma

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = -\Lambda(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\nu\lambda}g_{\mu\rho}), \quad (4.1)$$

lo cual indica que las soluciones tienen curvatura constante allí.

En consecuencia, el agujero negro es localmente un espacio de anti-de Sitter. En 2+1 dimensiones este espacio puede ser sumergido en un espacio de cuatro dimensiones de signatura  $(- - ++)$  cuya métrica es

$$ds^2 = -du^2 - dv^2 + dx^2 + dy^2, \quad (4.2)$$

por medio de la ecuación,

$$-v^2 - u^2 + x^2 + y^2 = -l^2. \quad (4.3)$$

El cubrimiento universal de la seudoesfera descrita por (4.3) puede realizarse redefiniendo adecuadamente las coordenadas para evitar líneas tipo tiempo cerradas. Se obtiene, de esta forma la métrica [21]

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{l^2}} + r^2 d\phi^2, \quad (4.4)$$

donde las coordenadas tienen los rangos

$$-\infty \leq t < \infty, \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \quad (4.5)$$

El grupo de isometrías de la variedad descrita por (4.3) es  $SO(2,2)$  y coincide con el grupo de isometrías de (4.4).

El agujero negro también puede construirse explícitamente mediante identificaciones sobre el espacio de anti-de Sitter [20]. La identificación viene dada por una transformación generada por un vector de Killing  $\xi$ , que se construye en forma adecuada en término de los generadores de  $SO(2,2)$ . La estructura causal del espacio no contiene líneas tipo tiempo cerradas.

Hay tres regiones de la variedad (4.3) donde la métrica tiene la misma expresión en términos de las coordenadas  $(t, r, \phi)$ . La expresión para la métrica en cada una de estas regiones es idéntica a (2.2), pero la coordenada  $\phi$  no es periódica. En las coordenadas  $(t, r, \phi)$  el vector de Killing  $\xi$  es de la forma

$$\xi = \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (4.6)$$

y su módulo es

$$\xi \cdot \xi = g_{\phi\phi} = r^2 > 0. \quad (4.7)$$

Identificar puntos sobre la órbita de  $\xi$  corresponde a identificar

$$\phi \rightarrow \phi + 2k\pi, \quad (4.8)$$

con lo cual se obtiene la métrica del agujero negro (2.2), (2.3) con  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ , y  $\phi = \phi + 2\pi$ .

El vector de Killing utilizado en las identificaciones es -en todos los casos-  $\partial/\partial\phi$ , el cual es independiente de  $r_+$  y  $r_-$ . En los casos en que el agujero es extremo,  $|J| = Ml$ , o la masa de este es cero, la relación de  $\partial/\partial\phi$  con los generadores de  $SO(2,2)$  es diferente.

## 4.2 Diagramas de Penrose

Los diagramas de Penrose y las extensiones maximales del agujero negro en 2+1 son los mismos que en 3+1. Como es usual, se introducen las coordenadas de Kruskal para

transformar el elemento de arco

$$ds^2 = -(N^\perp)^2 dt^2 + (N^\perp)^{-2} dr^2 + r^2(N^\phi dt + d\phi)^2, \quad (4.9)$$

en

$$ds^2 = \Omega^2(du^2 - dv^2) + r^2(N^\phi dt + d\phi)^2, \quad (4.10)$$

que no posee una singularidad en el horizonte, puesto que la función  $\Omega$  es regular allí. Una vez que se han encontrado las coordenadas  $(u, v)$ , apropiadas a las regiones  $r_- < r \leq r_+$  y  $r_+ \leq r < \infty$ , se construyen los diagramas de Penrose con la transformación usual de coordenadas

$$u + v = \tan\left(\frac{p + q}{2}\right), \quad u - v = \tan\left(\frac{p - q}{2}\right). \quad (4.11)$$

donde la transformación inversa se define sobre el rango  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

En el caso  $M \neq 0, J = 0$ , se obtiene el diagrama de la Figura 1.

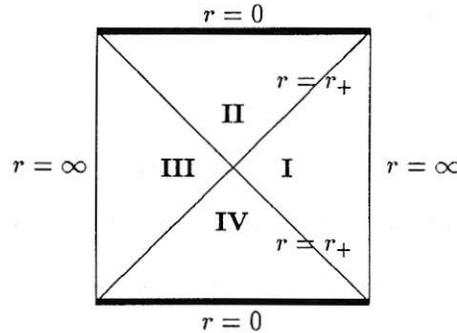


Figura 1  
 Diagrama de Penrose  
 $M \neq 0, J = 0.$

La singularidad viene representada por las líneas horizontales (tipo espacio) y la región asintótica por las líneas verticales (tipo tiempo). El diagrama es cerrado y por lo tanto la variedad es maximal. La estructura causal es la misma que en el caso 3+1. La región **II** está causalmente desconectada del resto de la variedad; un observador en **II** sólo puede caer hacia la singularidad  $r = 0$ , lo que caracteriza la solución tipo agujero negro.

Cuando el momento angular es distinto de cero, la extensión maximal viene dada por el diagrama infinito

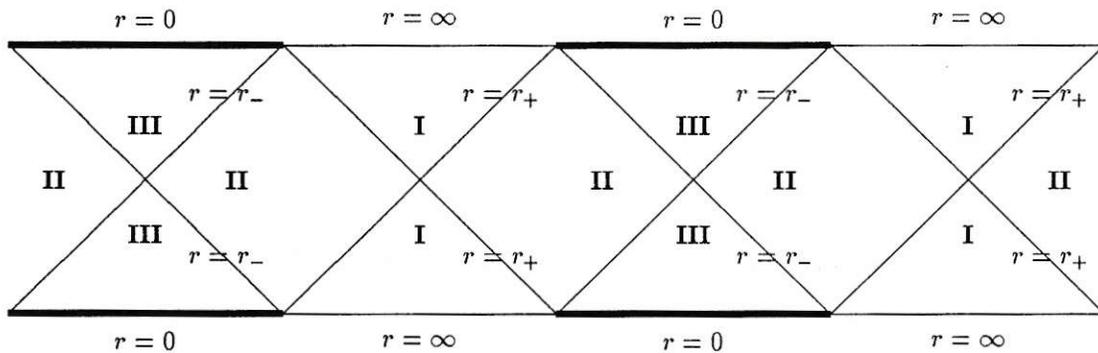


Figura 2

Diagrama de Penrose

$$|J/l| \neq M \neq 0.$$

En esta figura, las líneas horizontales son tipo tiempo mientras que la dirección vertical es tipo espacio.

En los casos  $M = 0$  y  $M = |J/l|$  el análisis es más elaborado (ver [20]) y los diagramas resultantes se muestran en las figuras 3(a) y 3(b).

En las líneas  $r = 0$  de la figura 3(a) el vector de Killing utilizado en las identificaciones tiene norma nula por lo cual son singulares.

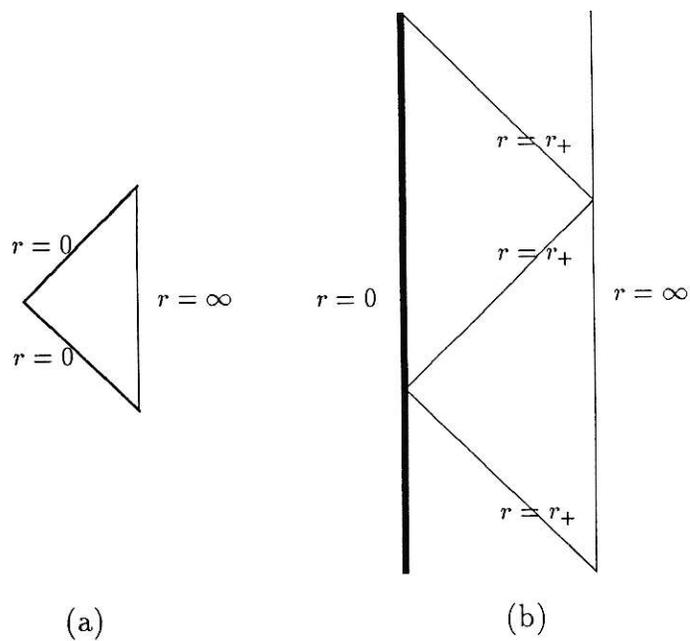


Figura 3

(a) Estado vacío:  $M = 0 = J$

(b) Caso extremo:  $M = |J/l|$

## CAPITULO III.

# ESTRUCTURA GEODESICA DEL AGUJERO NEGRO EN 2+1 DIMENSIONES

## 1 Introducción

Las principales características de un espacio-tiempo pueden ser visualizadas mediante el estudio de su estructura geodésica. Por ejemplo, el recorrido de partículas masivas y fotones en caída libre en la métrica de Schwarzschild permite entender varios fenómenos físicos de gran importancia: el movimiento planetario, los lentes gravitacionales, el retardo de una señal luminosa al cruzar un campo gravitacional, etc.

El primer estudio de las geodésicas para la solución correspondiente a un agujero negro en 2+1 dimensiones fue realizado en [23]. Los autores de este trabajo usan el formalismo de Hamilton-Jacobi para obtener las ecuaciones de movimiento de partículas masivas. Sin embargo, la simplicidad de este modelo de menor dimensionalidad hace innecesario el uso de este método; las simetrías de esta solución permiten derivar directamente las expresiones para las geodésicas tipo tiempo y nulas. Es posible encontrar soluciones exactas para las ecuaciones de las geodésicas tipo tiempo en todos los casos y no sólo para los valores extremos del momento angular del agujero negro [23]. Además, usando los diagramas de Penrose, se da una interpretación diferente del carácter oscilatorio de la solución radial tipo tiempo.

En la sección 2 se derivan las ecuaciones geodésicas. Estas se obtienen en forma directa utilizando las constantes de movimiento asociadas a los dos vectores de Killing y la condición de normalización para las tangentes a las curvas geodésicas.

En la sección 3 se resuelve la ecuación radial y se determinan los límites para el movimiento en esta coordenada. De estos resultados se concluye que el agujero negro con rotación corresponde a un espacio-tiempo geodésicamente completo. Además, geodésicas

completas permiten el paso desde un espacio-tiempo exterior del agujero negro a otro. Esto se discute en base a los diagramas de Penrose.

Se hace notar que mientras las partículas masivas siempre caen dentro del horizonte de eventos y no existen órbitas estables, las partículas sin masa pueden escapar. Este hecho permite reforzar la analogía entre este modelo tridimensional y su contraparte cuadridimensional: fenómenos termodinámicos como la radiación de Hawking, así como la extracción de energía desde un agujero en rotación (proceso de Penrose), son posibles clásicamente. Al final de esta sección, se tabulan las soluciones de las ecuaciones geodésicas junto con los límites para la coordenada radial.

Es posible analizar de un modo directo las principales características de las geodésicas definiendo un *potencial efectivo* [24]. Se presenta este análisis en la sección 4. Se realiza el estudio de las dos soluciones posibles del *potencial efectivo* con el fin de entender el proceso de Penrose y determinar todas las regiones accesibles para las partículas de prueba. Se incluye también un análisis del arrastre de los sistemas inerciales.

## 2 Ecuaciones geodésicas

Los vectores de Killing asociados a la métrica del agujero negro son sólo dos [21],  $\partial/\partial t$  y  $\partial/\partial\phi$ . Luego, las constantes de movimiento a lo largo de las geodésicas son

$$E = -g_{ab}\xi^a u^b = \left[ -M + \frac{r^2}{\ell^2} \right] \left( \frac{dt}{d\lambda} \right) + \frac{J}{2} \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right), \quad (2.1)$$

donde  $\xi^a = (\partial/\partial t)^a$  denota el vector de Killing estático, y

$$L = g_{ab}\Phi^a u^b = r^2 \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right) - \frac{J}{2} \left( \frac{dt}{d\lambda} \right), \quad (2.2)$$

donde  $\Phi^a = (\partial/\partial\phi)^a$  es el vector de Killing rotacional y  $u^a = dx^a/d\lambda$  es la tangente a la curva parametrizada por  $\lambda$ , que está normalizada por la condición

$$u^a u_a = -m^2, \quad (2.3)$$

donde  $m$  vale 1 para geodésicas tipo tiempo y 0 para geodésicas nulas.

La constante  $E$  no puede ser interpretada como la energía local de la partícula en el infinito ya que el campo del agujero negro no es asintóticamente plano.

Realizando los siguientes reescalamientos,

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \frac{r}{\ell\sqrt{M}}, & \hat{\phi} &= \phi\sqrt{M}, & \hat{t} &= \frac{\sqrt{M}}{\ell}t, \\ \hat{\lambda} &= \frac{\lambda}{\ell}, & \hat{E} &= \frac{E}{\sqrt{M}}, & \hat{L} &= \frac{L}{\ell\sqrt{M}}, \\ & & \hat{J} &= \frac{J}{\ell M}, \end{aligned}$$

y usando (2.1), (2.2) y (2.3), obtenemos las ecuaciones geodésicas (en lo que sigue omitiremos los gorros sobre las variables):

$$r^2 \hat{r}^2 = -m^2 \left( r^4 - r^2 + \frac{J^2}{4} \right) + (E^2 - L^2)r^2 + L^2 - JEL, \quad (2.4)$$

$$\dot{\phi} = \frac{(r^2 - 1)L + \frac{1}{2}JE}{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)}, \quad (2.5)$$

$$\dot{t} = \frac{Er^2 - \frac{1}{2}JL}{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)}, \quad (2.6)$$

donde el punto significa  $\frac{d}{d\lambda}$ .

Las ecuaciones (2.4) a (2.6) describen el movimiento de partículas de prueba en el campo del agujero negro. De estas ecuaciones obtendremos las órbitas para partículas con y sin masa y el potencial efectivo radial.

### 3 Soluciones

La ecuación radial (2.4) puede integrarse directamente. La solución para las geodésicas tipo tiempo ( $m = 1$ ) es

$$r^2(\lambda) = \frac{1}{2} [\alpha + \gamma \text{sen}(2(\lambda - \lambda_0))], \quad (3.1)$$

y para las geodésicas nulas ( $m = 0$ ),

$$r^2(\lambda) = \begin{cases} \alpha(\lambda - \lambda_0)^2 - \frac{\beta}{\alpha}, & \alpha \neq 0 \\ 2\sqrt{\beta}(\lambda - \lambda_0), & \alpha = 0 \text{ y } \beta \neq 0 \\ \text{constante} & \alpha = 0 \text{ y } \beta = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

con  $\alpha = E^2 - L^2 + m^2$ ,  $\beta = L^2 - JEL - \frac{m^2 J^2}{4}$  y  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}$ .

Es claro de (3.1) que siempre existe un límite superior finito  $r_{\max}$  para la coordenada radial, que cumple la relación  $r_{\max} > r_+$ . Esto significa que las partículas masivas no pueden escapar del agujero negro. Esta desigualdad puede ser vista como sigue: reemplazando  $r^2$  por  $u + r_+^2$ , (2.4) queda como

$$\frac{\dot{u}^2}{4} = -u^2 + B_+ u + C_+^2, \quad (3.3)$$

donde

$$B_{\pm} = E^2 - L^2 + m^2(1 - 2r_{\pm}^2) \text{ y } C_{\pm} = r_{\pm} \left( E - \frac{JL}{2r_{\pm}^2} \right).$$

El lado derecho de (3.3) tiene dos raíces reales para  $u$ , una positiva,  $u_1$ , y la otra negativa,  $-u_2$ . Luego,  $\dot{u}$  es real sólo para  $-u_2 \leq u \leq u_1$ , esto implica que  $r_{\max}^2 = r_+^2 + u_1 > r_+^2$  ya que  $u_1$  es positiva. También puede verse de (2.4) que existe un límite inferior ( $r_{\min}$ ) diferente de cero si

$$\alpha > 0 \text{ y } \beta < 0. \quad (3.4)$$

Similarmente, reemplazando  $r^2$  por  $v+r_-^2$  en Ec. (2.4), concluimos que el límite inferior verifica  $r_{\min} < r_-$ .

Si las condiciones (3.4) no son satisfechas, las geodésicas tipo tiempo terminan en la singularidad  $r = 0$ <sup>4</sup>. Luego, este espaciotiempo es geodésicamente completo, *i.e.*, todas las geodésicas tipo tiempo, con la excepción de aquellas que terminan en la singularidad, tienen una longitud infinita del parámetro afín, tanto en la dirección del pasado como del futuro. Una condición necesaria para que  $\beta < 0$  es  $J \neq 0$ , luego todas las partículas masivas llegan a la singularidad en el agujero negro estático.

Del mismo modo, observamos de (3.2) que este espacio-tiempo es también completo para las geodésicas nulas, con la condición de que  $J$  no se anule. En consecuencia, la solución con rotación es geodésicamente completa.

Contrariamente al caso  $m = 1$ ,  $r_{\max}$  puede ser infinito para las geodésicas nulas. Esto ocurre si  $E^2 \geq L^2$  ( $\alpha \geq 0$ ). Las partículas sin masa pueden escapar del agujero negro.

Otro notable hecho del caso sin masa es la existencia de órbitas circulares de radio arbitrario. Esto ocurre si  $\alpha$  y  $\beta$  se anulan simultáneamente, lo que corresponde a  $E = L$  con  $|J| = 1$  (agujero negro extremo). La misma condición permite geodésicas tipo tiempo circulares [23]. En este caso, sin embargo, se tiene una situación límite, puesto que el radio de la órbita coincide con el radio del horizonte.

En la resolución de las ecuaciones geodésicas (2.5) y (2.6), consideraremos tres casos,  $J = 0$ ,  $0 < |J| < 1$ , y  $|J| = 1$ . Las soluciones para  $\phi$  y  $t$  se muestran en Tabla 1 y los límites radiales en Tabla 2. Las trayectorias de partículas con y sin masa están dibujadas en las figuras 5 y 6.

La coordenada radial para las geodésicas tipo tiempo es una función periódica del parámetro afín  $\lambda$  (3.1). Los límites para este movimiento son mayores y menores que los horizontes externo e interno respectivamente. Este comportamiento puede ser entendido mediante los diagramas de Penrose para el agujero negro con rotación [21], que se incluye en la figura 4. El diagrama está formado por una secuencia infinita de las regiones I

---

<sup>4</sup>La naturaleza de esta singularidad se discute en [21]

$(r_+ \leq r < \infty)$ , II  $(r_- < r < r_+)$  y III  $(0 < r \leq r_-)$ . Vemos que la geodésicas tipo tiempo  $\mathcal{A}$ , que comienza en un punto de la región I puede cruzar  $r_+$  y  $r_-$  y alcanzar la singularidad. Sin embargo, la geodésicas  $\mathcal{B}$  evita la singularidad, cruzando  $r_+$  y  $r_-$  infinitas veces. Esto es esencialmente una consecuencia de la extensión maximal del espacio-tiempo de 2+1 dimensiones y del carácter tipo tiempo de la singularidad, como se muestra en la figura 4. Nótese, de la expresión para la coordenada  $t$  dada en Tabla 1, que cualquier radiación emitida por una partícula cuando cruza  $r_+$ , sufriría un corrimiento infinito hacia el rojo para un observador externo en I, y un corrimiento infinito hacia el azul cuando cruce  $r_-$ .

## 4 Potenciales efectivos y proceso de Penrose

La ecuación radial (2.4) es una función cuadrática de  $E$ , y puede escribirse como

$$\dot{r}^2 = (E - V_{\text{eff}}^+)(E - V_{\text{eff}}^-), \quad (4.1)$$

donde las raíces  $V_{\text{eff}}^\pm$  son

$$V_{\text{eff}}^\pm(r) = \frac{JL}{2r^2} \pm \frac{1}{r^2} \sqrt{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)(L^2 + m^2r^2)}. \quad (4.2)$$

Ambas raíces coinciden en el horizonte de eventos

Es directo, pero tedioso, mostrar que para geodésicas tipo tiempo  $V_{\text{eff}}^+$  ( $V_{\text{eff}}^-$ ) es una función monotónamente creciente (decreciente) en la región I; esto implica que no hay órbitas estables en esa región. También podemos ver que no es posible definir el potencial efectivo en la región II. Para  $m = 0$ ,  $V_{\text{eff}}^\pm$  tiende asintóticamente a  $\pm L$ , excepto para el agujero negro extremo. En ese caso,  $r_+^2 = r_-^2 = 1/2$ , y el potencial efectivo tiene una sección constante, permitiendo órbitas circulares, como se mencionó en la sección 3.

### Caso sin rotación

En la figura 7 se muestran los potenciales efectivos para  $M > 0$ ,  $M = 0$ ,  $-1$ . El caso  $M = -1$  corresponde a un espacio anti-de Sitter; órbitas ligadas están permitidas. El estado vacío de la configuración del agujero negro se obtiene para  $M = 0$ , ( $r_+ = 0$ ). En este caso el potencial efectivo tiende a  $L$  para  $r = 0$ . Todas las partículas con  $E \geq L$  caen al origen. El comportamiento es, por consiguiente, cualitativamente diferente al de los casos con  $M > 0$ .

En la figura 7 no aparecen potenciales efectivos para  $M < -1$ . La forma es similar a la obtenida para  $M = -1$  debido a que no existe un horizonte de eventos y el espaciotiempo tiene curvatura constante negativa.

La figura 8 muestra el potencial efectivo para geodésicas nulas. En los casos con  $M > 0$  las partículas sin masa y  $E \geq L$  pueden escapar del agujero negro. Se puede notar que

estos potenciales tienen una forma similar a la de los potenciales para partículas masivas con momento angular en un agujero negro de Schwarzschild en cuatro dimensiones.

### Caso con rotación (Proceso de Penrose)

Los potenciales efectivos para partículas con y sin masa se muestran en las figuras 9 y 10. Como en el caso con  $J = 0$ , sólo las partículas sin masa pueden escapar del agujero negro.

A continuación describiremos brevemente el proceso de Penrose, que permite la extracción de energía desde un agujero negro en rotación. Para mayores detalles de este proceso pueden consultarse las referencias [25] y [24]. En general, una métrica estacionaria en 2+1 dimensiones se escribe como

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{rr}dr^2. \quad (4.3)$$

En función de esta expresión el potencial efectivo queda expresado como

$$V_{\text{eff}}^{\pm}(r) = \left[ \frac{w \pm (w^2 - g^{\phi\phi})}{(g^{tt})^{1/2}} \right], \quad (4.4)$$

donde  $w = -g_{t\phi}/g_{\phi\phi}$  es la velocidad angular correspondiente al arrastre de los sistemas inerciales. Es claro de la ecuación (4.1), que una partícula sólo puede moverse en las regiones donde  $E \geq V_{\text{eff}}^+$  o  $E \leq V_{\text{eff}}^-$ . Esto da lugar a regiones prohibidas, tal como se señala en la figura 10, para fotones, que es el caso que discutiremos, pues permite la extracción de energía. De la figura 10 se puede apreciar que en el caso con  $JL < 0$  es posible que  $E \leq 0$  en la ergoregión, sin que la ecuación (4.1) deje de tener solución física. Como se mencionó en la sección II, la constante  $E$  no puede ser interpretada como la energía local de la partícula en el infinito. Sin embargo, se exige que la energía medida por un observador cerca del horizonte con una velocidad  $U$  sea positiva. Un sistema conveniente lo constituye uno que tenga un momento angular nulo y que se mantenga a una distancia fija, circulando el agujero negro a una velocidad  $w$ . Puede mostrarse que la

energía medida por este observador será positiva definida siempre que se verifique

$$E \geq wL \quad (4.5)$$

En la ergoregión pueden por consiguiente existir fotones que se dirijan en el sentido positivo del tiempo y tengan, sin embargo,  $E < 0$ . En algún punto de la ergoregión se pueden crear dos fotones, con energías  $+E$  y  $-E$ , respectivamente, de modo que la energía total sea cero. El fotón con energía positiva puede escapar del agujero y alcanzar el infinito, mientras que el que tiene energía negativa es atrapado y cruza el horizonte. Esto ocurre siempre que el fotón negativo tenga un momento angular negativo superior al del fotón positivo, de modo que el agujero negro pierde momento angular. Por consiguiente, en el proceso de Penrose la energía extraída proviene de la energía de rotación del agujero.

Cuando  $J$  es diferente de cero, los sistemas inerciales son arrastrados con una velocidad angular  $w$  igual a

$$w = \frac{J}{2r^2}. \quad (4.6)$$

En el agujero negro de Kerr en cuatro dimensiones, la velocidad angular de los sistemas arrastrados depende de la masa, tiene el mismo signo de  $J$  y decae para  $r$  grande como  $r^{-3}$ .

## 5 Discusión

En este capítulo se han resuelto exactamente las ecuaciones para las geodésicas tipo tiempo y nulas para el agujero en 2+1 dimensiones. Las soluciones reflejan la singularidad de coordenadas en los horizontes como puede verse de la Tabla 1 y figura 6. Se muestra que sólo el agujero negro con rotación es geodésicamente completo. El carácter tipo espacio de la singularidad en  $r = 0$  trae como consecuencia que el agujero negro sin rotación sea geodésicamente incompleto. Puesto que las partículas masivas no pueden escapar del agujero negro, el proceso de Penrose puede realizarse sólo con partículas sin masa.

La métrica para el agujero negro con carga [4] se obtiene realizando el cambio  $N^2 \rightarrow N^2 + \frac{1}{2}Q^2 \log(r/r_0)$ , donde  $Q$  es la carga eléctrica del agujero y  $r_0$  es una constante. En este caso se pueden tener dos, uno o ningún horizonte [26] y el potencial efectivo podría tener un mínimo local, lo que llevaría a un comportamiento muy diferente para las partículas de prueba. El caso cargado requiere un estudio adicional para encontrar su estructura geodésica.

Tabla 1: Geodésicas tipo tiempo ( $m = 1$ ) y nulas ( $m = 0$ ) para diferentes valores de  $J$ . Hemos definido  $f(x; B; C) = \log \left| \frac{x}{2C\sqrt{-m^2x^2 + Bx + C^2} + 2C^2 + Bx} \right|^a$  y  $R(x; B; C) = \sqrt{-m^2x^2 + Bx + C^2}$ .

CASO	ECUACION DE LA ORBITA
$J = 0$	$\phi = \pm \frac{1}{2} f(r^2; E^2 - L^2 + m^2; L) + \phi_0$ $t = \pm \frac{1}{2} f(r^2 - 1; E^2 - L^2 - m^2; E) + t_0$
$0 < J^2 < 1^b$	$\phi = \pm \frac{1}{4} \frac{J}{\sqrt{1 - J^2}} \left[ \frac{1}{r_+} f(r^2 - r_+^2; B_+; C_+) - \frac{1}{r_-} f(r^2 - r_-^2; B_-; C_-) \right] + \phi_0^c$ $t = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - J^2}} \left[ r_+ f(r^2 - r_+^2; B_+; C_+) - r_- f(r^2 - r_-^2; B_-; C_-) \right] + t_0$
$J^2 = 1$	$\phi = \mp \sqrt{\frac{1}{8}} J \left[ f(x; B; C) + \frac{R(x; B; C)}{Cx} \right] + \phi_0^d$ $t = \pm \sqrt{\frac{1}{8}} \left[ f(x; B; C) - \frac{R(x; B; C)}{Cx} \right] + t_0$

<sup>a</sup> Notar que  $f(x; B; 0)$  es independiente de  $x$ .

<sup>b</sup> El caso  $J = 0$  se obtiene usando directamente la prescripción  $\lim_{J \rightarrow 0^\pm} \frac{J}{r_\pm} = \pm 2$ .

<sup>c</sup>  $B_\pm = E^2 - L^2 + m^2(1 - 2r_\pm^2)$  y  $C_\pm = r_\pm \left( E - \frac{JL}{2r_\pm^2} \right)$ .

<sup>d</sup> Aquí  $x = r^2 - \frac{1}{2}$ ,  $B = E^2 - L^2$  y  $C = \sqrt{\frac{1}{2}}(E - L \operatorname{sgn} J)$ .

Tabla 2: Cotas radiales para geodésicas tipo tiempo ( $m = 1$ ) y nulas ( $m = 0$ ) para valores diferentes de  $J$ .

CASO		COTAS RADIALES	
$J = 0$	$m = 1$	$0 < r^2 \leq \frac{1}{2} [\sqrt{[(E+L)^2+1][(E-L)^2+1]} + E^2 - L^2 + 1]$	
	$m = 0$	$0 < r^2 \leq \begin{cases} \infty & \text{si } E^2 \geq L^2 \\ \frac{L^2}{L^2 - E^2} & \text{si } E^2 < L^2 \end{cases}$	
$0 < J^2 \leq 1$	$m = 1$	$\frac{1}{2} [\alpha + \gamma]^a \geq r^2 \geq \begin{cases} \frac{1}{2} [\alpha - \gamma] & \text{if } \alpha > 0 \text{ y } \beta < 0 \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$	
	$m = 0$	$0 < r^2 < \infty$	si $E^2 \geq L^2$ y $L^2 \geq JEL$
		$\frac{JEL - L^2}{E^2 - L^2} \leq r^2 < \infty$	si $E^2 > L^2$ y $L^2 < JEL$
	$0 < r^2 \leq \frac{L^2 - JEL}{L^2 - E^2}$	si $E^2 < L^2$ y $L^2 > JEL$	

$${}^a\alpha = E^2 - L^2 + 1, \beta = L^2 - JEL - J^2/4, \gamma = \sqrt{[(E+L)^2+1+J][(E-L)^2+1-J]}.$$

Figura 4. Diagrama de Penrose maximalmente extendido para un agujero negro con rotación no extremo ( $0 < J^2 < 1$ ).

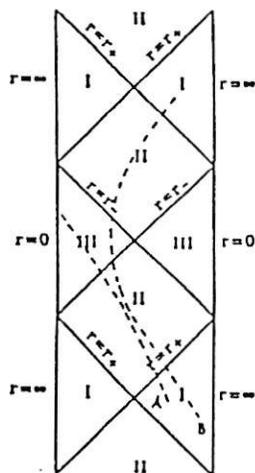


Figura 5. Orbitas alrededor de un agujero negro sin rotación a)  $m = 1$  con  $E = 2$  y  $L = 2$ , b)  $m = 0$  con  $E > L$  y  $E < L$ .

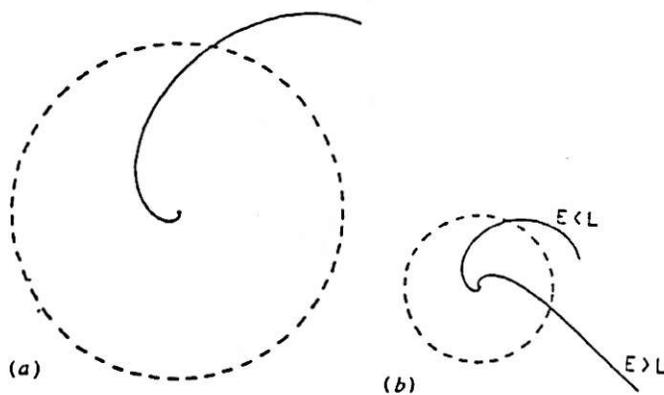


Figura 6. Orbitas alrededor de un agujero negro en rotación a)  $m = 1$  con  $E = 2$ ,  $L = 2$ ,  $J = 0.5$ , b)  $m = 1$  con  $E = 2$ ,  $L = 2$ ,  $J = -0.5$ . Como puede verse de la Tabla 1, la expresión que relaciona  $\phi$  y  $r$  diverge en los horizontes. Luego, las trayectorias que se aproximan al los horizontes giran alrededor de ellos un número infinito de veces.

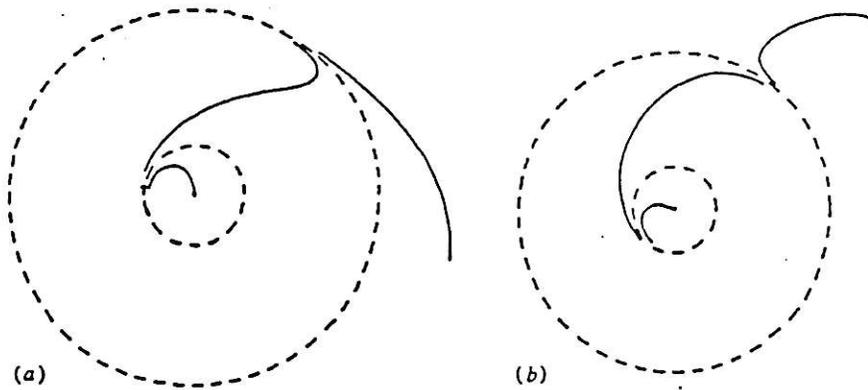


Figura 7. Ejemplos de potenciales efectivos para partículas masivas con diferentes valores de  $M$ .

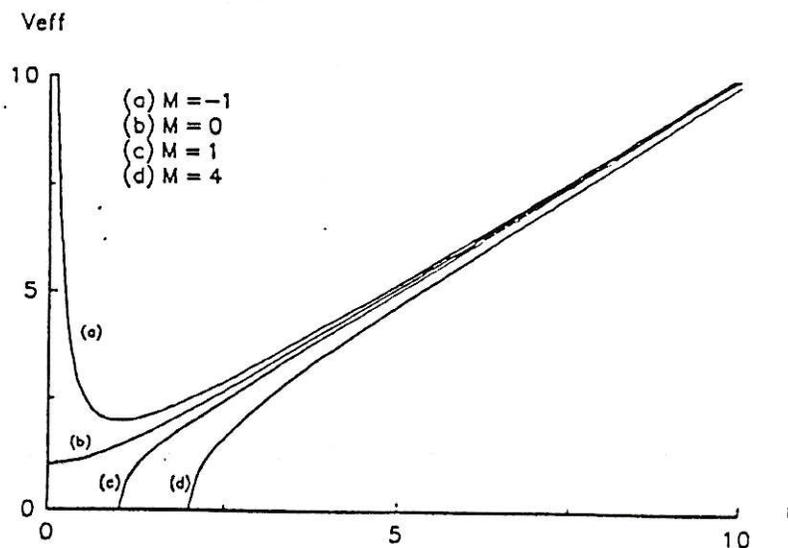


Figura 8. Ejemplos de potenciales efectivos para partículas sin masa con diferentes valores de  $M$ .

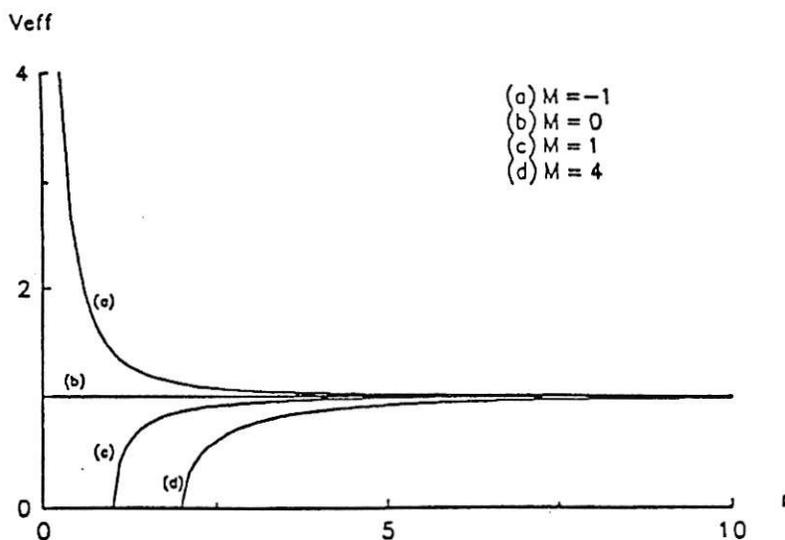


Figura 9. Potenciales efectivos para partículas masivas con  $JL < 0$  y  $JL > 0$ . Las regiones entre  $V_{\text{eff}}^+$  y  $V_{\text{eff}}^-$  están prohibidas.

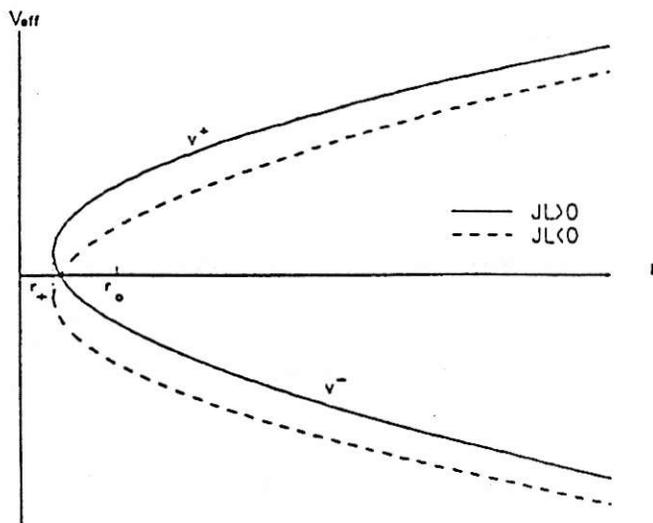
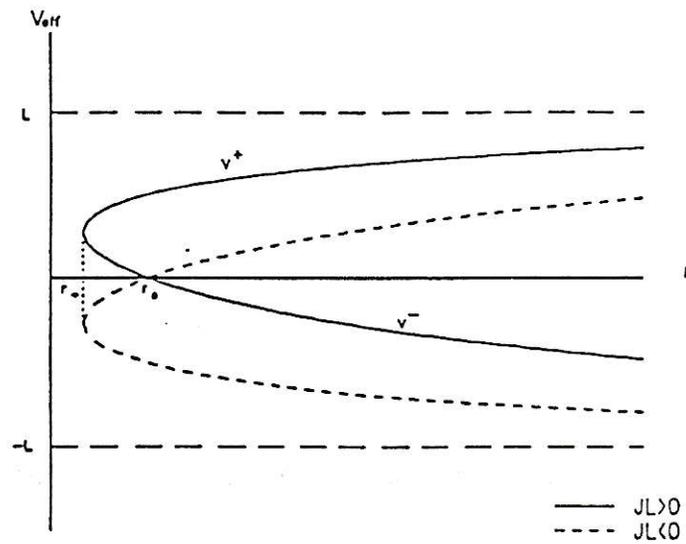


Figura 10. Potenciales efectivos para partículas sin masa con  $JL < 0$  y  $JL > 0$ . Las regiones entre  $V_{\text{eff}}^+$  y  $V_{\text{eff}}^-$  están prohibidas.



## CAPITULO IV.

# EQUILIBRIO ESTELAR 2+1 DIMENSIONES

## 1 Introducción

En 3+1 dimensiones existe un límite superior en relatividad general para la razón entre la masa y el radio de una esfera estática constituida por fluidos:  $M/R \leq 4/9$ . La violación de esta restricción implica la existencia de una presión central infinita, lo que conduce a la imposibilidad de tener el fluido en equilibrio hidrostático [27]. Este resultado indica que una estrella suficientemente masiva puede volverse inestable y colapsar. La masa crítica ( $M_c$ ) de la estrella es menor que el límite de Schwarzschild (es decir, el límite que se encuentra de imponer la condición de que la signatura del espaciotiempo no cambie),  $M_c = 4R/9 < R/2$ . La inclusión de la constante cosmológica ( $\Lambda$ ) no cambia significativamente la posibilidad de colapso [28].

Por otra parte, en el marco newtoniano una estrella con densidad de energía uniforme puede tener cualquier tamaño, puesto que la presión central crece linealmente con el radio. No existe un límite superior para  $M/R$ .

En 2+1 dimensiones con  $\Lambda = 0$ , el radio de una esfera fluída estática depende solamente de la densidad de masa y no de la presión central [10]. Este hecho es una consecuencia de que no existe atracción gravitacional en este caso. El resultado encontrado en [10] descarta la posibilidad de que exista colapso gravitacional para  $\Lambda = 0$ .

Otros trabajos [13] han concluido que todas las estructuras en equilibrio hidrostático que obedecen una ecuación de estado de tipo politrópico, tienen una masa gravitacional constante, igual a una de las masas fundamentales que pueden construirse en la teoría, a saber,  $1/k$ , y producen espaciotiempos de volumen finito. En el capítulo V se discute con mayor detalle el significado de esta masa.

Estos resultados son consistentes con la ausencia de una solución a la geometría de Schwarzschild en  $2 + 1$  dimensiones cuando no se incluye constante cosmológica.

Las soluciones de masas puntuales con constante cosmológica presentan horizontes. Si  $\Lambda \geq 0$ , existe un horizonte cosmológico con una singularidad desnuda.

La existencia de la solución de agujero negro sugiere la posibilidad que una distribución de fluido en  $2 + 1$  dimensiones pueda colapsar, como ocurre con las estrellas en cuatro dimensiones cuya masa es mayor que el límite superior para materia fría catalizada en equilibrio hidrostático al final de su fase termonuclear. Se ha mostrado que para una distribución esféricamente simétrica de fluido sin presión (polvo), en  $2 + 1$  dimensiones, el colapso conduce a un estado final de agujero negro [7].

En el presente capítulo estudiaremos el equilibrio hidrostático de estrellas en  $2 + 1$  dimensiones constituidas por materia fría catalizada. La evolución de las estrellas en cuatro dimensiones está determinada básicamente por su masa. Durante esta evolución el equilibrio está determinado por la presión interna generada por la radiación y las fuerzas gravitacionales que inducen la contracción. Durante gran parte de la vida de la estrella, la radiación es producida por las reacciones termonucleares que ocurren en el interior. En las fases finales de la evolución estelar el material ya no es capaz de generar una cantidad significativa de energía a través de procesos de fusión. Esta materia es fría, en el sentido de que se comporta termodinámicamente como un fluido que está a una temperatura cero y catalizada en el sentido que casi toda la energía de fusión le ha sido extraída [29]. Así, el estado de la materia fría queda determinado por su densidad y composición.

Puesto que en cuatro dimensiones los modelos con materia fría permiten calcular, con una aproximación razonable, por ejemplo, el límite superior para la masa de una estrella de neutrones, se justifica, realizar un cálculo con un fluido perfecto a temperatura cero.

En la sección 2 de este capítulo se estudian las ecuaciones de campo para la gravitación en presencia de fluidos perfectos y se encuentra la ecuación para el equilibrio hidrostático de una estrella con simetría esférica cuando se incluye la constante cosmológica. A partir de esta ecuación es posible encontrar lemas generales que permiten entender, sin considerar

ningún modelo particular, cuando existirá equilibrio para fluidos en  $2 + 1$  dimensiones. Este es el contenido de la sección 3. Finalmente, la sección 4 contiene la derivación del límite superior para las masas de estrellas en  $2 + 1$  dimensiones. Por sobre este límite no es posible el equilibrio hidrostático y, en consecuencia, el colapso es inevitable [30].

## 2 EQUILIBRIO HIDROSTATICO DE FLUIDOS PERFECTOS EN 2+1 DIMENSIONES

### 2.1 La ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkov

Consideraremos las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica para un fluido perfecto con una densidad de energía  $\rho$  y una presión  $p$ .<sup>5</sup>

$$\frac{1}{k}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu}) = (\rho + p)u_\nu u_\mu - pg_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde  $k$  es la constante de la gravitación en 2+1 dimensiones. No consideraremos ninguna ecuación de estado particular que relacione  $\rho$  y  $p$  puesto que buscamos sólo las propiedades generales del equilibrio de fluidos en 2+1 dimensiones.

Ocupando la expresión para una métrica estática con simetría esférica,  $ds^2 = e^{2\nu(r)}dt^2 - e^{2\lambda(r)}dr^2 - r^2d\phi^2$ , las ecuaciones (2.1) se reducen a

$$e^{-2\lambda(r)}\lambda' = (k\rho + \Lambda)r, \quad (2.2)$$

y

$$e^{-2\lambda(r)}\nu' = (kp - \Lambda)r. \quad (2.3)$$

La ecuación (2.2) puede integrarse directamente, obteniéndose

$$e^{-2\lambda} = C - \frac{k}{\pi}\mu(r; \Lambda), \quad (2.4)$$

donde

$$\mu(r) = \int_0^r 2\pi(\rho(r') + \Lambda)r' dr', \quad (2.5)$$

---

<sup>5</sup>La acción gravitacional está normalizada como  $\frac{1}{2k} \int \sqrt{-g} R d^3x$ , y  $G = c = \hbar = 1$ .

y la constante de integración  $C$  debe ser tal que el origen sea parte del espaciotiempo, *i.e.*,  $C > 2\mu(r)$ , para  $0 \leq r \leq R$ , donde  $R$  es el radio de la estrella, y es fijada exigiendo que la solución en el exterior de la estrella sea la métrica exterior del agujero negro. Una discusión sobre este punto en una estrella en 3+1 dimensiones se encuentra en [31]

Las ecuaciones anteriores, junto con la expresión que se obtiene de imponer la conservación del tensor de energía-momentum, dan como resultado la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkov en 2 + 1 dimensiones

$$\frac{dp}{dr} = \frac{-(p + \rho)(kp - \Lambda)r}{C - \frac{k}{\pi}\mu(r)}. \quad (2.6)$$

Esta es la ecuación que gobierna el equilibrio hidrostático de estructuras bajo interacción gravitacional, y puede ser integrada con la condición de borde usual para la presión central  $p(r = 0) = p_c$ . El radio de la estrella está definido por la condición  $p(r = R) = 0$ , y la masa del fluido viene dada por la expresión

$$M \equiv \mu(r = R; \Lambda = 0) = 2\pi \int_0^R \rho(r)r dr = \mu(R) - \frac{\pi}{k} \quad (2.7)$$

El denominador de la ecuación (2.6) es  $g_{11}$  y, por consiguiente, debe ser positivo en la superficie de la estrella. Esto establece un límite superior para  $M$ , dado por

$$M \leq \frac{\pi}{k} [C - \Lambda R^2]. \quad (2.8)$$

Esta condición se obtiene imponiendo que la signatura de la métrica no cambie a través del espaciotiempo, y es, en consecuencia, el análogo de la condición  $M < R/2$  en el caso de la solución de Schwarzschild.

Discutiremos, a continuación, el significado de la ecuación (2.6) siguiendo los argumentos dados en la referencia [32]. En cuatro dimensiones la ecuación equivalente (2.6) es la generalización de la ecuación newtoniana para el gradiente de presión de una estrella en equilibrio hidrostático,

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r^2(1 - 2m(r)/r)}. \quad (2.9)$$

Discutiremos las razones por las que el gradiente de presión se incrementa en relatividad general, comparándolo con la expresión newtoniana dada por

$$\frac{dp}{dr} = \frac{G\rho m(r)}{r^2}. \quad (2.10)$$

La ecuación (2.9) se reduce a la expresión newtoniana (2.10) cuando la presión es despreciable frente a la densidad de materia y cuando estamos lejos del radio de Schwarzschild (condiciones que resultan válidas en la gran mayoría de los sistemas estelares). En relatividad general el gradiente de presión se incrementa por las siguientes razones:

i) la presión actúa como fuente del campo gravitacional lo que da lugar a un término proporcional a  $p$  además de  $m(r)$ .

ii) la gravedad también actúa sobre  $p$  y, en consecuencia, la densidad  $\rho$  es reemplazada por  $(\rho + p)$ .

iii) la fuerza gravitacional aumenta más rápido que la newtoniana, *i.e.*,  $1/r^2$ . Este factor es reemplazado por  $1/r^2(1 - 2m/r)$ .

En 2+1 dimensiones, la relatividad general no posee un límite newtoniano, por lo que la interpretación anterior deja de tener validez. En las conclusiones volveremos sobre este punto.

Algunas propiedades importantes del equilibrio hidrostático de fluidos perfectos en 2 + 1 dimensiones se desprenden de los siguientes resultados generales, válidos independientemente de las ecuaciones de estado consideradas.

*LEMA 1: El equilibrio hidrostático de fluidos perfectos sólo es posible para  $\Lambda \leq 0$ .*

Demostración: Evaluando ecuación (2.6) en la superficie de la esfera, donde  $p = 0$ , obtenemos

$$\left. \frac{dp}{dr} \right|_{r=R} = \frac{\Lambda \rho R}{C - \frac{k}{\pi} \mu(R)}. \quad (2.11)$$

El denominador es positivo en la superficie de la esfera. Pero, dado que  $p(r < R) > 0$ , el gradiente de presión debe ser no positivo en la superficie y, en consecuencia, podemos concluir que  $\Lambda \leq 0$ .  $\square$

Como se había mencionado en la introducción, los primeros cálculos de un modelo estelar en  $2 + 1$  dimensiones fueron realizados en [10]. Como el equilibrio hidrostático es posible sólo cuando hay constante cosmológica negativa, la solución del agujero negro puede considerarse como la solución exterior de una distribución de materia de radio finito. Esto refuerza la idea original de que este simple modelo tridimensional mantiene una semejanza con su contraparte cuadrimensional.

Ya que estamos interesados en el estudio de fluidos cerca del equilibrio hidrostático, consideraremos sólo el caso con constante cosmológica negativa. En lo que sigue mantendremos la notación del capítulo II y escribiremos  $\Lambda$  como  $-1/l^2$ .

El Lema 1 permite afirmar que puede haber una estrella en equilibrio gravitacional cuya métrica exterior sea la solución del agujero negro. Sin embargo, nada sabemos sobre las condiciones internas del fluido cuando este equilibrio ocurre. Por ejemplo, sabemos que en el mundo cuadrimensional las estrellas más masivas necesitan una mayor presión central para mantenerse en equilibrio. Existe, en el contexto de la gravitación newtoniana, una expresión que cuantifica lo mencionado más arriba y que no tiene en consideración ninguna ecuación de estado en particular. Esta expresión es

$$p_c > \frac{GM^2}{8\pi R^4}. \quad (2.12)$$

La desigualdad (2.12) permite estimar, dada la masa del sistema, los órdenes de magnitud de las temperaturas en el interior de una estrella típica en función de la presión que debe tener el fluido. En este contexto se buscó una expresión semejante en  $2 + 1$  dimensiones, encontrándose el siguiente Lema.

*LEMA 2: La presión central de un fluido en equilibrio hidrostático tiene un límite inferior dado por*

$$p_c > \frac{M}{2\pi l^2 C}. \quad (2.13)$$

Demostración: Reemplazamos en  $\rho$  en términos de  $dm/dr$  y lo introducimos en la ecuación (2.6). La expresión que relaciona  $\rho$  y  $dm/dr$  es

$$\frac{dm}{dr} = 2\pi\rho(r)r. \quad (2.14)$$

Con esto obtenemos

$$\left[ C - \frac{k}{\pi} \left( m(r) + \frac{\pi r^2}{kl^2} \right) \right] \frac{dp}{dr} = - \left[ p + \frac{1}{2\pi r} \frac{dm}{dr} \right] \left[ kp + \frac{1}{l^2} \right] r. \quad (2.15)$$

Reordenando la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{d}{dr} \left[ p \frac{C\pi}{k} + \frac{m(r)}{2kl^2} \right] = -\pi p \left[ p + \rho + \frac{1}{kl^2} \right] + \left[ m(r) - \frac{\pi r^2}{kl^2} \right] \frac{dp}{dr}. \quad (2.16)$$

En el lado derecho de la ecuación (2.16) el factor que multiplica a  $\frac{dp}{dr}$  es  $\mu(r)$ , que exigimos sea positivo puesto que representa la energía total dentro de la esfera de radio  $R$ . En consecuencia, el lado derecho de (2.16) es siempre negativo. Luego, la función  $\mathfrak{R}(r) = \frac{p(r)\pi C}{k} + \frac{m(r)}{2kl^2}$  es monótonamente decreciente, y  $\mathfrak{R}(r=0) > \mathfrak{R}(r=R)$ . Esto conduce al límite inferior dado por (2.13).  $\square$

La ecuación (2.13) indica que el equilibrio gravitacional implica ciertas restricciones sobre la presión central del fluido y se verifica, como en cuatro dimensiones, que la masa de la estrella gobierna la estabilidad. Esta es la primera indicación en 2+1 dimensiones de que un incremento de masa conlleva un incremento de la presión central y, por consiguiente, el próximo paso es preguntarse por la imposibilidad de que exista, bajo ciertas condiciones para la masa y el radio, una presión central finita que permita el equilibrio.

## 2.2 TEOREMA DE BUCHDAHL

Buchdahl mostró que en  $3 + 1$  dimensiones, las ecuaciones de la estructura estelar relativista para materia fría conducen a la existencia de un límite superior para la masa que está por sobre el límite que se obtiene considerando que el radio de la estrella corresponda a su radio de Schwarzschild,  $M/R = 1/2$ ,

$$\frac{M}{R} \leq \frac{4}{9}. \quad (2.17)$$

El límite (2.17) es válido independiente de la ecuación de estado, siempre que: i) la materia sea descrita por una ecuación de estado de un parámetro que relacione  $p$  y  $\rho$ :  $p = p(\rho)$ ; ii) la densidad sea positiva y monótonamente decreciente ( $d\rho/dr < 0$ ); iii) la materia sea microscópicamente estable ( $dp/d\rho \geq 0$ ).

Bajo estos supuestos, se encuentra el siguiente límite para  $\mu(r)$  en  $2 + 1$  dimensiones

$$\mu(r) \leq \frac{\pi C}{2k} \left[ 1 - \frac{2}{C}(kp - \Lambda)r^2 + \sqrt{\frac{4}{C}(kp - \Lambda)r^2 + 1} \right]. \quad (2.18)$$

Para la demostración del límite dado en la ecuación (2.33) construiremos una expresión que contenga a  $\nu'$  y  $dm/dr$  con el fin de aplicar las condiciones de que la densidad media dentro del fluido disminuya con el radio se encuentra y que  $e^\nu$  es siempre positivo. De las ecuaciones (2.3) y (2.4) se obtiene la siguiente expresión para  $\nu'$

$$\nu' = \frac{(kp - \Lambda)r}{C - \frac{k}{\pi}\mu(r; \Lambda)}. \quad (2.19)$$

Derivando la ecuación (2.19) se encuentra una expresión para  $dp/dr$ . De la ecuación (2.19) y (2.6) se encuentra

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p)\nu'. \quad (2.20)$$

En la ecuación (2.20) reemplazamos  $\rho$  por  $(1/2\pi r)dm/dr$  y  $p$  por la expresión que se deriva de la ecuación (2.19). Igualamos, a continuación, las expresiones obtenidas para

$dp/dr$  provenientes de las ecuaciones (2.20) y (2.19). Con esto se encuentra

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{\nu'}{r} (\beta - 2\mu) \right) + [(\beta - 2\mu)\nu' + \mu'] \frac{\nu'}{r} = 0, \quad (2.21)$$

donde  $\beta \equiv 2\pi C/k$ . Si definimos la variable independiente

$$\xi(r) =: e^{\nu(r)}, \quad (2.22)$$

la ecuación (2.21) puede escribirse como

$$(\beta - 2\mu)^{1/2} \frac{1}{\xi'} \frac{d}{dr} \left( \frac{\xi' (\beta - 2\mu)^{1/2}}{r} \right) = 0. \quad (2.23)$$

Definiendo otra variable independiente dada por la expresión

$$\gamma = \int_0^r dr' r' (\beta - 2\mu)^{-1/2}, \quad (2.24)$$

la ecuación (2.23) es equivalente a la expresión

$$\frac{d^2 \xi}{d\gamma^2} = 0, \quad (2.25)$$

la que puede ser integrada como

$$\xi(r) = \frac{d\xi}{d\gamma} \gamma + \xi(0). \quad (2.26)$$

Ya que  $\xi(0)$  y  $\gamma \geq 0$ , tenemos

$$\frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{d\gamma} \leq \frac{1}{\gamma}. \quad (2.27)$$

En términos de  $r$  y  $\nu(r)$ , (2.26) queda como

$$\frac{(\beta - 2\mu(r))^{1/2}}{r} \frac{d\nu}{dr} \leq \left[ \int_0^r dr' r' (\beta - 2\mu(r))^{-1/2} \right]^{-1}. \quad (2.28)$$

La condición  $dp/dr < 0$ , implica

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{\mu}{r^2} \right), \quad (2.29)$$

y puesto que

$$\int_0^r dr' r' (\beta - 2\mu(r'))^{-1/2} \geq \int_0^r dr' r' \left( \beta - \frac{2\mu(r)}{r^2} r'^2 \right)^{-1/2} \\ = \frac{r^2}{2\mu(r)} \quad (2.30)$$

con lo cual la ecuación (2.2) queda como

$$[1 - x]^{1/2} \leq \frac{x}{r} [1 - [1 - x]^{1/2}]^{-1}, \quad (2.31)$$

donde  $x =: 2\mu(r)/\beta$ . Utilizando las ecuaciones (2.3) y (2.4) para el lado izquierdo de (2.31) puede escribirse como  $(r/C)(kp + 1/l^2)(1 - x)^{1/2}$  y, por lo tanto,

$$\left[ \frac{1}{C} \left( kp + \frac{1}{l^2} \right) + x - 1 \right]^2 \leq 1 - x, \quad (2.32)$$

lo que da, luego de un poco de algebra, la restricción sobre  $\mu(r)$  dada por la ec.(2.18). Con esto termina la demostración.  $\square$

Como vimos en el LEMA 1, el equilibrio hidrostático solamente es posible cuando  $\Lambda \leq 0$ . Para  $\Lambda = 0$  se requiere  $\mu(R) = M \leq \pi/k$  para preservar la signatura de la métrica y en ese caso (2.18) no entrega un límite diferente. Estableciendo que  $-\Lambda = 1/l^2$  y evaluando (2.18) en la superficie del fluido, se encuentra que la masa del fluido satisface

$$M = \mu(R) + \frac{\pi R^2}{l^2} \leq \frac{\pi C}{2k} \left[ 1 + \sqrt{\frac{4R^2}{Cl^2} + 1} \right], \quad (2.33)$$

el cual está sobre el límite (2.8), y se aproxima a ese valor a medida que  $R \rightarrow 0$ .

### 2.3 ESTRELLAS DE DENSIDAD UNIFORME

La ecuación (2.6) puede integrarse fácilmente cuando la densidad del fluido es uniforme. La integración de las ecuaciones de Einstein para  $\rho_o = \text{constante}$  da

$$p(r) = \frac{\rho_o \left[ \left( C - \frac{\pi}{k} \mu(r) \right)^{1/2} - \left( C - \frac{\pi}{k} \mu(R) \right)^{1/2} \right]}{kl^2 \rho_o \left[ C - \frac{k}{\pi} \mu(R) \right]^{1/2} - \left[ C - \frac{\pi}{k} \mu(r) \right]^{1/2}} \quad (2.34)$$

La presión central que se requiere para el equilibrio de un fluido con densidad uniforme es

$$p_c = \frac{\rho_o \left[ C^{1/2} - \left( C - \frac{\pi}{k} \mu(r) \right)^{1/2} \right]}{kl^2 \left[ C - \frac{\pi}{k} \mu(r) \right]^{1/2} - \frac{C^{1/2}}{\rho}}, \quad (2.35)$$

y  $p_c$  es infinita cuando

$$\mu(R) = \frac{\pi C}{k} \left[ 1 - \left( \frac{1}{kl^2 \rho_o} \right)^2 \right], \quad (2.36)$$

o, en términos de la masa  $M$ ,

$$M = \frac{\pi C}{k} \left[ 1 - \left( \frac{1}{kl^2 \rho_o} \right)^2 + \frac{R^2}{Cl^2} \right]. \quad (2.37)$$

La solución exterior se obtiene tomando  $\rho = p = 0$ , y comparándola luego con la métrica del agujero negro

$$ds^2 = -(-M_o + \frac{r^2}{l^2})dt^2 + (-M_o + \frac{r^2}{l^2})^{-2}dr^2 + r^2d\phi^2, \quad (2.38)$$

con  $-\infty < t < \infty$ ,  $0 < r < \infty$ , y  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . (Esta métrica se obtuvo tomando  $k = \pi$ . Usaremos este valor para  $k$  en las siguientes ecuaciones). El parámetro  $M_o$  es la carga conservada asociada con la invariancia asintótica bajo desplazamientos (masa). Esta carga viene dada por una integral de flujo a través de un círculo en el infinito tipo espacio.

El resultado de integrar la ecuación (2.4) e imponer la continuidad de la métrica en la superficie de la estrella determina la relación entre  $M$  y la carga conservada  $M_o$ ,

$$M_o = M - C. \quad (2.39)$$

Esta relación es consistente con el estado vacío considerado en [4], que se obtiene dejando que el agujero negro desaparezca, esto es, considerando que el horizonte se anule.

En el interior, el coeficiente métrico,  $e^{2\nu}$ , se obtiene de las ecuaciones (2.3) y (2.4), ocupando la expresión para  $p(r)$ , dada en (2.34),

$$e^{2\nu} = \left[ \frac{kl^2 \rho_o (1 - \frac{k}{\pi C} \mu(R))^{1/2} - (1 - \frac{k}{\pi C} \mu(r))^{1/2}}{kl^2 \rho_o - 1} \right]^2 \left[ \frac{-M_o + \frac{r^2}{l^2}}{(1 - \frac{k}{\pi C} \mu(r))^{1/2}} \right]. \quad (2.40)$$

## 2.4 DISCUSION

Hemos encontrado de los resultados previos que la presencia de una constante cosmológica negativa abre la posibilidad que una esfera fluida en  $2 + 1$  dimensiones pueda colapsar.

Como vimos en la sección 2, la expresión (2.9) correspondía a la ecuación que gobierna el equilibrio hidrostático en cuatro dimensiones. El numerador de (2.9) tiene un término que depende de la masa total. Por el contrario, el gradiente de presión en (2.6) depende, si no se incluye  $\Lambda$ , de la presión y la densidad en un punto a través del término  $p(p + \rho)$ . La teoría es local y fuera de cualquier fuente, el espaciotiempo es plano, como es bien sabido del hecho que en tres dimensiones el tensor de Weyl es cero, y el tensor de curvatura depende solamente del tensor de energía-momentum. Cuando se incluye una constante cosmológica negativa aparecen efectos no locales. Es directo ver que las ecuaciones (2.9) y (2.6) tienen la misma forma cuando se realiza la integración de las ecuaciones de Einstein con  $\rho_o = \text{constante}$ . Como en cuatro dimensiones, esto implica la existencia de un límite superior para la masa y la posibilidad de colapso.

Si consideramos la métrica del agujero negro como la métrica exterior de una estrella de  $2+1$  dimensiones, la masa presenta un límite superior dado por el teorema de Buchdahl, el

cual representa un refinamiento respecto al obtenido imponiendo que el coeficiente métrico  $g_{oo}$  sea siempre negativo para  $r \geq R$ . Este límite está dado por

$$M_o \leq \frac{C}{2} \left[ \left( 1 + \frac{4\pi R^2}{Cl^2} \right)^{1/2} - 1 \right]. \quad (2.41)$$

El teorema de Buchdahl conduce a un límite dado en la ec.(2.33) y que implica la existencia de un límite superior de masa para un radio fijo. El caso más simple de una estrella con densidad uniforme da lugar a que la presión central se vuelva infinita cuando

$$M_o = C \left[ \frac{R^2}{Cl^2} - \left( \frac{1}{\pi l^2 \rho_o} \right)^2 \right] \quad (2.42)$$

La ecuación (2.42) implica que existe un límite inferior para el radio de una estrella de  $2 + 1$  dimensiones con densidad uniforme, dado por

$$R \geq \frac{C}{\pi 4l \rho_o} \quad (2.43)$$

Es un resultado sorprendente que la solución del agujero negro en  $2 + 1$  dimensiones pueda ser considerada como la solución exterior de una estrella constituida por un fluido perfecto. El equilibrio hidrostático impone los límites sobre la masa y el radio más allá de los cuales la estrella puede colapsar (teorema de Buchdahl). En la referencia [7] se calculó la evolución dinámica de un disco de polvo colapsando. Este cálculo se realizó describiendo el interior del disco con una métrica de Robertson-Walker con constante cosmológica negativa y efectuando el *ajuste* con una métrica exterior dada por la solución de agujero negro. En principio, no podía afirmarse que en  $2+1$  dimensiones un fluido con presión podría colapsar. Los resultados de este capítulo demuestran que efectivamente los fluidos en  $2+1$  dimensiones pueden colapsar y, en consecuencia, el estudio de la situación dinámica queda justificado.

La extensión analítica maximal de la solución del agujero negro contiene, como en el caso cuadrimensional, regiones no físicas. Si suponemos que estas extensiones explican un colapso gravitacional completo, la materia colapsada cubre estas partes no físicas.

Podemos argumentar que el completo colapso gravitacional de un cuerpo esférico produce siempre una región del espaciotiempo que es un agujero negro en  $2 + 1$  dimensiones [33].

# CAPITULO V

## EVAPORACION DEL AGUJERO NEGRO EN 2+1 DIMENSIONES

### 1 Introducción

Los capítulos III y IV consideraron sólo aspectos clásicos del agujero negro en 2+1 dimensiones. Sin embargo, es en el dominio de la termodinámica donde se presentan los problemas conceptualmente más importantes relacionados con los agujeros negros. Resumiremos brevemente los puntos de mayor debate en los problemas que se derivan de la evaporación de un agujero negro como consecuencia de la radiación de Hawking.

i) *La descripción microscópica de los estados internos*

La entropía de un sistema aislado es

$$S = k_B \ln \Omega. \quad (1.1)$$

donde  $\Omega$  es el número de estados microscópicos accesibles al sistema. El hecho de que la entropía de un agujero negro sea macroscópica significa que el número de estados accesibles es enorme. Sin embargo, hasta el momento continúa siendo un problema abierto encontrar una descripción microscópica de estos estados.

ii) *El problema de la pérdida de información*

En la interacción entre un sistema cuántico en presencia de un agujero negro puede haber pérdida de unitariedad debido a que un estado cuántico puro puede desaparecer completamente transformándose en radiación térmica. Puesto que el estado final es térmico (estados cuánticos mezclados), ha habido una evolución de un estado puro en un estado mezclado, con la consiguiente evolución no unitaria [34].

Se han propuesto otras interpretaciones en que no se presentan violaciones a la unitariedad. En [35] se postula un proceso de evaporación que se detiene, dejando un rema-

nente estable con la masa de Planck. El estado final [radiación + remanente], es puro. Otros autores consideran la evaporación completa del agujero negro, en un estado final puro como consecuencia de la correlación que existiría entre la radiación emitida y la materia colapsada dentro de éste [36], [37].

iii) *La descripción termodinámica*

La descripción termodinámica de un agujero negro de Schwarzschild resulta apropiada si se considera que es un sistema con una entropía muy grande a una temperatura distinta de cero. Una situación distinta ocurre, sin embargo, en los agujeros negros que están cerca del caso extremo. En efecto, como se ve de la expresión para la temperatura de un agujero negro de Kerr-Newman (en 3+1 dimensiones),

$$8\pi MT = 2z^{\frac{1}{2}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{J^2}{M^2} + z^{\frac{1}{2}} \right]^{-1}, \quad (1.2)$$

donde

$$z = 1 - \frac{Q^2}{M^2} - \frac{J^2}{M^4}, \quad (1.3)$$

$T$  se anula en el límite extremo,  $z \rightarrow 0$ . Además, la entropía de estos agujeros tiende a un valor finito en este límite, lo que sería contradictorio con el principio de Nernst de la termodinámica. Sin embargo, la entropía es discontinua en  $z = 0$ , y  $S(z = 0) = 0$  [15]. En efecto, como se verá más adelante, las fluctuaciones de la temperatura pueden ser mucho mayores que la temperatura misma, lo cual indica que no se trataría de un sistema cercano al equilibrio.

Esto plantea el problema de entender en este contexto la validez de la descripción semiclásica estándar de la radiación, que desprecia el problema de la reacción que experimenta la geometría debido a la radiación emitida por el agujero (*back reaction*).

La aproximación semiclásica es consistente si la emisión de un cuanto de radiación no cambia apreciablemente la temperatura. Si esto no ocurriese habría una indeterminación en la temperatura de equilibrio, puesto que no se sabría si usar la temperatura antes de la emisión, después de la emisión o bien un valor intermedio. Este es precisamente el problema que se presenta en la fase final de la evaporación del agujero negro en 3+1

dimensiones del tipo Kerr-Newman, como fue probado en [14]. Lo mismo ocurre para agujeros negros extremos con carga dilatónica, donde la gravedad se acopla a un campo de Maxwell y a un campo escalar sin masa. En ambos casos se encontró que los procesos de *scattering* pueden describirse adecuadamente sólo si la reacción de la geometría a la radiación emitida es incluida en forma consistente [14].

La investigación de modelos gravitacionales de menor dimensionalidad es un intento de dar respuesta a los problemas antes señalados en un contexto más simple. En este capítulo nos centraremos en el punto iii), mencionado más arriba, en relación a la descripción termodinámica de agujeros extremos. Con el fin de establecer claramente el problema comparamos a continuación los procesos de evaporación de los agujeros negros en 3+1 y 2+1 dimensiones.

En 3+1 dimensiones, el agujero negro de Schwarzschild finaliza la evaporación con temperaturas altísimas puesto que su temperatura es inversamente proporcional a su masa. Además, en este punto se produce una discontinuidad topológica al pasar de un espacio con curvatura no nula y dependiente de la distancia al agujero ( $M \neq 0$ ), a un espacio plano, como es el de Minkowski ( $M = 0$ ). Sin embargo, como vimos más arriba, los agujeros negros extremos de Kerr-Newman tienen también una temperatura cero en las fases finales de su evaporación.

El agujero negro en 2+1 dimensiones difiere significativamente del de Schwarzschild en los aspectos termodinámicos. La temperatura de Hawking decrece como  $m^{1/2}$  a medida que se desarrolla la evaporación. Por otra parte, se puede ver de la ley de Stefan para la emisión total de radiación en la aproximación cuasiestática,

$$\frac{dM}{dt} = -\sigma AT^3, \quad (1.4)$$

donde  $A = 2\pi r_+$  y  $t$  es el tiempo coordenado, que el agujero negro requeriría un tiempo infinito para evaporarse completamente. Por consiguiente, la fase final de la evaporación no sería un proceso violento. Además, el estado final hacia el cual tiende el sistema está caracterizado por una métrica que no es globalmente la de anti-de Sitter, sino más bien

el de un agujero negro sin masa, una suerte de cuello infinitamente largo y delgado [4]. En este sentido, el agujero de masa nula en  $2+1$  es análogo al agujero de Kerr-Newman extremo en  $3+1$ . Por lo tanto, cabe preguntarse también en este caso sobre la validez de la aproximación de equilibrio termodinámico.

En [14] se probó que la descripción termodinámica de un agujero negro de Schwarzschild no es adecuada para un agujero que haya alcanzado la masa de Planck en el proceso de evaporación. En el caso de Kerr-Newman se encontró que este quiebre ocurre para masas que pueden ser mucho mayores que la masa de Planck. En el caso de que quede un remanente al terminar la evaporación de un agujero de Schwarzschild, éste tendría la masa de Planck. Contrariamente a  $3+1$  dimensiones, en que la masa de Planck es la única masa relevante (si no hay constante cosmológica), en el espacio anti-de Sitter la escala de longitud asociada a la constante cosmológica permite definir otra unidad de masa independiente.

La evaporación del agujero negro en  $2+1$  dimensiones presenta especial interés dado que, a diferencia del caso en  $3+1$  dimensiones, la evaporación tomaría un tiempo infinito y que, por otra parte, las condiciones de borde para la radiación en un espacio asintóticamente anti-de Sitter afectan la termodinámica [38]. El estado final del proceso de evaporación tiene que estar caracterizado por las dos escalas de masa independientes y, asimismo, estas están relacionadas con los límites de validez de la aproximación de equilibrio termodinámico para un agujero negro extremo (como es el caso en  $2+1$  dimensiones), y el de la descripción clásica para la geometría.

En la sección 2 se discuten las escalas de masas que es posible definir en  $2+1$  dimensiones. Se encuentra que, básicamente, existen tres unidades que caracterizan regímenes diferentes en la descripción de la evaporación de un agujero negro en  $2+1$  dimensiones. Como en  $3+1$  dimensiones, la masa de Planck define la región donde sólo una teoría cuántica de la gravitación es válida. Las otras dos unidades de masa definen las regiones donde las indeterminaciones cuánticas en la posición son del orden de la longitud del horizonte y donde las fluctuaciones térmicas son del orden de la temperatura, respectiva-

mente.

En la sección 3, se realiza un cálculo termodinámico explícito, siguiendo las ideas desarrolladas en [14], de los límites de validez de la descripción termodinámica de la evaporación del agujero negro en 2+1 dimensiones con y sin momento angular.

## 2 Unidades de masa en 2+1 dimensiones

En cuatro dimensiones, la masa de Planck juega un rol crucial en la evaporación final de los agujeros negros, puesto que a esta escala el tratamiento semiclásico ocupado para la deducción de la radiación de Hawking deja de tener validez. Esta masa contiene, como es de esperar del análisis dimensional, sólo las constantes fundamentales que entran en una teoría como la relatividad general cuando los efectos cuánticos son incluidos, *i.e.*, la constante de Newton,  $G$ , la velocidad de la luz,  $c$ , y la constante de Planck,  $\hbar$ .<sup>6</sup>

En general, para cualquier dimensión, se define la masa de Planck,  $m_P$ , de la relación

$$m_P l_P \sim \hbar, \quad (2.1)$$

donde  $l_P$  es la escala fundamental de longitud que se obtiene exigiendo que la acción en  $D$  dimensiones

$$S = \frac{1}{2G} \int \sqrt{-g} R d^D x, \quad (2.2)$$

sea del orden de  $\hbar$ .

En cuatro dimensiones la longitud de Planck es  $l_P = (\hbar G)^{1/2}$ . A la escala de Planck, las fluctuaciones de la geometría se tornan importantes. Cuando un agujero negro alcanza la masa de Planck,  $m_P = \left(\frac{\hbar}{G}\right)^{1/2}$ , en cuatro dimensiones, su horizonte,  $r_+$ , es comparable con su longitud de onda Compton asociada, *i.e.*,  $r_+ \sim \lambda_{Compton}$  y, además, con la longitud de Planck, *i.e.*,  $r_+ \sim l_P$ .

Es natural esperar que a esta escala las nociones de tiempo, longitud y curvatura pierdan su sentido. Por consiguiente, supondremos que las curvaturas Planckianas  $1/l_P^2$  no pueden ser excedidas. Las consecuencias de estos supuestos en cuatro dimensiones fueron investigados por Frolov *et al* [39] en relación con la estructura del espaciotiempo dentro de un agujero negro.

En tres dimensiones la longitud de Planck,  $l_P$ , está dada por

---

<sup>6</sup>Recuerdese que en 2+1 dimensiones  $G = k$ , como se definió en la Capítulo I.

$$l_P = G\hbar, \quad (2.3)$$

y la masa de Planck,  $m_P$ , es

$$m_P = \frac{1}{G}. \quad (2.4)$$

Es interesante notar que, pese a la relación cuántica que da origen a las masas de Planck en cualquier dimensión, en 2+1 dimensiones esta masa es *independiente de  $\hbar$* , como se hizo notar en [41]. Este hecho refleja el comportamiento singular de la gravitación en 2+1 dimensiones, donde la constante de Newton podría estar cuantizada [40]

En resultados puramente clásicos la masa de Planck juega un rol importante. Si no se incluye la constante cosmológica, todas las estructuras con invariancia rotacional en equilibrio hidrostático tienen una masa que es proporcional a  $m_P$  [13]. En este caso no existe una solución tipo agujero negro y la posibilidad de colapso está claramente prohibida. Sin embargo, como se vió en el Capítulo III, las estructuras en equilibrio hidrostático en un espacio anti-de Sitter poseen un límite superior para la razón  $M/R$ , similar al caso cuadrimensional. Estos resultados muestran que distribuciones de materia que tuvieran una razón  $M/R$  por sobre el límite mencionado serían inestables. Del teorema de Buchdahl demostrado en el capítulo anterior, se puede ver que existen soluciones de agujero negro en 2+1 dimensiones con masa mayores que  $m_P$ .

Si se incluye la constante de Planck y la constante cosmológica ( $\Lambda = 1/l^2$ ), la expresión más general con unidades de masa es

$$[m] = \left(\frac{\hbar G}{l}\right)^a \frac{1}{G} = \left(\frac{l_P}{l}\right)^a m_P, \quad (2.5)$$

donde  $a$  es un número real arbitrario.

Evidentemente, sin la escala de longitud que provee la constante cosmológica, no es posible construir una unidad de masa que contenga  $\hbar$ .

Puesto que  $r_+ = l \left( \frac{M}{m_P} \right)^{\frac{1}{2}}$  en tres dimensiones, la ecuación anterior nos permite relacionar una determinada escala de masa del agujero con una longitud característica del sistema, a saber, la longitud de onda Compton del agujero, la longitud asociada a la constante cosmológica y la longitud de Planck. Reemplazando  $M$  por la expresión de (2.5) se encuentra

$$r_+ = l \left( \frac{l_P}{l} \right)^{\frac{a}{2}}. \quad (2.6)$$

Si  $a = 0$ , obtenemos que  $r_+ = l$ , *i.e.*, para un agujero negro de masa  $\frac{1}{G}$  el radio de su horizonte es comparable con la longitud característica del espacio-tiempo  $l$ . Si  $a = 2/3$ , se verifica que  $r_+ \sim \lambda_{Compton}$  y la unidad de masa correspondiente viene dada por la expresión

$$m_\lambda = \left( \frac{\hbar^2}{l^2 G} \right)^{1/3}. \quad (2.7)$$

Esta masa fija el límite donde el concepto clásico de horizonte deja de tener validez debido a las indeterminaciones en la posición. Reznik [38] discute la evaporación del agujero negro en términos  $m_\lambda$  y  $m_P$ . Este autor considera que la expresión (2.7) es el análogo a la masa de Planck en 3+1 dimensiones. El criterio utilizado aquí y dado por la expresión (2.1) nos parece más fundamental. La temperatura de Hawking de un agujero negro con masa  $m_\lambda$  no coincide en general con esta masa. En 3+1 dimensiones en cambio, la temperatura de un agujero negro con la masa de Planck es igual a la masa de Planck (con  $k_B = 1$ ).

Existen dos casos que dan  $r_+ = l_P$ . El primero ocurre si  $l = l_P$ ; el segundo tomando  $a = 2$ . En este último caso la unidad de masa es

$$m_T = \frac{\hbar^2 G}{l^2}. \quad (2.8)$$

La temperatura del agujero negro sin rotación está dada por la siguiente expresión

$$T = \frac{r_+}{2\pi l^2} = \frac{m_T r_+}{2\pi l_P}, \quad (2.9)$$

donde aparece explícitamente  $m_T$ . Es directo verificar que la temperatura de un agujero negro de masa  $m_T$  es  $m_T$ . Es decir, un cuanto de radiación de Hawking emitido en este punto tiene una energía que es del orden de la energía contenida en el agujero negro.

Cuando  $l = l_P$ , las masas  $m_\lambda$  y  $m_T$  coinciden con la masa de Planck,  $m_P$ . Estas masas, para  $l > l_P$ , cumplen la relación  $m_T < m_\lambda < m_P$ .

### 3 La validez de la aproximación semiclásica

En el caso de un agujero negro de Schwarzschild en cuatro dimensiones, la descripción semiclásica de los procesos radiativos sufre un quiebre al mismo tiempo que lo hace la descripción clásica del espacio-tiempo [14]. En las etapas finales de la evaporación, el campo del agujero negro tiene una gran curvatura y el radio del horizonte es del orden de la longitud de Planck. Además, la temperatura se eleva a medida que la masa disminuye y, en consecuencia, el problema de la reacción del fondo gravitacional se hace insoslayable. Luego, la masa de Planck es la única escala relevante de masa que es necesario considerar en una teoría de la gravedad cuántica sin constante cosmológica. La situación en el caso de la evaporación de un agujero en 2+1 dimensiones presenta varias diferencias importantes, como se muestra a continuación.

En el capítulo II se vió que el campo del agujero negro es una variedad de curvatura constante. Esto es, localmente es un espacio anti-de Sitter y a medida que el proceso de evaporación se desarrolla, la descripción clásica del espacio-tiempo no constituye un problema (si  $l > l_P$ ). Esta descripción no puede aplicarse cuando suponemos que  $l$  es del orden de  $l_P$ . En tal caso, sólo existe una masa relevante,  $m_P$ , el radio del horizonte es del orden de  $l_P$  y en consecuencia estamos en una región en que sólo una teoría cuántica de la gravitación sería válida. La descripción semiclásica, basada en el esquema de tratar los campos cuánticos de materia sobre un fondo formado por un espaciotiempo curvo clásico, deja de ser válida [1]. Luego, una descripción semiclásica del proceso de evaporación del agujero negro en 2+1 dimensiones es adecuada sólo cuando  $l > l_P$ . En la discusión que sigue a continuación supondremos que ésta desigualdad se cumple siempre.

Supongamos, para fijar ideas, que un agujero negro formado en un proceso de colapso se evapora debido a la radiación de Hawking. En esta situación es razonable suponer que la masa inicial del agujero,  $m_0$ , es mayor que la masa de Planck  $m_P$ . A medida que el agujero se evapora su masa irá decreciendo, alcanzando las etapas señaladas por las masas  $m_P$ ,  $m_\lambda$ , respectivamente. La temperatura del agujero cuando alcanza cada una

de estas masas verifica que  $T(M = m_P) < m_P$ ,  $T(M = m_\lambda) < m_\lambda$ . Sin embargo, antes que el agujero alcance una masa igual a  $m_T$  las fluctuaciones de la geometría del agujero, a la escala de la masa  $m_\lambda$ , hacen imposible una descripción semiclassical. No obstante, a escala  $m_\lambda$  la energía radiada por el agujero es menor ( para  $l \gg l_P$  es despreciable) que la energía contenida en el agujero y, en consecuencia, la aproximación de equilibrio termodinámico no es un problema en la evaporación de un agujero sin rotación en 2+1 dimensiones.

Como se mencionó en la introducción, la aproximación de equilibrio termodinámico es consistente siempre que la emisión de un cuanto de radiación no cambie la temperatura en una cantidad que sea comparable al valor de la temperatura. Expresaremos la condición anterior en términos del calor específico del sistema a momento angular constante,

$$C_J = \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_J. \quad (3.1)$$

En la emisión de un cuanto de radiación, la energía que éste lleva es  $T$  (si  $k_B = 1$ ). Si  $\Delta T$  es el cambio de temperatura experimentado por el agujero luego de la emisión, entonces podemos escribir la relación  $C_J \Delta T = T$ , con lo cual la condición para que la descripción térmica sea consistente puede ponerse en la forma

$$\left| T \left( \frac{\partial T}{\partial M} \right)_J \right| \ll |T| \quad (3.2)$$

La expresión para la temperatura de un agujero negro con momento angular constante fué encontrada en el Capítulo II. En función de la masa  $m_T$ , viene dada por

$$T = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{m_T r_+}{2l_P} - \frac{J^2}{m_T} \left( \frac{2l_P}{r_+} \right)^3 \right], \quad (3.3)$$

donde  $r_+$  es

$$r_+ = \left[ 4Gl^2 \left[ M + (M^2 - J^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

El calor específico a  $J$ -constante puede calcularse de la expresión

$$C_J = \left( \frac{\partial M}{\partial r_+} \right)_J \left( \frac{\partial T}{\partial r_+} \right)_J^{-1}, \quad (3.5)$$

que para el agujero 2+1 dimensiones da la expresión

$$C_J = \frac{\left( \frac{r_+}{2l_P} \right)^4 - \left( \frac{J}{m_T} \right)^2}{\left( \frac{r_+}{2l_P} \right)^4 + 3 \left( \frac{J}{m_T} \right)^2} S, \quad (3.6)$$

donde la entropía,  $S$ , está dada por

$$S = \frac{2\pi r_+}{4l_P}. \quad (3.7)$$

Si  $M \rightarrow J$

$$C_J = \frac{\pi}{2} \left( \frac{M}{m_P} \right)^{\frac{1}{2}} z, \quad (3.8)$$

donde

$$z = \left[ 1 - \frac{J^2}{M^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.9)$$

De acuerdo a la relación (3.2), la aproximación de equilibrio termodinámico para el proceso de radiación sufre un quiebre cuando

$$\left( \frac{M}{m_P} \right)^{\frac{1}{2}} z \leq 1. \quad (3.10)$$

De acuerdo a la relación anterior, la aproximación de equilibrio termodinámico para un agujero con rotación que se aproxima al caso extremo experimenta un quiebre para masas mucho mayores que  $m_T$ . En este caso la escala de masa determinada por  $m_T$  sería relevante en las fases finales de la evaporación.

Por otra parte, la (3.8) nos dice que el calor específico tiende a cero a medida que el agujero negro se acerca al caso extremo. Las fluctuaciones cuadráticas medias de la temperatura vienen dadas por [42]

$$\frac{(\Delta T)^2}{T^2} = \frac{1}{C_J}. \quad (3.11)$$

En el caso sin rotación,  $J = 0$ , la fluctuación es

$$\frac{(\Delta T)^2}{T^2} = \left( \frac{m_T}{2\pi^2 M} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.12)$$

Notamos que si la masa del agujero negro es del orden  $m_T$  las fluctuaciones de la temperatura son comparables con la temperatura misma. Sin embargo, como se mencionó previamente, esta escala de masa no es relevante en este caso puesto que las indeterminaciones cuánticas afectan la noción de horizonte.

Si se considera el agujero negro cercano al caso extremo, *i.e.*, si  $M \rightarrow J$ , obtenemos

$$\frac{(\Delta T)^2}{T^2} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{m_T}{Mz} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.13)$$

En este caso aún cuando  $M \gg m_T$  las fluctuaciones podrían llegar a ser mayores que la temperatura puesto que  $z$  es una cantidad cercana a cero. Como ya se mencionó en la introducción, resultados muy similares se encontraron para los agujeros negros extremos en cuatro dimensiones [14].

## 4 Discusión

El problema de la fase final de la evaporación de los agujeros negros continúa siendo uno de los problemas que se espera aclarar sólo dentro del contexto de una teoría cuántica de la gravitación. Desde luego una respuesta consistente debe considerar el efecto de la reacción de la geometría a la radiación emitida en la evaporación. Se han realizados cálculos para estimar este efecto en 2+1 dimensiones [41].

Situándonos exclusivamente en la validez de la descripción termodinámica del proceso de emisión de radiación por un agujero negro hemos encontrado que esta descripción también deja de ser válida en las fases finales de la evaporación, como ocurre en cuatro dimensiones, pese a que el agujero termina a temperatura cero y que no existe una discontinuidad topológica. El análisis de las posibles unidades de masa muestra que las masas que son relevantes para las fases finales de la evaporación contienen la escala de longitud asociada a la constante cosmológica. Todo lo anterior sugiere que la evaporación de un agujero negro en 3+1 dimensiones con constante cosmológica pudiera estar gobernada por escalas de masa distintas a la masa de Planck. Este tema nos parece de importancia para futuras investigaciones.

Las consideraciones y cálculos realizados en este capítulo son muy preliminares, si bien creemos que apuntan a completar la imagen de los procesos térmicos asociados al agujero negro en 2+1 dimensiones. Una discusión de la evaporación del agujero negro en 2+1 dimensiones debe considerar necesariamente que estamos en presencia de un espacio anti-de Sitter al cual se le imponen condiciones en el infinito espacial con el fin de tener bien definido el problema de Cauchy. Como consecuencia de esto el flujo de energía es reflejado de vuelta desde el infinito. Reznik [38] discute la evaporación del agujero negro tomando en cuenta los tiempos involucrados para el regreso del flujo desde el infinito y el tiempo requerido por el agujero para alcanzar la masa  $m_P$ . Investigación futuras que tomen en cuenta los resultados encontrados en este capítulo, deben continuarse en el contexto mencionado más arriba.

## Conclusiones

En esta tesis se han contemplado dos aspectos clásicos de la solución de agujero negro en 2+1 dimensiones: *i*) su estructura geodésica (movimiento de partículas con y sin masa) y *ii*) el equilibrio hidrostático de fluidos cuando se incluye una constante cosmológica negativa, que es la que permite la existencia de horizontes de eventos. Estos resultados muestran que el agujero negro en 2+1 dimensiones presenta un comportamiento muy similar a la solución de Kerr. En este sentido, esta solución tiene un valor pedagógico en la presentación de los fenómenos asociados a los agujeros negros en un contexto matemático más simple. Se puede investigar, por ejemplo, modelos de materia colapsando o la estabilidad de los horizontes interiores sin necesidad de simulaciones numéricas [5]

Las propiedades encontradas para los fluidos en equilibrio hidrostático pueden generalizarse para la solución de Schwarzschild en mayores dimensiones, así como para las soluciones de agujero negro en el marco de la teoría de Lovelock. Actualmente realizamos cálculos en esta dirección.

El equilibrio hidrostático de fluidos cargados en 2+1 dimensiones fue estudiado en [43] ocupando la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkov. Hasta donde conocemos no se ha realizado en 3+1 dimensiones una extensión del teorema de Buchdahl que incluya fluidos con carga. Si bien desde el punto de vista astrofísico, la solución de un agujero negro cargado no es de interés, resulta de importancia en términos formales, especialmente en relación con los agujeros negros extremos, que poseen temperatura y entropía nula. Esta extensión se está realizando con el fin de comprender en mayor detalle el equilibrio gravitacional cuando existe carga y, principalmente, el caso extremo. Se piensa que los agujeros negros extremos no pueden formarse mediante un colapso gravitacional, sino sólo a través de la creación cuántica de pares en presencia de un campo magnético. Cálculos realizados en [44] refuerzan esta idea.

En relación a los aspectos cuánticos, se realizó un análisis del proceso de evaporación del agujero debido a la radiación de Hawking. Se encontraron las escalas de masa que son relevantes en las fases finales de la evaporación. En el caso de los agujeros extremos,

los resultados señalan que la aproximación de equilibrio termodinámico puede dejar de ser válida para masas mucho mayores que la masa de Planck en 2+1 dimensiones.

Un problema abierto en la termodinámica de la solución en 2+1 dimensiones es entender como ocurre el proceso de evaporación en un espaciotiempo que no es asintóticamente plano. En el espacio anti-de Sitter la temperatura sólo tiene sentido físico referida a un observador ubicado a una distancia finita del horizonte. La temperatura  $T'$  medida por un observador localizado a una distancia  $r$  del agujero negro está dada por la relación de Tolman [45]

$$T' = (g_{00}(r))^{-1/2}T, \quad (1)$$

donde  $T$  es la temperatura dada por la ecuación (3.3) del capítulo V. La temperatura que hemos utilizado en esta investigación corresponde a considerar una ubicación especial donde el factor de Tolman es uno. Existe un corrimiento infinito al rojo si la solución de agujero negro es asintóticamente anti-de Sitter. Un tratamiento termodinámico consistente de agujeros negros en estos espacios debe considerar los campos gravitacionales y de materia dentro de regiones espaciales finitas, de modo que el comportamiento asintótico del campo gravitacional sea irrelevante. Brown, Creighton y Mann [46] calcularon, ocupando el formalismo para regiones finitas, la capacidad calórica, la energía y la temperatura del agujero negro en 2+1 dimensiones. Un tratamiento consistente de la evaporación debe realizarse en este contexto. Continuamos el desarrollo de la investigación siguiendo estas ideas.

Los resultados obtenidos nos han sugerido líneas de trabajo que pueden desarrollarse en los casos más realistas de 3+1 dimensiones. Lo anterior viene a corroborar la importancia de los modelos de menor dimensionalidad como fuente de nuevos enfoques a los complejos problemas (tanto clásicos como cuánticos) de las teorías formuladas en mayores dimensiones.

## Referencias

- [1] S. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- [2] J. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D7**, 2333 (1973).
- [3] J. A. Harvey and A. Strominger, *Quantum Aspects of Black Holes*, Lectures at the 1992 Trieste Spring School on String Theory and Quantum Gravity, and at the 1992 TASI Summer School in Boulder, Colorado.
- [4] M. Bañados, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1849 (1992); *Phys. Rev.* **D48**, 1506 (1993).
- [5] S. Carlip, *The 2+1 dimensional black hole*, gr-qc/9506079 (1995).
- [6] N. Cruz, C. Martínez and L. Peña, *Class. Quantum Grav.* **11**, 2731 (1994).
- [7] R. B. Mann and S. F. Ross, *Phys. Rev.* **D47**, 3319 (1993).
- [8] J. L. Brown, *Lower dimensional Gravity*, Ph.D. Tesis (University of Texas at Austin, 1985.) Publicado como libro bajo el mismo título (World Scientific, Singapore, 1988).
- [9] S. Deser, R. Jackiw, G. 't Hooft, *Ann. Phys. (N.Y.)* **152**, 220 (1984).
- [10] S. Giddings, J. Abbott and K. Kuchar, *Gen. Rel. Grav.* **16**, 751 (1984).
- [11] J. D. Barrow, A. B. Burd, D. Lancaster, *Class. Quantum Grav.* **3**, 551 (1986).
- [12] N. J. Cornish and N. E. Frankel, *Phys. Rev.* **D43**, 2555 (1991).
- [13] N. J. Cornish and N. E. Frankel, *Phys. Rev.* **D47**, 714 (1993).
- [14] J. Preskill, P. Schwarz, A. Shapere, S. Trivedi and F. Wilczek, *Mod. Phys. Lett.* **A6**, 2353 (1991).

- [15] C. Teitelboim, *Phys. Rev.* **D51**, 4315 (1995); S. W. Hawking, G. T. Horowitz, and S. R. Ross, *Phys. Rev.* **D51**, 4302 (1995); G. Gibbons and R. Kallosh, *Phys. Rev.* **D51**, 2839 (1995).
- [16] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).
- [17] S. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time* (Cambridge University Press, 1973).
- [18] L. Abbott and S. Deser, *Nucl. Phys.* **B195**, 76 (1982).
- [19] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Comm. Math. Phys.* **98**, 391 (1985).
- [20] Máximo Bañados, Tesis de doctorado (Universidad de Chile, 1993)
- [21] M. Bañados, C. Teitelboim, M. Henneaux and J. Zanelli, *Phys. Rev.* **D48**, 1506 (1993).
- [22] G. W. Gibbons and S. Hawking, *Phys. Rev.* **D15**, 2752 (1977).
- [23] C. Farina, J. Gamboa and A. J. Seguí-Santonja, *Class. Quantum. Grav.* **10**, 193 (1993).
- [24] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973).
- [25] B. Schutz, *A first course in general relativity* (Cambridge University Press, 1990).
- [26] A. Achúcarro and M. E. Ortiz, *Phys. Rev.* **D48**, 3600 (1993).
- [27] H. A. Buschdahl, *Phys. Rev.* **116**, 1027 (1989).
- [28] W. A. Hiscock, *J. Math. Phys.* **29**, 443 (1988).
- [29] R. Adler, M. Bazin and M. Schiffer, *Introduction to General Relativity*, McGraw-Hill, 1975.

- [30] N. Cruz and J. Zanelli, *Class. Quantum. Grav.* **12**, 975 (1995).
- [31] Ya. B. Zel'dovich and I. Novikov, *Relativistic Astrophysics, Vol I: Stars and Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago, 1971
- [32] N. Strumann, *General Relativity and Relativistic Astrophysics*, Springer-Verlag, 1984.
- [33] R. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984.
- [34] S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **14**, 2460 (1976).
- [35] Y. Aharanov, A. Casher and S. Nussinov, *Phys. Lett.* **191B**, 51 (1987).
- [36] D. Page, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 301 (1980).
- [37] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B335**, 138 (1990).
- [38] B. Reznik, *Phys. Rev.* **D51**, 1728 (1995).
- [39] V. P. Frolov, M. A. Markov and V. F. Mukhanov, *Phys. Rev. D* **41**, 383 (1990).
- [40] J. Zanelli, *Phys. Rev. D* **51**, 490 (1995).
- [41] K. Shiraishi and T. Maki, *Phys. Rev. D* **49**, 5286 (1994).
- [42] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics* , Pergamom Press, London, 1959.
- [43] F. Englert and B. Reznik, *Phys. Rev. D* **50**, 2692 (1994).
- [44] S. W. Hawking, G. Horowitz and S. Ross, *Phys. Rev. D* **51**, 4302 (1995).
- [45] R. C. Tolman, *Phys. Rev. D* **35**, 904 (1930).
- [46] J. D. Brown, J. Creighton and R. B. Mann, *Phys. Rev. D* **50**, 6394 (1994).