UCH-FC
DOC-M
C351
C.1

ESTUDIO ASINTOTICO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES FUNCIONALES LINEALES

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias

por

Samuel Castillo Apolonio

Julio de 1997

Director de Tesis: Dr. Manuel Pinto

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato.

SAMUEL DE JESÚS CASTILLO APOLONIO

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Matemática en el exámen de Defensa de Tesis rendido el día 28 de Noviembre de 1997.

Director de Tesis:

Dr. Manuel Pinto ....

Comisión de Evaluación de la Tesis:

Dr. Manuel Elgueta ....

Dr. Patricio Gonzalez ....

Dr. Carlos Lizama ....

Dr. Humberto Prado ....

Agradecimientos

Daré los siguientes agradecimientos a aquellos que hicieron posible el desarrollo de este doctorado:

A CONICYT por haberme otorgado una Beca de Doctorado durante el primer año.

A FUNDACIÓN ANDES por haberme otorgado una Beca de Doctorado durante los cuatro años siguientes.

A la Universidad del Bío-Bío, en especial al Director del Departamento de Matemática, Prof. Humberto Valenzuela, por haber hecho posibles los viajes entre Concepción y Santiago, necesarios para el término de esta tesis.

A cada uno de los miembros de la Comisión de Evaluación y a los Profesores I. Györi y S.Trofimchuk por sus valiosas sugerencias.

A mi Director de Tesis, Dr. Manuel Pinto, por su importante asesoría.

A mis tíos Rosita y René por haberme ayudado cuando recién llegué a Santiago.

A mi esposa Carola por su constante apoyo.

A aquellos seres cuyas mentes están detrás del complejo funcionamiento de la naturaleza y de aquellos sucesos, que a pesar de ser poco probables, ocurrieron y resultaron en mi beneficio.

Contents

Resumen

En esta tesis se dan versiones generales de los teoremas asintóticos de Levinson y de Hartman-Wintner para sistemas diferenciales funcionales lineales de la forma $y' = L(t, y_t) + R(t, y_t)$, donde $y_t(s) = y(t+s)$ y L, R, son funciones definidas de $[0, +\infty[\times\mathcal{B}([-r, 0], \mathbf{C}^N)$, $r > 0$ en $\mathbf{C}^N$, lineales en la segunda variable. $L(t, \cdot)$ satisface una condición dicotómica espectral del tipo Levinson o del tipo Hartman-Wintner mientras que $R(t, \cdot)$ satisface una condición de integración del tipo L^p, $p \geq 1$.

Estos teoremas asintóticos son probados primeramente para ecuaciones diferenciales en Espacios de Banach.

Se considera una ecuación diferencial ordinaria abstracta cuya perturbación satisface una condición de integrabilidad de tipo L^p. Sobre la familia de evolución de la ecuación no perturbada se establecen condiciones dicotómicas y tricotómicas. Así, se obtienen versiones abstractas de los teoremas de Levinson y de Hartman-Wintner.

También se incluye un estudio espectral en la ecuación no perturbada y cuales son condiciones (verificables) sobre el espectro y la ecuación que implican tricotomías. Se deducen, así, versiones espectrales abstractas de los teoremas de Levinson y de Hartman-Wintner.

Luego, mediante la formulación de un sistema diferencial funcional lineal como una ecuación diferencial ordinaria en espacios de Banach se aplicarán estos resultados asintóticos abstractos a sistemas diferenciales funcionales lineales, obteniendo para estos sistemas, versiones de los teoremas asintóticos de Levinson y de Hartman-Wintner.

Se realiza un estudio espectral dicotómico para ecuaciones diferenciales abstractas basado en la teoría de reductibilidad. Se define y se estudia el espectro para las ecuaciones diferenciales funcionales lineales no autónomas.

Los teoremas asintóticos abstractos serán probados por medio de la construcción de operadores contractivos cuyos puntos fijos tienen una clara fórmula asintótica.

Comparaciones con resultados clásicos son dadas.

Summary

In this work, we will give general versions of asymptotic theorems of Levinson and Hartman-Wintner for the linear functional differential systems $y' = L(t, y_t) + R(t, y_t)$, where $y_t(s) = y(t+s)$ and L, R, are continuous functions defined from $[0, +\infty[\times\mathcal{B}([-r, 0], \mathbf{C}^N)$, $r > 0$ into $\mathbf{C}^N$, which are linear in the second variable. $L(t, \cdot)$ satisfies a spectral dichotomic condition of Levinson or Hartman-Wintner type and $R(t, \cdot)$ satisfies a L^p condition for $p \geq 1$.

These asymptotic theorems will be proved first for ordinary differential equations in Banach Spaces.

We will consider an abstract ordinary diferential equation whose perturbation satisfies a L^p integrability condition. For the evolution family of the non perturbed equation we establish dichotomic and trichotomic conditions. Hence, we obtain abstracts versions for theorems of Levinson and Hartman-Wintner.

Then we present a spectral study in the non perturbed equation and we establish what are the conditiones over the spectrum and the equation which implies trichotomic conditions. Thus, we obtain spectral abstract versions for the Levinson and Hartman-Wintner theorems.

Finally, we formulate a linear functional differential system as an ordinary differential equation in a Banach Space. Hence, we obtain, for linear functional differential systems, versions of the asymptotic theorems of Levinson and Hartman-Wintner.

We will present a spectral dichotomic study for abstract differential equations by using the reducibility theory. We will show an spectral study for nonautonomous linear diferential equations.

The abstracts asymptotics theorems will be proved by constructing contractive operators whose fixed points have an obvious asymptotic formula.

Comparisons with clasical results are given.

Introducción

En muchas aplicaciones, se supone que el sistema a considerar está regido por el principio de que el estado futuro del sistema es independiente de los estados pasados y determinado sólo por el presente. Si esto se supone en un sistema que involucra, además del estado, su tasa de crecimiento se obtendrá una ecuación diferencial ordinaria o una ecuación diferencial parcial. Sin embargo, tal principio es sólo aparente, más aún, es sólo una primera aproximación de la verdadera situación. Para poder considerar un modelo más realista se debe incluir la incidencia de algunos de los estados pasados del sistema. Algunos ejemplos se dan a continuación:

1. Lord Cherwell (ver Wright [26, 27]) encontró la ecuación diferencial retardada
$$x'(t) = -\alpha x(t-1)[1 + x(t)],$$
en su estudio acerca de la distribución de números primos.

2. Dunkel [10] consideró una ecuación más general,
$$x'(t) = -\alpha \left[\int_{-1}^{0} x(t+\theta) d\eta(\theta) \right] [1 + x(t)],$$
donde $\eta(\theta)$ es una función $N \times N$ matriz valuada y de variación acotada para aplicarla al problema de crecimiento de poblaciones.

3. En el estudio de modelos depredador-presa, Volterra [23] investigó las ecuaciones
$$x'(t) = \left[\epsilon_1 - \gamma_1 y(t) - \textstyle\int_{-r}^{0} F_1(\theta) y(t+\theta) d\theta \right]$$
$$y'(t) = \left[-\epsilon_1 + \gamma_2 x(t) - \textstyle\int_{-r}^{0} F_2(\theta) x(t+\theta) d\theta \right]$$
donde x e y son el número de presas y depredadores, respectivamente, y todas las constantes y funciones son no negativas.

4. Para modelos del mismo tipo Wangersky y Cunningham [24, 25] usó las ecuaciones
$$x'(t) = \alpha x(t) \left[\tfrac{m - x(t)}{m} \right] - b x(t) y(t)$$
$$y'(t) = -\beta y(t) + c x(t-r) y(t-r).$$

5. En el análisis de la gonorrea, Cooke y Yorke [8] estudiaron la ecuación

$$I'(t) = g(I(t - L_1)) - g(I(t - L_2)),\ L_1, L_2 > 0,$$

donde I representa el número de infectados y g es una función no negativa que se anula fuera de un intervalo compacto

Todos estos ejemplos son casos de ecuaciones diferenciales funcionales.

En este trabajo, interesarán aquellas ecuaciones diferenciales funcionales que son lineales, es decir, aquellas que son del tipo

$$\begin{aligned} x'(t) &= L(t, x_t), \\ x_t(\theta) &= x(t + \theta), \end{aligned} \tag{0.1}$$

donde $L : I_\sigma \times \mathcal{B} \to \mathbf{C}^N$, es una función continua que es lineal en la segunda variable, $I_\sigma = [\sigma, +\infty[$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}([-r, 0], \mathbf{C}^N)$ es el conjunto de las funciones acotadas de $[-r, 0]$ en $\mathbf{C}^N$ y $r > 0$.

Específicamente se obtendrán fórmulas asintóticas para las soluciones de este tipo de ecuaciones.

La integración asintótica es un interesante problema que se origina en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias: Considérese el sistema $N \times N$ diferencial lineal ordinario

$$x' = A(t)x \tag{0.2}$$

y el sistema perturbado

$$y' = (A(t) + R(t))y, \tag{0.3}$$

donde $R(t)$ satisface alguna condición de integrabilidad de tipo L^p. Se desea estudiar situaciones en las que para una solución particular $x = x_0(t)$ del sistema (0.2) existe una solución $y = y_0(t)$ del sistema (0.3) que se comporta asintóticamente como $x_0(t)$ por una función exponencial de la perturbación R, es decir,

$$y_0(t) = x_0(t) \exp\left(\int_\sigma^t g(s, R(s))ds\right)(1 + o(1)),$$

cuando $t \to +\infty$, para alguna función $g : \mathbf{R} \times M_N(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$.

Los mejores resultados de este tipo son el Teorema Asintótico de Levinson [19] y el Teorema Asintótico de Hartman-Wintner [18] (ver también [11, 17]). En estos teoremas la matriz $A(t)$ es diagonal, o sea,

$$A(t) = \mathrm{diag}(\lambda_1(t), ..., \lambda_N(t)),$$

de donde las soluciones generadoras del sistema no perturbado son

$$x_i(t) = \exp\left(\int_\sigma^t \lambda_i\right) x_i(\sigma),$$

para $i = 1, ..., N$.

Levinson y Hartman-Wintner seleccionan la solución particular y la integrabilidad de la perturbación de maneras diferentes entre si: Hartman-Wintner pide que uno de los valores propios, $\lambda_k(t)$, esté puntualmente alejado de los demás. En términos más precisos pide la siguiente condición espectral dicotómica con respecto a $\lambda_k(t)$: que exista un real positivo $\varepsilon > 0$ tal que

$$|\Re e(\lambda_i(t) - \lambda_k(t))| > \varepsilon,$$

para todo $i \neq k$. Sobre la perturbación considera $|R(t)| \in L^p$ para $1 \leq p \leq 2$. Así obtiene la existencia de una solución $y = y_k(t)$ de (0.3), definida para $t \geq \sigma$ y σ suficientemente grande tal que

$$y_k(t) = \exp\left(\int_\sigma^t [\lambda_k(\xi) + e_k^T R(\xi) e_k] d\xi\right)(e_k + o(1)),$$

cuando $t \to +\infty$, donde e_k es el k-ésimo vector de la base canónica de $\mathbf{C}^N$.

Levinson, en cambio, elige la solución particular del no perturbado con una condición menos exigente: que exista un valor propio $\lambda_k(t)$ que este integralmente alejado de los demás. En términos más precisos pide la siguiente condición espectral dicotómica con respecto a $\lambda_k(t)$:

- $\int_0^t \Re e(\lambda_i(\xi) - \lambda_k(\xi)) d\xi \to -\infty$, cuando $t \to +\infty$, para $i = 1, ..., k-1$.
- Existe $K \in \mathbf{R}$ tal que $\int_s^t \Re e(\lambda_i(\xi) - \lambda_k(\xi)) d\xi \geq K$ para $t \geq s$ e $i = k+1, ..., N$.

Pero, es más exigente sobre la perturbación, pidiendo que $|R(t)| \in L^1$. Así obtiene la existencia de una solución $y = y_k(t)$ del sistema (0.3), definida para $t \geq \sigma$ y σ suficientemente grande tal que

$$y_k(t) = \exp\left(\int_\sigma^t \lambda_k(\xi) d\xi\right)(e_k + o(1)),$$

cuando $t \to +\infty$. Es fácil observar que en el caso en que $|R(t)| \in L^1$, los resultados de ambos teoremas coinciden. Versiones donde $A(t)$ es diagonal a bloques pueden encontrarse en [6].

Para ecuaciones diferenciales con retardo el mejor resultado de este tipo, por muchos años, fue el dado en 1963 por R. Bellman y K. Cooke, en su clásico libro [2] pág 277 (Ver también [3]), donde considera ecuaciones diferenciales retardadas del tipo

$$y'(t) = (a_0 + a(t))y(t) + (b_0 + b(t))y(t - r), \tag{0.4}$$

cuyas soluciones son comparadas con las de la ecuación no perturbada

$$x'(t) = a_0 x(t) + b_0 x(t - r),$$

para concluir que la ecuación (0.4) tiene una solución definida para $t \geq t_0$ y t_0 suficientemente grande tal que

$$y(t) = \exp\left(\lambda_0 t + \frac{1}{c_1}\int_{t_0}^{t}[a(\xi) + e^{-\lambda_0 r}b(\xi)]d\xi\right)(1 + o(1)) \qquad (0.5)$$

cuando $t \to +\infty$, donde $c_1 = 1 + bre^{-\lambda_0 r}$ y $\lambda = \lambda_0$ es una raíz determinada de la ecuación característica de la ecuación no perturbada:

$$\lambda = a_0 + b_0 e^{-\lambda r}. \qquad (0.6)$$

Lamentablemente este resultado requiere de las siguientes hipótesis:

1. La raíz λ_0 de (0.6) es real, simple y posee la mayor de las partes reales.
2. $a(t), b(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$,
3. $a(t) \neq 0$ y $b(t) \neq 0$ para $t \geq t_0$,
4. $a'(t) = o(|a(t)|)$, $b'(t) = o(|b(t)|)$ cuando $t \to +\infty$,
5. $\int_0^{+\infty} |a(t)|^2 dt < +\infty$, $\int_0^{+\infty} |b(t)|^2 dt < +\infty$,
6. $\int_0^{+\infty} |a'(t)| dt < +\infty$, $\int_0^{+\infty} |b'(t)| dt < +\infty$
7. $\int_0^{+\infty} |\frac{a''(t)}{a(t)}| dt < +\infty$, $\int_0^{+\infty} |\frac{b''(t)}{b(t)}| dt < +\infty$
8. $\int_0^{+\infty} |a(t)b(t)| dt < +\infty$
9. $\lim_{t\to+\infty} \frac{a(t-lr)}{a(t)} = 1$, $\lim_{t\to+\infty} \frac{b(t-lr)}{b(t)} = 1$, para $0 \leq l \leq 1$.

Este teorema con sus condiciones variadas y no fáciles de verificar, no fue mejorado hasta 1995, cuando I. Györi y M. Pituk [14], redujeron las hipótesis del resultado anterior sobre la ecuación sólo a las hipótesis 1, 3, 6 y la siguiente condición de integrabilidad

$$\int_{t-r}^{t} a(\tau)d\tau, \int_{t-r}^{t} b(\tau)d\tau \in L^1(0, +\infty),$$

donde $r > 0$ y $t \in [0, +\infty)$. Así obtienen también (0.5).

Recientemente, S. Castillo y M. Pinto [7] extendieron este resultado a ecuaciones diferenciales funcionales de orden N, en donde el sistema no perturbado es autónomo, usando hipótesis mucho mas sencillas. Si se aplica este resultado a la ecuación (0.4) las condiciones a pedir son simplemente las siguientes:

1. La raíz $\lambda = \lambda_0$ de la ecuación característica (0.6) es simple y con parte real distinta a la de las demás.
2. $\int_0^{+\infty} |a(t)|^p dt < +\infty$, $\int_0^{+\infty} |b(t)|^p dt < +\infty$, $1 \leq p \leq 2$.

El resultado de Bellman-Cooke no posee una versión no autónoma. Como consecuencia de esta tesis, para la ecuación (0.4) y sistemas en general esa versión será obtenida. Concretamente, se establecen versiones generales de los teoremas asintóticos de Levinson y de Hartman-Wintner para el sistema diferencial funcional lineal

$$\begin{aligned} y'(t) &= L(t, y_t) + R(t, y_t), \\ y_t(\theta) &= y(t+\theta), \end{aligned} \tag{0.7}$$

donde $\theta \in [-r, 0]$, $r > 0$ y $R(t, \cdot)$ es estudiado como una perturbación del sistema (0.1).

Se considerará que las soluciones $\lambda = \lambda(t)$ de su ecuación característica:

$$\det(\lambda I - L(t, e^{\lambda \cdot} I)) = 0,$$

las cuales pueden ser infinitas numerables, satisfacen una condición análoga a la que cumplían los valores propios de $A(t)$, en el sistema (0.3), para el Teorema de Levinson o de Hartman-Wintner. La perturbación cumplirá la condición $|R(t, \cdot)| \in L^p$, con $p = 1$ en el caso de Levinson y $1 \leq p \leq 2$ en el caso de Hartman-Wintner.

El resultado de ambos teoremas es la existencia de una solución $x = x_0(t)$ del sistema no perturbado (0.1) para la cual hay una solución $y = y_0(t)$ del sistema perturbado (0.7) que se comporta asintóticamente como $x_0(t)$ por una función exponencial de la perturbación R, es decir,

$$y_0(t) = x_0(t) \exp\left(\int_0^t g(s, R(s))ds\right)(1 + o(1)),$$

para una cierta función g, cuando $t \to +\infty$.

En particular, se establecerá un corolario de estos resultados para la ecuación diferencial retardada:

$$y'(t) = b(t)(y(t) - y(t - r_1)) + q(t)y(t - r_2), \tag{0.8}$$

considerada como una ecuación perturbada de la ecuación no autónoma

$$x'(t) = b(t)(x(t) - x(t - r_1)). \tag{0.9}$$

Sobre (0.8) se considerará lo siguiente:

i) Existe una constante positiva M tal que $|b(t)| \leq M < \frac{1}{r_1}$,

ii) $b(t)$ es una función diferenciable y $|b'(t)| < \rho$ donde ρ es una constante positiva suficientemente pequeña,

iii) la perturbación $q(t) \in L^p$ para $1 \leq p \leq 2$.

Se probará que las hipótesis i) y ii) implican una condición dicotómica del tipo Hartman-Wintner sobre las soluciones de la ecuación característica de la ecuación diferencial (0.8), con respecto a la raiz característica $\lambda = 0$.

Así, se demuestra que la ecuación (0.8) tiene una solución $y = y_0(t)$ definida para todo $t \geq \sigma$ y σ suficientemente grande tal que

$$y_0(t) = \exp\left(\int_\sigma^t \frac{q(\xi)}{1 - r_1 b(\xi)} d\xi\right)(1 + o(1)),$$

cuando $t \longrightarrow +\infty$.

Los sistemas de la forma (0.1) también incluyen a los sistemas diferenciales ordinarios y el mejor resultado, en el cual el sistema no perturbado es no autónomo pero ordinario, fue dado en 1993 por J. S. Cassell y Z. Hou [5] para sistemas diferenciales funcionales en el que el sistema no perturbado es diferencial, ordinario y diagonal, es decir, para sistemas de la forma

$$y'(t) = \Lambda(t)y(t) + R(t, y_t),$$

donde $\Lambda(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t), ..., \lambda_N(t))$ satisface la hipótesis del Teorema Asintótico de Hartman-Wintner y $R(t)$ satisface la condición de integrabilidad:

$$R(t, \exp(-\int_{t+\cdot}^t \lambda_k)) \in L^p$$

para $p \geq 1$. Los primeros resultados en este sentido provienen de J. Haddock y R. Sacker [15] quienes conjeturaron por primera vez una fórmula asintótica para sistemas diferenciales lineales con retardos constantes (Ver también [1, 22]).

Otros resultados asintóticos para ecuaciones diferenciales con retardo variable pueden encontrarse en [13, 21].

No se conocen versiones generales para los sistemas (0.7) de tipo Levinson y Hartman-Wintner, ni tampoco versiones en espacios de Banach, como aquí serán obtenidas.

En el primer capítulo de esta tesis, se considera una ecuación diferencial ordinaria abstracta cuya perturbación satisface una condición de integrabilidad de tipo L^p. Sobre la familia de evolución de la ecuación no perturbada se establecen condiciones dicotómicas y tricotómicas. Así, se obtienen versiones abstractas de los teoremas de Levinson y de Hartman-Wintner.

Después se realiza un estudio espectral en la ecuación no perturbada y se establece qué condiciones (verificables) sobre el espectro y la ecuación implican tricotomías. Luego, se obtienen versiones espectrales abstractas de los teoremas de Levinson y de Hartman-Wintner.

Los resultados obtenidos permitirán dar versiones de estos teoremas asintóticos para sistemas diferenciales ordinarios no diagonales. También permitirían futuras extensiones a las ecuaciones diferenciales parciales, de Volterra, etc. debido a que estas pueden formularse como ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach (Ver [12]).

De hecho, en el capítulo 2 se estudia el sistema diferencial funcional (0.7), utilizando la formulación abstracta dada por Burns, Heddrman y Stech [4], a la cual se aplican los resultados obtenidos en el capítulo 1 para obtener así los principales resultados de esta tesis.

La primera versión de la demostración del Teorema de Hartman-Wintner es muy complicada. Harris y Lutz [17] simplificaron esta demostración, conectando el Teorema de Hartman-Wintner con el Teorema de Levinson mediante un cambio de variable lineal que transforma el sistema a estudiar en otro que satisface las hipótesis del Teorema de Levinson. Hacer este cambio de variable se hace difícil ya en el caso de las ecuaciones diferenciales con retardo. Estos resultados asintóticos abstractos se probarán mediante la construcción de operadores contractivos cuyos puntos fijos tienen una clara fórmula asintótica.

Para el estudio espectral abstracto se hará uso de la teoría de reductibilidad dada en Daleckii-Krein [9].

Capítulo 1
Teoremas Asintóticos para Ecuaciones Diferenciales Abstractas.

En este capítulo $E = (E, |\cdot|)$ es un espacio de Banach con norma $|\cdot|$ y para un subespacio vectorial D de E se denota por $\mathcal{L}_u(D, E)$ al subespacio vectorial de las transformaciones lineales, desde D en E. Se dirá que un operador $A \in \mathcal{L}_u(D, E)$ es acotado si la norma operador, la cual se define por $|A| = \sup_{|\varphi|=1} |A\varphi|$, es finita. Siempre, la norma operador será denotada de la misma forma que la norma del espacio en que trabajemos. Los elementos de $\mathcal{L}_u(D, E)$ no son necesariamente acotados.

Definición 1 *Sea D subespacio vectorial de E. Se llamará ecuación diferencial de D en el Espacio de Banach E ó (D, E)-ecuación diferencial abstracta a una ecuación diferencial del tipo*

$$x'(t) = A(t)x(t), \tag{1.1}$$

donde $A : I_\sigma = [\sigma, +\infty[\to \mathcal{L}_u(D, E)$.

Claramente este tipo de ecuación incluye a los sistemas diferenciales ordinarios.

El objetivo de este trabajo es dar una versión general abstracta de dos importantes teoremas de integración asintótica, uno debido a Hartman-Wintner [11, 17, 18] y el otro debido a N. Levinson [11]. Es decir, se considerará la ecuación

$$y'(t) = (A(t) + R(t))y(t), \tag{1.2}$$

donde $R : I_\sigma \to \mathcal{L}_u(D, E)$ es una función continua; se estableceran condiciones, sobre la ecuación no perturbada (1.1), para que tenga una solución $x = x_0(t)$ tal que la ecuación perturbada (1.2) posea una solución $y = y_0(t)$ que se comporte asin'oticamente como $x_0(t)$ por una función exponencial de la perturbación, más precisamente,

$$y_0(t) = x_0(t) \exp\left(\int_\sigma^t g(s, R(s))\right)(1 + o(1)), \tag{1.3}$$

cuando $t \to +\infty$.

Para este estudio asintótico será muy útil el uso de la fórmula de variación de parámetros, razón por la cual se darán las siguientes definiciones:

Definición 2 *a) Una familia de evolución es una familia de operadores lineales acotados* $\{\Phi(t,s)\}_{t\geq s}$, *sobre* E, *tal que*

i) $\Phi(s,s) = I$

ii) $\Phi(t,s) = \Phi(t,\zeta)\Phi(\zeta,s)$

para todo $\sigma \leq s \leq \zeta \leq t$.

b) Se dirá que la familia de evolución $\{\Phi(t,s)\}_{t\geq s}$ *resuelve la ecuación (1.1) si, para todo* $x_s \in D$, $x(t) = \Phi(t,s)x_s$ *es solución de (1.1) para todo* $t \geq s$. *En tal caso se dirá que* $\Phi(t,s)$ *es el operador de Cauchy de la ecuación (1.1).*

Se considerará, durante todo este capítulo la siguiente hipótesis:

(H1): Existe una familia de evolución $\{\Phi(t,s)\}_{t\geq s}$ que resuelve la ecuación (1.1). Cada solución $x = x(t)$, de la ecuación (1.1), está definida para todo $t \geq \sigma$ y puede representarse de manera única como $x(t) = \Phi(t,s)x(s)$, para todo t, s, $t \geq s \geq \sigma$.

Nota 1: De la hipótesis (H1) se desprende que $\Phi(t,s)D \subseteq D$.

Nota 2: De la fórmula de variación de parámetros se tiene que si $R(t)$ es un operador lineal acotado, para todo $t \in I_\sigma$, la hipótesis (H1) también es válida para la ecuación perturbada (1.2).

Para $t \geq s \geq \sigma$, sea $\tilde{\Phi}(t,s) : D \to \Phi(t,s)(D)$ la restricción de $\Phi(t,s)$ a D, es decir, $\tilde{\Phi}(t,s)v = \Phi(t,s)v$, para todo $v \in D$. Entonces, $\tilde{\Phi}(t,s)$ es sobreyectiva y por la hipótesis (H1), $\tilde{\Phi}(t,s)$ es inyectiva. Luego $\tilde{\Phi}(t,s)$ es biyectiva. Así, se define para $t \geq s \geq \sigma$

$$\Phi(s,t) = [\tilde{\Phi}(t,s)]^{-1}.$$

En las siguientes secciones se estableceran las versiones generales de los teoremas asintóticos mencionados.

1.1 Teorema Asintótico de Levinson Abstracto

En esta sección se dará la versión abstracta del teorema de Levinson más general de este trabajo. En este resultado $A(t)$ y $R(t)$ satisfacen las siguientes hipótesis:

(H2): Existe una función localmente integrable $\lambda_0 : I_\sigma \to \mathbf{C}$, existen proyecciones $P_i(t) : E \to E (i = 1, 2)$ y una proyección constante y unidimensional $P_0 : E \to E$ con $ImP_0 =< \hat{e} >$, tal que $|P_i(t)|$ es acotada como función de t, $P_1(t)$, P_0, $P_2(t)$ son complementarias y existe $K > 0$ tal que:

i)

$$|\Phi(t,s)P_1(s)| \leq Kh(t,s)|\exp\left(\int_s^t \lambda_0\right)|, \quad t \geq s, \tag{1.4}$$

donde $h(t,s)$ es una función acotada para $t \geq s$ tal que $h(t,s) \to 0$ cuando $t \to +\infty$ y $h(t,s) = h(t,T)h(T,s)$ si $s \leq T \leq t$.

ii)

$$\Phi(t,s)\hat{e} = \exp\left(\int_s^t \lambda_0(\xi)d\xi\right)\hat{e}, \quad \forall t,s \tag{1.5}$$

iii)

$$|\Phi(t,s)P_2(s)| \leq K|\exp\left(\int_s^t \lambda_0\right)|, \quad t \leq s \tag{1.6}$$

donde $\Phi(t,s)$ es el operador de Cauchy de (1.1).

(H3): $|R(t)| \in L^1$.

Definición 3 *Si una ecuación de la forma (1.1) satisface la hipótesis (H2), se dice que posee una λ_0-tricotomía ordinaria. Si las proyecciones $P_i(t)$ no dependen de t, es decir, son constantes, se dice que la ecuación (1.1) posee una λ_0-tricotomía ordinaria con proyecciones fijas. Si $\lambda_0 = 0$ en una λ_0-tricotomía ordinaria se habla simplemente de una tricotomía ordinaria.*

De (H2)-ii) se ve que la función $x_0(t)$ definida por

$$x_0(t) = \exp\left(\int_\sigma^t \lambda_0\right)\hat{e}$$

es una solución de la ecuación (1.1) y en el caso en que $A(t)$ es una matriz diagonal $N \times N$, las hipótesis del Teorema de Levinson sobre los valores propios de $A(t)$ garantizan el cumplimiento de (H2)-i y (H2)-ii. El siguiente resultado es una versión generalizada del Teorema de Levinson.

Teorema 1 *Supóngase que (H1), (H2) y (H3) son válidas para la ecuación (1.2). Entonces ésta posee una solución $y_0 \in C([\sigma,+\infty[,E)$ para σ suficientemente grande, que satisface*

$$y_0(t) = \exp\left(\int_\sigma^t \lambda_0(s)ds\right)(\hat{e} + o(1)), \tag{1.7}$$

cuando $t \to \infty$.

Demostración: Sean $C_\sigma = C([\sigma,+\infty[,E)$ y $\mathcal{N}$ el operador definido en C_σ por

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}y)(t) &= \Phi(t,\sigma)\hat{e} + \textstyle\int_\sigma^t \Phi(t,s)P_1(s)R(s)y(s)ds \\ &- \textstyle\int_t^{+\infty} \Phi(t,s)(I - P_1(s))R(s)y(s)ds.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Es fácil verificar que cualquier punto fijo y_0 de $\mathcal{N}$ es una solución de la ecuación (1.2). Entonces, se probará que el operador $\mathcal{N}$ tiene un punto fijo que satisface (1.7).

Considérese la norma

$$\|y\|_{\lambda_0} = \sup_{t\geq\sigma} |\exp\left(-\int_\sigma^t \lambda_0\right) y(t)|$$

y el espacio de Banach $\mathcal{C}_{\lambda_0} = \{y \in C_\sigma : \|y\|_{\lambda_0} < +\infty\}$. Se tiene

i) $\mathcal{N}(\mathcal{C}_{\lambda_0}) \subseteq \mathcal{C}_{\lambda_0}$,

ii) $\mathcal{N}$ tiene un único punto fijo y_0 en $\mathcal{C}_{\lambda_0}$ y

iii) y_0 satisface (1.7).

De hecho, para una constante convenientemente grande $\tilde{K}$, se define

$$\begin{aligned} H_1^\sigma(t) &= \tilde{K}\textstyle\int_\sigma^t h(t,s)|R(s)|ds, \\ H_2^\sigma(t) &= \tilde{K}\textstyle\int_t^{+\infty} |R(s)|ds, \end{aligned}$$

para todo $t \in I_\sigma$.

Entonces se tiene,

$$\begin{aligned} |\textstyle\int_s^t \Phi(t,s)P_1(s)R(s)y(s)ds| &\leq |\exp\left(\textstyle\int_s^t \lambda_0\right)|H_1^\sigma(t)\|y\|_{\lambda_0}, \\ |\textstyle\int_\sigma^t \Phi(t,s)(I-P_1(s))R(s)y(s)ds| &\leq |\exp\left(\textstyle\int_\sigma^t \lambda_0\right)|H_2^\sigma(t)\|y\|_{\lambda_0}, \end{aligned}$$

para todo $y \in \mathcal{C}_{\lambda_0}$ y $t \in I_\sigma$ con σ suficientemente grande.

Además si $H^\sigma = H_1^\sigma + H_2^\sigma$, de la ecuación (1.8), se tiene

$$|\mathcal{N}y_1(t) - \mathcal{N}y_2(t)| \leq |\exp\left(\int_\sigma^t \lambda_0\right)|H^\sigma(t)\|y_1 - y_2\|_{\lambda_0} \tag{1.9}$$

para todo y_1, y_2 en $\mathcal{C}_{\lambda_0}$.

Si se fija T y $t \geq T \geq \sigma$ entonces

$$|H^\sigma(t)| \leq h(t,T)\int_\sigma^T h(T,s)|R(s)|ds + M\int_T^{+\infty} |R(s)|ds,$$

donde $M = \max\{1, \sup_{t\geq s}|h(t,s)|\}$. Puesto que $|R(\cdot)| \in L^1$, $H^\sigma(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$. De la desigualdad (1.9) con $y_2 = 0$, existe una constante $c > 0$ tal que

$$|\mathcal{N}y(t) - \exp\left(\int_0^t \lambda_0\right)\hat{e}| \leq c|\exp\left(\int_\sigma^t \lambda_0\right)|\|y\|_{\lambda_0}$$

y

$$\lim_{t\to+\infty} |\exp\left(-\int_\sigma^t \lambda_0\right)\mathcal{N}y(t) - \hat{e}| = 0. \tag{1.10}$$

De aquí, $\mathcal{N}y \in \mathcal{C}_{\lambda_0}$ para todo $y \in \mathcal{C}_{\lambda_0}$, y la afirmación i) queda probada. Si se considera, en (1.9), σ tan grande que $\sup_{t\geq\sigma} H^\sigma(t) < 1$, se tendrá que $\mathcal{N}$ es una contracción y por el Teorema del Punto Fijo de Banach, $\mathcal{N}$ tiene un único punto fijo $y_0 \in \mathcal{C}_{\lambda_0}$, de donde la afirmación ii) queda demostrada. El límite (1.10) prueba iii).□

1.2 Teorema Asintótico de Hartman-Wintner en espacios de Hilbert

En esta sección se dará la versión más general del teorema asintótico de Hartman-Wintner. Como lo dice el título, el espacio E será un espacio de Hilbert y los operadores $A(t)$ y $R(t)$ satisfarán las siguientes hipótesis:

(H4): Existe una función localmente integrable $\lambda_0 : I_\sigma \to \mathbf{C}$, existen proyecciones $P_i(t) : E \to E (i = 1, 2)$ y una proyección constante y unidimensional $P_0 : E \to E$ con $ImP_0 =< \hat{e} >$, tal que $|P_i(t)|$ es acotada como función de t, $P_1(t)$, P_0, $P_2(t)$ son proyecciones complementarias,

$$\begin{aligned} A(t)P_i(t) &= P_i(t)A(t), \quad i = 1, 2, \\ A(t)\hat{e} &= \lambda_0(t)\hat{e} \end{aligned} \tag{1.11}$$

y existen $\varepsilon, K > 0$ tal que

$$|\Phi(t,s)P_1(s)| \leq Ke^{-\varepsilon(t-s)}|\exp\left(\int_s^t \lambda_0\right)|, \quad t \geq s, \tag{1.12}$$

$$|\Phi(t,s)P_2(s)| \leq Ke^{\varepsilon(t-s)}|\exp\left(\int_s^t \lambda_0\right)|, \quad t \leq s, \tag{1.13}$$

donde $\Phi(t,s)$ es el operador de Cauchy de (1.1).

(H5): R cumple la condición de integrabilidad $R \in L^p$, $1 \leq p \leq 2$.

En virtud de la unidimensionalidad de P_0, existe una función $r_0 : I_\sigma \to \mathbf{C}$ tal que

$$P_0R(t)\hat{e} = r_0(t)\hat{e}.$$

Por la hipótesis (H5), $r_0 \in L^p$.

Definición 4 *Si una ecuación de la forma (1.1) satisface la hipótesis (H4), se dice que posee una λ_0-tricotomía exponencial. Si las proyecciones $P_i(t)$ no dependen de t, es decir, son constantes, se dice que con proyecciones fijas. Si la ecuación (1.1) posee una λ_0-tricotomía exponencial y $\lambda_0 = 0$ se dice simplemente que (1.1) posee una tricotomía exponencial.*

De (1.11) se deduce que $x_0(t)$ definida por,

$$x_0(t) = \exp\left(\int_\sigma^t \lambda_0\right)\hat{e}$$

es una solución de la ecuación (1.1) y en el caso en que $A(t)$ es una matriz diagonal $N \times N$, las hipótesis del Teorema asintótico de Hartman-Wintner, sobre los valores propios de $A(t)$, garantizan el cumplimiento de (1.12) y (1.13). Antes de enunciar el resultado que generaliza el Teorema de Hartman-Wintner, se necesitan algunos lemas previos.

1.2.1 Lemas previos

Los siguientes lemas aportarán estimaciones que serán muy útiles para la demostración del resultado principal.

Lema 1 *Sea $r \in L^p, p \geq 1$, una función continua y no negativa sobre $\mathbf{R}^+$. Para $t \geq 0$ y $\varepsilon > 0$ sea*

$$\varphi(t,\varepsilon) = \int_0^t r(s)e^{-\varepsilon(t-s)}ds, \; \zeta(t,\varepsilon) = \int_t^{+\infty} r(s)e^{\varepsilon(t-s)}ds.$$

Entonces

i) $\varphi(t,\varepsilon) \to 0, \zeta(t,\varepsilon) \to 0, t \to +\infty$

ii) $\varphi(\cdot,\varepsilon) \in L^q, \zeta(\cdot,\varepsilon) \in L^q$, *si* $q \geq p$.

Nota 3: La parte ii) es válida cuando $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $p \leq 2$.

Lema 2 *Sean $r \in L^p$, $c > 1$ y $\varepsilon > 0$. Entonces para $t \geq s \geq \sigma$ se tiene*

$$|\exp\left(\int_s^t r\right)| \leq ce^{\frac{\varepsilon}{2}(t-s)}, \tag{1.14}$$

si σ es suficientemente grande.

Demostración: Por la desigualdad de Hölder,

$$\int_s^t r \leq (t-s)^{\frac{p-1}{p}} \int_s^{+\infty} |r|^p. \tag{1.15}$$

Claramente, la desigualdad (1.15) implica que $\lim_{t\to+\infty} \int_{t-1}^t |r| = 0$. De aquí, para $c > 1$, se considera σ tan grande que

$$|\exp\left(\int_s^t r\right)| \leq c,$$

para $t \geq s \geq \sigma$. Como $r \in L^p$,

$$\int_\sigma^{+\infty} |r|^p \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

para σ suficientemente grande. De (1.15) y $\frac{p-1}{p} < 1$ se tiene que si $t - s \geq 1$, entonces

$$\int_s^t r \leq \frac{\varepsilon}{2}(t-s),$$

de donde,

$$|\exp\left(\int_s^t r\right)| \leq e^{\frac{\varepsilon}{2}(t-s)},$$

para $t-s \geq 1$. Así, se obtiene (1.14) para todo $t \geq s \geq \sigma$ donde σ es suficientemente grande.□

Ahora, se compara (1.2) con la ecuación

$$x' = (A(t) + R_0)x, \tag{1.16}$$

donde

$$R_0 = P_0 R, \tag{1.17}$$

cuyo operador de Cauchy será denotado por U. Se comenzará calculando U y desde ahora se denota $\tilde{\lambda} = \lambda_0 + r_0$. Nótese que $\tilde{\lambda} : I_\sigma \to \mathbf{C}$ es una función localmente integrable.

Lema 3 *Se tiene*

$$U(t,s)P_0 = \exp\left(\int_s^t \tilde{\lambda}\right) P_0 \tag{1.18}$$

y para $i = 1, 2$,

$$U(t,s)P_i(s) = \Phi(t,s)P_i(s) + \exp\left(\int_s^t \tilde{\lambda}\right)\left[\int_s^t R_0(\xi)e^{-\int_s^\xi \tilde{\lambda}}\Phi(\xi,s)P_i(s)d\xi\right]. \tag{1.19}$$

Demostración: Aplicando $I - P_0$ al lado izquierdo de la igualdad

$$\frac{d}{dt}U(t,s) = (A + R_0)U(t,s)$$

se obtiene

$$(I - P_0)U(t,s) = \Phi(t,s)P_1(s) + \Phi(t,s)P_2(s)$$

y aplicando P_0

$$\frac{d}{dt}P_0U(t,s) = \tilde{\lambda}(t)P_0U(t,s) + R_0(t)\Phi(t,s)P_1(s) + R_0(t)\Phi(t,s)P_2(s)$$

Así, de la fórmula de variación de parámetros se tiene (1.18) y (1.19).□

Nota 4: La igualdad (1.18) puede ser escrita como

$$U(t,s)\hat{e} = \exp\left(\int_s^t \lambda_0(\xi)d\xi\right)\hat{e}.$$

Sean $U_{01}(t,s)$ y $U_{02}(t,s)$ operadores definidos por

$$U_{01}(t,s)P_1(s) = \exp\left(\int_s^t \tilde{\lambda}\right)\left[-\int_t^{+\infty} R_0(\xi)e^{-\int_s^\xi \tilde{\lambda}}\Phi(\xi,s)P_1(s)d\xi\right], \tag{1.20}$$

$$U_{02}(t,s)P_1(s) = \exp\left(\int_s^t \tilde{\lambda}\right)\left[\int_s^{+\infty} R_0(\xi)e^{-\int_s^\xi \tilde{\lambda}}\Phi(\xi,s)P_1(s)d\xi\right]. \tag{1.21}$$

Nota 5: Obsérvese que

$$P_0U(t,s)P_1(s) = U_{01}(t,s)P_1(s) + U_{02}(t,s)P_1(s).$$

Asi, U ha sido descompuesto en cuatro partes las cuales serán estimadas en los siguientes lemas, en los cuales las hipótesis (H1), (H4) y (H5) se supondrán válidas.

Lema 4 *Para σ suficientemente grande, existe $c \geq 1$ tal que*

i) $|\exp\left(-\int_s^t \tilde{\lambda}\right)\Phi(t,s)P_1(s)| \leq ce^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-s)}, \quad t \geq s \geq \sigma$

ii) $|\exp\left(-\int_s^t \tilde{\lambda}\right)\Phi(t,s)P_2(s)| \leq ce^{\frac{\varepsilon}{2}(t-s)}, \quad \sigma \leq t \leq s.$

Demostración: La parte i) se deduce de la desigualdad

$$\begin{aligned} |\exp\left(-\textstyle\int_s^t \tilde{\lambda}\right)\Phi(t,s)P_1(s)| &= |\exp\left(-\textstyle\int_s^t \lambda_0\right)\Phi(t,s)P_1(s)| \cdot \exp\left(\textstyle\int_s^t |r_0|\right) \\ &\leq e^{-\varepsilon(t-s)}\exp\left(\textstyle\int_s^t |r_0|\right) \end{aligned} \tag{1.22}$$

y del Lema 1. La parte ii) se obtiene en forma análoga. □

Lema 5 *Existe una constante $K > 0$ tal que*

i) $|(I - P_0)U(t,s)P_1(s)| \leq K\,|\exp\left(\int_s^t \tilde{\lambda}\right)| \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-s)}$

ii) $|U_{01}(t,s)P_1(s)| \leq K\,|\exp\left(\int_s^t \tilde{\lambda}\right)|\left[\int_t^{+\infty} |R_0(\xi)|e^{\frac{\varepsilon}{2}(s-\xi)}d\xi\right]$

para $t \geq s \geq \sigma$ y σ suficientemente grande.

Demostración: Primero, se probará la parte i). De la relación (1.19), se tiene la igualdad

$$(I - P_0)U(t,s)P_i(s) = \Phi(t,s)P_i(s)$$

y del Lema 3-i) se obtiene la parte i) .

Ahora, se probará la parte ii). Por el Lema 3-i), existe una constante $K_1 > 0$ tal que

$$|U_{01}(t,s)P_1(s)| \leq K_1|\ \exp\left(\int_s^t \tilde{\lambda}\right)|\left[\int_t^{+\infty} |R_0(\xi)|e^{-\frac{\varepsilon}{2}(\xi-s)}d\xi\right], \quad t \geq s,$$

lo que prueba la parte ii). □

Lema 6 *Existe una constante $K > 0$ tal que*

i) $|U_{02}(t,s)P_1(s)| \leq K\,|\exp\left(\int_s^t \tilde{\lambda}\right)|\left[\int_s^{+\infty} |R_0(\xi)|e^{-\frac{\varepsilon}{2}(\xi-s)}d\xi\right],$

ii) $|U(t,s)P_2(s)| \leq K\,|\exp\left(\int_s^t \tilde{\lambda}\right)|\left[e^{\frac{\varepsilon}{2}(t-s)} + \int_s^t |R_0(\xi)|e^{\frac{\varepsilon}{2}(\xi-s)}d\xi\right].$

para $s \geq t \geq \sigma$ y σ suficientemente grande.

Demostración: Por el Lema 3-i), existe una constante $K_3 > 0$ tal que

$$|U_{02}(t,s)P_1(s)| \leq K_3| \exp\left(\int_s^t \tilde{\lambda}\right)| \left[\int_s^{+\infty} |R_0(\xi)|e^{-\frac{\xi}{2}(\xi-s)}d\xi\right],$$

lo que prueba la parte i).

De la relación (1.19) se ve que para $i = 1, 2$,

$$U(t,s)P_i(s) = \exp\left(\int_s^t \tilde{\lambda}\right)\left[\exp\left(-\int_s^t \tilde{\lambda}\right)\Phi(t,s)P_i(s) + \left(\int_s^t R_0(\xi)e^{-\int_s^\xi \tilde{\lambda}}\Phi(\xi,s)P_i(s)d\xi\right)\right].$$

Entonces, usando los Lemas 1 y 3, se obtiene la parte ii) para $s \geq t \geq \sigma$ y σ suficientemente grande. □

1.2.2 Hartman-Wintner generalizado

Ahora se probará la versión generalizada del teorema de Hartman-Wintner.

Teorema 2 *Supóngase que (H1), (H4) y (H5) son válidas para la ecuación (1.2). Entonces ésta posee una solución $y_0 \in C([\sigma, +\infty[, E)$ para σ suficientemente grande, que satisface*

$$y_0(t) = \exp\left(\int_\sigma^t \tilde{\lambda}(s)ds\right)(\hat{e} + o(1)), \tag{1.23}$$

cuando $t \to \infty$.

Demostración: Sean $C_\sigma = C([\sigma, +\infty[, E)$ y $\mathcal{N}$ el operador definido en C_σ por

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}y)(t) &= U(t,\sigma)\hat{e} + \textstyle\int_\sigma^t (I - P_0)U(t,s)P_1(s)\hat{R}(s)y(s)ds \\ &- \textstyle\int_t^{+\infty} U(t,s)P_2(s)\hat{R}(s)y(s)ds \\ &+ \textstyle\int_\sigma^t U_{01}(t,s)P_1(s)\hat{R}(s)y(s)ds \\ &- \textstyle\int_t^{+\infty} U_{02}(t,s)P_1(s)\hat{R}(s)y(s)ds,\end{aligned} \tag{1.24}$$

donde $\hat{R} = R - R_0$.

Por la fórmula de variación de parámetros y la Nota 5, no es difícil probar que cualquier punto fijo y_0 de $\mathcal{N}$ es una solución de la ecuación (1.2). Ahora se probará que el operador $\mathcal{N}$ tiene un punto fijo que satisface (1.23).

Considérese la norma

$$\|y\|_{\tilde{\lambda}} = \sup_{t\geq\sigma} |\exp\left(-\int_\sigma^t \tilde{\lambda}\right) y(t)|$$

y el espacio de Banach $\mathcal{C}_{\tilde{\lambda}} = \{y \in C_\sigma : \|y\|_{\tilde{\lambda}} < +\infty\}$. Entonces se verifica lo siguiente:

i) $\mathcal{N}(\mathcal{C}_{\tilde{\lambda}}) \subseteq \mathcal{C}_{\tilde{\lambda}}$,

ii) $\mathcal{N}$ tiene un único punto fijo $y_0 \in \mathcal{C}_{\tilde{\lambda}}$ y

iii) y_0 satisface (1.23).

De hecho, para una constante convenientemente grande K, se define

$$\begin{aligned}
H_1^\sigma(t) &= K\int_\sigma^t e^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-s)}|\hat{R}(s)|ds,\\
H_2^\sigma(t) &= K\left[\int_\sigma^t |\hat{R}(s)|e^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-s)}ds\right]\left[\int_t^{+\infty}|R_0(\xi)|e^{-\frac{\varepsilon}{2}(\xi-t)}d\xi\right],\\
H_3^\sigma(t) &= K\int_t^{+\infty}|\hat{R}(s)|\left(\int_s^{+\infty}|R_0(\xi)|e^{-\frac{\varepsilon}{2}(\xi-s)}d\xi\right)ds
\end{aligned}$$

y

$$H_4^\sigma(t) = K\left[\int_t^{+\infty} e^{\frac{\varepsilon}{2}(t-s)}|\hat{R}(s)|ds + \int_t^{+\infty}\left(\int_\sigma^s |R_0(\xi)|e^{-\frac{\varepsilon}{2}(s-\xi)}d\xi\right)|\hat{R}(s)|ds\right].$$

En virtud de los Lemas 4-6 , se tiene:

$$\begin{aligned}
\left|\int_s^t P_1U(t,s)P_1\hat{R}(s)y(s)ds\right| &\leq \left|\exp\left(\int_s^t\tilde{\lambda}\right)\right|H_1^\sigma(t)\|y\|_{\tilde{\lambda}},\\
\left|\int_\sigma^t U_{01}(t,s)P_1\hat{R}(s)y(s)ds\right| &\leq \left|\exp\left(\int_\sigma^t\tilde{\lambda}\right)\right|H_2^\sigma(t)\|y\|_{\tilde{\lambda}},\\
\left|\int_t^{+\infty} U_{02}(t,s)P_1\hat{R}(s)y(s)ds\right| &\leq \left|\exp\left(\int_\sigma^t\tilde{\lambda}\right)\right|H_3^\sigma(t)\|y\|_{\tilde{\lambda}},
\end{aligned}$$

y finalmente,

$$\begin{aligned}
\left|\int_t^{+\infty} U(t,s)P_2\hat{R}(s)y(s)ds\right| &\leq \left|\exp\left(\int_\sigma^t\tilde{\lambda}\right)\right|K\left[\int_t^{+\infty} e^{\frac{\varepsilon}{2}(t-s)}|\hat{R}(s)|ds\right.\\
&+ \left.\int_t^{+\infty}\left(\int_t^s |R_0(\xi)|e^{-\frac{\varepsilon}{2}(\xi-s)}d\xi\right)|\hat{R}(s)|ds\right]\|y\|_{\tilde{\lambda}}\\
&\leq \left|\exp\left(\int_\sigma^t\tilde{\lambda}\right)\right|H_4^\sigma(t)\|y\|_{\tilde{\lambda}},
\end{aligned}$$

para todo $y \in \mathcal{C}_{\tilde{\lambda}}$, σ suficientemente grande.

Además, si $H^\sigma = H_1^\sigma + H_2^\sigma + H_3^\sigma + H_4^\sigma$, entonces de la relación (1.24), se obtiene

$$|\mathcal{N}y_1(t) - \mathcal{N}y_2(t)| \leq \left|\exp\left(\int_\sigma^t\tilde{\lambda}\right)\right| H^\sigma(t)\|y_1 - y_2\|_{\tilde{\lambda}} \tag{1.25}$$

para todo $y_1, y_2 \in \mathcal{C}_{\tilde{\lambda}}$.

Por el Lema 1, $H^\sigma(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$. De la desigualdad (1.25) con $y_2 = 0$, existe una constante $c > 0$ tal que

$$\left|\mathcal{N}y(t) - \exp\left(\int_0^t\tilde{\lambda}\right)\hat{e}\right| \leq c\left|\exp\left(\int_\sigma^t\tilde{\lambda}\right)\right|\|y\|_{\tilde{\lambda}}$$

y

$$\lim_{t\to+\infty} |\exp\left(-\int_\sigma^t \tilde{\lambda}\right)\mathcal{N}y(t) - \hat{e}| = 0. \tag{1.26}$$

De aquí, $\mathcal{N}y \in \mathcal{C}_{\tilde{\lambda}}$ para todo $y \in \mathcal{C}_{\tilde{\lambda}}$, y la afirmación i) queda probada. Si en la relación (1.25) se toma σ tan grande que $\sup_{t\geq\sigma} H^\sigma(t) < 1$, se obtendrá que $\mathcal{N}$ es una contracción y por el Teorema del Punto Fijo de Banach, el operador $\mathcal{N}$ tiene un punto fijo $y_0 \in \mathcal{C}_{\tilde{\lambda}}$. Del límite (1.26) se deduce iii).□

Nota 6: Este resultado se extiende fácilmente para el sistema

$$y' = \left[A(t) + \sum_{i=1}^{m} R^i(t)\right] y,$$

donde

$$R^i \in L^{p_i}, 1 \leq p_i \leq 2.$$

1.3 Teoremas Asintóticos Abstractos. Versión Espectral

En esta sección se darán versiones espectrales de los Teoremas 1 y 2. Hasta ahora las hipótesis sobre la ecuación no perturbada, ya sea las tricotomías ordinarias o exponenciales, vienen dadas en el operador de Cauchy, lo que hace necesario conocer las soluciones de la ecuación (1.1). Se establecerán condiciones sobre el espectro de $A(t)$ para que la ecuación (1.1) posea una tricotomía ordinaria o una tricotomía exponencial. Con este fin, se hará uso de la teoría de reductibilidad dada por Daleckii y Krein [9].

1.3.1 Reductibilidad

Lema 7 *Sean $P_i : I_\sigma \to \mathcal{L}_u(E,E)$, $i = 1,...,N$ funciones diferenciables acotadas en t tal que $\{P_i(t)\}_{i=1}^N$ es una familia de proyecciones complementarias. Sea S una solución de la ecuación diferencial en $\mathcal{L}_u(E,E)$:*

$$S'(t) = (P_1'(t)P_1(t) + \cdots + P_N'(t)P_N(t))S(t), \tag{1.27}$$

con condición inicial

$$S(\sigma) = I. \tag{1.28}$$

Entonces para $t, s \in I_\sigma$, se tiene

$$S(t)S(s)^{-1}P_i(s) = P_i(t)S(t)S(s)^{-1}, \quad i = 1,...,N. \tag{1.29}$$

Demostración: En primer lugar,

$$P_1'(t)P_1(t) + \cdots + P_N'(t)P_N(t) = -P_1(t)P_1'(t) - \cdots - P_N(t)P_N'(t),$$

de donde

$$P_i(t)S'(t) = -P_i(t)P_i'(t)S(t).$$

Como $P_i'(t) = P_i'(t)P_i(t) + P_i(t)P_i'(t)$, se tiene,

$$P_i(t)S(t) = P_i'(t)P_i(t)S(t) - P_i'(t)S(t),$$

es decir,

$$P_i'(t)S(t) + P_i(t)S'(t) = P_i'(t)P_i(t)S(t),$$

o bién,

$$(P_i(t)S(t))' = P_i'(t)P_i(t)(P_i(t)S(t)).$$

De aquí, $S_i = P_i(t)S(t)S(s)^{-1}$ es solución del problema de valor inicial

$$S_i' = (P_1'(t)P_1(t) + \cdots + P_N'(t)P_N(t))S_i$$

$$S_i(s) = P_i(s),$$

al igual que lo es $S_i = S(t)S(s)^{-1}P_i(s)$. Como $P_i(t)$ y $P_i'(t)$ son operadores acotados, este problema de valor inicial tiene solución única y por lo tanto

$$P_i(t)S(t)S(s)^{-1} = S(t)S(s)^{-1}P_i(s).$$

que era lo que se quería demostrar.□

En el próximo Lema se mostrará la existencia de un operador que satisfaga la propiedad (1.28) y que además su norma sea acotada como función de t. Para esto se pedirá una restricción adicional sobre E: que sea un espacio de Hilbert. Además emplearemos la misma notación que en el lema anterior.

Lema 8 *Considérese la notación del Lema anterior. Supóngase que E es un espacio de Hilbert con producto interno $< \cdot, \cdot >$ que induce la norma $|\cdot|$. Considérese el operador*

$$\hat{S} := SR^{-1},$$

donde R es el operador lineal tal que $R^2 = S^* \left[\sum_{i=1}^N P_i^* P_i\right] S$ y los adjuntos están considerados según el producto interno $< \varphi, \psi >_0 = \sum_{i=1}^N < P_i(\sigma)\varphi, P_i(\sigma)\psi >$. Además sea

$$\tilde{S} := \hat{S}V,$$

donde V es un operador que es la solución del problema de valor inicial

$$V' = i\Omega_{\mathbf{I}}(t)V$$

$$V(\sigma) = I$$

con $\Omega_{\mathbf{I}} = \frac{1}{2i}[R'R^{-1} - R^{-1}R']$.

Entonces

i) $\hat{S}(t)$, $\hat{S}(t)^{-1}$, $\tilde{S}(t)$ *y* $\tilde{S}(t)^{-1}$ *son acotados como funciones de* t.

ii) Para $t, s \in I_\sigma$,

$$\hat{S}(t)\hat{S}(s)^{-1}P_i(s) = P_i(t)\hat{S}(t)\hat{S}(s)^{-1},$$

$$\tilde{S}(t)\tilde{S}(s)^{-1}P_i(s) = P_i(t)\tilde{S}(t)\tilde{S}(s)^{-1},$$

para $i = 1, ..., N$.

iii) Existe una constante $c > 0$ *tal que* $|\tilde{S}'(t)| \leq c \left| [\sum_{i-1}^{N} P_i'(t)P_i(t)] \right|$.

Demostración: En esta demostración se usará la notación $< \cdot, \cdot >$, para denotar a $< \cdot, \cdot >_0$. No es difíicil ver que ambos productos internos inducen la misma topología.

Antes de probar i), ii) y iii) se verificará que R está bien definido, es decir, que el operador $R^2(t)$ es positivo.

Si $\varphi \in E$ entonces

$$\begin{aligned} < R^2(t)\varphi, \varphi > &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} < S(t)P_i(\sigma)\varphi, S(t)P_i(\sigma)\varphi > \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} |S(t)P_i(\sigma)\varphi|^2 \\ &\geq \tfrac{1}{|S(t)^{-1}|^2} \textstyle\sum_{i=1}^{N} |P_i(\sigma)\varphi|^2 \\ &\geq \tfrac{1}{N|S(t)^{-1}|} | \textstyle\sum_{i=1}^{N} |P_i(\sigma)\varphi|^2 \\ &= \tfrac{1}{N|S(t)^{-1}|} |\varphi|^2, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que $R^2(t)$ es un operador positivo y por tanto se puede definir su raíz cuadrada $R(t)$.

Ahora se prueba la parte i).

En virtud de la definición de R^2 se tiene

$$I = R^{-1}S^* \left[\sum_{i=1}^{N} P_i^* P_i \right] SR^{-1}$$

y por tanto la desigualdad

$$\begin{aligned} |\varphi|^2 &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} < R^{-1}(t)S^*(t)P_i^*(t)P_i(t)S(t)R^{-1}(t)\varphi, \varphi > \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} |P_i(t)S(t)R^{-1}(t)\varphi|^2 \\ &\geq \tfrac{1}{N} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{N} |P_i(t)S(t)R^{-1}(t)\varphi| \right)^2 \\ &\geq \tfrac{1}{N} |S(t)R^{-1}(t)\varphi|^2. \end{aligned}$$

Así, $|\hat{S}(t)| \leq \sqrt{N}$.

Por otro lado, usando otra vez la definición de R^2 se obtiene

$$(S^*)^{-1}R^2S^{-1} = \sum_{i=1}^{N} P_i^* P_i.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |\hat{S}(t)^{-1}\varphi|^2 &= |R(t)S(t)^{-1}\varphi|^2 \\ &= <(S^*)^{-1}(t)R^2(t)S(t)^{-1}\varphi, \varphi> \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} < P_i^*(t)P_i(t)\varphi, \varphi> \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} |P_i(t)\varphi|^2 \leq N \sup_{i=1,\ldots,N} |P_i(t)|^2|\varphi|^2. \end{aligned}$$

Ya que $|P_i(t)|$ es acotada como función de t, $|\hat{S}^{-1}(t)|$ también lo es.

Para ver la acotación de $\tilde{S}$ y de $\tilde{S}^{-1}$ basta probar que V y V^{-1} son acotadas. Esto se deduce facilmente demostrando que

$$\frac{d}{dt} < V(t), V(t) >= \frac{d}{dt} < V(t)^{-1}, V(t)^{-1} >= 0.$$

De aquí se obtiene

$$|V(t)|^2 = \sup_{|\varphi|=1} < V(t)\varphi, V(t)\varphi >= \sup_{|\varphi|=1} < V(\sigma)\varphi, V(\sigma)\varphi >= 1$$

y análogamente $|V(t)^{-1}| = 1$. Así la parte i) queda demostrada.

Ahora demostraremos la parte ii).

Del Lema anterior se tiene

$$S(t)P_i(\sigma) = P_i(t)S(t).$$

Además,

$$R(t)^2P_i(\sigma) = P_i(\sigma)S(t)^*S(t)P_i(\sigma) = P_i(\sigma)R(t)^2,$$

de donde $R(t)P_i(\sigma) = P_i(\sigma)R(t)$. Así,

$$\hat{S}(t)P_i(\sigma) = P_i(\sigma)\hat{S}(t).$$

Sólo queda mostrar que $\tilde{S}(t)P_i(\sigma) = P_i(t)\tilde{S}(t)$. Para esto es suficiente probar que $V(t)P_i(\sigma) = P_i(\sigma)V(t)$. En efecto, no es difícil verificar que $\Omega_{\mathbf{I}}(t)P_i(\sigma) = P_i(\sigma)\Omega_{\mathbf{I}}(t)$. De aquí se obtienen las relaciones

$$V'(t)P_i(\sigma) = i\Omega_{\mathbf{I}}(t)V(t)P_i(\sigma)$$

$$P_i(\sigma)V'(t) = i\Omega_{\mathbf{I}}(t)P_i(\sigma)V(t),$$

ambas con la misma condición inicial en $t = \sigma$. De la unicidad se tiene que que $V(t)P_i(\sigma) = P_i(\sigma)V(t)$. Luego, se verifican las igualdades

$$\hat{S}(t)\hat{S}(s)^{-1}P_i(s) = \hat{S}(t)P_i(\sigma)\hat{S}(s)^{-1} = P_i(t)\hat{S}(t)\hat{S}(s)^{-1},$$

$$\tilde{S}(t)\tilde{S}(s)^{-1}P_i(s) = \tilde{S}(t)P_i(\sigma)\tilde{S}(s)^{-1} = P_i(t)\tilde{S}(t)\tilde{S}(s)^{-1}.$$

Esto prueba la parte ii).

Por último se demostrará la parte iii). En primer lugar, obsérvese que

$$\tilde{S}'(t) = G(t)\tilde{S}(t) - \tilde{S}(t)\Xi'(t)\Xi^{-1}(t), \tag{1.30}$$

donde $G(t) = \sum_{i=1}^{N} P_i'(t)P_i(t)$ y $\Xi = V^{-1}R$.

Como $\tilde{S}(t)$ es acotado, sólo queda mostrar la existencia de una constante $\tilde{c} > 0$ tal que

$$|\Xi'(t)\Xi^{-1}(t)| \leq \tilde{c}|G(t)|. \tag{1.31}$$

Para esto, nótese que

$$R^2(t) = \sum_{i=1}^{N} P_i(\sigma)S^*(t)S(t)P_i(\sigma)P_i(\sigma).$$

Derivando esta expresión se obtiene

$$R'(t)R(t) + R(t)R'(t) = \sum_{i=1}^{N} P_i(\sigma)S^*(t)[G^*(t) + G(t)]S(t)P_i(\sigma).$$

Dado que el operador $G^*(t) + G(t)$ es acotado, existen $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tal que

$$\alpha < \varphi, \varphi > \leq < [G^* + G]\varphi, \varphi > \leq \ \beta < \varphi, \varphi >, \quad \varphi \in E.$$

De la relación

$$< (R'R + RR')\varphi, \varphi >= \sum_{i=1}^{N} < [G^* + G]S(t)P_i(\sigma)\varphi, S(t)P_i(\sigma)\varphi >,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha \textstyle\sum_{i=1}^{N} < S(t)P_i(\sigma)\varphi, S(t)P_i(\sigma)\varphi > \ &\leq \ < (R'R + RR')\varphi, \varphi > \\ &\leq \ \beta \textstyle\sum_{i=1}^{N} < S(t)P_i(\sigma)\varphi, S(t)P_i(\sigma)\varphi >, \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a

$$\alpha < R^2\varphi, \varphi > \leq < (R'R + RR')\varphi, \varphi > \leq \ \beta < R^2\varphi, \varphi > .$$

Tomando $\varphi = R^{-1}\psi$ se tiene

$$\alpha|\psi|^2 \leq < (R'R^{-1} + R^{-1}R')\psi, \psi > \leq \beta|\psi|^2.$$

Entonces

$$|R'(t)R(t)^{-1} + R(t)^{-1}R'(t)| \leq 2|G(t)|.$$

Se define

$$\Omega_{\mathbf{R}} := \frac{1}{2}[\Omega^* + \Omega] = \frac{1}{2}(R'R^{-1} + R^{-1}R'),$$

donde $\Omega(t) = R'(t)R^{-1}(t)$. Entonces

$$|\Omega_{\mathbf{R}}(t)| \leq |G(t)|. \tag{1.32}$$

Puesto que $\Omega(t) = \Omega_{\mathbf{R}}(t) + i\Omega_{\mathbf{I}}(t)$, al hacer el cambio de variables

$$R = V\Xi$$

en la ecuación

$$R' = \Omega(t)R,$$

se obtiene

$$i\Omega_{\mathbf{I}}(t)V(t)\Xi(t) + V(t)\Xi'(t) = \Omega_{\mathbf{R}}(t)V(t)\Xi(t) + i\Omega_{\mathbf{I}}(t)V(t)\Xi(t)$$

de donde

$$\Xi'(t)\Xi^{-1}(t) = V(t)^{-1}\Omega_{\mathbf{R}}(t)V(t).$$

Luego $|\Xi'(t)\Xi^{-1}| \leq |\Omega_{\mathbf{R}}(t)|$ y de la relación (1.32) se obtiene (1.31), demostrando así la parte iii). $\square$

Lema 9 *Sean $P_i : I_\sigma \to \mathcal{L}_u(E,E), i = 1,...,N$ y $\tilde{S}$ definidos como en el Lema anterior. Sea $A : I_\sigma \to \mathcal{L}_u(D,E)$, donde D es un subespacio vectorial de E, tal que $A(t)P_i(t) = P_i(t)A(t)$ y $P_i(t)(D) \subseteq D$ para $i = 1,...,N$.*

Sea $\tilde{S}(t)$ un operador lineal definido como en el Lema anterior. Entonces:

a) haciendo el cambio de variable $x = \tilde{S}(t)\zeta$ en la ecuación (1.1), obtenemos

$$\zeta'(t) = (B(t) - \tilde{S}(t)^{-1}\tilde{S}'(t))\zeta(t), \tag{1.33}$$

donde $B(t) = \tilde{S}(t)^{-1}A(t)\tilde{S}(t)$.

b) Si A es diferenciable, entonces B es diferenciable y existe $c > 0$ tal que

$$|B'(t)| \leq c|\sum_{i=1}^{N} P_i'(t)P_i(t)|, \quad t \in I_\sigma. \tag{1.34}$$

Demostración: Para probar la parte a), se hace, en la ecuación (1.1), el cambio de variable $x = \tilde{S}(t)\zeta$ obteniendo

$$(\tilde{S}(t)\zeta)' = A(t)\tilde{S}(t)\zeta.$$

Es decir,

$$\tilde{S}'(t)\zeta + \tilde{S}(t)\zeta' = A(t)\tilde{S}(t)\zeta,$$

lo cual puede escribirse como la ecuación (1.33).

Para la demostración de la parte b), ver Lizana [20]. $\square$

1.3.2 Algunas definiciones

Con el fin de preparar el camino para formular las versiones espectrales, se considerará la (D, E)-Ecuación Abstracta

$$w'(t) = B(t)w(t). \tag{1.35}$$

Se denotará por $W(t, s)$ el operador de Cauchy asociado al sistema (1.35). Se supondran las siguientes hipótesis:

(H6):

A) (1.35) satisface la hipótesis (H1),

B) Para cada $t \in I_\sigma$, $B(t)$ es generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo

C) El espectro de $B(t)$ consiste solamente de valores propios, es decir, $\sigma(B(t)) = \sigma_p(B(t)) = \{\lambda_i(t)\}_{i=1}^{m_t}$, $m_t \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, donde los $\lambda_i(t)$'s están repetidos según la dimensión de sus espacios propios

Además, se darán las siguientes definiciones:

Definición 5 *Se dice que la ecuación (1.35) es espectralmente diagonal a bloques para $k \leq m_t$ con respecto al valor propio λ_k, si existen proyecciones complementarias $P_1, P_0, P_2 : E \to E$ (independientes de t) de modo que se tenga:*

$$P_i B(t) = B(t) P_i \ \textit{para} \ i = 1, 0, 2,$$

$$\sigma(B(t)P_2) = \sigma_p(B(t)P_2) = \{\lambda_i(t)\}_{i=1}^{k-1},$$

$$\sigma(B(t)P_0) = \sigma_p(B(t)P_0) = \{\lambda_k(t)\}$$

$$\sigma(B(t)P_1) = \sigma_p(B(t)P_1) = \{\lambda_i(t)\}_{i=k+1}^{m_t},$$

donde $m_t \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$.

Nota 7: Que el espectro de $B(t)$ sea el espectro puntual, se da naturalmente en el caso en que la dimensión del espacio E es finita y además en el caso que se estudiará en el capítulo próximo.

Definición 6 *Se dice que la familia de conjuntos: $\{\lambda_i(t)\}_{i=1}^{m_t}$, $m_t \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, posee una tricotomía del tipo Levinson para $\lambda_k(t)$ ($k \leq m_t$ fijo e independiente de t), si existe $\eta > 0$ tal que*

$$\textstyle\int_\sigma^t \Re e(\lambda_i(\xi) - \lambda_k(\xi))d\xi \to -\infty \ \textit{cuando} \ t \to +\infty \ \textit{e} \ i > k,$$

$$\textstyle\int_s^t \Re e(\lambda_i(\xi) - \lambda_k(\xi))d\xi \leq \eta \ \textit{para todo} \ s > t \ \textit{e} \ i \leq k.$$

Definición 7 *Se dice que la familia de conjuntos:* $\{\lambda_i(t)\}_{i=1}^{m_t}$, $m_t \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, *posee una tricotomía del tipo Hartman-Wintner para* $\lambda_k(t)$ *(*$k \leq m_t$ *fijo e independiente de* t*), si existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\Re e(\lambda_i(t) - \lambda_k(t)) > \delta, \quad i = 1, ..., k-1$$

$$\Re e(\lambda_i(t) - \lambda_k(t)) < -\delta, \quad i > k+1.$$

1.3.3 Teorema de Levinson Espectral Abstracto

Ahora se está en condiciones de formular la versión espectral abstracta del teorema de Levinson. Esta será del tipo en que la ecuación no perturbada es casi autónoma. Más precisamente, en la ecuación (1.1):

$$A(t) = A_0 + V(t),$$

donde $A_0 \in \mathcal{L}_u(D, E)$ y V es una función de I_σ en $\mathcal{L}_u(D, E)$. Es decir, la ecuación (1.2), que es la ecuación a estudiar, es:

$$y'(t) = (A_0 + V(t) + R(t))y(t). \tag{1.36}$$

Se pide además que los espectros de A_0 y de $A(t)$ coincidan con los espectros puntuales y que sean infinitos numerables, es decir,

$$\begin{aligned} \sigma(A_0) &= \sigma_p(A_0) = \{\mu_i\}_{i=1}^{\infty} \\ \sigma(A_0 + V(t)) &= \sigma_p(A_0 + V(t)) = \{\lambda_i(t)\}_{i=1}^{\infty}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Teorema 3 *Sea* $(E, |\cdot|)$ *un Espacio de Banach,* D *un subespacio vectorial de* E*. Supóngase que la* (D, E)*-ecuación diferencial abstracta (1.36) satisface (1.37).*

Supóngase además que

i) $\sigma(A_0 + V(t))$ *posee una tricotomía del tipo Levinson para* $\lambda_k(t)$*,*

ii) existe $n_0 \geq k$ *tal que* $\dim_{\mathbf{C}} M_{\mu_i}(A_0) = 1$ *para* $i = 1, ..., n_0$ *y* $\Re e(\mu_{n_0} - \mu_{n_0+1}) > 0$*,*

iii) $V(\cdot)$ *es diferenciable,* $V(t) \to 0$ *cuando* $t \to +\infty$*,* $V'(\cdot) \in L^1$*,*

iv) $\lambda_i(t) \to \mu_i$ *cuando* $t \to +\infty$ *para* $i = 1, ..., n_0$ *y*

v) $R(\cdot) \in L^1$.

Entonces la ecuación (1.36) tiene una solución $y_k(t)$*, definida para* $t \geq \sigma$ *con* σ *suficientemente grande tal que*

$$y_k(t) = \exp\left(\int_\sigma^t \lambda_k(\xi) d\xi\right)(\hat{e} + o(1)), \tag{1.38}$$

cuando $t \to +\infty$ *y* $\hat{e}$ *es el vector propio de* A_0 *asociado a* μ_k*.*

Demostración: Puesto que los valores propios $\mu_1, ..., \mu_{n_0}$, de A_0 satisfacen la hipótesis ii), se definen las proyecciones de los espacios propios relativos a μ_i por

$$Q_i(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_i}(\lambda I - A_0)^{-1}d\lambda, \quad i = 1, ..., n_0,$$

donde las γ_i's son curvas de Jordan rectificables tal que $\mu_i \in Int\gamma_i$ e $Int\gamma_i \cap Int\gamma_j = \phi$ si $i \neq j$.

En virtud de la hipótesis iv), se toma σ tan grande que $\lambda_i(t) \in Int\gamma_i$ para $i = 1, ..., n_0$ y $t \geq \sigma$. Luego definimos las proyecciones de los espacios propios de $A(t) = A_0 + V(t)$, relativos a $\lambda_i(t)$, por

$$Q_i(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_i}(\lambda I - A(t))^{-1}d\lambda, \quad i = 1, ..., n_0, \ t \geq \sigma.$$

Por el Teorema de la Convergencia Acotada, $Q_i(\infty) = \lim_{t\to+\infty} Q_i(t)$.

Sea

$$P_1(t) = Q_1(t) + \cdots + Q_{k-1}(t),$$

$$P_0(t) = Q_k(t) \text{ y}$$

$$P_2(t) = Q_{k+1}(t) + \cdots + Q_{n_0}(t)$$

$$P_3(t) = I - P_1(t) - P_0(t) - P_2(t)$$

y denótese $P_i(\infty) = \lim_{t\to+\infty} P_i(t)$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Entonces

$$P_1(t)E = \oplus_{i=1}^{k-1} M_{\lambda_i(t)}(A(t)),$$

$$P_0(t)E = M_{\lambda_k(t)}(A(t)),$$

$$P_2(t)E = \oplus_{i=k+1}^{n_0} M_{\lambda_i(t)}(A(t)),$$

$$P_3(t)D = \oplus_{i=n_0+1}^{+\infty} M_{\lambda_i(t)}(A(t)) \text{ y}$$

donde $M_{\lambda_i(t)}(A(t))$ es el espacio propio de $A(t)$ asociado al valor propio $\lambda_i(t)$ y

$$P_1(\infty)E = \oplus_{i=1}^{k-1} M_{\mu_i}(A_0),$$

$$P_0(\infty)E = M_{\mu_k}(A_0) \text{ y}$$

$$P_2(\infty)E = \oplus_{i=k+1}^{n_0} M_{\mu_i}(A_0) \text{ y}$$

$$P_3(\infty)D = \oplus_{i=n_0+1}^{+\infty} M_{\mu_i}(A_0).$$

Sea ahora $S(t)$ una solución de

$$S'(t) = G(t)S(t), \tag{1.39}$$

donde $G(t) = P_1'(t)P_1(t) + P_0'(t)P_0(t) + P_2'(t)P_2(t) + P_3'(t)P_3(t)$. Dado que las proyecciones $P_i(t)$ son acotadas, existe $c_1 > 0$ tal que

$$|G(t)| \leq \frac{c_1}{2\pi}|(\lambda I - A(t))^{-1}|^2 \max_{i=1,\ldots,n_0} |Var(\gamma_i)||V'(t)|.$$

Como la resolvente $(\lambda I - A(t))^{-1}$ es acotada, existe $c_2 > 0$ tal que $|G(t)| \leq c_2|V'(t)|$. Luego, en virtud de la hipótesis iii), se tiene que $|G(t)| \in L^1$ y por tanto $S(\infty) := \lim_{t\to+\infty} S(t)$ existe. Puesto que $(S^{-1})'(t) = -S(t)^{-1}G(t)$, se obtiene análogamente que $S^{-1}(\infty) := \lim_{t\to+\infty} S(t)^{-1}$ también existe. Así, puede considerarse $S(\infty) = I$.

Además, del Lema 8, se observa que

$$P_i(t)S(t) = S(t)P_i(\infty). \tag{1.40}$$

Si en la ecuación (1.36) se hace el cambio de variable

$$y(t) = S(t)\zeta(t), \tag{1.41}$$

se tiene

$$\zeta'(t) = B(t)\zeta(t) - (S(t)^{-1}S'(t) - S(t)^{-1}R(t)S(t))\zeta(t), \tag{1.42}$$

donde $B(t) = S(t)^{-1}A(t)S(t)$.

Como $S(t)$ es acotada, de la relación (1.39) y la hipótesis v), se tiene

$$|S(t)^{-1}S'(t) - S(t)^{-1}R(t)S(t)| \in L^1.$$

Además $P_i(\infty)E$ es invariante bajo $B(t)$, es decir, $B(t)P_i(\infty)E \subseteq P_i(\infty)E$, para $i = 1, 0, 2$ y satisface

$$\sigma(B(t)/P_1(\infty)E) = \{\lambda_i(t)\}_{i=1}^{k-1},$$

$$\sigma(B(t)/P_0(\infty)E) = \{\lambda_k(t)\},$$

$$\sigma(B(t)/P_2(\infty)E) = \{\lambda_i(t)\}_{i=k+1}^{n_0} \text{ y}$$

$$\sigma(B(t)/P_3(\infty)D) = \{\lambda_i(t)\}_{i=n_0+1}^{+\infty}.$$

Así, se puede escribir el sistema (1.35) como la descomposición a bloques,

$$w_1'(t) = B_1(t)w_1(t) \tag{1.43}$$

$$w_0'(t) = B_0(t)w_0(t) \tag{1.44}$$

$$w_2'(t) = B_2(t)w_2(t) \tag{1.45}$$

$$w_3'(t) = B_3(t)w_3(t) \tag{1.46}$$

donde $B_i = B/P_i(\infty)D$ y $w_i = P_i(\infty)w$ para $i = 0, 1, 2, 3$.

- Se probará que la ecuación (1.35) posee una λ_k-tricotomía ordinaria. Más precisamente, denótese por W_1, W_0, W_2 y por W_3 los operadores de Cauchy de las ecuaciones (1.43), (1.44), (1.45) y (1.46) respectivamente; se probará que dado $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño, existe una constante $K > 0$ tal que

A) $|W_1(t,s)| \leq Ke^{\eta}|\exp\left(\int_s^t \lambda_k(\xi)d\xi\right)|$, para $\sigma \leq t \leq s$.

B) $W_0(t,s)P_0(\infty) = \exp\left(\int_s^t \lambda_k(\xi)d\xi\right)$ para todo $t, s \geq \sigma$,

C) $|W_2(t,s)| \leq Kh(t,s)|\exp\left(\int_s^t \lambda_k(\xi)d\xi\right)|$ para $\sigma \leq s \leq t$; donde $h(t,s)$ es una función tal que $h(t,s) = h(t,\xi)h(\xi,s)$ y $h(t,\cdot) \to 0$ cuando $t \to +\infty$ y

D) $|W_3(t,s)| \leq Ke^{\eta}e^{-\varepsilon(t-s)}|\exp\left(\int_s^t \lambda_k(\xi)d\xi\right)|$ para $\sigma \leq s \leq t$,

donde η esta dado en la Definición 6.

En efecto, para probar B) obsérvese que por ser $\lambda_k(t)$ el único valor propio de $B_0(t)$, $B_0(t) = \lambda_k(t)P_0(\infty)$. De aquí B) es fácilmente obtenido.

Por la hipótesis i), los valores propios de $A(t)$ poseen una tricotomía de Levinson y por lo tanto

$$\begin{aligned} |W_1(t,s)| &\leq \max_{i=1,\dots,k-1}\left[\exp\left(\int_s^t \Re e(\lambda_i(\xi)-\lambda_k(\xi))d\xi\right)\right]\exp\left(\int_s^t \lambda_k(\xi)d\xi\right)|P_1(\infty)| \\ &\leq e^{\eta}|\exp\left(\int_s^t \lambda_k(\xi)d\xi\right)||P_1(\infty)|, \end{aligned}$$

para $t \geq s$ y

$$|W_2(t,s)| \leq h(t,s)|\exp\left(\int_s^t \lambda_k(\xi)d\xi\right)||P_2(\infty)|$$

donde $h(t,s) = \max_{i=k+1,\dots,n_0}\exp\left(\int_s^t \Re e(\lambda_i(\xi)-\lambda_k(\xi))d\xi\right)$ para $t \leq s$. Por la hipótesis iii), $h(t,s)$ satisface las condiciones requeridas para tener una λ_k-tricotomía ordinaria. Así se obtienen A) y C).

Para demostrar D) se prueba primeramente que $B_i'(\cdot) \in L^1$:

$$\begin{aligned} B_i'(t) &= [(S^{-1})'(t)A(t)S(t) + S(t)^{-1}A'(t)S(t) + S(t)^{-1}A(t)S'(t)]P_i(\infty) \\ &= [-S(t)^{-1}G(t)A(t)S(t) + S(t)^{-1}A'(t)S(t) + S(t)^{-1}A(t)G(t)S(t)]P_i(\infty) \\ &= [-S(t)^{-1}(G(t)A(t) - A(t)G(t))S(t) + S(t)^{-1}A'(t)S(t)]P_i(\infty) \\ &= \left[\sum_{j=0}^3 S(t)^{-1}(P_j'(t)P_j(t)A(t) - A(t)P_j'(t)P_j(t))S(t) + S(t)^{-1}A'(t)S(t)\right]P_i(\infty) \\ &= \left[\sum_{j=0}^3 S(t)^{-1}[A'(t)P_j(t) - P_j(t)A'(t)]S(t)P_j(\infty) + S(t)^{-1}A'(t)S(t)\right]P_i(\infty) \\ &= \left[\sum_{j=0}^3 S(t)^{-1}[A'(t)P_j(t) - P_j(t)A'(t)]S(t)P_j(\infty) + S(t)^{-1}A'(t)S(t)\right]P_i(\infty). \end{aligned}$$

En virtud de la hipótesis iii), $A'(\cdot) = V'(\cdot) \in L^1$ y $|S(t)|$, $|S^{-1}(t)|$ y $P_j(t)$ son funciones acotadas de t. De aquí $B'(\cdot) \in L^1$ y $B_i(\infty) = \lim_{t\to+\infty} B_i(t)$ existe.

Si se escribe la ecuación (1.46) como

$$w_3'(t) = B_3(\infty)w_3(t) + (B_3(t) - B_3(\infty))w_3(t),$$

por la fórmula de variación de parámetros se obtiene

$$W_3(t,s) = T_3(t-s) + \int_s^t T_3(t-\xi)(B_3(\xi) - B_3(\infty))W_3(\xi,s)d\xi \tag{1.47}$$

donde $(T_3(t))_t$ es el semigrupo de soluciones de

$$\omega' = B_3(\infty)\omega. \tag{1.48}$$

Ahora se demuestra D). Sea $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se llegue a necesitar. De una estimación clásica para semigrupos fuertemente continuos dada en Hale [16] pág. 213, se tiene la existencia de una constante $K > 0$ tal que

$$|T_3(t-s)| \leq Ke^{\eta}e^{(\mu_k - 3\varepsilon)(t-s)},$$

para $t \geq s \geq \sigma$.

Por las hipótesis ii) y iv), se considera σ tan grande que

$$\Re e[\mu_k - \lambda_k(t)] < \varepsilon.$$

Entonces

$$|T_3(t-s)| \leq Ke^{\eta}e^{-2\varepsilon(t-s)}|\exp\left(\int_s^t \lambda_k\right)|,$$

para $t \geq s \geq \sigma$. Luego, de (1.47), se tiene

$$|W_3(t,s)| \leq Ke^{\eta}e^{-2\varepsilon(t-s)}|\exp\left(\int_s^t \lambda_k\right)|+$$

$$Ke^{\eta}\int_s^t e^{-2\varepsilon(t-\xi)}|\exp\left(\int_\xi^t \lambda_k\right)||B_3(\xi) - B_3(\infty)||W_3(\xi,s)|d\xi.$$

Sea $\mu(t) = e^{2\varepsilon t}|\exp\left(-\int_s^t \lambda_k\right)||W_3(t,s)|$. Entonces de la desigualdad anterior se tiene

$$\mu(t) \leq Ke^{\eta}e^{2\varepsilon s} + Ke^{\eta}\int_s^t |B_3(\xi) - B_3(\infty)|\mu(\xi)d\xi.$$

Por la desigualdad de Gronwall,

$$\mu(t) \leq Ke^{\eta}e^{2\varepsilon s}\exp\left(Ke^{\eta}\int_s^t |B_3(\xi) - B_3(\infty)|d\xi\right),$$

es decir,

$$|W_3(t,s)| \leq Ke^{\eta}e^{-2\varepsilon(t-s)}\exp\left(Ke^{\eta}\int_s^t |B_3(\xi) - B_3(\infty)|d\xi\right)|\exp\left(\int_s^t \lambda_k\right)|.$$

Considerando σ tan grande que $Ke^{\eta}|B_3(t) - B_3(\infty)| < \varepsilon$, para $t \geq \sigma$, se obtiene D). Dado que la ecuación (1.35) posee una λ_k-tricotomía ordinaria y

$$|S(t)^{-1}S'(t) - S(t)^{-1}R(t)S(t)| \in L^1,$$

del Teorema 1 se obtiene la existencia de una solución $\zeta_k(t)$ de (1.42), definida para $t \geq \sigma$ y σ suficientemente grande tal que

$$\zeta_k(t) = \exp\left(\int_\sigma^t \lambda_k(\xi)d\xi\right)(\hat{e} + o(1)),$$

cuando $t \to +\infty$. Puesto que $S(t) \to I$ cuando $t \to +\infty$, $y_k(t) = S(t)\zeta_k(t)$ es una solución de la ecuación (1.2) que satisface la fórmula asintótica (1.38).□

1.3.4 Teorema de Hartman-Wintner Espectral Abstracto

Antes de dar la versión espectral del Teorema de Hartman-Wintner, se darán los siguientes preliminares:

Definición 8 *Se dirá que un subconjunto $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_u(D,E)$ es un compacto si dada una sucesión $(B_n)_n \subseteq \Sigma$, existe una subsucesión $(B_{n_k})_k$ y $B_\infty \in \Sigma$ tal que $|B_{n_k} - B_\infty| \to 0$ cuando $k \to +\infty$.*

Lema 10 *Sean $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_u(D,E)$ compacto y*

$$\omega' = B\omega, \quad B \in \Sigma, \tag{1.49}$$

una familia de ecuaciones tal que cada $B \in \Sigma$ es generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo. Supóngase además que para cada B,

$$\sigma(B) = \sigma_p(B) = \{\lambda_i(B)\}_{i=1}^{m_B}$$

y el espectro de cada B posee una tricotomía del tipo Hartman-Wintner para $\lambda_k(B)$ ($k \leq m_B$ fijo e independiente de B).

Entonces dado $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño, existe $K \geq 1$, independiente de B, tal que para todo $B \in \Sigma$

i) $|T_B(t)P_1| \leq Ke^{(\Re e\lambda_k(B) - \varepsilon)t}$, $t \geq 0$,

ii) $T_B(t)P_0 = e^{\lambda_k(B)t}P_0$ *y*

iii) $|T_B(t)P_2| \leq Ke^{(\Re e\lambda_k(B) + \varepsilon)t}$, $t \leq 0$.

donde $T_B(t) = e^{tB}$ es el semigrupo asociado a las soluciones de (1.49).

Demostración: Puesto que la parte ii) es trivial y la iii) es análoga a la i), sólo se probará la parte i).

Supóngase que la parte i) no es cierta. Entonces existe $\varepsilon > 0$, tan pequeño como sea necesario y sucesiones $(B_n)_n \subseteq \Sigma$ y $(t_n)_n \subseteq I_\sigma$ tal que

$$|T_{B_n}(t)P_1| \geq n e^{(\Re e\lambda_k(B_n)-\varepsilon)t_n}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Como Σ es un compacto, pasando a subsucesiones si fuese necesario, existe $B_\infty \in \Sigma$ tal que $|B_n - B_\infty| \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

Por una estimación clásica para semigrupos fuertemente continuos dada en Hale [16] pág 213, se elige ε tan pequeño que exista $K_\infty \geq 1$ tal que

$$|T_{B_\infty}(t)P_1| \leq K_\infty e^{(\Re e\lambda_k(B_\infty)-3\varepsilon)t}, \ t \geq 0.$$

Para cada B_n, (1.49) se escribe como

$$\omega' = B_\infty\omega + (B_n - B_\infty)\omega.$$

Por la fórmula de variación de parámetros se tiene

$$T_{B_n}(t-s)v = T_{B_\infty}(t-s)v + \int_s^t T_{B_\infty}(t-\xi)(B_n - B_\infty)T_{B_n}(\xi - s)v d\xi.$$

donde $v \in ImP_1$.

Sean

$$\mu_n(t) = |e^{-(\Re e\lambda_k(B_\infty)-3\varepsilon)(t-s)}T_{B_n}(t-s)v|$$

y

$$\mu_\infty(t) = |e^{-(\Re e\lambda_k(B_\infty)-3\varepsilon)(t-s)}T_{B_\infty}(t-s)v|.$$

Sea $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $|B_n - B_\infty| < \frac{\varepsilon}{K_\infty}$ para $n \geq n_0$. Entonces

$$\mu_n(t) \leq \mu_\infty(s) + \varepsilon \int_s^t \mu_n(\xi)d\xi.$$

Por la desigualdad de Gronwall se tiene,

$$\mu_n(t) \leq \mu_\infty(s)e^{\varepsilon(t-s)}.$$

Puesto que $K_\infty \geq 1$, si se toma $v_0 \in ImP_0$ tal que $|v_0| = 1$ entonces

$$|\lambda_k(B_n) - \lambda_k(B_\infty)| = |(B_n - B_\infty)v_0| < \varepsilon.$$

Así, tomando $s = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} |e^{-(\Re e\lambda_k(B_n)-\varepsilon)t}T_{B_n}(t)P_1| &\leq e^{-(\Re e\lambda_k(B_n)-\varepsilon)t}K_\infty e^{(\Re e\lambda_k(B_\infty)-3\varepsilon)t}e^{\varepsilon t} \\ &\leq K_\infty, \ t \geq 0, \end{aligned}$$

lo cual contradice lo que ya se supuso.□

Lema 11 *Sea* $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_u(D,E)$ *compacto. Supóngase que la ecuación (1.35) satisface (H6), que* $B(t) \in \Sigma$ *y que el espectro* $\sigma(B(t))$ *posee una tricotomía del tipo Hartman-Wintner para* $\lambda_k(t)$ *(*$k \in \mathbf{N}$ *fijo e independiente de* t*). Supóngase además que*

$$|B(t) - B(s)| \leq \rho|t-s|, \ \forall t, s \in I_\sigma,$$

para $\rho > 0$ *suficientemente pequeño.*

Entonces dado $\varepsilon > 0$*, suficientemente pequeño, existe una constante* $K \geq 1$ *tal que*

i) $|W(t,s)P_1| \leq Ke^{-\varepsilon(t-s)+\int_s^t \Re e\lambda_k(\xi)d\xi}, \ t \geq s,$

ii) $W(t,s)P_0 = \exp\left(\int_s^t \lambda_k(\xi)d\xi\right) P_0$ *y*

iii) $|W(t,s)P_2| \leq Ke^{\varepsilon(t-s)+\int_s^t \Re e\lambda_k(\xi)d\xi}, \ t \leq s,$

es decir, (1.35) posee una λ_k*-tricotomía exponencial con proyecciones fijas.*

Demostración: La parte ii) es obvia. Se probará la parte i).

Por el Lema anterior, se sabe que dado $\alpha > 0$, suficientemente pequeño, existe una constante $\tilde{K} \geq 1$, independiente de $\bar{t} \in I_\sigma$, tal que

$$|e^{tB(\bar{t})}| \leq \tilde{K}e^{(\Re e\lambda_k(\bar{t})-\alpha)t}, \ t \geq 0.$$

Sean s, τ tal que $s < \tau$. Sea $Q : s = t_0 < t_1 < \cdots < t_l = \tau$ partición del intervalo $[s, \tau]$ de modo que $t_i - t_{i-1} = \eta_0$ para $i = 2, ..., l-1$ y $t_1 - s, \tau - t_{l-1} \leq \eta_0$, donde $\eta_0 = 2\sqrt{\frac{\ln \tilde{K}}{\rho \tilde{K}}}$.

Entonces la ecuación (1.35) se escribe como

$$w'(t) = B(\bar{t}_i)w(t) + (B(t) - B(\bar{t}_i))w(t), \ t \in [t_{i-1}, t_i],$$

donde $\bar{t}_i = \frac{t_{i-1}+t_i}{2}$ y así, para $t \in [t_{i-1}, t_i]$,

$$W(t, t_{i-1})v = T_i(t - t_{i-1})v + \int_{t_{i-1}}^t T_i(t-\xi)(B(\xi) - B(\bar{t}_i))W(\xi, t_{i-1})vd\xi,$$

donde $\{T_i(t)\}_t$ es el semigrupo con generador infinitesimal $B(\bar{t}_i)$ y $v \in ImP_1$.

Sea

$$\mu(t) = |e^{-(\Re e\lambda_k(\bar{t}_i)-\alpha)(t-t_{i-1})}W(t, t_{i-1})v|,$$

para $t \in [t_{i-1}, t_i]$.

Entonces

$$\mu(t) \leq \tilde{K}|v| + \tilde{K}\int_{t_{i-1}}^t |B(\xi) - B(\bar{t}_i)|\mu(\xi)d\xi,$$

para $t \in [t_{i-1}, t_i]$.

Por la desigualdad de Gronwall se tiene que

$$\mu(t) \leq \tilde{K} \exp\left(\tilde{K}\rho \int_{t_{i-1}}^{t} |\xi - \bar{t}_i| d\xi\right) |v|, \quad t \in [t_{i-1}, t_i].$$

De aquí

$$\mu(t) \leq \tilde{K} \exp\left(\tilde{K}\rho \frac{|t - t_{i-1}|^2}{4}\right) |v|, \quad t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Luego

$$\mu(t) \leq \tilde{K} \exp\left(\frac{\tilde{K}\rho\eta}{4}(t - t_{i-1})\right) |v|,$$

es decir,

$$\mu(t) \leq \tilde{K} \exp\left((t_i - t_{i-1})\frac{1}{2}\sqrt{\tilde{K}\rho \ln \tilde{K}}\right) \leq \tilde{K} \exp\left((\tau - t_{i-1})\sqrt{\tilde{K}\rho \ln \tilde{K}}\right)$$

y para $i = 2, ..., l-1$ se tiene

$$\begin{aligned} \mu(t_i) &\leq e^{\frac{\ln \tilde{K}}{\eta}(t_i - t_{i-1})} \exp\left((t_i - t_{i-1})\tfrac{1}{2}\sqrt{\tilde{K}\rho \ln \tilde{K}}\right) \\ &= e^{(t_i - t_{i-1})\sqrt{\tilde{K}\rho \ln \tilde{K}}}. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon_1 = \alpha - \sqrt{\tilde{K}\rho \ln \tilde{K}}$ que es positivo para ρ pequeño ($\rho < \frac{\alpha^2}{\tilde{K} \ln \tilde{K}}$). Sea $v \in ImP_1$. Entonces

$$\begin{aligned} |W(t, t_{i-1})v| &\leq \tilde{K} e^{(\Re e\lambda_k(\bar{t}_i) - \varepsilon_1)(t - t_{i-1})} |v| \\ |W(t_i, t_{i-1})v| &\leq e^{(\Re e\lambda_k(\bar{t}_i) - \varepsilon_1)(t_i - t_{i-1})} |\varphi|, \quad i = 2, ..., l-1. \end{aligned}$$

Como $W(t, t_{i-1})(ImP_1) \subseteq ImP_1$,

$$\begin{aligned} |W(t, s)v| &= |W(t, t_l)W(t_l, t_{l-1}) \cdots W(t_2, t_1)W(t_1, t_0)v| \\ &\leq K \exp\left(\left[\textstyle\sum_{i=1}^{l} \Re e\lambda_k(\bar{t}_i)(t_i - t_{i-1})\right] - \varepsilon_1(t - s)\right) |v| \end{aligned}$$

donde $K = \tilde{K}^2$. Ahora,

$$\sum_{i=1}^{l} \Re e\lambda_k(\bar{t}_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Re e[\lambda_k(\bar{t}_i) - \lambda_k(\xi)] d\xi + \int_s^t \Re e\lambda_k(\xi) d\xi.$$

Sean $\hat{e} \in E$ tal que $ImP_0 =< \hat{e} >$ y $|\hat{e}| = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} |\Re e[\lambda_k(\bar{t}_i) - \lambda_k(\xi)]| &\leq |\lambda_k(\bar{t}_i) - \lambda_k(\xi)| = \\ |B(\bar{t}_i)\hat{e} - B(\xi)\hat{e}| &\leq \rho|\bar{t}_i - \xi|. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{l} \Re e\lambda_k(\bar{t}_i)(t_i - t_{i-1}) &\leq \rho\tfrac{\eta}{2}(t-s) + \textstyle\int_s^t \Re e\lambda_k(\xi)d\xi \\ &\leq \sqrt{\rho\tfrac{\ln\tilde{K}}{\tilde{K}}}(t-s) + \textstyle\int_s^t \Re e\lambda_k(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

Haciendo $\varepsilon = \alpha - \sqrt{\tilde{K}\rho\ln\tilde{K}} - \sqrt{\rho\frac{\ln\tilde{K}}{\tilde{K}}}$ que es positivo para ρ pequeño, se obtiene i). La demostración de iii) es análoga. □

Lema 12 *Sea E un espacio de Banach y D un subespacio vectorial de E. Supóngase que la (D,E)-ecuación diferencial abstracta, (1.35), satisface (H1) y posee una λ_k-tricotomía exponencial con proyecciones fijas P_1, P_0 y P_2. Sea $C(t) \in \mathcal{L}_u(D,E)$ tal que $C(t)P_0 = 0$ y $|C(t)| < \rho$ con ρ suficientemente pequeño. Entonces la (D,E)-ecuación diferencial abstracta perturbada*

$$\zeta'(t) = [B(t) + C(t)]\zeta(t), \tag{1.50}$$

también posee una λ_k-tricotomía exponencial.

Demostración: En la ecuación (1.50), se hace el cambio de variable $\zeta(t) = \exp\left(\int_\sigma^t \lambda_k\right) z(t)$, y se obtiene

$$z'(t) = [\tilde{B}(t) + C(t)]z(t), \tag{1.51}$$

donde $\tilde{B}(t) = B(t) - \lambda_k(t)I$. Entonces la ecuación

$$\omega' = \tilde{B}(t)\omega, \tag{1.52}$$

posee una tricotomía exponencial. Sea $E_1 = (I - P_0)E$ y $D_1 = (I - P_0)D$. Entonces E_1 es un Espacio de Banach, D_1 es un subespacio vectorial de E_1 y la ecuación (1.52) posee una dicotomía exponencial en E_1. En virtud del resultado que aparece en las páginas 178-182 de [9], se obtiene que (1.51) posee una dicotomía exponencial sobre E_1, o sea, una tricotomía exponencial sobre E, de donde se deduce este Lema.□

Y ahora, el resultado principal:

Teorema 4 *Sean E un espacio de Hilbert con producto interno $< \cdot, \cdot >$ que induce la norma $|\cdot|$ y D un subespacio vectorial de E.*

Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_u(D,E)$ compacto y supóngase que:

i) $A(t) \in \Sigma$ y $A(t)$ es diferenciable para todo $t \in I_\sigma$,

ii) $|A'(t)| \leq \rho$, $\rho > 0$ suficientemente pequeño,

iii) La ecuación (1.1) satisface la hipótesis (H1).

iv) El espectro $\sigma(A(t))$:

a) es puntual y numerable, es decir,

$$\sigma(A(t)) = \sigma_p(A(t)) = \{\lambda_i(t)\}_{i=1}^{+\infty},$$

donde $m_t \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$,

b) posee una Tricotomía de Hartman-Wintner para $\lambda_k(t)$ *(*$k \leq m_t$ *fijo e independiente de* t*) y*

c) $\lambda_i(t)$ *es acotado como función de* $t \in I_\sigma$ *para* $i = 1, ..., k-1$.

v) Existe $\hat{e} \in E$ *tal que*

$$A(t)\hat{e} = \lambda_k(t)\hat{e}.$$

Supóngase además sobre el operador $R(t)$ *que* $|R(t)| \in L^p$ *para* $1 \leq p \leq 2$ *y existe una función* $r_0 : I_\sigma \to \mathbf{C}$ *tal que*

$$P_0(t)R(t)\hat{e} = r_0(t)\hat{e}, \tag{1.53}$$

donde $P_0(t)$ *es la proyección al espacio propio relativo a* $\lambda_k(t)$.

Entonces, la (D, E)*-ecuación diferencial abstracta (1.2) tiene una solución* $y_0(t)$ *definida para* $t \geq \sigma$ *y* σ *suficientemente grande, tal que*

$$y_0(t) = \exp\left(\int_\sigma^t (\lambda_k(s) + r_0(s))ds\right)(\hat{e} + o(1)), \tag{1.54}$$

cuando $t \to +\infty$.

Demostración: En primer lugar el conjunto $\{\lambda_i(t) : t \geq \sigma\}_{i=1}^{k-1}$ es acotado, razón por la cual existe una curva de Jordan rectificable γ_1, tal que

$$\sigma(A(t)) \cap Int\gamma_1 = \{\lambda_i(t)\}_{i=1}^{k-1}.$$

De la hipótesis iv.b), existe $\delta > 0$ tal que:

$$|\lambda_i(t) - \lambda_k(t)| \geq |\Re e(\lambda_i(t) - \lambda_k(t))| > \delta, \ \forall i \neq k \text{ y } t \in I_\sigma$$

y por lo tanto existe una curva de Jordan rectificable γ_0, tal que

$$\sigma(A(t)) \cap Int\gamma_0 = \{\lambda_k(t)\},$$

e $Int\gamma_1 \cap Int\gamma_0 = \phi$.

Sean

$$P_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} (\lambda I - A(t))^{-1} d\lambda$$

y

$$P_0(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} (\lambda I - A(t))^{-1} d\lambda. \tag{1.55}$$

Sea también $P_2(t) = I - P_1(t) - P_0(t)$. Entonces

$$P_1(t)E = \oplus_{i=1}^{k-1} M_{\lambda_i(t)}(A(t)),$$

$$P_0(t)E = M_{\lambda_k(t)}(A(t)) \text{ y}$$

$$P_2(t)D = \oplus_{i=k+1}^{m_t} M_{\lambda_i(t)}(A(t)),$$

donde $M_{\lambda_i(t)}(A(t))$ es el espacio propio de $A(t)$ asociado al valor propio $\lambda_i(t)$.

Obsérvese que por la hipótesis v), $P_0(t)E = P_0(t)D =< \hat{e} >$ para todo $t \in I_\sigma$.

En la ecuación (1.2), se hace el cambio de variable $y = \tilde{S}(t)\zeta$, donde $\tilde{S}$ está definido en el Lema 8, obteniendo la ecuación

$$\zeta'(t) = (\tilde{A}(t) + \tilde{R}(t))\zeta(t), \tag{1.56}$$

donde $\tilde{A}(t) = B(t) - \tilde{S}(t)^{-1}\tilde{S}'(t)$, $B(t) = \tilde{S}(t)^{-1}A(t)\tilde{S}(t)$ y $\tilde{R}(t) = \tilde{S}^{-1}(t)R(t)\tilde{S}(t)$.

Se probará que la ecuación (1.56) satisface las hipótesis del Teorema 2, es decir:

a) la ecuación no perturbada
$$u'(t) = \tilde{A}(t)u(t),$$
posee una λ_k-tricotomía exponencial,

b) $\tilde{R} \in L^p$ y $P_0(\sigma)\tilde{R}(t)\hat{e} = r_0(t)\hat{e}$.

Probar b) es sencillo debido a que $|\tilde{S}(t)|$ es acotada como función de t y a la condición (1.53).

Para probar la afirmación a), se usará el Lema anterior verificando cada una de sus hipótesis.

En virtud del Lema 8, la ecuación $w' = B(t)w$ es espectralmente diagonal a bloques con respecto a las proyecciones complementarias $P_1(\sigma)$, $P_0(\sigma)$ y $P_2(\sigma)$ y para probar que posee una λ_k-tricotomía exponencial con proyecciones fijas obsérvese primero que $\sigma(B(t))$ posee una Tricotomía de Hartman-Wintner para $\lambda_k(t)$ ($k \leq m_t$ fijo e independiente de t). Además,

$$P_j'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} (\lambda I - A(t))^{-1}A'(t)(\lambda I - A(t))^{-1} d\lambda, \quad t \geq \sigma,$$

para $j = 0, 1$ de donde,

$$|P_j'(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\lambda \in \gamma_j} |(\lambda I - A(t))^{-1}|^2 Var(\gamma_j)|A'(t)| \quad t \geq \sigma.$$

Puesto que $|(\lambda I - A(t))^{-1}|$ es acotado como función de t, existe $c_1 > 0$ tal que

$$|P_j'(t)| \leq c_1|A'(t)| \leq c_1\rho, \tag{1.57}$$

para $j = 1, 0$, donde ρ está dado en la hipótesis ii). Así, por la relación (1.34) del Lema 9, existe una constante $c_2 > 0$ tal que

$$|B'(t)| < c_2\rho$$

y por lo tanto,

$$|B(t) - B(s)| \leq c_2\rho|t - s|, \quad \forall t, s \in I_\sigma.$$

Dado que ρ es tan pequeño como sea necesario, del Lema 12, se tiene que $w' = B(t)w$ posee una λ_k-tricotomía exponencial con proyecciones fijas.

Para mostrar que

$$\tilde{S}(t)^{-1}\tilde{S}'(t)P_0(\sigma) = 0, \tag{1.58}$$

obsérvese lo siguiente:

$$\tilde{S}(t) = S(t)\Xi(t), \tag{1.59}$$

donde $S(t)$ está dado en el Lema 7 y $\Xi(t)$ está dado en la igualdad (1.30). Como $ImP_0(t) \subseteq <\hat{e}>$, $P_0(t)\hat{e} = \hat{e}$. Puesto que $P_0(t)$ conmuta con $\tilde{S}(t)$ y $\Xi(t)$, existen escalares $s(t)$ y $\xi(t)$ tal que

$$\begin{aligned} S(t)\hat{e} &= s(t)\hat{e} \\ \Xi(t)\hat{e} &= \xi(t)\hat{e}. \end{aligned} \tag{1.60}$$

Claramente

$$S'(t)\hat{e} = s'(t)\hat{e}.$$

Por otro lado, de la ecuación (1.27) se tiene la relación $S'(t)\hat{e} = s(t)P_0'(t)\hat{e} = 0$. Luego $s'(t) = 0$. Por lo tanto $s(t)$ es constante, o bién, $s(t) = s(0)$.

También de (1.30) se tiene

$$s(0)\xi'(t)\hat{e} = -s(0)\xi'(t)\xi(t)^{-2}\hat{e},$$

de donde $\xi(t)^{-2} = -1$ y por continuidad $\xi(t)$ es constante, es decir, $\xi(t) = \xi(0)$.

Luego, por (1.59) y (1.60), la condición $\tilde{S}(\sigma) = I$ implica que

$$\tilde{S}(t)\hat{e} = \hat{e}$$

y en consecuencia se tiene la igualdad (1.58).

Por último se demostrará la pequeñez de $|\tilde{S}(t)^{-1}\tilde{S}'(t)|$.

Obsérvese que por el Lema 8 y por ser las $|P_i(t)|$'s acotadas como función de t,

$$|\tilde{S}(t)^{-1}\tilde{S}'(t)| \leq c_3 \max\{|P_1'(t)|, |P_0'(t)|\}, \quad t \in I_\sigma$$

donde c_3 son constantes positivas. Por la desigualdad (1.57) se tiene que

$$|\tilde{S}(t)^{-1}\tilde{S}'(t)| \leq c_1 c_3 \rho.$$

Así, por el Lema anterior la afirmación a) es válida.

Por lo tanto, en virtud del Teorema 2, la ecuación (1.56) tiene una solución $\zeta = \zeta_k(t)$, definida para $t \geq \sigma$ con σ suficientemente grande tal que,

$$\zeta_k(t) = \exp\left(\int_\sigma^t [\lambda_k(\xi) + r_0(\xi)]d\xi\right)(\hat{e} + o(1)),$$

cuando $t \to +\infty$. Si $y_k(t) = \tilde{S}(t)\zeta_k(t)$, entonces $y_k(t)$ es una solución de (1.2) que satisface la fórmula asintótica (1.54) ya que $|\tilde{S}(t)|$ es acotado como función de t y $\tilde{S}(t)\hat{e} = \hat{e}$.$\square$

Capítulo 2
Teoremas Asintóticos para Ecuaciones Diferenciales Funcionales Lineales.

En este capítulo se dan las versiones de los teoremas de Levinson y de Hartman-Wintner para sistemas diferenciales funcionales lineales. Primero se dan las defínciones necesitadas para el desarrollo del tema. En segundo lugar, los hechos básicos y necesarios para comenzar a trabajar. Se extiende la idea de espectro de una función lineal definida desde el conjunto de las funciones acotadas a $\mathbf{C}^N$. Se formula el sistema diferencial a estudiar como una ecuación del tipo tratado en el capítulo anterior, para aplicar los resultados allí obtenidos en los sistemas diferenciales funcionales.

Sean $I_\sigma = [\sigma, +\infty[$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}([-r,0], \mathbf{C}^N)$ el conjunto de las funciones acotadas de $[-r,0]$ en $\mathbf{C}^N$, donde $r > 0$. Sea $L : I_\sigma \times \mathcal{B} \to \mathbf{C}^N$ una función continua que es lineal en la segunda variable.

Se considerará el sistema diferencial funcional

$$\begin{aligned} x'(t) &= L(t, x_t), \\ x_t(\theta) &= x(t+\theta), \end{aligned} \tag{2.1}$$

para $\theta \in [-r, 0]$.

Sea $|L(t,\cdot)| = \sup_{|\varphi|_\infty = 1} |L(t,\varphi)|$, con $|\varphi|_\infty = \sup_{\theta\in[-r,0]} |\varphi(\theta)|$ y supóngase que $|L(t,\cdot)| < +\infty$ para cada $t \in I_\sigma$.

Algunos ejemplos de sistemas diferenciales lineales del tipo (2.1) son los siguientes:

1. Considérese el sistema diferencial retardado $N \times N$

$$x'(t) = B(t)x(t-1), \quad t \geq 0.$$

Este se puede escribir en la forma (2.1) considerando

$$L(t,\varphi) = B(t)\varphi(-1),$$

para $\varphi : [-1, 0] \to \mathbf{C}^N$.

2. En forma más general nótese que el sistema

$$x'(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i(t)x(t - r_i), \quad t \geq \sigma,$$

puede escribirse como (2.1) si

$$L(t, \varphi) = \sum_{i=1}^{n} B_i(t)\varphi(-r_i),$$

para $\varphi : [-r, 0] \to \mathbf{C}^N$, donde $r = \max_{i=1,\dots,n} r_i$.

3. El sistema

$$x'(t) = \int_{t-1}^{t} p(t, \zeta - t)x(\zeta)d\zeta,$$

es de la forma (2.1) si

$$L(t, \varphi) = \int_{-1}^{0} p(t, \theta)\varphi(\theta)d\theta,$$

para $\varphi : [-1, 0] \to \mathbf{C}^N$.

Se estudiará el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema perturbado

$$y' = L(t, y_t) + R(t, y_t), \tag{2.2}$$

en términos de las soluciones del sistema no perturbado (2.1), donde $R(t, \cdot)$ es una función continua, lineal en la segunda variable, cuya norma $|R(t, \cdot)|$ satisface una condición de integrabilidad L^p.

Primero se enunciarán algunos hechos básicos sobre Sistemas Diferenciales Funcionales Lineales.

2.1 Algunos Hechos Básicos

Por el Teorema del Punto Fijo de Banach, se tiene lo siguiente:

Lema 13 *La ecuación (2.1) con condición inicial $x(s) = \varphi$ tiene una única solución para todo $s \in I_\sigma$ y $\varphi \in \mathcal{B}$.*

Esto permitirá definir el concepto de matriz de Cauchy:

Definición 9 *Sea $X(t, s) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, para $t \geq s \geq \sigma$, definido por*

$$X(t, s)\varphi = x(t),$$

donde $x(t)$ es la solución del sistema (2.1) con condición inicial $x(s) = \varphi$. En este caso se dice que X es el operador de Cauchy de la ecuación (2.1).

Algunas propiedades de este operador son dadas mediante el siguiente Lema:

Lema 14 *Sea X el operador de Cauchy de (2.1). Entonces*

i) $X(t,s)$ *está bien definido para todo* $t \geq s \geq \sigma$.

ii) $X(s,s) = I$

iii) $X(t,s) = X(t,\zeta)X(\zeta,s)$.

Otra manera de expresar el sistema (2.1) es la siguiente:

Lema 15 *La función* $u = u(t,\theta)$, $t \in I_\sigma$ *y* $\theta \in [-r,0]$ *es solución del sistema*

$$\begin{aligned} u'(t) &= L(t, u(t,\cdot)), \\ \tfrac{\partial}{\partial t}u(t,\theta) &= \tfrac{\partial}{\partial \theta}u(t,\theta), \\ u(t) &= u(t,0) \end{aligned} \tag{2.3}$$

para $\theta \in [-r,0]$ *si y sólo si* $x = u(t)$ *es solución del sistema (2.1).*

Demostración: Para demostrar esta equivalencia, basta probar que

$$u(t,\theta) = u(t+\theta), \tag{2.4}$$

es equivalente a las relaciones

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial t}u(t,\theta) &= \tfrac{\partial}{\partial \theta}u(t,\theta), \\ u(t) &= u(t,0). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Supóngase que $u = u(t,\theta)$ satisface (2.4). Entonces, obviamente

$$u(t,0) = u(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,\theta) = \frac{\partial}{\partial t}u(t+\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta}u(t+\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta}u(t,\theta).$$

Recíprocamente, supóngase que $u = u(t,\theta)$ satisface la relación (2.5). Sean $\theta \in [-r,0]$ y $\alpha \in [-r-\theta, -\theta]$. Sean $\tilde{t} = t - \alpha$ y $\tilde{\theta} = \theta + \alpha$. Entonces

$$\frac{d}{d\alpha}u(t-\alpha, \theta+\alpha) = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}u(\tilde{t},\tilde{\theta}) - \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}}u(\tilde{t},\tilde{\theta}) = 0.$$

De aquí, $u(t-\alpha, \theta+\alpha)$ es constante como función de α. Así,

$$u(t+\theta) = u(t+\theta, 0) = u(t,\theta),$$

es decir, $u = u(t)$ satisface la relación (2.4).□

2.2 Espectro de un Sistema Diferencial Funcional

En los teoremas asintóticos de Levinson y de Hartman-Wintner para ecuaciones diferenciales ordinarias, el espectro de las ecuaciones no perturbadas juega un papel muy importante. Por esta razón se extenderá la definición de espectro para las ecuaciones diferenciales funcionales.

Ese problema no es fácil, debido a que ya en el caso ordinario los candidatos a ser los elementos del espectro de un sistema lineal no autónomo ni diagonal del tipo $x' = A(t)x$, son las soluciones de la ecuación característica

$$\det(\lambda I - A(t)) = 0. \tag{2.6}$$

Si $A(t)$ es continua como función de t, las soluciones de la ecuación característica (2.6) $\lambda = \lambda(t)$ son también funciones continuas. Sin embargo, eso produce ambiguedad, porque si la ecuación característica tuviese sólo dos soluciones $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$ y estas fuesen continuas, se esperaría que el espectro de el sistema diferencial ordinario fuese $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Pero al haber un punto t_0 en el cual $\lambda_1(t_0) = \lambda_2(t_0)$, se pueden definir las funciones

$$\tilde{\lambda}_1(t) = \begin{cases} \lambda_1(t), & \text{si } t \leq t_0 \\ \lambda_2(t), & \text{si } t \geq t_0 \end{cases}$$

y

$$\tilde{\lambda}_2(t) = \begin{cases} \lambda_2(t), & \text{si } t \leq t_0 \\ \lambda_2(t), & \text{si } t \geq t_0 \end{cases}$$

y también se puede decir que el espectro es $\{\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2\}$.

Con el fin de eliminar este tipo de ambiguedades, se considerará el cuerpo de los complejos $\mathbf{C}$, dotado del orden lexicográfico, el cual será denotado por $\leq$ (ya que coincide en $\mathbf{R}$ con el orden usual) y se dará la siguiente definición.

Definición 10 *Para $t \in I_\sigma$, se llamará espectro de $L(t, \cdot)$ al conjunto*

$$\sigma(L(t,\cdot)) = \{\lambda_i(t)\}_{i=1}^{m_t},$$

donde $m_t \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ y $\lambda = \lambda_i(t)$ son soluciones de la ecuación

$$\det[\lambda I - L(t, e^{\lambda \cdot} I)] = 0, \tag{2.7}$$

repetidas según su multiplicidad, con $\lambda_{i+1}(t) \leq \lambda_i(t)$, para $i = 1, 2, ..., m_t$.

Se denotará $\Delta(t, \lambda) = \lambda I - L(t, e^{\lambda \cdot} I)$.

Esta definición del espectro tiene sentido debido a que si se fija un punto $t \in I_\sigma$, entonces:

- las soluciones de (2.7) tienen su parte real acotada superiormente, por lo cual tiene sentido hablar de $\lambda_1(t)$ como el mayor de los elementos de $\sigma(L(t,\cdot))$,
- hay sólo un número finito de $\lambda_i(t)$'s con la misma parte imaginaria y

- las raices de (2.7) no tienen punto de acumulación, por lo cual el conjunto de estas es a lo más numerable y tiene sentido ordenarlas de la manera dada en la definición. En caso de ser el espectro numerable, se tiene para cada $t \in I_\sigma$ que $\Re e\lambda_n(t) \to -\infty$ cuando $n \to +\infty$ (ver Hale [16]).

Pero surge la siguiente pregunta: Si $L(t,\cdot)$ es continua como función de t, ¿son los elementos del espectro, en algún sentido, funciones continuas? El siguiente lema responde a esta pregunta:

Lema 16 *Si $\sigma(L(t,\cdot)) = \{\lambda_i(t)\}_{i=1}^{m_t}$ es el espectro de $L(t,\cdot)$, $m_t \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, entonces para $t_0 \in I_\sigma$, $\lambda_i(t) \to \lambda_i(t_0)$ cuando $t \to t_0$ e $i = 1, 2, ..., m_{t_0}$.*

Demostración: Sea $t_0 \in I_\sigma$ fijo. Sean $f(\lambda) = \det \Delta(t_0, \lambda)$ y $g(t, \lambda) = \det \Delta(t, \lambda) - f(\lambda)$. Entonces $f(\lambda)$ y $g(t, \lambda)$ son funciones analíticas de λ.

Sea $n \in \{1, ..., m_{t_0}\}$ tal que si $n < m_{t_0}$ entonces $\lambda_n(t_0) \neq \lambda_{n+1}(t_0)$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que para $i = 1, ..., n$ no hay ninguna raíz de $f(\lambda)$ distinta de $\lambda_i(t_0)$ dentro de $\overline{B}(\lambda_i(t_0), \varepsilon)$. Como $g(t, \lambda)$ es continua en t, existe $\delta > 0$ tal que

$$\max_{\lambda \in \partial B(\lambda_i(t_0), \varepsilon)} |g(t, \lambda)| < \min_{\lambda \in \partial B(\lambda_i(t_0), \varepsilon)} |f(\lambda)|,$$

si $|t - t_0| < \delta$.

Por el Teorema de Rouché,

$$\#(\sigma(L(t,\cdot)) \cap B(\lambda_i(t_0), \varepsilon)) = \#(\sigma(L(t_0,\cdot)) \cap B(\lambda_i(t_0), \varepsilon)),$$

para $i = 1, ..., n$ de donde $|\lambda_i(t) - \lambda_i(t_0)| < \varepsilon$ y por ser $\varepsilon > 0$ arbitrario, $\lambda_i(t) \to \lambda_i(t_0)$ si $t \to t_0$ y $i = 1, ..., n$.□

Nota 8: Cuando t es cercano a t_0 se tiene que $m_t \geq m_{t_0}$.

Una vez sabiendo que los valores propios son continuos, es interesante saber si sus respectivos vectores propios tambien lo son. Por ejemplo, considérese el siguiente sistema diferencial ordinario:

$$x'(t) = A(t)x(t),$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & h(t) \\ 0 & \lambda_2(t) \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2(t) - \lambda_1(t) = \begin{cases} (t - t_0)\left(1 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t-t_0}\right)\right), & t \neq t_0 \\ 0, & t = t_0 \end{cases}$$

y

$$h(t) = t - t_0.$$

Entonces $e(t) = (h(t), \lambda_2(t) - \lambda_1(t))$ es un vector propio de $A(t)$ y $e(t_0) = 0$. Claramente $e(t)$ es continuo, pero hay un problema en $t = t_0$: $e(t)$ se anula dejando de ser un vector propio. Con el fin solucionar este problema, normalizemos $e(t)$, es decir, sea $u(t)=\frac{e(t)}{|e(t)|}$. Si $t\neq t_0$; la pregunta a hacerse ahora es: ¿existe $\lim_{t\to t_0} u(t)$? Veamos,

$$u(t)=\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(1+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t-t_0}\right)\right)^2}},\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\left(1+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t-t_0}\right)\right)^2}}}\right).$$

Obsérvese que si $t\to t_0$, el límite superior de la primera coordenada de $u(t)$ es 1, mientras que su límite inferior es $1/\sqrt{5}$. Luego, $\lim_{t\to t_0} u(t)$ no existe y por lo tanto no siempre se puede definir vectores propios continuos.

Nótese que este problema no se hubiese dado si se hubiese pedido que $\lambda_1(t)\neq\lambda_2(t)$ para todo $t\in I_\sigma$. En otras palabras, para obtener un vector propio continuo su correspondiente valor propio debe estar lo suficientemente separado del resto de los elementos del espectro. Esta idea de separación se repite al observar las dicotomías del tipo Levinson y de Hartman-Wintner, dadas en las definiciones 6 y 7 del capítulo anterior. En la siguiente sección se formula el sistema (2.2) como una ecuación diferencial lineal abstracta, lo cual permitirá aplicar los resultados obtenidos en el capítulo anterior.

2.3 Formulación Abstracta de un Sistema Diferencial Funcional Lineal

Sean $W^{1/2}=\{\varphi\in C([-r,0],\mathbf{C}^N):\dot\varphi\in L^2[-r,0]\}$ y $E=\mathbf{C}^N\times W^{1/2}$. Defínase sobre E, el producto interno

$$<(\xi_1,\varphi_1),(\xi_2,\varphi_2)>=\xi_1\cdot\xi_2+\int_{-r}^0\varphi_1\cdot\varphi_2+\int_{-r}^0\dot\varphi_1\cdot\dot\varphi_2,$$

donde $\cdot$ es el producto interno canónico en $\mathbf{C}^N$. Entonces $(E,<\cdot,\cdot>)$ es un espacio de Hilbert.

Se denotará por $|\cdot|$ la norma inducida por el producto $<\cdot,\cdot>$. Para $t\leq s\leq\sigma$, sea $\Phi(t,s):E\to E$ el operador definido por

$$\Phi(t,s)(\xi,\varphi)=((X(t,s)\varphi_\xi)(0),X(t,s)\varphi_\xi),\tag{2.8}$$

donde

$$\varphi_\xi(\theta)=\begin{cases}\xi,\ \text{si } \theta=0\\ \varphi(\theta),\ \text{si } -r\leq\theta<0.\end{cases}$$

Por el Lema 15, $\Phi(t,s)$ es el operador de Cauchy de la ecuación abstracta

$$u'=A(t)u,\tag{2.9}$$

donde $A(t)$ está definida sobre $\mathcal{D} = \{(\xi, \varphi) \in \mathbf{C}^N \times C^\infty : \varphi(0) = \xi\}$ por

$$A(t)(\xi, \varphi) = (L(t, \varphi), \dot{\varphi}).$$

Además, se puede verificar fácilmente que x es una solución de la ecuación (2.1), si y sólo si $u(t) = (x(t), x_t)$ es una solución de la ecuación (2.9).

Entonces el sistema perturbado (2.2) es la $(\mathcal{D}, E)$-ecuación diferencial lineal abstracta

$$z'(t) = (A(t) + \mathcal{R}(t))z(t), \tag{2.10}$$

donde

$$\mathcal{R}(t)(\xi, \varphi) = (R(t, \varphi), 0). \tag{2.11}$$

Esta ecuación es del tipo presentado en el capítulo anterior.

También se tiene que y es una solución del sistema (2.2), si y sólo si $z(t) = (y(t), y_t)$ es una solución de la ecuación (2.10).

En el siguiente Lema se estima la perturbación $\mathcal{R}$:

Lema 17 *Sea $R : I_\sigma \times \mathcal{B} \to \mathbf{C}^N$ una función, lineal en la segunda variable, tal que $r(t) := |R(t, \cdot)| < +\infty$ para todo $t \in I_\sigma$. Entonces, para $\mathcal{R}(t)$ definido por (2.11), existe una constante positiva c tal que*

$$|\mathcal{R}(t)| \leq cr(t).$$

Demostración: Sea $\hat{e} = (e_0, \varphi) \in \mathcal{D}$. Entonces

$$|\mathcal{R}(t)\hat{e}|^2 = |R(t, \varphi)|^2 \leq r(t)^2 |\varphi|_\infty^2,$$

es decir,

$$|\mathcal{R}(t)\hat{e}| \leq r(t)|\varphi|_\infty.$$

Ahora,

$$\varphi(\theta) = e_0 - \int_\theta^0 \dot{\varphi}(\zeta) d\zeta,$$

de donde,

$$|\varphi(\theta)| \leq |e_0| + \int_{-r}^0 |\dot{\varphi}(\zeta)| d\zeta.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder al lado derecho de la desigualdad anterior y tomando supremo sobre θ se obtiene

$$|\varphi|_\infty \leq 2\text{máx}\{1, \sqrt{r}\}|\hat{e}|,$$

lo cual prueba este Lema. □

El sistema (2.2) ha sido formulado como la ecuación diferencial abstracta (2.9). El siguiente Lema muestra que a ambos sistemas se les puede asociar el mismo espectro.

Lema 18 $\sigma(A(t)) = \sigma_p(A(t)) = \sigma(L(t, \cdot))$.

Demostración: Ver Lema 2.3 en Burns et al. [4] y Lema 2.1 en Hale [16] pág. 198.
□

2.4 Teoremas Asintóticos

En esta sección daremos las versiones diferenciales funcionales para los teoremas asintóticos de Levinson y de Hartman-Wintner. Esto se hará aplicando los resultados asintóticos dados en el capítulo anterior a la ecuación (2.10).

2.4.1 Versión funcional del Teorema de Levinson

Aquí se considerará el sistema (2.2) con,

$$L(t,\cdot) = L_0(\cdot) + V(t,\cdot), \tag{2.12}$$

donde $L_0 : \mathcal{B} \to \mathbf{C}^N$ es una función lineal acotada y $V : I_\sigma \times \mathcal{B} \to \mathbf{C}^N$ es una función continua y lineal en la segunda variable. El sistema (2.2) es:

$$y'(t) = L_0(y_t) + V(t, y_t) + R(t, y_t). \tag{2.13}$$

Se denotará $\sigma(L_0) = \{\mu_i\}_{i=1}^{+\infty}$ y $\sigma(L(t,\cdot)) = \{\lambda_i(t)\}_{i=1}^{+\infty}$. La relación existente entre ambos espectros está dada en el siguiente lema:

Lema 19 *Considérese en la ecuación (2.12) que $|V(t,\cdot)| \to 0$ cuando $t \to +\infty$. Entonces,*

$$\lim_{t\to+\infty} \lambda_i(t) = \mu_i,$$

para todo $i \in \mathbf{N}$.

Demostración: Este lema es consecuencia directa del Lema 16.□

Sobre el sistema (2.13) daremos la siguiente versión del Teorema de Levinson:

Teorema 5 *Supóngase que para el sistema (2.13):*

i) Existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que las raices $\mu_1, ..., \mu_{n_0}$ son simples y

$$\Re e(\mu_{n_0} - \mu_{n_0+1}) > 0.$$

ii) $\sigma(L(t,\cdot))$ posee una tricotomía de Levinson para algún $\lambda_k(t)$, $1 \leq k \leq n_0$, fijo.

iii) $|V(t,\cdot)| \to 0$ cuando $t \to +\infty$,

iv) $V(t,\cdot)$ es diferenciable en t y $|\frac{\partial}{\partial t}V(t,\cdot)| \in L^1$

y sobre la perturbación R,

v) $|R(t,\cdot)| \in L^1$.

Entonces el sistema (2.13) tiene una solución $y = y_k(t)$, definida para $t \geq \sigma$ con σ suficientemente grande, tal que

$$y_k(t) = \exp\left(\int_\sigma^t \lambda_k(\xi)d\xi\right)(v + o(1)), \tag{2.14}$$

cuando $t \to +\infty$, donde v es el único vector unitario de $\mathbf{C}^N$ que satisface $L_0(e^{\mu_k \cdot}v) = \mu_k v$.

Demostración: Bajo las hipótesis de este teorema, al sistema (2.13) se le da la formulación abstracta (2.10) con $A(t) = A_0 + \mathcal{V}(t)$, donde A_0 y $\mathcal{V}(t)$ están definidos por

$$\begin{aligned} A_0(\xi, \varphi) &= (L_0(\varphi), \dot{\varphi}) \\ \mathcal{V}(t)(\xi, \varphi) &= (V(t, \varphi), 0). \end{aligned}$$

Entonces por los Lemas 15, 16 y 17 y por las hipótesis i)-v) es fácil verificar que

a) $\sigma(A_0) = \{\mu_i\}_{i=1}^\infty$ y $\sigma(A(t)) = \{\lambda_i(t)\}_{i=1}^\infty$.

b) (2.9) posee una tricotomía del tipo Levinson para $\lambda_k(t)$ ($k \in \mathbf{N}$ fijo).

c) existe $n_0 \geq k$ tal que $\dim_{\mathbf{C}} M_{\mu_i}(A_0) = 1$ para $i = 1, ..., n_0$ y $\Re e(\mu_{n_0} - \mu_{n_0+1}) > 0$.

d) $\mathcal{V}(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$ y $|\mathcal{V}'(t)| \in L^1$.

e) $\lambda_i(t) \to \mu_i$ cuando $t \to +\infty$ para $i = 1, ..., n_0$ y

f) $|\mathcal{R}(t)| \in L^1$.

Luego, la ecuación diferencial abstracta (2.10) satisface las hipótesis del Teorema 3, dado en el capítulo anterior. Así, (2.10) tiene una solución $z_k(t)$, definida para $t \geq \sigma$ y σ suficientemente grande tal que

$$z_k(t) = \exp\left(\int_\sigma^t \lambda_k(\xi)d\xi\right)(\hat{e} + o(1)), \tag{2.15}$$

cuando $t \to +\infty$ y $\hat{e}$ es vector propio de A_0 asociado al valor propio μ_k (es único, salvo múltiplos, ya que el espacio propio asociado a μ_k es unidimensional).

Para calcular explícitamente $\hat{e}$, nótese que $\hat{e} \in \mathcal{D}$. Entonces existe una función $\varphi \in C^\infty$ tal que $\hat{e} = (\varphi(0), \varphi)$. Puesto que

$$\mu_k \hat{e} - A_0 \hat{e} = 0,$$

se tiene que

$$\mu_k \varphi(0) - L_0(\varphi) = 0 \tag{2.16}$$

y

$$\mu_k \varphi - \dot{\varphi} = 0. \tag{2.17}$$

De la ecuación (2.17) se obtiene que $\varphi(\theta) = e^{\mu_k \theta}\varphi(0)$, $\theta \in [-r, 0]$. Reemplazando esto en (2.16) se tiene

$$\mu_k \varphi(0) - L_0(e^{\mu_k \cdot}\varphi(0)) = 0,$$

de donde se considera $\varphi(0) = v$, donde v es el único vector unitario que satisface $L_0(e^{\mu_k \cdot} v) = \mu_k v$. Así,

$$\hat{e} = (v, e^{\mu_k \cdot} v).$$

Tomando la primera coordenada de la expresión asintótica (2.15), se obtiene la existencia de una solución $y_k(t)$ del sistema (2.13) que satisface (2.14).□

La condición i) del Teorema se obtiene naturalmente en cualquier ecuación diferencial funcional. La condición tricotómica de Levinson mejora el resultado dado en [14], en cuanto a la condición sobre los valores característicos de la ecuación diferencial autónoma retardada no perturbada. Basta con pedir que exista un valor propio distinto de los demás, aunque su parte real sea igual a la de otros. Esto se puede apreciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Considérese la ecuación diferencial retardada:

$$y'(t) = \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{t} + \frac{\operatorname{sen}(e^t)}{t^2} \right] y(t-1), \; t > 0 \tag{2.18}$$

Para aplicar el reciente teorema a la ecuación (2.18) considérese:

$$\begin{aligned} L_0(\varphi) &= -\tfrac{\pi}{2}\varphi(-1) \\ V(t,\varphi) &= \tfrac{1}{t}\varphi(-1) \\ R(t,\varphi) &= \tfrac{\operatorname{sen}(e^t)}{t^2}\varphi(-1), \end{aligned}$$

para toda función acotada $\varphi : [-1, 0] \to \mathbf{C}$. Entonces

$\sigma(L_0) = \{\mu_i\}_{i=1}^{+\infty}$ donde $\mu_1 = i\frac{\pi}{2}$, $\mu_2 = -i\frac{\pi}{2}$ y $\Re e \mu_i < 0$ para $i = 3, 4, 5, ...$,

$\sigma(L_0 + V(t, \cdot)) = \{\lambda_i(t)\}_{i=1}^{+\infty}$ donde $\lambda_i(t) = \mu_i + \varepsilon_i(t)$ y por el Lema 19, $\varepsilon_i(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, para $i = 1, 2, ...$,

$|\frac{\partial}{\partial t} V(t, \cdot)| = \frac{1}{t^2} \in L^1$.

$|R(t, \cdot)| = \frac{1}{t} \in L^1$.

Luego, es fácil observar que la ecuación (2.18) satisface las hipótesis del Teorema 3 y por tanto se tiene que (2.18) posee una solución $y_0(t)$ definida para $t \geq \sigma$ y σ suficientemente grande tal que

$$y_0(t) = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}t + \int_\sigma^t \varepsilon_2(\xi) d\xi\right)(1 + o(1)), \tag{2.19}$$

cuando $t \to +\infty$.

Para una expresión más explícita de la fórmula (2.19) nótese que

$$\varepsilon_2(t) = \frac{c}{t} + O(\frac{1}{t^2}),$$

donde $c = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{1-\frac{\pi}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}}$. Luego, la ecuación (2.18) tiene una solución $y_0(t)$, definida para $t \geq \sigma$ y σ suficientemente grande tal que

$$y_0(t) = t^c e^{-i\frac{\pi}{2}t}(1 + o(1)),$$

cuando $t \to +\infty$.

2.4.2 Versión funcional del Teorema de Hartman-Wintner

Ahora, sobre el sistema (2.2) se considerará una condición menos restrictiva que aquella dada por la igualdad (2.12) para nuestra versión del Teorema de Levinson, en otras palabras, el sistema no perturbado será netamente no autónomo.

Teorema 6 *Considérese sobre el sistema (2.2) lo siguiente:*

i) $L(t,\cdot)$ *es diferenciable en* t,

ii) existe $M > 0$ *tal que* $|L(t,\cdot)| \leq M$,

iii) existe $\rho > 0$ *suficientemente pequeño tal que*

$$|L(t,\cdot) - L(s,\cdot)| \leq \rho|t-s|, \ \forall t, s \in I_\sigma.$$

iv) $\sigma(L(t,\cdot))$ *posee una tricotomía de Hartman-Wintner para* $\lambda_k(t)$ *(*$k \leq m_t$ *fijo e independiente de* t*),*

v) $\lambda_k(t) = 0$ *y es raíz simple de la ecuación característica (2.7)*

y la perturbación R *satisface la condición de integrabilidad*

vi) $|R(t,\cdot)| \in L^p, \ 1 \leq p \leq 2$.

Entonces, el sistema (2.2) tiene una solución $y_k(t)$*, definida para* $t \geq \sigma$ *y* σ *suficientemente grande, tal que*

$$y_k(t) = \exp\left(\int_\sigma^t \frac{v \cdot R(\xi, v)}{1 - v \cdot L(\xi, \cdot v)} d\xi\right)(v + o(1)), \tag{2.20}$$

cuando $t \to +\infty$*, donde* $\cdot$ *es el producto interno canónico en* $\mathbf{C}^N$ *y* v *es el único vector unitario de* $\mathbf{C}^N$ *que satisface* $L(t, v) = 0$.

Demostración: Sean $M > 0$ y $\mathcal{B}_M = \{F \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbf{C}^N) : |F| \leq M\}$. Se probará que $\mathcal{B}_M$ es un compacto. Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{B}$ y $F \in \mathcal{B}_M$, entonces

$$|F\varphi_1 - F\varphi_2| \leq M|\varphi_1 - \varphi_2|.$$

Puesto que M no depende de F se tiene que la familia $\mathcal{B}_M$ es equicontinua.

Sean $\varphi \in \mathcal{B}$ y una sucesión $(F_n)_{n=1}^{+\infty} \subseteq \mathcal{B}_M$. Sea $\mathcal{K}(\varphi) = (F_n(\varphi))_{n=1}^{+\infty}$. Entonces,

$$\mathcal{K}(\varphi) \subseteq \overline{B}(0, M|\varphi|_\infty) \subseteq \mathbf{C}^N,$$

de donde $\mathcal{K}(\varphi)$ es un compacto. Luego, por el Teorema de Arzelá-Ascoli, se tiene que $\mathcal{B}_M$ es un compacto.

Para $F \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbf{C}^N)$, sea $\mathcal{A}_F : \mathcal{D} \to E$ la función definida por

$$\mathcal{A}_F(\xi, \varphi) = (F(\varphi), \dot{\varphi}).$$

Sea $\Sigma = \{\mathcal{A}_F \in \mathcal{L}_u(\mathcal{D}, E) : F \in \mathcal{B}_M\}$. Entonces Σ es un compacto. Esto se obtiene del siguiente hecho: Si $F_1, F_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbf{C}^N)$ entonces

$$|\mathcal{A}_{F_1} - \mathcal{A}_{F_2}| \leq |F_1 - F_2|.$$

Por la hipótesis ii) se tiene:

a) $A(t) \in \Sigma$ y $A(t)$ es diferenciable para todo $t \in I_\sigma$.

Por la hipótesis iii) se tiene:

b) $|A'(t)| \leq \rho|t - s|$, $\rho > 0$ suficientemente pequeño.

Por el Lema 18 y la hipótesis iv):

c) El espectro de $A(t)$ es puntual y numerable, es decir, $\sigma(A(t)) = \sigma_p(A(t)) = \{\lambda_i(t)\}_{i=1}^{m_t}$, posee una tricotomía de Hartman-Wintner para $\lambda_k(t)$ ($k \leq m_t$ fijo e independiente de t).

Por la hipótesis ii) y el Lema 16:

d) $\lambda_i(t)$ es acotado como función de t para $i = 1, ..., k-1$.

Por la hipótesis v:

e) existe $\hat{e} \in \mathcal{D}$ tal que $A(t)\hat{e} = 0$.

La proyección $P_0(t) : E \to E$, sobre el espacio propio relativo a $\lambda_k(t) = 0$, es tal que $ImP_0(t) =< \hat{e} >$. De aquí:

f) existe una función $r_0 : I_\sigma \to \mathbf{C}$ tal que

$$P_0(t)\mathcal{R}(t)\hat{e} = r_0(t)\hat{e}.$$

Por la hipótesis vi:

g) $\mathcal{R}(t)$ es un operador tal que $|\mathcal{R}(t)| \in L^p$ para $1 \leq p \leq 2$.

Luego, la ecuación (2.10) satisface las hipótesis del Teorema 4, dado en el capítulo anterior. Así, (2.10) tiene una solución $z_k(t)$ definida para $t \geq \sigma$ con σ suficientemente grande, tal que

$$z_k(t) = \exp\left(\int_\sigma^t r_0(\xi)d\xi\right)(\hat{e} + o(1)), \tag{2.21}$$

cuando $t \to +\infty$.

Ahora, se darán cálculos explícitos de $\hat{e}$ y de $r_0(t)$: $\hat{e} \in \mathcal{D}$, implica que existe una función $\varphi \in C^\infty$ tal que $\hat{e} = (\varphi(0), \varphi)$. Puesto que

$$A(t)\hat{e} = 0,$$

se tiene que

$$L(t, \varphi) = 0 \tag{2.22}$$

y

$$\dot{\varphi} = 0. \tag{2.23}$$

De la ecuación (2.23) se obtiene $\varphi(\theta) = \varphi(0)$, $\theta \in [-r, 0]$. Reemplazando esto en (2.22) se tiene

$$L(t, \varphi(0)) = 0,$$

y por tanto se puede tomar $\varphi(0) = v$, donde v es el único vector unitario que satisface $L(t, v) = 0$. Así,

$$\hat{e} = (v, v).$$

Para calcular $r_0(t)$ por (1.55):

$$P_0(t)\mathcal{R}(t)\hat{e} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \hat{f}_\lambda d\lambda, \tag{2.24}$$

donde

$$\hat{f}_\lambda = (\lambda I - A(t))^{-1}\mathcal{R}(t)\hat{e}$$

y γ_0 es una curva de Jordan rectificable tal que $\sigma(A(t)) \cap Int\gamma_0 = \{\lambda_k(t)\}$. Nótese que

$$(\lambda I - A(t))\hat{f}_\lambda = \mathcal{R}(t)\hat{e}. \tag{2.25}$$

Puesto que $\hat{f}_\lambda \in \mathcal{D}$, se tiene $\hat{f}_\lambda = (\varphi_\lambda(0), \varphi_\lambda)$ para algún $\varphi_\lambda \in C^\infty$. Entonces la relación (2.25) toma la forma

$$\begin{aligned} \lambda\varphi_\lambda(0) - L(t, \varphi_\lambda) &= R(t, v) \\ \lambda\varphi_\lambda - \dot{\varphi}_\lambda &= 0. \end{aligned}$$

De aquí,

$$\varphi_\lambda = e^{\lambda\cdot}\Delta(t, \lambda)^{-1}R(t, v).$$

Luego,

$$\hat{f}_\lambda = (\varphi_\lambda(0), \varphi_\lambda).$$

Reemplazando esto en la igualdad (2.24) se obtiene,

$$P_0(t)\mathcal{R}(t)\hat{e} = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \varphi_\lambda(0)d\lambda, \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \varphi_\lambda d\lambda\right).$$

De aquí, por la fórmula de Cauchy,

$$r_0(t) = \left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \Delta(t,\lambda)^{-1}R(t,v)d\lambda\right]\cdot v = \frac{1}{1 - v\cdot L(t,\cdot v)} v\cdot R(t,v).$$

Luego, la expresión asintótica (2.21) toma la forma

$$z_k(t) = \exp\left(\int_\sigma^t \frac{v\cdot R(\xi,v)}{1 - v\cdot L(\xi,\cdot v)}d\xi\right)(\hat{e} + o(1)),$$

cuando $t \to +\infty$. Así, llamando $y_k(t)$ a la primera coordenada de $z_k(t)$, se obtiene la existencia de una solución del sistema (2.2) que satisface (2.20). □

2.4.3 Consecuencias

Como caso particular se tiene el resultado obtenido en [7].

Corolario 1 *Considérese el sistema (2.1) autónomo perturbado*

$$y'(t) = L(y_t) + R(t, y_t). \tag{2.26}$$

Supóngase que la ecuación característica

$$\det[\lambda I - L(e^{\lambda \cdot})] = 0, \tag{2.27}$$

tiene una raíz simple $\lambda = \lambda_0$ tal que $\Re e\lambda_0 \neq \Re e\lambda$ para todas las demás raíces λ de (2.27) y la perturbación R satisface la condición de integrabilidad $|R(t,\cdot)| \in L^p$, $1 \leq p \leq 2$. Entonces, el sistema (2.26) tiene una solución $y_0(t)$, definida para $t \geq \sigma$ y σ suficientemente grande, tal que

$$y_0(t) = \exp\left(\lambda_0 t + \int_\sigma^t \frac{v\cdot R(\xi, e^{\lambda_0\cdot}v)}{1 - v\cdot L(\cdot e^{\lambda_0\cdot}v)}d\xi\right)(v + o(1)), \tag{2.28}$$

cuando $t \to +\infty$, donde $\cdot$ es el producto interno canónico en $\mathbf{C}^N$ y v es el único vector unitario de $\mathbf{C}^N$ que satisface $L(e^{\lambda_0\cdot}v) = \lambda_0 v$.

Demostración: Si en el sistema (2.26) se hace el cambio de variable $y(t) = e^{\lambda_0 t}\omega(t)$ se obtiene el sistema

$$\omega'(t) = L_0(\omega_t) + R(t, e^{\lambda_0\cdot}\omega_t), \tag{2.29}$$

donde $L_0 = L(e^{\lambda_0\cdot}I) - \lambda_0 I$. Es fácil probar que el sistema (2.29) satisface las hipótesis del Teorema anterior, de donde se obtiene la fórmula asintótica (2.28).□

El proximo resultado es netamente no autónomo, no está incluido por el reciente corolario:

Corolario 2 *Considérese la ecuación diferencial retardada*

$$y'(t) = b(t)(y(t) - y(t-r_1)) + q(t)y(t-r_2) \tag{2.30}$$

donde $b(t)$ es una función tal que

i) Existe una constante positiva M tal que $|b(t)| \leq M < \frac{1}{r_1}$,

ii) $b(t)$ es diferenciable y $|b'(t)| < \rho$ donde ρ es una constante positiva suficientemente pequeña,

iii) $q(t) \in L^p$ para $1 \leq p \leq 2$.

Entonces la ecuación (2.30) tiene una solución $y = y_0(t)$ definida para todo $t \geq \sigma$ y σ suficientemente grande tal que

$$y_0(t) = \exp\left(\int_\sigma^t \frac{q(\xi)}{1 - r_1 b(\xi)} d\xi\right)(1 + o(1)), \tag{2.31}$$

cuando $t \to +\infty$.

Demostración: Para la demostración de este corolario, se aplicará el Teorema 6 a la ecuación (2.30) considerando como la ecuación no perturbada a:

$$x'(t) = b(t)(x(t) - x(t-r_1)), \quad t \in I_\sigma. \tag{2.32}$$

Así,

$$L(t,\varphi) = b(t)(\varphi(0) - \varphi(-r_1))$$

y la perturbación

$$R(t,\varphi) = q(t)\varphi(-r_2),$$

para todo $\varphi \in \mathcal{B} = \mathcal{B}([-r,0], \mathbf{C}^N)$ con $r = \max\{r_1, r_2\}$. Entonces:

a) L es diferenciable como función de t.

Además, $|L(t,\cdot)| = 2|b(t)|$. En efecto, $|L(t,\varphi)| \leq 2|b(t)||\varphi|_\infty$ para todo $\varphi \in \mathcal{B}$, de donde $|L(t,\cdot)| \leq 2|b(t)|$. Por otro lado, $L(t,\varphi) = 2b(t)$, para todo $\varphi \in \mathcal{B}$, tal que $|\varphi|_\infty = 1$, $\varphi(0) = 1$ y $\varphi(-r_1) = -1$. Luego, por la hipótesis i):

b) $|L(t,\cdot)|$ es acotado como función de t.

Por la hipótesis ii),

c) $|L(t,\cdot) - L(s,\cdot)| \leq 2\rho|t-s|$ donde ρ es una constante positiva suficientemente pequeña.

d) $\lambda = 0$ es raíz simple de la ecuación característica de (2.32):

$$\lambda = b(t)(1 - e^{-\lambda r_1}). \tag{2.33}$$

Para probar d) basta derivar, con respecto a λ, la ecuación (2.33), obteniendo

$$1 = b(t)r_1 e^{-\lambda r_1}.$$

Si $\lambda = 0$, fuese aún raíz de esta última ecuación, entonces $b(t) = \frac{1}{r_1}$, lo cual contradice la hipótesis i).

e) $\sigma(L(t,\cdot))$ posee una tricotomía de Hartman-Wintner para $\lambda(t) = 0$.

Supóngase que no fuese así. Entonces existe una solución $\lambda = \lambda(t)$ de (2.33) y una sucesión $(t_n)_n \subseteq I_\sigma$ tal que $\mu_0(t_n) := \Re e\lambda(t_n) \to 0$ cuando $n \to +\infty$. Haciendo $\mu_1(t_n) = \Im m\lambda(t_n)$ y separando la ecuación (2.33) en parte real e imaginaria se obtiene

$$\mu_0(t_n) = b(t_n)(1 - e^{-\mu_0(t_n)r_1}\cos(\mu_1(t_n)r_1)) \tag{2.34}$$

$$\mu_1(t_n) = b(t_n)\mathrm{sen}(\mu_1(t_n)r_1)e^{-\mu_0(t_n)r_1} \tag{2.35}$$

De la ecuación (2.35) se tiene que $(\mu_1(t_n))_n$ es acotada, por lo cual, pasando a subsucesiones si fuera necesario, se obtiene que existe $\mu_{1\infty} \in \mathbf{R}$ tal que $\mu_1(t_n) \to \mu_{1\infty}$ cuando $n \to +\infty$. Puesto que la sucesión $(b(t_n))_n$ es acotada, pasando a subsucesiones si fuese necesario, existe $b_\infty \in \mathbf{R}$ tal que $b(t_n) \to b_\infty$ cuando $n \to +\infty$. Así, de la ecuación (2.35), se tiene

$$|\mu_{1\infty}| = |b_\infty||\mathrm{sen}(\mu_{1\infty}r_1)| \leq |b_\infty||\mu_{1\infty}|r_1$$

y por la hipótesis i), $\mu_{1\infty} = 0$. Por lo tanto, $\lambda(t_n) \to 0$ cuando $n \to +\infty$. De la ecuación (2.33),

$$1 = b(t_n)\frac{1 - e^{-\lambda(t_n)r_1}}{\lambda(t_n)}.$$

Haciendo $n \to +\infty$ se obtiene que $1 = b_\infty r_1$ lo cual es una contradicción.

Finalmente, por la hipótesis iii), se tiene que

$$|R(t,\cdot)| = |q(t)| \in L^p, \;\; 1 \leq p \leq 2.$$

Así, la ecuación (2.30) satisface las hipótesis del Teorema 6 de donde se obtiene la existencia de una solución $y = y_0(t)$, definida para $t \geq \sigma$ con σ suficientemente grande, que satisface

$$y_0(t) = \exp\left(\int_\sigma^t \frac{v \cdot R(\xi, v)}{1 - v \cdot L(t, \cdot v)} d\xi\right)(v + o(1)),$$

cuando $t \to +\infty$, donde v es el único vector unitario tal que $L(t,v) = 0$. Claramente $v = 1$, $v \cdot R(\xi, v) = q(\xi)$ y $1 - v \cdot L(t, \cdot v) = 1 - b(\xi)r_1$, de donde se deduce la fórmula asintótica (2.31).□

Ejemplo: Considérese la ecuación diferencial retardada:

$$y'(t) = \cos(\sqrt{t})(y(t) - y(t - \frac{1}{2})) + \frac{\operatorname{sen}(e^t)}{t} y(t-1), \; t > 0 \qquad (2.36)$$

Para aplicar el reciente corolario a la ecuación (2.36) considérese: $b(t) = \cos(\sqrt{t})$ y $q(t) = \frac{\operatorname{sen}(e^t)}{t}$. Luego, es fácil observar que la ecuación (2.36) satisface las hipótesis del Corolario 2, para t suficientemente grande, y por lo tanto (2.36) posee una solución $y_0(t)$ definida para $t \geq \sigma$ y σ suficientemente grande tal que

$$y_0(t) = \exp\left(\int_\sigma^t \frac{\operatorname{sen}(\xi)}{\xi(1 - \frac{1}{2}\cos(\sqrt{\xi}))} d\xi\right)(1 + o(1)),$$

cuando $t \to +\infty$.

Bibliography

[1] O. Arino and I. Gyori, Asymptotic integration of delay differential systems, *J. Math. Anal. Appl.* 138 (1989), 311-327.

[2] R. Bellman and K.L. Cooke, Differential-Difference Equations, Academic Press, New York, 1963.

[3] K.L. Cooke, Linear functional differential equations of asymptotic autonomous type. *J. of Differential Equations* 7 (1970), 154-174.

[4] J.A. Burns, T.L. Hederman and H.W. Stech, Linear functional differential equations as semigroups on product spaces. *SIAM. J. Math. Anal.* 14, N°1 (1983).

[5] J. S. Cassell and Z. Hou, Asymptotically diagonal linear differential equations with retardation, *J. London Math. Soc.* (2) 47 (1993) 473-483.

[6] S. Castillo and M. Pinto, Asymptotic integration of ordinary differential systems. *J. Math. Anal. Appl.,* 1997 (to appear).

[7] S. Castillo and M. Pinto, Asymptotic integration of perturbed linear autonomous functional differential equations. Submitted.

[8] K.L. Cooke and J.A. Yorke, Equations modelling population growth, economic growth and gonorrhea epidemiology, 35-55 in *Ordinary Differential Equations*, L. Weiss, Ed., Academic Press, 1972.

[9] J.L. Daleckii and M.G. Krein, Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Spaces. *Trans. of Math. Monographs,* 43, AMS (1974).

[10] G. Dunkel, Single-species model for population growth depending on past history. *Seminar on Differential Equations and Dynamical Systems,* 92-99. Lecture Notes in Math. vol 60. Springer-Verlag, 1968.

[11] M.S.P. Eastham, The Asymptotic Solution of Linear Differential Systems, Applications of the Levinson Theorem, *Clarendon, Oxford,* (1989).

[12] K. Engel, Spectral theory and generator property for one-sided coupled operator matrices, *Tübinger Berichte zur Funktionalanalysis* 4, (1994/95)

[13] J. Gallardo and M. Pinto, Asymptotic integration of nonautonomous delay differential systems, *J. Math. Anal. Appl.* 199. (1996), 654-675.

[14] I. Györi and M. Pituk, L^2–Perturbation of a linear delay differential equation, *J. Math. Anal. Appl.,* 195(1995), 415-427.

[15] J.R. Haddock and R.J. Sacker, Stability and asymptotic integration for certain linear systems of functional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 76 (1980), 328-338.

[16] J.K. Hale and S.M Verduyn Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, *Springer-Verlag, New York* (1993).

[17] W. Harris and D. Lutz, A unified theory of asymptotic integration, *J.Math. Anal. Appl.* 57 (1977), 571-586.

[18] P. Hartman and A. Wintner, Asymptotic integration of linear differential equations, *Amer. J. Math.* 77 (1955), 48-86 and 932.

[19] N. Levinson, The asymptotic behavior of system of linear differential equations, *Amer. J. Math.*, 68, 1-6 (1946).

[20] M. Lizana, Exponential dichotomy for singularly perturbed linear functional differential equation with small delays, *Applicable Analysis*, Vol. 47 (1992), 213-225.

[21] M. Pinto, Asymptotic solutions for second order delay differential equations. *Nonlinear Anal. T.M.A.*, Vol. 28, N^o 10 (1997), 1729-1740.

[22] Shambing Ai, Asymptotic integration of delay differential systems, *J. Math. Anal. Appl.* 165 (1992), 71-101.

[23] V. Volterra, Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires. *J. Math. Pures Appl.* 7, (1928), 249-298.

[24] P.J. Wangersky and W.J. Cunningham, Time lag in prey predator population models. *Ecology* 38 (1957), 136-139.

[25] P.J. Wangersky and W.J. Cunningham, Time lag in population models. *Cold Spring Harbor Symposia on Qualitative Biology* 22 (1957).

[26] E.M. Wright, A functional equation in the heuristic theory of primes. *The Mathematical Gazette*, 45 (1961), 15-16.

[27] E.M. Wright, A nonlinear difference differential equation. *J. Reine Angew Math. 194 (1955), 66-87.*