

Agujeros negros tridimensionales acoplados a campos conformes

Tesis
Entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en Física

Facultad de Ciencias

por

Cristián Andrés Martínez Silva

Junio, 1996



Director de Tesis: Dr. Jorge Zanelli I.

**INFORME DE APROBACION
TESIS DE DOCTORADO**

Se informa al Comité del Programa de Doctorado en Ciencias con mención en Física que la Tesis presentada por el candidato

Cristián Andrés Martínez Silva

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito para la obtención del grado de Doctor en Ciencias con mención en Física.

Director de Tesis

Dr. Jorge Zanelli

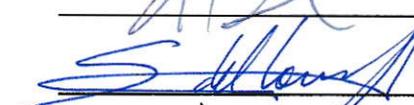


Comisión Informante de Tesis

Dr. Máximo Bañados



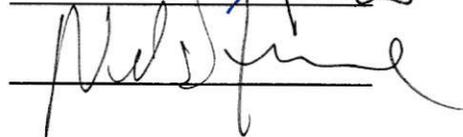
Dr. Sergio del Campo



Dr. Roberto Hojman



Dr. Nelson Zamorano (Presidente)



Para
Mirta, Javiera y María José

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer a Luis Moraga por su gran apoyo y conducción en mis primeros años en la Facultad de Ciencias. También agradezco a Andrés Gomberoff, con quien no sólo compartí oficina durante mi estadía en el Programa, sino que además, compartimos enriquecedoras discusiones sobre la Física y la vida; a Víctor Muñoz, por sus útiles consejos; a Victoria Bello, por su gran amabilidad y eficiencia; y a quienes tuve como profesores en el Departamento de Física: María Inés Dinator, Patricio Fuentealba, Luis Gomberoff, David Gottlieb, Sergio Hojman, Germán Kremer, Herbert Massmann y Roberto Morales, por mostrarme diferentes aspectos de la Física.

Durante estos años ha sido fundamental en mi formación participar en los seminarios y conferencias organizadas por el Centro de Estudios Científicos de Santiago. Agradezco a Máximo Bañados, Claudio Teitelboim y Jorge Zanelli, la oportunidad de descubrir la belleza y encanto de la Física, en un ambiente cálido y rico en ideas. También agradezco al personal del C.E.C.S. por el gran apoyo brindado.

Especiales palabras reservo para el Director de esta tesis, Jorge Zanelli. Su constante estímulo y su compromiso incondicional han permitido, no sólo la finalización de una tesis, sino que además mi desarrollo como persona y científico.

Mi dedicación exclusiva al programa de Doctorado ha sido posible gracias a una beca de doctorado de CONICYT y al proyecto 4950004/95 de FONDECYT. El desarrollo de la presente tesis fue financiado por el proyecto 2940012/94 de FONDECYT.

ABSTRACT

A three dimensional black hole solution of Einstein equations with negative cosmological constant coupled to a conformal scalar field is given. The solution is static, circularly symmetric, asymptotically anti-de Sitter and nonperturbative in the conformal field. The curvature tensor is singular at the origin while the scalar field is regular everywhere. The condition that the Euclidean geometry be regular at the horizon fixes the temperature to be $T = \frac{9r_+}{16\pi l^2}$. Using the Hamiltonian formulation including boundary terms of the Euclidean action, the entropy is found to be $\frac{2}{3}$ of the standard value ($\frac{1}{4}A$), and in agreement with the first law of thermodynamics. Moreover, it is shown that the system is unstable against linear circularly symmetric perturbations.

In the last chapter, the first order correction in \hbar to the entropy and temperature of three dimensional BTZ black hole due to back-reaction of a massless conformal scalar field is computed. We consider the renormalized stress energy tensor associated with the scalar field as source of Einstein equations. These semiclassical equations are solved by a static, circularly symmetric and asymptotically anti-de Sitter black hole solution. The temperature and entropy of this perturbed black hole are determined using the standard Euclidean method. The deviations of these thermodynamical quantities respect to BTZ ones give the back-reaction corrections.

RESUMEN

Se presenta una solución agujero negro de las ecuaciones de Einstein acopladas a un campo escalar conforme en tres dimensiones. La solución es estática, de simetría circular, asintóticamente anti-de Sitter y no perturbativa en el campo conforme. El tensor de curvatura es singular en el origen mientras que el campo es siempre regular. La condición de regularidad de la geometría Euclídea en horizonte fija la temperatura a $T = \frac{9r_+}{16\pi l^2}$. Usando la formulación Hamiltoniana con términos de borde de la acción Euclídea, se encuentra que la entropía es $\frac{2}{3}$ del valor usual ($\frac{1}{4}A$), y está en acuerdo con la primera ley de la termodinámica. Además se muestra que el sistema es inestable frente a perturbaciones lineales de simetría circular.

En el último capítulo, se calculan las correcciones a la temperatura y a la entropía del agujero negro tridimensional BTZ a primer orden en \hbar , debido a la reacción de fondo de un campo escalar conforme sin masa. Consideramos el tensor de energía-momentum renormalizado asociado al campo escalar como fuente de las ecuaciones de Einstein. Estas ecuaciones semiclásicas son resueltas por un agujero negro estático, circularmente simétrico y asintóticamente anti-de Sitter. La temperatura y entropía de este agujero perturbado son determinadas utilizando métodos usuales. Las desviaciones de estas cantidades termodinámicas con respecto a las asociadas al agujero BTZ corresponden al efecto de la reacción de fondo.

Contenido

Dedicatoria	ii
Agradecimientos	iii
Resumen	iv
1 Introducción	1
2 Gravitación en tres dimensiones	3
2.1 Introducción	3
2.2 Propiedades generales	4
2.3 La solución de agujero negro (BTZ)	5
3 Gravitación con acoplamiento escalar conforme	9
3.1 Introducción	9
3.2 Principio de acción en D dimensiones	10
3.3 Acoplamiento conforme como uno minimal con auto-interacción . . .	11
3.4 Agujeros negros con carga escalar	13
4 Agujero negro con campo escalar conforme	14
4.1 Introducción	14
4.2 Solución agujero negro	15
4.3 Estructura global	17
4.4 Termodinámica	19
4.5 Entropía y la ley del área	23
4.6 Discusión	25
5 Inestabilidad del agujero negro con campo conforme	27
5.1 Introducción	27
5.2 Ecuaciones linealizadas	28
5.3 Análisis de la ecuación para la perturbación del campo	31

6	Reacción de fondo en el agujero negro BTZ	35
6.1	Teoría cuántica de campos en el agujero negro BTZ	35
6.2	Determinación de la reacción de fondo	38
6.2.1	Propiedades termodinámicas	41
6.3	Discusión	41
7	Conclusiones	43
	Apéndice: Cuantización de un campo escalar conforme en CadS	45
	Bibliografía	49

Capítulo 1

Introducción

Poco tiempo después de que A. Einstein formulara la Teoría General de la Relatividad, K. Schwarzschild publicaba en 1916¹, la solución estática y de simetría esférica de las ecuaciones de Einstein

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)^{-1} + r^2 d^2\Omega^2, \quad (1.1)$$

que desde entonces lleva su nombre. Esta solución no sólo da cuenta de las propiedades métricas del espacio-tiempo generado por una distribución esférica de masa M , sino que también revela una muy interesante propiedad causal del espacio-tiempo: La región interior al llamado radio de Schwarzschild

$$r_S = \frac{2MG}{c^2} \simeq 3 \frac{M}{M_{\text{Sol}}} \text{ km}, \quad (1.2)$$

está causalmente desconectada de la región exterior a este. Esto significa que ningún cuerpo puede escapar de la región interior, *incluida la luz*. Por esta singular propiedad, el físico norteamericano John A. Wheeler les dió a estos espacio-tiempos (soluciones de las ecuaciones de Einstein) el nombre de **agujeros negros**.

En la presente Tesis, se estudian agujeros negros de tres dimensiones espacio-temporales.

En el Capítulo 2 se revisan las propiedades fundamentales de la Gravitación (Teoría General de la Relatividad) en tres dimensiones y se introduce la solución

¹Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsber. der Akad. Wiss. Berlin, pp. 189-196.

agujero negro encontrada por Bañados, Teitelboim y Zanelli (BTZ) [1], que es la solución tridimensional con constante cosmológica negativa. Este agujero negro tiene una simple y muy interesante construcción geométrica, se puede obtener a partir de identificaciones en el espacio anti-de Sitter [2], lo cual permite realizar cálculos exactos relacionados con la teoría cuántica de campos en este espacio curvo.

En el Capítulo 3, se analizan las propiedades de la Gravitación cuando se agregan campos de materia, en este caso un campo escalar con acoplamiento conforme. Se presenta también aquí un agujero negro con carga escalar conforme en cuatro dimensiones.

Después de estos dos capítulos de carácter introductorio, se presenta en el Capítulo 4, el resultado principal de esta Tesis, un nuevo agujero negro que está dotado de un campo escalar conforme [3]. Se analiza su estructura global, a través de su diagrama de Penrose, y se determinan sus propiedades termodinámicas, en particular, la entropía de este agujero negro. En la última sección se discuten los resultados.

El Capítulo 5 está dedicado al estudio de la estabilidad de este sistema frente a perturbaciones lineales. Se prueba que el sistema es inestable [4].

En 1974, S. W. Hawking mostró que los agujeros negros radiaban con un espectro termal [23]. En Capítulo 6, se estudia el efecto de los campos de radiación en las propiedades termodinámicas del agujero BTZ a través del proceso llamado reacción de la geometría de fondo (*back-reaction*) [5].

Las conclusiones generales que se obtienen de la presente tesis se exponen en el Capítulo 7.

Finalmente se incluye un Apéndice donde se detalla al cuantización de un campo escalar conforme en el espacio cubrimiento universal de anti-de Sitter.

La convención de signos para la métrica y curvatura sigue la utilizada en [24]. La constante de Einstein será denotada por κ , y como es usual usaremos unidades tales que $c = 1$.

Capítulo 2

Gravitación en tres dimensiones

2.1 Introducción

En la última década, a partir de los trabajos de Deser, Jackiw, 't Hooft [6, 7, 8] y Witten [9, 10], la gravitación en tres dimensiones se ha convertido en uno de los modelos más recurridos en el estudio de los fundamentos clásicos y cuánticos de la gravitación. Una de las razones para este creciente interés, es la significativa reducción en la complejidad de los cálculos que presentan los modelos en tridimensionales relativos a los de cuatro. Es así que uno espera que esta simplificación dé luz a problemas conceptuales, como por ejemplo, el origen de los estados que dan lugar a la entropía de los agujeros negros, el problema de la pérdida de información, etc., que a menudo son oscurecidos por la mayor complejidad del caso en cuatro dimensiones.

En este capítulo revisaremos las propiedades más relevantes de la gravitación en tres dimensiones y la solución agujero negro tridimensional BTZ.

2.2 Propiedades generales

En tres dimensiones, el tensor de curvatura de Riemann, $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, está completamente determinado por el tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$, por la relación

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\alpha} \epsilon_{\rho\sigma\beta} G^{\alpha\beta}. \quad (2.1)$$

Entonces, a partir de las ecuaciones de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

se deduce que si el tensor de energía-momentum, $T_{\mu\nu}$, es nulo en un punto, allí se anula el tensor de curvatura. Es decir, el espacio-tiempo es plano en las regiones en que no hay materia. En cuatro y más dimensiones, la ausencia de materia implica la nulidad del tensor de Einstein pero esto no necesariamente implica que el espacio-tiempo sea plano.

En [11], Giddings, Abbott y Kuchař estudiaron la estructura de las ecuaciones (2.2) en tres dimensiones sin materia, estableciendo la ausencia de gravitones y la inexistencia de un límite Newtoniano en esta dimensión.

Aunque el espacio-tiempo es plano donde no hay materia, en [6, 7] se muestra que las fuentes de materia inducen efectos gravitacionales de carácter topológico (por ejemplo, una partícula puntual producirá una singularidad cónica en el espacio-tiempo): La gravitación sin materia es sólo localmente plana.

Si se introduce una constante cosmológica Λ , la ecuación (2.2) se escribe

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

En ausencia de materia, la ecuación anterior y (2.1) implican que toda solución de las ecuaciones de Einstein sin materia, con constante cosmológica, tiene curvatura constante, es decir,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = [g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}]\Lambda. \quad (2.4)$$

Así, la geometría local de las soluciones (cuando no hay materia) corresponde a la de un espacio de curvatura constante. Por lo tanto, las soluciones tridimensionales

difieren de estos espacios sólo en las propiedades globales. Por ejemplo, con identificaciones apropiadas, el espacio anti-de Sitter (Λ negativa) se convierte en el agujero negro BTZ que revisamos en la siguiente sección.

Otra de las razones del creciente interés por la gravitación tridimensional proviene de sus propiedades cuánticas. Sobre este aspecto la referencia más importante es el trabajo de Witten[9], quien probó que la gravitación cuántica en tres dimensiones es finita y exactamente soluble. Una revisión de estos temas se puede encontrar en [12]. Esto ha generado gran expectativa para el problema más grande de la Física Teórica actual que es encontrar una teoría cuántica de la Gravedad.

2.3 La solución de agujero negro (BTZ)

Las ecuaciones de Einstein (2.3) para una métrica estática con simetría circular

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\theta^2 \quad (2.5)$$

son

$$\frac{AB'}{2rB^2} - \Lambda A = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{A'}{2rA} + \Lambda B = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{r^2A''}{2} + \Lambda r^2 = 0, \quad (2.8)$$

donde prima denota la derivada respecto a r . Las dos primeras ecuaciones entregan $A(r) = C_1/B(r) = C - \Lambda C_1 r^2$, donde C_1 y C son constantes de integración. La tercera ecuación, fija el valor de $C_1 = 1$ y no restringe a C . Por lo tanto las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica λ tienen la solución exacta

$$ds^2 = -(C - \Lambda r^2)dt^2 + (C - \Lambda r^2)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2. \quad (2.9)$$

En el caso en que $\Lambda > 0$, (2.9) corresponde a la métrica de Sitter, y C debe ser positiva para que el vector de Killing $\partial/\partial t$ sea tipo tiempo. Si $C \neq 1$ la métrica tiene una singularidad cónica en el origen, que indica la presencia de una partícula puntual [6].

Si $\Lambda < 0$, (2.9) es la forma canónica de la métrica del espacio-tiempo anti-de Sitter. A diferencia de lo anterior, C puede ser tanto positiva como negativa. En el primer caso, se tiene simplemente el espacio-tiempo anti-de Sitter (con una singularidad cónica si $C \neq 1$). Si C es negativa, el espacio-tiempo tiene un horizonte de eventos, indicando la presencia de un agujero negro (de masa $M = -C$, en unidades tales que $\kappa = \pi$).

Dada la simplicidad de la derivación previa, es algo notable que la existencia de un agujero negro tridimensional fuera descubierta por Bañados, Teitelboim y Zanelli [1](BTZ), casi después de diez años del comienzo de las investigaciones en gravedad tridimensional. Esta solución puede ser generalizada para incluir rotación y carga eléctrica [1, 2].

Este descubrimiento ha generado un gran número de trabajos, tanto en aspectos clásicos, como la estructura geodésica [13], o cuánticos (estos serán comentados en el último capítulo) del agujero negro BTZ. Una completa revisión, que cubre hasta Mayo de 1995, ha sido publicada por Carlip [14].

Puesto que el agujero BTZ es una solución de (2.3) sin materia, se trata de un espacio-tiempo de curvatura constante negativa: cualquier punto del espacio-tiempo del agujero negro tiene una vecindad isométrica al espacio anti-de Sitter (adS), y la variedad completa se puede expresar como una colección de tales vecindades unidas apropiadamente. Es posible construir este agujero negro como el cociente entre el espacio cubrimiento universal de adS (CadS) y un grupo de isometrías [2]. Este hecho proporciona una poderosa herramienta matemática, que permite, por ejemplo, el cálculo exacto de las funciones de Green en el agujero negro.

El espacio de anti-de Sitter se puede definir como la superficie $-u^2 - v^2 + x^2 + y^2 = -l^2$ incrustada en $\mathbb{R}^{2,2}$ con métrica $ds^2 = -du^2 - dv^2 + dx^2 + dy^2$. Un sistema de coordenadas (λ, ρ, θ) que cubre este espacio es definido por [49]

$$\begin{aligned} u &= l \cos \lambda \sec \rho & v &= l \sin \lambda \sec \rho \\ x &= l \tan \rho \cos \theta & y &= l \tan \rho \sin \theta, \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde $0 \leq \rho \leq \pi/2$, $0 < \theta \leq 2\pi$, y $0 < \lambda \leq 2\pi$. En estas coordenadas, la métrica

adS se escribe

$$ds^2 = l^2 \sec^2 \rho (-d\lambda^2 + d\rho^2 + \sin^2 \rho d\theta^2). \quad (2.11)$$

Se observa que adS tiene topología $S^1(\text{tiempo}) \times \mathbb{R}^2(\text{espacio})$ y por lo tanto contiene curvas tipo tiempo cerradas. Si se desenrolla el ángulo λ se obtiene el espacio cubrimiento universal de adS, con $-\infty < \lambda < \infty$, el que no contiene curvas tipo tiempo cerradas.

Es claro de la forma de la métrica inducida por el espacio de incrustación que el grupo de isometría de CadS es $SO(2,2)$. El elemento de $SO(2,2)$ que realiza la identificación de puntos en CadS que dan origen al agujero BTZ (sin rotación), se puede representar como la matriz que actúa sobre las coordenadas (u, x, v, y) del espacio incrustado

$$H = \begin{bmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha & 0 & 0 \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{con } \alpha = \frac{2\pi r_+}{l}. \quad (2.12)$$

Se observa que H corresponde a un *boost* en el plano $u - x$.

Para obtener el agujero con rotación, se utiliza un procedimiento similar. En este caso la identificación dependerá de dos parámetros y se puede entender como dos *boosts*, uno en el plano $u - x$ y otro en el plano $v - y$ [52].

Dado que todo espacio-tiempo de curvatura constante es conformalmente plano [15], uno espera encontrar una representación explícita para la métrica BTZ, que muestre este hecho. Esta representación se obtiene haciendo la siguiente transformación [16]

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{r^2 - r_+^2}{r^2} \right)^{1/2} \cosh \left(\frac{r_+}{l^2} t \right) \exp \left(\frac{r_+}{l} \theta \right) \\ y &= \left(\frac{r^2 - r_+^2}{r^2} \right)^{1/2} \sinh \left(\frac{r_+}{l^2} t \right) \exp \left(\frac{r_+}{l} \theta \right) \\ z &= \left(\frac{r_+}{r} \right) \exp \left(\frac{r_+}{l} \theta \right), \quad r \geq r_+ = M^{1/2} l, \end{aligned} \quad (2.13)$$

que pone la métrica BTZ,

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{l^2} - M \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} - M \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (2.14)$$

en la forma

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2} (dx^2 - dy^2 + dz^2) \quad z > 0. \quad (2.15)$$

La métrica anterior corresponde al llamado *semiespacio superior de Poincaré*, que es el prototipo de los espacios de curvatura constante negativa [17].

La periodicidad de la coordenada angular θ , demanda que identifiquemos puntos bajo la acción de $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$, esto es,

$$(x, y, z) \sim (x e^{2\pi r/l}, y e^{2\pi r/l}, z e^{2\pi r/l}). \quad (2.16)$$

Capítulo 3

Gravitación con acoplamiento escalar conforme

3.1 Introducción

En 1970, Callan, Coleman y Jackiw [57] propusieron una modificación al tensor de energía-momentum de un campo escalar con auto-interacción cuártica. Este nuevo tensor de energía-momentum, llamado tensor conformal, posee interesantes propiedades tanto clásicas como cuánticas. También ellos mostraron cómo modificar la acción de la gravitación para que la forma totalmente covariante de este tensor sea fuente del campo gravitacional. Una teoría gravitacional similar también había sido considerada por Chernikov y Tagirov [18] y luego por Deser [19]. En [20], Parker muestra que la distinción física entre el tensor convencional y el conformal se hacen más evidentes en campos gravitacionales intensos y en [21] estudia las propiedades del tensor conformal en un espacio-tiempo curvo.

La acción gravitacional modificada propuesta en [57] es

$$I_{\text{grav}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} - \frac{1}{12} \Psi^2 \right] R, \quad (3.1)$$

Si sumamos a esta acción un término cinético para el campo escalar Ψ se obtiene la ecuación de campo [22]

$$\square \Psi - \frac{1}{6} R \Psi = 0. \quad (3.2)$$

Esta ecuación es, a diferencia de la que ocurre en el caso de un campo escalar ordinario, *conformalmente invariante*. Es decir, (3.2) es invariante ante la transformación $g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(x)g_{\mu\nu}$, $\Psi \rightarrow \Omega^{-1}(x)\Psi$, compartiendo así esta propiedad con las ecuaciones de Maxwell y Dirac sin masa.

Después de estos primeros trabajos, el campo Ψ ha sido considerado como un tipo especial de materia, *campo escalar conforme*, más que como la componente de spin cero de la interacción gravitacional.

3.2 Principio de acción en D dimensiones

Consideremos un espacio-tiempo D -dimensional. Definimos un campo escalar conforme al descrito por la acción

$$I_C = -\frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi + \xi_D R \Psi^2 \right], \quad (3.3)$$

donde R es el escalar de Ricci, ∇_μ es la derivada covariante y $\xi_D = \frac{1}{4}(D-2)/(D-1)$. El valor de ξ_D se elige de manera tal que I_C sea invariante bajo las transformaciones conformes

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(x)g_{\mu\nu} \quad \Psi \rightarrow \Omega^{1-\frac{D}{2}}(x)\Psi. \quad (3.4)$$

El tensor de energía-momentum asociado es

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &\equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta I_C}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Psi \nabla_\beta \Psi + \xi_D [g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu + G_{\mu\nu}] \Psi^2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

y la ecuación de campo para Ψ es

$$(\square - \xi_D R)\Psi = 0, \quad (3.6)$$

donde $\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ es el operador de Laplace-Beltrami en la métrica $g_{\mu\nu}$.

El cálculo de la traza de $T_{\mu\nu}$ se puede efectuar fácilmente, obteniéndose (con el valor de ξ_D elegido anteriormente)

$$T^\mu{}_\mu = \frac{D-2}{2} \Psi (\square - \xi_D R) \Psi, \quad (3.7)$$

es decir, la traza es proporcional a la ecuación de campo para Ψ , y se anula en virtud de ella (*on shell*).

Uno puede preguntarse si podemos agregar a la acción (3.3) un término de autointeracción para el campo Ψ , tal que esta se mantenga invariante bajo las transformaciones (3.4). Un breve cálculo revela que se puede sumar

$$\alpha \int d^D x \sqrt{-g} \Psi^p, \quad (3.8)$$

con α arbitrario y $p = \frac{2D}{D-2}$ ($p = 4$ si $D = 4$, y $p = 6$ para $D = 3$).

3.3 Acoplamiento conforme como uno minimal con auto-interacción

En esta sección estudiaremos la relación que existe entre la acción de la gravitación (G) con constante cosmológica con acoplamiento escalar conforme (AC) definida en D dimensiones por

$$I_{\text{GAC}}[g, \Psi] = \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{R - 2\Lambda}{2\kappa} - \frac{1}{2} [g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi + \xi_D R \Psi^2] \right], \quad (3.9)$$

y la acción con acoplamiento escalar minimal auto-interactuante (AMA)

$$I_{\text{GAMA}}[g, \psi] = \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \psi \nabla_\nu \psi - V(\psi) \right], \quad (3.10)$$

Esta relación permite analizar los resultados que provienen de la teoría con acoplamiento conforme es términos de las variables de una teoría usual, con acoplamiento minimal. En particular, esta relación es utilizada en el siguiente capítulo para discutir el valor de la entropía de un agujero negro.

Supongamos que tenemos dos métricas, $g_{\mu\nu}$ y $\hat{g}_{\mu\nu}$ conformalmente relacionadas, esto es,

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}. \quad (3.11)$$

La relación entre los correspondientes escalares de Ricci es [24]

$$\hat{R} = \Omega^{-2} R - 2(D-1)\Omega^{-3} \square \Omega - (D-1)(D-4)\Omega^{-4} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Omega \nabla_\nu \Omega. \quad (3.12)$$

Si ponemos

$$\Omega = (1 - \kappa \xi_D \Psi^2)^{1/(D-2)}, \quad (3.13)$$

obtenemos

$$\sqrt{-\hat{g}} \hat{R} = \sqrt{-g} \left[(1 - \kappa \xi_D \Psi^2) R + \frac{\kappa^2 \xi_D \Psi^2}{1 - \kappa \xi_D \Psi^2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi + \frac{\kappa}{2} \square \Psi^2 \right], \quad (3.14)$$

pero $\frac{\kappa \xi_D \Psi^2}{1 - \kappa \xi_D \Psi^2} = \frac{1}{1 - \kappa \xi_D \Psi^2} - 1$, entonces

$$\begin{aligned} \int d^D x \sqrt{-\hat{g}} \left[\frac{\hat{R}}{2\kappa} - \frac{1}{2} \frac{\hat{g}^{\mu\nu} \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi}{(1 - \kappa \xi_D \Psi^2)^2} \right] = \\ \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi + \xi_D R \Psi^2) \right] + B.T., \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde *B.T.* es un término de borde. Definiendo ψ como

$$\frac{d\psi}{d\Psi} = \frac{1}{1 - \kappa \xi_D \Psi^2}, \quad \text{esto es,} \quad \sqrt{\kappa \xi_D} \Psi = \tanh \sqrt{\kappa \xi_D} \psi, \quad (3.16)$$

y agregando una constante cosmológica Λ , obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \int d^D x \sqrt{-\hat{g}} \left[\frac{\hat{R}}{2\kappa} - \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \psi)^2 - V(\psi) \right] = \\ \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{R - 2\Lambda}{2\kappa} - \frac{1}{2} ((\nabla \Psi)^2 + \xi_D R \Psi^2) \right] + B.T., \end{aligned} \quad (3.17)$$

con $V(\psi) = \kappa^{-1} \Lambda [\cosh \sqrt{\kappa \xi_D} \psi]^{2D/(D-2)}$.

Se ha mostrado así que existe un mapeo entre las soluciones de un sistema con acoplamiento escalar conforme y uno con acoplamiento escalar minimal con auto-interacción. Clásicamente, no es posible decidir cuál de los dos sistemas contiene los campos físicos, sin algún tipo de prescripción adicional. Se observa que la constante cosmológica es la responsable de la auto-interacción en el sistema GAMA. Si $\Lambda = 0$ no hay auto-interacción.

Si uno define

$$\varphi = 1 - \kappa \xi_D \Psi^2 \quad \text{y} \quad \omega(\varphi) = \frac{\varphi}{4\xi_D(1-\varphi)} \quad (3.18)$$

la acción I_{GAC} se mapea a

$$I_{\text{STG}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^D x \sqrt{-g} \left[\varphi R - \frac{\omega(\varphi)}{\varphi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - 2\varphi V(\varphi) \right]. \quad (3.19)$$

con $\varphi V(\varphi) = \Lambda$. Esta acción define lo que se conoce como una teoría escalar-tensorial gravitacional (STG). La equivalencia física entre las teorías STG (cuyos campos definen el llamado *sistema conforme de Jordan*) y GAMA (*sistema conforme de Einstein*) ha sido motivo de mucho debate. Una reciente revisión de este tema, incluyendo teorías no lineales en R , se encuentra en la referencia [25].

3.4 Agujeros negros con carga escalar

El acoplamiento escalar conforme junto a electromagnetismo dan origen a una solución de agujero negro en cuatro dimensiones sin constante cosmológica. Este sorprendente solución fue descubierta por Bronnikov, Melnikov y Bocharova [26] y Bekenstein [27, 28] (ver también [29]). La solución BMBB sin carga eléctrica es estática, esféricamente simétrica y asintóticamente plana (no hay constante cosmológica). El elemento de línea y campo escalar están dados por

$$ds^2 = -(1 - M/r)^2 dt^2 + (1 - M/r)^{-2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.20)$$

y

$$\Psi = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{r}{r - M}, \quad (3.21)$$

respectivamente. La métrica corresponde a un agujero Reissner-Nordström extremo y el campo escalar es no acotado en el horizonte. En [28] se muestra que esta divergencia no produce problemas físicos.

Recientemente, la unicidad del agujero negro BMBB ha sido establecida [30]. También se ha probado que la única solución agujero negro estática, con simetría esférica y asintóticamente plana de las ecuaciones de Einstein con acoplamiento conforme, ocurre sólo en cuatro dimensiones, y corresponde a la solución BMBB [31].

Capítulo 4

Agujero negro con campo escalar conforme

4.1 Introducción

En este capítulo se presenta una nueva solución de agujero negro en tres dimensiones acoplando conformalmente un campo escalar a gravitación con constante cosmológica negativa. La estructura global de este espacio-tiempo es analizada a través de su diagrama de Penrose y sus propiedades termodinámicas son determinadas por medio de la formulación Hamiltoniana con términos de borde en la acción Euclídea.

Otras soluciones de agujero negro en tres dimensiones se obtienen acoplando un dilaton. Chan y Mann [32] han investigado soluciones para una acción de la forma

$$I = \int d^3x \sqrt{-g} \left(R - \frac{B}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - e^{-4a\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2\Lambda e^{b\phi} \right), \quad (4.1)$$

donde ϕ es el campo dilatónico, $F_{\mu\nu}$ en el tensor electromagnético, y las constantes de acoplamiento a , b y B son arbitrarias. Ajustando estas constantes, ellos encontraron una familia de agujeros negros dependientes de un parámetro con campos dilatónicos de la forma $\phi = k \ln(r/r_0)$, mostrando una amplia variedad de estructuras de horizonte. Una acción equivalente a (4.1) con $F_{\mu\nu} = 0$ y $b = 4$ ha sido estudiado por Sá et. al. [33], quienes examinan la estructura de horizontes y geodésicas para un

rango de valores de la constante de acoplamiento B .

4.2 Solución agujero negro

En tres dimensiones, la acción (3.9) es

$$I = \int d^3x \sqrt{-g} \left[\frac{R + 2l^{-2}}{2\kappa} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi - \frac{1}{16} R \Psi^2 \right] \quad (4.2)$$

donde $-l^{-2}$ es la constante cosmológica y Ψ es un campo escalar conforme (sin masa).

Las ecuaciones de campo que derivan de la acción anterior son

$$G_{\mu\nu} - l^{-2} g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} = 0, \quad (4.3)$$

y

$$\square \Psi - \frac{1}{8} R \Psi = 0, \quad (4.4)$$

donde el tensor energía-momentum es

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Psi \nabla_\beta \Psi + \frac{1}{8} [g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu + G_{\mu\nu}] \Psi^2. \quad (4.5)$$

Como se probó anteriormente, el tensor energía-momentum es de traza nula. Esto implica, tomando la traza de la ecuación (4.3), que la geometría tiene curvatura escalar constante,

$$R = -6l^{-2}. \quad (4.6)$$

Consideraremos métricas tridimensionales estáticas, de simetría circular, las que en coordenadas polares adoptan la forma

$$ds^2 = -N^2(r)F(r)dt^2 + F^{-1}(r)dr^2 + r^2d\theta^2, \quad (4.7)$$

donde $0 \leq r < \infty$ es la coordenada radial propia y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ es la coordenada angular. La solución se obtiene fácilmente fijando la escala de tiempo tal que $N(r) = 1$. Trabajando con la coordenada tiempo avanzado $dv = dt + F^{-1}(r)dr$, la ecuación $r - r$ de (4.3) impone el vínculo

$$0 = (\Psi')^2 - \frac{1}{8}(\Psi^2)'', \quad (4.8)$$

donde prima denota la derivada radial. La ecuación anterior se puede escribir en la forma

$$0 = \Psi^4(\Psi^{-2})'', \quad (4.9)$$

cuya solución general es

$$\Psi(r) = \frac{A}{\sqrt{r+B}} \quad A, B \text{ constantes.} \quad (4.10)$$

Comparando la curvatura escalar para la métrica (4.7), $R = -r^{-2}(r^2 F')'$, con (4.6), uno obtiene directamente

$$F(r) = \frac{r^2}{l^2} - a - \frac{b}{r} \quad a, b \text{ constantes.} \quad (4.11)$$

La ecuación v^v impone las siguientes relaciones entre las constantes de integración:

$$a = 3B^2 l^{-2}, \quad b = 2B^3 l^{-2}, \quad A = \sqrt{\frac{8B}{\kappa}}, \quad B \geq 0. \quad (4.12)$$

Así se tiene que

$$F(r) = \frac{1}{l^2} \left[r^2 - 3B^2 - \frac{2B^3}{r} \right] = \frac{(r+B)^2(r-2B)}{rl^2}, \quad (4.13)$$

es decir, la solución agujero negro

$$ds^2 = -l^{-2} \left[r^2 - 3B^2 - \frac{2B^3}{r} \right] dt^2 + l^2 \left[r^2 - 3B^2 - \frac{2B^3}{r} \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad (4.14)$$

junto con la configuración de campo

$$\Psi(r) = \sqrt{\frac{8B}{\kappa(r+B)}}, \quad (4.15)$$

y que, como puede ser explícitamente corroborado, resuelve la ecuación (4.4).

Se muestra fácilmente en las coordenadas tiempo avanzado que la superficie donde F se anula ($r = 2B \equiv r_+$) es nula y corresponde al horizonte de eventos de este agujero negro ¹.

¹En esas coordenadas, la métrica se lee $ds^2 = -Fdv^2 + 2dvdr + r^2 d\theta^2$. El horizonte en $r = 2B \equiv r_+$ es generado por las geodésicas $r(\lambda) = r_+$, $\frac{d\theta}{d\lambda} = 0$. Esta superficie está marginalmente atrapada ya que cualquiera de estas geodésicas satisface $\frac{dv}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = -\frac{r_+^2}{2} \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 \leq 0$, así que r es una función decreciente de v .

El comportamiento asintótico de la métrica es anti-de Sitter, esto es, $g_{00} \sim r^2 + O(r^0)$, sin términos lineales en r . Por lo tanto, como se muestra en la referencia [34], el grupo de simetría asintótico es el grupo conforme, que contiene anti-de Sitter como un subgrupo.

El tensor de Riemann es singular en el origen. Esto se muestra evaluando el escalar de Kretschmann

$$R^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{12(r^6 + 2B^6)}{l^4 r^6}. \quad (4.16)$$

Esta es la única singularidad y está oculta por el horizonte de eventos.

El campo escalar conforme Ψ es regular en todo lugar. Lo anterior podría hacer pensar que el campo escalar dota al agujero negro de un "pelo" (*hair*). Sin embargo debe tomarse en cuenta que la solución está caracterizada por una sola constante de integración (como mostraremos más adelante, esta constante está relacionada con la masa). Por lo tanto, la presencia del campo escalar no dota al agujero negro de una carga adicional independiente, *i.e.*, el campo escalar no produce un nuevo pelo. Además, la solución presentada aquí no difiere en la región asintótica del agujero BTZ.

4.3 Estructura global

En esta sección analizaremos la estructura global de la solución agujero negro obtenida. Para hacer esto definamos las coordenadas nulas tipo Kruskal

$$U = -\rho(r)e^{-at} \quad V = \rho(r)e^{at} \quad \text{con} \quad \frac{d\rho}{dr} = \frac{a\rho}{F}. \quad (4.17)$$

En estas coordenadas la métrica del agujero negro toma la forma

$$ds^2 = -\Omega^2 dU dV + r^2 d\theta^2, \quad (4.18)$$

donde

$$\rho(r) = \left(\frac{2(r - r_+)}{2r + r_+} \right)^{4/9} \exp\left(-\frac{2r_+}{3(2r + r_+)} \right), \quad a = \frac{r_+}{l^2}, \text{ y} \quad (4.19)$$

$$\Omega^2 = l^2 \frac{(2r + r_+)^3}{8r_+^2 r} \left(\frac{2(r - r_+)}{2r + r_+} \right)^{1/9} \exp\left(\frac{4}{3} \left(\frac{r_+}{2r + r_+} \right) \right). \quad (4.20)$$

Se observa que las coordenadas de Kruskal eliminan la singularidad aparente que muestra la métrica en el horizonte cuando ésta se describe en coordenadas polares (la función Ω es regular en el horizonte).

A partir de las coordenadas de Kruskal, uno puede definir otras coordenadas que de algún modo “compactifiquen” la variedad, de manera tal que un diagrama en estas coordenadas permita estudiar la estructura global y causal de la variedad. Estos diagramas se conocen como diagramas de Penrose (también llamados Carter-Penrose). Los diagramas de Penrose se obtienen de la siguiente regla de compactificación

$$U = \pm \tan\left(\frac{p-q}{2}\right), \quad V = \tan\left(\frac{p+q}{2}\right). \quad (4.21)$$

donde el signo en la primera definición es positivo para $r \geq r_+$ y negativo si $0 < r < r_+$, a fin que la coordenada t aparezca sea siempre como tipo tiempo en el diagrama de Penrose, y la transformación inversa se define sobre el rango usual para la función arcotangente, $[-\pi/2, \pi/2]$. Las relaciones (4.21) establecen que:

- la singularidad $r = 0$ es mapeada en las líneas $\cos p = \pm \frac{1-\rho^2(0)}{1+\rho^2(0)} \cos q = \pm 0.344 \cos q$,
- el horizonte es mapeado en $p = \pm q$, y
- $r = \infty$ es mapeado en las líneas $p = \pm \frac{1}{2}\pi$.

El diagrama de Penrose resultante (p vs. q) se muestra en la Fig. 1. En esta figura, las líneas gruesas representan la singularidad de curvatura en el origen, las líneas verticales (tipo tiempo) la región asintótica. La zona denotada por **I** representa el la región exterior al horizonte de eventos. La región **II** está causalmente desconectada del resto de la variedad: un observador en **II** sólo puede caer hacia la singularidad $r = 0$. Las regiones **III** y **IV** son réplicas de **I** y **II**, respectivamente, y completan la extensión maximal de la variedad.

Al comparar el diagrama de la Fig 1. con el correspondiente al agujero negro BTZ, notamos que ambos tienen la propiedad que la región asintótica, $r = \infty$, es de tipo tiempo.

La presencia de la constante cosmológica hace que el infinito espacial sea tipo tiempo, y así, como consecuencia de este hecho, la variedad no es *globalmente hiperbólica*. La ausencia de esta propiedad en una variedad, tiene importantes consecuencias al definir una teoría cuántica de campos sobre ella [24]. Discutiremos este punto con más detalle en el capítulo 6.

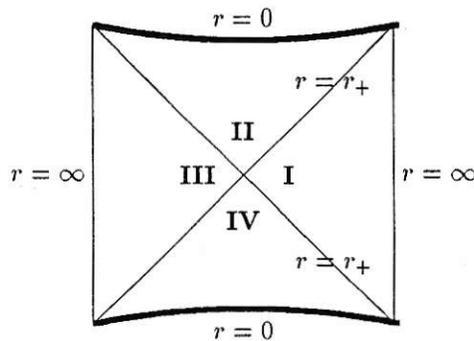


Fig. 1

Diagrama de Penrose.

4.4 Termodinámica

Con el objeto de estudiar la termodinámica de este sistema, consideraremos el minisuperespacio de geometrías de simetría circular y estáticas descritas por (4.7)

$$ds^2 = -N^2(r)F(r)dt^2 + F^{-1}(r)dr^2 + r^2d\theta^2,$$

y campos escalares que dependen sólo de la coordenada radial.

El análisis termodinámico requiere describir el sistema en términos de sus variables “macroscópicas”, es decir, su energía, temperatura, entropía, energía libre, potenciales químicos, etc. Esto requiere describir la dinámica del sistema a partir de la formulación Hamiltoniana del principio de mínima acción. La forma Hamiltoniana de la acción (4.2) está dada por

$$I = \int [\pi^{ij}\dot{g}_{ij} + P\dot{\Psi} - N\mathcal{H} - N^i\mathcal{H}_i] d^2x dt + B_H, \quad (4.22)$$

donde B_H es un término de superficie. Las ecuaciones de movimiento obtenidas de esta manera son las mismas que (4.3,4.4) después de imponer las restricciones anteriores. Así, reduciendo la acción Hamiltoniana al minisuperespacio obtenemos

$$I = -2\pi(t_2 - t_1) \int N(r)\mathcal{H}(r)dr + B_H, \quad (4.23)$$

con

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\kappa} [F'(1 - \zeta) - 2Fr(\zeta'' - \zeta^{-1}(\zeta')^2) - (2F + F'r)\zeta' - 2rl^{-2}], \quad (4.24)$$

$$\zeta \equiv \frac{\kappa}{8} \Psi^2. \quad (4.25)$$

La función partición para un ensemble termodinámico se identifica con la integral de camino con tiempo imaginario $\tau = it$ y órbitas periódicas de período $\tau_2 - \tau_1 = \hbar\beta = \frac{\hbar}{k_B T}$ en la aproximación de punto silla en torno a la continuación Euclídea de la solución clásica [35]. En esta aproximación la acción Euclídea se relaciona con las funciones termodinámicas (en unidades donde $\hbar = k_B = 1$ y $\kappa = 8\pi$) por

$$I_E = \frac{\text{energía libre}}{T} = \frac{M}{T} - S, \quad (4.26)$$

donde T , M , S denotan temperatura, energía (masa), entropía, respectivamente, y la acción Euclídea I_E está relacionada con la acción Lorentziana por

$$I_E = -iI. \quad (4.27)$$

La continuación Euclideana de la métrica es

$$ds_E^2 = N^2(r)F(r)d\tau^2 + F(r)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 \quad (4.28)$$

con $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ periódico, $r \geq r_+$, y el campo escalar no es modificado.

Al compactificar el tiempo (órbitas de período fijo), la variedad puede adquirir una singularidad cónica en r_+ . Para ver esto con algún detalle, consideremos una geometría Euclideana estática, de simetría circular, con métrica

$$ds^2 = e^{2\Phi(r)}d\tau^2 + e^{2\Xi(r)}dr^2 + r^2d\theta^2. \quad (4.29)$$

Sunpogamos que $\Phi, \Xi \in \mathbb{R}$ para $r > r_+$, y $e^{2\Phi} = 0$ para $r = r_+$. Así, $r = r_+$ es la posición de un horizonte de eventos en la continuación Lorentziana de este geometría. En la vecindad de $r = r_+$ esta métrica puede escribirse como

$$ds^2 = \left[(e^\Phi)' e^{-\Xi} \Big|_{r=r_+} \right]^2 R^2 d\tau^2 + dR^2 + R^2 d\theta^2, \quad (4.30)$$

donde $R = 0$ en $r = r_+$ ². Vemos que τ puede interpretarse como la coordenada angular en el plano (R, τ) . Una singularidad cónica puede aparecer en $R = 0$ si uno no fija el período de τ como

$$\tau_2 - \tau_1 = T^{-1} = 2\pi \left[(e^\Phi)' e^{-\Xi} \Big|_{r=r_+} \right]^{-1}. \quad (4.31)$$

Si esta condición es satisfecha, entonces la geometría Euclideana (4.29) con $r \geq r_+$ tiene topología $\mathbb{R}^2 \times S^1$ ($\mathbb{R}^2 \times S^{D-2}$ en D dimensiones) y la 1-esfera en el origen $R = 0$ es el horizonte.

En nuestro caso $e^\Phi = F^{\frac{1}{2}}$ y $e^\Xi = F^{-\frac{1}{2}}$. Luego, la condición que las geometrías permitidas en la variación no contengan singularidades cónicas en el horizonte (4.31), requiere que

$$(\tau_2 - \tau_1) F' \Big|_{r=r_+} = 4\pi, \quad (4.32)$$

(notar que $N(r) = 1$) lo cual directamente proporciona la temperatura:

$$T = \frac{9r_+}{16\pi l^2}. \quad (4.33)$$

Esta condición de regularidad, es válida sólo si r_+ es un cero simple de g_{00} . En el caso de los agujeros extremos, la multiplicidad del cero en r_+ es dos o mayor. Así los agujeros extremos son topológicamente distintos a los ya presentados, y por lo tanto, tienen propiedades termodinámicas diferentes, como por ejemplo, entropía nula [36].

Retomemos la evaluación de la acción Euclídea sobre la solución clásica. La solución clásica es estática y satisface el vínculo $\mathcal{H} = 0$ y por lo tanto la acción en la solución clásica está dada por un término de borde, B_E . Este término de borde debe ser tal que la geometría (4.28) sea un extremo *verdadero* entre la clase de métricas que satisfacen las condiciones de borde apropiadas [37, 38].

²De la definición $dR \equiv e^\Xi dr$ se deduce que $R \simeq e^\Xi \Big|_{r_+} (r - r_+)$ si $r \simeq r_+$.

En el infinito, es natural exigir que los campos tiendan a la solución clásica. Así, las variaciones de los campos quedan

$$\delta N = 0, \quad (4.34)$$

$$\delta F \rightarrow -\delta \frac{3r_+^2}{4l^2}, \quad (4.35)$$

$$\delta \zeta \rightarrow \frac{\delta r_+}{2r}, \quad (4.36)$$

En el horizonte, imponemos la condición de regularidad (4.32)

$$\beta F' |_{r=r_+} = 4\pi. \quad (4.37)$$

Por otra parte, la definición de horizonte como $F(r_+) = 0$, hace necesario exigir

$$(\delta F)_{r_+} + F' |_{r=r_+} \delta r_+ = 0, \quad (4.38)$$

y, $(\delta N)_{r_+} = 0$.

La variación del campo escalar en el horizonte se obtiene derivando con respecto a r_+ pero manteniendo la forma funcional de la solución clásica, $\zeta = r_+/(2r + r_+)$, lo que implica

$$\delta \zeta = \frac{2}{9r_+} \delta r_+. \quad (4.39)$$

Así, la variación de la acción Euclídea es

$$\begin{aligned} \delta I_E = & \frac{\beta}{8} [(1 - \zeta - r\zeta')\delta F + (F'r + 4Fr\zeta^{-1}\zeta')\delta \zeta - 2Fr\delta\zeta']_{r_+}^{\infty} + \delta B_E \\ & + \text{términos que se anulan } on \text{ shell.} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Por conveniencia escribimos $B_E = B_E(\infty) + B_E(r_+)$. La contribución del infinito es

$$\delta B_E(\infty) = \beta \delta \left(\frac{3r_+^2}{32l^2} \right). \quad (4.41)$$

Uno puede notar aquí que el campo escalar no contribuye al término de superficie en el infinito. Esta es otra indicación de la inexistencia de cargas asociadas al campo escalar conforme.

En el horizonte tenemos

$$\delta B_E(r_+) = \beta \left[\frac{1}{9} \delta F + \frac{1}{36} F' \delta r_+ \right], \quad (4.42)$$

que, en vista de (4.37) y (4.38), se puede escribir como

$$\delta B_E(r_+) = -\frac{\pi}{3} \delta r_+. \quad (4.43)$$

Combinando (4.41) y (4.43), se encuentra que la acción Euclídea es

$$I_E = \beta \frac{3r_+^2}{32l^2} - \frac{\pi}{3} r_+ + B_0, \quad (4.44)$$

donde B_0 es una constante arbitraria independiente de los campos. Imponiendo que $I_E = 0$ para $r_+ = 0$, uno encuentra que $B_0 = 0$. Si comparamos la expresión anterior para I_E con (4.26) concluimos que la energía y la entropía son

$$M = \frac{3r_+^2}{32l^2}, \quad (4.45)$$

$$S = \frac{\pi r_+}{3}, \quad (4.46)$$

respectivamente. Con estas expresiones, se puede verificar que se satisface la primera ley de la termodinámica

$$dM = T dS. \quad (4.47)$$

4.5 Entropía y la ley del área

Notamos que la entropía difiere por un factor $\frac{2}{3}$ de aquel proporcionado por la “ley del área” $S = \frac{A}{4} = \frac{\pi r_+}{2}$. En esta sección se estudia el origen de esta desviación.

Primero determinemos la entropía de agujeros negros que provienen de una teoría gravitacional con acoplamiento minimal y potencial de auto-interacción definida por la acción

$$I_{\text{GAMA}} = \int d^3x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \psi \nabla_\nu \psi - V(\psi) \right], \quad (4.48)$$

donde el potencial $V(\psi)$ no contiene derivadas de ψ . Considerando el minisuperespacio de la sección anterior, obtenemos que la acción Euclídea es

$$I_E = 2\pi(\tau_2 - \tau_1) \int N(r) \mathcal{H}(r) dr + B_E, \quad (4.49)$$

con

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\kappa}[F' + \kappa Fr(\psi')^2 + 2\kappa rV(\psi)]. \quad (4.50)$$

La condición de diferenciabilidad de la acción (4.49), es decir, que la solución sea un extremo genuino, requiere que el término de borde (que elimina los términos de borde provenientes de integraciones por partes del término de volumen) tenga la variación

$$\delta B_E = -\frac{\pi(\tau_2 - \tau_1)}{\kappa}[N\delta F + NF'r\psi'\delta\psi]|_{r_+}^{\infty}. \quad (4.51)$$

Como se mencionó en la sección anterior, la entropía proviene del término de borde asociado al horizonte, definido por $F(r_+) = 0$. Así, la variación de la entropía queda

$$\delta S = -\frac{\pi(\tau_2 - \tau_1)}{\kappa}N\delta F|_{r_+}. \quad (4.52)$$

Ahora utilizando la condición de regularidad $N(\tau_2 - \tau_1)F'|_{r_+} = 4\pi$, y la variación que implica la definición de horizonte $(\delta F + F'\delta r_+)|_{r_+} = 0$, obtenemos

$$\delta S = \frac{4\pi^2}{\kappa}\delta r_+. \quad (4.53)$$

Utilizando unidades en que $\kappa = 8\pi$, e imponiendo que la entropía se anule cuando no hay horizonte se obtiene ³

$$S = \frac{\pi r_+}{2} = \frac{\text{Area}}{4}. \quad (4.54)$$

Como vemos, la ley del área no es afectada por el término cinético ni por un potencial de auto-interacción, siempre que este no induzca términos de borde. En general, esto ocurre cuando el potencial contiene derivadas del campo o cuando contiene términos con derivadas de la métrica. Esto último es lo que sucede con el acoplamiento conforme: el escalar de curvatura induce términos de borde como se aprecia en (4.42), los cuales modifican el valor de la entropía.

Se estableció en la sección 3.3 que existe un mapeo entre las soluciones de una teoría gravitacional con acoplamiento escalar conforme y una con acoplamiento minimal con potencial de auto-interacción. Aprovechemos esta propiedad para mostrar nuevamente que existe una desviación dada por un factor 2/3 en el valor de la entropía.

³Si $\hbar = 1$ y $\kappa = 8\pi$ la longitud de Planck es igual a 1.

De las ecuaciones (3.13) y (4.15), se obtiene que el factor conforme es

$$\Omega = \frac{2r}{2r + r_+}. \quad (4.55)$$

Así, el mapeo conforme entrega la solución

$$d\hat{s}^2 = -\frac{r(r - r_+)}{l^2} dt^2 + \frac{16l^2 r^3}{(2r + r_+)^4 (r - r_+)} dr^2 + \left(\frac{2r}{2r + r_+}\right)^2 d\theta^2, \quad (4.56)$$

que es un agujero negro con horizonte en $r = r_+$ y longitud (“área”)

$$A^{\text{GAMA}} = \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{2r^2}{2r + r_+}\right)_{r_+} = \frac{2}{3} 2\pi r_+. \quad (4.57)$$

Y como mostramos que para una teoría GAMA la entropía sigue la ley usual, se deduce que

$$S = \frac{2}{3} \frac{A^{\text{GAC}}}{4}, \quad (4.58)$$

donde $A^{\text{GAC}} = 2\pi r_+$ es la longitud del horizonte del agujero negro con campo escalar conforme presentado en este capítulo.

4.6 Discusión

La inclusión de la constante cosmológica es absolutamente necesaria para obtener la solución agujero negro, como lo es también para la solución BTZ. A pesar del hecho que el acoplamiento de materia en (4.2) tiene la misma forma que el del modelo BMBB, discutido en la sección 3.4, los agujeros negros resultantes son completamente diferentes: La solución BMBB es asintóticamente plana y es un agujero Reissner-Nordström extremo, mientras que la solución presentada aquí es asintóticamente anti-de Sitter y no extrema. Además, se puede ver rápidamente que el *Ansatz* (4.7) (con $N = 1$), extendido a 3+1 dimensiones, no arroja una generalización de la solución BMBB con constante cosmológica en cuatro dimensiones (se obtiene la solución llamada Schwarzschild-anti-de Sitter).

La cuestión de si esta solución representa un agujero negro dotado de pelo depende de la definición de pelo que se use. En un sentido amplio cualquier campo

de materia sostenido por un agujero negro podría ser considerado como alguna clase de pelo, como en el presentado aquí. Sin embargo, en un sentido más estricto, es necesario que el campo de materia posea una carga conservada independiente, lo cual no ocurre en nuestro caso, pues la única constante de integración que aparece en la solución $B = \frac{1}{2}r_+$ está relacionada con la masa por $M = 3B^2l^{-2}/8$.

Otro punto de interés consiste en la búsqueda de soluciones dependientes del tiempo. La existencia de estas soluciones mostraría que un agujero negro puede ser considerado como el resultado de campos de materia colapsados [39, 40, 41, 42, 43]. Sin embargo, se puede comprobar directamente que el sistema considerado aquí, (campo de materia escalar conforme sin masa acoplado a gravedad con constante cosmológica), suponiendo una geometría circularmente simétrica, dependiente del tiempo, (*i.e.*, $F = F(r,t)$ y $\Psi = \Psi(r,t)$), da lugar a la misma solución *estática* (teorema de Birkhoff).

Un problema relacionado es si la solución estática mostrada aquí es estable bajo perturbaciones lineales. Este problema puede ser discutido para el caso de perturbaciones circularmente simétricas y será abordado en el Capítulo 5.

Notamos que la entropía difiere por un factor $\frac{2}{3}$ de aquel proporcionado por la "ley del área". Mostramos en la sección anterior que el acoplamiento del campo con la curvatura es responsable de esta diferencia. Desviaciones de la ley del área han sido encontradas también en otros sistemas de campos de materia acoplados a gravedad [44]. En [45] se muestra que estas desviaciones tienen lugar en agujeros negros *dirty black holes* que provienen de lagrangianos de gravitación con términos no lineales en la curvatura, o que interactúan con cierta clase de campos de materia clásicos, o que están infectados con alguna versión de pelo cuántico, y en [46] en agujeros negros acoplados a cuerdas.

Capítulo 5

Inestabilidad del agujero negro con campo conforme

5.1 Introducción

En este capítulo se estudia el comportamiento del sistema definido por la acción (4.2), bajo perturbaciones en torno a la solución de agujero negro, dotado de campo escalar conforme, presentada en el capítulo anterior.

El procedimiento a seguir se puede resumir en el siguiente itinerario:

- (i) Se definen la métrica perturbada $g_{\mu\nu}$ y el campo perturbado Ψ como

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \Psi = \bar{\Psi} + \psi, \quad (5.1)$$

donde $\bar{g}_{\mu\nu}$ y $\bar{\Psi}$ son solución de las ecuaciones (4.3) y (4.4).

- (ii) Se linealizan las ecuaciones de Einstein para las perturbaciones $h_{\mu\nu}$ y ψ .
- (iii) Utilizando las ecuaciones linealizadas de Einstein, se escribe la ecuación para el campo escalar sólo en términos de ψ .
- (iv) La dependencia temporal de ψ se separa de la dependencia espacial definiendo $\psi(x, t) \equiv \chi(x) \exp(i\omega t)$.

- (v) Si las perturbaciones que son regulares en todo lugar y normalizables, existen sólo para $\text{Im}(\omega) \geq 0$, el sistema es *estable* frente a estas perturbaciones. Si existe alguna perturbación normalizable y regular para $\text{Im}(\omega) < 0$ el sistema es *inestable*

Siguiendo este itinerario, se muestra a continuación que el agujero negro tridimensional dotado de campo escalar conforme, es inestable frente a perturbaciones radiales, *i.e.*, $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(t, r)$ y $\psi = \psi(t, r)$.

5.2 Ecuaciones linealizadas

Para el estudio de la estabilidad del agujero negro con campo escalar conforme, consideraremos perturbaciones radiales, es decir, perturbaciones circularmente simétricas, definidas por

$$ds^2 = -e^{2U(t,r)}F(t,r)dt^2 + F^{-1}(t,r)dr^2 + r^2d\theta^2, \quad (5.2)$$

donde

$$F(t,r) = F_0(r) + f(t,r), \quad \text{con} \quad F_0(r) = \frac{(r+B)^2(r-2B)}{r^2}, \quad (5.3)$$

y

$$\Psi(t,r) = \Psi_0(r) + \psi(t,r), \quad \text{con} \quad \Psi_0(r) = \sqrt{\frac{8B}{(r+B)}}, \quad (5.4)$$

donde se la constante gravitacional κ que aparece en la ecuación (4.3) ha sido absorbida en la definición del campo escalar.

La métrica perturbada (5.2), representa la métrica tridimensional más general compatible con la simetría circular. La diferencia más importante de esta métrica respecto al *Ansatz* (4.7) es la promoción que se hace a la función N : $N = 1 \rightarrow N = \exp U(t, r)$. Como se señaló en la sección (4.6), $N = 1$ implica eliminar la dependencia temporal.

Al efectuar la aproximación lineal de las ecuaciones (4.3) respecto de los

campos f , U y ψ se obtienen las siguientes ecuaciones ¹

$$\begin{aligned}
 {}^t: 0 &= \frac{B}{2r(r+B)^2}f + \frac{1}{2(r+B)}f' - \frac{BF_0}{r(r+B)}U' + A_\psi\psi \\
 &\quad + \frac{2B^2(r+B)^2}{l^2r^3\Psi_0}\psi' - \frac{l^2\Psi_0}{4(r^2 - Br - 2B^2)}\ddot{\psi} \\
 {}^r: 0 &= \frac{B}{2r(r+B)^2}f + \frac{1}{2(r+B)}f' + \frac{F_0}{r}U' + B_\psi\psi \\
 &\quad + \frac{\Psi_0(r+B)^2(3r^2 - 5Br + B^2)}{4l^2r^3}\psi' + \frac{(r+B)F_0\Psi_0}{4r}\psi'' \\
 {}^\theta: 0 &= -\frac{B(r+2B)}{2r^2(r+B)^2}f + \frac{1}{2F_0^2}\ddot{f} + \frac{3(r^3 + B^3)}{l^2r^2}U' + F_0U'' + C_\psi\psi \\
 &\quad + \frac{BF_0\Psi_0}{4r^2}\psi' \\
 {}^r: 0 &= -\frac{(r+2B)}{2r(r+B)}\dot{f} + \frac{\psi_0(r+B)^2(r^2 - 4Br - 2B^2)}{l^2r^3}\dot{\psi} + \frac{F_0\Psi_0(r+B)}{4l^2r^2}\dot{\psi}',
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

con

$$A_\psi = \frac{r+B}{l^2r^3} \left[\frac{(2r-B)B}{\Psi_0} - \frac{r^3+B^3}{4r} \right], \tag{5.6}$$

$$B_\psi = \frac{r+B}{l^2r^3} \left[\frac{(7r^2 - 4Br - 2B^2)B}{2(r+B)\Psi_0} - \frac{r^3+B^3}{4r} \right], \tag{5.7}$$

$$C_\psi = \frac{r+B}{l^2r^3} \left[-\frac{(2r^2 + Br + 2B^2)B}{(r+B)\Psi_0} - \frac{r^3 - 2B^3}{4r} \right]. \tag{5.8}$$

El resto de las ecuaciones son identidades, salvo t que se puede escribir como ${}^t = -F_0^{-2}{}^r$.

La ecuación (4.4) para el campo escalar queda

$$-\frac{1}{F_0}\ddot{\psi} + \frac{1}{r}[rF_0\psi']' + \frac{3}{4}l^{-2}\psi + \frac{1}{r}[rf\Psi_0]' + F_0\Psi_0U' = 0. \tag{5.9}$$

Para dejar la ecuación anterior sólo en términos de ψ debemos reemplazar f y U' como funciones de ψ y sus derivadas. La función U' se puede obtener de la diferencia de las ecuaciones t y r ,

$$U' = -\frac{\Psi_0}{4(r+2B)} \left[\frac{3}{4}\psi + 3(r+B)\psi' + (r+B)^2(\psi'' + \frac{1}{F_0^2}\ddot{\psi}) \right]. \tag{5.10}$$

¹Los cálculos algebraicos fueron revisados con el programa MATHEMATICA. Wolfram Research Inc.

La ecuación $\ddot{\zeta}$ se puede integrar trivialmente respecto al tiempo. La integración introduce una función arbitraria de r , que se hace igual a cero al imponer que la perturbación f se anule para $\psi = 0$. Esto lleva a que f verifique la siguiente expresión

$$f = \frac{(r+B)^2 \Psi_0}{4l^2 r^2 (r+2B)} \left[(r+B)(r^2 - 4Br - 2B^2)\psi + 2l^2 r^2 F_0 \psi' \right]. \quad (5.11)$$

Reemplazando (5.10) y (5.11) en la ecuación (5.9) se desacopla el sistema de ecuaciones diferenciales obteniéndose la siguiente ecuación para la perturbación del campo escalar

$$\begin{aligned} -\frac{1}{F_0} \ddot{\psi} + F_0 \psi'' + \frac{(r+B)(3r^3 + 4Br^2 - 10B^2r + 4B^3)}{l^2 r^2 (r+2B)} \psi' \\ + \frac{3r^4 + 8Br^3 - 12B^2r^2 - 16B^4}{4l^2 r^3 (r+2B)} \psi = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Escribiendo ahora

$$\psi(t, r) = \chi(r) \exp(\sigma t), \quad \sigma \text{ real}, \quad (5.13)$$

se buscarán soluciones en que χ tenga el carácter de una perturbación física. Es decir, que χ sea una función continua y normalizable. Entonces, para $\sigma > 0$ el sistema es inestable (debiendo también estudiar las perturbaciones de la métrica). Cambiando la coordenada radial por la variable $x \equiv (r - 2B)/B = 2(r - r_+)/r_+$, (5.12) se transforma en una ecuación diferencial ordinaria para χ

$$\chi'' + P(x)\chi' + (Q(x) - \alpha^2 R(x))\chi = 0, \quad (5.14)$$

con

$$P(x) = \frac{(3x+4)(x^2+6x+6)}{x(x+2)(x+3)(x+4)}, \quad (5.15)$$

$$Q(x) = \frac{3x^4 + 32x^3 + 108x^2 + 144x + 48}{4x(x+2)^2(x+3)^2(x+4)}, \quad (5.16)$$

$$R(x) = \left[\frac{(x+2)}{x(x+3)^2} \right]^2, \quad \alpha = \frac{2l^2}{r_+} \sigma. \quad (5.17)$$

La ecuación anterior se puede llevar a la forma canónica de Sturm-Liouville,

$$(p(x)\chi')' + p(x)(Q(x) - \alpha^2 R(x))\chi = 0, \quad (5.18)$$

donde el factor integrante es

$$p(x) = \exp \left\{ \int P dx \right\} = \frac{x(x+3)^5}{(x+2)(x+4)^2}. \quad (5.19)$$

Finalmente, podemos escribir esta ecuación como una de Schrödinger, con el cambio de variables propuesto por J. Liouville en 1837:

$$\eta = (p^2 R)^{1/4} \chi, \quad z = \int R^{1/2}(x) dx. \quad (5.20)$$

Con esto, la ecuación diferencial en estas variables toma el familiar aspecto de una ecuación de Schrödinger para un potencial unidimensional

$$\left\{ -\frac{d^2}{dz^2} + V(z) \right\} \eta = -\alpha^2 \eta, \quad (5.21)$$

donde el potencial $V(z)$ es definido por

$$V(z) = (p^2 R)^{-1/4} \frac{d^2}{dz^2} (p^2 R)^{1/4} - \frac{Q}{R} \quad (5.22)$$

Reemplazando las expresiones para p , R y Q en (5.20) y (5.22) se obtienen la relaciones entre η y χ , y entre z y x

$$\eta(z(x)) = \frac{(x+3)^{3/2}}{x+4} \chi(x), \quad (5.23)$$

$$z = \frac{1}{3(x+3)} - \frac{2}{9} \log \left| \frac{x}{x+3} \right| \quad (5.24)$$

y el siguiente potencial

$$V(z(x)) = \frac{x(x+3)^2}{(x+2)^4(x+4)^2} (5x^3 + 36x^2 + 96x + 96). \quad (5.25)$$

5.3 Análisis de la ecuación para la perturbación del campo

En esta sección se estudian las propiedades de la ecuación (5.21) con el potencial mostrado en (5.25) en la región exterior al horizonte de eventos, esto es, en la semi-recta real $x \geq 0$.

Lo primero que se puede observar, es que la transformación de Liouville es adecuada ya que no introduce singularidades en la definición de η , como se aprecia en (5.23). Además, el cambio de variable (5.24) mapea biunívocamente la semi-recta real $x \geq 0$ en otra $z \geq 0$, donde el infinito espacial se mapea en $z = 0$ y el horizonte ($x = 0$) en $z = \infty$.

En la región exterior al horizonte, $z \geq 0$, el potencial $V(z)$ es una función positiva, cóncava, monotóna decreciente, que tiene su valor máximo en $z = 0$ y corresponde a $V(z = 0) = 5$ y tiende a cero, para $z \sim \infty$.

Antes de determinar las condiciones de borde para la ecuación diferencial (5.21), se debe notar que, aunque esta ecuación diferencial se pueda entender como un problema de Schrödinger unidimensional con potencial definido positivo y autovalor *negativo*, es posible la existencia de soluciones acotadas. La existencia de tales soluciones está relacionada con el hecho de que el intervalo de definición sea sólo la mitad del eje real. En el caso que z cubriera todo el eje real, como es el caso usual en problemas cuánticos unidimensionales, no existen soluciones acotadas (necesariamente en alguno de los extremos del eje real la solución crecerá exponencialmente).

A fin de estudiar el comportamiento de la solución en la vecindad de $x = 0$, consideremos la ecuación (5.14). Esta ecuación es de clase Fuchsiana, ya que sus dos singularidades, $x = 0$ y $x = \infty$, son puntos singulares regulares. La ecuación indicial que se obtiene al aplicar el método de Frobenius, $s^2 - 4\alpha^2/81 = 0$, implica que las soluciones linealmente independientes, en la vecindad de $x = 0$, son de la forma

$$\chi_{\pm}(x) = x^{\pm \frac{2\alpha}{9}} u_{\pm}(x), \quad (5.26)$$

donde u_{\pm} son funciones analíticas. Se observa que la solución regular es χ_+ y tiene valor nulo en $x = 0$ (suponiendo α positivo). Esta condición implica que η debe anularse en $z = \infty$

Para estudiar el comportamiento en $x = \infty$ se realiza el cambio de variable $x = 1/w$, y la ecuación (5.14) toma la forma asintótica

$$\frac{d^2\chi}{dw^2} - \frac{1}{w} \frac{d\chi}{dw} + \frac{3}{4w^2}\chi = 0. \quad (5.27)$$

La ecuación indicial asociada es $s^2 - 2s + 3/4 = 0$, cuyas raíces son $1/2$ y $3/2$.

Entonces el comportamiento asintótico de χ viene dado por

$$\chi(x) \sim x^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.28)$$

Se observa que la perturbación χ tiene el mismo comportamiento asintótico que la solución original Ψ_0 . Reemplazando (5.28) en (5.23), se obtiene que

$$\eta(z=0) = \eta_0 = \text{constante}. \quad (5.29)$$

Es fácil darse cuenta que no es posible tener soluciones acotadas si $\eta_0 = 0$. Para ver esto, supongamos $\eta_0 = 0$ y $\eta'(0) > 0$. Se observa de (5.21), que $\eta'(z)$ será una función creciente, y así η divergirá. Si $\eta'(0) < 0$, η divergirá a valores negativos. Análogamente, a partir del hecho que (5.21) implica que η y su segunda derivada tienen el mismo signo, se puede mostrar que las soluciones acotadas no pueden tener ceros.

En resumen, si probamos que (5.21), con las condiciones de borde $\eta(0) \neq 0$ y $\eta(\infty) = 0$, admite soluciones normalizables, entonces el sistema es inestable (salvo que las perturbaciones a la métrica impongan restricciones adicionales).

Para probar el punto anterior, definamos la función $G(z)$ como

$$G(z) = V(z) + \alpha^2, \quad (5.30)$$

escribamos (5.21) de la forma

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} - G(z)\eta = 0, \quad (5.31)$$

y usemos el siguiente teorema [48]

Teorema *Sea $G(z)$ positiva y continua en $[0, \infty)$ con primera y segunda derivadas continuas. Sea*

$$H(z) = \left(\frac{5}{16} [G'(z)]^2 - \frac{1}{4} G(z) G''(z) \right) [G(z)]^{-5/2}. \quad (5.32)$$

Si

$$H(z) \in L(0, \infty), \quad (5.33)$$

entonces existe una solución para (5.31) de la forma

$$\eta(z) = [G(z)]^{-1/4} \exp\left(-\int_0^z [G(s)]^{1/2} ds\right) [1 + Y(z)], \quad (5.34)$$

donde

$$|Y(z)| \leq \exp\left(-\int_t^\infty |H(s)| ds\right) - 1. \quad (5.35)$$

Después de un laborioso, pero directo cálculo, se puede verificar que las hipótesis del teorema se cumplen (para todo $\alpha^2 > 0$), y así hemos encontrado perturbaciones de la forma (5.13), sin restricciones de signo para σ .

Consideremos ahora las perturbaciones de la métrica. De (5.11) se deduce que

$$f(r_+) = \left(\frac{3}{2}\right)^{7/2} \frac{r_+^2}{4l^2} \psi(r_+), \quad (5.36)$$

por lo tanto, f se anula en el horizonte. El comportamiento asintótico de f es

$$f \sim x^{3/2}[\psi + 2x\psi'], \quad (x \rightsquigarrow \infty). \quad (5.37)$$

y dado que $\psi \sim (x^{-1/2} + \text{cte.} x^{-3/2}) \exp(\sigma t)$, entonces

$$f \sim [\text{cte.} + O(x^{-1})] \exp(\sigma t). \quad (5.38)$$

Vemos que la parte espacial de la perturbación f actúa modificando los coeficientes asociados a r^0 y r^{-1} de F_0 , esto es, que básicamente modifica la posición del horizonte (o la masa). Esto es físicamente razonable. Sólo nos resta analizar la perturbación U . A partir de (5.10), se concluye que

$$U' \sim \frac{\text{cte.}}{r^3}, \quad \text{es decir, } U \sim \frac{\text{cte.}}{r^2}. \quad (5.39)$$

Entonces, el efecto asintótico de U es modificar la masa de la solución. Cerca del horizonte, tenemos

$$U' = x^{\frac{2\alpha}{9}-1} + \left(\frac{4\alpha}{9} - 1\right) x^{\frac{2}{9}(\alpha-9)}. \quad (5.40)$$

Luego, para $\alpha > 9$, o equivalentemente, $\sigma \geq 9r_+/2l^2$, $U' = 0$ en el horizonte.

De esta manera se ha probado la inestabilidad del agujero negro dotado de un campo escalar conforme.

Capítulo 6

Reacción de fondo en el agujero negro BTZ

En este capítulo se estudian los efectos sobre la geometría y propiedades termodinámicas producidos por la radiación de Hawking en el agujero negro BTZ. El análisis de estos efectos es el problema de la reacción de la geometría de fondo (*back-reaction*). El procedimiento usual para atacar este problema considera la presencia de los campos de radiación a través del valor de expectación del tensor energía-momentum asociado, el cual se introduce como fuente de las ecuaciones de Einstein. La solución de estas ecuaciones *semiclásicas* se considera una mejor descripción de la geometría cuando la radiación de Hawking es tomada en cuenta, como asimismo el análisis termodinámico que se desprende de esta nueva métrica.

A continuación, a manera de introducción, se revisa la teoría cuántica de un campo escalar conforme en el fondo del agujero negro BTZ.

6.1 Teoría cuántica de campos en el agujero negro BTZ

Aunque la solución BTZ es un modelo simple y útil para la física clásica de agujeros negros, su mejor veta aparece en la teoría cuántica. Así, este agujero

no es una excepción dentro de la gravitación en 2+1 dimensiones, como un modelo instructivo para la gravedad cuántica en 3+1 dimensiones [12].

Tal como en 3+1 dimensiones, consideramos como una aproximación a la formulación cuántica completa, la teoría cuántica de campos en un fondo de agujero negro *clásico*. Para un campo libre, el punto de partida de esta teoría es una adecuada función de dos puntos $G(x, x') = \langle 0 | \Psi(x) \Psi(x') | 0 \rangle$, a partir de la cual se deriven cantidades como el valor de expectación del tensor energía-momentum $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. La propiedad clave en 2+1 dimensiones, proviene de la representación del agujero BTZ como un espacio cociente descrita en el capítulo 2, es decir, su representación como una región del espacio cubrimiento universal del espacio anti-de Sitter (CadS) con identificaciones apropiadas. Esta construcción permite escribir la función de dos puntos para el agujero negro en términos de la correspondiente al espacio CadS por medio del método de imágenes. Específicamente, si $G_{\text{CadS}}(x, x')$ es la función de dos puntos en CadS, la correspondiente al agujero negro es

$$G_{\text{BTZ}}(x, x') = \sum_n e^{-in\delta} G_{\text{CadS}}(x, H^n x'), \quad (6.1)$$

donde Hx' denota la acción del elemento del grupo (2.12) sobre x' . La fase δ , que es nula para un campo con condiciones de borde periódicas, $\Psi(\theta) = \Psi(\theta + 2\pi)$ (*untwisted field*), y que toma el valor π en el caso de un campo con condiciones de borde antiperiódicas, $\Psi(\theta) = -\Psi(\theta + 2\pi)$ (*twisted field*), puede ser en principio arbitraria, correspondiendo a la condición de borde $\Psi(Hx) = e^{-i\delta} \Psi(x)$. Se observa así que, utilizando las notables propiedades geométricas del agujero BTZ, podemos reducir el problema al comparativamente más simple de la teoría cuántica en el espacio CadS.

Aunque la teoría cuántica de campos es simple sobre el espacio adS, no por eso es trivial. La dificultad principal viene del hecho que, tanto el espacio adS como su cubrimiento universal CadS, no son *globalmente hiperbólicos*. Es evidente del diagrama de Penrose en la figura 2 que el infinito espacial es tipo tiempo y la información puede entrar o salir en el infinito espacial en un tiempo coordenado finito. Por consiguiente, se deben imponer condiciones de borde en el infinito para formular una teoría de campos razonable.

Este problema fue analizado cuidadosamente en 3+1 dimensiones por Avis, Isham y Storey [49], quienes mostraron que existen tres condiciones de borde razonables para el campo escalar en el infinito espacial:

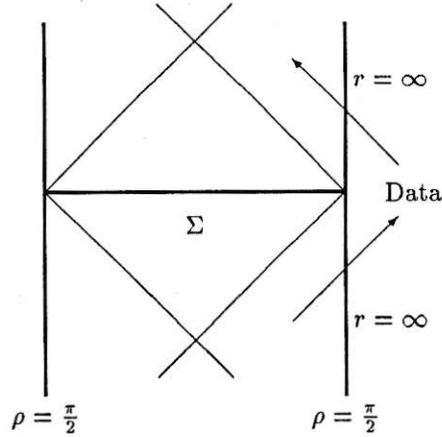


Figura 2. Diagrama de Penrose de CadS. La información puede entrar o salir a través del infinito espacial y así Σ no es una superficie de Cauchy, a menos que se impongan condiciones en $r = \infty$.

las condiciones de Dirichlet(D), Neumann(N), y “transparentes”(T). Estos autores utilizaron el hecho que CadS puede ser mapeado conformalmente a la mitad del Universo Estático de Einstein (ESU) con el infinito mapeado al ecuador [24]. Por lo tanto, las soluciones de las ecuaciones de movimiento en un espacio pueden mapearse en el otro, y similarmente, las condiciones de borde en el infinito corresponden a condiciones sobre los campos en el ecuador. La condición de borde transparente, corresponde simplemente a cuantizar el campo usando modos que son regulares sobre todo el ESU (ver Apéndice). Las mismas condiciones de borde son aplicables en 2+1 dimensiones [50]. En particular, para un campo escalar conforme sin masa, descrito por la acción

$$I = - \int d^3x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi + \frac{1}{16} R \Psi^2 \right], \quad (6.2)$$

las funciones de Green son

$$G_{\text{CadS}}^D = \frac{1}{4\pi} \left[\sigma^{-1/2} - (\sigma + 4l^2)^{-1/2} \right], \quad (6.3)$$

$$G_{\text{CadS}}^{\text{N}} = \frac{1}{4\pi} \left[\sigma^{-1/2} + (\sigma + 4l^2)^{-1/2} \right], \quad (6.4)$$

$$G_{\text{CadS}}^{\text{T}} = \frac{1}{4\pi} \sigma^{-1/2}. \quad (6.5)$$

Aquí $\sigma(x, x')$ es el cuadrado de la distancia geodésica entre x y x' en el espacio de incrustación de adS, $\mathbb{R}^{(2,2)}$. Es posible definir también una función de Green más general con condiciones de borde “mixtas”,

$$G_{\text{CadS}}^{\alpha} = \frac{1}{4\pi} \left[\sigma^{-1/2} - \alpha(\sigma + 4l^2)^{-1/2} \right], \quad (6.6)$$

la cual incluye los casos anteriores [51]. Con esto, se puede calcular las funciones de Green para el agujero BTZ, haciendo la suma (6.1) ([50, 51, 52, 53]).

El tensor energía-momentum para el campo escalar conforme sin masa (4.5) se puede escribir

$$T_{\mu\nu} = \frac{3}{4} \nabla_{\mu} \Psi \nabla_{\nu} \Psi - \frac{1}{4} \Psi \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \Psi - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \left[(\nabla \Psi)^2 + \frac{1}{4l^2} \Psi^2 \right]. \quad (6.7)$$

donde hemos usado que $G_{\mu\nu} = l^{-2} g_{\mu\nu}$ para la solución BTZ, y la ecuación (4.4) para Ψ . El valor de expectación $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ se obtiene diferenciando la función de dos puntos y tomando límite de coincidencia [55]. Este método *point splitting* aplicado a (6.7) entrega

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \lim_{x \rightarrow x'} \frac{1}{4} \left[3 \nabla_{\mu}^x \nabla_{\nu}^{x'} - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha}^x \nabla_{\beta}^{x'} - \nabla_{\mu}^x \nabla_{\nu}^x - \frac{1}{4l^2} g_{\mu\nu} \right] G(x, x'). \quad (6.8)$$

Sólo el término $n = 0$ en la suma (6.1) diverge cuando $x \rightarrow x'$, y el tensor energía-momentum puede ser renormalizado substrayendo este término. Los valores de expectación se calcularon en [50]; para $J = 0$, condiciones de borde Neumann y Dirichlet; en [51] para $J = 0$, condiciones de borde mixtas; y en [52] para J arbitrario, condiciones de borde transparentes.

6.2 Determinación de la reacción de fondo

En esta sección buscaremos soluciones de la ecuación semiclásica

$$G_{\mu\nu} - l^{-2} g_{\mu\nu} = \kappa \langle T_{\mu\nu} \rangle, \quad (6.9)$$

que den cuenta de la corrección de primer orden en \hbar a la métrica BTZ en presencia de un campo de radiación escalar conforme.

Calculando (6.8) con las condiciones de borde transparentes, se obtiene para un campo escalar conforme (*untwisted*) [51]

$$\kappa \langle T_{\mu}^{\nu} \rangle = \frac{l_P}{r^3} F(M) \text{diag}(1, 1, -2), \quad \text{con} \quad (6.10)$$

$$F(M) = \frac{M^{3/2}}{2\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh 2\pi n \sqrt{M} + 3}{(\cosh 2\pi n \sqrt{M} - 1)^{3/2}}, \quad (6.11)$$

donde el lado derecho está evaluado en unidades en que $\kappa = \pi$, M es la masa del agujero sin rotación, y $l_P = \hbar/8$ es la longitud de Planck en tres dimensiones¹. Puesto que la serie $F(M)$ converge exponencialmente para todo $M > 0$, el tensor energía-momentum es finito excepto para $r \sim \infty$. Esta divergencia proviene del hecho que $r = 0$ es un punto fijo bajo la acción de H definido en (2.12)², y el denominador de la función de Green se anula. Para $M \gg 1$, el primer término de la serie es el dominante y $F(M) \sim e^{-\pi\sqrt{M}}$, es decir, $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ se anula exponencialmente para M grande. Si M es pequeño, $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ diverge. Se observa que $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ es conservado y tiene traza nula (no existe anomalía de traza en dimensiones impares).

Consideremos la métrica general con simetría circular y estática (2.5)

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Las ecuaciones de Einstein semiclásicas (6.9) son

$$-\frac{B'}{2rB^2} - l^{-2} = \frac{l_P F(M)}{r^3}, \quad (6.12)$$

$$\frac{A'}{2rAB} - l^{-2} = \frac{l_P F(M)}{r^3}, \quad (6.13)$$

$$\frac{A''}{2} - l^{-2} = -\frac{2l_P F(M)}{r^3}, \quad (6.14)$$

donde prima denota la derivada respecto a r . Las dos primeras ecuaciones entregan $A(r) = c_1/B(r) = c_1(l^{-2}r^2 - 2l_P F(M)/r - c_2)$, donde c_1, c_2 son constantes de integración. La tercera ecuación, fija el valor de $c_1 = 1$, y no restringe a c_2 . Por lo tanto

¹La masa de Planck definida por $m_p l_P = \hbar$ es independiente de \hbar ($m_p = 8$ en las unidades en que $\kappa = \pi$).

² H es el elemento de $SO(2,2)$ que realiza la identificación de puntos en CadS que dan origen al agujero negro BTZ.

la métrica modificada por efecto de los campos de radiación es, a primer orden en \hbar ,

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{l^2} - M - \frac{2l_P F(M)}{r} \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} - M - \frac{2l_P F(M)}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (6.15)$$

En la última expresión hemos fijado $c_2 = M$. Esta elección es muy natural ya que para $M \gg 1$, el efecto de la fuente se anula y se recupera el agujero BTZ de masa M . Notamos la gran similitud de la métrica anterior con la obtenida en el capítulo 4 para el sistema de gravitación con campo escalar conforme.

Se puede determinar la posición del horizonte de eventos, encontrando las raíces reales positivas de $g^{rr} = 0$:

$$r^3 - Ml^2 r - 2l_P F(M)l^2 = 0. \quad (6.16)$$

Dado que $F(M) > 0$ esta ecuación tiene sólo una raíz real positiva, que a primer orden en \hbar es

$$r_+ = \sqrt{M}l + \frac{l_P F(M)}{M}, \quad (6.17)$$

es decir, el horizonte de la solución perturbada es mayor que el de la solución de partida.

En el caso de los campos con condiciones de borde antiperiódicas (*twisted*)

$$\kappa \langle T_\mu^\nu \rangle_{\text{twisted}} = \frac{l_P}{r^3} F_{\text{twisted}}(M) \text{diag}(1, 1, -2), \quad \text{con} \quad (6.18)$$

$$F_{\text{twisted}}(M) = \frac{M^{3/2}}{2\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cosh 2\pi n \sqrt{M} + 3}{(\cosh 2\pi n \sqrt{M} - 1)^{3/2}}, \quad (6.19)$$

Aunque son muy parecidos, existe una diferencia fundamental entre $\langle T_\mu^\nu \rangle$ y $\langle T_\mu^\nu \rangle_{\text{twisted}}$, que se debe a que tienen signo opuesto (según muestran los gráficos en [51]). Si denotamos $F_{\text{twisted}} = -F^-$, la ecuación (6.16) tiene ahora dos raíces reales positivas, que a primer orden en \hbar son

$$r_+ = \sqrt{M}l - \frac{l_P F^-(M)}{M}, \quad r_- = \frac{4l_P F^-(M)}{M}, \quad (6.20)$$

En esta forma, en el caso de los campos con condiciones de borde antiperiódicas, aparece un horizonte interno como una nueva estructura en la solución.

6.2.1 Propiedades termodinámicas

En esta sección determinamos las correcciones de $O(\hbar)$ a la temperatura y entropía del agujero negro BTZ debidas a los campos de radiación. Utilizando la formula usual para la temperatura $T = -(g'_{tt})_{r_+}/4\pi$ para una métrica con $g_{tt}g_{rr} = -1$, se obtiene para los campos normales

$$T = T_{\text{BTZ}} + \frac{l_P F(M)}{\pi M l^2}, \quad \text{con} \quad T_{\text{BTZ}} = \frac{\sqrt{M}}{2\pi l}. \quad (6.21)$$

Es sensato suponer que la entropía del agujero negro perturbado es proporcional al perímetro del horizonte (que es el análogo del área en esta dimensión). De esta manera, la variación de la entropía relativa a la del agujero BTZ es

$$\frac{\Delta S}{S_{\text{BTZ}}} = \frac{l_P}{l} M^{-3/2} F(M). \quad (6.22)$$

Para el caso con *twisted fields*, se debe reemplazar $F(M)$ por $-F^-$ en las relaciones anteriores.

6.3 Discusión

Como se puede ver de (6.15), el efecto de los campos de radiación se refleja básicamente en la adición de un término correctivo $\sim r^{-1}$ a g_{tt}^{BTZ} . La presencia de este término hace que la geometría deje de ser de curvatura constante, adquiriendo una singularidad de curvatura en el origen. La métrica (6.15) tiene la misma forma que su contraparte clásica, presentada en el capítulo 4, es decir, la aproximación semiclásica utilizada guarda mucha información del fondo clásico en que se sostiene.

Se observa que las correcciones a la temperatura y entropía dependen linealmente de $F(M)$. Así, dado que $F(M) \sim e^{-M}$ para $M \gg 1$, estas correcciones son fuertemente suprimidas en los agujeros masivos. De esta manera el efecto de la *back-reaction* sólo será apreciable para masas pequeñas, del orden de la masa de Planck (la cual es independiente de \hbar en tres dimensiones).

Otro punto tiene que ver con las escalas de longitud. Las correcciones inducidas por $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ dependen del cociente l_P/l , es decir, del tamaño relativo de

la curvatura (fijada por la constante cosmológica) respecto a la longitud de Planck, la cual es lineal en \hbar . Se nota que mientras más plano el espacio ($l \gg 1$), menor es el efecto de la perturbación por los campos de radiación.

Capítulo 7

Conclusiones

Hemos presentado una nueva solución de agujero negro en 2+1 dimensiones acoplando un campo escalar conforme a la gravitación con constante cosmológica negativa. El mismo tipo de acoplamiento escalar también genera un agujero negro en 3+1 dimensiones (BMBB), pero la presencia de la constante cosmológica en el caso tridimensional, la cual es absolutamente necesaria en la solución, hace que los agujeros negros resultantes sean completamente diferentes: La solución BMBB es asintóticamente plana y es un agujero Reissner-Nordström extremo, mientras que la solución presentada aquí es asintóticamente anti-de Sitter y no extrema, además el campo escalar es siempre regular, mientras que en el modelo BMBB diverge en el horizonte.

Aunque la solución presentada es un agujero negro dotado de un campo, no se puede afirmar, en un sentido *estricto*, que el campo escalar sea alguna clase de pelo, dado que este campo de materia no posee una carga conservada independiente.

El cálculo de la entropía nos muestra que su valor difiere por un factor $\frac{2}{3}$ de aquel proporcionado por la “ley del área”. Esta desviación proviene del acoplamiento del campo escalar con la curvatura. También es posible determinar esta desviación a través de un mapeo conforme de la métrica. Esto hace posible realizar el cálculo de la entropía en términos de campos que provienen de una acción con acoplamiento minimal usando la ley del área.

Es análisis de la estabilidad de esta solución estática en el caso de per-

turbaciones lineales circularmente simétricas muestra que el sistema es inestable, compartiendo esta propiedad con el agujero negro BMBB [54].

Para responder la pregunta sobre si se puede obtener un agujero negro como resultado del colapso de estos campos escalares acoplados conformalmente, es necesario considerar al menos la geometría con simetría circular más general

$$ds^2 = -A(t, r)dt^2 + B(t, r)dr^2 + r^2d\theta^2,$$

dado que el caso restringido $A = B^{-1}$, da lugar a la misma solución estática ya presentada.

La parte final de este trabajo se dedicó al estudio de los efectos producidos por los campos de radiación en las propiedades geométricas y termodinámicas del agujero negro BTZ. Usando el valor de expectación del tensor energía-momentum, asociado a un campo escalar conforme, como fuente de las ecuaciones de Einstein determinamos una nueva métrica, la cual da cuenta de las correcciones, de primer orden en \hbar , a la métrica BTZ debido a la presencia de los campos de radiación. La adición de un término correctivo $\sim r^{-1}$ a g_{tt}^{BTZ} hace que la geometría deje de ser de curvatura constante, adquiriendo una singularidad de curvatura en el origen. Esta nueva métrica (6.15) tiene la misma forma que su contraparte clásica (4.14). Esto significa que la aproximación semiclásica utilizada guarda mucha información del fondo clásico en que se sostiene.

Se observa que las correcciones a la temperatura y entropía son fuertemente suprimidas en los agujeros masivos. De esta manera el efecto de la *back-reaction* sólo será apreciable para masas pequeñas, del orden de la masa de Planck. También se nota que las correcciones inducidas por $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ dependen del cociente l_P/l , es decir, mientras más plano el espacio (la curvatura es proporcional a l^{-2}), menor es el efecto de la perturbación debida a los campos de radiación.

La simplicidad relativa que ofrecen estos sistemas tridimensionales respecto a los formulados en cuatro dimensiones (y de alguna forma, más realistas que los también estudiados en 1+1 dimensiones) se refleja en este trabajo. Estos sistemas proporcionan una arena promisoría para estudiar problemas aún abiertos en la física de agujeros negros, tales como el origen microscópico de su entropía.

Apéndice

Cuantización de un campo escalar conforme en CadS

En este apéndice se revisará la cuantización de un campo escalar conforme en el espacio cubrimiento universal de anti-de Sitter, CadS. El cálculo del propagador del campo escalar (conforme) se ve complicado por el hecho que CadS no es globalmente hiperbólico. En las coordenadas (2.11), el infinito espacial es la superficie $\rho = \pi/2$, la cual se ve como tipo tiempo en la figura 3. La información puede salir o entrar a través de esta superficie en un tiempo coordenado finito, dañando la ley de composición del propagador. A continuación mostramos el esquema de cuantización propuesto por Avis, Isham y Storey [49] y aplicado recientemente por Lifschytz y Ortiz [50] en 2+1 dimensiones, para resolver este problema. La primera observación consiste en el hecho que adS es conforme a la mitad del Universo Estático de Einstein (ESU), cuya métrica es

$$ds^2 = -d\lambda^2 + d\rho^2 + \sin^2 \rho d\theta^2 . \quad (\text{A.1})$$

donde $-\infty < \lambda < \infty$, $0 < \rho \leq \pi$, y $0 < \theta \leq 2\pi$, y su topología es $\mathbb{R} \times S^2$.

La idea propuesta en [49] es usar los resultados de la cuantización en la mitad de ESU, la cual está bien definida, para definir a través del mapeo conforme, una cuantización aceptable en CadS, esquivando de esta manera el problema de cómo fijar la información que pasa por CadS.

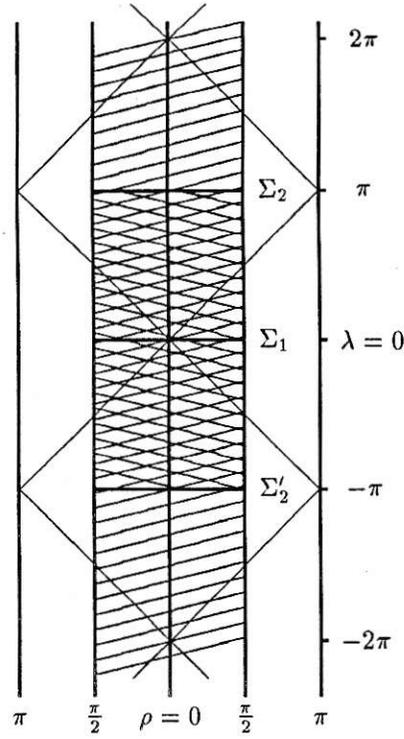


Figura 3. Se muestra el Universo Estático de Einstein (ESU) con una dimensión espacial suprimida. La región sombreada y doblemente sombreada representa las imágenes conformales de CadS y adS respectivamente (Σ_2 identificada con Σ'_2 en el caso adS). La líneas $\rho = \pi$ están identificadas.

Los modos de frecuencia positiva en ESU son soluciones de¹

$$\square \psi^{\text{ESU}} - \frac{1}{4} \psi^{\text{ESU}} = 0, \quad (\text{A.2})$$

y están dados por

$$\psi_{lm}^{\text{ESU}} = (2l + 1)^{-1/2} e^{i\omega\lambda} Y_{lm}(\rho, \theta) \quad \omega > 0, \quad (\text{A.3})$$

donde Y_{lm} son los armónicos esféricos, $\omega = l + \frac{1}{2}$, m y l son enteros con $l \geq 0$ y $|m| \leq l$. Estos modos son ortonormales en el producto interno [55]

$$(\psi_1, \psi_2) = -i \int_{\Sigma} \psi_1 \vec{\partial}_\mu \psi_2^* \sqrt{g_\Sigma} d\Sigma^\mu, \quad (\text{A.4})$$

¹Para la métrica ESU, el escalar de Ricci es $R = 2$.

donde Σ es una superficie de Cauchy tipo espacio. Esto es,

$$(\psi_{lm}, \psi_{l'm'}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (\psi_{lm}, \psi_{l'm'}^*) = 0, \quad \text{y} \quad (\psi_{lm}^*, \psi_{l'm'}^*) = -\delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (\text{A.5})$$

Expandiendo en estos modos el operador de campo

$$\Psi = \sum_{l,m} \psi_{lm} a_{lm} + \psi_{lm}^* a_{lm}^\dagger, \quad (\text{A.6})$$

donde a , a^\dagger destruyen y crean partículas, y definen el vacío $|0\rangle_{\text{ESU}}$. La función de dos puntos se define como

$$G_{\text{ESU}}(x, x') = {}_{\text{ESU}}\langle 0 | \Psi(x) \Psi(x') | 0 \rangle_{\text{ESU}} = \sum_{l,m} \psi_{lm}^{\text{ESU}}(x) \psi_{lm}^{\text{ESU}*}(x'). \quad (\text{A.7})$$

Insertando (A.3),

$$G_{\text{ESU}}(x, x') = \sum_l \frac{1}{2l+1} e^{-i(l+\frac{1}{2})(\lambda-\lambda')} \sum_m Y_{lm}(\rho\theta) Y_{lm}^*(\rho'\theta'). \quad (\text{A.8})$$

Usando $Y_{lm}^* = (-1)^m Y_{l,-m}^*$ y $4\pi \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(x) Y_{lm}(x') = (2l+1) P_l(\cos \Theta)$, donde Θ es el ángulo entre (ρ, θ) y (ρ', θ') , obtenemos

$$G_{\text{ESU}}(x, x') = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}(\lambda-\lambda')} \sum_{l \geq 0} e^{-il(\lambda-\lambda')} P_l(\cos \Theta). \quad (\text{A.9})$$

Además, usando $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = (1 - 2xz + z^2)^{-1/2}$ para $-1 < x < 1$ y $|z| < 1$, y dando a $\Delta\lambda = \lambda - \lambda'$ una pequeña parte imaginaria para convergencia, obtenemos

$$G_{\text{ESU}}(x, x') = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} (\cos(\Delta\lambda - i\epsilon) - \cos \rho \cos \rho' - \sin \rho \sin \rho' \cos \Delta\theta)^{-1/2}, \quad (\text{A.10})$$

donde la raíz cuadrada está definida con una rama a lo largo del eje real negativo y el argumento de la función está entre $(-\pi, \pi)$ [56]. Denotaremos esta función de dos puntos por G_{ESU}^1 , y definiremos $G_{\text{ESU}}^2(x, x') = G_{\text{ESU}}^1(\tilde{x}, x')$ donde $\tilde{x} = (\lambda, \pi - \rho, \theta)$.

Ahora, debemos imponer condiciones de borde sobre los ψ^{ESU} de modo de tener un buen esquema de cuantización en la mitad $\rho \leq \pi/2$. La conservación de energía requiere que alguna de las siguientes condiciones de borde se cumpla:

$$\psi_{lm}^{\text{ESU}}(\rho = \frac{1}{2}\pi) = 0, \quad \text{con } l+m \text{ impar (Dirichlet)}, \quad (\text{A.11})$$

o

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \psi_{lm}^{\text{ESU}}(\rho = \frac{1}{2}\pi) = 0, \quad \text{con } l + m \text{ par (Neumann)}. \quad (\text{A.12})$$

Es fácil verificar [49] que la combinación $G_{\text{ESU}} = G_{\text{ESU}}^1 \pm G_{\text{ESU}}^2$ tiene las condiciones de borde correctas, donde el signo + corresponde al caso Neumann y el otro signo al caso Dirichlet.

Dado que las métricas de CadS y ESU están relacionadas por el factor conforme ($l \sec \rho$), las funciones de dos puntos se relacionan como

$$G_{\text{CadS}} = \sqrt{\cos \rho \cos \rho'} G_{\text{ESU}}, \quad (\text{A.13})$$

obteniendo así

$$G_{\text{CadS}}^1(x, x') = \frac{1}{4\pi} \sigma(x, x')^{-1/2} \quad (\text{A.14})$$

y

$$G_{\text{CadS}}^2(x, x') = \frac{1}{4\pi} [\sigma(x, x') + 4l^2]^{-1/2} \quad (\text{A.15})$$

Entonces la suma (resta) de estas funciones de Green corresponde a la función de Green en el CadS con condiciones de borde de Neumann (Dirichlet).

Bibliografía

- [1] M. Bañados, C. Teitelboim y J. Zanelli, Phys. Rev. Lett. **69**, 1849 (1992).
- [2] M. Bañados, M. Henneaux, C. Teitelboim y J. Zanelli, Phys. Rev. **D48**, 1506 (1993).
- [3] C. Martínez y J. Zanelli, “Conformally dressed black hole in 2+1 dimensions”, gr-qc/9604021 (1996), Phys. Rev. **D** (en prensa)
- [4] C. Martínez y J. Zanelli, “Instability of the 2+1 conformal scalar black hole”, (en preparación).
- [5] C. Martínez, “Back-reaction in the BTZ black hole”, (en preparación).
- [6] S. Deser, R. Jackiw y G. 't Hooft, Ann. Phys. (NY) **152**, 220 (1984).
- [7] S. Deser y R. Jackiw, Ann. Phys. (NY) **153**, 405 (1984)
- [8] G. 't Hooft, Commun. Math. Phys. **117**, 685 (1988).
- [9] E. Witten, Nucl. Phys. **B 311**, 46 (1988).
- [10] E. Witten, Nucl. Phys. **B 323**, 113 (1989).
- [11] S. Giddings, J. Abbott y K. Kuchař, General Rel. and Grav. **16**, 751 (1984).
- [12] S. Carlip, “Lectures on (2+1)-Dimensional Gravity”, Davis preprint UCD-95-6, gr-qc/9503024 (1995).
- [13] N. Cruz, C. Martínez y Leda Peña, Class. Quantum Grav. **11**, 2731 (1994).

- [14] S. Carlip, *Class. Quantum Grav.* **12**, 2853 (1995).
- [15] L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press (1926).
- [16] S. Carlip y C. Teitelboim, *Phys. Rev.* **D51**, 622 (1995).
- [17] D. Laugwitz, *Differential and Riemannian Geometry*, Academic Press (1965).
- [18] N. A. Chernikov y E. A. Tagirov, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **9**, 109 (1968).
- [19] S. Deser, *Ann. Phys. (N.Y.)* **59**, 248 (1970).
- [20] L. Parker, *Phys. Rev. Letters* **28**, 705 (1972); **28**, 1497(E) (1972).
- [21] L. Parker, *Phys. Rev.* **D4**, 976 (1973).
- [22] R. Penrose, *Proc. Roy. Soc. (London)* **284A**, 204 (1965). Ver también, F. Gürsey, *Ann. Phys. (N.Y.)* **24**, 211 (1963).
- [23] S. W. Hawking, *Comm. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- [24] S. W. Hawking y G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-time*, Cambridge University Press (1973).
- [25] G. Magnano y L. M. Sokolowski, *Phys. Rev.* **D50**, 5039 (1994).
- [26] N. Bocharova, K. Bronnikov y V. Melnikov, *Vestn. Mosk. Univ. Fiz. Astron.* **6**, 706 (1970).
- [27] J. D. Bekenstein, *Ann. Phys. (N.Y.)* **82**, 535 (1974).
- [28] J. D. Bekenstein, *Ann. Phys. (N.Y.)* **91**, 75 (1975).
- [29] J. Frøyland, *Phys. Rev.* **D25** 1470 (1982).
- [30] B. C. Xanthopoulos y T. Zannias, *J. Math. Phys.* **32**, 1875 (1991).
- [31] B. C. Xanthopoulos y T. E. Dialynas, *J. Math. Phys.* **33**, 1463 (1992).

- [31] B. C. Xanthopoulos y T. E. Dialynas, *J. Math. Phys.* **33**, 1463 (1992).
- [32] K. C. K. Chan y R. B. Mann, *Phys. Rev.* **D50**, 6385 (1994); erratum, **D52**, 2600 (1995).
- [33] P. M. Sá, A. Kleber y J. P. S. Lemos, “Black Holes in Three Dimensional Dilaton Gravity Theories”, preprint DF/IST-2-95, UATP-95/01, hep-th/9503089.
- [34] J. D. Brown y M. Henneaux, *Commun. Math. Phys.* **104**, 207 (1986).
- [35] G. W. Gibbons y S. W. Hawking, *Phys. Rev.* **D15**, 2753 (1977).
- [36] C. Teitelboim, *Phys. Rev.* **D51**, 4315 (1995), *ibid.* E **D52**, 6201 (1995). Ver también, S. W. Hawking, G. T. Horowitz y S. F. Ross, *Phys. Rev.* **D51**, 4302 (1995), G. Gibbons y R. Kallosh, *Phys. Rev.* **D51**, 2839 (1995).
- [37] T. Regge y C. Teitelboim, *Ann. Phys. (N.Y.)* **88**, 286 (1974).
- [38] M. Bañados, C. Teitelboim y J. Zanelli, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 957 (1994).
- [39] R. B. Mann y S. F. Ross, *Phys. Rev.* **D47**, 3319 (1993).
- [40] V. Husain, *Phys. Rev.* **D50**, 2361 (1994).
- [41] K. S. Virbhadra, “Exact Solutions of the Einstein and Einstein-Scalar Equations in 2+1 Dimensions”, gr-qc/9408035 (1994).
- [42] V. Husain, *Phys. Rev.* **D52**, 6860 (1995).
- [43] N. Cruz y J. Zanelli, *Class. Quantum Grav.* **12**, 975 (1995).
- [44] J. D. Creighton y R. Mann, *Phys. Rev.* **D50**, 4569 (1995).
- [45] M. Visser, *Phys. Rev.* **D48**, 583 (1993), *ibid.* **D48**, 5697 (1993).
- [46] F. Englert, L. Houart y P. Windey, *Phys. Lett.* **B372**, 29 (1996).
- [47] K. C. K. Chan “Modifications of the BTZ black hole by dilaton/scalar”, preprint gr-qc/9603038.

- [48] E. Hille, *Lectures on Ordinary Differential Equations*, Addison-Wesley (1969), p445.
- [49] S. J. Avis, C. J. Isham y D. Storey, Phys. Rev. **D18**, 3565 (1978).
- [50] G. Lifschytz y M. Ortiz, Phys. Rev. **D49**, 1929 (1994).
- [51] K. Shiraishi y T. Maki, Phys. Rev. **D49**, 5286 (1994).
- [52] A. R. Steif, Phys. Rev. **D49**, 585 (1994).
- [53] K. Shiraishi y T. Maki, Class. Quant. Grav. **11**, 695 (1994).
- [54] K. A. Bronnikov y Y. N. Kireyev, Phys. Lett. **A67**, 95 (1978).
- [55] N. D. Birrel y P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Spaces*, Cambridge University Press (1982).
- [56] E. W. Hobson *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, Chelsy, New York (1955).
- [57] C. Callan, S. Coleman y R. Jackiw, Ann. Phys. (N.Y.) **59**, 42 (1970).