



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

**EXTENSIÓN DEL MODELO INTERACCIÓN FLEXIÓN-CORTE A ELEMENTOS CON
CARGA BIAxIAL, MODELO E-SFI-3D.**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCIÓN INGENIERÍA ESTRUCTURAL, SÍSMICA Y GEOTÉCNICA

CHRISTIAN PATRICIO PICÓN MOSQUERA

PROFESOR GUÍA:
LEONARDO MAXIMILIANO MASSONE SÁNCHEZ

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
FABIÁN ROJAS BARRALES
HERNÁN SANTA MARÍA OYANEDEL

SANTIAGO DE CHILE
2022

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL GRADO
DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCION INGENIERÍA ESTRUCTURAL, SÍSMICA
Y GEOTÉCNICA;
POR: CHRISTIAN PATRICIO PICÓN MOSQUERA
FECHA: 2022
PROF. GUÍA: LEONARDO MASSONE SÁNCHEZ

Extensión del modelo interacción flexión-corte a elementos con carga biaxial, modelo E-SFI-3D.

En esta investigación se desarrolló un macro-modelo tridimensional para captura el comportamiento de la resistencia al corte de columnas cuadradas y rectangulares de hormigón armado ante cargas laterales biaxiales, con el objetivo de evaluar la nueva propuesta de diseño del ACI 318-19 referida a la interacción de fuerzas de corte actuando en los ejes ortogonales. El modelo llamado E-SFI-3D, en virtud de la eficiente interacción acoplada de flexión-corte en un espacio tridimensional, se basa en el macro-modelo bidimensional E-SFI pero reformula el material y elemento a un campo 3D. Se incorporan prismas de hormigón armado con un comportamiento tridimensional mediante un enfoque de ángulo que rota y la expresión calibrada del modelo bidimensional, para calcular la deformación normal horizontal en cada dirección ortogonal (ε_x y ε_z), lo que reduce los procesos iterativos y el tiempo de análisis. Para validar el modelo, se utilizó una extensa base de datos de 56 ensayos de columnas de hormigón armado que fallan a corte bajo condiciones de carga biaxial cíclica, 41 cuadradas y 15 rectangulares, reportadas en la literatura. Los resultados del modelo son verificados contra los datos experimentales en términos de la respuesta carga-desplazamiento y la contribución de los desplazamiento de flexión y corte. Obteniendo que la relación promedio de la resistencia máxima al corte medida a la calculada para las columnas cuadradas y para las rectangulares son de 0.91 y 0.95, los correspondientes coeficientes de variación son 0.078 y 0.12 respectivamente; indicando una estimación precisa de la resistencia al corte por parte del modelo. También se comparó el inicio de degradación en el punto de 0.9-V, logrando una relación promedio entre lo medido a lo calculado para las columnas cuadradas y para las columnas rectangulares de 1.02 en ambos casos, con unos coeficientes de variación respectivamente de 0.32 y 0.4; indicando una mayor dispersión para predecir este parámetro. El modelo captura la respuesta histerética y el modo de falla a corte de los ensayos, cuya deformación de corte está controlada por un modelo elasto-plástico de acción de dovela para las barras de acero longitudinal. La investigación realizada concluye que, los resultados de la resistencia normalizada al corte biaxial, tanto de los ensayos experimentales como del modelo, se ajustan a la curva de interacción circular y valida la metodología propuesta por el ACI 318-19 para capturar el efecto de corte biaxial a través de una curva trilineal, lo que otorga un método simple y conservador de diseño por parte del código estructural.

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL GRADO
DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCION INGENIERÍA ESTRUCTURAL, SÍSMICA
Y GEOTÉCNICA;
POR: CHRISTIAN PATRICIO PICÓN MOSQUERA
FECHA: 2022
PROF. GUÍA: LEONARDO MASSONE SÁNCHEZ

Extension of the flexure-shear interaction model to elements with biaxial load, model E-SFI-3D.

In this research, a three-dimensional macro-model was developed to capture the shear strength behavior of square and rectangular reinforced concrete columns under biaxial lateral loads, with the aim of evaluating the new design proposal of ACI 318-19 referring to the interaction of shear forces acting on the orthogonal axes. The so-called E-SFI-3D model, by virtue of the Efficient-Shear-Flexure-Interaction in three-dimensional space, is based on the E-SFI two-dimensional macro-model but reformulates the material and element to a 3D domain. Reinforced concrete prisms with three-dimensional behavior are incorporated using a rotating angle approach and the calibrated expression of the two-dimensional model, to calculate the horizontal normal strain in each orthogonal direction (ε_x and ε_z), which reduces iterative processes and analysis time. To validate the model, an extensive database of 56 reinforced concrete column tests with a shear failure under cyclic biaxial loading conditions, 41 square and 15 rectangular, reported in the literature was used. The model results are verified against the experimental data in terms of the load-displacement response and the contribution of flexural and shear displacements. Obtaining that the average ratio of the maximum shear strength measured to the calculated for square and rectangular columns are 0.91 and 0.95, the corresponding coefficients of variation are respectively 0.078 and 0.12; indicating an accurate estimate of shear strength by the model. The start of degradation at the point of $0.9 \cdot V$ was also compared, achieving an average ratio of the measured to the calculated for the square columns and for the rectangular columns of 1.02 in both cases, with coefficients of variation respectively of 0.32 and 0.4; indicating a greater dispersion to predict this parameter. The model captures the hysteretic response and the shear failure mode of the tests, whose shear strain is controlled by an elasto-plastic dowel action model for the longitudinal steel bars. The research carried out concludes that the results of the normalized biaxial shear strength, both from the experimental tests and from the model, fit the circular interaction curve and validates the methodology proposed by ACI 318-19 to capture the biaxial shear effect through a trilinear curve, providing a simple and conservative method of design by the structural code.

Agradecimientos

Expreso mi mayor gratitud y consideración a mi asesor de investigación, el profesor Leonardo Massone, por su apoyo, conocimiento, orientación y confianza para el desarrollo de mi tesis de maestría en la Universidad de Chile. También agradezco a mi compañero Carlos López por su ayuda en el entendimiento y disposición del código base y de su trabajo desarrollado.

Agradezco así mismo, a mi familia por sus sacrificios en instruirme de manera intelectual y humana, y la confianza y tiempo incondicional que me han brindado. Y en sí, a todo este tiempo y personas que conocí en la Universidad de Chile que me sirvió para motivarme a dar cada vez lo mejor de mí.

Tabla de Contenido

| | |
|--|-----------|
| Abstract | i |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. General. | 1 |
| 1.2. Alcance. | 4 |
| 1.3. Hipótesis. | 5 |
| 1.4. Objetivos. | 5 |
| 1.5. Organización. | 5 |
| 2. Revisión de la Literatura | 6 |
| 2.1. Desarrollo de los modelos macroscópicos base MVLEM. | 6 |
| 2.1.1. Modelo de elemento de línea vertical múltiple, MVLEM. | 7 |
| 2.1.2. Modelo de fibra basado en desplazamiento de interacción flexión-corte, dispBeamColumnInt. | 8 |
| 2.1.3. Modelo de elemento de línea vertical múltiple de interacción de flexión-corte, SFI-MVLEM. | 9 |
| 2.1.4. Modelo de interacción eficiente de flexión-corte, E-SFI. | 11 |
| 2.2. Efecto de corte biaxial. | 13 |
| 2.2.1. Evidencia experimental. | 13 |
| 2.2.2. Modelos tridimensionales. | 15 |
| 3. Modelo Propuesto | 18 |
| 3.1. Descripción general del modelo E-SFI-3D. | 18 |
| 3.2. Elemento E-SFI-3D. | 19 |
| 3.2.1. Grados de libertad del elemento. | 19 |
| 3.2.2. Cálculo del campo de deformación en los prismas de hormigón armado. . . | 20 |
| 3.2.3. Matriz de rigidez del elemento. | 23 |
| 3.2.4. Vector de fuerzas del elemento. | 25 |
| 3.3. Material 3D. | 26 |
| 3.3.1. Enfoque de ángulo que rota. | 26 |
| 3.3.2. Ablandamiento por compresión en el hormigón, β | 29 |
| 3.3.3. Acción de dovela. | 31 |
| 3.3.4. Matriz de rigidez parcial tangente. | 32 |
| 3.4. Leyes constitutivas del hormigón y del acero. | 34 |
| 3.4.1. Ley constitutiva para el hormigón. | 35 |
| 3.4.2. Ley constitutiva para el acero de refuerzo. | 36 |

| | |
|--|------------|
| 4. Calibración y Sensibilidad del Modelo | 37 |
| 4.1. Sensibilidad a la discretización del modelo E-SFI-3D. | 37 |
| 4.1.1. Discretización transversal. | 37 |
| 4.1.2. Discretización vertical. | 41 |
| 4.2. Modelado del deslizamiento en la unión columna-base. | 48 |
| 4.3. Sensibilidad de la acción de dovela. | 51 |
| 4.4. Efecto de corte biaxial. | 54 |
| 5. Validación Experimental del Modelo | 63 |
| 5.1. Comparación del modelo E-SFI-3D contra ensayos experimentales de columnas cuadradas de hormigón armado con cargas biaxiales. | 63 |
| 5.1.1. Columnas experimentales de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013]. | 64 |
| 5.1.2. Columnas experimentales de [Arakawa et al., 1989]. | 71 |
| 5.1.3. Columnas experimentales de [Hua et al., 2021]. | 76 |
| 5.1.4. Resumen de los resultados de las columnas cuadradas. | 80 |
| 5.2. Comparación del modelo E-SFI-3D contra ensayos experimentales de columnas rectangulares de hormigón armado con cargas biaxiales. | 84 |
| 5.2.1. Columnas experimentales de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013]. | 85 |
| 5.2.2. Columnas experimentales de [Umehara, 1983]. | 88 |
| 5.2.3. Resumen de los resultados de las columnas rectangulares. | 92 |
| 6. Resumen y Conclusión | 96 |
| Bibliografía | 98 |
| Anexos | 101 |
| A. A. Cálculo del vector de fuerzas y de la matriz de rigidez del elemento | 103 |
| A.1. Vector de Fuerzas | 104 |
| A.2. Matriz de rigidez | 105 |
| B. B. Resultados Adicionales | 120 |
| B.1. Columnas Cuadradas de Hormigón Armado. | 120 |
| B.1.1. Columnas experimentales de [Mizoguchi et al., 1990]. | 120 |
| B.1.2. Columnas experimentales de [Joh and Shibata, 1984]. | 124 |
| B.2. Columnas Rectangulares de Hormigón Armado. | 128 |
| B.2.1. Columnas experimentales de [Joh and Shibata, 1984]. | 128 |
| C. C. Manual de Usuario, Modelo E-SFI-3D | 132 |
| C.1. Ejemplo. | 135 |
| C.1.1. Model Calibration | 135 |
| D. D. Código del material y elemento del modelo E-SFI-3D | 145 |
| D.1. Código del material 3D, “RAM3D”. | 145 |
| D.2. Código del elemento 3D, “E-SFI-BIAXIAL”. | 158 |

Índice de tablas

| | | |
|-------|---|-----|
| 4.1. | Tiempo de ejecución de los ejemplos de discretización (261 pasos de análisis). . . . | 41 |
| 4.2. | Tiempo de análisis (98 pasos). | 45 |
| 4.3. | Tiempo de análisis (98 pasos). | 48 |
| 5.1. | Propiedades principales de las columnas cuadradas de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013]. | 65 |
| 5.2. | Parámetros de calibración y comparación de resultados de las columnas cuadradas de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013]. | 66 |
| 5.3. | Propiedades principales de las columnas cuadradas de [Arakawa et al., 1989]. . . . | 72 |
| 5.4. | Parámetros de calibración y comparación de resultados de las columnas cuadradas de [Arakawa et al., 1989]. | 73 |
| 5.5. | Propiedades principales de las columnas cuadradas de [Hua et al., 2021]. | 77 |
| 5.6. | Parámetros de calibración y comparación de resultados de las columnas cuadradas de [Hua et al., 2021]. | 78 |
| 5.7. | Propiedades principales de las columnas rectangulares de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013]. | 86 |
| 5.8. | Parámetros de calibración y comparación de resultados de las columnas rectangulares de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013]. | 86 |
| 5.9. | Propiedades principales de las columnas rectangulares de [Umehara, 1983]. | 89 |
| 5.10. | Parámetros de calibración y comparación de resultados de las columnas rectangulares de [Umehara, 1983]. | 90 |
| B.1. | Propiedades principales de las columnas cuadradas de [Mizoguchi et al., 1990]. . . | 121 |
| B.2. | Parámetros de calibración y comparación de resultados de las columnas cuadradas de [Mizoguchi et al., 1990]. | 122 |
| B.3. | Propiedades principales de las columnas cuadradas de [Joh and Shibata, 1984]. . . | 125 |
| B.4. | Parámetros de calibración y comparación de resultados de las columnas cuadradas de [Joh and Shibata, 1984]. | 126 |
| B.5. | Propiedades principales de las columnas rectangulares de [Joh and Shibata, 1984]. | 129 |
| B.6. | Parámetros de calibración y comparación de resultados de las columnas rectangulares de [Joh and Shibata, 1984]. | 130 |

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| 1.1. Requerimientos del ACI 318 versus resistencia al corte normalizada de columnas de hormigón armado para cargas biaxiales. | 3 |
| 2.1. Elemento MVLEM, [López, 2021]. | 7 |
| 2.2. Deformaciones flexurales del MVLEM, [Orakcal et al., 2004]. | 8 |
| 2.3. Elemento dispBeamColumnInt, después de [López, 2021]. | 8 |
| 2.4. Elemento SFI-MVLEM, después de [López, 2021]. | 10 |
| 2.5. Comportamiento del hormigón FSAM, después de [Ulugtekin, 2010] y [López, 2021] | 11 |
| 2.6. Elemento E-SFI. | 12 |
| 2.7. Valores predichos versus esperados de la deformación normal horizontal, [López, 2021] y [Massone et al., 2021]. | 13 |
| 2.8. Resistencia normalizada al corte vs dirección de carga, [Massone and Correa, 2020]. | 14 |
| 2.9. Formulación del elemento SFI-MVLEM-3D: a) comportamiento en el plano descrito con la formulación SFI-MVLEM de cuatro nodos con $12 + m$ GDLs, b) comportamiento fuera del plano descrito con el modelo de placa de Kirchhoff con 12 GDLs, c) comportamiento combinado en el plano y fuera del plano con $24 + m$ GDLs, K. Kolozvari et. al. 2021, [Kolozvari et al., 2021] | 15 |
| 3.1. Idealización del modelo E-SFI-3D. | 18 |
| 3.2. Grados de libertad del modelo E-SFI-3D. | 20 |
| 3.3. Condiciones de deformación y tensión en el hormigón armado. | 27 |
| 3.4. Respuesta a compresión deteriorada en los elementos de hormigón armado fisurado. | 30 |
| 3.5. Modelo de acción de dovela. | 31 |
| 3.6. Modelo constitutivo cíclico uniaxial para el hormigón, <i>Concrete02</i> OpenSees Wiki. | 35 |
| 3.7. Ley constitutiva para el acero, <i>SteelMPF</i> [Menegotto and Pinto, 1973]. | 36 |
| 4.1. Discretización de la sección transversal del elemento E-SFI-3D mediante prismas de hormigón armado. | 38 |
| 4.2. Ejemplos de discretización para la sección transversal según la cantidad y tamaño de los prismas de hormigón armado. | 38 |
| 4.2. Ejemplos de discretización para la sección transversal según la cantidad y tamaño de los prismas de hormigón armado. | 39 |
| 4.3. Análisis de sensibilidad del modelo a la cantidad y dimensión de los prismas. . . . | 40 |
| 4.4. Análisis seccional del elemento en la base de la columna a una deriva de 0.6%. . . | 41 |
| 4.5. Regularización de la ley constitutiva tensión-deformación del hormigón no confinado y confinado, después de [Pozo et al., 2021]. | 42 |
| 4.6. Discretización vertical del modelo y distribución de las deformaciones. | 44 |
| 4.7. Análisis de sensibilidad del modelo a la discretización vertical. | 45 |

| | |
|--|----|
| 4.8. Regularización del hormigón en compresión, prisma 44. | 45 |
| 4.9. Regularización de la columna a la discretización vertical por medio de la longitud de los elementos más deformados. | 46 |
| 4.10. Análisis de sensibilidad del modelo a la discretización vertical regularizada a través de la longitud de los elementos más deformados. | 47 |
| 4.11. Regularización del hormigón en compresión, prisma 44 del elemento en la base y techo. | 48 |
| 4.12. Modelo con resorte rotacional para simular el deslizamiento en la unión columna-base. | 49 |
| 4.13. Análisis de sensibilidad del modelo al deslizamiento en la unión columna-base. . . | 50 |
| 4.14. Sensibilidad del modelo de acción de dovela al valor de rigidez α | 51 |
| 4.14. Sensibilidad del modelo de acción de dovela al valor de rigidez α | 52 |
| 4.15. Sensibilidad del modelo de acción de dovela a la tensión máxima τ_{max} | 53 |
| 4.16. Sensibilidad del modelo de acción de dovela a una columna corta. | 54 |
| 4.17. Cargas biaxiales en diferentes ángulos. | 55 |
| 4.18. Cálculo de datos resultantes. | 55 |
| 4.19. Discretización de la sección transversal. | 56 |
| 4.20. Respuesta del efecto de corte biaxial en una columna cuadrada corta, $L/h = 2.5$. . . | 57 |
| 4.21. Curva de interacción de la resistencia al corte vs la dirección de carga del modelo E-SFI-3D para una columna cuadrada corta. | 58 |
| 4.22. Respuesta del efecto de corte biaxial en una columna cuadrada esbelta, $L/h = 4.9$. . | 59 |
| 4.23. Curva de interacción de la resistencia al corte vs la dirección de carga del modelo E-SFI-3D para una columna cuadrada esbelta. | 60 |
| 4.24. Respuesta del efecto de corte biaxial en una columna rectangular corta-intermedia. | 61 |
| 4.25. Curva de interacción de la resistencia al corte vs la dirección de carga del modelo E-SFI-3D para una columna rectangular corta-intermedia. | 62 |
| | |
| 5.1. Configuración de las columnas de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013], y discretización transversal para el modelo E-SFI-3D, (mm). | 65 |
| 5.2. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales del ensayo SC-2.4-0. . . . | 67 |
| 5.3. Ensayo SC-2.4-30. | 67 |
| 5.4. Ensayo SC-2.4-45. | 67 |
| 5.5. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales del ensayo SC-1.7-0. . . . | 69 |
| 5.6. Ensayo SC-1.7-30. | 70 |
| 5.7. Ensayo SC-1.7-45. | 70 |
| 5.8. Resistencia al corte vs dirección de carga de las columnas de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013]. | 70 |
| 5.9. Configuración de las columnas de [Arakawa et al., 1989], y discretización transversal para el modelo E-SFI-3D. | 71 |
| 5.10. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “-1” con una carga axial de tracción y una carga lateral biaxial de 0 y 45°. | 73 |
| 5.11. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “0” con una carga axial de cero y una carga lateral biaxial de 0, 22.5 y 45°. | 74 |
| 5.12. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “2” con una carga axial de compresión cerca del 20 % de $f'_c \cdot A_g$ y una carga lateral biaxial de 0, 22.5 y 45°. | 74 |

| | |
|---|-----|
| 5.13. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “4” con una carga axial de compresión cerca del 40 % de $f'_c \cdot A_g$ y una carga lateral biaxial de 0, 22.5 y 45° | 75 |
| 5.14. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “5” con una carga axial de compresión cerca del 50 % de $f'_c \cdot A_g$ y una carga lateral biaxial de 0, 22.5 y 45° | 75 |
| 5.15. Resistencia normalizada al corte vs dirección de carga de las columnas de [Arakawa et al., 1989]. | 76 |
| 5.16. Configuración de las columnas de [Hua et al., 2021], y discretización transversal para el modelo E-SFI-3D. | 77 |
| 5.17. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales del ensayo S31NL30. . . | 79 |
| 5.18. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales del ensayo S37DL45. . . | 80 |
| 5.19. Error en la predicción de resistencia máxima de corte del modelo E-SFI-3D vs los datos experimentales de los ensayos de columnas cuadradas. | 81 |
| 5.20. Error en la predicción del inicio de degradación en el 90 % de resistencia máxima del modelo E-SFI-3D vs los datos experimentales de los ensayos de las columnas cuadradas. | 82 |
| 5.21. Resistencia al corte normalizada vs dirección de carga para las columnas cuadradas. | 83 |
| 5.22. Configuración de las columnas de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013], y discretización transversal para el modelo E-SFI-3D. | 85 |
| 5.23. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de la columna rectangular. | 87 |
| 5.24. Resistencia al corte vs dirección de carga de las columnas rectangulares de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013]. | 88 |
| 5.25. Configuración de las columnas de [Umehara, 1983], y discretización transversal para el modelo E-SFI-3D. | 89 |
| 5.26. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de las columnas rectangulares tipo “CU” con una carga de compresión cerca del 15 % de $f'_c \cdot A_g$ | 90 |
| 5.26. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de las columnas rectangulares tipo “CU” con una carga de compresión cerca del 15 % de $f'_c \cdot A_g$ | 91 |
| 5.27. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de las columnas rectangulares tipo “OU” con una carga axial de cero. | 91 |
| 5.28. Resistencia al corte vs dirección de carga de las columnas rectangulares de [Umehara, 1983] | 92 |
| 5.29. Error en la predicción de resistencia máxima de corte del modelo E-SFI-3D vs los datos experimentales de los ensayos de columnas rectangulares. | 93 |
| 5.30. Error en la predicción del inicio de degradación en el 90 % de resistencia máxima del modelo E-SFI-3D vs los datos experimentales de los ensayos de las columnas rectangulares. | 93 |
| 5.31. Resistencia al corte normalizada vs dirección de carga para las columnas rectangulares. | 94 |
| A.1. Idealización del modelo E-SFI-3D. | 103 |
| A.2. Fuerzas en el elemento. | 104 |
| A.3. Desplazamiento del grado de libertad 1, desplazamiento en “x” de la placa inferior. | 105 |
| A.4. Desplazamiento del grado de libertad 2, desplazamiento vertical de la placa inferior. | 106 |
| A.5. Desplazamiento del grado de libertad 3, desplazamiento en “z” de la placa inferior. | 107 |
| A.6. Desplazamiento del grado de libertad 4, giro en “x” de la placa inferior. | 108 |

| | |
|--|-----|
| A.7. Desplazamiento del grado de libertad 5, torsión de la placa inferior. | 109 |
| A.8. Desplazamiento del grado de libertad 6, giro en “z” de la placa inferior. | 111 |
| A.9. Desplazamiento del grado de libertad 7, desplazamiento en “x” de la placa superior. | 112 |
| A.10. Desplazamiento del grado de libertad 8, desplazamiento vertical de la placa superior. | 113 |
| A.11. Desplazamiento del grado de libertad 9, desplazamiento en “z” de la placa superior. | 114 |
| A.12. Desplazamiento del grado de libertad 10, giro en “x” de la placa superior. | 115 |
| A.13. Desplazamiento del grado de libertad 11, torsión de la placa superior. | 117 |
| A.14. Desplazamiento del grado de libertad 12, giro en “z” de la placa superior. | 118 |
| | |
| B.1. Configuración de las columnas de [Mizoguchi et al., 1990], y discretización transversal para el modelo E-SFI-3D. | 120 |
| B.2. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “04+” con una carga de compresión cerca del 40 % de $f'_c \cdot A_g$ y una carga lateral biaxial de 0, 22.5 y 45°. | 122 |
| B.3. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “04-” con una carga axial de cero y una carga lateral biaxial de 0, 22.5 y 45°. | 123 |
| B.4. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “15+” con una carga axial de compresión cerca del 55 % de $f'_c \cdot A_g$ y una carga lateral biaxial de 0 y 45°. | 123 |
| B.5. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “15-” con una carga axial de tracción cerca del 10 % de $f'_c \cdot A_g$ y una carga lateral biaxial de 0 y 45°. | 124 |
| B.6. Resistencia al corte normalizada vs dirección de carga de las columnas de [Mizoguchi et al., 1990]. | 124 |
| B.7. Configuración de las columnas de [Joh and Shibata, 1984], y discretización transversal para el modelo E-SFI-3D. | 125 |
| B.8. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “N0” con una carga axial de cero y una carga lateral biaxial en diferentes direcciones. | 126 |
| B.9. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “N1” con una carga axial de compresión del 16.7 % de $f'_c \cdot A_g$ y una carga lateral biaxial de 0, 22.5 y 45°. | 127 |
| B.10. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “N2” con una carga axial de compresión del 33.33 % de $f'_c \cdot A_g$ y una carga lateral biaxial de 0, 22.5 y 45°. | 127 |
| B.11. Resistencia al corte normalizada vs dirección de carga de las columnas de [Joh and Shibata, 1984]. | 128 |
| B.12. Configuración de las columnas de [Joh and Shibata, 1984], y discretización transversal para el modelo E-SFI-3D. | 129 |
| B.13. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de la columna rectangular. | 130 |
| B.13. Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de la columna rectangular. | 131 |
| B.14. Resistencia al corte vs dirección de carga de las columnas rectangulares de [Joh and Shibata, 1984] | 131 |
| | |
| C.1. Enfoque de modelado tridimensional utilizando elementos E-SFI-3D. | 132 |
| C.2. Enfoque de ángulo que rota para calcular las tensiones del hormigón. | 133 |
| C.3. Configuración de las columnas de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013], y discretización transversal para el modelo E-SFI-3D. | 135 |

Capítulo 1

Introducción

1.1. General.

Los sistemas estructurales están compuestos por elementos sometidos a diferentes tipos de cargas que producen esfuerzos combinados entre axial, flexión, corte e incluso en los más complejos torsión. Pero además, las cargas aplicadas pueden actuar en múltiples direcciones a la de los ejes ortogonales del elemento, las cargas multi-direccionales se pueden descomponer en: una carga en el sentido del eje longitudinal del elemento y dos cargas en ambos sentidos transversales del elemento, definidas como cargas biaxiales. No obstante, a pesar de los diferentes tipos y direcciones de carga, el diseño de elementos estructurales suele considerar la capacidad de forma desacoplada, es decir, las distintas cargas y sus respectivas direcciones no interactúan entre sí; pese a que diversos estudios y ensayos experimentales de la literatura han demostrado la necesidad de considerar la interacción de los diferentes tipos y direcciones de carga que actúan en un elemento estructural para predecir su resistencia.

Inicialmente, para entender la interacción de esfuerzos combinados, se ha logrado modelar exitosamente el acoplamiento de elementos sujetos a fuerza axial y flexión y fuerza axial y flexión-corte. Por ejemplo, el macro-modelo de interacción flexión-corte llamado E-SFI desarrollado por [López, 2021, Massone et al., 2021], captura la respuesta no lineal acoplada de flexión y corte en columnas y muros tanto cortos como esbeltos de hormigón armado de dos dimensiones solicitadas monotónica o cíclicamente. En base a estos modelos y datos experimentales, los códigos estructurales representan la interacción de esfuerzos limitando la resistencia combinada del elemento estructural. Sin embargo, un modelo en dos dimensiones estudia la respuesta limitadamente, ya que no es posible considerar cargas fuera del plano y en diferentes direcciones aún cuando es conocido que gran parte de los elementos estructurales están sometidos a cargas biaxiales, especialmente columnas ubicadas en la intersección de dos pórticos de diferentes direcciones; y con mayor razón, ante sollicitaciones de un evento sísmico que no necesariamente actúa en dirección paralela a un eje ortogonal del marco [Massone and Correa, 2020]; por lo que es indispensable realizar otro análisis en la dirección ortogonal al primer plano debido a una fuerza actuando en la otra dirección. Y si bien, los modelos en dos dimensiones permiten simplificar el estudio de elementos estructurales cuyo efecto de torsión sea despreciable, la descomposición de un análisis bidimensional en ambas direcciones no captura la respuesta combinada de cargas biaxiales, de modo que es necesario realizar un análisis en tres dimensiones, o en su efecto, satisfacer los requerimientos que las normativas estructurales estipulan para considerar la interacción de cargas biaxiales.

Lo anterior implica que para entender y evaluar el efecto de las cargas biaxiales, es necesario contar con un modelo tridimensional, como pueden ser las formulaciones de elementos finitos o macro-modelos. Para su estudio, las cargas biaxiales pueden ser tanto de flexión como de corte, y no es extraño que existan columnas, especialmente cortas ¹, cuya respuesta este controlada por la sollicitación al corte, pese a no ser recomendado. La capacidad a flexión biaxial se captura correctamente por modelos actuales no lineales e incluso su diseño se incluye en códigos estructurales, (ACI 318-95). Sin embargo, actualmente el código ACI 318 en su versión del 2019 formaliza la necesidad de expresiones más precisas para la resistencia al corte biaxial en el diseño de elementos de hormigón armado según resultados de ensayos experimentales, ya que considerar el corte a lo largo de cada eje centroidal de forma independiente puede ser poco conservador como lo especificaba el ACI 318 en la versión del 2014, [ACI Committee 318, 2019]. Por lo que se podría decir, que se ha logrado modelar exitosamente el efecto de flexión biaxial pero no el efecto de corte biaxial.

El efecto de corte biaxial se ha observado en la información experimental de la literatura para columnas de sección cuadrada y rectangular cargadas en direcciones diagonales y que fallan por corte [Arakawa et al., 1989, Mizoguchi et al., 1990, Pham and Li, 2013, Joh and Shibata, 1984, Umehara, 1983]; concluyendo que la resistencia al corte de columnas ante una carga diagonal, es representada por una curva de interacción circular cuando la sección es cuadrada, y una elipse para el caso de una sección rectangular. En base a estos resultados experimentales, el código ACI 318-19 propone el cumplimiento de la expresión (1.1) para considerar la interacción de fuerzas de corte actuando en ejes ortogonales, si se supera el 50 % de la demanda de corte en cada eje ortogonal.

$$\frac{V_{u,x}}{\phi V_{n,x}} + \frac{V_{u,z}}{\phi V_{n,z}} \leq 1.5 \quad (1.1)$$

El impacto al cálculo de la resistencia al corte de la expresión (1.1) en la nueva versión del ACI 318 - 19 se puede apreciar en la Fig. 1.1, donde se compara la resistencia al corte normalizada para cargas en diferentes direcciones según: la base de datos de resultados experimentales recopilada en [Massone and Correa, 2020], lo que proponía el ACI 318-14 en la versión del 2014, y lo que propone actualmente la versión del ACI 318-19. En la Fig. 1.1, los resultados experimentales de la resistencia normalizada al corte se representan por la curva de interacción circular de color negro, mientras que la curva de color azul indica la resistencia normalizada que se proponía en la versión del 2014, y la curva trilineal roja señala la nueva especificación del ACI 318 - 19 en base a la expresión (1.1) si se supera el 50 % de la demanda de corte en cada eje ortogonal. Es notable que las nuevas especificaciones del ACI 318, (curva roja), se acercan más a los resultados experimentales, siendo más preciso y conservador que la versión anterior, en especial para cargas entre 27 y 63°. De esta manera, la expresión (1.1) reduce el nivel de error en la predicción de resistencia al corte de un 41 % de sobre-resistencia, según versiones anteriores del ACI 318, a un 6 % con la versión 2019 para una carga en 45° como se puede observar. También se aprecia que para fuerzas en 26.6° o 63.4° el código incurre en el mayor nivel de error con un 12 % de sobre-resistencia al corte, aunque como se especifica en [Massone and Correa, 2020], este porcentaje puede ser absorbido por los factores de reducción de resistencia o de sobre-resistencia del material, validando así el enfoque del código y proporcionando un método fácil y confiable de diseño considerando cargas biaxiales.

¹Usualmente referido a columnas con una relación alto-ancho más pequeño que 2.

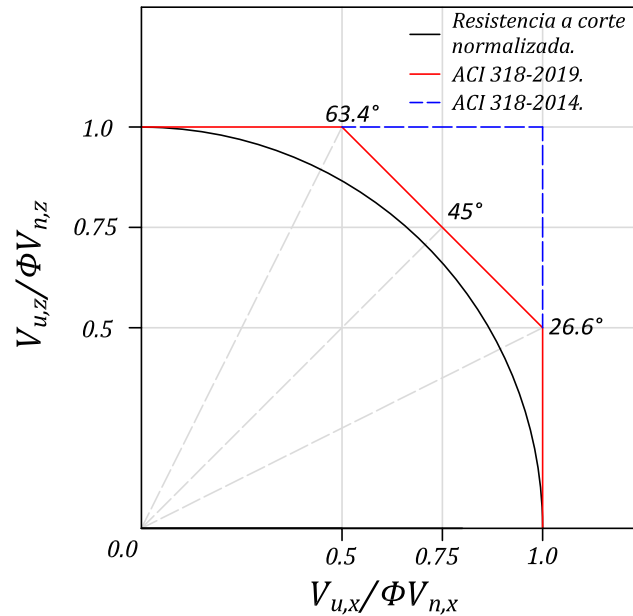


Figura 1.1: Requerimientos del ACI 318 versus resistencia al corte normalizada de columnas de hormigón armado para cargas biaxiales.

Con el propósito de validar la expresión (1.1) o la curva trilineal y dar un avance al entendimiento del comportamiento de cargas biaxiales de corte, se justifica la necesidad de modelar los ensayos experimentales mediante un modelo analítico tridimensional que capture la respuesta histerética no lineal acoplada ² de flexión-corte en columnas de hormigón armado que fallan a corte. Aunque es posible capturar la interacción flexión-corte en un campo tridimensional con modelos de elementos finitos, como en [Pham and Li, 2013], debido al alto costo computacional, especialmente para análisis cíclicos, y la complejidad de su implementación, es menos usado que los macro-modelos. Uno de los macro-modelos que existen en el software de código abierto *OpenSees*, [McKenna et al., 2010], y que captura el efecto de corte y flexión acoplado es el macro-modelo E-SFI formado por paneles de hormigón armado, el cual presenta una notable eficiencia en el tiempo de ejecución, de ahí su nombre, al reducir los grados de libertad o procesos iterativos necesarios para calcular la deformación horizontal normal en cada panel del elemento mediante una expresión calibrada para ε_x . Entonces se ha planteado extender el macro-modelo E-SFI de dos dimensiones a tres dimensiones, tanto para el elemento como para el material del modelo, con el objetivo de capturar el impacto del corte biaxial en columnas cuadradas y rectangulares, aprovechando la reducción en el tiempo de ejecución y del número de grados de libertad a solo seis por elemento del E-SFI en comparación con el modelo base SFI-MVLEM, [Kolozviri et al., 2018].

El nuevo macro-modelo, llamado E-SFI-3D implementado en *OpenSees*, propone una nueva definición del material y elemento para un espacio tridimensional. El nuevo material presenta un campo de deformación de 3x3, el cual consta de tres deformaciones normales, dos deformaciones de corte y una deformación torsional. Dentro del material, se evalúan las tensiones principales del hormigón utilizando leyes constitutivas uniaxiales con las deformaciones principales, y se evalúan las tensiones del acero con las deformaciones normales. A su vez, el nuevo elemento tridimensional de doce (12) grados de libertad y formado por prismas de hormigón armado, calcula las deformaciones

²En un modelo acoplado de flexión-corte las deformaciones inelásticas por flexión afectan las deformaciones inelásticas por corte y la resistencia al corte.

de corte y la deformación vertical de cada uno de ellos en base a las fuerzas aplicadas en el elemento; y luego calibra las deformaciones horizontales con expresiones dependientes de la deformación de corte previamente calculada, completando así el campo de deformación del material.

1.2. Alcance.

En rigor con los nuevos requerimientos de la normativa ACI 318-19, no llega a ser necesario un análisis tridimensional para el diseño de columnas cuadradas y rectangulares sometidas a cargas biaxiales. Sin embargo, el macro-modelo provee una respuesta confiable de la resistencia última al corte y la deformación no lineal de la columna junto con la contribución de la deformación de flexión y corte, lo que permite satisfacer los requerimientos en cuanto a la deformación de códigos estructurales, especialmente para cargas diagonales que presentan mayores deformaciones que las ortogonales.

Para el caso de columnas circulares simétricas de hormigón armado, el macro-modelo E-SFI-3D no es capaz de discretizar una sección circular; no obstante, debido a la simetría de la sección la resistencia nominal al corte en una dirección es la misma sobre cualquier eje, lo que facilita el cálculo de la resistencia al corte utilizando el corte resultante de las cargas biaxiales. En cambio, como lo comenta el código ACI 318-19 [ACI Committee 318, 2019], no es práctico calcular la resistencia al corte nominal en la dirección del corte resultante en columnas cuadradas o rectangulares.

Así mismo el modelo no es capaz de representar otro tipo de secciones. Y si bien el elemento E-SFI-3D tiene una rigidez asociada a la torsión y calcula la deformación de torsión en cada prisma de hormigón armado este efecto no ha sido validado.

El modelo propuesto, basado en el modelo E-SFI [Massone et al., 2021], modifica el comportamiento constitutivo adoptado de los paneles de hormigón armado calculando las tensiones principales en un ángulo que rota a lo largo de todo el análisis y no en un ángulo fijo simulando la dirección de fisura como el modelo base desarrollado en [Orakcal et al., 2019, Kolozvari et al., 2018]. Es decir se basa en la teoría del campo de compresión modificado (MCFT por sus siglas en inglés), inicialmente descrito en [Vecchio and Collins, 1986] y actualizado en [Bentz et al., 2006, Sadeghian and Vecchio, 2018], y en el modelo de armadura ablandada de ángulo rotacional [Pang and Hsu, 1995]; a esto se añade un modelo de acción de dovola en las barras de acero longitudinal para controlar las deformaciones de corte similar a lo propuesto en [Kolozvari et al., 2018] pero con una ley constitutiva elasto-plástica hasta alcanzar el esfuerzo máximo descrito en [Dulacska, 1972]. El modelo incorpora dentro del material un algoritmo no iterativo desarrollado por [Brannon, 2011] para calcular los valores y vectores propios de un tensor de deformación de 3x3, junto con un procedimiento de derivación numérica para calcular la matriz de rigidez tangente, (6x6), de cada prisma de hormigón armado del elemento E-SFI-3D. Dentro del elemento, al igual que el modelo E-SFI, se agrega la expresión calibrada en [Massone et al., 2021] para calcular la deformación normal horizontal de cada panel de hormigón en ambos planos ortogonales (ε_x y ε_z) en términos de variables locales del panel, como la deformación de corte (γ_{xy} y γ_{yz}) y cuantía de refuerzo horizontal (ρ_{hx} y ρ_{hz}) correspondientes a su respectivo plano ortogonal; lo que permite tener doce (12) grados de libertad por cada elemento E-SFI-3D. El modelo se valida y centra su estudio en columnas de hormigón armado cuadradas y rectangulares especialmente cortas sometidas a cargas biaxiales.

1.3. Hipótesis.

La capacidad del macro-modelo para predecir la respuesta no lineal ante cargas biaxiales obedece a las siguientes hipótesis:

1. Las secciones transversales inicialmente planas y paralelas siguen siendo planas, aunque no paralelas a lo largo del proceso de deformación (hipótesis de NavierBernoulli).
2. Se puede aplicar leyes constitutivas uniaxiales al hormigón tridimensional, evaluadas con las deformaciones principales actuando en las direcciones principales del estado del material.
3. La expresión calibrada en [Massone et al., 2021] para la deformación normal horizontal da resultados no lineales relativamente similares a los resultados experimentales para columnas cargadas en una dirección.
4. Es posible capturar correctamente el efecto de ablandamiento del hormigón en base a la expresión de [Vecchio and Collins, 1993] para un espacio tridimensional.

1.4. Objetivos.

En resumen, los objetivos principales del presente estudio son:

1. Demostrar analíticamente la degradación de la resistencia al corte en columnas que fallan por corte con carga biaxial respecto a lo que especifica el código ACI 318-14, especialmente para columnas cortas.
2. Extender el modelo del material (FSAM) de dos dimensiones a tres dimensiones.
3. Capturar el efecto de ablandamiento del hormigón en tres dimensiones.
4. Extender el modelo del elemento (E-SFI) en dos dimensiones a tres dimensiones con las expresiones calibradas para calcular las deformaciones normales horizontales.
5. Validar la formulación tridimensional con: la formulación bidimensional, con los resultados experimentales de columnas cargadas en una dirección, y con los resultados de columnas cargadas en dos direcciones.

1.5. Organización.

Esta disertación es dividida en seis capítulos. El capítulo dos expone una revisión de la literatura del desarrollo de los macro-modelos que son la base para el macro-modelo E-SFI-3D, y el efecto de corte biaxial observado en ensayos experimentales de columnas de hormigón armado. El capítulo tres describe el modelo analítico propuesto y las leyes constitutivas usadas para los materiales. El capítulo cuatro presenta un análisis de sensibilidad del modelo analítico a la discretización vertical y horizontal, y el modelo de acción de dovola propuesto para el acero longitudinal, junto con el enfoque de deslizamiento en la unión columna-base necesario para modelar las columnas de hormigón armado, terminando con un análisis del efecto de corte biaxial del modelo E-SFI-3D comparado con los resultados del modelo *dispBeamColumn* de *OpenSees*. El capítulo cinco presenta la comparación de resultados entre lo predicho por el modelo y lo medido en los 56 ensayos experimentales. Por último, se presenta un resumen y las conclusiones en el capítulo seis.

Capítulo 2

Revisión de la Literatura

En la primera parte de este capítulo, se presenta una revisión de los principales enfoques de los modelos macroscópicos que son la base para desarrollar el modelo E-SFI, seguido de una descripción de las expresiones calibradas que se han encontrado en la literatura para la deformación normal horizontal.

En la segunda parte, se presenta una revisión del comportamiento de la resistencia al corte por efecto de cargas biaxiales observado experimental en columnas de hormigón armado; y se expone una explicación de los modelos tridimensionales que se han desarrollado en la literatura para capturar el efecto de cargas biaxiales en la resistencia al corte de columnas cuadradas y rectangulares.

2.1. Desarrollo de los modelos macroscópicos base MVLEM.

La predicción de la resistencia al corte de columnas, especialmente cortas, solicitadas por esfuerzos de interacción flexión-corte en dos direcciones está ligada a modelos no lineales implementados en formulaciones sofisticadas, en otras palabras, los modelos de interacción no lineal para cargas en dos direcciones son complejos e implican un alto costo computacional.

Por otro lado, en los últimos 25 años los macro-modelos para capturar el comportamiento no lineal de un elemento estructural se han ido desarrollando en busca de suplir el alto costo computacional de micro-modelos o de elementos finitos. Entre los cuales, se ha dado seguimiento en la literatura al proceso de desarrollo del macro-modelo base MVLEM [Orakcal et al., 2004], y luego expandido y optimizado al macro-modelo llamado dispBeamColumnInt [Massone et al., 2006], hasta llegar al macro-modelo llamado SFI-MVLEM, [Orakcal et al., 2012, Kolozvari et al., 2018], cuyo nombre es debido a que logra capturar la interacción acoplada de flexión y corte en su principio dirigido al análisis de muros cortos. Este modelo se encuentra implementado en la plataforma de código abierto OpenSees [McKenna et al., 2010], y si bien la implementación presenta ligeras discrepancias con resultados experimentales de diferentes tipos de muros, la continua investigación y desarrollo del modelo ha logrado solventar estos inconvenientes, incluso simulando el comportamiento flexural no linealidad y el comportamiento acoplado no lineal de flexión-corte en columnas [Kolozvari et al., 2018].

Las siguientes sub-secciones describen los modelos citados, los cuales capturan la respuesta de un muro o columna colocando un elemento sobre otro hasta alcanzar la altura total, siendo modelos similares a los modelos de fibras con plasticidad distribuida pero con un único punto de integración.

2.1.1. Modelo de elemento de línea vertical múltiple, MVLEM.

El modelo de elementos de línea vertical múltiple, (MVLEM por sus siglas en inglés), fue propuesto originalmente por [Vulcano et al., 1988] y posteriormente calibrado y validado con datos experimentales extensos a nivel de respuesta local y global por [Orakcal et al., 2004]. El modelo está disponible en el marco computacional OpenSees, [McKenna et al., 2010], implementado por [Kolozvari et al., 2018]. De acuerdo a la Fig. 2.1, un elemento MVLEM está formado por una serie de elementos uniaxiales conectados a una viga rígida en la parte superior e inferior. Se considera el supuesto cinemático de secciones planas permanecen planas (hipótesis de Bernoulli-Euler) para calcular la deformación vertical en cada uno de los m elementos uniaxiales a lo largo de la longitud del elemento, por lo que el elemento es de seis grados de libertad, con tres grados de libertad en cada nodo extremo correspondientes a dos desplazamientos, uno vertical y uno horizontal, y una rotación, $\{\delta_N\}$.

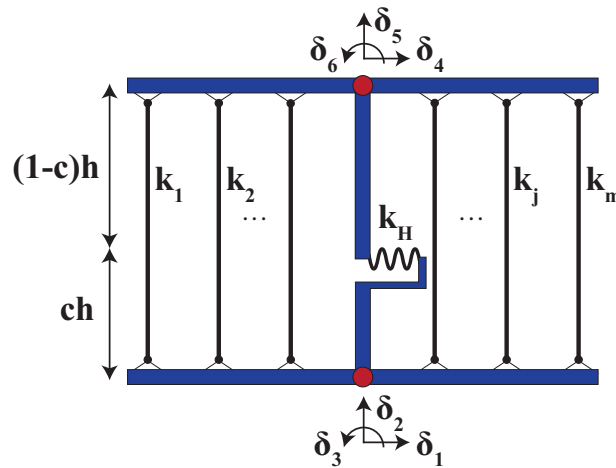


Figura 2.1: Elemento MVLEM, [López, 2021].

Se incorpora un resorte horizontal colocado a la altura ch para tener en cuenta la respuesta de corte con un comportamiento lineal elástico de fuerza-deformación. Razón por la cual, los modos de deformación por flexión y corte del elemento están desacoplados. La rotación relativa entre las caras superior e inferior del elemento se produce alrededor del punto situado en el eje central del elemento a la altura ch Fig. 2.1. Como lo describe [Orakcal et al., 2004], las rotaciones y los desplazamientos transversales resultantes se calculan en función de la curvatura del elemento correspondiente al momento flector en ese punto específico de cada elemento. La Fig. 2.2 exhibe la deformación flexural Δ del elemento MVLEM considerando una curvatura constante a diferencia de un elemento genérico basado en desplazamientos que es lineal. Se recomienda un valor de $c = 0,4$ basado en la comparación con los resultados de pruebas experimentales [Vulcano et al., 1988] y la medición del centro de rotación promedio descrito en [Orakcal and Wallace, 2006].

La matriz de rigidez global $[K]$, del elemento es de 6×6 dependiente de la rigidez de cada resorte vertical uniaxial y del resorte horizontal uniaxial de corte. Así mismo, el vector de fuerzas globales es de 6×1 obtenido del equilibrio en el elemento. El MVLEM logra un enfoque de modelado efectivo de la respuesta flexural inelástica al apilar más elementos en la altura del muro o columna, especialmente en las regiones donde se producen las deformaciones inelásticas. En otras palabras, si se tienen más elementos o elementos de menor tamaño, el momento y curvatura real varía poco

entre cada elemento y el supuesto de una curvatura constante en cada MVLEM permite mejorar la precisión analítica como se demuestra con los resultados experimentales en [Orakcal and Wallace, 2006] de columnas controladas a flexión, es decir, la contribución de la deformación a corte a la deformación global es menos del 10 %.

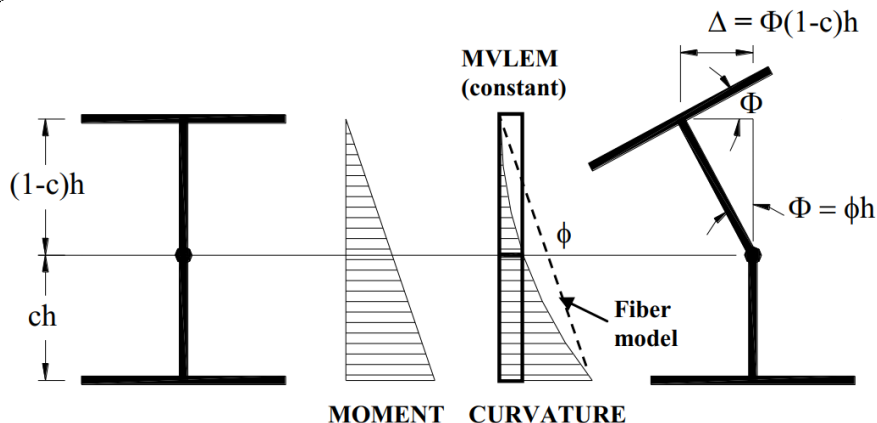


Figura 2.2: Deformaciones flexurales del MVLEM, [Orakcal et al., 2004].

2.1.2. Modelo de fibra basado en desplazamiento de interacción flexión-corte, dispBeamColumnInt.

El modelo de fibra basado en desplazamiento de interacción corte-flexión, (dispBeamColumnInt), implementado en la plataforma computacional OpenSees fue desarrollado por [Massone et al., 2006] y se basa en aplicar la metodología desarrollada por [Petrangeli et al., 1999], al modelo macroscópico MVLEM. En la Fig. 2.3 se ilustra el modelo descrito, el cual incorpora el efecto de interacción flexión-corte al reemplazar los elementos uniaxiales del MVLEM por paneles bidimensionales de hormigón armado sujetos a acciones de membrana con tensiones normales y cortantes uniformes aplicadas en la dirección del plano, [Massone et al., 2006]. Para representar el comportamiento constitutivo del panel, se puede utilizar un enfoque de modelado de ángulo de rota, como se aplica en la derivación de la Teoría de Campo de Compresión Modificada [Vecchio and Collins, 1986], o el modelo de armadura ablandada de ángulo giratorio, (RA-STM) [Pang and Hsu, 1995].

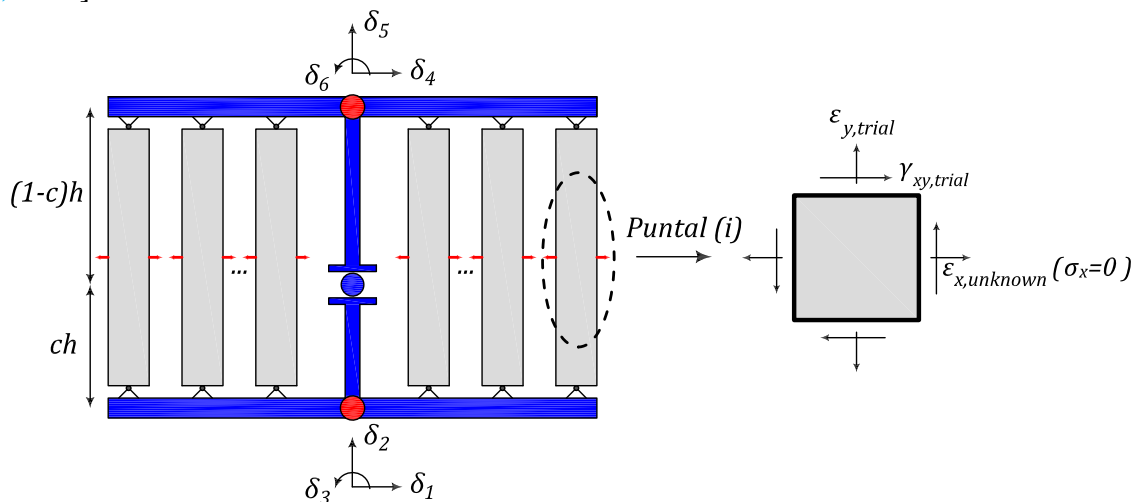


Figura 2.3: Elemento dispBeamColumnInt, después de [López, 2021].

El enfoque de ángulo que rota del elemento es el RA-STM, en donde las leyes constitutivas de tensión-deformación para el hormigón se aplican a lo largo de las direcciones principales del campo de deformación (es decir, direcciones principales 1 y 2), para obtener el campo de tensión asociado con las direcciones principales, suponiendo que las direcciones principales de tensión y deformación coinciden, como sugieren [Vecchio and Collins, 1986] y [Pang and Hsu, 1995]. En consecuencia, las respuesta axial y cortante de cada panel uniaxial están acopladas, lo que permite además el acoplamiento de las respuestas de flexión y cortante del MVLEM, ya que la respuesta axial de los paneles uniaxiales constituye la respuesta de flexión global de cada MVLEM [Massone et al., 2006].

El modelo modifica la formulación original del MVLEM para acomodar funciones de interpolación de desplazamiento y puntos de integración para la implementación práctica del modelo en plataformas computacionales. Además, asume que la deformación cortante es uniforme a lo largo de la sección y que las secciones planas permanecen planas, las componentes de deformación axial (ε_y) y distorsión cortante (γ_{xy}) del campo de deformación se calculan para toda la sección (para todos los paneles) basado en los grados de libertad prescritos. Para completar el campo de deformación se implementa un procedimiento numérico para iterar sobre el valor desconocido de la deformación normal horizontal (ε_x), hasta lograr una tensión normal horizontal resultante cero dentro de cada panel ($\sigma_x = 0$), siendo consecuente con las condiciones de borde del lado del muro o columna sin cargas transversales aplicadas en su altura. Cuando se satisface el equilibrio horizontal dentro de cada panel, se verifica el equilibrio global del muro o columna comparando las fuerzas aplicadas y las fuerzas resistentes. Con el equilibrio en el panel, se ensamblan las tensiones verticales de todos los paneles para determinar la fuerza axial y momento flector total resistente de cada elemento, mientras que la fuerza de corte de cada panel se suma para determinar la fuerza de corte resistente de cada elemento.

El modelo presenta una predicción precisa de la resistencia y rigidez de ensayos experimentales de muros estructurales con una relación de luz de corte a profundidad mayor que 0,69, que está relacionada con el supuesto del esfuerzo normal horizontal resultante cero, [Massone et al., 2006].

2.1.3. Modelo de elemento de línea vertical múltiple de interacción de flexión-corte, SFI-MVLEM.

El modelo de elemento de línea vertical múltiple de interacción flexión-corte, SFI-MVLEM disponible en la plataforma computacional OpenSees, fue desarrollado por [Kolozvari et al., 2018], basado en la metodología propuesta por [Massone et al., 2006]. De igual manera que el modelo dispBeamColumnInt, el modelo SFI-MVLEM incorpora la interacción de flexión-corte mediante paneles bidimensionales de hormigón armado; sin embargo, a diferencia del modelo anterior, el comportamiento constitutivo de cada panel bidimensional sigue la formulación del modelo de ángulo fijo llamado FSAM, [Ulugtekin, 2010, Orakcal et al., 2019]. El elemento SFI-MVLEM, como se presenta en la Fig. 2.4, calcula las deformaciones axiales verticales ($\varepsilon_{y,j}$) de cada panel de hormigón armado en base a los desplazamientos de los seis grados de libertad prescritos. La formulación del elemento considera los supuestos de que las secciones planas permanecen planas, una distribución constante de la deformación cortante a lo largo de la sección del elemento, por lo que cada panel tiene la misma deformación de corte en base a los seis grados de libertad, y una curvatura constante evaluada en la altura ch .

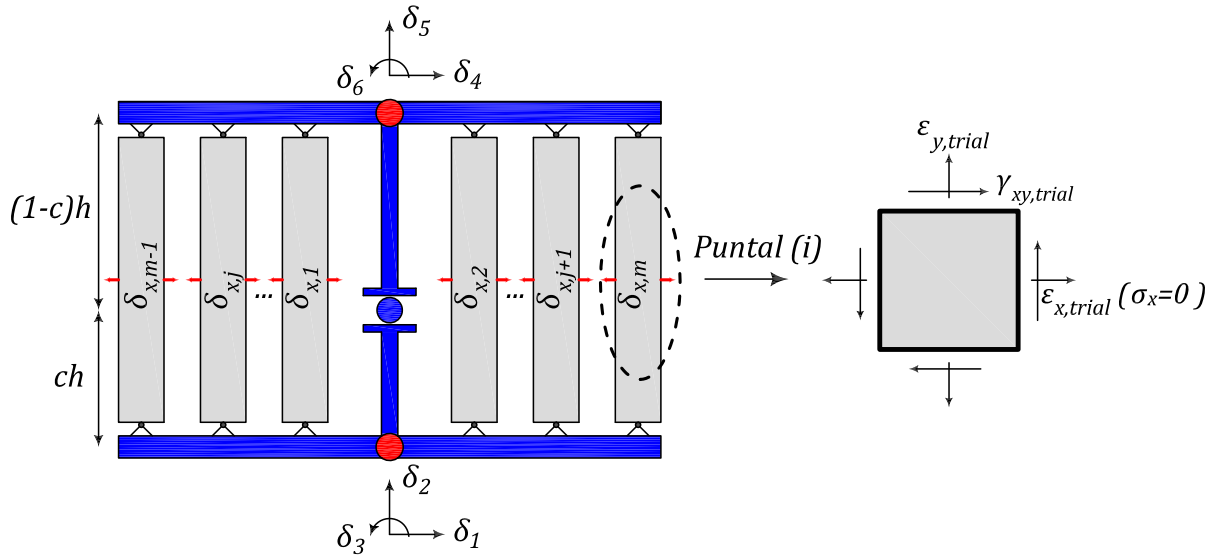


Figura 2.4: Elemento SFI-MVLEM, después de [López, 2021].

Para completar el campo de deformación de cada panel de hormigón armado y mejorar la eficiencia de cálculo en comparación con el modelo propuesto por [Massone et al., 2006], se agrega un grado de libertad horizontal adicional en cada uno de los m número de paneles, (δ_x), para calcular el valor desconocido de la deformación normal horizontal (ϵ_x), hasta cumplir con una tensión normal horizontal resultante cero, ($\sigma_x = 0$). Los grados de libertad horizontales de cada panel $\{\delta\} = \{\delta_{x,1} \delta_{x,2} \dots \delta_{x,m}\}^T$ son cinemáticamente independientes de los seis grados de libertad en los límites superior e inferior del elemento. Por lo tanto, el acoplamiento entre la respuesta axial y cortante de cada macrofibra se logra a través del comportamiento constitutivo del panel de hormigón armado, de igual manera que el modelo anterior.

El número de grados de libertad de un elemento vertical SFI-MVLEM es $N = 6 + m$, por lo que la matriz de rigidez es de $N \times N$ y el vector de fuerzas globales es de $N \times 1$. El ensamble de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas se detalla en [Kolozvari et al., 2018].

Contrario al modelo dispBeanColumnInt cuyo enfoque era de ángulo que rota, ahora se utiliza el enfoque de ángulo fijo, llamado FSAM por sus siglas en inglés Fixed-Strut-Angle-Model, el cual consta de tres estados: sin fisuración, después de la formación de la primera fisura y después de la formación de la segunda fisura, como se ilustra en la Fig. 2.5. El primer estado se describe mediante un enfoque de ángulo que rota hasta la formación de la primera fisura que se establece cuando una deformación en la dirección principal supera la deformación de fisura del hormigón (p. ej. 0.00008 [Kolozvari et al., 2018]); luego, se supone que la segunda fisura se desarrolla en dirección perpendicular a la primera cuando la deformación por tracción en la dirección de la primera fisura o puntal supera la deformación de fisura del hormigón, lo que da como resultado la formación del segundo puntal. Además de esto, el modelo de panel incorpora la transferencia del esfuerzo cortante a través de las grietas debido al interbloqueo del agregado de corte y la acción del dovela o pasador de las barras de acero, despreciando sus efectos en las direcciones principales de la tensión del hormigón.

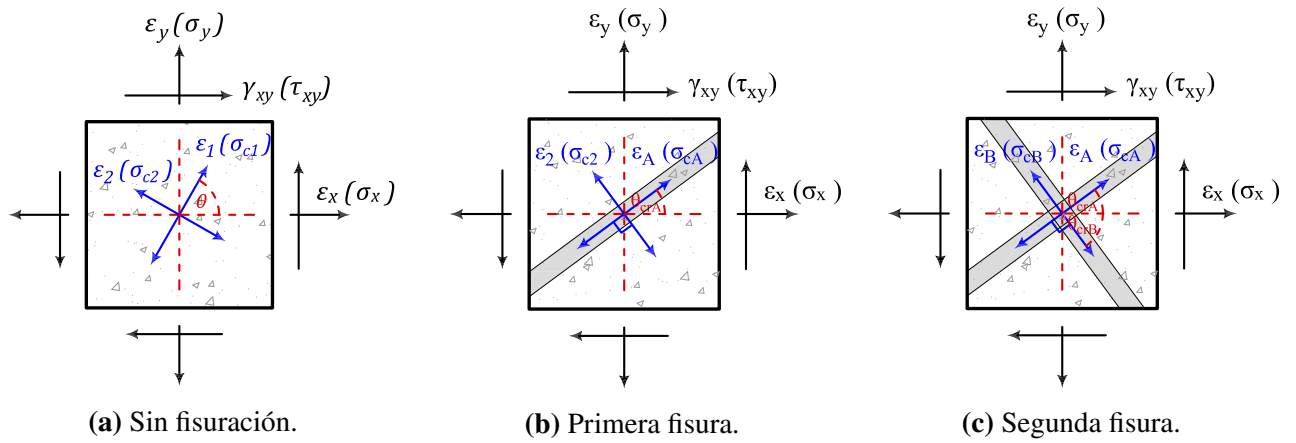


Figura 2.5: Comportamiento del hormigón FSAM, después de [Ulugtekin, 2010] y [López, 2021]

2.1.4. Modelo de interacción eficiente de flexión-corte, E-SFI.

Siguiendo este proceso de investigación y desarrollo de los macro-modelos descritos anteriormente, el reciente y novedoso modelo E-SFI [López, 2021, Massone et al., 2021] simula eficientemente la interacción flexión-corte en muros reduciendo el tiempo de ejecución en comparación con el modelo SFI-MVLEM y, principalmente, captura con mayor precisión la respuesta inelástica de muros cortos mediante una expresión calibrada para la deformación normal horizontal, solventando el inconveniente del supuesto abstracto de $\sigma_x = 0$ para muros cortos.

El modelo denominado interacción eficiente de flexión-corte (E-SFI), por sus siglas en inglés, fue desarrollado por [López, 2021, Massone et al., 2021] basado en la metodología propuesta por [Kolozvari et al., 2018] e implementado en una versión interna del software computacional OpenSees [McKenna et al., 2010]. Igual que el modelo anterior también captura la interacción de la respuesta inelástica de flexión y corte a través de los paneles bidimensionales de hormigón armado del elemento.

Como se exhibe en la Figura 2.6, un elemento E-SFI se describe mediante seis grados de libertad y, por lo tanto, no se incorporan grados de libertad adicionales en la formulación original del MVLEM. De igual manera que los otros modelos, se supone que la curvatura de un elemento E-SFI es uniforme y la rotación resultante se concentra en la altura ch , con un valor recomendado de $c = 0.4$. Con la suposición cinemática de que las secciones planas permanecen planas (hipótesis de Euler-Bernoulli), así como la suposición de una deformación cortante constante a lo largo de la longitud del elemento, se calcula la deformación axial (ϵ_y) y la distorsión cortante (γ_{xy}) para cada panel sobre toda la sección. Para completar el campo de deformaciones de un panel, se utiliza una expresión calibrada para la deformación normal horizontal (ϵ_x) en términos de variables internas del panel para obtener predicciones precisas desde muros cortos hasta esbeltos de hormigón armado, [López, 2021]. Esta expresión calibrada para (ϵ_x) permite eliminar los grados de libertad de cada panel en relación con el modelo SFI-MVLEM, lo que reduce el tiempo de ejecución y la complejidad del análisis.

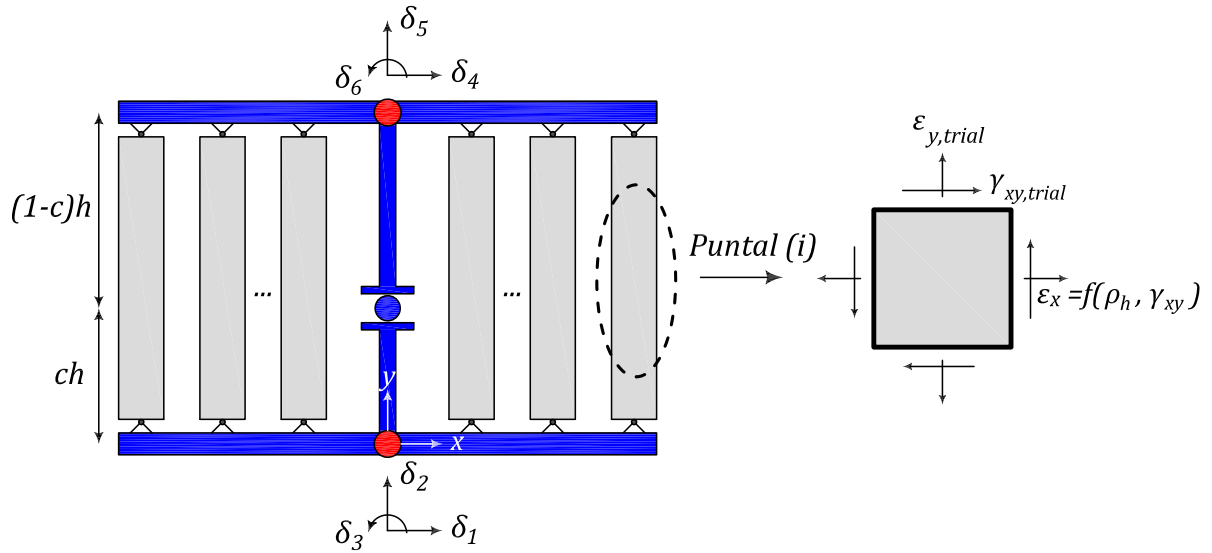


Figura 2.6: Elemento E-SFI.

La matriz de rigidez del elemento E-SFI es de 6x6 y el vector de fuerzas es de 6x1. El modelo de panel es también en base al enfoque de ángulo fijo, FSAM [Orakcal et al., 2019, Ulugtekin, 2010] con sus tres estados descritos anteriormente, e igualmente tiene el modelo de interbloqueo del agregado de corte y acción dovela para el refuerzo longitudinal.

La novedad que presenta el modelo E-SFI está referida a la expresión calibrada para calcular la deformación horizontal (ϵ_x) de cada panel de hormigón armado. No obstante, existe un par de trabajos que se han desarrollado para incluir una expresión calibrada para la deformación horizontal (ϵ_x) en el modelo de interacción de flexión-corte. Por un lado, están las expresiones que usan variables con diferentes condiciones de borde y parámetros globales del muro como: su altura, longitud, nivel de carga axial y deriva de techo lo cual genera inconvenientes para su implementación en los programas computacionales, además, de tener que calcular variables complejas a priori, como la deriva de techo del muro. Un mayor detalle de este tipo de expresiones se encuentra en [Massone, 2010], que se derivaron en base a extensos estudios de modelos de elementos finitos para 252 muros de hormigón armado.

Por otro lado, está la expresión (2.1) para ϵ_x que considera variables locales del elemento evitando los problemas mencionados anteriormente y es utilizado y validado en el modelo E-SFI [López et al., 2021] para muros. La expresión es calibrada usando la misma base de datos de [Massone, 2010] con modelos de elementos finitos de dos dimensiones de muros de hormigón armado, considerando un amplio rango de variables como: condiciones de borde de simple y doble curvatura, relación de aspecto ($h_w/l_w = 0.33$ a 1.4), cuantía de refuerzo vertical distribuido en el alma ($\rho_{wv} = 0$ a 1%), cuantía de refuerzo horizontal distribuido en el alma ($\rho_{wh} = 0$ a 1%), cuantía de refuerzo longitudinal en el borde ($\rho_b = 1$ a 6%) y carga axial ($N = 0$ a $0.3f'_cA_g$). Concluyendo que, la cuantía de esfuerzo horizontal juega un rol significativo en la relación de la deformación ϵ_x , además, de la relación de aspecto de muros, pero esta es una variable local que no se pretendió incluir en la calibración. De estos resultados se tiene una única expresión, (2.1), que cubre todas las condiciones de borde y parámetros del muro, en función de la deformación de corte (γ_{xy}) y la cuantía de refuerzo horizontal (ρ_h).

$$\varepsilon_x = 0.55(1 + \rho_h)^{60} \cdot (1 - 3^{-800 \cdot |\gamma_{xy}|}) \cdot |\gamma_{xy}| \quad (2.1)$$

La evaluación de la expresión (2.1) se muestra en la Fig. 2.6 desarrollada por [López, 2021], donde los valores de deformación normal horizontal obtenidos al evaluar la expresión calibrada ($\varepsilon_{x,CAL}$) se trazaron sobre los valores proporcionados por la base de datos de los análisis de elementos finitos ($\varepsilon_{x,FEM}$), obteniendo un valor de R-cuadrado de 0,83. Y como lo describe [López, 2021], aunque se observó una dispersión significativa, se debe tener en cuenta que la expresión calibrada cubre todas las posibles configuraciones de muros de hormigón armado y condiciones de contorno con una sola expresión. Un mayor detalle de la sensibilidad de la expresión (2.1) a las variables consideradas y no se presenta en [Massone et al., 2021].

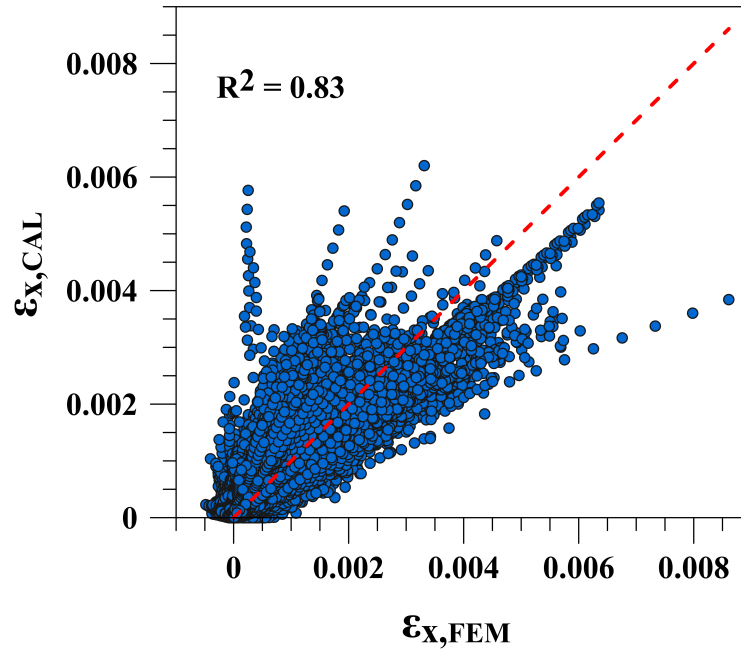


Figura 2.7: Valores predichos versus esperados de la deformación normal horizontal, [López, 2021] y [Massone et al., 2021].

2.2. Efecto de corte biaxial.

2.2.1. Evidencia experimental.

Dentro de la literatura existen referencias experimentales de columnas de hormigón armado cargadas lateralmente en diferentes direcciones que fallan por corte, una recopilación extensa de estos datos se presenta en [Massone and Correa, 2020] resumidos en la Fig. 2.8; en donde, se indica la resistencia al corte normalizada medida en los ensayos de columnas ante cargas laterales en diferentes direcciones y cargas axiales. Los datos experimentales de resistencia al corte normalizada siguen una curva de cuarto de círculo para columnas cuadradas, Fig. 2.8.(a), con fuerzas laterales en direcciones de: 22.5, 30 y 45°, y para columnas rectangulares un cuarto de elipse si los valores no estuvieran normalizados como en la Fig. 2.8.(b). La resistencia al corte de cada columna está dada por el radio de las figuras, por lo que, prácticamente una columna cuadrada tiene la misma resistencia al corte en cualquier dirección de análisis, especialmente para columnas con una carga

axial de $N \geq 0$ (compresión). Los datos experimentales de las columnas cuadradas se han duplicado en los 30° y 60° debido a la simetría de la sección.

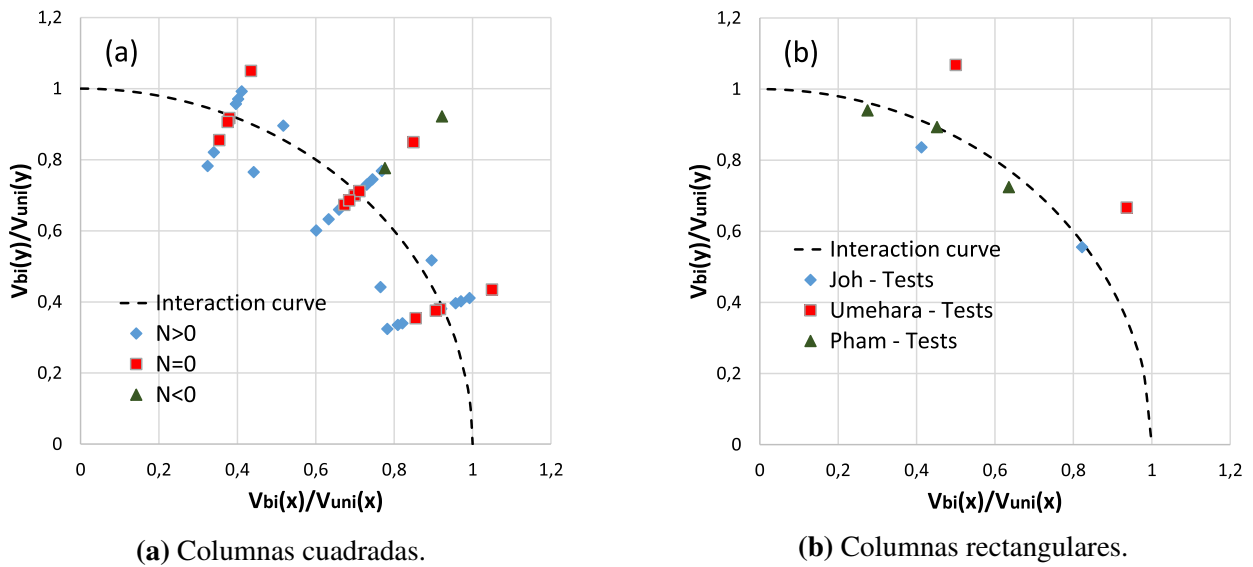


Figura 2.8: Resistencia normalizada al corte vs dirección de carga, [Massone and Correa, 2020].

Las columnas cuadradas con una carga axial de cero se correlacionan mejor con la curva de interacción, mientras que las que tienen una carga axial de compresión (rombos azules) tienen una mayor dispersión pero con la misma tendencia, y las columnas con cargas axiales de tracción (triángulos verdes) se alejan más de la curva de interacción pero como son pocos los datos no se establece ningún criterio demás. Respecto a las columnas rectangulares, es clara la tendencia de los datos experimentales a seguir la curva de interacción, entonces, la mayor resistencia al corte está dada en el eje fuerte y a causa de una carga biaxial esta resistencia se degrada hasta alcanzar la resistencia mínima que sería en el eje débil. La mayor discrepancia de los resultados experimentales de columnas rectangulares son los ensayos de [Umehara, 1983] (cuadrados rojos), sin embargo, se aprecia que captura la forma de la curva de interacción pero existe un desfase con la misma.

Las columnas experimentales que fallan por corte muestran la formación de varias fisuras inclinadas que se conectan para formar una grieta profunda diagonal de aproximadamente 45° en la parte media de la columna cerca de los ciclos de máxima resistencia. Después de eso, la resistencia al corte empieza a degradarse, y los ciclos posteriores causan que las grietas inclinadas se ensanchen, y el hormigón de recubrimiento comience a descascararse. Para cargas biaxiales de 0° y 45° los ángulos inclinados de las fisuras en una cara de la columna fueron paralelos al otro lado, mostrando una simetría de daño, pero el comportamiento de fisuración para las columnas cargadas en 30° fue más asimétrico. El ensayo experimental de [Hua et al., 2021] evaluó el daño interno de la columna, es decir, la orientación de las grietas dentro de la sección transversal, mostrando que el ángulo de agrietamiento es perpendicular a la dirección de carga o paralela a la dirección del eje neutro. Los resultados experimentales que midieron la contribución de la deformación de corte y de flexión a la deformación total lateral de la columna indican que la deformación de corte fue relativamente pequeña en el inicio, y fue creciendo drásticamente hasta ser del 70% de la deformación total cuando se alcanza la resistencia máxima, [Hua et al., 2021], por lo que no debiese ser ignorada.

2.2.2. Modelos tridimensionales.

Generalmente, los modelos tridimensionales están implementados en formulaciones de elementos finitos y logran capturar correctamente la respuesta acoplada de flexión-corte a un alto costo computacional, como se estudia en detalle en [Kolozvari et al., 2019] para muros de hormigón armado pero solo en dos dimensiones. Por otro lado, en principio existe dos modelos macroscópicos para un campo tridimensional en OpenSees [McKenna et al., 2010], los llamados “ Displacement-Based Beam-Column Element” y “Force-Based Beam-Column Element ”, ambos permiten tener una plasticidad distribuida a lo largo del elemento igual que los modelos base MVLEM. Sin embargo, no cuentan con una respuesta acoplada de flexión-corte, lo cual les hace incapaces de predecir correctamente la resistencia al corte y las deformaciones inelásticas por corte, y por ende una falla de corte en el elemento.

También cabe mencionar el macro-modelo SFI-MVLEM-3D desarrollado [Kolozvari et al., 2021]. Como lo explica su nombre, el modelo es una extensión del SFI-MVLEM a una formulación tridimensional pero solo del elemento y no del material. En la Fig. 2.9 se muestra el elemento del modelo SFI-MVLEM-3D usado para modelar muros T o U, el cual parte de la base del elemento SFI-MVLEM pero incorpora cuatro nodos en los extremos, lo que permite calcular la deformación y las dos rotación fuera del plano mediante la teoría de placas de Kirchhoff. Pero, aún mantiene los paneles en base a un comportamiento constitutivo de membrana bidimensional contrario a lo que se planea desarrollar en el presente estudio, que sería un elemento y material 3D. Además de que los supuestos de la teoría de placas de Kirchhoff como: de que el espesor del elemento es relativamente pequeño en comparación con las otras dos dimensiones, que los desplazamientos fuera del plano son pequeños en comparación con los desplazamientos dentro del plano y la energía de deformación de corte es ignorada; no cumplen las condiciones que se desarrollan en columnas por lo que el modelo, no puede considerar el efecto biaxial a nivel de material.

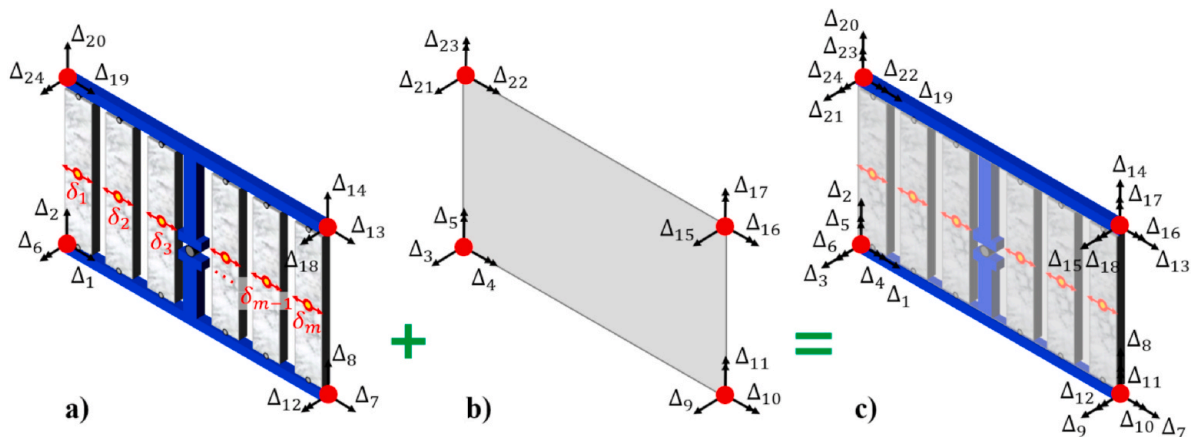


Figura 2.9: Formulación del elemento SFI-MVLEM-3D: a) comportamiento en el plano descrito con la formulación SFI-MVLEM de cuatro nodos con $12 + m$ GDLs, b) comportamiento fuera del plano descrito con el modelo de placa de Kirchhoff con 12 GDLs, c) comportamiento combinado en el plano y fuera del plano con $24 + m$ GDLs, K. Kolozvari et. al. 2021, [Kolozvari et al., 2021] .

Desde otra perspectiva, el macro-modelo SFI-MVLEM-3D no permite una discretización tridimensional de la sección de muro, es decir, no permite considerar un segundo panel fuera del plano, ya que no es necesario debido al supuesto de que el elemento tiene un espesor pequeño. También el

material de los paneles igual que los modelos anteriores solo desarrolla dos direcciones principales y el campo de deformación de cada panel sigue siendo de 2x2, lo cual es suficiente para este modelo. Sin embargo para un análisis tridimensional de columnas, es necesario que el modelo sea capaz de discretizar la sección en la dirección de los dos ejes ortogonales de análisis, lo que eventualmente implica tener un campo de deformación de 3x3 en cada panel o prisma en donde se desarrollan tres deformaciones principales, en otras palabras, extender el modelo de material FSAM de dos a tres dimensiones como se verá en el capítulo posterior.

Un mejor entendimiento de un material tridimensional lo presenta [Vecchio and Selby, 1991], en donde se describe la teoría de campo de compresión modificada (MCFT, [Vecchio and Collins, 1986]) extrapolada a tres dimensiones y enfocado en un modelo de ángulo que rota. Esta formulación denominada análisis del campo de compresión de sólidos de hormigón armado establece la matriz de rigidez del material de 6x6, además del comportamiento constitutivo del sólido como el efecto de ablandamiento del hormigón y rigidez por tensión. Sin embargo, la teoría 3D no fue actualizada a las posteriores mejoras de la teoría de campo de compresión modificada como en la “Respuesta a la compresión del hormigón armado fisurado” 1993 [Vecchio and Collins, 1993] y la “Teoría del campo de compresión modificada simplificada para calcular la resistencia al corte de elementos de hormigón armado” [Bentz et al., 2006]). Uno de los parámetros más representativos de la teoría, MCFT, que fue validada únicamente para una formulación bidimensional es el factor de ablandamiento, β , el cual se explica y estudia en la sección 3.3.2.

A pesar de las referencias anteriores, es limitada la investigación a materiales y elementos en 3D para columnas rectangulares debido a la complejidad en el desarrollo de modelos de materiales triaxiales robustos y precisos para el hormigón, [Kagermanov and Ceresa, 2018]. [Mazars et al., 2006] desarrollaron un elemento basado en desplazamientos con la teoría de viga de Timoshenko usando un modelo constitutivo 3D para el hormigón en base a un mecanismo de daño continuo, pero validado para: una respuesta biaxial flexural en una columna, un muro U con esfuerzos importantes de corte, (llevando un par de horas el análisis) y torsión en vigas; pero no corte biaxial en columnas como se busca. Mullapudi y Ayoub, [Mullapudi and Ayoub, 2013], formuló un elemento de fibras 3D basado en una matriz de flexibilidad, y una ley constitutiva del hormigón que sigue el modelo de membrana ablandado con una formulación de rigidez tangente, pero validado para una columna circular sin efectos biaxiales e incluso con una respuesta flexural, y para una columna circular sometida a torque monotónico; pero tampoco a columnas de hormigón armado con cargas biaxiales. Entre los modelos 3D más recientes, Poliotti et al., [Poliotti et al., 2021] propuso un modelo de sección transversal que modela el material del hormigón usando modelos de daño plástico y basado en una descomposición de los desplazamientos; esta sección transversal se incorpora a un elemento de fuerza de OpenSees para resolver un espacio tridimensional validando los resultados con: vigas de hormigón armado sometidas a flexión y corte combinados y una columna de hormigón armado cargada cíclicamente pero solo en una dirección ortogonal. [Nguyen et al., 2021] desarrolló un elemento viga-columna de multi-fibras basado en una formulación de desplazamientos usando la suposición de viga de Timoshenko, y para representar el comportamiento constitutivo del hormigón utilizó la teoría de campo de compresión modificada, pero el modelo es validado únicamente para vigas sometidas a flexión-torsión y flexión-corte-torsión.

Un macro-modelo que plantea una extensión del material de membrana del caso 2D al caso 3D en base a la teoría de campo de compresión modificada, MCFT, es el elemento de marco basado en fibra tridimensional que tiene en cuenta las condiciones de tensión multiaxial en estructuras de hormigón

armado desarrollado por [Kagermanov and Ceresa, 2018]. Si bien la formulación constitutiva del material de membrana en 2D se basa en lo descrito por [Kagermanov and Ceresa, 2016], el enfoque es similar a lo propuesto en la MCFT [Vecchio and Collins, 1986], o en [Stevens et al., 1991] y [Pang and Hsu, 1995], pero presenta una mayor extensión del modelo constitutivo de membrana junto con un modelo constitutivo de corte. Entre las modificaciones necesarias principales que se implementó en [Kagermanov and Ceresa, 2018] para extender el material de membrana al caso 3D son: un modelo de material de grieta ortotrópica 3D para el hormigón armado fisurado (i. e. un modelo constitutivo triaxial del hormigón), un enfoque de ángulo fijo del material, un factor de ablandamiento para el caso 3D, el supuesto de un esfuerzo horizontal resultante cero en ambas direcciones ortogonales ($\sigma_x = 0$ y $\sigma_z = 0$ siendo x y z los ejes de la sección transversal) y un esfuerzo resultante de torsión cero, ($\tau_{xz} = 0$). Un mayor detalle de la ley constitutiva triaxial se encuentra en [Kagermanov and Ceresa, 2018]; para el enfoque de ángulo fijo, después del primer agrietamiento las direcciones del material se mantienen constantes a lo largo del análisis, asumiendo que las grietas secundarias son ortogonales a las iniciales y el factor de ablandamiento β para este modelo se calcula según la expresión (2.2)

$$\beta_\sigma = \frac{1}{0.8 - 0.34(\varepsilon_{av}/\varepsilon_0)} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{av} = \frac{\varepsilon_j + \varepsilon_k}{2}$$

donde ε_j y ε_k son las deformaciones por tracción en las direcciones ortogonales y ε_0 es la deformación correspondiente a la tensión máxima del hormigón en compresión.

Lamentablemente, el modelo descrito fue validado para ensayos de columnas de hormigón armado con flexión biaxial, y vigas combinando flexión-torsión y flexión-torsión-corte; pero no en columnas con corte biaxial como se propone en el presente estudio. El modelo es similar al modelo SFI-MVLEM pero con un material y elemento 3D, con el inconveniente de que la tensión normal horizontal es cero e implica resolver ecuaciones no lineales extras de equilibrio, lo que ralentiza el proceso de análisis, particularmente para el caso tridimensional. No obstante, se utiliza un enfoque similar a lo propuesto en este modelo, [Kagermanov and Ceresa, 2018], junto a la teoría de campo de compresión modificada de sólidos, [Vecchio and Selby, 1991], para desarrollar el macro-modelo tridimensional E-SFI-3D, el cual representa una extensión del macro-modelo bidimensional E-SFI, [Massone et al., 2021], con las ventajas de la interacción corte-flexión y la optimización del análisis mediante la expresión calibrada para la deformación horizontal ε_x .

Capítulo 3

Modelo Propuesto

3.1. Descripción general del modelo E-SFI-3D.

El macro-modelo tridimensional, denominado E-SFI-3D debido a la extensión del macro-modelo bidimensional E-SFI¹, se desarrolló en base a la metodología propuesta por: [Kolozvari et al., 2018], y [López, 2021, Massone et al., 2021], en una versión interna del marco computacional OpenSees [McKenna et al., 2010]. Como se presenta en la Fig. 3.1, el modelo E-SFI-3D funciona a través del elemento tridimensional E-SFI-3D de doce grados de libertad, conectando dos nodos en altura en los extremos e incorporando el efecto acoplado de flexión-corte en cualquier dirección mediante los prismas de hormigón armado representados por un material 3D en base a [Vecchio and Selby, 1991] con un enfoque de ángulo rotacional [Pang and Hsu, 1995].

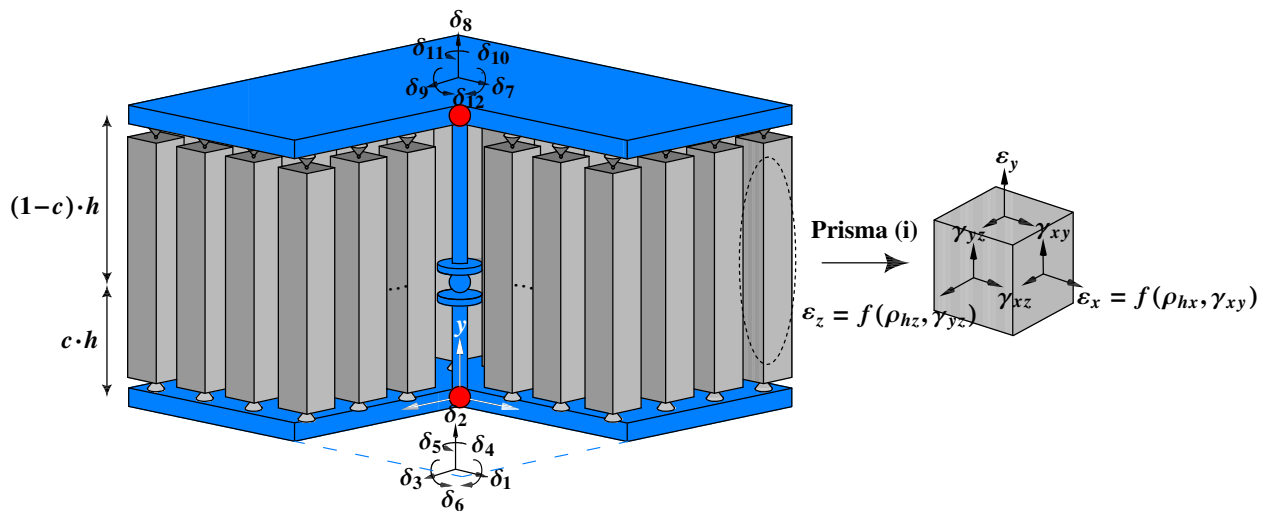


Figura 3.1: Idealización del modelo E-SFI-3D.

Los prismas de hormigón armado son una extensión general al espacio tridimensional de los paneles de hormigón armado con acción de membrana de versiones bidimensionales. El número total de prismas de un elemento E-SFI-3D es de $M_T = w \cdot t$, siendo w el número de prismas en la dirección “ x ” y t el número de prismas en la dirección ortogonal “ z ”, Fig. 3.1. El comportamiento constitutivo de los prismas sigue una formulación de ángulo rotacional, [Vecchio and Collins, 1986, Pang and Hsu, 1995], o lo que es lo mismo, solo el primer estado de una formulación de

¹E-SFI debido a la interacción eficiente de flexión-corte.

ángulo fijo, [Ulugtekin, 2010, Orakcal et al., 2012], y se basa en las hipótesis inicialmente planteadas en la sección 1.3 como se describe a continuación:

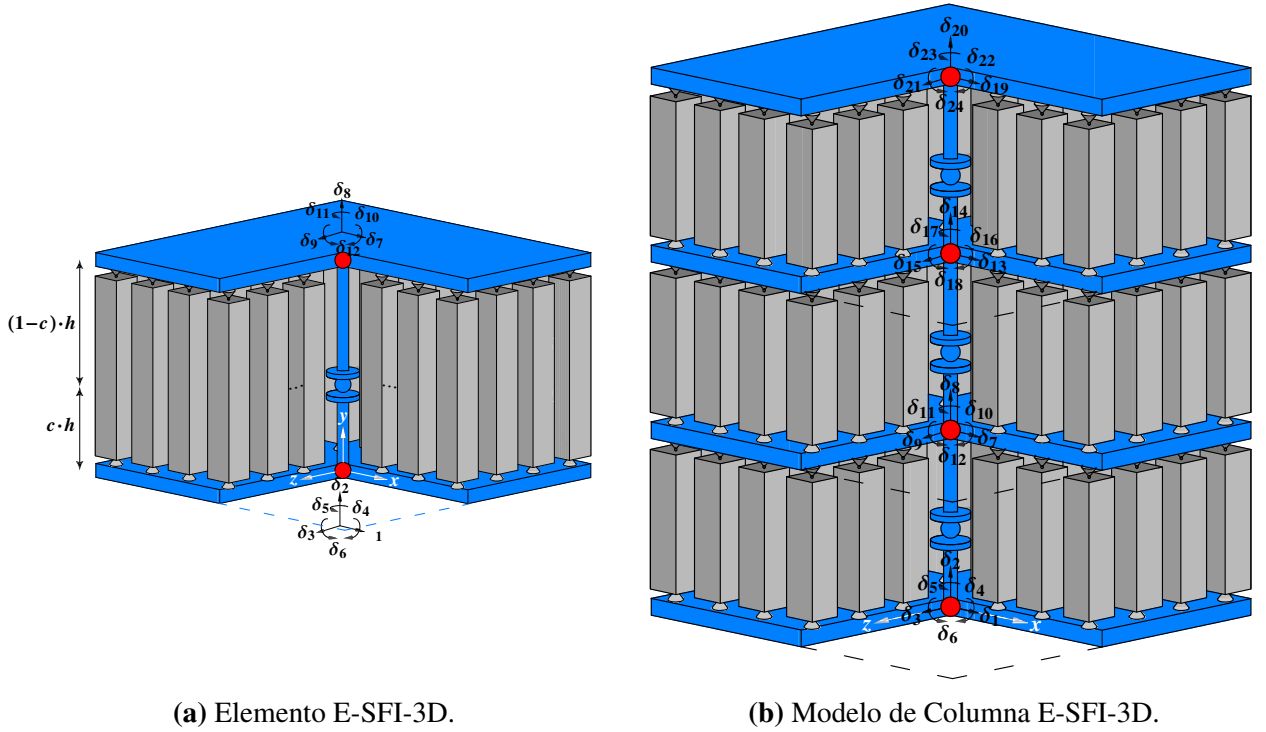
- Dentro de cada prisma, para calcular las tensiones del hormigón se utilizan leyes constitutivas uniaxiales evaluadas en las direcciones principales con las deformaciones principales; de igual manera, para calcular las tensiones del refuerzo de acero se utilizan leyes constitutivas uniaxiales evaluadas con las deformaciones normales.
- La curvatura de un elemento E-SFI-3D es asumida a ser uniforme en cada dirección ortogonal, y las rotaciones resultantes de cada dirección ortogonal se concentran en la altura ch . Se recomienda un valor de $c = 0.4$ basado en la comparación con resultados de ensayos experimentales, [Vulcano et al., 1988], y con los resultados del presente estudio.
- La suposición cinemática de que las secciones planas permanecen planas (hipótesis de Euler-Bernoulli), así como la suposición de una deformación cortante constante a lo largo de la longitud del elemento en cada dirección ortogonal, se consideran para calcular la deformación axial (ε_y) y la distorsión cortante en cada dirección ortogonal (γ_{xy} y γ_{yz}) de cada prisma. Para completar el campo de deformación de cada prisma, se utiliza la expresión calibrada en [Massone et al., 2021] para calcular la deformación normal horizontal en cada dirección (ε_x y ε_z). A pesar de que dicha expresión se obtuvo con una base de datos de muros de hormigón armado se utiliza la misma a falta de información en la literatura de una expresión calibrada en base a datos de columnas de hormigón armado.

3.2. Elemento E-SFI-3D.

En esta sub-sección, se detalla el elemento 3D del modelo E-SFI-3D, que permite calcular los componentes de deformación de los grados de libertad del elemento ante una fuerza aplicada en base a la rigidez de los prismas de hormigón armado y su configuración dentro del elemento. Para ello se define: los grados de libertad del elemento; el cálculo del campo de deformación de cada prisma de hormigón armado; la matriz de rigidez y el vector de fuerzas del elemento.

3.2.1. Grados de libertad del elemento.

Se presenta un elemento E-SFI-3D en la Fig. C.1.(a), formado por dos nodos ubicados en el centro de las placas rígidas superior e inferior. Cada nodo tiene seis grados de libertad correspondiente a tres desplazamientos, dos horizontales ($\delta_{1,3,7,9}$) y uno vertical, ($\delta_{2,8}$), y tres rotaciones, una en el plano, ($\delta_{6,12}$), otra fuera del plano, ($\delta_{4,10}$), y una rotación de torsión del elemento, ($\delta_{5,11}$). Los desplazamientos y giros de estos doce grados de libertad permite calcular la deformación normal unitaria en la dirección vertical $\varepsilon_{y,j}$, las deformaciones de corte $\gamma_{xy,j}$ y $\gamma_{yz,j}$ y la deformación de torsión $\gamma_{xz,j}$ de cada prisma de hormigón armado en base de la suposición de que las secciones planas permanecen planas y la deformación de corte de cada dirección es constante a lo largo del elemento. Para completar el campo de deformación de 3x3 de cada prisma se utiliza la expresión calibrada para la deformación horizontal unitaria de las dos direcciones ortogonales, $\varepsilon_{x,j}$ y $\varepsilon_{z,j}$, lo que reduce procesos iterativos o grados de libertad. Como se muestra en la Fig. C.1.(b), una columna se modela apilando elementos E-SFI-3D hasta alcanzar la altura total de la columna, resultando en un número total de grados de libertad de $N = 6(n + 1)$ para la columna, ($n =$ número de elementos E-SFI-3D).



(a) Elemento E-SFI-3D.

(b) Modelo de Columna E-SFI-3D.

Figura 3.2: Grados de libertad del modelo E-SFI-3D.

3.2.2. Cálculo del campo de deformación en los prismas de hormigón armado.

Las deformaciones en la dirección “y” (dirección vertical) de los M_T prismas de hormigón armado en un elemento E-SFI-3D están representados por el vector $\{u_y\}$ definido como:

$$\{u_y\} = \{u_{y,1} \ u_{y,2} \ \cdots \ u_{y,w-1} \ u_{y,(w+1)} \ u_{y,(w+2)} \ \cdots \ u_{y,(w-t)}\} \quad (3.1)$$

La relación entre los elementos del vector $\{u_y\}$ y los desplazamientos de los doce grados de libertad nodales, $\{\delta\} = \{\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \delta_4 \ \delta_5 \ \delta_6 \ \delta_7 \ \delta_8 \ \delta_9 \ \delta_{10} \ \delta_{11} \ \delta_{12}\}^T$, está dada por:

$$\{u_y\} = [a]\{\delta\} \quad (3.2)$$

donde $[a]$ es la matriz de transformación geométrica que convierte las componentes de desplazamiento de los grados de libertad nodales $\{\delta\}$ en las deformación vertical de los prisma $\{u_y\}$ según la suposición de que las secciones planas permanecen planas.

$$[a] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -z_1 & 0 & -x_1 & 0 & 1 & 0 & z_1 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & -z_2 & 0 & -x_2 & 0 & 1 & 0 & z_2 & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & -z_w & 0 & -x_w & 0 & 1 & 0 & z_w & 0 & x_w \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & -z_{w-t} & 0 & -x_{w-t} & 0 & 1 & 0 & z_{w-t} & 0 & x_{w-t} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

La deformación unitaria normal vertical del j^{vo} prisma, $(\varepsilon_{y,j})$, es calculado dividiendo la deformación vertical del j^{vo} prisma por la longitud del elemento (h), de acuerdo a la expresión (3.4).

$$\varepsilon_{y,j} = \frac{u_{y,j}}{h} \quad (3.4)$$

La deformación de corte en la dirección x y z de un elemento E-SFI-3D (u_{shx} , u_{shz}) se calcula a la altura ch en función de los grados de libertad del elemento $\{\delta\}$ como,

$$u_{shx} = \{b_x\}^T \cdot \{\delta\} \quad (3.5)$$

$$u_{shz} = \{b_z\}^T \cdot \{\delta\} \quad (3.6)$$

donde $\{b\}$ es la matriz de transformación geométrica que convierte los grados de libertad nodales en la deformación de corte del elemento, dada por la ecuación (3.7) para la dirección x y la ecuación (3.8) para la dirección z .

$$\{b_x\}^T = \{1; 0; 0; 0; 0; -c \cdot h; -1; 0; 0; 0; 0; -(1-c) \cdot h; \} \quad (3.7)$$

$$\{b_z\}^T = \{0; 0; 1; -c \cdot h; 0; 0; 0; 0; -1; -(1-c) \cdot h; 0; 0; \} \quad (3.8)$$

Suponiendo una distribución constante de la deformación de corte a lo largo de la longitud del elemento en ambas direcciones ortogonales, la deformación unitaria de corte del j^{vo} prisma de hormigón armado ($\gamma_{xy,j}$, $\gamma_{yz,j}$) se calcula dividiendo la deformación de corte respectiva (u_{shx} , u_{shz}) para la altura del elemento (h), según las ecuaciones (3.9) y (3.10) para las direcciones x y z .

$$\gamma_{xy,j} = -\frac{u_{shx}}{h} \quad (3.9)$$

$$\gamma_{yz,j} = -\frac{u_{shz}}{h} \quad (3.10)$$

La deformación unitaria normal en ambas dirección horizontales x y z para el j^{vo} prisma de hormigón armado ($\varepsilon_{x,j}$, $\varepsilon_{z,j}$) se calcula mediante la expresión calibrada de [Massone et al., 2021] en función de la deformación unitaria de corte respectiva y cuantía horizontal del acero de refuerzo respectivo, como se presenta en las ecuaciones (3.11) y (3.12) para las direcciones x y z .

$$\varepsilon_x = 0.55(1 + \rho_{hx})^{60} \cdot (1 - 3^{-800 \cdot |\gamma_{xy}|}) \cdot |\gamma_{xy}| \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_z = 0.55(1 + \rho_{hz})^{60} \cdot (1 - 3^{-800 \cdot |\gamma_{yz}|}) \cdot |\gamma_{yz}| \quad (3.12)$$

La deformación unitaria de torsión o la deformación unitaria angular, γ_{xz} , se relaciona con el ángulo de giro de la sección circular del elemento y tiene un valor de deformación para cada posición radial como se describe en la expresión (3.13):

$$\gamma_{xz} = \frac{\theta \cdot r}{h} \quad (3.13)$$

donde θ es el giro de la sección y r es la distancia del centro del elemento a un punto de la sección.

Para calcular la deformación de torsión del elemento E-SFI-3D se parte de la suposición de que los prismas de hormigón armado están unidos a las placas rígidas en los extremos, de este modo, el ángulo de giro en la sección del elemento definido por los grados de libertad correspondiente es el mismo giro de la cara de cada prisma. Por lo tanto, la deformación unitaria de torsión $\gamma_{xz,j}$, en base a la expresión (3.13), del j^{vo} prisma de hormigón armado respecto al eje del prisma para pequeñas deformaciones es:

$$\gamma_{xz,j} = \frac{u_{t,j}}{h} \quad (3.14)$$

donde u_t es el vector de las deformaciones de cada prisma debido a la rotación de la sección superior e inferior de acuerdo a los grados de libertad nodales δ_5 y δ_{11} , dado por:

$$u_t = [T] \cdot \{\delta\} \quad (3.15)$$

donde $[T]$ es la matriz de transformación geométrica que convierte las rotaciones de torsión nodales en la deformación de torsión de cada prisma según su posición radial en la sección, como se muestra en la ecuación (3.16).

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{x_1^2 + z_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{x_1^2 + z_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{x_2^2 + z_2^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{x_2^2 + z_2^2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{x_w^2 + z_w^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{x_w^2 + z_w^2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{x_{w-t}^2 + z_{w-t}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{x_{w-t}^2 + z_{w-t}^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

La expresión (3.14) de la deformación unitaria de torsión de cada prisma sobre la sección del elemento presenta ciertos inconvenientes debido a la propia formulación del elemento. Por un lado, debido a que la placa es infinitamente rígida, la sección rectangular del elemento no es capaz de producir deformaciones fuera del plano de la sección transversal ante un esfuerzo de torsión, despreciando así los efectos de alabeo de una sección rectangular. Por otro lado, de acuerdo a la matriz de transformación geométrica $[T]$ y el supuesto de una placa rígida, las mayores deformaciones de torsión se darán en las esquinas de la sección transversal lo que es erróneo, porque en las esquinas de la sección los esfuerzos y deformaciones de corte son nulos por una fuerza de torsión para una sección rectangular, teniendo los máximos esfuerzos a lo largo de la línea central de cada una de sus caras. Si bien, se plantean estos inconvenientes en la formulación del elemento para la deformación de torsión, los ensayos experimentales para validar el modelo no presentan esfuerzos de torsión, y la validación del modelo para ensayos experimentales bajo esfuerzos de torsión con los supuestos considerados están fuera del alcance del presente estudio.

Por lo tanto, el campo de deformación unitario de 3x3, (tridimensional), utilizado para definir la deformación de cada prisma de hormigón armado se describe mediante seis componentes de deformación $\varepsilon_{y,j}$, $\varepsilon_{x,j}$, $\varepsilon_{z,j}$, $\gamma_{xy,j}$, $\gamma_{yz,j}$ y $\gamma_{xz,j}$ y de manera matricial según la expresión (3.17).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x,j} & \gamma_{xy,j} & \gamma_{xz,j} \\ \gamma_{xy,j} & \varepsilon_{y,j} & \gamma_{yz,j} \\ \gamma_{xz,j} & \gamma_{yz,j} & \varepsilon_{z,j} \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \varepsilon_{x,j} & 2\varepsilon_{xy,j} & 2\varepsilon_{xz,j} \\ 2\varepsilon_{xy,j} & \varepsilon_{y,j} & 2\varepsilon_{yz,j} \\ 2\varepsilon_{xz,j} & 2\varepsilon_{yz,j} & \varepsilon_{z,j} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

3.2.3. Matriz de rigidez del elemento.

La rigidez del elemento E-SFI-3D está formada por la rigidez de los prismas de hormigón armado lo que permite acoplar la interacción flexión-corte en el modelo. Considerando los doce grados de libertad ubicados en el centro de las placas rígidas superior e inferior de un elemento E-SFI-3D $\{\delta\}$, la matriz de rigidez del elemento relativa a estos grados de libertad $[K_e]$ de 12×12 se calcula en base al equilibrio del elemento, como se describe uniendo la matriz $[K_{e1}]$, de la expresión (3.18), de 12×6 con la matriz K_{e2} , de la expresión (3.19), de 12×6 ; i. e. $[K_e] = [K_{e1} \ K_{e2}]$. El detalle completo del cálculo de la matriz de rigidez del elemento $[K_e]$ se presenta en la sección A.2 de los anexos.

$$\begin{bmatrix}
 k_{shx} & 0 & 0 & 0 & \sum_{j=1}^{w \cdot t} k_{shx,jz_j} & -k_{shx}ch \\
 \sum_{j=1}^{w \cdot t} k_{y,j} & 0 & \sum_{j=1}^{w \cdot t} k_{y,jz_j} & & 0 & \sum_{j=1}^{w \cdot t} k_{y,jx_j} \\
 & k_{shz} & -k_{shz}ch & & -\sum_{j=1}^{w \cdot t} k_{shz,jx_j} & 0 \\
 & & k_{shz}c^2h^2 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} k_{y,jz_j^2} & & \sum_{j=1}^{w \cdot t} k_{shz,jx_j}ch & \sum_{j=1}^{w \cdot t} k_{y,jx_jz_j} \\
 \vdots & & & & \sum_{j=1}^{w \cdot t} k_{shz,jx_j^2} + \sum_{j=1}^{w \cdot t} k_{shx,jz_j^2} & -\sum_{j=1}^{w \cdot t} k_{shx,jz_j}ch \\
 & & & \dots & & k_{shx}c^2h^2 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} k_{y,jx_j^2} \\
 & & & & & \vdots \\
 & & & & & \vdots \\
 & & & & & \vdots \\
 & & & & & \vdots \\
 & & & & & \vdots \\
 & & & & & \vdots \\
 & & & & & \vdots \\
 Sim. & & & & \dots & \vdots
 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\begin{bmatrix}
-k_{shx} & 0 & 0 & 0 & -\sum_{j=1}^{w-t} k_{shx,j} z_j & -k_{shx}(1-c)h \\
0 & -\sum_{j=1}^{w-t} k_{y,j} & 0 & -\sum_{j=1}^{w-t} k_{y,j} z_j & 0 & -\sum_{j=1}^{w-t} k_{y,j} x_j \\
0 & 0 & -k_{shz} & -k_{shz}(1-c)h & \sum_{j=1}^{w-t} k_{shz,j} x_j & 0 \\
0 & -\sum_{j=1}^{w-t} k_{y,j} z_j & k_{shz} c h & k_{shz}(1-c) c h^2 - \sum_{j=1}^{w-t} k_{y,j} z_j^2 & -\sum_{j=1}^{w-t} k_{shz,j} x_j c h & -\sum_{j=1}^{w-t} k_{y,j} x_j z_j \\
-\sum_{j=1}^{w-t} k_{shx,j} z_j & 0 & \sum_{j=1}^{w-t} k_{shz,j} x_j & \sum_{j=1}^{w-t} k_{shz,j} x_j (1-c) h & -\sum_{j=1}^{w-t} k_{shz,j} x_j^2 - \sum_{j=1}^{w-t} k_{shx,j} z_j^2 & -\sum_{j=1}^{w-t} k_{shx,j} z_j (1-c) h \\
k_{shx} c h & -\sum_{j=1}^{w-t} k_{y,j} z_j & 0 & -\sum_{j=1}^{w-t} k_{y,j} x_j z_j & \sum_{j=1}^{w-t} k_{shx,j} z_j c h & \sum_{j=1}^{w-t} k_{shx,j} (1-c) c h^2 - \sum_{j=1}^{w-t} k_{y,j} x_j^2 \\
k_{shx} & 0 & 0 & 0 & \sum_{j=1}^{w-t} k_{shx,j} z_j & k_{shx}(1-c) h \\
\vdots & \sum_{j=1}^{w-t} k_{y,j} & 0 & \sum_{j=1}^{w-t} k_{y,j} z_j & 0 & \sum_{j=1}^{w-t} k_{y,j} x_j \\
\vdots & & k_{shz} & k_{shz}(1-c) h & -\sum_{j=1}^{w-t} k_{shz,j} x_j & 0 \\
\vdots & & & k_{shz}(1-c)^2 h^2 + \sum_{j=1}^{w-t} k_{y,j} z_j^2 & -\sum_{j=1}^{w-t} k_{shz,j} x_j (1-c) h & \sum_{j=1}^{w-t} k_{y,j} x_j z_j \\
\vdots & & & \ddots & \sum_{j=1}^{w-t} k_{shz,j} x_j^2 + \sum_{j=1}^{w-t} k_{shx,j} z_j^2 & \sum_{j=1}^{w-t} k_{shx,j} z_j (1-c) h \\
Sim. & & & \dots & & k_{shx}(1-c)^2 h^2 + \sum_{j=1}^{w-t} k_{y,j} x_j^2
\end{bmatrix} \quad (3.19)$$

donde x_j y z_j corresponden a la posición de cada panel dentro del elemento E-SFI-3D en base al eje cartesiano de la Fig. 3.1; $k_{y,j}$ es la rigidez vertical del j^{vo} prisma de hormigón armado, $k_{shx,j}$ y $k_{shz,j}$ son las rigideces de corte en la dirección respectiva del j^{vo} prisma de hormigón armado, y k_{shx} y k_{shz} son las rigideces de corte formada por todos los prismas de hormigón armado en la dirección respectiva, como se muestra en las ecuaciones (3.20) y (3.21).

$$k_{shx} = \sum_{j=1}^{w-t} k_{shx,j} \quad (3.20)$$

$$k_{shz} = \sum_{j=1}^{w-t} k_{shz,j} \quad (3.21)$$

Para cualquier campo de deformación prescrito del j^{vo} prisma de hormigón armado, la rigidez vertical ($k_{y,j}$) y la rigidez de corte en las direcciones ortogonales ($k_{shx,j}$ y $k_{shz,j}$) son obtenidas con las siguientes expresiones:

$$k_{y,j} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial u_y} \right)_j = \left(\frac{\partial F_y}{\partial \sigma_y} \right)_j \cdot \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_y} \right)_j \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial u_y} \right)_j = \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_y} \right)_j \cdot \frac{A_{y,j}}{h} \quad (3.22)$$

$$k_{shx,j} = \left(\frac{\partial F_{shx}}{\partial u_{shx}} \right)_j = \left(\frac{\partial F_{shx}}{\partial \tau_{xy}} \right)_j \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \gamma_{xy}} \right)_j \cdot \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial u_{shx}} \right)_j = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \gamma_{xy}} \right)_j \cdot \frac{A_{y,j}}{h} \quad (3.23)$$

$$k_{shz,j} = \left(\frac{\partial F_{shz}}{\partial u_{shz}} \right)_j = \left(\frac{\partial F_{shz}}{\partial \tau_{yz}} \right)_j \cdot \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \gamma_{yz}} \right)_j \cdot \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial u_{shz}} \right)_j = \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \gamma_{yz}} \right)_j \cdot \frac{A_{y,j}}{h} \quad (3.24)$$

donde $A_{y,j}$ es el área transversal del j^{vo} prisma de hormigón armado y los valores de las derivadas parciales se obtienen de la matriz de rigidez parcial $[K_p]_j$ de cada prisma de hormigón armado de acuerdo a la expresión (3.25) y resueltas en detalle en la sub-sección 3.3.4.

$$[K_p]_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_z} & \frac{\partial \sigma_x}{\partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial \sigma_x}{\partial \gamma_{xz}} & \frac{\partial \sigma_x}{\partial \gamma_{yz}} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_z} & \frac{\partial \sigma_y}{\partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial \sigma_y}{\partial \gamma_{xz}} & \frac{\partial \sigma_y}{\partial \gamma_{yz}} \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \sigma_z}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial \sigma_z}{\partial \varepsilon_z} & \frac{\partial \sigma_z}{\partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial \sigma_z}{\partial \gamma_{xz}} & \frac{\partial \sigma_z}{\partial \gamma_{yz}} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \varepsilon_z} & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \gamma_{xz}} & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \gamma_{yz}} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \varepsilon_z} & \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \gamma_{xz}} & \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \gamma_{yz}} \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \varepsilon_z} & \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \gamma_{xz}} & \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \gamma_{yz}} \end{bmatrix}_j \quad (3.25)$$

3.2.4. Vector de fuerzas del elemento.

El vector de fuerzas de un elemento E-SFI-3D se obtiene a partir del equilibrio del elemento, formado por la fuerza axial vertical ($F_{y,j}$) y las fuerzas de corte en los dos planos horizontales ($F_{shx,j}$ y $F_{shz,j}$) de todos los prismas de hormigón armado dentro del elemento y calculado en base a los esfuerzos axial vertical y de corte multiplicados por el área tributaria correspondiente a donde el esfuerzo está actuando. Las fuerzas resultantes para el j^{vo} prisma de hormigón armado se dan como:

$$F_{y,j} = \sigma_{y,j} \cdot A_{y,j} \quad (3.26)$$

$$F_{shx,j} = \tau_{xy,j} \cdot A_{y,j} \quad (3.27)$$

$$F_{shz,j} = \tau_{yz,j} \cdot A_{y,j} \quad (3.28)$$

donde $\sigma_{y,j}$, $\tau_{xy,j}$ y $\tau_{yz,j}$ son los esfuerzos de axial y de corte en las dos direcciones ortogonales, obtenidos del comportamiento constitutivo del prisma de hormigón armado para el campo de deformación tridimensional prescrito, ($\varepsilon_{x,j}$, $\varepsilon_{y,j}$, $\varepsilon_{z,j}$, $\gamma_{xy,j}$, $\gamma_{yz,j}$ y $\gamma_{xz,j}$), y detallado en la sección 3.3.

La fuerza de corte total en cada dirección para un elemento (F_{shx} y F_{shz}) es igual a la suma de las fuerzas de corte resultantes en cada prisma de hormigón armado del elemento, descrito en las expresiones (3.29) y (3.30).

$$F_{shx} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{shx,j} \quad (3.29)$$

$$F_{shz} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{shz,j} \quad (3.30)$$

Entonces, para un elemento E-SFI-3D, el vector de fuerzas resistente F_e de 12x1 relativo a los doce grados de libertad se obtiene del equilibrio como muestra la expresión (3.31).

$$\{F_e\} = \left\{ F_{shx}; -\sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j}; F_{shz}; -F_{shz}ch - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j}z_j; -\sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{shz,j}x_j + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{shx,j}z_j; -F_{shx}ch - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j}x_j \right. \\ \left. -F_{shx}; \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j}; -F_{shz}; -F_{shz}(1-c)h + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j}z_j; \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{shz,j}x_j - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{shx,j}z_j; -F_{shx}(1-c)h + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j}x_j \right\}^T \quad (3.31)$$

El detalle completo del cálculo del vector de fuerzas del elemento $\{F_e\}$ se presenta en la sección A.1 de los anexos.

3.3. Material 3D.

En esta sub-sección se presenta la descripción del comportamiento constitutivo de los prismas de hormigón armado, ya que la rigidez del elemento depende de la rigidez de cada prisma de hormigón armado, definiendo: el enfoque de ángulo rotacional para calcular las deformaciones y tensiones principales, el cálculo de las tensiones normales para el vector de fuerzas y la matriz de rigidez del elemento, el ablandamiento por compresión del hormigón para el material 3D, la acción de dovola del modelo y la matriz de rigidez del material 3D.

3.3.1. Enfoque de ángulo que rota.

El comportamiento constitutivo adoptado para los prismas de hormigón armado es el llamado ángulo rotacional basado en [Vecchio and Collins, 1986] y [Pang and Hsu, 1995]. El cual plantea que las fisuras o grietas están rotando según las direcciones principales conforme cambia el campo de deformación, a diferencia de un enfoque de ángulo fijo, FSAM [Orakcal et al., 2019], que considera grietas fijas una vez que se alcanza cierta deformación. El enfoque de ángulo rotacional considera solo el primer estado de un enfoque de ángulo fijo, cuyo estado se define en la Fig. 3.3 por los ejes principales 1-2 y el ángulo θ para el caso 2D, y los ejes principales 1-2-3 y los cosenos directores de los ángulos η , θ y ι para el caso 3D. Como se observa, se basa en el supuesto de que las deformaciones principales y tensiones principales ocurren en la misma dirección, lo que facilita la utilización de leyes uniaxiales de tensión-deformación evaluadas en las direcciones principales para caracterizar el comportamiento del hormigón tanto para el caso 2D como el 3D. Mientras que las tensiones que se desarrollan en las barras de acero de refuerzo se obtienen utilizando un modelo constitutivo uniaxial evaluado en las direcciones longitudinales o normales.

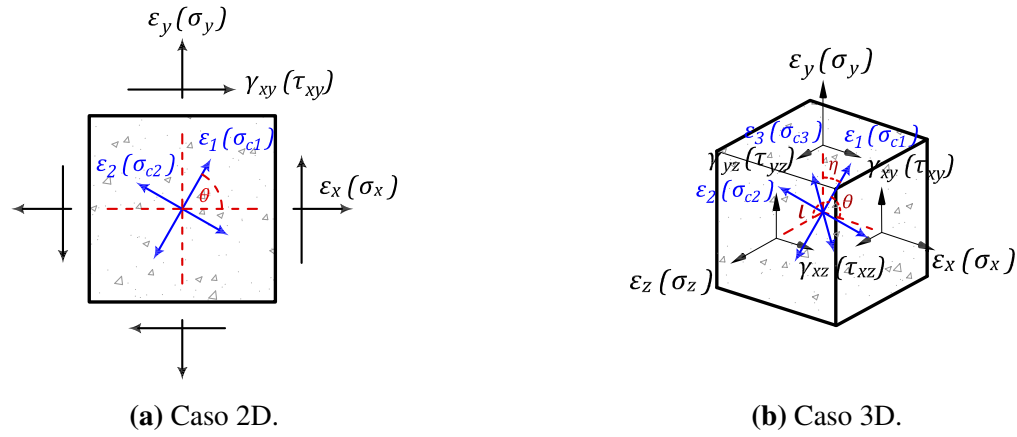


Figura 3.3: Condiciones de deformación y tensión en el hormigón armado.

El único estado del hormigón implica que las direcciones principales estarán cambiando continuamente durante el análisis, ya que el campo de deformación de cada prisma varía de acuerdo a las fuerzas aplicadas en el elemento. Para un cierto campo de deformación aplicado en el prisma ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$ y γ_{xz}) las deformaciones y direcciones principales se calculan resolviendo un problema de valores y vectores propios; para lo cual se ha desarrollado el algoritmo 1-2 en base a [Brannon, 2011]. El algoritmo no iterativo resuelve el problema de valores y vectores de una matriz de 3x3, en este caso definido por el campo de deformación tridimensional, sin ninguna solución compleja si la matriz es real y simétrica como lo es el campo de deformación del prisma.

ALGORITMO 1

Parte 1. Seudo-código para la solución de valores y vectores propios de una matriz simétrica de 3x3.

| | |
|--|---|
| <p>$\varepsilon_H, \varepsilon_M, \varepsilon_L$ $P_H, P_{MY}P_L$ 1: input \underline{A} 2: input $In = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ 3: input $z = \frac{In}{\sqrt{3}}$ 4: input \underline{I} 5: input $\underline{E}_z = \underline{I}/\sqrt{3} \cdot 0$ 6: input $\underline{S} = \underline{A} - \frac{z}{\sqrt{3}}\underline{I}$ 7: input $r = \ \underline{S}\ = \sqrt{S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 + 2(S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2)}$ 8: if $r > 0.0$ then 9: $\underline{E}_r = \underline{S}/r$ 10: $\sin 3\theta = 3\sqrt{6} \cdot \text{Det} \left \underline{E}_r \right$ 11: $\cos 3\theta = \sqrt{1 - \sin^2 3\theta}$ 12: if $\cos 3\theta > 0.0$ then 13: $\theta = \arcsin(\sin 3\theta)/3$</p> | <p>► EigenValor mayor, medio y menor, respectivamente. ► EigenProyector de 3x3 mayor, medio y menor, respectivamente. ► Tensor de deformación simétrico 3x3 (Campo de deformación). ► Traza de la matriz A. ► Matriz identidad. ► Tensor en la dirección de la parte deviatoria de \underline{A}. ► Calculando el determinante de \underline{E}_r. ► Todos los EigenValores distintos.</p> |
|--|---|

ALGORITMO 2

Parte 2. Seudo-código para la solución de valores y vectores propios de una matriz simétrica de 3x3.

```

14:    $\varepsilon_H = \frac{z}{\sqrt{3}} + \frac{r \left( \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{3}} + \cos(\theta) \right)}{\sqrt{2}}$ 
15:    $\varepsilon_M = \frac{z}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}} r \sin(\theta)$ 
16:    $\varepsilon_L = \frac{z}{\sqrt{3}} + \frac{r \left( \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{3}} - \cos(\theta) \right)}{\sqrt{2}}$ 
17:    $\underline{E}_0 = \frac{\sqrt{6} (\underline{E}_r \cdot \underline{E}_r - I/3) - \sin 3\theta \underline{E}_r}{\cos 3\theta}$ 
18:    $\underline{P}_H = \left( \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{2}} + \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{6}} \right) \underline{E}_r + \left( \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{6}} - \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}} \right) \underline{E}_0 + \frac{\underline{E}_z}{\sqrt{3}}$ 
19:    $\underline{P}_M = -\sqrt{\frac{2}{3}} \sin(\theta) \underline{E}_r - \sqrt{\frac{2}{3}} \cos(\theta) \underline{E}_0 + \frac{\underline{E}_z}{\sqrt{3}}$ 
20:    $\underline{P}_L = \left( -\frac{\cos(\theta)}{\sqrt{2}} + \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{6}} \right) \underline{E}_r + \left( \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{6}} + \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}} \right) \underline{E}_0 + \frac{\underline{E}_z}{\sqrt{3}}$ 
21:   else
22:      $\underline{E}_0 = \underline{E}_0 \cdot 0$ 
23:     if  $\sin 3\theta > 0.0$  then
24:        $\varepsilon_L = \varepsilon_M = \frac{z - \frac{r}{\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}$ 
25:        $\varepsilon_H = \frac{z + \sqrt{2}r}{\sqrt{3}}$ 
26:        $\underline{P}_H = \frac{1}{3} (I + \sqrt{6} \underline{E}_r)$ 
27:        $\underline{P}_M = I - \underline{P}_H$ 
28:        $\underline{P}_L = \underline{0}$ 
29:     else
30:        $\varepsilon_M = \frac{z + \frac{r}{\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}$ 
31:        $\varepsilon_L = \varepsilon_H = \frac{z - \sqrt{2}r}{\sqrt{3}}$ 
32:        $\underline{P}_L = \frac{1}{3} (I - \sqrt{6} \underline{E}_r)$ 
33:        $\underline{P}_M = I - \underline{P}_L$ 
34:        $\underline{P}_H = \underline{0}$ 
35:     end if
36:   end if
37: else
38:    $\varepsilon_H = \varepsilon_M = \varepsilon_L = z/\sqrt{3.0}$ 
39:    $\underline{E}_r = \underline{E}_0 \underline{P}_H = \underline{P}_H = \underline{P}_H = \underline{0}$ 
40: end if

```

▶ Multiplicidad doble.
 ▶ Tensor cero.
 ▶ Tensor cero.
 ▶ Tensor cero.
 ▶ Multiplicidad triple, caso no esperado.
 ▶ Tensor cero.

En el algoritmo, la matriz \underline{A} define el campo de deformación con las componentes ε_x , ε_y , ε_z , $2\varepsilon_{xy}$, $2\varepsilon_{yz}$ y $2\varepsilon_{xz}$. Luego para calcular los vectores propios λ_H , λ_M y λ_L se normaliza cualquier columna de los EigenProyectores P_H , P_M y P_L . Además, se debe detectar los casos donde los EigenProyectores son tensores cero, lo que significa que ya se tiene una dirección principal directamente en el campo de deformación. Para un mayor detalle del algoritmo se puede revisar [Brannon, 2011].

El algoritmo 1-2 calcula las deformaciones y vectores principales pero ya ordenados de mayor a menor como se especifica en el mismo. Con las deformaciones principales, ε_H , ε_M y ε_L , se aplica la relación tensión-deformación de la ley constitutiva uniaxial descrita en la sección 3.4 para obtener las tensiones del hormigón definidas como: σ_{cH} , σ_{cM} y σ_{cL} . Después de lo cual estas tensiones son reducidas por el factor de ablandamiento por compresión, β , apropiado para obtener las tensiones ablandadas del hormigón definidas como: $\sigma_{cH,\beta}$, $\sigma_{cM,\beta}$ y $\sigma_{cL,\beta}$. Las tensiones uniaxiales que se desarrollan en las barras de acero de refuerzo en las direcciones x - y - z definidas como: σ_{sx} , σ_{sy} y σ_{sz} se obtienen utilizando la ley constitutiva del acero descrita también en la sección 3.4 evaluadas con las deformaciones normales ε_x , ε_y y ε_z y se distribuyen sobre el prisma en función de las cuantías de refuerzo respectivas (ρ_{sx} , ρ_{sy} y ρ_{sz}). Además, se incluyen las tensiones de corte por la acción de dovela de las barras de acero longitudinal. Con las tensiones del hormigón y del acero, el campo de tensiones resultante de 6x6 de un prisma de hormigón armado en las coordenadas Cartesianas está dado por:

$$\sigma_x = \lambda_{H(1)}^2 \cdot \sigma_{cH,\beta} + \lambda_{M(1)}^2 \cdot \sigma_{cM,\beta} + \lambda_{L(1)}^2 \cdot \sigma_{cL,\beta} + \rho_{sx} \cdot \sigma_{sx} \quad (3.32)$$

$$\sigma_y = \lambda_{H(2)}^2 \cdot \sigma_{cH,\beta} + \lambda_{M(2)}^2 \cdot \sigma_{cM,\beta} + \lambda_{L(2)}^2 \cdot \sigma_{cL,\beta} + \rho_{sy} \cdot \sigma_{sy} \quad (3.33)$$

$$\sigma_z = \lambda_{H(3)}^2 \cdot \sigma_{cH,\beta} + \lambda_{M(3)}^2 \cdot \sigma_{cM,\beta} + \lambda_{L(3)}^2 \cdot \sigma_{cL,\beta} + \rho_{sz} \cdot \sigma_{sz} \quad (3.34)$$

$$\tau_{xy} = \lambda_{H(1)} \cdot \lambda_{H(2)} \cdot \sigma_{cH,\beta} + \lambda_{M(1)} \cdot \lambda_{M(2)} \cdot \sigma_{cM,\beta} + \lambda_{L(1)} \cdot \lambda_{L(2)} \cdot \sigma_{cL,\beta} + \rho_{sy} \cdot \tau_{Dow,xy} \quad (3.35)$$

$$\tau_{xz} = \lambda_{H(1)} \cdot \lambda_{H(3)} \cdot \sigma_{cH,\beta} + \lambda_{M(1)} \cdot \lambda_{M(3)} \cdot \sigma_{cM,\beta} + \lambda_{L(1)} \cdot \lambda_{L(3)} \cdot \sigma_{cL,\beta} \quad (3.36)$$

$$\tau_{yz} = \lambda_{H(2)} \cdot \lambda_{H(3)} \cdot \sigma_{cH,\beta} + \lambda_{M(2)} \cdot \lambda_{M(3)} \cdot \sigma_{cM,\beta} + \lambda_{L(2)} \cdot \lambda_{L(3)} \cdot \sigma_{cL,\beta} + \rho_{sy} \cdot \tau_{Dow,yz} \quad (3.37)$$

siendo $\lambda_{k(i)}$ los cosenos directores de las direcciones principales, $\sigma_{ck,\beta} = \beta_k \cdot \sigma_{ck}$ con $k = H, M, L$ e $i = 1, 2, 3$, y $\tau_{Dow,xy}$ y $\tau_{Dow,yz}$ son las tensiones de la acción de dovela revisadas más adelante.

3.3.2. Ablandamiento por compresión en el hormigón, β .

El efecto de ablandamiento por compresión es la reducción observada experimentalmente, (p. ej., [Vecchio and Collins, 1986]), en la resistencia y rigidez de la dirección principal de compresión del hormigón, debido a la presencia de deformaciones por tracción en la otra dirección principal perpendicular; por lo tanto, como se ilustra en la Fig. 3.4 para un espacio bidimensional, la respuesta de los prismas de hormigón armado podría ser sustancialmente diferente a la del hormigón simple comprimido uniaxialmente. La mayoría de los modelos de ablandamiento por compresión se formularon para cargas monotónicas; sin embargo, algunos de ellos se implementaron para el análisis cíclico (p. ej., [Belarbi and Hsu, 1995]; [Vecchio and Collins, 1993]).

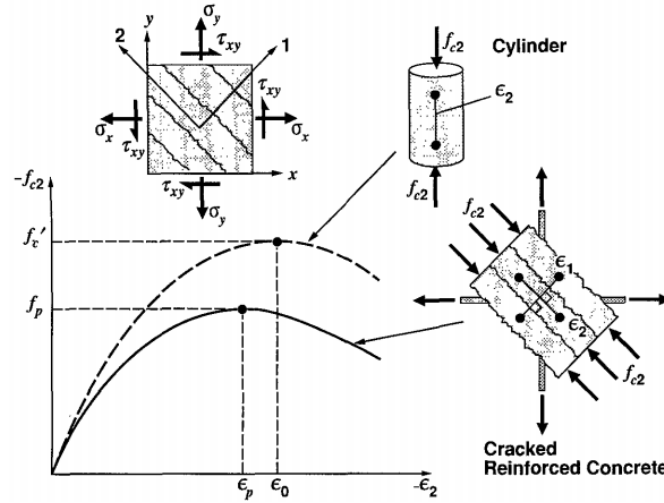


Figura 3.4: Respuesta a compresión deteriorada en los elementos de hormigón armado fisurado.

Dentro del modelo E-SFI se encuentra implementado el llamado “modelo B”, desarrollado por [Vecchio and Collins, 1993] en base a estudios estadísticos de una extensa base de datos, el cual considera solo la reducción de la tensión máxima de compresión. El coeficiente de ablandamiento por compresión β para la reducción de la resistencia a compresión del hormigón a lo largo de la dirección principal de compresión está definido por la ecuación (3.38):

$$\beta = \frac{1}{1 + 0.27 \cdot \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 0.37 \right)} \quad (3.38)$$

donde ε_1 es la deformación a tracción en la dirección principal de la tensión de tracción y ε_0 es la deformación correspondiente al esfuerzo máximo del hormigón en compresión.

Eventualmente, en el caso tridimensional se origina otra deformación principal ortogonal a las deformaciones principales anteriores, sin embargo, actualmente la única manera para considerar el factor β en un espacio tridimensional es utilizar la expresión (3.38) del caso bidimensional y modificar el valor de ε_1 . En base a la teoría del factor de ablandamiento, si las otras dos deformación principal son de tracción el efecto de ablandamiento debiese reducir aún más la resistencia a compresión del hormigón comparado con el caso 2D, por lo tanto, la variable ε_1 se modifica a la variable ε_{max} y el factor β de ablandamiento queda definido en la ecuación (3.39):

$$\beta_{3D} = \frac{1}{1 + 0.27 \cdot \left(\frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_0} - 0.37 \right)} \quad (3.39)$$

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_j + \varepsilon_k \quad (3.40)$$

donde ε_j y ε_k son las deformaciones principales en las direcciones j y k , ortogonales a la dirección principal de ε_{max} , lo que permite aumentar el valor de ε_{max} si las dos direcciones ortogonales son de tracción reduciendo así el factor de ablandamiento y por ende la resistencia a compresión. Un enfoque similar se emplea en [Kagermanov and Ceresa, 2018] para calcular el factor de ablandamiento, pero utilizando el promedio de las dos direcciones ortogonales como se mostró en la expresión (2.2), aunque esto implica que en el caso bidimensional una deformación ortogonal sea cero y, en realidad, se esté evaluando la mitad de la deformación.

3.3.3. Acción de dovela.

Para controlar la deformación de corte después de que se alcanza la máxima resistencia en la columna y la respuesta es degradante debido al deterioro del hormigón en grandes deformaciones inelásticas, se implementa un modelo de dovela o pasador para las barras de acero del refuerzo longitudinal. La contribución de la barra de acero a la resistencia al corte es adaptado por un modelo elasto-plástico como se expone en la Fig. 3.5, con una pendiente inicial en la región elástica igual a αE_s , (E_s = módulo de elasticidad del acero). La región plástica del modelo se alcanza al igualar el valor del esfuerzo máximo τ_{max} , implementada con una regla histerética de descarga dirigida al origen, por cuya pendiente se recarga el ciclo posterior y así se actualiza el modelo producto del daño que acumula. La acción de dovela actúa desde el inicio de la respuesta, incluso cuando el hormigón físicamente no se fisura, ya que solo existe un estado en el modelo del material, sin embargo, es conocido que la fisuración del hormigón ocurre tempranamente en la respuesta, (al alcanzar una deformación de tracción mayor a 0.00008), por lo que, en este punto el esfuerzo de corte es sumamente bajo y prácticamente no afecta la respuesta de resistencia de la columna como se presenta en los resultados. La relación tensión-deformación del modelo elasto-plástico se calcula directamente con la deformación de corte $\gamma_{xy,yz}$ en su respectivo plano horizontal.

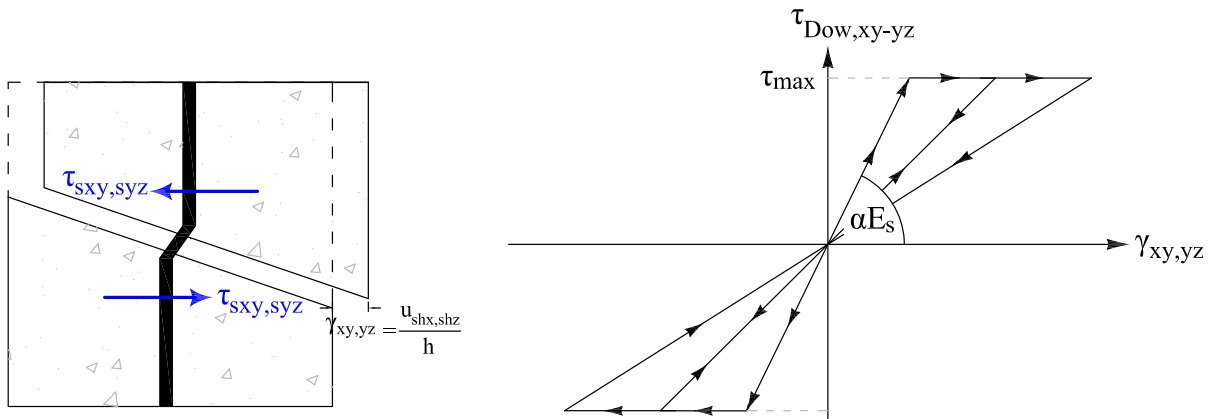


Figura 3.5: Modelo de acción de dovela.

El modelo elasto-plástico de acción de dovela con una regla histerética orientada al origen relaciona la deformación de corte $\gamma_{xy,yz}$ en el plano respectivo con la tensión de corte $\tau_{xy,yz}$ hasta alcanzar una tensión máxima τ_{max} según la expresión (3.41) obtenida de [Dulacska, 1972]:

$$\tau_{max} = 1.15 \cdot \frac{\phi_{bar}^2}{A_{bar}} \sqrt{\rho \cdot f'_c \cdot f_y} = \frac{4.6}{\pi} \sqrt{\rho \cdot f'_c \cdot f_y} \quad (3.41)$$

donde ϕ_{bar} es el diámetro de la barra de refuerzo, A_{bar} es el área de la barra de refuerzo, los que llegan a ser irrelevantes para la tensión máxima, f'_c es el esfuerzo de compresión del hormigón, f_y es el esfuerzo de fluencia del acero y $\rho = 1 - N^2/N_y^2$ siendo: N la fuerza de tracción en la barra y N_y la fuerza de tracción que induce la fluencia de la barra en tensión pura, es decir, si la barra está en compresión, $\rho = 1$ y el esfuerzo límite τ_{max} es máximo. Por el contrario, si la barra de acero está en tracción, ρ decrece igual que el esfuerzo máximo τ_{max} hasta el punto donde la barra de acero fluye y $\tau_{max} = 0$, lo que significa que la barra no desarrolla acción de dovela.

En base al inconveniente anterior, un modelo óptimo de acción de dovela restringiría su aplicación en una barra de acero que alcanza la fluencia, y también sería proporcional al nivel de tracción

hasta un valor máximo cuando la barra se comprime. No obstante, teniendo en cuenta que es un modelo simplificado de modelos histeréticos más avanzados, y que todas las barras están limitadas al mismo esfuerzo máximo τ_{max} estén en tracción o no; en el presente estudio se realiza un análisis seccional para reducir el esfuerzo máximo τ_{max} proporcionalmente al porcentaje del área de acero de la sección transversal que se encuentra en fluencia como se desarrolla en un ejemplo en la sección 4.3, en donde se discute también la calibración del coeficiente α , ya que las expresiones evaluadas en la literatura sobrestiman en gran medida esta rigidez inicial.

3.3.4. Matriz de rigidez parcial tangente.

En esta sub-sección se describe el desarrollo de los términos de la matriz de rigidez tangente del j^{vo} prisma de hormigón armado presentado en la ecuación (3.25). En rigor, se muestra el desarrollo de los términos necesarios para calcular la matriz de rigidez del elemento completo, ya que dicha matriz está en función de la rigidez vertical de cada prisma $k_{y,j}$, Ec. (3.22), y la rigidez al corte en cada dirección del prisma $k_{shx,j}$ y $k_{shz,j}$, Ec. (3.23) y (3.24) respectivamente. Para la rigidez vertical del j^{vo} prisma es necesario calcular la derivación de $\frac{\partial \sigma_{y,j}}{\partial \varepsilon_{y,j}}$; y para la rigidez cortante del j^{vo} prisma es necesario calcular la derivación de $\frac{\partial \tau_{xy,j}}{\partial \gamma_{xy,j}}$ y $\frac{\partial \tau_{yz,j}}{\partial \gamma_{yz,j}}$ de acuerdo a la dirección horizontal respectiva. Para desarrollar estos términos es necesario revisar el equilibrio con la variación de los deformaciones $\varepsilon_{y,j}$, $\gamma_{xy,j}$ y $\gamma_{yz,j}$ y las tensiones $\sigma_{y,j}$, $\tau_{xy,j}$ y $\tau_{yz,j}$ calculadas en las ecuaciones (3.33), (3.35) y (3.37), respectivamente. Implícitamente dentro de las tensiones del hormigón se encuentra el factor de ablandamiento β , por lo que cada término se desarrolla descomponiendo la parte del hormigón y acero como:

$$\frac{\partial \sigma_{y,j}}{\partial \varepsilon_{y,j}} = \frac{\partial (\sigma_{(cy,j),\beta} + \sigma_{sy,j})}{\partial \varepsilon_{y,j}}$$

$$\sigma_{(cy,j),\beta} = \lambda_{H(2)}^2 \cdot \beta_H \cdot \sigma_{cH} + \lambda_{M(2)}^2 \cdot \beta_M \cdot \sigma_{cM} + \lambda_{L(2)}^2 \cdot \beta_L \cdot \sigma_{cL}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{y,j}}{\partial \varepsilon_{y,j}} = & 2 \cdot \lambda_{H(2)} \cdot \frac{\partial \lambda_{H(2)}}{\partial \varepsilon_y} \cdot \beta_H \cdot \sigma_{cH} + \lambda_{H(2)}^2 \left[\left(\frac{\partial \beta_H}{\partial \varepsilon_M} \cdot \frac{\partial \varepsilon_M}{\partial \varepsilon_y} + \frac{\partial \beta_H}{\partial \varepsilon_L} \cdot \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \varepsilon_y} \right) \cdot \sigma_{cH} + \beta_H \cdot \frac{\partial \sigma_{cH}}{\partial \varepsilon_H} \cdot \frac{\partial \varepsilon_H}{\partial \varepsilon_y} \right] + \\ & 2 \cdot \lambda_{M(2)} \cdot \frac{\partial \lambda_{M(2)}}{\partial \varepsilon_y} \cdot \beta_M \cdot \sigma_{cM} + \lambda_{M(2)}^2 \left[\left(\frac{\partial \beta_M}{\partial \varepsilon_H} \cdot \frac{\partial \varepsilon_H}{\partial \varepsilon_y} + \frac{\partial \beta_M}{\partial \varepsilon_L} \cdot \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \varepsilon_y} \right) \cdot \sigma_{cM} + \beta_M \cdot \frac{\partial \sigma_{cM}}{\partial \varepsilon_M} \cdot \frac{\partial \varepsilon_M}{\partial \varepsilon_y} \right] + \\ & 2 \cdot \lambda_{L(2)} \cdot \frac{\partial \lambda_{L(2)}}{\partial \varepsilon_y} \cdot \beta_L \cdot \sigma_{cL} + \lambda_{L(2)}^2 \left[\left(\frac{\partial \beta_L}{\partial \varepsilon_H} \cdot \frac{\partial \varepsilon_H}{\partial \varepsilon_y} + \frac{\partial \beta_L}{\partial \varepsilon_L} \cdot \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \varepsilon_y} \right) \cdot \sigma_{cL} + \beta_L \cdot \frac{\partial \sigma_{cL}}{\partial \varepsilon_L} \cdot \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \varepsilon_y} \right] + \frac{\partial \sigma_{sy}}{\partial \varepsilon_y} \cdot \rho_y \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy,j}}{\partial \gamma_{xy,j}} = \left\{ \frac{\partial(\tau_{cxy,j,\beta} + \tau_{sxy,j})}{\partial \varepsilon_{xy,j}} \right\} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\tau_{(cxy,j),\beta} = \lambda_{H(1)} \cdot \lambda_{H(2)} \cdot \beta_H \cdot \sigma_{cH} + \lambda_{M(1)} \cdot \lambda_{M(2)} \cdot \beta_M \cdot \sigma_{cM} + \lambda_{L(1)} \cdot \lambda_{L(2)} \cdot \beta_L \cdot \sigma_{cL}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xy,j}}{\partial \varepsilon_{xy,j}} = & \left\{ \frac{\partial \lambda_{H(1)}}{\partial \varepsilon_{xy}} \cdot \lambda_{H(2)} \cdot \beta_H \cdot \sigma_{cH} + \lambda_{H(1)} \cdot \frac{\partial \lambda_{H(2)}}{\partial \varepsilon_{xy}} \cdot \beta_H \cdot \sigma_{cH} + \lambda_{H(1)} \cdot \lambda_{H(2)} \cdot \left[\left(\frac{\partial \beta_H}{\partial \varepsilon_M} \cdot \frac{\partial \varepsilon_M}{\partial \varepsilon_{xy}} + \frac{\partial \beta_H}{\partial \varepsilon_L} \cdot \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \varepsilon_{xy}} \right) \cdot \sigma_{cH} \right. \right. \\ & + \beta_H \cdot \left. \frac{\partial \sigma_{cH}}{\partial \varepsilon_H} \cdot \frac{\varepsilon_H}{\varepsilon_{xy}} \right] + \frac{\partial \lambda_{M(1)}}{\partial \varepsilon_{xy}} \cdot \lambda_{M(2)} \cdot \beta_M \cdot \sigma_{cM} + \lambda_{M(1)} \cdot \frac{\partial \lambda_{M(2)}}{\partial \varepsilon_{xy}} \cdot \beta_M \cdot \sigma_{cM} + \lambda_{M(1)} \cdot \lambda_{M(2)} \cdot \left[\left(\frac{\partial \beta_M}{\partial \varepsilon_H} \cdot \frac{\partial \varepsilon_H}{\partial \varepsilon_{xy}} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial \beta_M}{\partial \varepsilon_L} \cdot \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \varepsilon_{xy}} \right) \cdot \sigma_{cM} + \beta_M \cdot \frac{\partial \sigma_{cM}}{\partial \varepsilon_M} \cdot \frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_{xy}} \right] + \frac{\partial \lambda_{L(1)}}{\partial \varepsilon_{xy}} \cdot \lambda_{L(2)} \cdot \beta_L \cdot \sigma_{cL} + \lambda_{L(1)} \cdot \frac{\partial \lambda_{L(2)}}{\partial \varepsilon_{xy}} \cdot \beta_L \cdot \sigma_{cL} + \\ & \left. \lambda_{L(1)} \cdot \lambda_{L(2)} \cdot \left[\left(\frac{\partial \beta_L}{\partial \varepsilon_H} \cdot \frac{\partial \varepsilon_H}{\partial \varepsilon_{xy}} + \frac{\partial \beta_L}{\partial \varepsilon_M} \cdot \frac{\partial \varepsilon_M}{\partial \varepsilon_{xy}} \right) \cdot \sigma_{cL} + \beta_L \cdot \frac{\partial \sigma_{cL}}{\partial \varepsilon_L} \cdot \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_{xy}} \right] + \frac{\partial \tau_{Dow,xy}}{\partial \varepsilon_{xy}} \right\} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial \tau_{yz,j}}{\partial \gamma_{yz,j}} = \left\{ \frac{\partial(\tau_{cyz,j,\beta} + \tau_{syz,j})}{\partial \varepsilon_{yz,j}} \right\} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\tau_{(cyz,j),\beta} = \lambda_{H(2)} \cdot \lambda_{H(3)} \cdot \beta_H \cdot \sigma_{cH} + \lambda_{M(2)} \cdot \lambda_{M(3)} \cdot \beta_M \cdot \sigma_{cM} + \lambda_{L(2)} \cdot \lambda_{L(3)} \cdot \beta_L \cdot \sigma_{cL}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{yz,j}}{\partial \varepsilon_{yz,j}} = & \left\{ \frac{\partial \lambda_{H(2)}}{\partial \varepsilon_{yz}} \cdot \lambda_{H(3)} \cdot \beta_H \cdot \sigma_{cH} + \lambda_{H(2)} \cdot \frac{\partial \lambda_{H(3)}}{\partial \varepsilon_{yz}} \cdot \beta_H \cdot \sigma_{cH} + \lambda_{H(2)} \cdot \lambda_{H(3)} \cdot \left[\left(\frac{\partial \beta_H}{\partial \varepsilon_M} \cdot \frac{\partial \varepsilon_M}{\partial \varepsilon_{yz}} + \frac{\partial \beta_H}{\partial \varepsilon_L} \cdot \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \varepsilon_{yz}} \right) \cdot \sigma_{cH} \right. \right. \\ & + \beta_H \cdot \left. \frac{\partial \sigma_{cH}}{\partial \varepsilon_H} \cdot \frac{\varepsilon_H}{\varepsilon_{yz}} \right] + \frac{\partial \lambda_{M(2)}}{\partial \varepsilon_{yz}} \cdot \lambda_{M(3)} \cdot \beta_M \cdot \sigma_{cM} + \lambda_{M(2)} \cdot \frac{\partial \lambda_{M(3)}}{\partial \varepsilon_{yz}} \cdot \beta_M \cdot \sigma_{cM} + \lambda_{M(2)} \cdot \lambda_{M(3)} \cdot \left[\left(\frac{\partial \beta_M}{\partial \varepsilon_H} \cdot \frac{\partial \varepsilon_H}{\partial \varepsilon_{yz}} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial \beta_M}{\partial \varepsilon_L} \cdot \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \varepsilon_{yz}} \right) \cdot \sigma_{cM} + \beta_M \cdot \frac{\partial \sigma_{cM}}{\partial \varepsilon_M} \cdot \frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_{yz}} \right] + \frac{\partial \lambda_{L(2)}}{\partial \varepsilon_{yz}} \cdot \lambda_{L(3)} \cdot \beta_L \cdot \sigma_{cL} + \lambda_{L(2)} \cdot \frac{\partial \lambda_{L(3)}}{\partial \varepsilon_{yz}} \cdot \beta_L \cdot \sigma_{cL} + \\ & \left. \lambda_{L(2)} \cdot \lambda_{L(3)} \cdot \left[\left(\frac{\partial \beta_L}{\partial \varepsilon_H} \cdot \frac{\partial \varepsilon_H}{\partial \varepsilon_{yz}} + \frac{\partial \beta_L}{\partial \varepsilon_M} \cdot \frac{\partial \varepsilon_M}{\partial \varepsilon_{yz}} \right) \cdot \sigma_{cL} + \beta_L \cdot \frac{\partial \sigma_{cL}}{\partial \varepsilon_L} \cdot \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_{yz}} \right] + \frac{\partial \tau_{Dow,yz}}{\partial \varepsilon_{yz}} \right\} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dentro de estas expresiones se incluyen los términos $\frac{\partial \sigma_{ck}}{\partial \varepsilon_k} = E_{ck}$ los que representan la rigidez tangente según la ley uniaxial aplicada para el hormigón, siendo $k = H, M, L$, es decir, las tres direcciones principales. También aparece la derivada del factor de ablandamiento en las direcciones principales de tracción y la derivada del modelo de acción de dovela, ambas relativamente fáciles de calcular, pero la mayor complejidad se encuentra en la derivada de las deformaciones y direcciones principales, las cuales debieran ser resueltas explícitamente para una mayor rapidez del modelo en

su implementación en el software OpenSees. Sin embargo, resolver explícitamente las deformaciones principales conlleva resolver ecuaciones de tercer orden que resultan en soluciones extensas y susceptibles a resultados complejos, más aun si posteriormente se las deriva y se tiene en cuenta que la deformación horizontal ε_x o ε_z tiene una expresión calibrada con términos absolutos que requieren ser derivados; si bien la solución es extensa y difícil fue posible llegar a una expresión considerando pequeñas deformaciones. No obstante, también es necesario derivar las direcciones principales, cuya solución explícita no fue posible de obtener teniendo en cuenta que además se tendría que normalizar el vector al final.

Por estos inconvenientes que no se pudieron solventar, se plantea una derivación numérica para resolver la derivada de las deformaciones y direcciones principales de cada término, teniendo en cuenta que el incremento de la variable a derivar sea lo suficientemente pequeña para el análisis. Por un lado, la desventaja de la derivación numérica se refleja en el aumento del costo computacional, porque el modelo para un solo paso de análisis tendrá que ejecutar cuatro veces el algoritmo 1-2 para encontrar las deformaciones y direcciones principales (una vez para el campo de deformación impuesto, y tres veces para las derivadas de los términos $k_{y,j}$, k_{shx} y k_{shz}). Por otro lado, la ventaja, además de resolver el problema de la deriva de valores y vectores propios, es la facilidad para considerar otras expresiones calibradas de la deformación horizontal ε_x y ε_z , ya que la resolución numérica funciona para cualquier expresión, por más compleja que sea, a diferencia de las expresiones explícitas para la matriz de rigidez que debiesen ser cambiadas al considerar otras expresiones calibradas.

Para la etapa inicial, (primer paso de carga), donde todas las cargas y deformaciones son cero, no se puede utilizar el proceso descrito para determinar la matriz de rigidez del material, ya que algunos componentes aún no están definidos. Este problema se aborda utilizando las ecuaciones originales de equilibrio y compatibilidad para tensiones y deformaciones, y derivando (para el caso lineal) los valores de rigidez del elemento. En base a esto, [Vecchio and Selby, 1991] resolvió la matriz de rigidez inicial como se presenta en la ecuación (3.45) considerando un material isotrópico para el acero y hormigón:

$$[K_p]_i = \begin{bmatrix} E_c + E_s \cdot \rho_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_c + E_s \cdot \rho_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_c + E_s \cdot \rho_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_c}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_c}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_c}{2} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

3.4. Leyes constitutivas del hormigón y del acero.

Como se ha definido en las secciones previas, las propiedades de los prismas tridimensionales de hormigón armado se derivan a partir de las relaciones tensión-deformación actuando en las direcciones principales del material, por lo que en la siguiente sección, se detallan las leyes constitutivas uniaxiales del hormigón y acero usadas.

3.4.1. Ley constitutiva para el hormigón.

La ley constitutiva histerética uniaxial no lineal *Concrete02* disponible en OpenSees cuyo comportamiento se exhibe en la Fig. 3.6 es adoptado en el presente estudio tanto para el hormigón confinado como no confinado. Este modelo constitutivo se basa en el modelo numérico de hormigón de [Yassin, 1994] y se selecciona porque tiene en cuenta importantes características de comportamiento del material, como el deterioro del hormigón, la resistencia a la tracción del hormigón, el endurecimiento por tensión, y además porque es relativamente simple, computacionalmente eficiente y numéricamente estable.

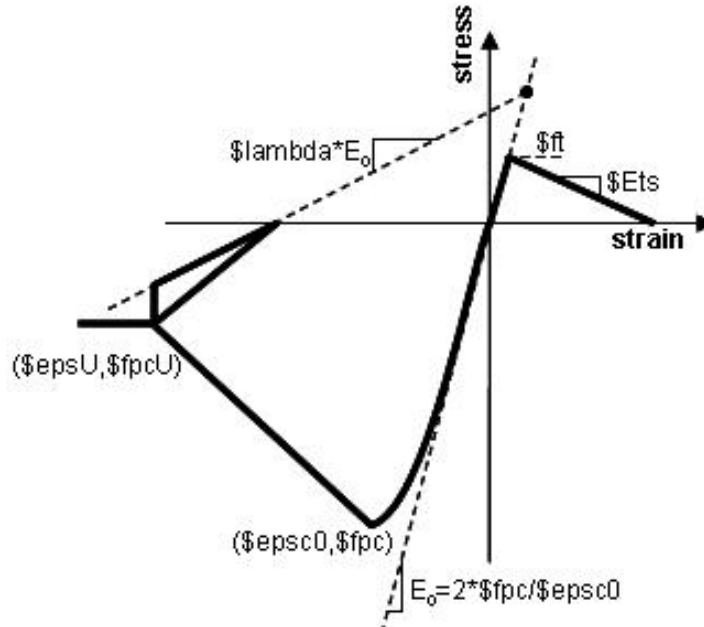


Figura 3.6: Modelo constitutivo cíclico uniaxial para el hormigón, *Concrete02* OpenSees Wiki.

La relación tensión-deformación previa a la tensión máxima de compresión en el modelo *Concrete02* está definida por la parábola de Hognestad. La ley constitutiva fija la rigidez inicial al valor de $E_o = 2 \cdot f_{pc} / \epsilon_{psc0}$ siendo f_{pc} la máxima tensión a compresión del hormigón o f'_c , y ϵ_{psc0} es la deformación en el punto de máxima tensión a compresión del hormigón; por lo tanto para lograr un módulo de elasticidad de $E_c = 4700 \cdot \sqrt{f'_c}$ (en unidades de MPa) de acuerdo al ACI 318 la deformación en el punto de máxima tensión a compresión del hormigón se calcula como $\epsilon_0 = \epsilon_{psc0} = 2 \cdot f'_c / E_c$ (o $\epsilon_{0c} = \epsilon_{psc0c} = 2 \cdot f'_{cc} / E_{cc}$ para el hormigón confinado). La relación tensión-deformación posterior a la tensión máxima es lineal hacia una tensión de compresión residual definida como f_{pcU} igual a $R_c \cdot f'_c$ (o $R_{cc} \cdot f'_{cc}$ para el hormigón confinado) siendo R_c un factor fraccionario de f'_c , en este punto se tiene una deformación igual a ϵ_{pscU} . La relación entre la pendiente de descarga en ϵ_{pscU} y la pendiente inicial es igual a $\lambda = 0.1$. La respuesta a la tracción es bilineal, donde la resistencia a la tracción, f_t , se definió como $0.31 \cdot \sqrt{f'_c}$ (en unidades de MPa), como lo sugiere [Belarbi and Hsu, 1994], y la rigidez posterior a la máxima tensión del hormigón en tracción, E_{ts} , se definió igual a $0.05 \cdot E_c$ según [Yassin, 1994].

3.4.2. Ley constitutiva para el acero de refuerzo.

La ley constitutiva histerética uniaxial no lineal de [Menegotto and Pinto, 1973] ampliado por [Filippou et al., 1983] para incorporar los efectos de endurecimiento isotrópico y extendido por [Kolozvari et al., 2018] para superar el exceso de tensión, fue seleccionado en este estudio para representar el comportamiento de tensión-deformación del acero de refuerzo. La ley constitutiva está disponible en OpenSees definida como *SteelMPF* y fue implementada por [Kolozvari et al., 2018]. La Fig. 3.7 muestra el comportamiento histerético del modelo *SteelMPF*, el cual empieza con una pendiente igual a E_0 y mediante una transición curva llega a la asíntota oblicua de pendiente $E_1 = b \cdot E_0$, donde b es la relación de endurecimiento por deformación. La curva entre las dos asíntotas es controlado por un parámetro de curvatura cíclica R , que permite representar el efecto Bauschinger una vez que se supera la deformación elástica ε_y , y depende de la diferencia de deformación absoluta entre el punto de intersección de la asíntota actual y el punto inverso de la deformación máxima o mínima anterior dependiendo de si la deformación actual está aumentando o disminuyendo, respectivamente.

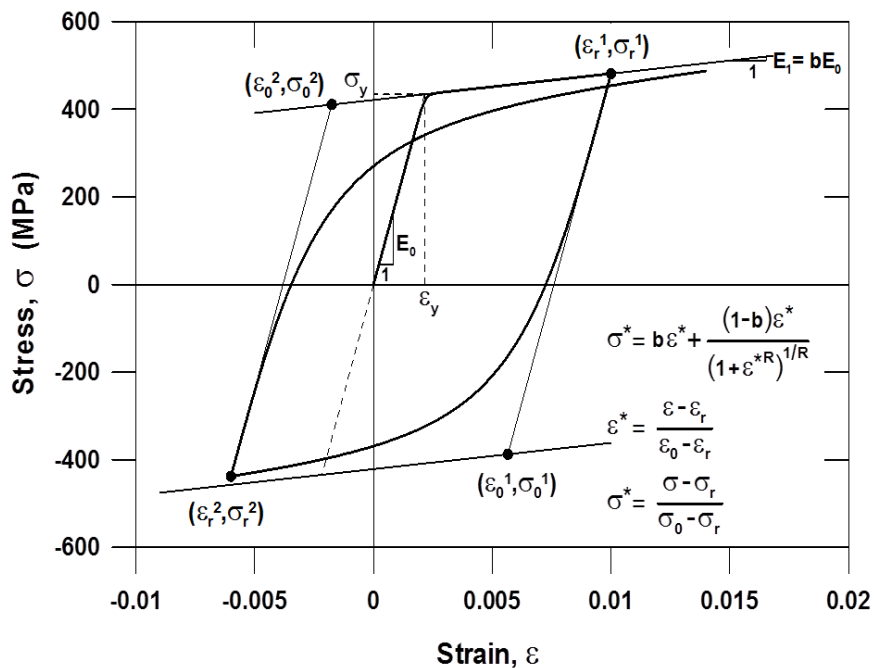


Figura 3.7: Ley constitutiva para el acero, *SteelMPF* [Menegotto and Pinto, 1973].

La ley constitutiva del acero de refuerzo está definida por la tensión de fluencia f_y , el módulo tangente inicial E_0 , la relación de endurecimiento por deformación b y el valor inicial de la curvatura R . Para conformar la respuesta cíclica, se definen los parámetros de degradación de la curvatura (Ra_1 y Ra_2), como: $R = 20$, $Ra_1 = 18.5$ y $Ra_2 = 0.15$ como sugiere [Menegotto and Pinto, 1973].

Capítulo 4

Calibración y Sensibilidad del Modelo

En este capítulo se desarrolla un análisis de sensibilidad del modelo E-SFI-3D a la discretización transversal de los prismas de hormigón armado y a la discretización vertical de los elementos E-SFI-3D. Además, se estudia la sensibilidad de la respuesta del modelo de acción de dovela establecido en el presente estudio. Una vez definido el proceso de discretización y sensibilidad de la respuesta del modelo, se estudia el enfoque de deslizamiento en la unión columna-base que es significativo en la respuesta experimental de los ensayos, el cual no está acoplado al modelo E-SFI-3D. Para finalizar, se evalúa la capacidad del modelo para simular el efecto de la resistencia al corte biaxial con cargas en diferentes direcciones y se comparan los resultados con el elemento flexural *dispBeamColumn* de OpenSees.

4.1. Sensibilidad a la discretización del modelo E-SFI-3D.

Una columna se logra modelar definiendo una cantidad i de elementos E-SFI-3D apilados uno sobre otro (Fig. 3.2), hasta alcanzar la altura de la columna, así como una cantidad M_T de prismas de hormigón armado dentro del elemento E-SFI-3D, cuyas dimensiones definen la sección transversal de la columna. Para analizar y entender el efecto de la discretización vertical y transversal en un modelo de columna se realiza un análisis de sensibilidad a continuación.

4.1.1. Discretización transversal.

Se investiga la sensibilidad de la respuesta del modelo a la discretización de los prismas de hormigón armado que conforman la sección transversal como se muestra en la Fig. 4.1, para ello se define la cantidad de prismas en las dos direcciones ortogonales y las dimensiones de los mismos de tal modo que el ancho o espesor de la sección transversal sea igual a la suma de las dimensiones de los prismas en la dirección x o z , respectivamente. Por ejemplo, en la Fig. 4.1 se ha discretizado la sección transversal de la columna en siete prismas para la dirección x y siete para la dirección z , ya que es una columna cuadrada simétrica; por lo tanto, el ancho de la columna es igual a $l_w = w_1 + w_2 + \dots + w_7$ y el espesor de la columna es igual a $l_t = t_1 + t_2 + \dots + t_7$, teniendo un total de $M_T = 49$ prismas de hormigón armado en toda la sección transversal del elemento. Este formato de discretización permite una mayor flexibilidad para definir la complejidad de las secciones rectangulares de hormigón armado.

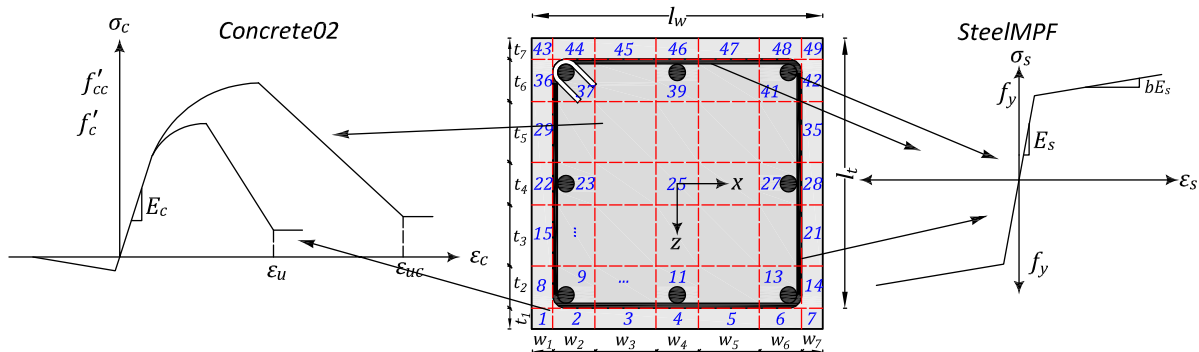


Figura 4.1: Discretización de la sección transversal del elemento E-SFI-3D mediante prismas de hormigón armado.

Luego, cada prisma de hormigón armado obedece a un comportamiento del material 3D de acuerdo a la sección 3.3, el cual se caracteriza por tener cuatro leyes uniaxiales correspondientes a: una ley constitutiva uniaxial por las tres dirección ortogonales del acero de refuerzo (una dirección vertical y dos direcciones horizontales) y una ley constitutiva uniaxial para el hormigón. Por lo tanto, como se observa en la Fig. 4.1 es necesario para cada prisma definir las características mecánicas de las barras de refuerzo transversal y longitudinal y del hormigón que puede ser confinado o no; además, para los prismas que se caracterizan por no tener acero longitudinal, como los prismas del núcleo, basta con fijar una cuantía vertical de cero. Con esta descripción, se estudia la discretización transversal de la sección con cinco ejemplos como se muestra en la Fig. 4.2, los cuales tratan de simular la misma sección transversal de la columna experimental de [Arakawa et al., 1989] de $0.18 \times 0.18m$, considerando cinco elementos E-SFI-3D para la altura de la columna. Para el análisis, se plantea una diferencia entre cantidad y dimensión de prismas. Por un lado los ejemplos tipo 1 tienen siete prismas en ambos ejes horizontales con un total de 49 prismas, mientras que los ejemplos tipo 2 tienen cinco prismas en ambos ejes horizontales con un total de 25 prismas, y el ejemplo tipo 3 tiene nueve prismas en ambos ejes con un total de 81 prismas. Por otro lado, los ejemplos tipo “a” tienen una dimensión equidistante de los prismas, es decir, dimensiones iguales, menos por los prismas del recubrimiento; mientras que los ejemplos tipo “b” tienen dimensiones diferentes, de tal modo que el centro de un prisma este ubicado en el centro de las barras longitudinales de acero. Los resultados para diferentes discretizaciones transversales de la columna se comparan en términos de respuesta general de carga-desplazamiento y respuestas locales (p. ej., deformaciones verticales).

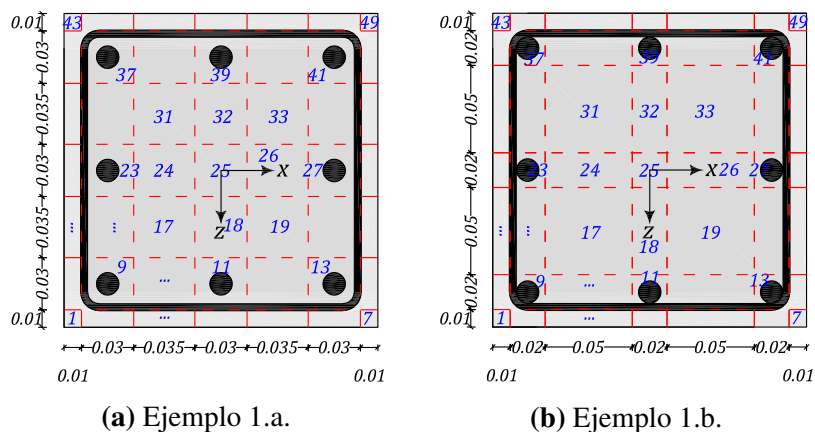


Figura 4.2: Ejemplos de discretización para la sección transversal según la cantidad y tamaño de los prismas de hormigón armado.

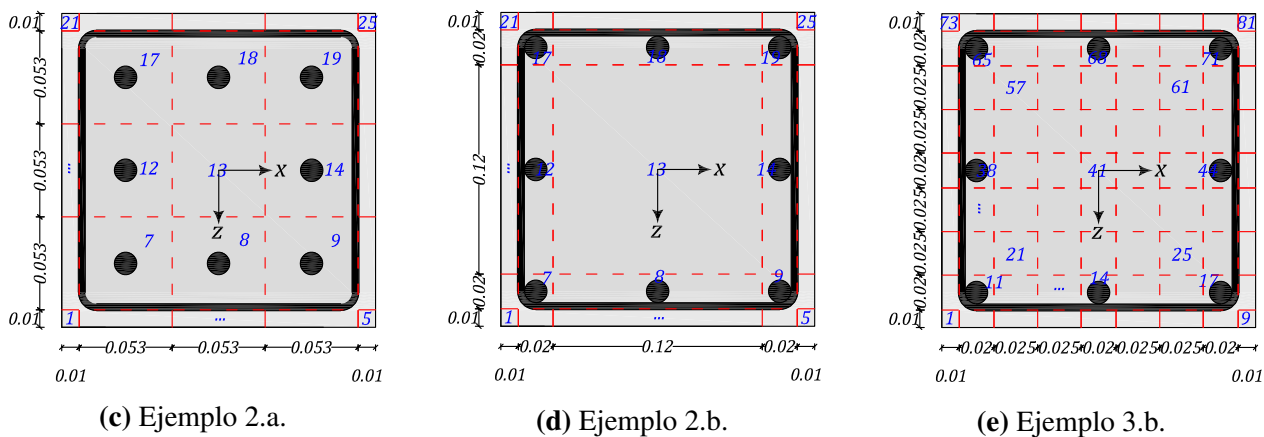
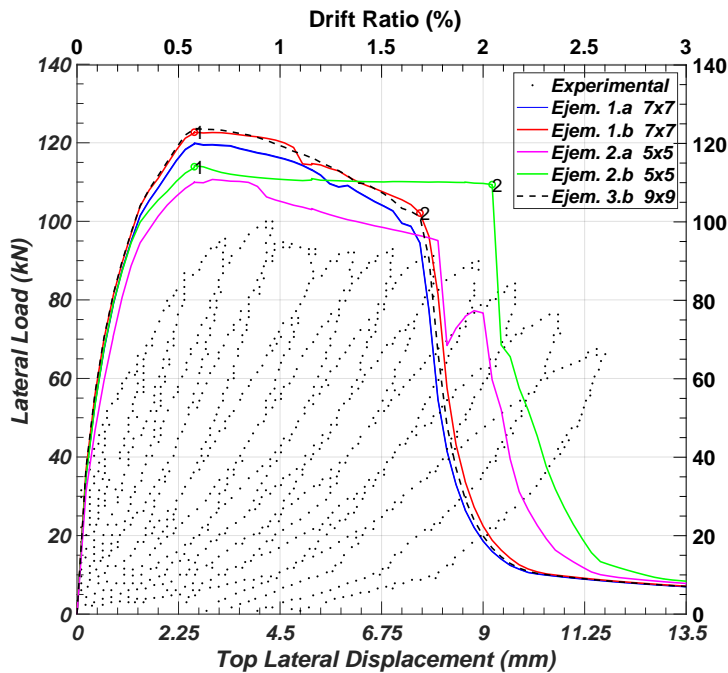
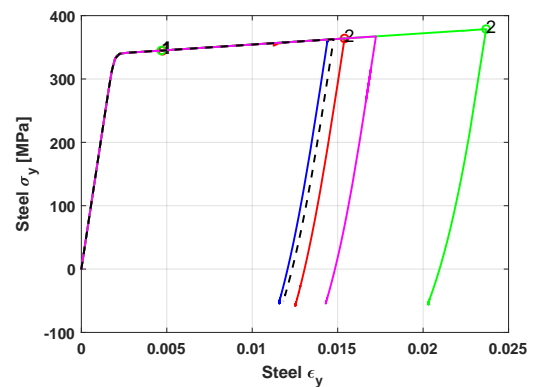


Figura 4.2: Ejemplos de discretización para la sección transversal según la cantidad y tamaño de los prismas de hormigón armado.

A partir de los ejemplos planteados en la Fig. 4.2, se pueden observar diferencias en la idealización de los ejemplos. La primera y más notoria es referida al tamaño de los prismas de hormigón armado, como los prismas calculan las deformaciones en el centro de su sección transversal, los ejemplos tipo “a”, que utilizan prismas de igual tamaño, tienen las barras longitudinales alejadas de los estribos; mientras que los ejemplos tipo “b” logran adaptar correctamente la configuración real de la sección de columna, ya que se ajustaron para ello. Por lo que, una correcta discretización en cuanto al tamaño de los prismas se obtiene directamente ajustando el centro de los prismas con el centro de las barras longitudinales de la columna. La segunda diferencia radica en la cantidad de prismas, la cual establece la capacidad del modelo para capturar la variación del eje neutro a lo largo de la sección durante el análisis. Ambas diferencias, tanto la de tamaño como cantidad de prismas, modifican la respuesta de resistencia, rigidez y capacidad de deformación del modelo como se presenta en la Fig. 4.3.(a), donde se compara la carga vs desplazamiento lateral superior de los cinco ejemplos con un análisis monotónico y los datos experimentales cíclicos. Los resultados muestran que las mayores resistencias se obtienen de los ejemplos tipo “b” (ejemplo: tipo 1.b curva roja, tipo 2.b curva verde y tipo 2.b curva negra entrepuntada), como se esperaba, ya que definen la posición de las barras de acero más lejos del centro que los ejemplos tipo “a”, lo que produce mayores deformaciones y tensiones en las barras de acero, tal como lo exhibe la Fig. 4.3.(b) que presenta la deformación y tensión vertical de la barra de acero más traccionada de la sección, ubicada en el prisma número 9 para una discretización de 7x7 y el número 7 para una discretización de 5x5.



(a) Resistencia vs desplazamiento superior de la columna.



(b) Tensión vs deformación vertical del acero del prisma número 9, 7 y 11 para los ejemplos tipo 1, 2 y 3, respectivamente.

Figura 4.3: Análisis de sensibilidad del modelo a la cantidad y dimensión de los prismas.

Descartados los ejemplos tipo “a” por su incorrecta configuración geométrica, la discusión se centra en una discretización según la cantidad de prismas entre una de 7x7 o una de 5x5 correspondientes a las gráficas de color rojo y verde, respectivamente. Para ello se realiza un análisis de la sección transversal en una deriva del 0.6 %, i.e. en el punto de máxima resistencia (punto 1), presentando el perfil de deformación vertical y tensión vertical de la sección del elemento en la base de la columna en la Fig. 4.4, la cual compara las tres configuraciones: la discretización de 5x5 de color verde, de 7x7 de color rojo y de 9x9 de color negro en línea entrecortada. En la Fig. 4.4.(a) correspondiente al perfil de deformación vertical, se aprecia la variación del eje neutro, obteniendo deformaciones de tracción en los primeros 150 mm, especialmente en el borde izquierdo que es donde se aplica la carga lateral, y en los últimos 30 mm deformaciones de compresión. Los valores de deformación de las tres discretizaciones son similares en los bordes, sin embargo, la línea verde, correspondiente al menor número de prismas, mantiene la misma deformación de 0.002 en una gran parte de la sección, 66 %, lo que define una mala captura de la variación del eje neutro en comparación con las otras de mayor discretizaciones. El inconveniente de una mala representación del eje neutro recae en el perfil de tensión presentado en la Fig. 4.4.(b), en donde se observan menores tensiones positivas, (tracción), en el lado de aplicación de la carga, (izquierda), y mayores tensiones negativas, (compresión), en el lado contrario al aplicado la carga (derecha). La diferencia de tensiones entre una discretización de 7x7, (roja), y 9x9 (negra entrecortada) está entre los 10 y 60 mm, pero la sobrestimación de la tensión en los 10 mm de la de 7x7 se compensa con la subestimación de la tensión en los 60 mm, razón por la cual, ambas discretizaciones alcanzan resistencias similares. No obstante, la discretización de 5x5, (verde), muestra tensiones diferentes entre los -60 y 60 mm, pero en este caso, la sobrestimación de la tensión en la parte de los -60 mm es menor a la subestimación de la tensión en la parte de los 60 mm, razón por la cual, se alcanza una menor resistencia en la Fig. 4.3.(a). Concluyendo que, una pobre discretización transversal hará que la respuesta oscile entre una subestimación o sobrestimación de la misma en comparación con mayores discretizaciones.

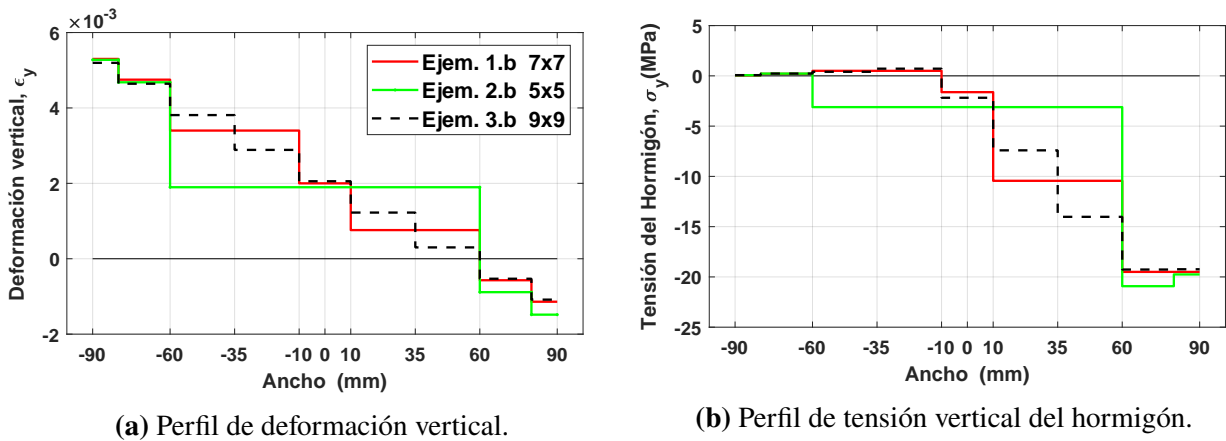


Figura 4.4: Análisis seccional del elemento en la base de la columna a una deriva de 0.6 %.

A pesar de que los resultados de la discretización de 5x5 se acercan más a los resultados experimentales que la discretización de 7x7, y además de que implica una reducción de la mitad del tiempo de análisis como se indica en la [Tabla. 4.1](#), la respuesta local de la sección no es adecuada, principalmente en la variación del eje neutro, lo que llega a ser fundamental para un análisis biaxial, ya que el eje neutro es perpendicular a la dirección de carga, mientras que las direcciones de fisura en la sección transversal son perpendiculares a la dirección de carga, como lo observó [[Hua et al., 2021](#)] en los resultados experimentales de columnas intermedias que fallan a corte, lo que hace relevante tener una adecuada discretización en el núcleo de hormigón. Aclarado este punto, una discretización de 9x9 corrige pequeños errores de la respuesta de 7x7 pero es prácticamente igual, solo que con un aumento del 50 % en el tiempo de análisis, [Tabla. 4.1](#), y no justifica su uso para la predicción de la respuesta global, porque la solución converge con una discretización de 7x7. Puede agregarse que, ante un análisis solo en la dirección “x” es suficiente considerar solo un prisma en la dirección “z”.

Tabla 4.1: Tiempo de ejecución de los ejemplos de discretización (261 pasos de análisis).

| Ejemplo 1.a 7x7 | Ejemplo 1.b 7x7 | Ejemplo 2.a 5x5 | Ejemplo 2.b 5x5 | Ejemplo 3.a 9x9 |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 170 s | 169 s | 93 s | 84 s | 256 s |

De esta manera, se define una correcta discretización transversal cuando los prismas se centran geoméricamente en las barras de acero longitudinal y existe una cantidad suficiente de prismas dentro del núcleo de hormigón para capturar una correcta variación del eje neutro.

4.1.2. Discretización vertical.

Ahora, se investiga más a fondo la sensibilidad de la respuesta del modelo a la variación de la cantidad de elementos E-SFI-3D, (n), colocados a lo largo de la altura de la columna. Los resultados para diferentes discretizaciones verticales de la columna se comparan en términos de respuesta general de carga-desplazamiento, contribuciones de las deformaciones de corte al desplazamiento lateral superior de la columna y respuestas locales (p. ej., deformación del hormigón).

En elementos con plasticidad distribuida, como los elementos viga-columna en base a desplazamiento como es el caso del modelo E-SFI-3D, existe la posibilidad de que ocurra una localización de las deformaciones, lo que puede conducir a resultados numéricos que son sensibles a la longitud del elemento en el que se localiza la deformación plástica. Para mitigar este problema, se plantea la metodología de “regularización” propuesta por [Coleman and Spacone, 2001], la cual modifica el comportamiento degradante del material de acuerdo a la longitud del elemento con el fin de mantener una disipación constante de energía de fractura, ya que se ha demostrado que esta es una propiedad fundamental del material a diferencia de la relación tensión-deformación correspondiente a la tensión residual a la compresión. Idealmente, el efecto de regularización del material permite que la solución sea objetiva y no sensible al tamaño del elemento, por lo que es investigado con mayor detalle.

Las observaciones experimentales y en campo han demostrado que el desplazamiento asociado con la pérdida de resistencia axial de un prisma de hormigón se localiza en una región limitada. Por lo cual, la respuesta tensión-desplazamiento del prisma es única, mientras que la respuesta de tensión-deformación del prisma depende completamente de la longitud de referencia utilizada para calcular la deformación y sobre la cual se supone inherentemente que la deformación es constante. Por otro lado, las mediciones experimentales de la relación tensión-desplazamiento de [Jansen and Shah, 1997] y [Nakamura and Higai, 2001] demostraron que la energía de fractura a compresión es constante para diferentes longitudes de ensayos y depende únicamente de las propiedades del material, siendo la energía de fractura a compresión la energía disipada a medida que el hormigón pasa del punto de máxima resistencia al punto de resistencia residual a la compresión como se muestra en la Fig. 4.5 definido como Gf_c para el hormigón no confinado y Gf_{cc} para el hormigón confinado. Por lo tanto, la metodología de “regularización” de [Coleman and Spacone, 2001] consiste en modificar la ley uniaxial tensión-deformación del hormigón en la parte post resistencia máxima o la parte de ablandamiento, de tal modo que el área sombreada en la Fig. 4.5 sea igual a Gf_c/L_{cr} , para el hormigón no confinado y Gf_{cc}/L_{cr} para el hormigón confinado, donde L_{cr} es la longitud del elemento, lo que permite regularizar el material y tener una respuesta objetiva.

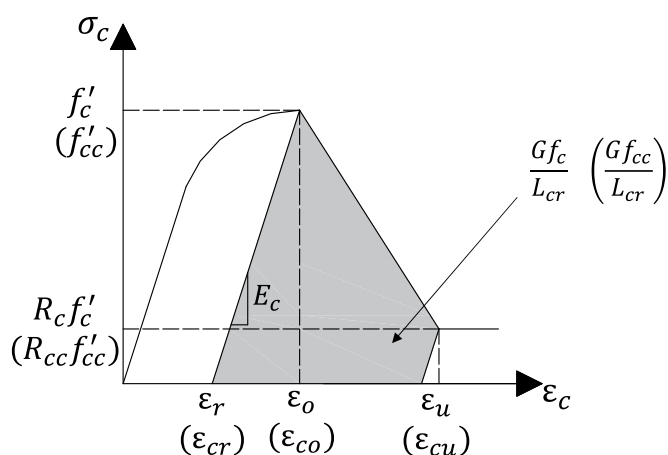


Figura 4.5: Regularización de la ley constitutiva tensión-deformación del hormigón no confinado y confinado, después de [Pozo et al., 2021].

Calculando el área sombreada de la Fig. 4.5, se logra regularizar el material definiendo la deformación en la tensión residual, ϵ_u , en función de la longitud del elemento, L_{cr} , y de la energía

de fractura a compresión, Gf_c , como se calcula en la ecuación (4.1), la cual también se aplica si el hormigón es confinado con los términos correspondientes.

$$\varepsilon_u = \frac{1}{1 + R_c} \cdot \left[\frac{2 \cdot Gf_c}{f'_c \cdot L_{cr}} - \frac{f'_c}{E_c} + (1 + R_c) \cdot \varepsilon_0 + R_c^2 \cdot \frac{f'_c}{E_c} \right] \quad (4.1)$$

donde E_c es el módulo inicial de elasticidad del hormigón, ε_0 es la deformación en el punto de máxima tensión a compresión, f'_c es la máxima tensión a compresión y R_c es la tensión residual a compresión como una fracción de f'_c . La energía de fractura a compresión del hormigón no confinado se obtienen de ensayos experimentales, la cual se ha definido en la ecuación (4.2) según lo obtenido por [Jansen and Shah, 1997] de ensayos de compresión de cilindros de hormigón simple y descrito en [NIST GCR 17-917-45, 2017].

$$Gf_c = 0.71 \cdot f'_c \quad (\text{en kN/m para } f'_c \text{ en MPa}) \quad (4.2)$$

A la vez, se utiliza la ecuación (4.3) para definir la energía de fractura del hormigón confinado según [Lowes et al., 2016], a pesar de que se basa en simulaciones de muros de hormigón armado.

$$Gf_{cc} = 5(K - 0.85)Gf_c \leq 2.5Gf_c \quad (4.3)$$

donde K se la relación de resistencia del concreto confinado y no confinado $K = f'_{cc}/f'_c$. Además, se fija la resistencia residual a un 20 % de f'_c para el hormigón confinado y no confinado de acuerdo a [Coleman and Spacone, 2001], $R_c = 0.2$ y $R_{cc} = 0.2$.

Para investigar la sensibilidad de los resultados analíticos a los efectos de la localización de la deformación y la regularización del material cuando se varía el tamaño del elemento, se propone estudiar la columna ensayada experimentalmente en [Pham and Li, 2013] de 1.7m de altura utilizando siete tipos de discretización, que varían desde cuatro elementos en la altura hasta catorce elementos todos de igual tamaño, como se presenta en la Fig. 4.6, donde también se muestra la discretización de la sección transversal y un esquema de la distribución de las deformaciones en altura y curvatura de los diferentes elementos ante las cargas aplicadas.

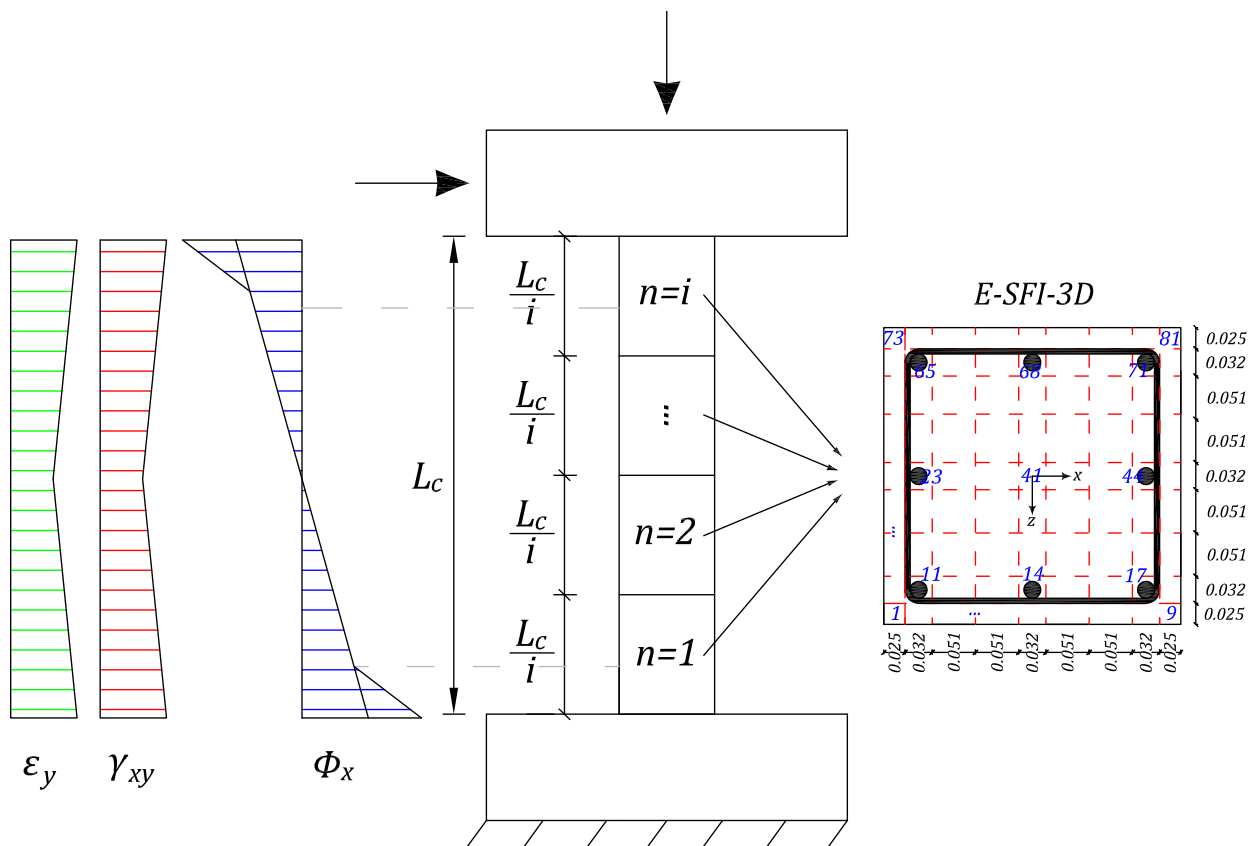


Figura 4.6: Discretización vertical del modelo y distribución de las deformaciones.

La respuesta carga lateral vs desplazamiento superior lateral para los diferentes casos de discretización vertical se muestra en la Fig. 4.7.(a) y la contribución de la deformación de corte en la Fig. 4.7.(b). En estas figuras se aprecia que la resistencia disminuye mientras aumenta el número de elementos en la altura, lo que significa que a pesar de haber regularizado el material, como se exhibe en la Fig. 4.8 para la ley uniaxial del hormigón confinado y no confinado, la respuesta no es objetiva, es decir, no converge ni a un valor de máxima resistencia ni a un valor de deformación en el punto de máxima degradación. Este inconveniente es característico de una respuesta degradante o ablandante como lo es una falla a corte, a diferencia de una respuesta de endurecimiento como lo es una falla a flexión, lo que imposibilita lograr una respuesta independiente de la longitud del elemento como lo establece [Calabrese et al., 2010]. Sin embargo, la regularización del hormigón reduce la diferencia entre las respuestas de carga-desplazamiento para diferentes longitudes de elemento e incluso otros autores como [Pugh et al., 2015] y [Pozo et al., 2021] regularizan la ley uniaxial del acero pero en la parte de endurecimiento, lo que permite reducir la diferencia pero aún no llega a ser una respuesta objetiva; y no se utiliza en el presente estudio ya que solo debiese aplicar a las partes degradantes de las relaciones tensión-deformación. Al existir una disminución de la respuesta conforme aumenta el número de elementos verticales, la respuesta que más se acerca a la experimental por tanto es la más discretizada, lo cual es esperado, pero implica un aumento considerable del tiempo de ejecución como se muestra en la Tabla. 4.2. Con la finalidad de reducir el tiempo de ejecución y de obtener una longitud de elemento adecuada para los análisis, se investiga en más profundidad los parámetros que impiden tener una respuesta objetiva del modelo.

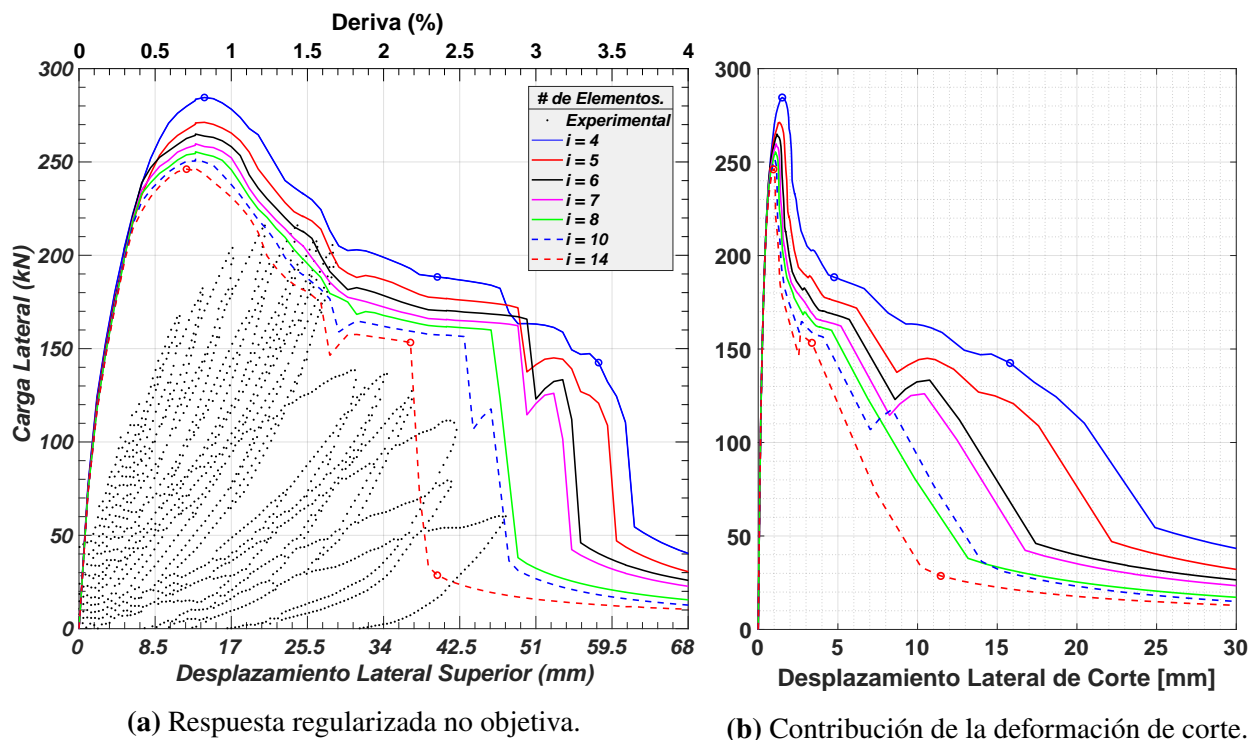


Figura 4.7: Análisis de sensibilidad del modelo a la discretización vertical.

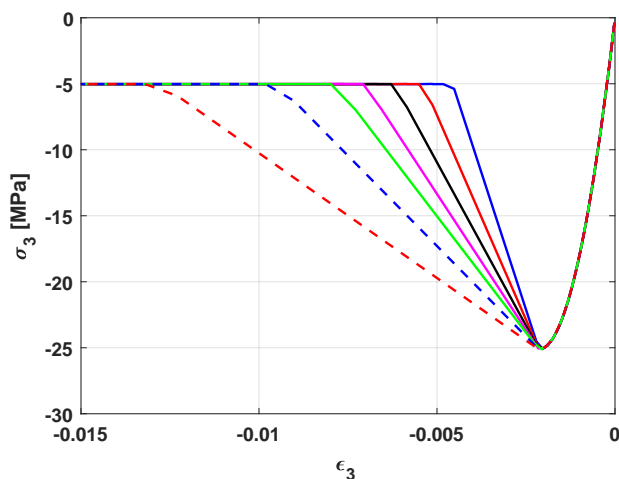


Figura 4.8: Regularización del hormigón en compresión, prisma 44.

| # Elem. | Tiempo [seg] | # Elem. | Tiempo [seg] |
|---------|--------------|---------|--------------|
| i = 4 | 96 | i = 5 | 144 |
| i = 6 | 158 | i = 7 | 195 |
| i = 8 | 238 | i = 10 | 335 |
| i = 14 | 612 | | |

Tabla 4.2: Tiempo de análisis (98 pasos).

Dentro del análisis realizado se detectan tres inconvenientes fundamentales que impiden obtener una respuesta objetiva del modelo, descritos a continuación:

1. Primero, en base a la metodología de [Coleman and Spacone, 2001] se recomienda regularizar el modelo constitutivo uniaxial 1D del hormigón en la parte degradante de compresión para obtener una respuesta global objetiva. Sin embargo, tanto los modelos bidimensionales como tridimensionales de panel y prism, además de la ley uniaxial 1D tienen el factor de ablandamiento β , que al depender de ε_0 (la deformación en el punto de máxima tensión del hormigón a compresión) no está regularizado, el cual debe regularizarse porque es el principal factor que degrada la respuesta global del modelo.

2. El segundo inconveniente está relacionado con el comportamiento propio del elemento tipo viga-columna en base a desplazamientos, ya que la formulación no satisface estrictamente el equilibrio interno del elemento, por lo tanto, el equilibrio del elemento es satisfecho en un sentido promedio como se observa en la Fig. 4.6 para el cálculo de las deformaciones.
3. El tercero se relaciona con la respuesta no objetiva de la resistencia máxima, la cual se reduce mientras más pequeño sea el elemento, especialmente debido al primer y último elemento en donde se producen las deformaciones inelásticas por la configuración de doble curvatura. Un elemento más pequeño en la base y techo calcula una mayor curvatura, ya que el elemento E-SFI-3D asume una curvatura constante en la altura $c \cdot h$, y una mayor curvatura provoca más daño en el elemento lo que reduce la resistencia.

Por la falta de información de como regularizar el factor β , y teniendo en cuenta el problema de un equilibrio interno promedio en el elemento, la solución para los inconvenientes anteriores puede mejorar si se establece una longitud definida para los elementos con mayores deformaciones inelásticas, en este caso, el de la base y techo que concentran las deformaciones inelásticas por flexión. Esta técnica también fue investigada en [Calabrese et al., 2010] para elementos en base a desplazamientos con un punto de integración. Añadiendo este criterio de regularización como se muestra en la Fig. 4.9, se logra una respuesta objetiva del modelo. No obstante, la respuesta aún depende de la longitud del elemento más deformado, el cual puede ser asociado a la longitud de daño de la columna, pudiendo ser: la longitud de rótula plástica, longitud de pandeo o la longitud entre estribos de la columna, (L_s). Esta última se ha seleccionado en el presente estudio ya que es la menor longitud de las tres y por tanto, define una mayor curvatura en el elemento de la base y del techo, y una resistencia lateral de la columna más cercana a la experimental.

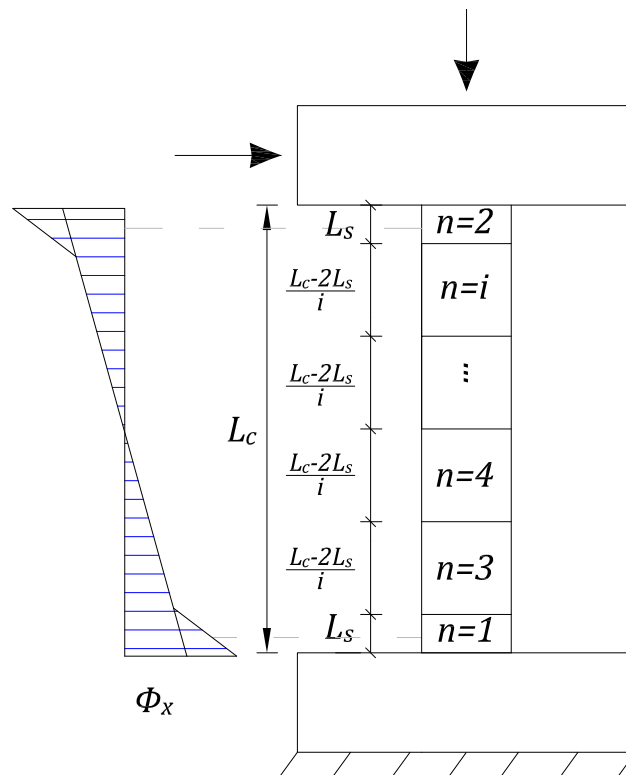


Figura 4.9: Regularización de la columna a la discretización vertical por medio de la longitud de los elementos más deformados.

Para presentar el efecto de regularización de la respuesta de acuerdo a la longitud de los elementos más deformados, se varía el número de elementos en la parte intermedia de la columna en: 2, 3, 4, 6 y 8 elementos, considerando un longitud del elemento en la base y en el techo igual a la longitud entre estribos de $0.125m$ según el ensayo de [Pham and Li, 2013]. También se compara la respuesta considerando la longitud de rótula plástica, L_{RP} según [Berry and Eberhard, 2008], en vez de la longitud entre estribos. Con el set de casos descritos, la sensibilidad de la respuesta se presentan en la Fig. 4.10, donde se expone la curva carga-desplazamiento lateral superior en la Fig. 4.10.(a) y la contribución de corte al desplazamiento total en la Fig. 4.10.(b), junto con el tiempo de análisis de cada caso en la Tabla. 4.11. De los resultados, se observa predominantemente dos tipos de curvas, caracterizadas porque la de menor resistencia tiene una longitud de los elementos de borde igual a la separación de los estribos, y la segunda con mayor resistencia tiene una longitud igual a la de la rótula plástica, con un aumento del 5% de la resistencia máxima pero del 20% de deformación en el punto de máxima pérdida de rigidez. Al margen de esta diferencia, lo primordial es observar como la respuesta converge incluso con cuatro elementos (línea roja entrecortada), dos elementos en los extremos y dos en el centro, pero se recomienda considerar cinco elementos, dos en los extremos y tres en el centro, lo que permite definir la discretización vertical según este criterio. Otra ventaja es que la respuesta objetiva a una longitud igual a la separación de los estribos, L_s , es similar a considerar 14 elementos equidistantes de la Fig. 4.7, pero con una reducción del tiempo de ejecución de 612 *seg* a 263 *seg* como se señala en la Tabla. 4.3, es decir, una reducción del 57% del tiempo de análisis, logrando así el objetivo de reducir el tiempo de ejecución y conseguir una mejor estimación de la respuesta real. Por otro lado, la contribución de corte también muestra una respuesta objetiva de acuerdo a la Fig. 4.10.(b) y aunque se tienen mayores desplazamientos de corte para la curva regularizada a la longitud de rótula plástica, el porcentaje de contribución al desplazamiento total es igual, siendo del 10% en los puntos de máxima resistencia y comienzo de pérdida drástica de rigidez hasta el 30% en el punto final de pérdida de rigidez.

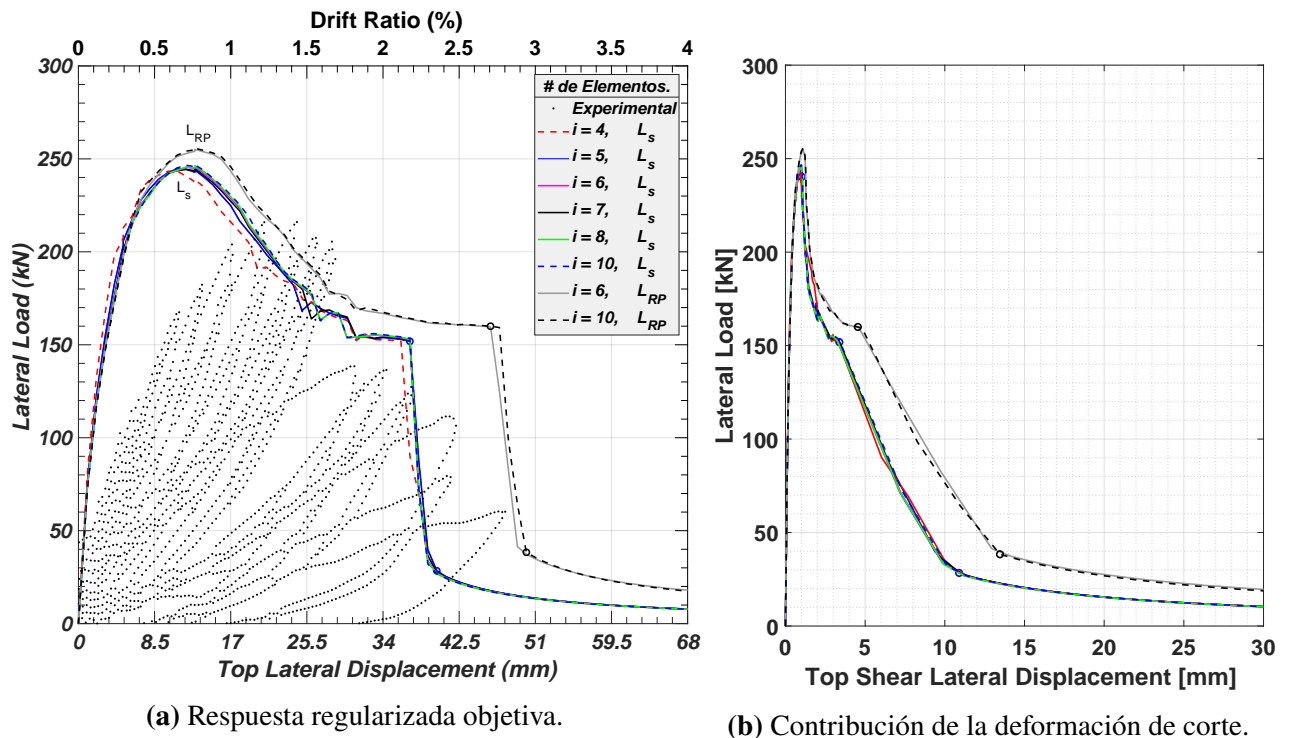


Figura 4.10: Análisis de sensibilidad del modelo a la discretización vertical regularizada a través de la longitud de los elementos más deformados.

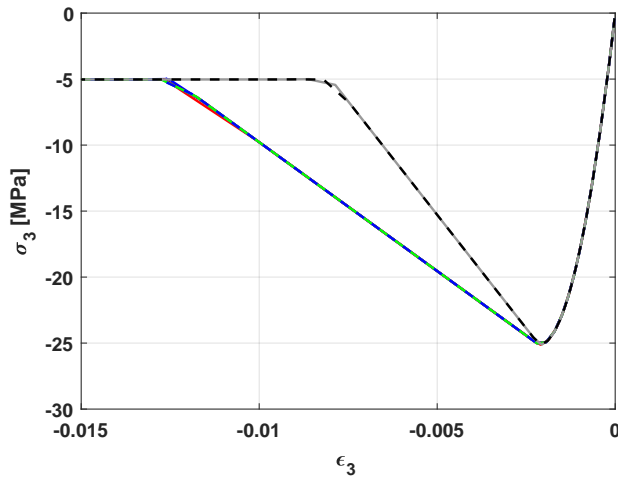


Figura 4.11: Regularización del hormigón en compresión, prisma 44 del elemento en la base y techo.

| # Elem. | Tiempo [seg] | # Elem. | Tiempo [seg] |
|-----------------|----------------|------------------|----------------|
| $i = 4, L_S$ | 126 | $i = 5, L_S$ | 161 |
| $i = 6, L_S$ | 263 | $i = 7, L_S$ | 249 |
| $i = 8, L_S$ | 320 | $i = 10, L_S$ | 411 |
| $i = 6, L_{RP}$ | 173 | $i = 10, L_{RP}$ | 319 |

Tabla 4.3: Tiempo de análisis (98 pasos).

La longitud de la rótula plástica se calcula con la ecuación (4.4) según [Berry and Eberhard, 2008] y es igual a $L_{RP} = 0.208 \text{ m}$ para este ejemplo, la cual es mayor a la longitud entre estribos de $L_S = 0.125 \text{ m}$, y por tanto demora menos tiempo en realizar el análisis como se describe en la Tabla. 4.3 para los mismos elementos del caso donde se utiliza la distancia entre estribos.

$$L_{RP} = 0.05 \cdot L + 0.0964 \cdot \frac{d_b \cdot f_y}{\sqrt{f'_c}} \quad (4.4)$$

donde L es la distancia desde del punto de momento cero hasta el punto de momento máximo en la columna en milímetros, d_b es el diámetro de la barra en milímetros, f'_c y f_y son las propiedades mecánicas del hormigón y acero longitudinal en unidades de MPa .

Concluyendo con el análisis efectuado, si se experimenta una degradación en la respuesta del elemento, ocurre un problema de localización numérica y el modelo en base a desplazamientos se vuelve altamente dependiente de la longitud de los elementos más deformados, pese a la técnica de regularización del hormigón, como se expone en la Fig. 4.11. Al presentarse este problema, se justifica el uso de la distancia entre estribos como la longitud de los elementos en los extremos para estimar mejor la distribución de la curvatura y mejorar la precisión de la respuesta, siendo equivalente a una discretización con varios elementos, pero en un tiempo significativamente menor de análisis. Se recomienda el uso de cinco elementos en altura, uno en cada extremo y tres para el resto de la columna.

4.2. Modelado del deslizamiento en la unión columna-base.

Los resultados finales de las discretización vertical y transversal muestran que el modelo rigidiza más la respuesta carga lateral vs desplazamiento superior lateral que los datos experimentales de columnas, Figs. 4.3 y 4.10. Este efecto se describe en la literatura como el deslizamiento del refuerzo longitudinal que se produce en las uniones viga-columna o columna-base, lo que contribuye significativamente a las deformaciones por flexión de los datos experimentales que se han medido. El deslizamiento en la unión se produce cuando se fisura la unión columna-base, en este caso, y las

grietas en la interfaz reducen la rigidez a la flexión de la sección transversal de la columna ablandando la respuesta momento-rotación, particularmente a niveles bajos de carga lateral, [Massone et al., 2009]. Lo descrito hasta aquí supone que es necesario modelar el deslizamiento en la unión aparte, ya que el modelo no considera este efecto, lo cual también es recomendado por [NIST GCR 17-917-45, 2017] para el análisis de columnas y por [Massone et al., 2009] para el análisis de muros.

Las deformaciones por el deslizamiento en la unión columna-base pueden ser modeladas por resortes rotacionales elásticos discretos colocados en los extremos de la columna como se muestra en la Fig. 4.12. El resorte rotacional de deslizamiento en serie con un elemento E-SFI-3D provocará que las deformaciones inelásticas se localicen en solo uno de los dos elementos. Por lo tanto, se introduce solo resortes elásticos de deslizamiento con una rigidez rotacional, K_{SE} , para ambas direcciones ortogonales. La rigidez rotacional, K_{SE} , es ampliamente investigada en la literatura, y son varios los procesos y expresiones para calcular su valor, como por ejemplo [NIST GCR 17-917-45, 2017] y [Massone et al., 2009] realizan un análisis seccional de la columna en la parte de la interfaz considerando una tensión uniforme en la unión y longitudes de penetración de la deformación; sin embargo, los resultados no se ajustan correctamente a la mayoría de los ensayos de columnas en una dirección y menos cuando las cargas son bidireccionales, lo cual claramente tiene que ver con las condiciones de anclaje y las propiedades de las barras longitudinales de cada ensayo experimental. Por esta razón, se calibra el valor de la rigidez rotacional, K_{SE} , para cada modelo de columna ensayada experimentalmente y se tabula el valor utilizado.

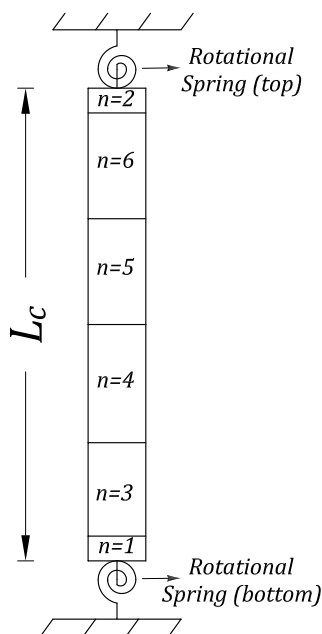


Figura 4.12: Modelo con resorte rotacional para simular el deslizamiento en la unión columna-base.

En la Fig. 4.13.(a) se exhibe el comportamiento general de la respuesta carga-desplazamiento para diferentes valores de rigidez del resorte rotacional para simular el deslizamiento en la unión columna-base. La respuesta de mayor resistencia, (azul), es el modelo sin considerar los resortes rotacionales en los extremos, seguida de otras dos respuestas (roja y negra) cada una considerando los resortes rotacionales en los extremos. La curva de color rojo tiene una rigidez rotacional según la expresión (4.5) obtenida de [NIST GCR 17-917-45, 2017] y [Massone et al., 2009]; y la curva negra de menor resistencia tienen una rigidez rotacional de la mitad de la expresión (4.5).

$$K_{SE} = \frac{2 \cdot M_y}{\phi_y \cdot l_d} \quad (4.5)$$

donde M_y es el momento de fluencia de la sección, ϕ_y es la correspondiente curvatura de fluencia, y l_d es la longitud de penetración, la cual se toma igual a la longitud de desarrollo de las barras según lo especificado en [ACI Committee 318, 2019]. Sin embargo, como no se ajustan adecuadamente a los resultados experimentales el valor calculado de la ecuación (4.5) sirve como una primera aproximación para calibrar la rigidez del resorte rotacional.

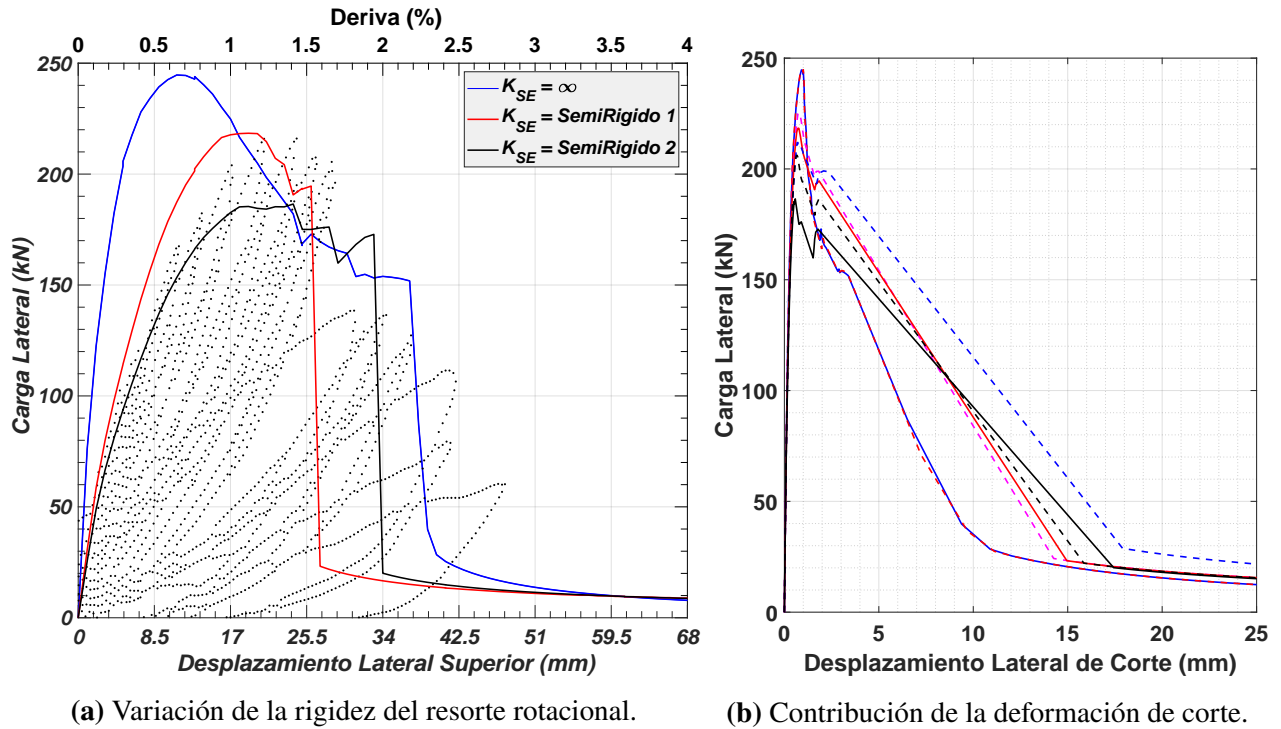


Figura 4.13: Análisis de sensibilidad del modelo al deslizamiento en la unión columna-base.

Como se esperaba el resorte rotacional degrada la rigidez y resistencia de la respuesta del modelo, además del desplazamiento en el punto de máxima resistencia. En el trayecto inicial hasta el punto de máxima resistencia los desplazamientos aumentan consecuencia de la pérdida de rigidez, pero el aumento de los desplazamientos es netamente debido al aumento de la contribución de los desplazamientos de flexión, porque como se observa en la Fig. 4.13.(b), el desplazamiento de corte a la respuesta total prácticamente no cambia entre las tres respuestas antes de alcanzar la resistencia máxima, y era precisamente lo que se buscaba resolver con el modelo de deslizamiento, aunque implica que el resorte rotacional reduzca la contribución o porcentaje del desplazamiento de corte hasta alcanzar el punto de máxima resistencia. En cuanto a la parte post resistencia máxima, los desplazamientos de corte crecen para un menor valor de rigidez rotacional del resorte, pero el desplazamiento de corte de la respuesta con la rigidez de la ecuación (4.5), (roja), es la mayor de todas porque la degradación de la curva sucede antes que las otras dos, aunque la curva negra tenga una menor rigidez rotacional sucede después su degradación.

4.3. Sensibilidad de la acción de dovela.

Se realiza un análisis de sensibilidad del modelo de acción de dovela para evaluar sus efectos en la respuesta global de las columnas de hormigón armado y aplicar las conclusiones obtenidas en los modelos de las columnas experimentales. El modelo elasto-plástico planteado en la sección 4.3 para simular la acción de dovela consta de dos parámetros a evaluar: 1) la rigidez inicial α como una fracción de E_s , y 2) la tensión máxima τ_{max} ; ambos parámetros actuando en cada dirección ortogonal.

El primer ejemplo se basa en la columna experimental SC-2.4-0 de [Tran and Li, 2012] descrita en la sección 5.1.1. El análisis de la rigidez inicial α se presenta en la Fig. 4.14 para tres valores diferentes, comparados con la respuesta experimental y la respuesta del modelo sin acción de dovela. La figura está dividida en cuatro subfiguras que muestran: a) la respuesta histerética global, b) la relación tensión-deformación del modelo de acción de dovela para una barra de acero en un extremo, c) el desplazamiento de corte y d) el desplazamiento de flexión. Como se observa en la figura a), la acción de dovela no afecta la respuesta inicial y es objetiva al predecir la resistencia última al corte; a partir de una deriva del 1.5 % la respuesta empieza a discrepar debido a los valores de α , revelando que al aumentar el valor de la rigidez α aumenta el desplazamiento al cual la respuesta se degrada, por ejemplo, el valor de $\alpha = 0.01$ degrada la respuesta en el 2 % de deriva, mayor a las otras respuestas que tienen un valor menor de α ; y además reduce la deformación de corte levemente, claramente por el aumento de rigidez, como se observa en la Fig. 4.14.(b) de color verde para el modelo de acción de dovela de la barra de acero en el extremo. La reducción del desplazamiento de corte también se aprecia en la Fig. 4.14.(c) y en la Fig. 4.14.(d) se observa como el desplazamiento de flexión aumenta. En general, aumentar la rigidez α produce una respuesta mayor de flexión, por lo que el valor de α se calibra de tal forma que no cambie el punto de inicio de degradación predicho por el modelo sin acción de dovela, en este caso un valor de 0.005 es el seleccionado porque se ajusta con los resultados de las demás investigaciones.

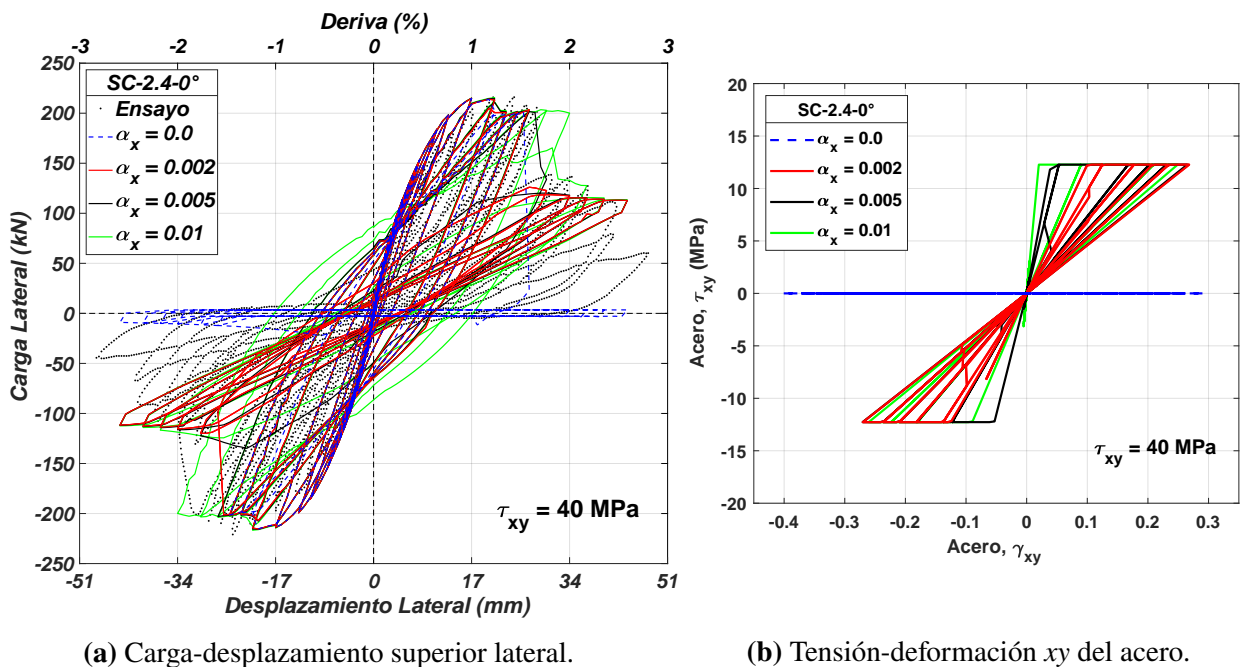
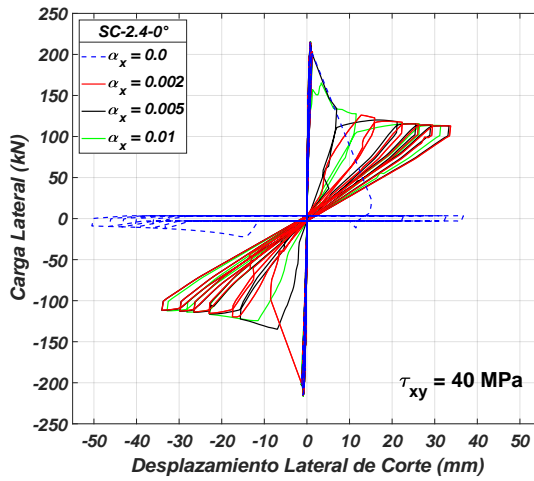
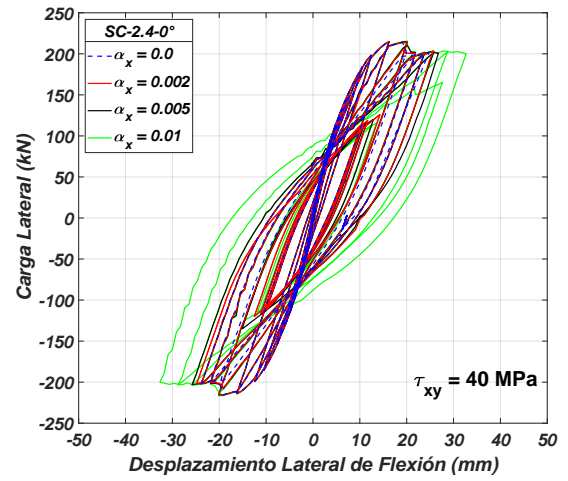


Figura 4.14: Sensibilidad del modelo de acción de dovela al valor de rigidez α .



(c) Contribución del desplazamiento de corte.

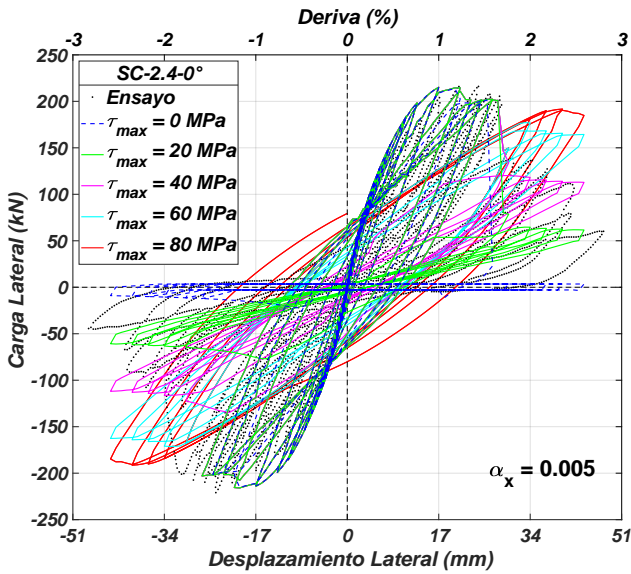


(d) Contribución del desplazamiento de flexión.

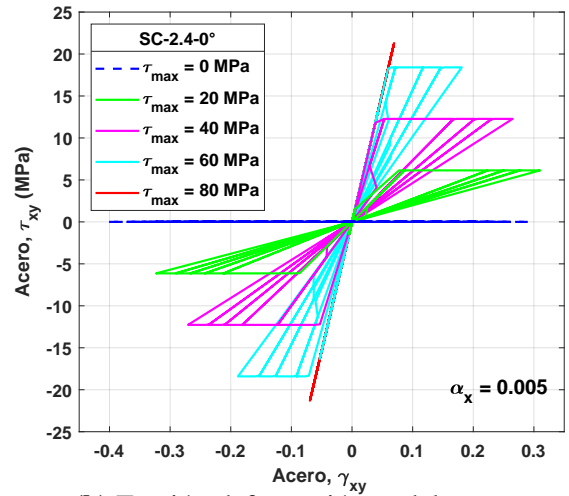
Figura 4.14: Sensibilidad del modelo de acción de dovela al valor de rigidez α .

El análisis de la tensión máxima, $\tau_{xy,max}$ para la dirección x en este caso, se presenta en la Fig. 4.15 para cuatro valores diferentes, comparados con la respuesta experimental y la respuesta del modelo sin acción de dovela. Así mismo, la figura se divide en cuatro subfiguras de igual forma que el análisis anterior. Para todos los casos del modelo, la predicción de resistencia al corte es idéntica, y ya que todos los casos tienen el mismo valor de $\alpha = 0.005$ degradan igual, sin embargo, se diferencian por el nivel de carga lateral que mantienen al final, producto del valor de $\tau_{xy,max}$ como se observa en la Fig. 4.15.(a). El comportamiento del modelo de acción de dovela para una barra de acero de un prisma en el extremo con diferentes valores de $\tau_{xy,max}$ se muestra en la Fig. 4.15.(b), cuyos valores que se grafican son producto de la multiplicación de la cuantía longitudinal de $\rho_l = 0.3067$ del prisma, ver Fig. 5.1, por cada uno de los valores de $\tau_{xy,max}$. Es notorio como la deformación de corte γ_{xy} es mayor mientras menor es el valor del esfuerzo máximo, en la misma figura se observa como todos tienen la misma pendiente inicial, pero debido al aumento súbito de la deformación de corte este pasa drásticamente a la parte elástica del modelo, especialmente en el caso de un valor de $\tau_{xy,max} = 20 MPa$. La reducción de la deformación de corte para valores mayores de esfuerzo máximo se aprecia en el desplazamiento de corte de la Fig. 4.15.(c), lo que también corresponde al aumento del desplazamiento de flexión como se observa en la Fig. 4.15.(d). Por lo tanto, un valor excesivo de esfuerzo máximo limita la deformación de corte y la predicción de la falla de corte en la respuesta global, e incluso produce un comportamiento elástico de la acción de dovela. Con esta premisa, el valor del esfuerzo máximo calculado directamente con la expresión (3.41) para el modelo propuesto es igual a $\tau_{xy,max} = 140 MPa$, lo que es mucho más que los $80 MPa$ que ya produce una modelo elástico de acción de dovela, por lo que, en base al criterio establecido en la sección 4.3 se reduce este valor al considerar solo las barras de acero que se encuentran en compresión de un análisis seccional hasta alcanzar una deformación de 0.003 de la fibra más comprimida del hormigón. Para este caso, el eje neutro establece que 3 de las 8 barras están en compresión, lo cual implica que el esfuerzo máximo se reduce en esa proporción siendo igual a $140 \cdot 3/8 = 52.5 MPa$, lo cual es una buena aproximación al valor de $40 MPa$ que se selecciono y se ajusta mejor a los datos experimentales. Sin embargo, el hecho de que este valor dependa únicamente de f'_c y f_y , y no de la cantidad y espaciamiento de los estribos, impide un buen criterio de ajuste comparado con los resultados experimentales, especialmente para columna rectangulares que en el eje débil la mitad de las barras de acero se encuentran en compresión y el

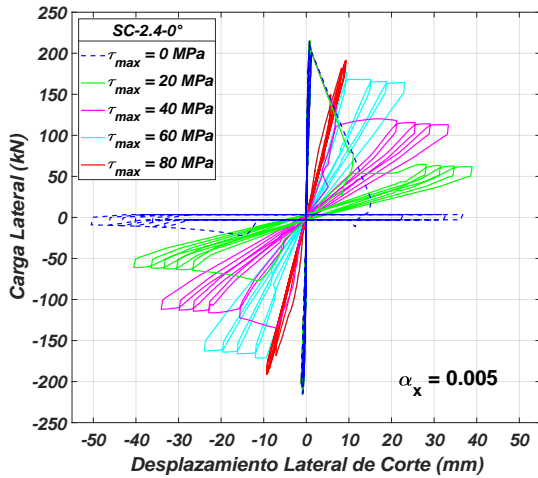
valor de esfuerzo es excesivo.



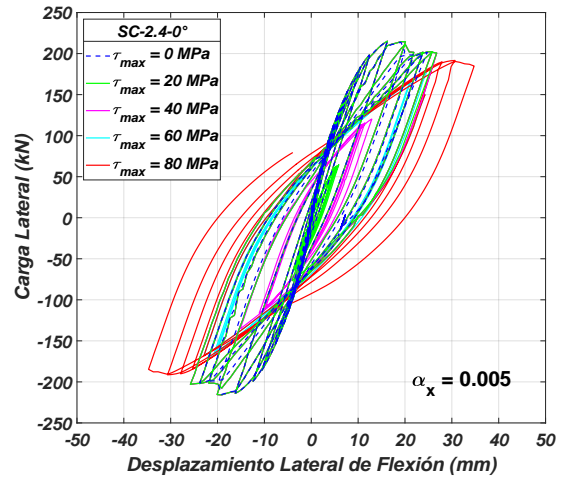
(a) Carga-desplazamiento superior lateral.



(b) Tensión-deformación γ_{xy} del acero.



(c) Contribución del desplazamiento de corte.



(d) Contribución del desplazamiento de flexión.

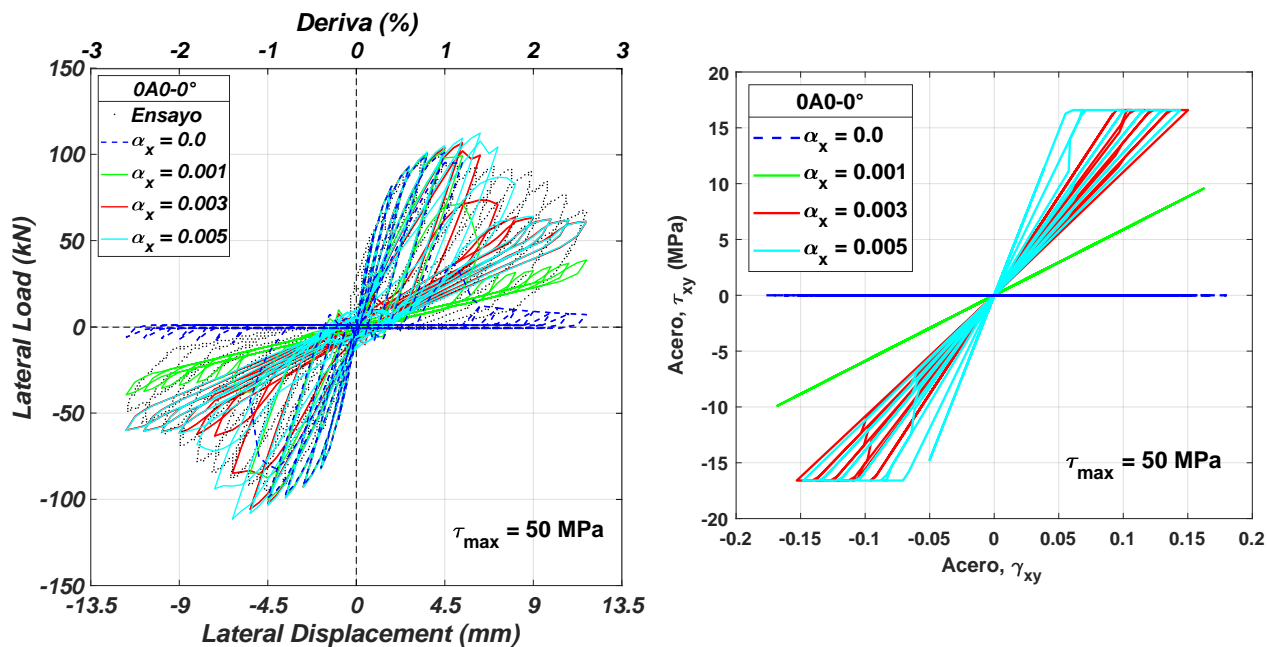
Figura 4.15: Sensibilidad del modelo de acción de dovela a la tensión máxima τ_{max} .

Todos los inconvenientes en la predicción del valor de rigidez α y de la aproximación del esfuerzo máximo τ_{max} causan que se opte por calibrar estos datos. Para el caso de una carga lateral biaxial, la acción de dovela es la misma en cualquier dirección, por lo tanto, se descompone el valor de α y τ_{max} en sus componentes en los ejes principales de acuerdo al ángulo de carga, es decir, en α_x y α_y , y $\tau_{xy,max}$ y $\tau_{yz,max}$. También se observó en los resultados, que el valor de α aumenta conforme aumenta la carga axial de compresión, ya que el punto de degradación de la respuesta ocurre antes para cargas mayores de compresión.

Recapitulando, el factor α se calibró de tal forma que degrade la respuesta en un desplazamiento similar al modelo sin acción de dovela, y el factor τ_{max} se calibro aproximadamente en base a la expresión (3.41) y la cantidad de acero en compresión, lo que implica que ante una carga axial de tracción la acción de dovela se pierda. Este modelo de acción de dovela permite que la respuesta no degrade completamente y logra que la deformación y desplazamiento de corte se igualen en el lado

positivo y negativo a diferencia del modelo sin acción de dovela.

De lo anterior, la acción de dovela no altera la predicción de la resistencia última al corte del modelo, pero debido a que la columna evaluada es esbelta y no presenta grandes deformaciones de corte en el punto de máxima resistencia. Consecuentemente, una columna corta, como la del espécimen *0A0* de [Arakawa et al., 1989] descrita en la sección 5.1.2, tiene deformaciones de corte superiores en el punto de máxima resistencia, y por ende el modelo de acción de dovela aumenta la resistencia última de corte como se observa en la Fig. 4.16.(a) a medida que aumenta la rigidez α . En este caso, el modelo de acción de dovela con una valor de $\alpha_x = 0.005$ predice un aumento del 12 % de la resistencia en comparación con el modelo sin acción de dovela. Aunque la solución inminente es reducir la rigidez, un valor de $\alpha_x = 0.001$ si bien no aumenta la resistencia predicha por el modelo, es tan baja que no se alcanza la tensión máxima y el modelo es completamente elástico como se muestra en la Fig. 4.16.(b). Ambos valores extremos discrepan de los resultados experimentales, por lo que el valor de rigidez del modelo de acción de dovela se calibra para obtener una respuesta entre estos dos valores, es decir, de tal forma que no aumente un 6 % de la resistencia predicha por el modelo, ni que la rigidez forme un modelo elástico de acción de dovela. En este caso el valor seleccionado es de $\alpha_x = 0.003$ el cual presenta un buen ajuste con los datos del ensayo.



(a) Carga-desplazamiento superior lateral.

(b) Tensión-deformación xy del acero.

Figura 4.16: Sensibilidad del modelo de acción de dovela a una columna corta.

4.4. Efecto de corte biaxial.

Con el fin de evaluar la capacidad del modelo E-SFI-3D para capturar el efecto de corte biaxial de columnas cuadradas y rectangulares de hormigón armado, se realiza un análisis monotónico de columnas cargadas lateralmente en 0, 15, 30 y 45°, en adición a los resultados presentados en el capítulo siguiente ya que generalmente los ensayos experimentales no mantienen inalterado el valor de f'_c . Este análisis, además de presentar la interacción de la respuesta de resistencia al corte

ante diferentes direcciones de carga, explica el simple post-procesamiento realizado en el presente estudio de los datos del modelo para obtener la respuesta completa en una dirección específica. Además, se compara la respuesta del modelo con el elemento “*dispBeamColumn*” de OpenSees que también actúa en un campo tridimensional pero no captura el efecto acoplado de corte-flexión.

La primera configuración de la sección transversal a modelar se presenta en la Fig. 4.17 junto con las direcciones de carga aplicadas, la cual corresponde al ensayo de la columna corta de [Arakawa et al., 1989] descrito con mayor detalle en la sección 5.1.2. El análisis monotónico se realiza a través de un control de desplazamientos, descomponiendo la carga biaxial en sus componentes en los ejes principales, (“x” y “z” de acuerdo a la Fig. 4.17), por ejemplo, para una carga en 15° el patrón de aumento de la fuerza en la dirección “x” es de 1.0, mientras que en la dirección “z” es de 0.268, para 30° el patrón de aumento en “x” es de 1.0 y en “z” es de 0.5774, y en 45° ambos patrones de aumento son de 1.0. Esta descomposición de las fuerzas permite modelar una carga biaxial y de ahí su nombre. No obstante, el software entrega los resultados en las direcciones principales, por lo que, las fuerzas, desplazamientos, etc, calculados, se transforman a valores equivalentes en el eje diagonal utilizando la relación del teorema de pitágoras como se muestra en la Fig. 4.18. Para este post-procesamiento es necesario identificar cuando la carga o desplazamiento resultante está en el eje negativo de acuerdo a la dirección de carga, ya que el teorema calcula un valor absoluto.

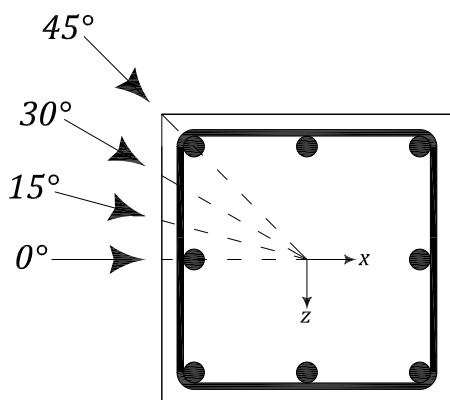


Figura 4.17: Cargas biaxiales en diferentes ángulos.

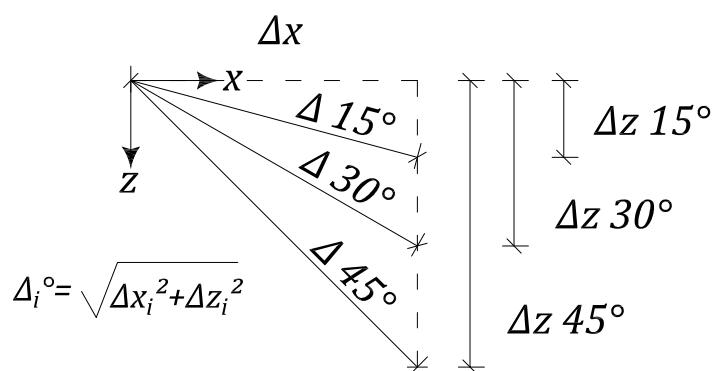
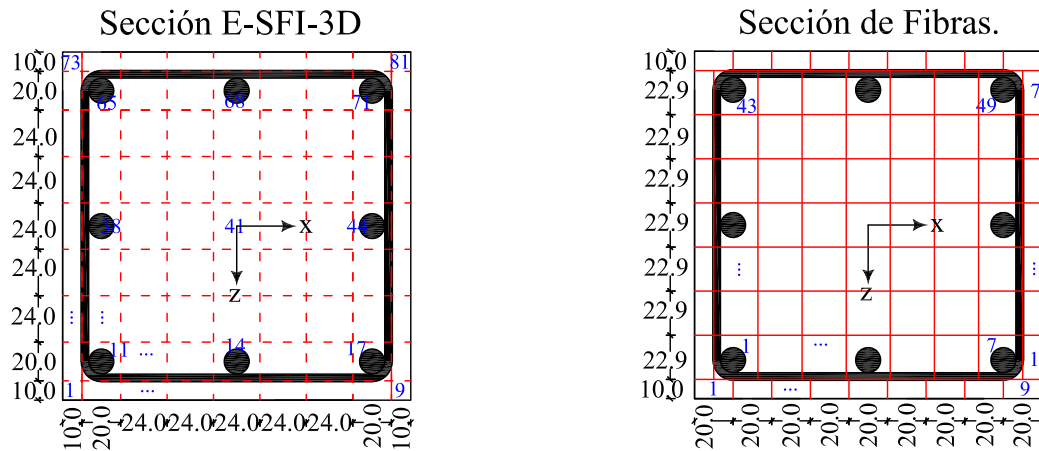


Figura 4.18: Cálculo de datos resultantes.

Una vez definido el procedimiento de análisis, las propiedades de la columna se definen en la sección 5.1.2 de los resultados, correspondiente al ensayo tipo “0A0”. Para la discretización vertical se utilizan seis elementos en la altura, uno en cada extremo de la columna de altura igual al espaciamiento de los estribos, (64.3 mm), y cuatro en el centro de igual altura hasta alcanzar la altura total de la columna. Por otro lado, la discretización de la sección transversal se muestra en la Fig. 4.19, en donde, la Fig. 4.19.(a) expone la discretización de 9x9 de la sección transversal para el modelo E-SFI-3D con un total de 81 prismas de hormigón armado, y la Fig. 4.19.(b) expone la discretización transversal para el elemento *dispBeamColumn* de OpenSees, en base a una sección de fibras caracterizada por tener una discretización de 7x7 en el núcleo de hormigón, de 1x9 en el recubrimiento superior e inferior y de 7x1 en el recubrimiento izquierdo y derecho, de igual manera con un total de 81 divisiones, además de las barras de acero en la ubicación respectiva. Como se observa, las dimensiones de cada discretización son similares entre sí y ambas tienen los mismos materiales según corresponda si se encuentran en la parte confinada o no. El uso de una discretización vertical de seis elementos y una transversal de 9x9 para el modelo E-SFI-3D, a pesar

de que la respuesta es la misma con cinco elemento en la altura y una discretización transversal de 7x7 como se expone en los resultados, es debido a que el elemento *dispBeamColumn* presentó ligeros problemas de convergencia con menos elementos, especialmente en cargas de 30° después de alcanzar la resistencia máxima.

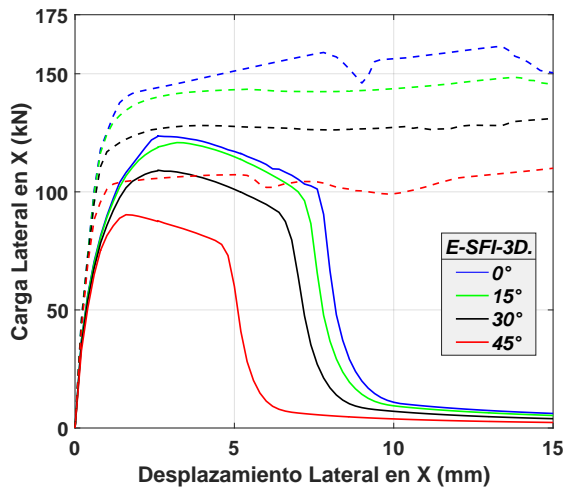


(a) Sección transversal del modelo E-SFI-3D.

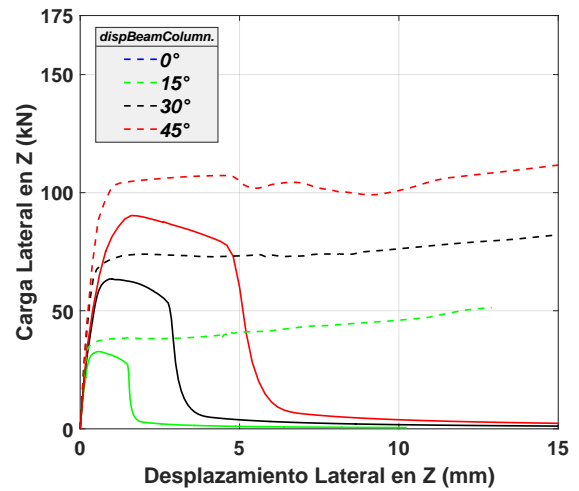
(b) Sección transversal de fibras.

Figura 4.19: Discretización de la sección transversal.

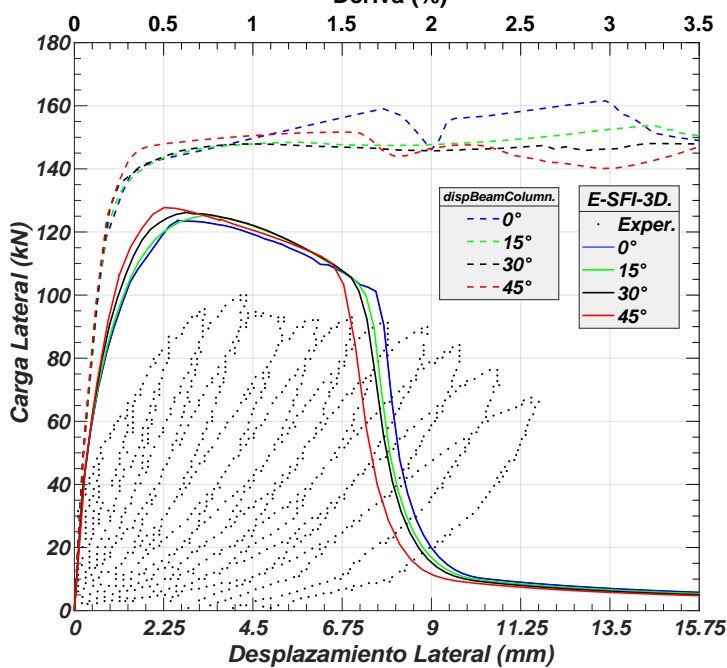
Con todo lo anterior, los resultados del análisis monótonico de carga vs desplazamiento superior se presentan en la Fig. 4.20, de línea sólida para el elemento E-SFI-3D y de línea entrecortada para el elemento *dispBeamColumn*. En la Fig. 4.20.(a) se muestran los resultados de carga lateral vs desplazamiento solo en la dirección principal “x” y en la Fig. 4.20.(b) los resultados de carga lateral vs desplazamiento solo en la dirección principal “z”. En consecuencia, la respuesta de la carga en 0° solo está presente en la figura del eje “x”, la respuesta de la carga en 15 y 30° está presente en la respuesta de ambos ejes principales pero con mayor participación en el eje “x” y la respuesta en 45° está presente en la respuesta de ambos ejes principales con la misma participación en cada uno de ellos. Luego, el post-procesamiento de los resultados en la dirección “x” y “z” mediante el teorema de pitágoras, permite construir la Fig. 4.20.(c) que representa el desplazamiento superior lateral de la columna en la dirección correspondiente a la carga aplicada. Debido, a que el elemento *dispBeamColumn* no considera la interacción acoplada de flexión-corte, no predice una degradación de la respuesta después de alcanzar la carga máxima y no es capaz de predecir una falla por corte. Además, como parte considerable de las deformaciones inelásticas son de corte antes de alcanzar la resistencia máxima, el elemento *dispBeamColumn* no captura este daño adicional y sobrestima la resistencia máxima en comparación con el modelo E-SFI-3D en un 20 %, pero continúa incrementando. Tal como se observa, prácticamente la resistencia al corte es la misma para las cargas en 0, 15, 30 y 45°. Por lo tanto, la principal virtud del modelo E-SFI-3D en comparación con el modelo *dispBeamColumn* es la capacidad para predecir una falla de corte en la columna y el daño asociado de la misma, a pesar de que los resultados estén lejos de los experimentales, pero es debido al fenómeno de deslizamiento en la unión de la base que no está considerado, sección 4.2. Otra característica del análisis, es la leve diferencia entre los desplazamientos que se alcanzan en el punto de máxima resistencia, o desde otra perspectiva, por la ligera mayor rigidez en el punto de máxima resistencia del modelo ante una carga biaxial, lo que implica en parte un pronto decaimiento drástico de la respuesta, concluyendo que, la falla de corte en un ángulo de 45° se produce antes que en un ángulo de 0°. Algo más que añadir, es que el modelo E-SFI-3D puede mostrar únicamente la respuesta del desplazamiento de corte, tal como se expone en la Fig. 4.20.(d).



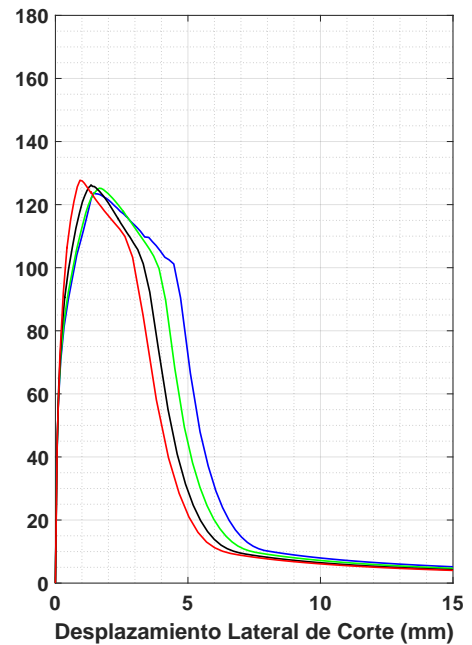
(a) Carga-desplazamiento superior en X.



(b) Carga-desplazamiento superior en Z.



(c) Carga-desplazamiento superior biaxial.



(d) Contribución de corte.

Figura 4.20: Respuesta del efecto de corte biaxial en una columna cuadrada corta, $L/h = 2.5$.

Para comprobar el efecto de resistencia al corte biaxial, los valores de resistencia máxima del modelo E-SFI-3D se grafican en la Fig. 4.21 concorde a la dirección de carga aplicada. Este tipo de figuras, pueden ser analizadas como gráficas polares aunque tienen ejes cartesianos, ya que, el radio indica la resistencia al corte, (distancia desde el origen a un punto), y el ángulo efectivamente la dirección de carga. En la Fig. 4.21, la línea entrecortada es la curva de interacción circular que se plantea para capturar el efecto de resistencia al corte biaxial producto de los datos experimentales y en la que se basa el ACI 318-19 para proponer la curva de interacción trilineal que facilita el diseño estructural; y los puntos discretos rojos son los valores de la resistencia al corte del modelo obtenidos de la Fig. 4.20.(c), de modo que el buen ajuste entre la curva de interacción y los resultados, afirman que el modelo calcula correctamente el efecto de la resistencia al corte biaxial en columnas cortas. En este ensayo la carga axial fue de cero, pero se obtuvo la misma capacidad del modelo para capturar el efecto biaxial ante mayores cargas de compresión.

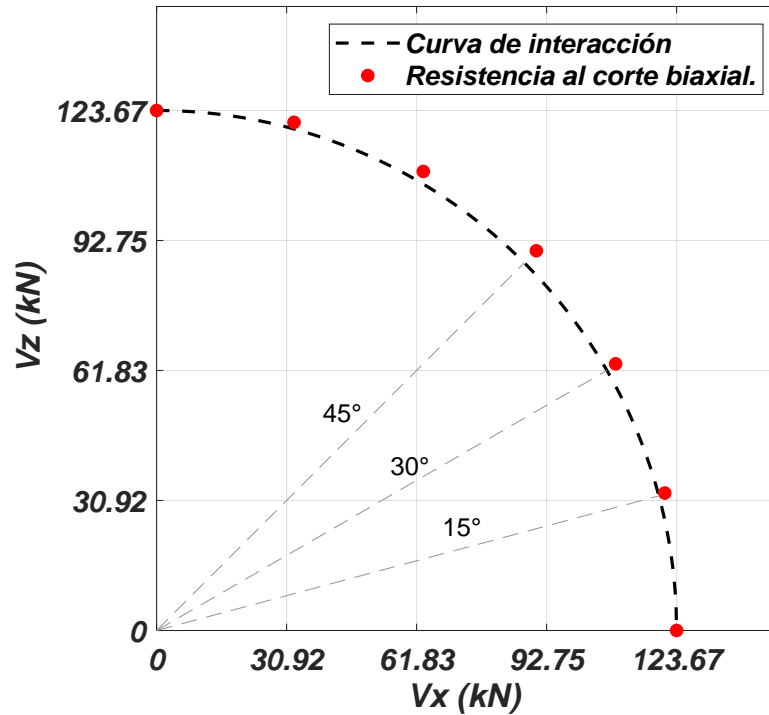


Figura 4.21: Curva de interacción de la resistencia al corte vs la dirección de carga del modelo E-SFI-3D para una columna cuadrada corta.

La diferencia de resistencia es bastante notoria entre el elemento *dispBeamColumn* y el E-SFI-3D de la Fig. 4.20, debido a la deformación inelástica de corte, porque se analizó una columna corta, como lo describe [Arakawa et al., 1989], y el daño por corte es mayor. En caso contrario, si se analiza una columna esbelta que falla por corte, como la de [Tran and Li, 2012] con una relación de esbeltez de 4.9 y con las propiedades y discretización, (9x9), de la sección 5.1.1, la diferencia entre la máxima resistencia que alcanzan ambos tipos de elementos es casi nula como se observa en la Fig. 4.22, pero a pesar de que ambos modelos tienen un decaimiento luego de este punto, solo el modelo E-SFI-3D logra predecir la falla de corte al incrementar drásticamente el desplazamiento de corte. Esta similitud de ambos elementos para predecir la resistencia última de la columna esbelta, es a causa de que las deformaciones o desplazamientos de corte son menores al 10% hasta alcanzar la carga máxima, como se presentan en los datos experimentales y del modelo de la Fig. 5.2, luego de este punto es cuando los desplazamientos de corte aumentan y los modelos empiezan a degradar su respuesta, pero solo el elemento E-SFI-3D degrada completamente.

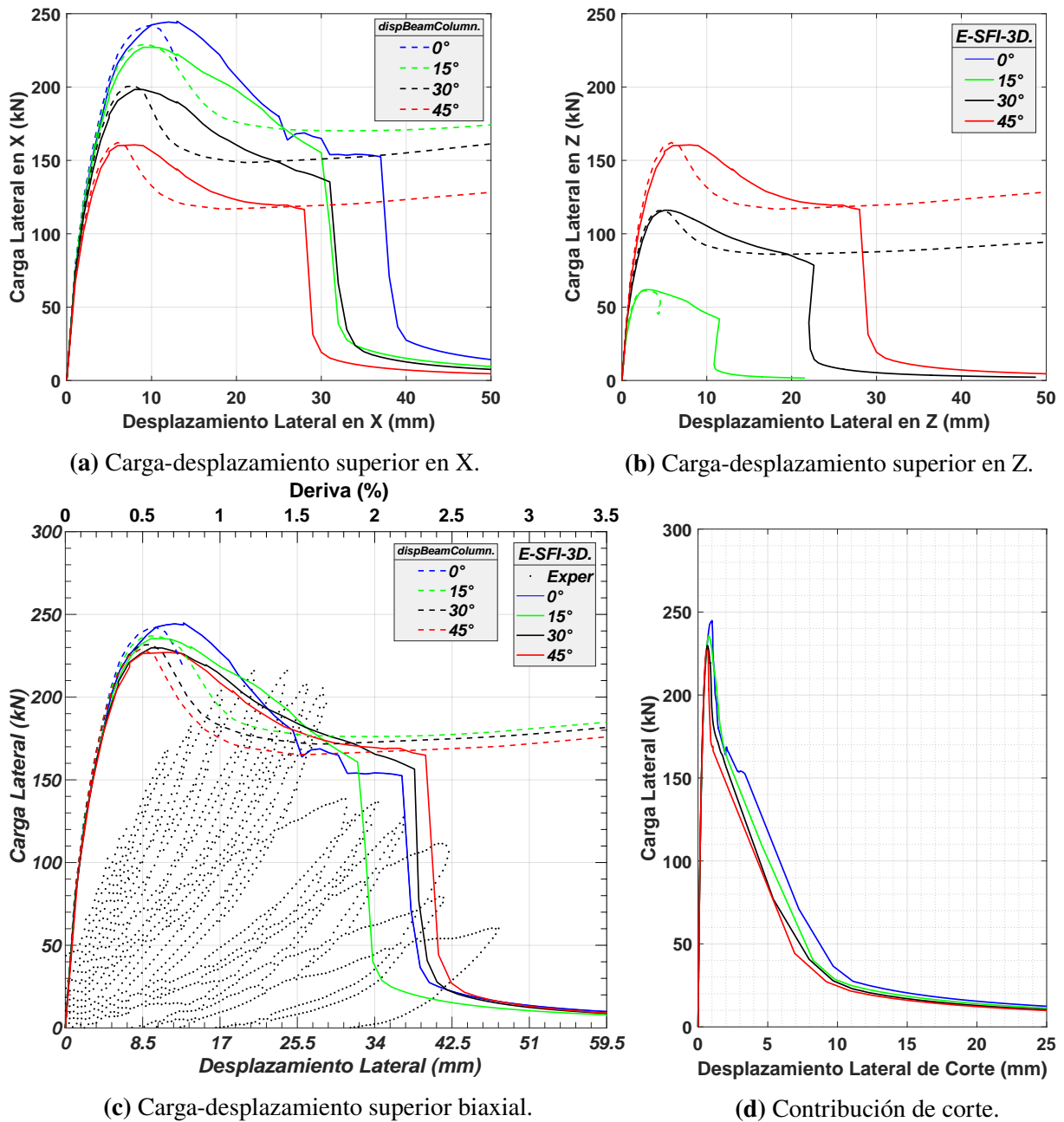


Figura 4.22: Respuesta del efecto de corte biaxial en una columna cuadrada esbelta, $L/h = 4.9$.

Otra de las diferencias de la columna esbelta con la corta, es que la máxima resistencia de la carga en la dirección principal, 0° , es mayor a las otras direcciones y se reduce conforme aumenta el ángulo de carga hasta los 45° , esta reducción se debe exclusivamente a la respuesta de flexión, que al estar cargado biaxialmente, el eje neutro rota según la carga y, al contrario que en la dirección principal, ahora se tienen menos barras de acero en fluencia, algo que también ocurre en una columna corta pero al tener una menor contribución de flexión no se desarrolla esta diferencia. Debido a esta pequeña reducción en la máxima resistencia, la predicción del modelo se aleja ligeramente de la curva de interacción como se muestra en la Fig. 4.23 pero por causa del comportamiento de flexión. Por esta razón, el efecto de corte biaxial se observa principalmente en columnas cortas.

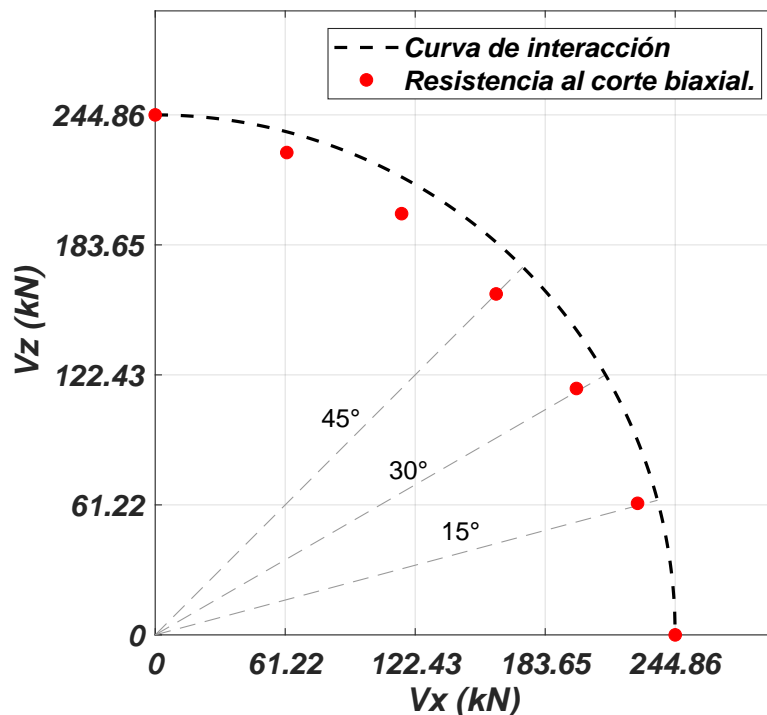
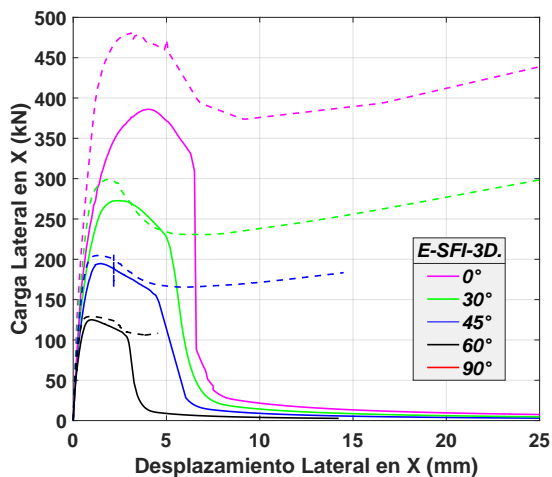


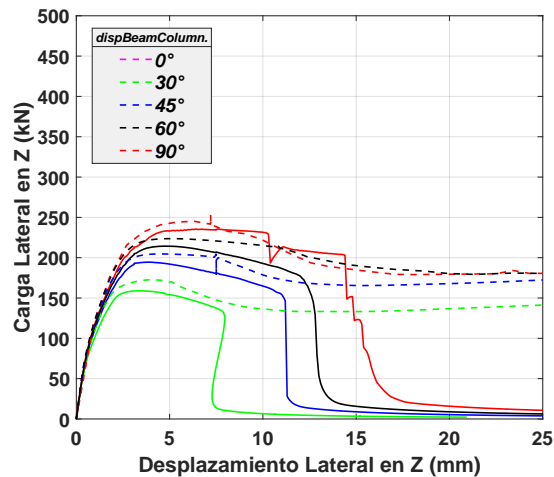
Figura 4.23: Curva de interacción de la resistencia al corte vs la dirección de carga del modelo E-SFI-3D para una columna cuadrada esbelta.

Para finalizar la evaluación de la capacidad del modelo para capturar el efecto de corte biaxial, se analiza una columna rectangular corta-intermedia, con una relación de esbeltez, L/h , de 2.3 en la dirección “ x ” y de 4 en la dirección “ z ”, cargada lateralmente en 0, 30, 45, 60 y 90°. Las propiedades y discretización de la sección transversal se presentan en la sección B.2.1 correspondiente a la investigación experimental de [Joh and Shibata, 1984]. De este análisis, los resultados monotónicos se muestran en la Fig. 4.24, igualmente comparado con el elemento *dispBeamColumn* de OpenSees con una sección de fibras equivalente. La respuesta de carga lateral vs desplazamiento superior lateral solo en “ x ” y solo en “ z ” se exponen en las Figs. 4.24.(a) y 4.24.(b), en donde según lo previsto, la respuesta del modelo en la dirección principal en 0°, (eje fuerte), está solo en el eje “ x ” y disminuye conforme aumenta el ángulo de carga; mientras que la respuesta del modelo en la dirección principal en 90°, (eje débil), está solo en el eje “ z ” y disminuye conforme disminuye el ángulo de carga. Para una carga biaxial en 45°, se tiene la misma resistencia en ambas figuras pero, a diferencia de una columna cuadrada simétrica, ahora los desplazamientos son diferentes; en la dirección “ x ” o del eje fuerte, se tiene una mayor rigidez y por lo tanto un menor desplazamiento al alcanzar el punto de degradación, en comparación con la dirección “ z ” o del eje débil que alcanza una mayor ductilidad en la respuesta, lo que es característico de las columnas rectangulares. Con la contribución de la respuesta en cada dirección principal, se construye la Fig. 4.24.(c), que presenta los datos de los modelos de carga lateral vs desplazamiento superior lateral de cada dirección específica. En esta figura, se observa el comportamiento propio ya mencionado de una columna rectangular cargada en diferentes direcciones, la carga en el eje fuerte alcanza la máxima resistencia pero con una menor ductilidad, en comparación con las otras direcciones que reducen su resistencia y aumentan su ductilidad, hasta llegar a la carga en el eje débil que alcanza la menor resistencia pero a su vez la mayor ductilidad. En estas tres figuras se pueden comparar los datos del elemento *dispBeamColumn* y del elemento *E-SFI-3D*, de los cuales se puede concluir algo similar a lo visto en las columnas cuadradas. Primero, que la menor esbeltez de 2.3 corresponde al eje fuerte, por

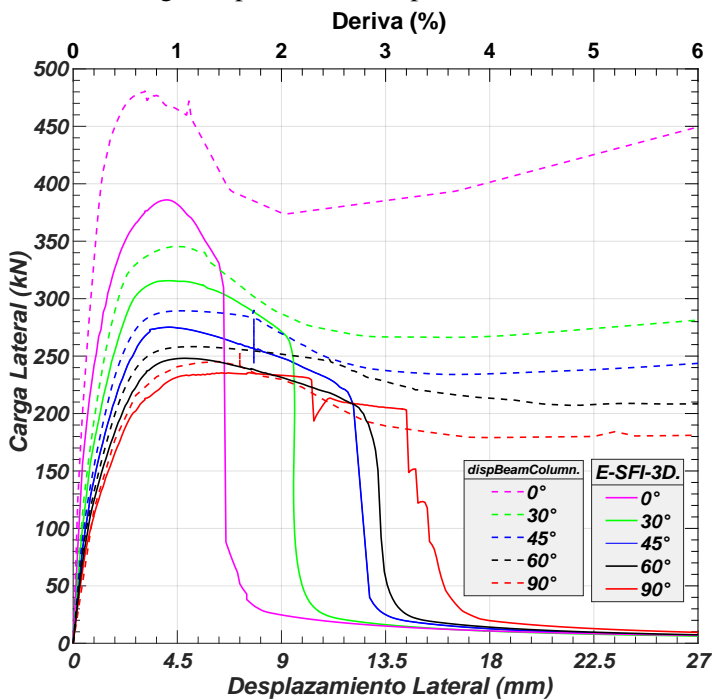
lo que, se desarrolla una mayor deformación inelástica de corte acoplado en el punto de máxima resistencia, que el elemento *dispBeamColumn* no es capaz de considerarlo y sobrestima en un 19 % la máxima resistencia en comparación con el elemento *E-SFI-3D* que sí considera el corte acoplado. Por otro lado, la mayor esbeltez de 4 en el eje débil desarrolla una menor deformación de corte acoplado en el punto de máxima resistencia y ambos elementos predicen un valor máximo similar. Por lo tanto, la respuesta de ambos tipos de elementos es similar mientras menos deformación de corte exista en las columnas. Segundo, solo el elemento *E-SFI-3D* es capaz de predecir la falla de corte de las columnas rectangulares según los datos experimentales en las diferentes direcciones. También es claro observar en la Fig. 4.24.(d), como el desplazamiento de corte es mayor en la columna rectangular para una carga de 0° y se reduce conforme aumenta el ángulo de carga ya que rota el eje neutro de la columna rectangular y disminuye la rigidez y resistencia.



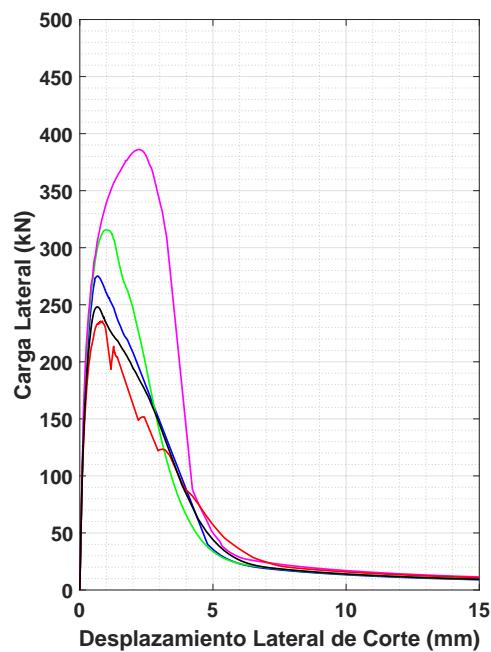
(a) Carga-desplazamiento superior en X.



(b) Carga-desplazamiento superior en Z.



(c) Carga-desplazamiento superior biaxial.



(d) Contribución de corte.

Figura 4.24: Respuesta del efecto de corte biaxial en una columna rectangular corta-intermedia.

De la misma manera que para las columnas cuadradas, la Fig. 4.25 indica la interacción de: la resistencia al corte vs la dirección de carga de los resultados obtenidos. Desarrollando la curva de interacción mediante la ecuación de una elipse con el radio mayor igual a la resistencia del eje fuerte y el radio menor igual a la resistencia del eje débil, ya que se trata de una columna rectangular. En esta figura se observa, que los resultados del modelo se ajustan de buena manera a la curva de interacción teórica, especialmente en los 30° y el error aumenta levemente para 45° y más para 60°, es decir, mientras menores son las deformaciones de corte en la respuesta de la columna rectangular.

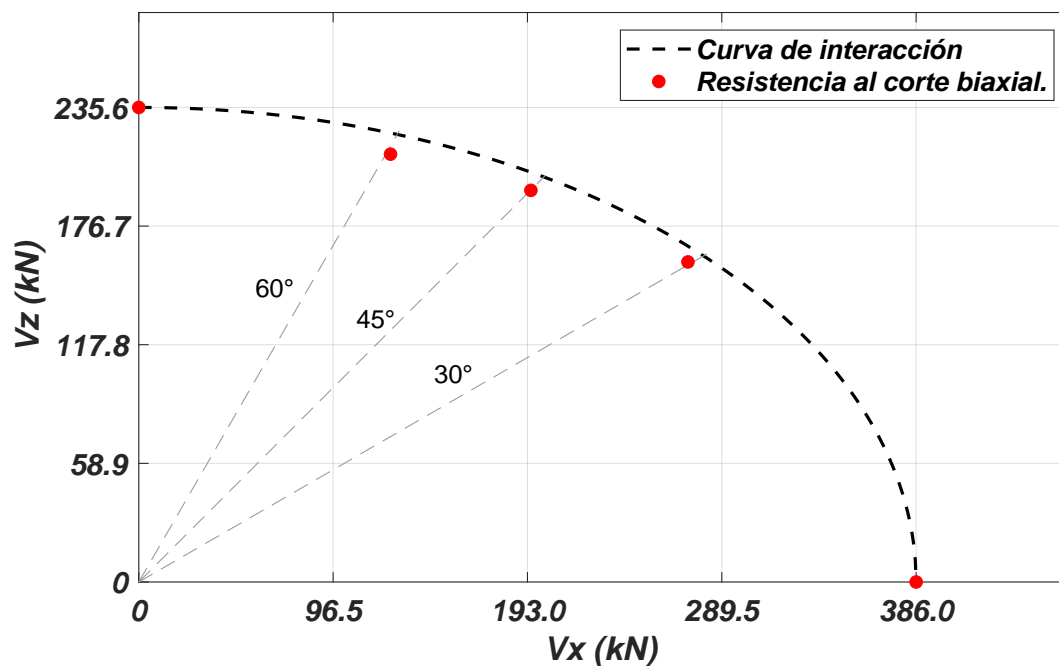


Figura 4.25: Curva de interacción de la resistencia al corte vs la dirección de carga del modelo E-SFI-3D para una columna rectangular corta-intermedia.

Capítulo 5

Validación Experimental del Modelo

Este capítulo presenta una validación del modelo E-SFI-3D contra datos experimentales de 56 ensayos de columnas de hormigón armado, 41 cuadradas y 15 rectangulares, cargadas en diferentes direcciones y que fallan a corte. La base de datos reportada en la literatura se utiliza para evaluar la capacidad del modelo para simular la respuesta histerética de las columnas con cargas uniaxiales y biaxiales, y la capacidad para predecir la resistencia última al corte, el inicio de degradación y el efecto de corte biaxial. Los resultados del modelo se comparan con los datos experimentales en términos de respuesta global de: carga lateral vs desplazamiento lateral superior, carga lateral vs desplazamiento lateral superior de corte y de flexión, y la contribución del desplazamiento de corte y flexión al desplazamiento total en aquellos ensayos que proveen esta información. Además, con los resultados experimentales se calibra el valor de rigidez del resorte rotacional para el deslizamiento en la unión en base a la aproximación establecida en la sección 4.2, y se calibra la rigidez y tensión máxima de la acción de dovela en base al criterio de la sección 4.3. Finalmente, se construye el diagrama de interacción de la resistencia al corte vs la dirección de carga de las columnas tanto para los resultados experimentales como del modelo, con la finalidad de comparar la nueva propuesta del ACI 318-19 con respecto a la versión anterior del año 2014 y evaluar el impacto en el diseño estructural de estos elementos como se dispone en el objetivo del presente estudio.

5.1. Comparación del modelo E-SFI-3D contra ensayos experimentales de columnas cuadradas de hormigón armado con cargas biaxiales.

Para la validación experimental del modelo E-SFI-3D contra columnas cuadradas de hormigón armado, se evalúan 41 especímenes con una relación de esbeltez L/h (largo/ancho) entre 2.5 y 5. Para el presente estudio, se considera una columna corta cuando la relación de esbeltez es menor o igual a 3; una columna intermedia cuando la relación de esbeltez es mayor a 3 pero menor o igual a 4; y una columna esbelta cuando la relación de esbeltez es mayor a 4, de acuerdo a lo establecido por los autores de los ensayos experimentales. Todos los especímenes fueron ensayados en condiciones de curvatura doble y tanto las columnas cortas, intermedias y esbeltas reproducen una falla de corte. Los ensayos cubren una amplia gama de propiedades de las columnas, como la altura de la columna L_c , el ancho o espesor h_c , el espaciamiento de los estribos s , la cuantía de acero longitudinal ρ_l , la cuantía de acero transversal ρ_t , la cantidad de carga axial N , (La compresión es positiva), en términos de $f'_c \cdot A_g$ siendo A_g el área bruta de la sección, y el ángulo de carga.

Los 41 ensayos se distribuyen en cinco investigaciones diferentes, y cada investigación se desarrolla como sigue. Primero, se presenta la configuración geométrica de la columna y de la sección transversal, junto con la configuración de los prismas de hormigón armado para formar la sección del modelo E-SFI-3D. Para modelar todos los ensayos se consideran cinco elementos E-SFI-3D a lo largo de la altura de la columna, el elemento en cada uno de los extremos tiene una longitud igual al espaciamiento entre estribos, lo que permite una respuesta objetiva del modelo, y los otros tres elementos tienen una longitud equidistante hasta completar la altura total de la columna como se mostró en la Fig. 4.12, añadiendo el resorte rotacional en los extremos. Para la sección transversal, los prismas con cuantía longitudinal se centran en la ubicación de las barras de acero, y se establece la cuantía longitudinal de cada uno de ellos de acuerdo a sus dimensiones, luego se calcula el valor de cuantía transversal según la dimensión del núcleo de hormigón armado y el espaciamiento entre estribos para ambas direcciones, y se le asigna a los prismas dentro del núcleo junto con la ley uniaxial del acero y del hormigón confinado, f'_{cc} , calculado de acuerdo a [Saatcioglu and Razvi, 1992]. Los prismas en el recubrimiento no cuentan con un valor de cuantía de acero ni longitudinal ni transversal y con el valor de resistencia del hormigón no confinado. Dentro del desarrollo de cada investigación se presentan dos tablas: la primera describe las propiedades principales reportadas en las investigaciones y la segunda tabula el valor de los parámetros calibrados como: el resorte rotacional K_{SE} para el deslizamiento en la unión columna-base, el coeficiente $\alpha_{x/z}$ y el esfuerzo máximo $\tau_{max,xy/yz}$ para la acción de dovola en cada dirección; además, en la misma tabla se comparan los resultados experimentales y del modelo de: resistencia al corte máxima V , y el inicio de la degradación en el punto del 90 % de V , (los resultados de resistencia y ductilidad de la segunda tabla son los reportados por la literatura y pueden variar ligeramente de lo que se presenta en las curvas histeréticas). La tabla con las propiedades principales de los ensayos permite describir las leyes uniaxiales de los materiales actuando dentro de los prismas, en efecto, la ley uniaxial del hormigón, descrita en la sección 3.4.1, se basa en la resistencia a compresión del hormigón simple f'_c y del hormigón confinado f'_{cc} según corresponda. Mientras, que la leyes uniaxiales del acero longitudinal y transversal en ambas direcciones descrita en la sección 3.4.2 se basan en la tensión de fluencia F_y . Posteriormente, se comparan las curvas histeréticas de los ensayos y del modelo, y la contribución del desplazamiento de corte y flexión. Por último, se construye el diagrama de interacción de la resistencia al corte vs la dirección de carga de los resultados experimentales y del modelo para evaluar el efecto de las cargas biaxiales. A continuación se describen los resultados de los ensayos y del modelo de tres investigaciones experimentales de la literatura para una columna corta, intermedia y esbelta, y las dos investigaciones más en la sección B.1 de los anexos.

5.1.1. Columnas experimentales de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013].

Esta investigación consta de dos programas experimentales que reproducen una falla por corte. Por un lado los especímenes de [Tran and Li, 2012] ensayados únicamente con una carga lateral uniaxial, y por otro lado los especímenes de [Pham and Li, 2013] ensayados únicamente con una carga lateral biaxial en 30 y 45°. A su vez, dentro de cada programa experimental se evalúa la respuesta de dos tipos de columnas diferenciadas por la altura o relación de esbeltez L/h , teniendo una columna intermedia de un L/h de 3.4 y una columna esbelta de un L/h de 4.9, la configuración del ensayo se muestra en la Fig. 5.1, junto con la geometría de la sección transversal la cual es la misma para ambos tipos de columnas. En total se tienen seis ensayos definidos por las cargas laterales en 0, 30 y 45° de las columnas intermedias, tipo “SC-1.7”, y las esbeltas, tipo “SC-2.4”.

La discretización e idealización de la sección transversal del modelo E-SFI-3D para estos ensayos también se muestra en la Fig. 5.1, la cual consta de una discretización de 9x9, con un total de 81 prismas, siendo la cantidad mínima requerida de prismas para que la respuesta converja.

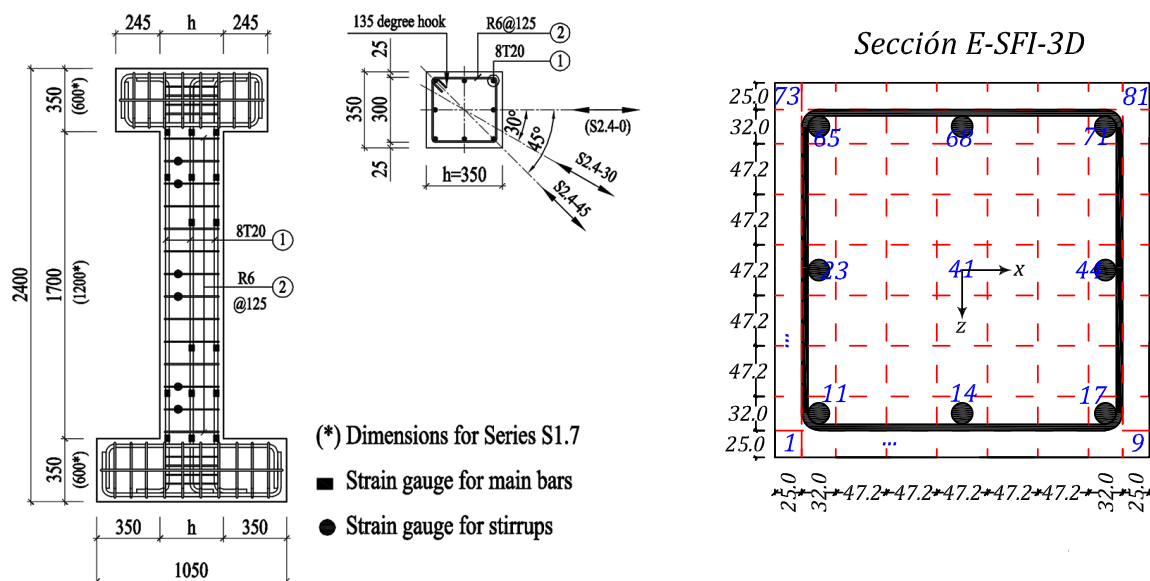


Figura 5.1: Configuración de las columnas de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013], y discretización transversal para el modelo E-SFI-3D, (mm).

Las propiedades principales de las columnas de estas investigaciones se resumen en la Tabla. 5.1, cuyos valores se utilizan en las leyes uniaxiales de los materiales del prisma. Para ello, el valor del hormigón confinado se presenta en la Tabla. 5.2, suficiente para definir la ley uniaxial del hormigón, mientras que para definir las leyes uniaxiales del acero el módulo de elasticidad del refuerzo longitudinal y transversal es igual a: $E_s = 200000 \text{ MPa}$, y el factor b supuesto es de 0.01 para el acero longitudinal y de 0.008 para el acero transversal. En relación con el espaciamiento de los estribos, la altura del elemento en los extremos es de 125 mm y de los tres elementos en el centro es de 316.6 mm y 483.3 mm para las columnas intermedias y esbeltas, respectivamente. De acuerdo a la longitud de cada elemento se aplica la técnica de regularización visto en la sección 4.1.2.

Tabla 5.1: Propiedades principales de las columnas cuadradas de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013].

| Ensayo ID | L/h | L_c , mm | h_c , mm | s , mm | ρ_l , % | ρ_t , % | $\frac{N}{f'_c \cdot A_g}$ | Ángulo de Carga | Refuerzo | | | | f'_c , Mpa |
|-----------|-------|------------|------------|----------|--------------|--------------|----------------------------|-----------------|--------------|-------------|-------------|-------------|--------------|
| | | | | | | | | | Longitudinal | | Transversal | | |
| | | | | | | | | | Diá., mm | F_y , MPa | Diá., mm | F_y , MPa | |
| SC-2.4-0 | 4.9 | 1700 | 350 | 125 | 2.0 | 0.13 | 0.20 | 0° | 20 | 408 | 6 | 393 | 22.6 |
| SC-2.4-30 | | | | | | | | 30° | | | | | 31.4 |
| SC-2.4-45 | | | | | | | | 45° | | | | | 29.3 |
| SC-1.7-0 | 3.4 | 1200 | | | | | | 0° | | | | | 27.5 |
| SC-1.7-30 | | | | | | | | 30° | | | | | 30.1 |
| SC-1.7-45 | | | | | | | | 45° | | | | | 29.3 |

Definido el modelo con las propiedades de cada ensayo, la [Tabla. 5.2](#) indica el valor de los parámetros calibrados y de los resultados obtenidos de cada ensayo. El valor calibrado del resorte rotacional en base a la aproximación de la expresión (4.5) para el ensayo tipo “SC-2.4-0” es diferente a los otros del mismo tipo debido a que presenta una menor resistencia de f'_c , cerca del 30 % de diferencia; lo que también implica intrínsecamente que el modelo calculará una resistencia menor en comparación con las columnas del mismo tipo que tengan un mayor valor de f'_c . Por otro lado, los valores de acción de dovela siguen el criterio establecido en la sección 4.3, el valor de α calibrado es de 0.005 para la dirección uniaxial y se descompone en los direcciones “x” y “z” de acuerdo al ángulo de carga. Lo mismo sucede con la tensión máxima τ_{max} . Se alcanza una relación promedio entre lo medido y la predicho por el modelo de 0.97 para la estimación de la resistencia última de corte y de 1.03 para la estimación del inicio de degradación, con una coeficiente de variación de 0.05 y de 0.15, respectivamente. Los resultados comparativos manifiestan una alta precisión para predecir la resistencia última de corte, y una menor precisión, pero igualmente buena, para el inicio de degradación que tiene una mayor variación entre resultados.

Tabla 5.2: Parámetros de calibración y comparación de resultados de las columnas cuadradas de [[Tran and Li, 2012](#)] y [[Pham and Li, 2013](#)].

| Especimen ID | Parámetros de Calibración | | | | | Resultados | | | | | | | |
|--------------|---------------------------|------------|-----------------------|------------|-----------------------|----------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|---|---------|------------|
| | K_{SE} , kN m | α_x | $\tau_{max,xy}$, MPa | α_z | $\tau_{max,yz}$, MPa | V_{exp} , kN | V_{mod} , kN | $\frac{V_{exp}}{V_{mod}}$ | $\Delta_{0.9V_{exp}}$, mm | $\Delta_{0.9V_{mod}}$, mm | $\frac{\Delta_{0.9V_{exp}}}{\Delta_{0.9V_{mod}}}$ | # Pasos | Tiempo, sg |
| SC-2.4-0 | 20000 | 0.005 | 40 | - | - | 219 | 216 | 1.01 | 28.4 | 27.9 | 1.02 | 1452 | 2586 |
| SC-2.4-30 | 25000 | 0.004 | 35 | 0.0025 | 20 | 226.4 | 242 | 0.93 | 37.3 | 30.7 | 1.21 | 2004 | 3782 |
| SC-2.4-45 | 25000 | 0.0035 | 30 | 0.0035 | 30 | 226 | 230 | 0.98 | 34.3 | 28.8 | 1.19 | 1730 | 3573 |
| SC-1.7-0 | 15000 | 0.005 | 40 | - | - | 294 | 291 | 1.01 | 14.7 | 16.1 | 0.91 | 1141 | 1330 |
| SC-1.7-30 | 15000 | 0.004 | 35 | 0.0025 | 20 | 260 | 291 | 0.89 | 18.4 | 17.8 | 1.03 | 1059 | 3228 |
| SC-1.7-45 | 15000 | 0.0035 | 30 | 0.0035 | 30 | 283 | 286 | 0.99 | 15.7 | 18.7 | 0.84 | 1068 | 3438 |
| | | | | | | | Promedio | 0.97 | | | 1.03 | | |
| | | | | | | | Coefficiente de variación | 0.05 | | | 0.15 | | |

En la [Fig. 5.2](#) se comparan los datos experimentales con la respuesta del modelo para el ensayo de la columna esbelta “SC-2.4-0” (uniaxial). Como se muestra en la [Fig. 5.2.\(a\)](#), el modelo analítico replica de buena manera la forma general de la curva histerética de la respuesta global del ensayo. La rigidez inicial calibrada es similar a la del resultado experimental pero llega a sobrestimarse al alcanzar la resistencia máxima. La carga lateral máxima es precisamente estimada al igual que el inicio de degradación, mayormente en el lado positivo de la respuesta histerética. Claramente se aprecia dos tipos de comportamientos en la respuesta global del modelo: el primer comportamiento es flexural y se observa en los ciclos de máxima resistencia hasta una deriva del 1.6 %, hasta este punto la contribución del desplazamiento de corte al desplazamiento total es menor al 10 % pero justo al final crece hasta un 17 % como se valora en la [Fig. 5.2.\(b\)](#) según los datos experimentales como los del modelo; este comportamiento del modelo produce un mayor estrangulamiento de la respuesta en el punto de origen en comparación con los datos experimentales. El segundo comportamiento del modelo se observa al finalizar el bucle del inicio de la degradación, (cerca del 1.7 % de deriva), donde empieza la degradación de resistencia y el comportamiento es exclusivamente del modelo elasto-plástico de acción de dovela con ciclos que se dirigen al origen y no degradan la resistencia, contrario a lo del ensayo. En las [Figs. 5.2.\(c\)](#) y [5.2.\(d\)](#) se presentan los diagramas de carga vs desplazamiento lateral de corte y flexión respectivamente, pero únicamente del modelo.

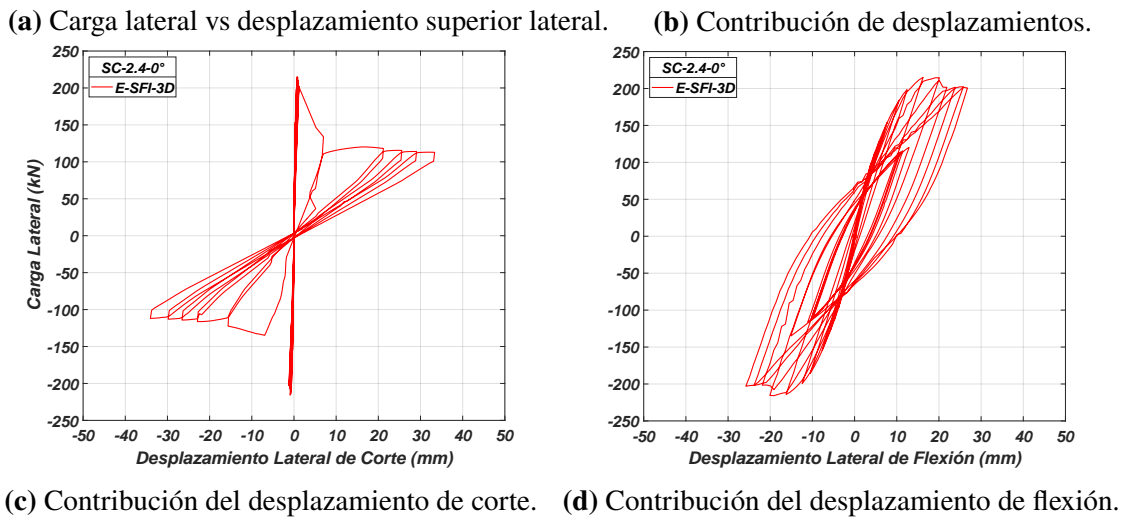
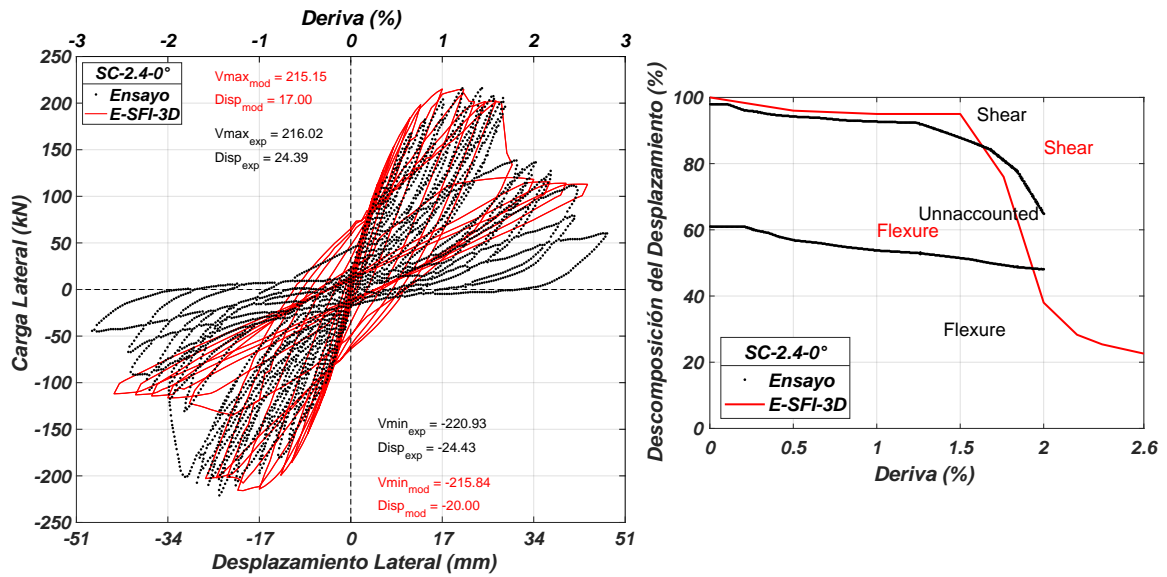
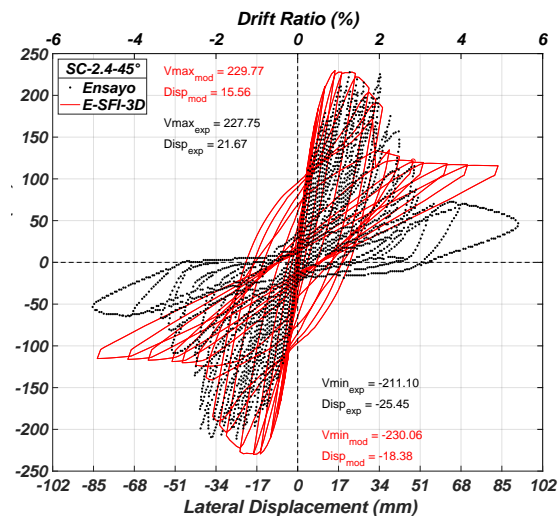
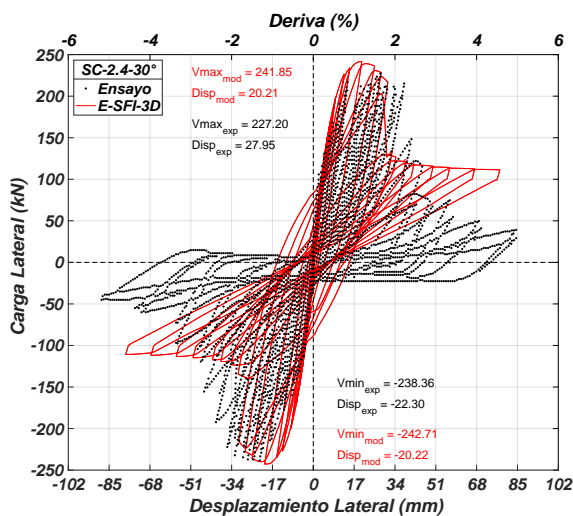


Figura 5.2: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales del ensayo SC-2.4-0.

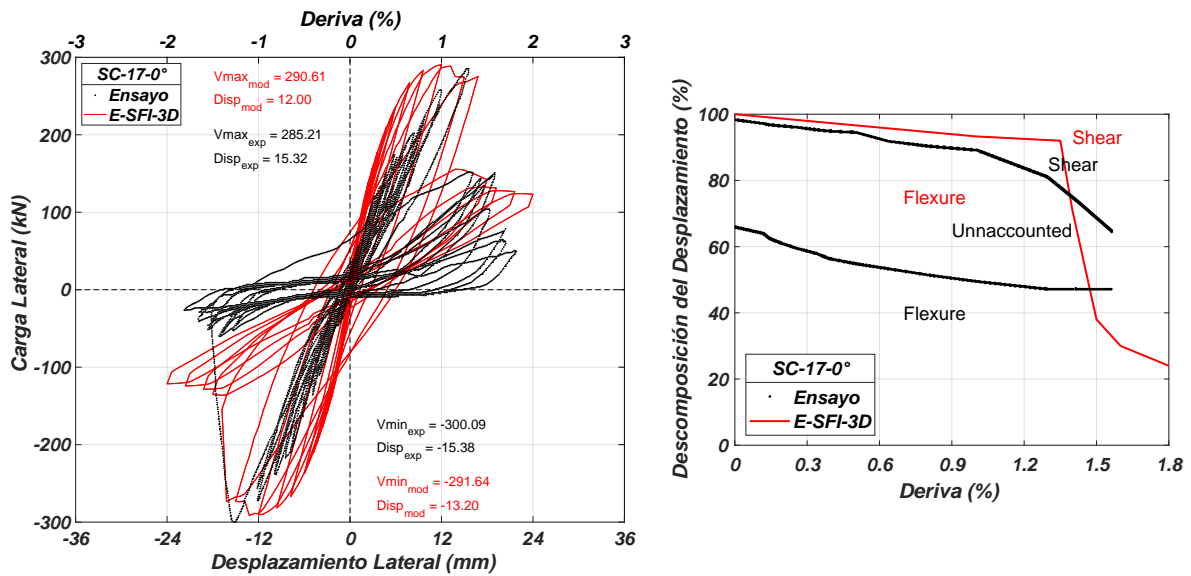


De acuerdo a la Fig. 5.2.(b) para el ensayo “SC-2.4-0”, la contribución del desplazamiento de corte al desplazamiento total es menor al 10 % hasta el 1.25 % de deriva para los datos experimentales, y es menor al 10 % hasta el 1.5 % de deriva para los datos del modelo; luego de lo cual, el desplazamiento de corte incrementa rápidamente hasta llegar a representar el 38 % del desplazamiento total en una deriva del 2 % conforme los datos experimentales, y llega a representar el 60 % del desplazamiento total al 2 % de deriva conforme los datos del modelo. Cabe recalcar que existe un 12 % de desplazamiento que no pudo ser medido en el ensayo. Por lo tanto, el modelo sobrestima el punto de aumento drástico de la deformación de corte así como el porcentaje de contribución al desplazamiento total, pero en general es capaz de predecir la falla de corte en la columna esbelta. Este aumento drástico del desplazamiento de corte y por ende la falla, también se observa en la Fig. 5.2.(c), donde el desplazamiento de corte es de 1 mm y luego llega a ser de 8 mm cuando la respuesta global empieza a degradar en el 1.7 % de deriva, aumentando continuamente de acuerdo al modelo de acción de dovola. Por el contrario, la contribución de la deformación de flexión se reduce y en la Fig. 5.2.(d) de la curva histerética se observa como se contrae el desplazamiento de flexión mientras aumenta el desplazamiento global pasando de un desplazamiento de 28 mm a uno de 10 mm cuando se produce la degradación global de la respuesta.

Con lo anterior, se comprueba la virtud del modelo para predecir la falla de corte de la columna con una confiable estimación de la resistencia e inicio de degradación pero ante una carga lateral uniaxial, (0°). Por lo que, el siguiente punto que acredite el modelo 3D hace referencia a la comparación de la respuesta del modelo de la columna con los resultados experimentales ante una carga lateral de 30 y 45° fuera del plano como se ilustra en las Figs. 5.3 y 5.4, respectivamente. La Fig. 5.3 compara la curva histerética del modelo con la del ensayo ante una carga biaxial de 30°, en donde se consigue una alta precisión de la rigidez en el punto de máxima resistencia, así como el valor de máxima resistencia y una menor precisión para el punto de inicio de degradación. En sí la respuesta del modelo replica el comportamiento de la columna, excepto cuando se produce la degradación de la resistencia debido al aumento del desplazamiento de corte, en donde el modelo simple de acción de dovola impide una degradación de la resistencia. Infortunadamente, los ensayos biaxiales no cuentan con los datos experimentales de la contribución de los desplazamientos. Al lado de ello, la Fig. 5.4 compara la curva histerética del modelo con la del ensayo ante una carga biaxial de 45°, y de igual manera se logra una alta precisión de resistencia e inicio de degradación, pero ahora con un mayor estrangulamiento en el origen producto de una mayor respuesta de flexión. Ambos modelos con una carga de 30 y 45° predicen una falla por corte como lo revela el comportamiento exclusivo de la acción de dovola en la parte degradante de la respuesta, lo que es congruente con los resultados experimentales que también reportan una falla por corte.

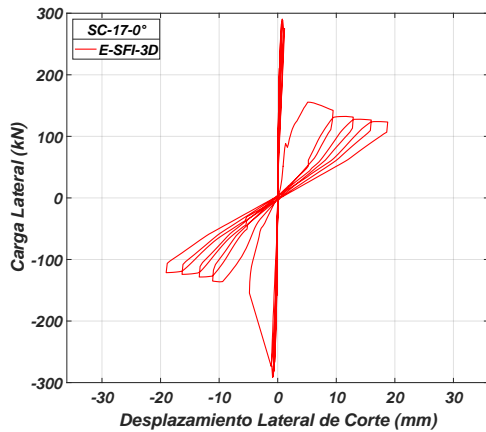
La misma presentación de los resultados se realiza para el ensayo de la columna intermedia “SC-1.7-0” uniaxial, comparando la respuesta histerética y la contribución de la deformación de corte y flexión del modelo y de los datos experimentales en la Fig. 5.5. El modelo consigue replicar la forma general de la curva histerética experimental pero sobrestima la rigidez inicial y subestima la deformación en el punto de máxima resistencia. Sin embargo, predice una resistencia máxima e inicio de degradación similar a los ensayos. Además como se esperaba, al ser una columna menos esbelta, el desplazamiento de corte aumenta más rápidamente y supera el 10 % del desplazamiento total mucho antes que el caso anterior, ahora en una deriva del 0.6 % diferente a la deriva del 1.25 % anterior, según los datos experimentales. Por otro lado el modelo presenta un aumento más drástico del desplazamiento de corte que el caso anterior, igualmente en una deriva menor de 1.3 % en comparación con la columna anterior en una deriva de 1.5 %. El porcentaje de contribución del

desplazamiento de corte final es del 38 % en una deriva del 1.6 % conforme los datos experimentales pero el modelo predice un porcentaje del 65 %, por lo que sobrestima la deformación de corte. En cuanto a los resultados biaxiales, la Fig. 5.6 muestra la comparación de la respuesta histerética del modelo y del ensayo para una carga de 30° y la Fig. 5.7 para una carga de 45°, obteniendo una buena precisión de los valores de resistencia máxima e inicio de degradación por parte del modelo, y además la virtud para capturar correctamente la forma general de los ensayos de las columnas intermedias. El modelo presenta un menor estrangulamiento en el origen para una carga de 45° en comparación con la columna esbelta anterior, lo que implica correctamente un menor comportamiento de flexión para esta columna más corta.

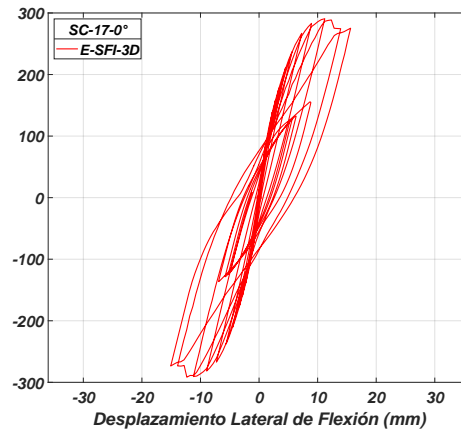


(a) Carga lateral vs desplazamiento superior lateral.

(b) Contribución de desplazamientos.



(c) Contribución del desplazamiento de corte.



(d) Contribución del desplazamiento de flexión.

Figura 5.5: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales del ensayo SC-1.7-0.

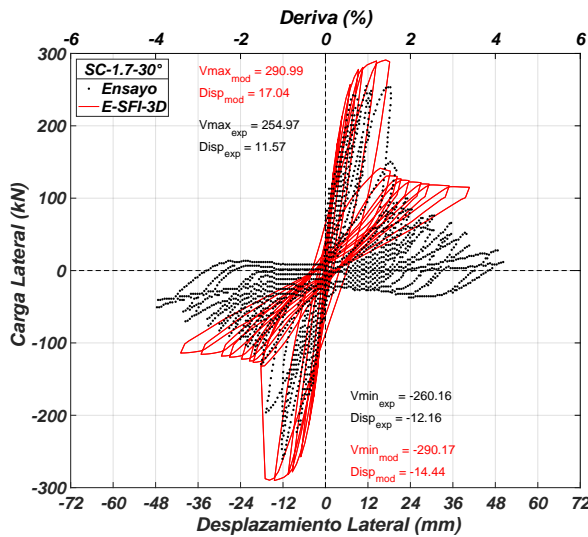


Figura 5.6: Ensayo SC-1.7-30.

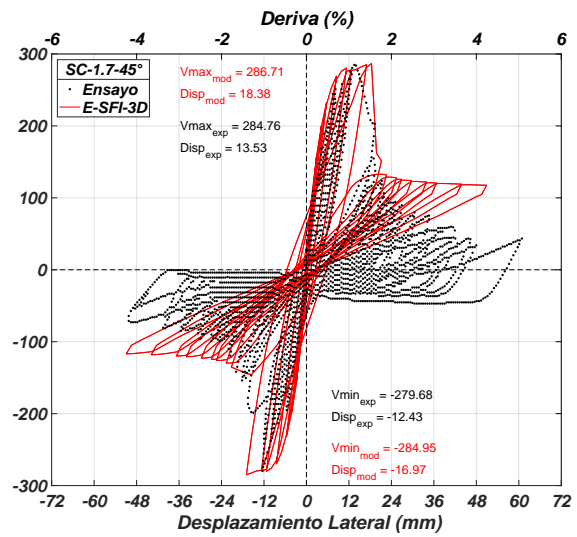
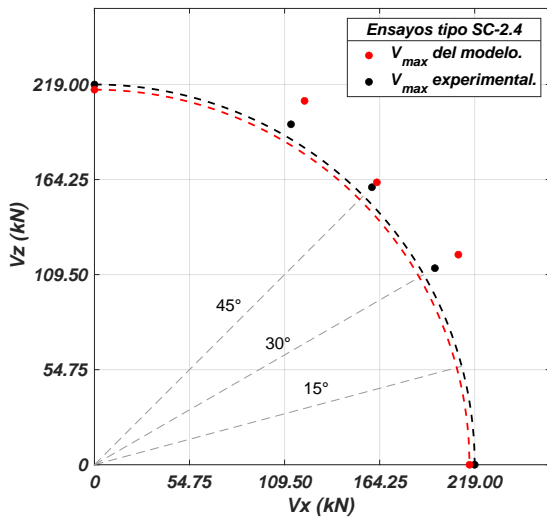
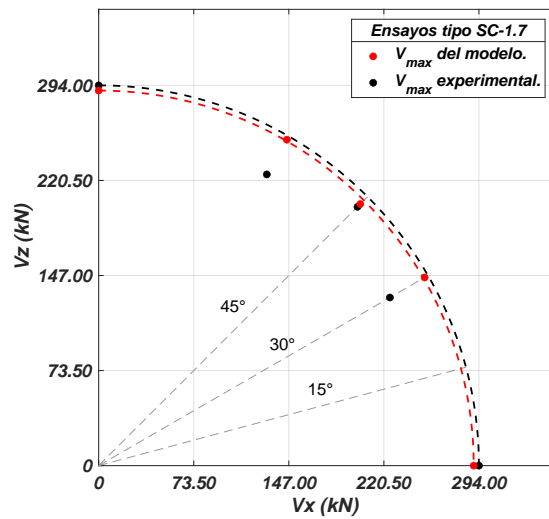


Figura 5.7: Ensayo SC-1.7-45.

Finalmente, en la Fig. 5.8 se construye el diagrama de interacción de la resistencia última al corte vs la dirección de carga de los ensayos y del modelo. La Fig. 5.8.(a) muestra la interacción de la columna esbelta tipo “SC-2.4”, cuyos datos experimentales se ajustan con gran precisión al arco de círculo, a pesar, de que exista un 30 % de aumento de f'_c para los ensayos biaxiales. Por otro lado, los resultados del modelo se alejan de la curva de interacción circular en un 12 %, pero debido al aumento de la resistencia del hormigón. Sin embargo, los datos del modelo si se ajustan bien para la curva de interacción de la columna intermedia, como se señala en la Fig. 5.8.(b), porque se mantiene un valor similar de f'_c entre ensayos, y por el contrario ahora los datos experimentales se alejan en un 12 % de la curva de interacción para la carga en 30°. Pero en total, tanto los datos experimentales como del modelo tienden a mantener la misma resistencia al corte ante cargas biaxiales, lo que recae en una curva de interacción circular como se observa.



(a) Resistencia al corte ensayos SC-2.4.



(b) Resistencia al corte ensayos SC-1.7.

Figura 5.8: Resistencia al corte vs dirección de carga de las columnas de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013].

5.1.2. Columnas experimentales de [Arakawa et al., 1989].

Esta investigación describe un estudio experimental del comportamiento de la resistencia al corte de columnas cuadradas cortas de hormigón armado, $L/h = 2.5$, bajo cargas laterales uniaxiales y biaxiales. Catorce especímenes fueron ensayados, cuya configuración se muestra en la Fig. 5.9 junto con la discretización mínima necesaria de 7×7 prismas de hormigón armado para el modelo E-SFI-3D. Los catorce ensayos se diferencian en cinco tipos de acuerdo al valor de carga axial aplicada, dentro de los cuales, se distinguen tres tipos de ensayos según la dirección de carga pudiendo ser de 0 , 22.5 y 45° .

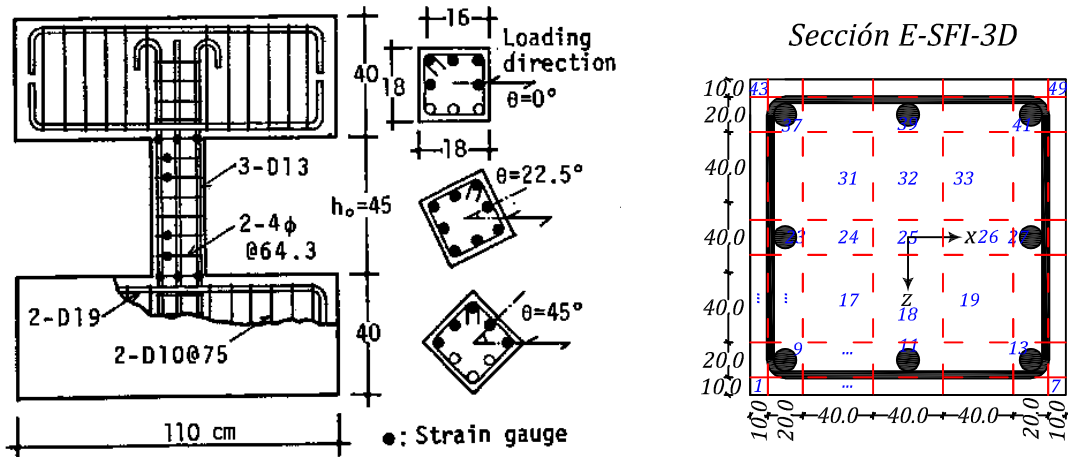


Figura 5.9: Configuración de las columnas de [Arakawa et al., 1989], y discretización transversal para el modelo E-SFI-3D.

Las propiedades principales de las columnas de esta investigación se resumen en la Tabla. 5.3, cuyos valores se utilizan en las leyes uniaxiales de los materiales del prisma. Para ello, el valor del hormigón confinado se presenta en la Tabla. 5.4 suficiente para definir la ley uniaxial del hormigón, mientras que para definir las leyes uniaxiales del acero el módulo de elasticidad del refuerzo longitudinal es de: $E_{sy} = 170000 \text{ MPa}$, y del refuerzo transversal es igual a: $E_{s,x/z} = 200000 \text{ MPa}$, y el factor b supuesto es de 0.01 para el acero longitudinal y de 0.008 para el acero transversal. En relación con el espaciamiento de los estribos, la altura del elemento en los extremos es de 64.3 mm y de los tres elementos en el centro es de 107.1 mm.

Tabla 5.3: Propiedades principales de las columnas cuadradas de [Arakawa et al., 1989].

| Ensayo ID | $\frac{L_c}{h_c}$ | L_c , mm | h_c , mm | s , mm | ρ_l , % | ρ_t , % | $\frac{N}{f'_c \cdot A_g}$ | Ángulo de Carga | Refuerzo | | | | f'_c , Mpa |
|--------------|-------------------|---------------|---------------|-------------|-----------------|-----------------|----------------------------|-----------------------|--------------|----------------|-------------|----------------|-----------------|
| | | | | | | | | | Longitudinal | | Transversal | | |
| | | | | | | | | | Diá., mm | F_y , MPa | Diá., mm | F_y , MPa | |
| 0A-1 | 2.5 | 450 | 180 | 64.3 | 3.28 | 0.21 | -0.084 | 0° | 13 | 340 | 4 | 250 | 31.56 |
| 0A0 | | | | | | | 0 | | | | | | 35.10 |
| 0A2 | | | | | | | 0.185 | | | | | | 31.75 |
| 0A4 | | | | | | | 0.348 | | | | | | 33.81 |
| 0A5 | | | | | | | 0.445 | | | | | | 33.03 |
| 2A0 | | | | | | | 0 | 22.5° | | | | | 31.85 |
| 2A2 | | | | | | | 0.182 | | | | | | 32.24 |
| 2A4 | | | | | | | 0.382 | | | | | | 30.77 |
| 2A5 | | | | | | | 0.487 | | | | | | 30.18 |
| 4A-1 | | | | | | | -0.097 | 45° | | | | | 33.91 |
| 4A0 | | | | | | | 0 | | | | | | 30.30 |
| 4A2 | | | | | | | 0.195 | | | | | | 30.09 |
| 4A4 | | | | | | | 0.373 | | | | | | 31.56 |
| 4A5 | | | | | | | 0.481 | | | | | | 30.58 |

Definido el modelo con las propiedades de cada ensayo, la [Tabla. 5.4](#) indica el valor de los parámetros calibrados y de los resultados obtenidos de cada ensayo. El valor calibrado del resorte rotacional para el deslizamiento en la unión aumenta conforme aumenta la carga axial de compresión aplicada, lo que genera mayor rigidez a la columna. De igual manera, tanto la rigidez, mediante el factor α , y la tensión máxima, τ_{max} , de la acción de dovola también aumenta conforme aumenta la carga axial de compresión aplicada. Se alcanza un promedio de la resistencia al corte y del inicio de degradación medida a la calculada de 0.85 y 0.78, con un coeficiente de variación de 0.06 y 0.2, respectivamente. Los resultados comparativos demuestran un fiabilidad media del modelo para predecir el comportamiento de las columnas de esta investigación.

Tabla 5.4: Parámetros de calibración y comparación de resultados de las columnas cuadradas de [Arakawa et al., 1989].

| Ensayo ID | Parámetros de Calibración | | | | | Resultados | | | | | | | |
|--------------------------|---------------------------|------------|-----------------------|------------|-----------------------|----------------|----------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|---|---------|------------|
| | K_{SE} , kN m | α_x | $\tau_{max,xy}$, MPa | α_z | $\tau_{max,yz}$, MPa | V_{exp} , kN | V_{mod} , kN | $\frac{V_{exp}}{V_{mod}}$ | $\Delta_{0.9V_{exp}}$, mm | $\Delta_{0.9V_{mod}}$, mm | $\frac{\Delta_{0.9V_{exp}}}{\Delta_{0.9V_{mod}}}$ | # Pasos | Tiempo, sg |
| 0A-1 | 3000 | - | - | - | - | 67.3 | 74 | 0.91 | 4.5 | 5.8 | 0.78 | 755 | 822 |
| 0A0 | 3500 | 0.003 | 50 | - | - | 96.7 | 106 | 0.91 | 6 | 6.1 | 0.98 | 755 | 775 |
| 0A2 | 4500 | 0.005 | 55 | - | - | 127.8 | 143.5 | 0.89 | 4.6 | 5 | 0.92 | 755 | 693 |
| 0A4 | 5500 | 0.01 | 60 | - | - | 142 | 161.6 | 0.88 | 2.6 | 3.7 | 0.7 | 461 | 269 |
| 0A5 | 6000 | 0.02 | 70 | - | - | 125.5 | 166.5 | 0.75 | 1.6 | 3.2 | 0.5 | 461 | 281 |
| 2A0 | 3500 | 0.0028 | 40 | 0.0015 | 20 | 89.8 | 99 | 0.91 | 4.85 | 5.3 | 0.92 | 461 | 548 |
| 2A2 | 4500 | 0.005 | 50 | 0.002 | 20 | 108.3 | 138.5 | 0.78 | 4 | 4.5 | 0.89 | 379 | 379 |
| 2A4 | 5500 | 0.009 | 55 | 0.004 | 25 | 126 | 153 | 0.83 | 2.3 | 3.7 | 0.62 | 181 | 163 |
| 2A5 | 6500 | 0.019 | 65 | 0.0076 | 25 | 135 | 158.7 | 0.85 | 2.3 | 2.6 | 0.88 | 181 | 232 |
| 4A-1 | 2500 | - | - | - | - | 68 | 77 | 0.88 | 4.56 | 4.7 | 0.97 | 657 | 752 |
| 4A0 | 3500 | 0.003 | 35 | 0.003 | 35 | 92.4 | 114 | 0.81 | 5.3 | 6.1 | 0.87 | 355 | 436 |
| 4A2 | 4000 | 0.004 | 35 | 0.004 | 35 | 108.7 | 135 | 0.8 | 2.77 | 4.40 | 0.63 | 285 | 301 |
| 4A4 | 5500 | 0.007 | 45 | 0.007 | 45 | 127.3 | 154.3 | 0.83 | 2.5 | 4.0 | 0.63 | 285 | 307 |
| 4A5 | 5500 | 0.015 | 50 | 0.015 | 50 | 123.2 | 151.5 | 0.81 | 2.3 | 3.3 | 0.7 | 285 | 237 |
| Promedio | | | | | | | | 0.85 | | | 0.78 | | |
| Coeficiente de variación | | | | | | | | 0.06 | | | 0.20 | | |

$f'_{cc} = f'_c + 3500 \text{ kPa}$

A continuación en una serie de figuras, se compara el comportamiento histerético de los ensayos y del modelo que comparten la misma carga axial, pero se distinguen únicamente por la dirección de carga lateral. Por ejemplo, la Fig. 5.10 muestra el comportamiento de la columna corta con una carga de tracción y una carga lateral en 0 y 45°. Como se discutió en la sección 4.3, debido a la carga de tracción el modelo no presenta acción de dovola, y aún así, logra capturar los ciclos histeréticos medios pero no finales, ya que la respuesta se degrada completamente por el aumento de la deformación de corte. Incluso para una carga de tracción la resistencia es similar en 0 y 45°.

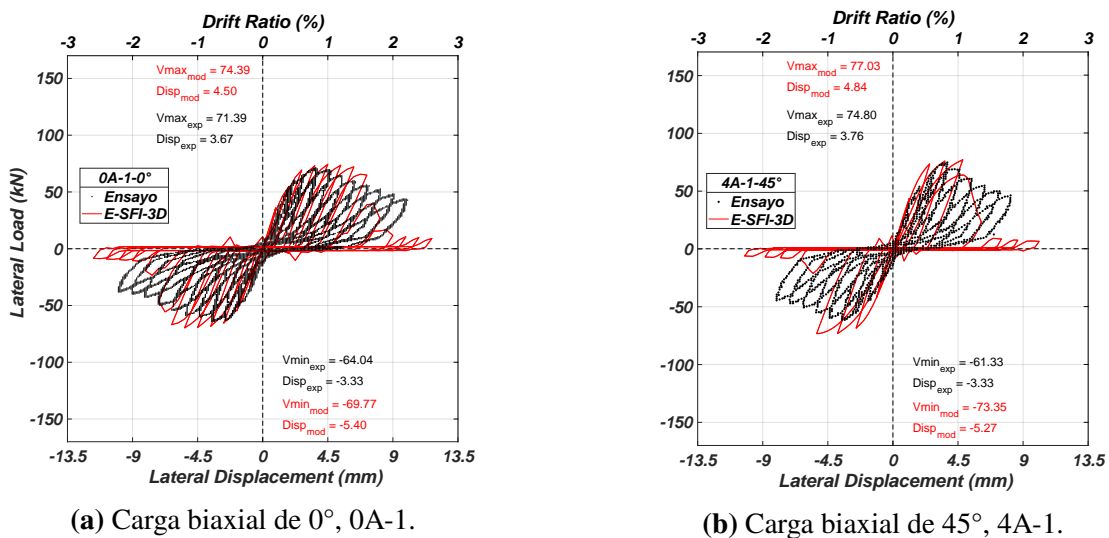


Figura 5.10: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “-1” con una carga axial de tracción y una carga lateral biaxial de 0 y 45°.

El comportamiento histerético de los ensayos y del modelo para una carga axial de cero se muestran en la Fig. 5.11, comparado entre cargas laterales de 0, 22.5 y 45°. Las tres respuestas, tanto del ensayo como del modelo, alcanzan resistencias similares. Mientras, que el modelo simple de acción de dovela caracteriza el comportamiento degradante, exclusivamente por la deformación de corte que está presente en la respuesta. La predicción de resistencia al corte del modelo es buena, pero la del inicio de degradación es menos precisa debido al deterioro uniforme del ensayo y el deterioro más drástico del modelo.

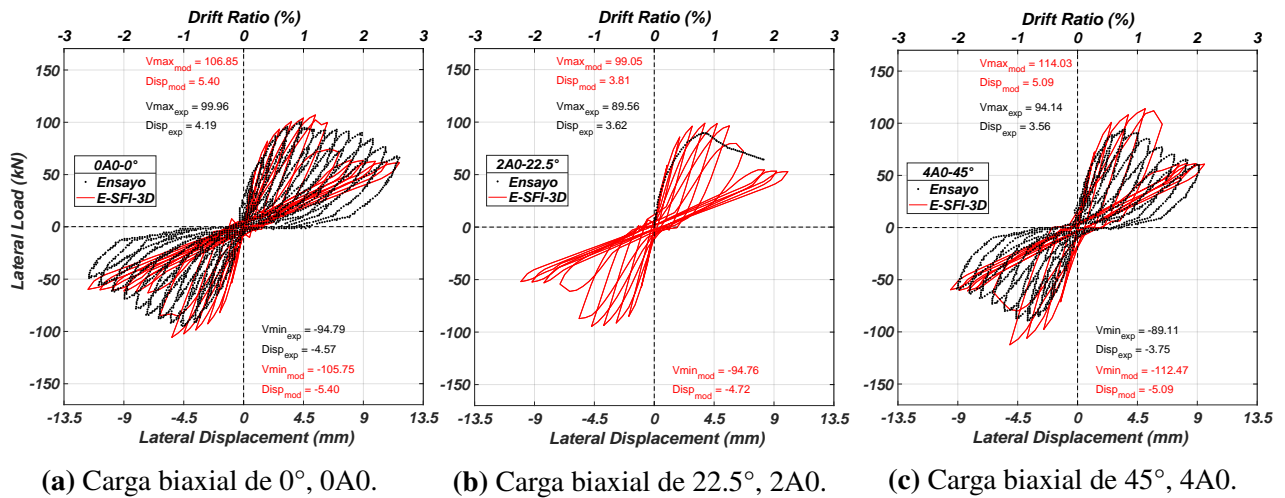


Figura 5.11: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “0” con una carga axial de cero y una carga lateral biaxial de 0, 22.5 y 45°.

El comportamiento histerético de los ensayos y del modelo para una carga de compresión cercana al 20% de $f'_c \cdot A_g$ se muestran en la Fig. 5.12, comparado entre cargas laterales de 0, 22.5 y 45°. La resistencia al corte del modelo es similar para las diferentes cargas biaxiales, pero de los datos experimentales son diferentes con una reducción del 20% para el ensayo en 22.5°. Esto hace que la predicción de resistencia al corte e inicio de degradación del modelo con respecto a los datos medidos solo sea similar para el ensayo en 0° y varíe para 22.5 y 45°.

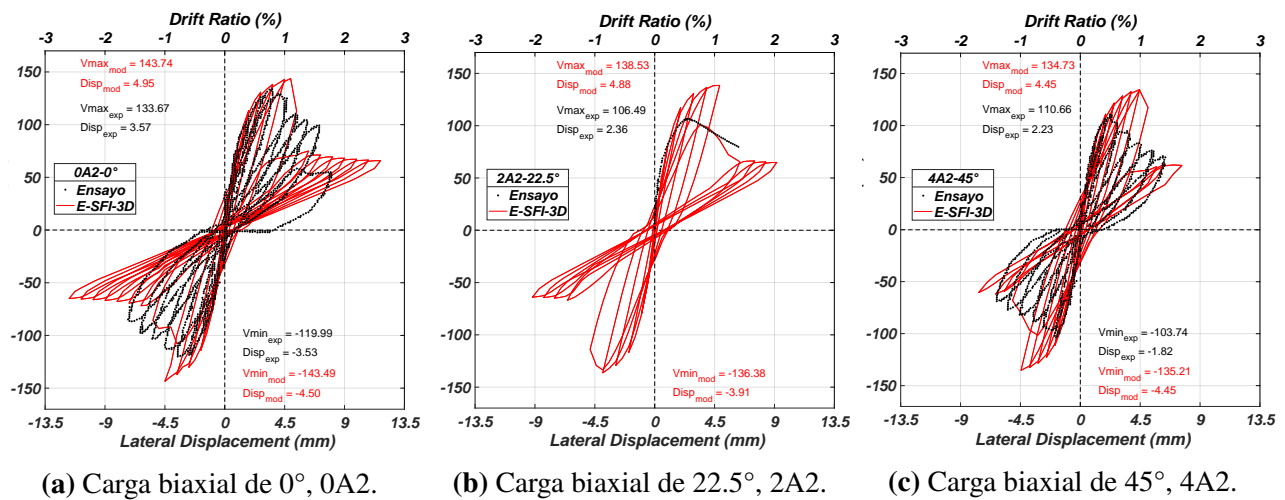


Figura 5.12: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “2” con una carga axial de compresión cerca del 20% de $f'_c \cdot A_g$ y una carga lateral biaxial de 0, 22.5 y 45°.

El comportamiento histerético de los ensayos y del modelo para una carga de compresión cercana al 40 % de $f'_c \cdot A_g$ se muestran en la Fig. 5.13, comparado entre cargas laterales de 0, 22.5 y 45°. De igual manera que el tipo de ensayos anteriores, la resistencia al corte del modelo es similar para las diferentes cargas biaxiales, pero del ensayo difiere en un 17 % para las cargas biaxiales.

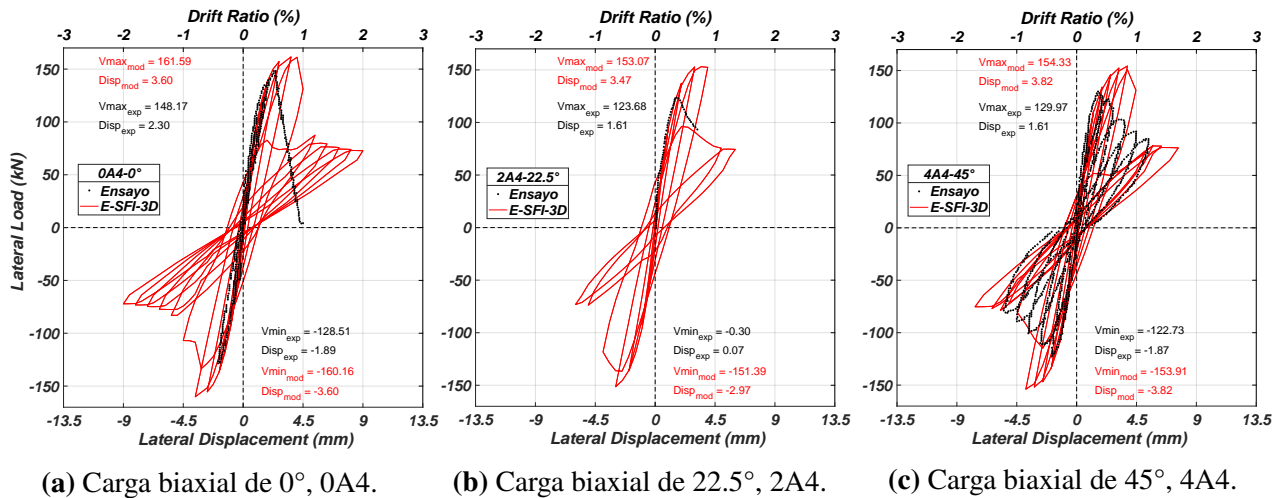


Figura 5.13: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “4” con una carga axial de compresión cerca del 40 % de $f'_c \cdot A_g$ y una carga lateral biaxial de 0, 22.5 y 45°.

El comportamiento histerético de los ensayos y del modelo para una carga de compresión cercana al 50 % de $f'_c \cdot A_g$ se muestran en la Fig. 5.14, comparado entre cargas laterales de 0, 22.5 y 45°. Ahora los tres resultados de resistencia al corte, tanto del ensayo como del modelo, son similares pero difieren entre sí en un 16 %. Esta diferencia, es porque los resultados experimentales alcanzan una menor resistencia que los resultados experimentales anteriores, a pesar de que se aumenta la carga de compresión, lo que si captura el modelo al menos manteniendo una resistencia similar a los datos anteriores. Debido a este inconveniente, se desajusta la predicción de resistencia al corte e inicio de degradación del modelo, pero en general logra capturar el comportamiento histerético.

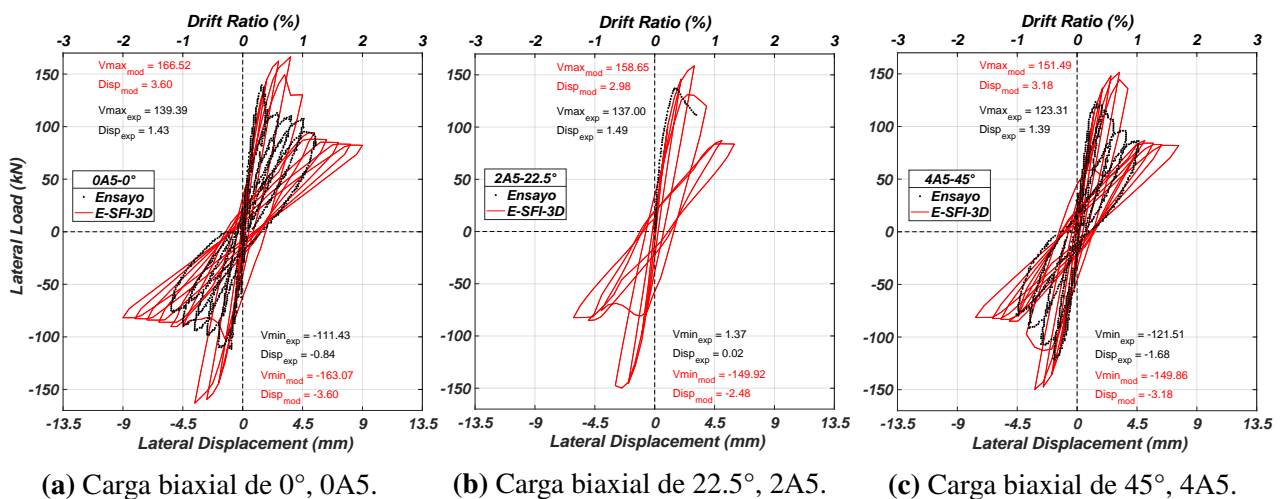


Figura 5.14: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “5” con una carga axial de compresión cerca del 50 % de $f'_c \cdot A_g$ y una carga lateral biaxial de 0, 22.5 y 45°.

La investigación experimental muestra como la resistencia al corte aumenta cuando aumenta la carga axial de compresión, lo que de acuerdo a [Arakawa et al., 1989] reduce el daño de corte observado pero produce una falla más frágil, especialmente debido al daño por compresión en el hormigón. Para el análisis de los resultados biaxiales se construye la Fig. 5.15 mostrando el efecto de corte biaxial para los resultados experimentales en la figura a) y para los resultados del modelo en la b). Los resultados experimentales de las cargas biaxiales presentan la forma circular pero con un desfase menor a la curva de interacción, especialmente para los ensayos con el 20% de carga de compresión. Por otro lado, los resultados biaxiales del modelo se ajustan de mejor manera a la curva de interacción, especialmente para las columnas con una carga de compresión. Además, el modelo logra predecir la falla de corte que se observó en todas las columnas con una tolerable predicción de resistencia e inicio de degradación.

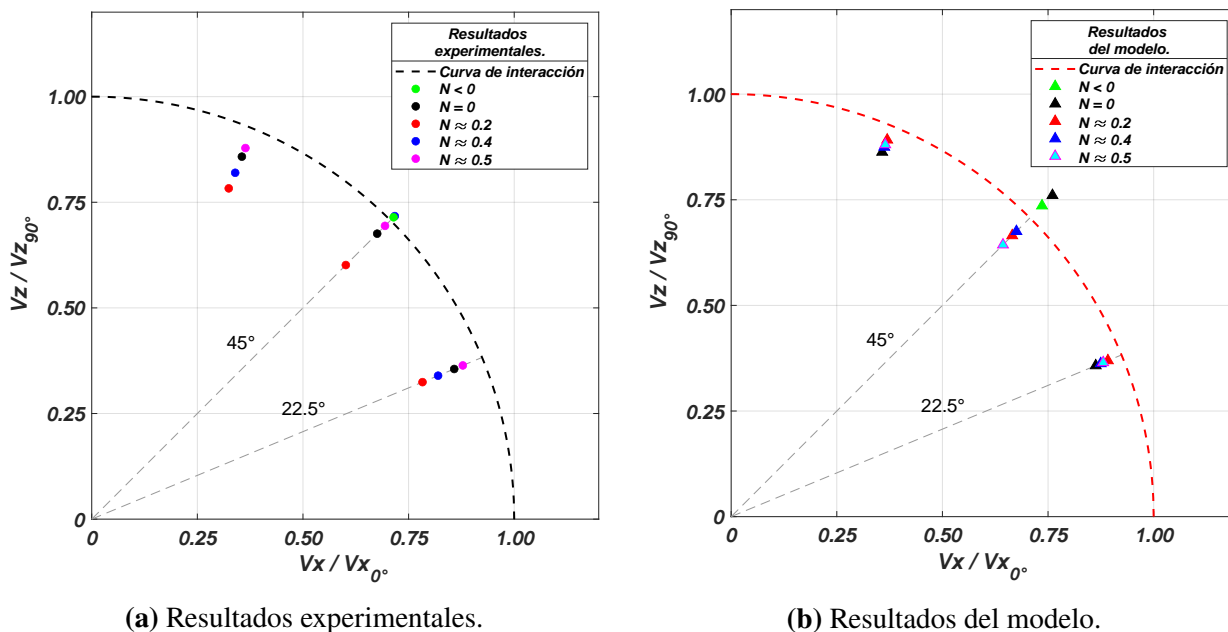


Figura 5.15: Resistencia normalizada al corte vs dirección de carga de las columnas de [Arakawa et al., 1989].

5.1.3. Columnas experimentales de [Hua et al., 2021].

Esta investigación describe un estudio experimental del comportamiento de la resistencia al corte de dos columnas cuadradas intermedias de hormigón armado, con una relación de esbeltez de $L/h = 3.1$ y $L/h = 3.7$, bajo cargas laterales biaxiales de 30 y 45°. La configuración de los ensayos experimentales se muestra en la Fig. 5.16, los cuales además de variar la altura de la columna también varían la cuantía longitudinal y transversal, el espaciamiento de los estribos y las propiedades del acero. Con todos estos cambios, a pesar de que ambas columnas tienen la misma sección transversal, a parte del incremento de la sección de las barras de acero, la respuesta para la columna más esbelta de un $L/h = 3.7$ necesita de una mayor discretización de la sección transversal para lograr converger y simular la falla de corte. Las dos discretizaciones transversales se presentan en la Fig. 5.16 para los ensayos experimentales, una de 9x9 para la columna de un $L/h = 3.1$ y de 11x11 para la de un $L/h = 3.7$.

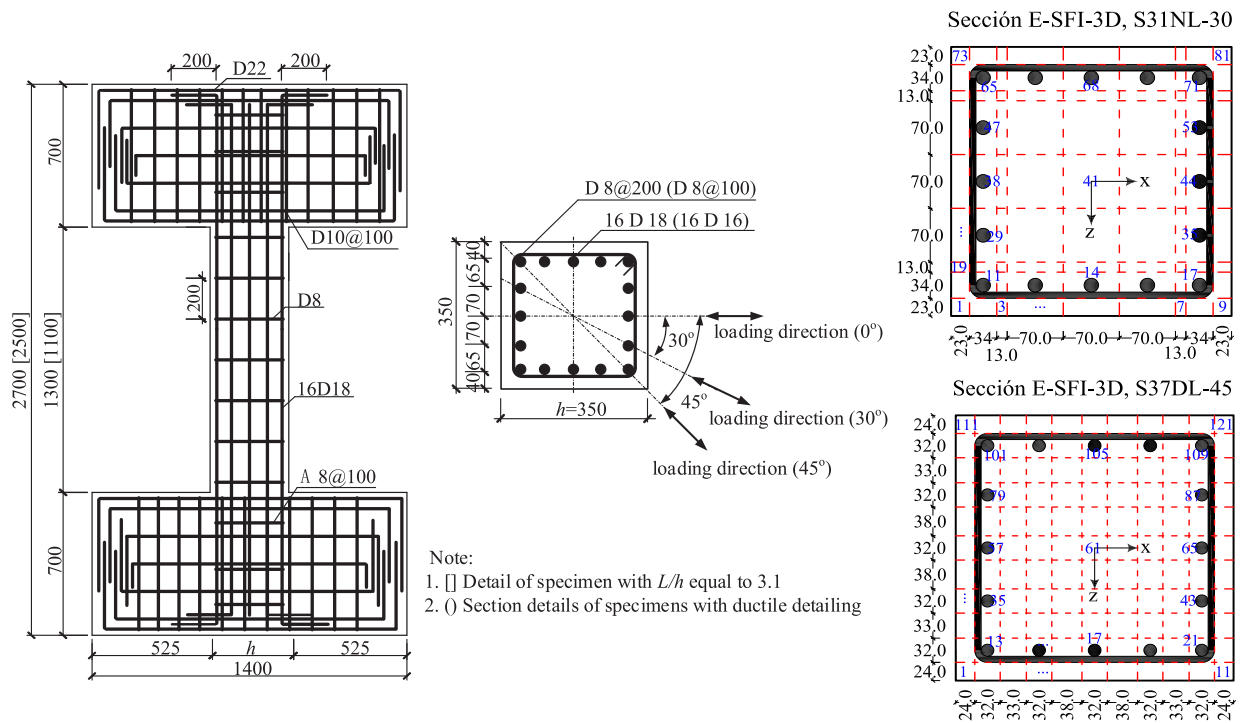


Figura 5.16: Configuración de las columnas de [Hua et al., 2021], y discretización transversal para el modelo E-SFI-3D.

Las propiedades principales de las columnas de esta investigación se resumen en la [Tabla 5.5](#), cuyos valores se utilizan en las leyes uniaxiales de los materiales del prisma. Para ello, el valor del hormigón confinado se presenta en la [Tabla 5.6](#) suficiente para definir la ley uniaxial del hormigón, mientras que para definir las leyes uniaxiales del acero, el módulo de elasticidad del refuerzo longitudinal y transversal es de: $E_s = 200000 \text{ MPa}$, y el factor b supuesto es de 0.01 para el acero longitudinal y de 0.008 para el transversal. En relación con el espaciamiento de los estribos, la altura del elemento en los extremos es de 100 mm y de los tres elementos en el centro es de 300 mm y 366.6 mm para la columna de $L/h = 3.1$ y $L/h = 3.7$, respectivamente. No se utiliza una longitud del primer elemento de 200 mm , de acuerdo al espaciamiento de la primera columna, porque esta longitud es muy grande y no captura una mayor curvatura en los extremos de la columna, lo que sobrestima la resistencia del modelo.

Tabla 5.5: Propiedades principales de las columnas cuadradas de [Hua et al., 2021].

| Ensayo ID | $\frac{L_c}{h_c}$ | L_c mm | h_c mm | s mm | ρ_l % | ρ_t % | $\frac{N}{f'_c \cdot A_g}$ | Ángulo de Carga | Refuerzo | | | | |
|--------------|-------------------|-------------|-------------|-----------|---------------|---------------|----------------------------|-----------------------|--------------|----------------|-------------|----------------|---------------|
| | | | | | | | | | Longitudinal | | Transversal | | f'_c Mpa |
| | | | | | | | | | Diá., mm | F_y , MPa | Diá., mm | F_y , MPa | |
| S31NL-30 | 3.1 | 1100 | 350 | 200 | 2.6 | 0.14 | 0.13 | 30° | 18 | 461 | 8 | 500 | 44.5 |
| S37DL-45 | 3.7 | 1300 | | 100 | 3.3 | 0.29 | | 45° | 16 | 511 | | | 43.6 |

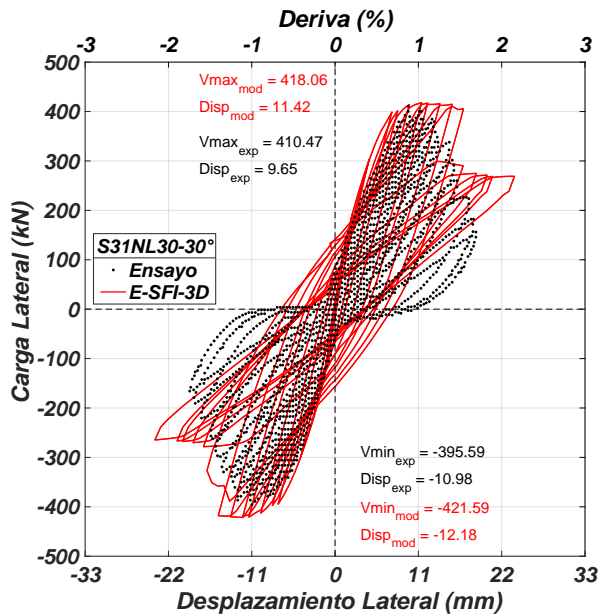
Definido el modelo con las propiedades de cada ensayo, la [Tabla 5.6](#) indica el valor de los parámetros calibrados y de los resultados obtenidos de cada ensayo. El promedio en la predicción

de resistencia del modelo es de 0.99 y del inicio de degradación es de 0.87 con unos coeficientes de variación de 0.04 y 0.09, respectivamente. Estos valores del modelo son los más cercanos a los datos experimentales de todas las investigaciones, ya que el modelo captura correctamente inclusive el inicio de degradación, el cual es más drástico que los resultados de las investigaciones anteriores, lo que hace que el modelo sea confiable para esta investigación que es la más reciente en la literatura.

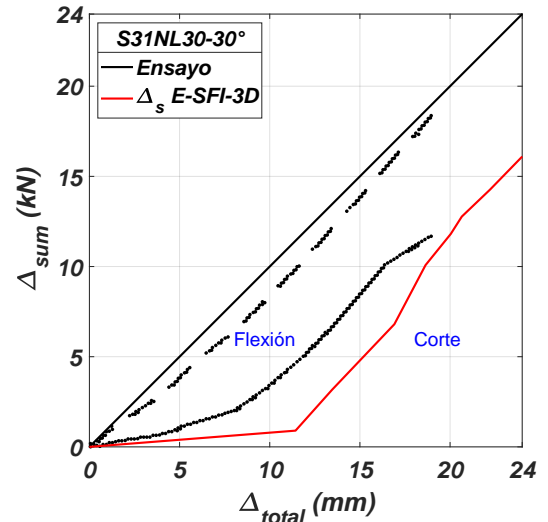
Tabla 5.6: Parámetros de calibración y comparación de resultados de las columnas cuadradas de [Hua et al., 2021].

| Ensayo ID | Parámetros de Calibración | | | | | Resultados | | | | | | | |
|--------------|-----------------------------|------------|--------------------------|------------|--------------------------|--------------------------|-------------------|---------------------------|-------------------------------|-------------------------------|---|------------|---------------|
| | K_{SE} , kN m | α_x | $\tau_{max,xy}$, MPa | α_z | $\tau_{max,yz}$, MPa | V_{exp} , kN | V_{mod} , kN | $\frac{V_{exp}}{V_{mod}}$ | $\Delta_{0.9V_{exp}}$, mm | $\Delta_{0.9V_{mod}}$, mm | $\frac{\Delta_{0.9V_{exp}}}{\Delta_{0.9V_{mod}}}$ | # Pasos | Tiempo, sg |
| S31NL-30 | 15000 | 0.0086 | 52 | 0.005 | 30 | 404 | 420 | 0.96 | 13.0 | 16.1 | 0.81 | 977 | 1869 |
| S37DL-45 | 25000 | 0.008 | 42 | 0.008 | 42 | 422 | 415 | 1.02 | 24.3 | 26 | 0.93 | 649 | 3807 |
| | $f'_{cc} = f'_c + 2400$ kPa | | | | | Promedio | | 0.99 | | | 0.87 | | |
| | | | | | | Coeficiente de variación | | 0.04 | | | 0.09 | | |

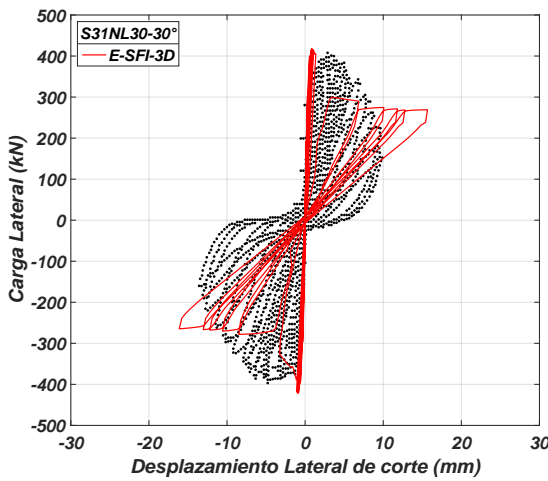
La Fig. 5.17 compara la respuesta histerética global del ensayo y del modelo para la columna S31NL-30 cargada lateralmente en 30°, la cual es dividida en cuatro subfiguras que además presentan el desplazamiento de corte y flexión separados, y la contribución de ambos al desplazamiento total. La Fig. 5.17.(a) muestra la carga lateral vs desplazamiento superior lateral en la dirección de 30°, en donde se observa como el modelo alcanza una resistencia última al corte similar al ensayo, y a pesar de que no degrada igual en la parte positiva de la respuesta, el desplazamiento en el 90 % de la resistencia máxima es cercana tanto del modelo como del ensayo. Luego se observa, que el modelo de acción de dovela domina el comportamiento final e impide una degradación completa de la respuesta. También se observa un mayor estrangulamiento en el origen, que no estaba presente en las columnas más cortas, este estrangulamiento es debido al desplazamiento de flexión, como se muestra en la respuesta de la Fig. 5.17.(d) y no en la del desplazamiento de corte Fig. 5.17.(c). En la Fig. 5.17.(b) se exhibe la contribución del desplazamiento de flexión y corte al desplazamiento total tanto del ensayo como del modelo. La contribución al desplazamiento de la parte de flexión y de corte del ensayo no alcanza el desplazamiento total definido por la diagonal de 45°, porque hay una parte no contabilizada en el ensayo. En esta subfigura se observa que el modelo subestima el desplazamiento de corte en contraste con los datos experimentales, pero luego aumenta paralelamente al aumento experimental hasta la deformación de 17.5mm; terminando en una contribución del 58 % para el desplazamiento de corte en los 19mm, mientras que los datos experimentales reportan una contribución del 64 %. Sin embargo, el modelo continua, y llega a tener una contribución constante del desplazamiento de corte del 69 % del desplazamiento total. Este crecimiento drástico del desplazamiento de corte en el modelo también es observable en la Fig. 5.17.(c), que expone el comportamiento histerético solo del desplazamiento de corte. Como se observa, el desplazamiento de corte medido se degrada en forma parabólica, mientras que el modelo predice pocas deformaciones de corte al inicio, hasta los 2 mm y posteriormente aumenta drásticamente con una caída de 45° hasta llegar al valor máximo de la acción de dovela, lo que implica un modelo insuficiente de acción de dovela.



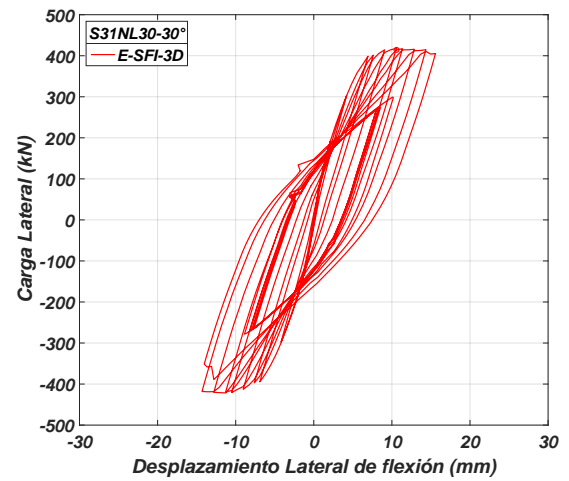
(a) Carga lateral vs desplazamiento superior lateral.



(b) Contribución de desplazamientos.



(c) Contribución del desplazamiento de corte.

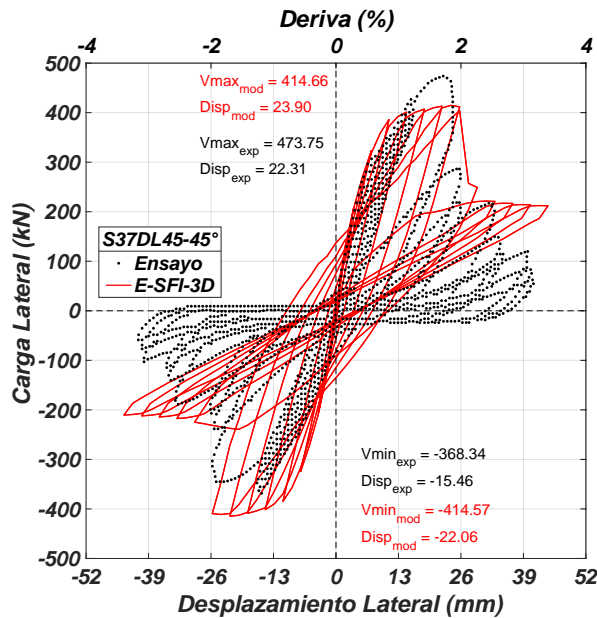


(d) Contribución del desplazamiento de flexión.

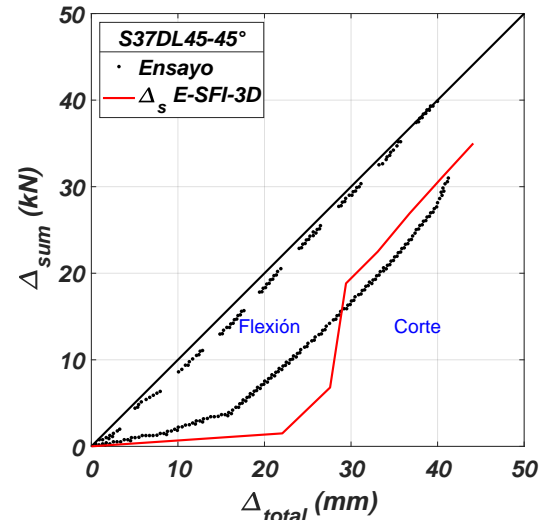
Figura 5.17: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales del ensayo S31NL30.

Análogamente, la Fig. 5.18 compara la respuesta histerética global del ensayo y del modelo para la columna S37DLA5 cargada lateralmente en 45°. La Fig. 5.18.(a) muestra la carga lateral vs desplazamiento superior lateral en la dirección de 45°, en donde se observa que el modelo subestima la resistencia última al corte en la parte positiva y la sobrestima en la parte negativa, pero a la final la investigación reporta el valor promedio entre ambas resistencias, lo que se ajusta a los datos calculados. En este caso, la parte positiva del modelo se ajusta al inicio de degradación del ensayo, lo que justifica la buena predicción del inicio de degradación del modelo. En la Fig. 5.18.(b) se muestra la contribución de los desplazamientos, y así mismo como el caso anterior, el modelo subestima el desplazamiento de corte inicial, pero después crece drásticamente hasta alcanzar el desplazamiento de corte experimental del 75 % del desplazamiento total y mantiene ese porcentaje de contribución. Mientras que el comportamiento histerético del desplazamiento de corte se presenta en la Fig. 5.18.(c), en donde igualmente el modelo subestima el comienzo pero luego decae hasta la tensión máxima de la acción de dovela, pero a diferencia del ensayo anterior, ahora el

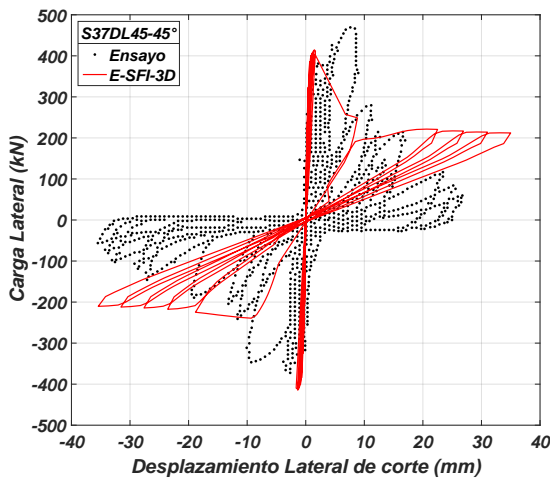
deterioro experimental decae linealmente hasta casi una carga nula. Por otro lado, en la Fig. 5.18.(d) se aprecia el comportamiento histerético del desplazamiento de flexión, que en el punto de inicio de degradación se contrae el valor del desplazamiento a causa del aumento del desplazamiento de corte.



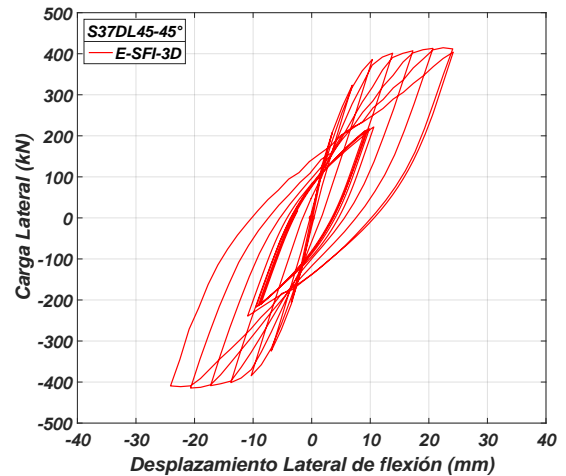
(a) Carga lateral vs desplazamiento superior lateral.



(b) Contribución de desplazamientos.



(c) Contribución del desplazamiento de corte.



(d) Contribución del desplazamiento de flexión.

Figura 5.18: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales del ensayo S37DL45.

5.1.4. Resumen de los resultados de las columnas cuadradas.

Esta subsección resume los resultados en cuanto a la predicción de la resistencia máxima al corte e inicio de degradación del modelo vs los datos medidos de los ensayos experimentales de columnas cuadradas de hormigón armado. Para ello se ilustra el error de cada ensayo en relación con cuatro variables que son: la dirección de carga lateral, el valor de carga axial, la relación de esbeltez L/h y la cuantía transversal de cada ensayo. De esta forma, la Fig. 5.19 presenta el error entre la resistencia máxima de corte medida por los ensayos y predicha por el modelo, en donde

se obtiene un promedio de 0.91 y un coeficiente de variación de 0.078 para los 41 ensayos. Los resultados comparativos demuestran la alta confiabilidad del modelo para predecir la resistencia al corte de columnas cuadradas de hormigón armado. La Fig. 5.19.(a) muestra un menor error en la predicción de la resistencia para cargas laterales de 30°, la Fig. 5.19.(b) muestra un menor error en la predicción de la resistencia para cargas axiales de tracción y aumenta conforme aumenta la carga axial de compresión, la Fig. 5.19.(c) muestra un menor error en la predicción de la resistencia para las columnas más esbeltas y la Fig. 5.19.(d) muestra un menor error en la predicción de la resistencia para las columnas con menos cuantía transversal. En general, el modelo es más veraz para investigaciones recientes de columnas intermedias y esbeltas que fallan a corte.

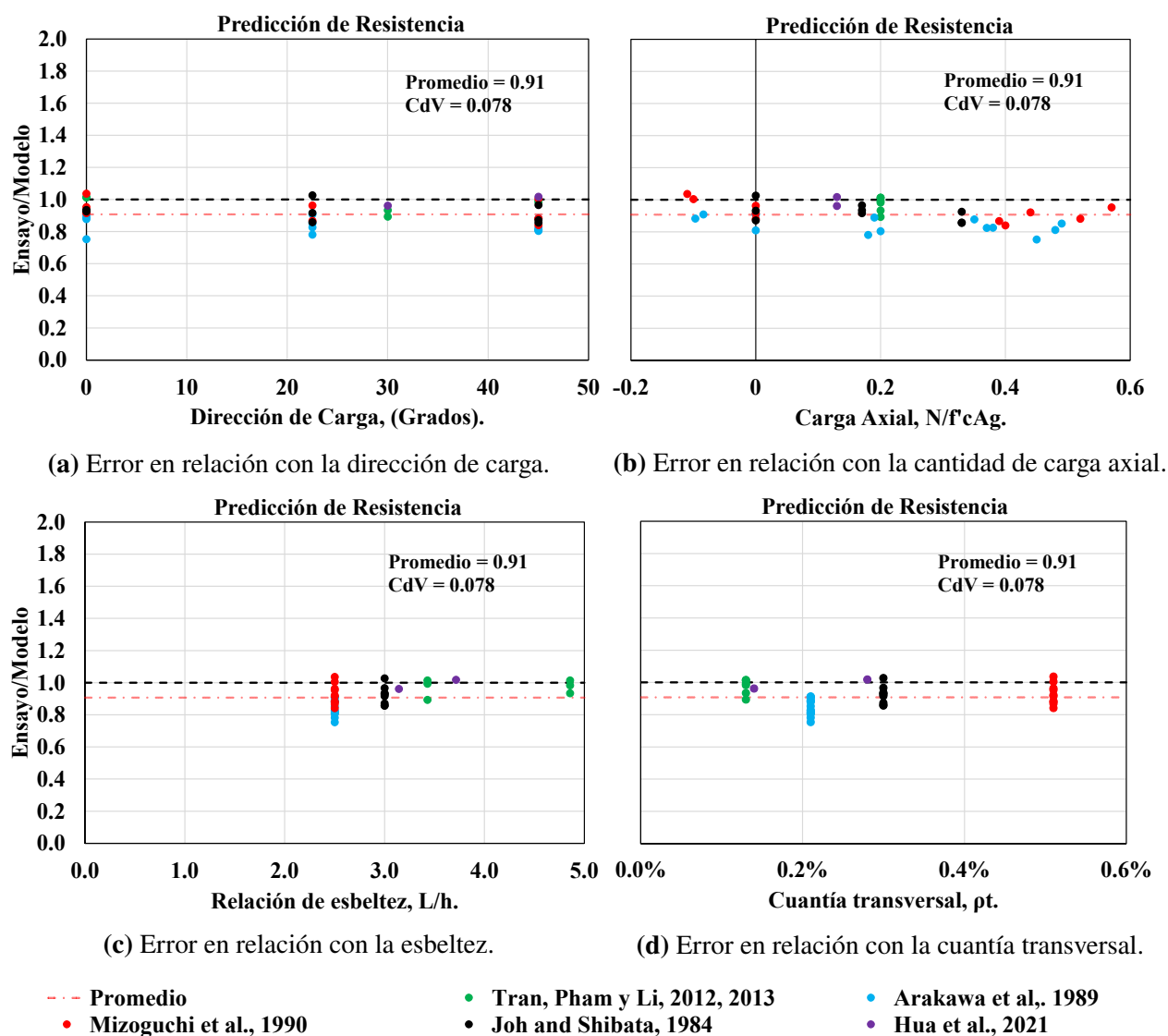


Figura 5.19: Error en la predicción de resistencia máxima de corte del modelo E-SFI-3D vs los datos experimentales de los ensayos de columnas cuadradas.

Una comparación similar se realiza en la Fig. 5.20 para el error entre el inicio de degradación predicho por el modelo y lo medido en los ensayos, en donde se obtiene un promedio de 1.02 pero una alta variabilidad con un coeficiente de variación de 0.32, por lo que, los resultados comparativos demuestran una confiabilidad media del modelo para predecir el inicio de degradación de las

columnas cuadradas de hormigón armado. La Fig. 5.20.(a) muestra un menor error en la predicción del inicio de degradación para cargas laterales de 30° , la Fig. 5.20.(b) muestra un menor error en la predicción del inicio de degradación para cargas de compresión cerca del 20% de $f'_c \cdot A_g$, la Fig. 5.20.(c) muestra un menor error en la predicción del inicio de degradación para columnas más esbeltas y la Fig. 5.20.(d) muestra un menor error en la predicción del inicio de degradación para las columnas con menos cuantía transversal. Obteniendo igualmente las mejores predicciones para columnas intermedias y esbeltas de investigaciones recientes que fallan a corte.

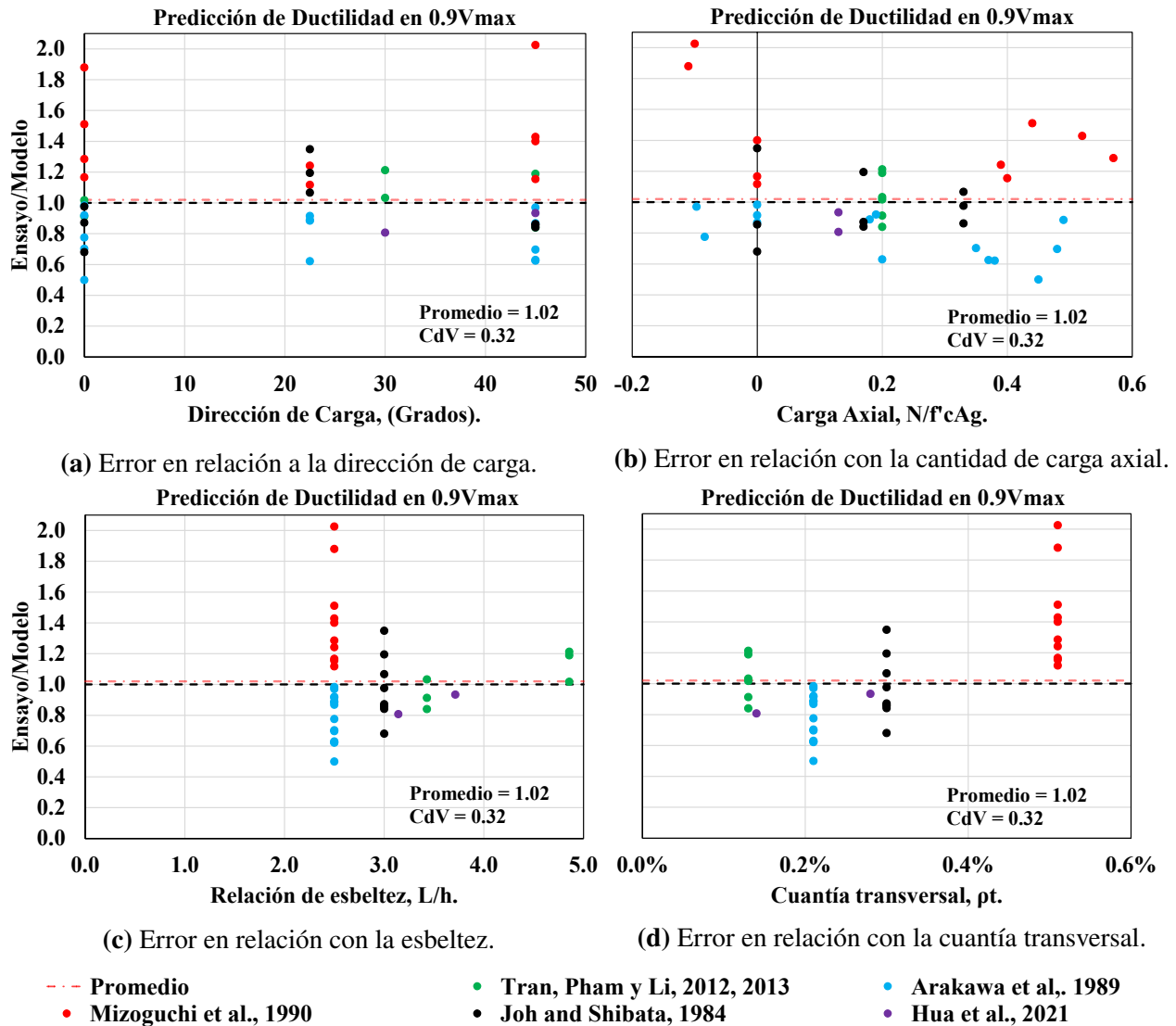
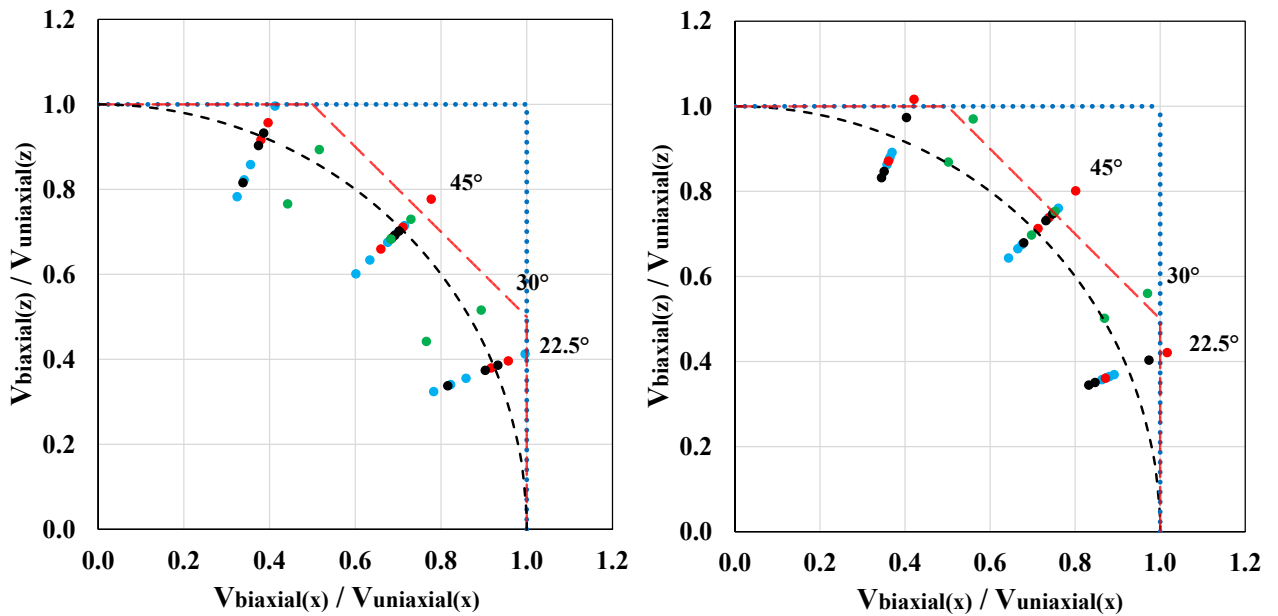


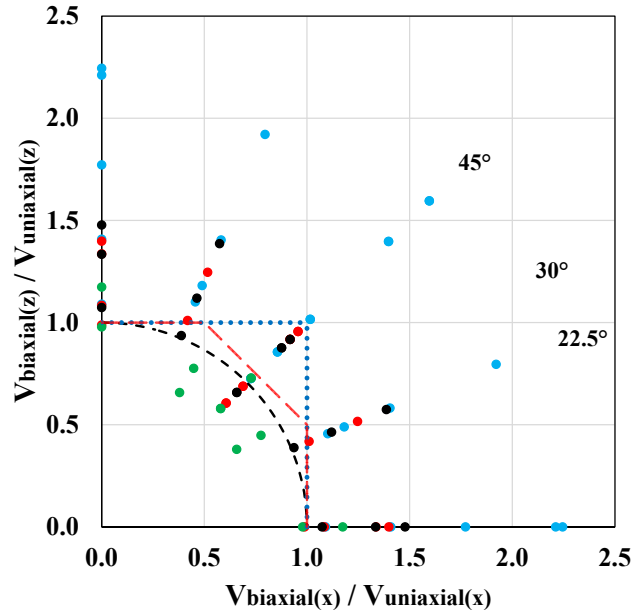
Figura 5.20: Error en la predicción del inicio de degradación en el 90 % de resistencia máxima del modelo E-SFI-3D vs los datos experimentales de los ensayos de las columnas cuadradas.

Para terminar el resumen comparativo de las columnas cuadradas de hormigón armado, se representa la interacción de la resistencia al corte normalizada vs la dirección de carga en la Fig. 5.21 para estudiar el efecto de la resistencia al corte biaxial, la cual está dividida en tres subfiguras que muestran: los resultados experimentales, los resultados del modelo y la resistencia máxima de corte calculada usando las expresiones del ACI 318-19. Las tres subfiguras se comparan con: la curva de interacción circular, la curva de interacción trilineal propuesta por el ACI 318-19 y lo que proponía anteriormente el ACI 318-14 para el diseño estructural.



(a) Resultados experimentales.

(b) Resultados del modelo E-SFI-3D.



(c) Resistencia al corte usando el ACI 318-19.

- Curva de interacción
- ACI 318-19
- ACI 318-14
- Tran, Pham y Li, 2012, 2013
- Joh and Shibata, 1984
- Arakawa et al., 1989
- Mizoguchi et al., 1990

Figura 5.21: Resistencia al corte normalizada vs dirección de carga para las columnas cuadradas.

Como se observa, los resultados experimentales se desfasan de la curva de interacción entre el 15 % para las cargas laterales con un ángulo de 22.5 y 45°. Sin embargo, es claro observar como los datos de una misma investigación forman un arco de círculo entremedio de la curva de interacción. En base a que la resistencia al corte biaxial se puede representar por una curva de interacción circular, el ACI 318-19 propone la curva trilineal roja de interacción para establecer la resistencia

al corte biaxial, cuya propuesta puede sobrestimar la resistencia al corte de una columna en un 6 y hasta 12 %, para cargas biaxiales de 45 y 27°, respectivamente. Pero, llega a ser mucho más precisa que la propuesta de la versión anterior del ACI 318-14,(azul), ya que esta versión sobrestima en un 41 % la resistencia al corte para una carga en 45°, y verifica la decisión de diseño de la versión actual.

Los resultados del modelo se desfasan de la curva de interacción entre el 13 % para las cargas laterales con un ángulo de 22.5, 30 y 45°. De igual manera que para los datos experimentales, los datos del modelo forman un arco de círculo entremedio de la curva de interacción. Mientras que ahora, la propuesta del ACI 318-19 sobrestima menos resultados de resistencia al corte que los datos experimentales. Pero en general el modelo es fiable para capturar el efecto biaxial de corte.

Por otro lado, la resistencia al corte calcula con las expresiones del ACI 318-19 son conservadoras para la mayoría de casos (ocho ensayos no lo son), pero mucho menos precisas que los resultados del modelo, especialmente para las columnas cortas. Sin embargo, se aprecia que la nueva propuesta del ACI 318-19 conforma una curva circular para los datos de una misma investigación, lo cual se ajusta a la forma de los resultados experimentales de una manera simple y más relevante para el diseño.

5.2. Comparación del modelo E-SFI-3D contra ensayos experimentales de columnas rectangulares de hormigón armado con cargas biaxiales.

Para la validación experimental del modelo E-SFI-3D contra columnas rectangulares de hormigón armado, se evalúan 15 especímenes con una relación de esbeltez L/h (largo/ancho) entre 2.2 y 6.8. Todos los especímenes fueron ensayados en condiciones de curvatura doble y tanto las columnas cortas, intermedias y esbeltas reproducen una falla de corte. Los ensayos cubren una amplia gama de propiedades de las columnas, como la altura de la columna L_c , el ancho o espesor en el eje “x” h_{cx} , (eje fuerte), o en el eje “z” h_{cz} , (eje débil), el espaciamiento de los estribos s , la cuantía de acero longitudinal ρ_l , la cuantía de acero transversal en el eje “x” ρ_{tx} , o en el eje “z” ρ_{tz} , la cantidad de carga axial N en términos de $f'_c \cdot A_g$, y el ángulo de carga.

Los 15 ensayos se distribuyen en tres investigaciones diferentes, y cada una se desarrolla de igual manera que las investigaciones de las columnas cuadradas. Así mismo, se consideran cinco elementos en la altura, con la altura igual a la longitud del espaciamiento entre estribos para los dos elementos de los extremos y una altura equidistante para los tres elementos del centro hasta alcanzar la altura total de la columna. A diferencia de las columnas cuadradas, las dimensiones y número de prismas en una dirección principal es diferente a la otra dirección principal ortogonal, al igual que la cuantía transversal que depende del número de estribos en cada dirección. También el valor del resorte rotacional actuando en cada eje principal es diferente, denominado K_{SEX} y K_{SEZ} para el eje “x” y “z”, respectivamente. A continuación se describen los resultados experimentales y del modelo de dos investigaciones y una investigación se describe en la sección B.2 de los anexos.

5.2.1. Columnas experimentales de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013].

Esta investigación consta de dos programas experimentales que reproducen una falla por corte. Por un lado los especímenes de [Tran and Li, 2012] ensayados únicamente con una carga lateral en las dos direcciones principales, y por otro lado los especímenes de [Pham and Li, 2013] ensayados únicamente con una carga lateral biaxial en 30, 45 y 60°. La relación de esbeltez en el eje fuerte es de 3.5 y en el eje débil es de 6.8. La configuración del ensayo se muestra en la Fig. C.3 junto con la geometría de la sección transversal y la discretización transversal de la sección para el modelo E-SFI-3D con un total de 9x7 prismas de hormigón armado.

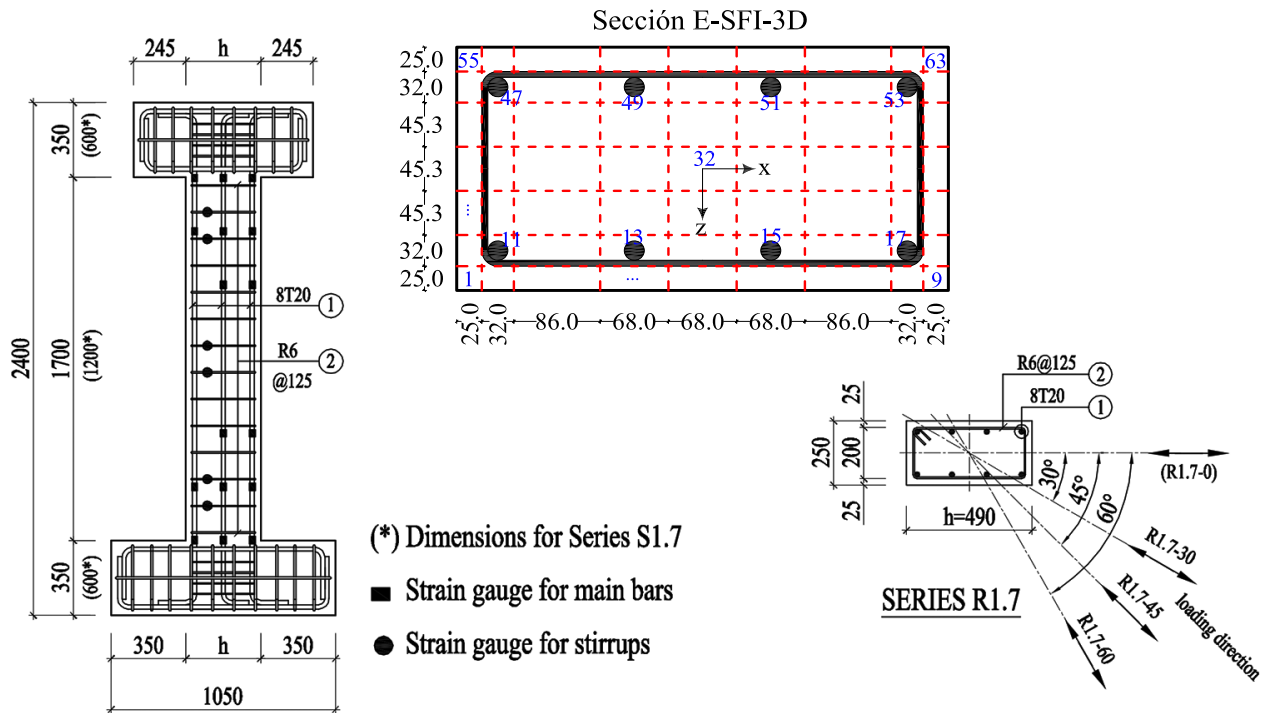


Figura 5.22: Configuración de las columnas de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013], y discretización transversal para el modelo E-SFI-3D.

Las propiedades principales de las columnas de estas investigaciones se resumen en la Tabla. 5.7, cuyos valores se utilizan en las leyes uniaxiales de los materiales del prisma. Para ello, el valor del hormigón confinado se presenta en la Tabla. 5.8 suficiente para definir la ley uniaxial del hormigón, mientras que para definir las leyes uniaxiales del acero se utilizan los mismos valores de la sección 5.1.1. En relación con el espaciamiento de los estribos, la altura del elemento en los extremos es de 125 mm y de los tres elementos en el centro es de 483.3 mm.

Tabla 5.7: Propiedades principales de las columnas rectangulares de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013].

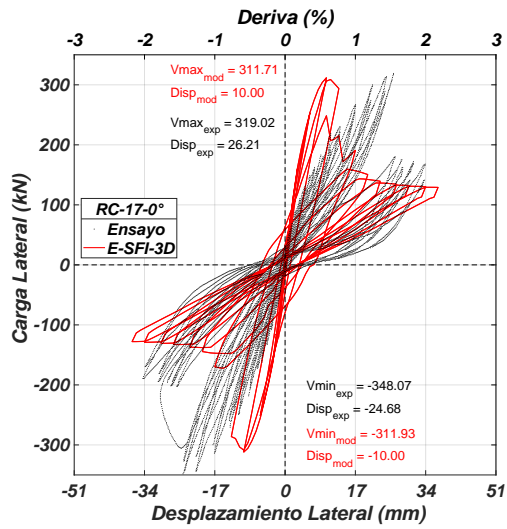
| Ensayo ID | $\frac{L_c}{h_{cx/z}}$ | L_c , mm | h_{cx} , mm | h_{cz} , mm | s , mm | ρ_l , % | ρ_{lx} , % | ρ_{lz} , % | $\frac{N}{f'_c \cdot A_g}$ | Ángulo de Carga | Refuerzo | | | | f'_c , Mpa |
|--------------|------------------------|---------------|------------------|------------------|-------------|-----------------|--------------------|--------------------|----------------------------|-----------------------|--------------|----------------|-------------|----------------|-----------------|
| | | | | | | | | | | | Longitudinal | | Transversal | | |
| | | | | | | | | | | | Diá., mm | F_y , MPa | Diá., mm | F_y , MPa | |
| RC-1.7-0 | 3.5/6.8 | 1700 | 490 | 250 | 125 | 2.1 | 0.18 | 0.09 | 0.35 | 0° | 20 | 408 | 6 | 393 | 27.1 |
| RC-1.7-30 | | | | | | | | | | 30° | | | | | 31.4 |
| RC-1.7-45 | | | | | | | | | | 45° | | | | | 30.1 |
| RC-1.7-60 | | | | | | | | | | 60° | | | | | 29.3 |
| RC-1.7-90 | | | | | | | | | | 90° | | | | | - |

Definido el modelo con las propiedades de cada ensayo, la [Tabla 5.8](#) indica el valor de los parámetros calibrados y de los resultados obtenidos de cada ensayo. El promedio en la predicción de resistencia del modelo es de 0.95 y del inicio de degradación es de 1.43 con unos coeficientes de variación de 0.14 y 0.27, respectivamente. Los resultados muestran un mayor error en la predicción de los dos parámetros que los resultados de las columnas cuadradas, especialmente en la predicción de ductilidad del ensayo en 0°. Los resultados para 90° no se reportaron en la investigación, más que el valor de resistencia última.

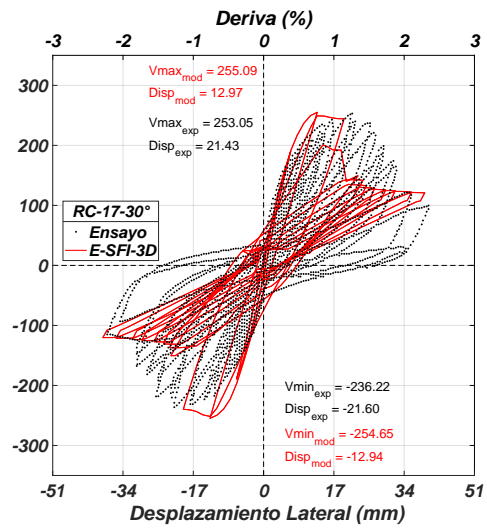
Tabla 5.8: Parámetros de calibración y comparación de resultados de las columnas rectangulares de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013].

| Especimen ID | Parámetros de Calibración | | | | | | Resultados | | | | | | | |
|-----------------|---------------------------|---------------------|------------|--------------------------|------------|--------------------------|---------------------------|-------------------|---------------------------|-------------------------------|-------------------------------|---|------------|---------------|
| | K_{SEX} , kN m | K_{SEZ} , kN m | α_x | $\tau_{max,xy}$, MPa | α_z | $\tau_{max,yz}$, MPa | V_{exp} , kN | V_{mod} , kN | $\frac{V_{exp}}{V_{mod}}$ | $\Delta_{0.9V_{exp}}$, mm | $\Delta_{0.9V_{mod}}$, mm | $\frac{\Delta_{0.9V_{exp}}}{\Delta_{0.9V_{mod}}}$ | # Pasos | Tiempo, sg |
| RC-17-0 | 40000 | 20000 | 0.01 | 45 | - | - | 346 | 312 | 1.1 | 25.0 | 12.5 | 2.0 | 903 | 1555 |
| RC-17-30 | 40000 | 20000 | 0.0086 | 36 | 0.005 | 26 | 254 | 255 | 1.0 | 25.8 | 19.8 | 1.3 | 1075 | 3338 |
| RC-17-45 | 40000 | 20000 | 0.007 | 30 | 0.007 | 30 | 221 | 226 | 0.98 | 29.0 | 25.6 | 1.1 | 1075 | 3867 |
| RC-17-60 | 40000 | 20000 | 0.005 | 26 | 0.0086 | 36 | 190 | 208 | 0.91 | 26.9 | 21 | 1.3 | 1497 | 5660 |
| RC-17-90 | 40000 | 20000 | - | - | 0.01 | 45 | 149 | 200 | 0.75 | - | 23 | - | 1065 | 817 |
| | | | | | | | Promedio | | 0.95 | | | 1.43 | | |
| | | | | | | | Coefficiente de variación | | 0.14 | | | 0.27 | | |

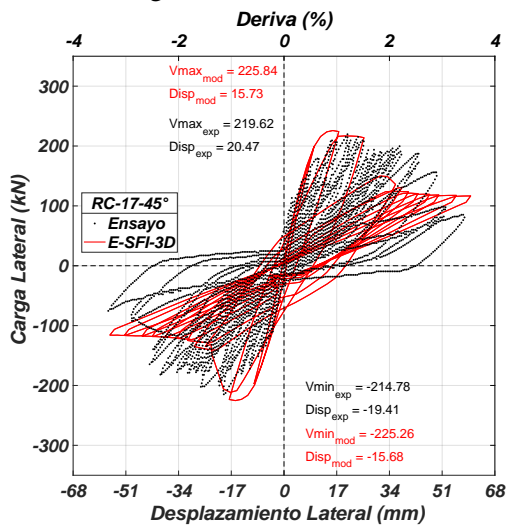
A pesar del aumento de error del modelo en comparación con las columnas cuadradas, el modelo captura una respuesta aceptable, esencialmente para las columnas con cargas biaxiales de 30, 45 y 60° como se observa en la [Fig. 5.23](#), en donde, se compara la respuesta histerética de los ensayos con la del modelo para las diferentes direcciones de carga lateral. Por ejemplo, la [Fig. 5.23.\(a\)](#) muestra como el modelo no captura correctamente la forma de la respuesta del ensayo en 0°, pero si captura de buena manera la forma de la respuesta experimental en 30, 45 y 60° como se expone en las [Figs. 5.23. b, c y d](#). Como se esperaba, al resistencia al corte es mayor en el eje “x” y se va reduciendo conforme aumenta el ángulo de carga hasta el valor mínimo en el eje “z”. El inicio de degradación no se captura correctamente pero el modelo es capaz de predecir la falla a corte que desarrollan las columnas.



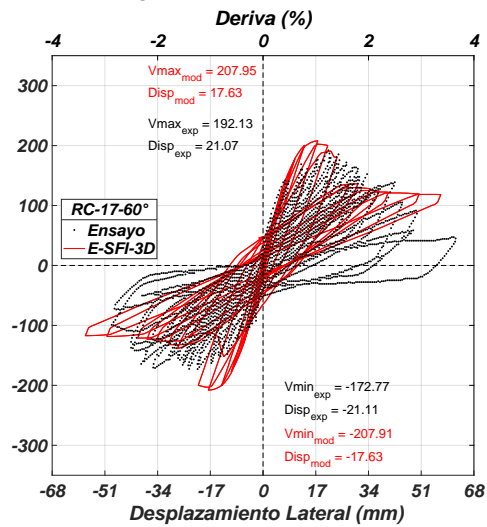
(a) Carga biaxial de 0°, RC-17-0.



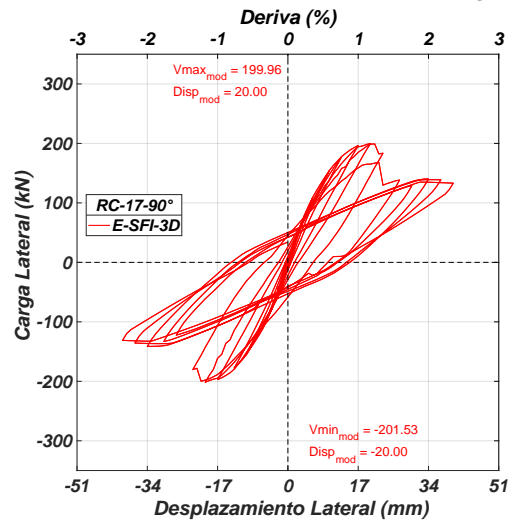
(b) Carga biaxial de 30°, RC-17-30.



(c) Carga biaxial de 45°, RC-17-45.



(d) Carga biaxial de 60°, RC-17-60.



(e) Carga biaxial de 90°, RC-17-90.

Figura 5.23: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de la columna rectangular.

Con los resultados de resistencia última al corte en cada dirección, se evalúa el efecto de corte biaxial en la Fig. 5.24, en donde, se grafican: las curvas de interacción elípticas con los valores de resistencia al corte en los ejes principales, y la resistencia al corte biaxial de los datos experimentales y del modelo. Se observa, que los datos experimentales difieren de la curva de interacción teórica pero forma una elipse que únicamente no se ajusta al valor de resistencia en el eje débil. Por otro lado, los resultados biaxiales del modelo tienen un mejor ajuste a la curva de interacción teórica, claramente formando una elipse. Lo que corrobora la capacidad del modelo para capturar el efecto de corte biaxial en una columna rectangular.

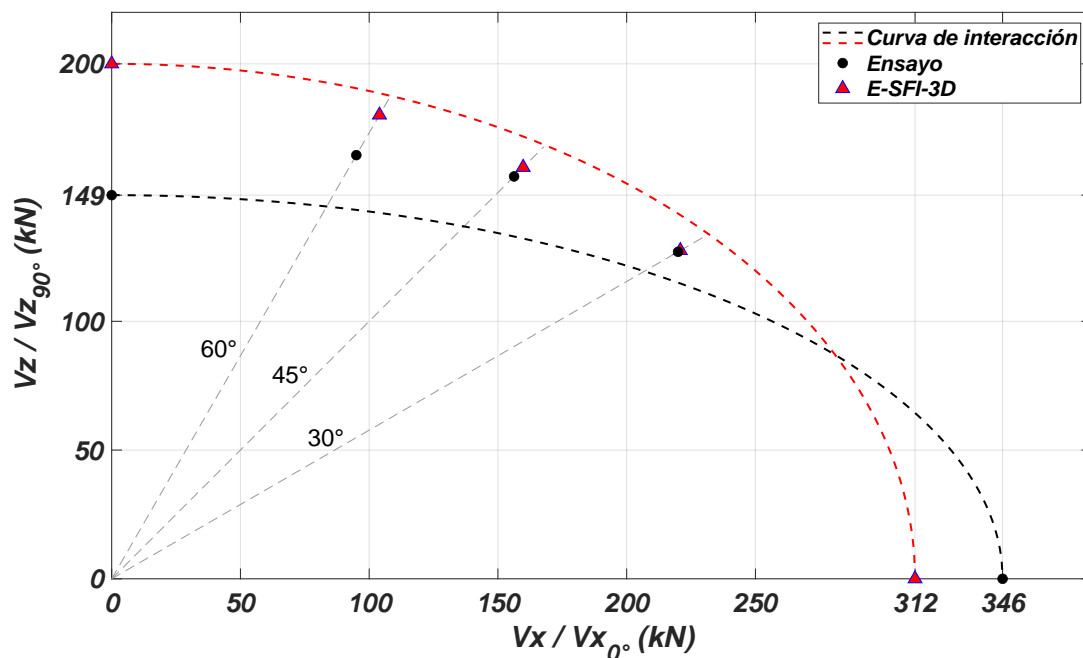


Figura 5.24: Resistencia al corte vs dirección de carga de las columnas rectangulares de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013].

5.2.2. Columnas experimentales de [Umehara, 1983].

Esta investigación describe un estudio experimental del comportamiento de la resistencia al corte de dos columnas rectangulares cortas-intermedias de hormigón armado, bajo cargas laterales uniaxiales y biaxiales de 0, 30, 60 y 90°, la única diferencia entre las dos columnas es el valor de carga axial. La configuración de los ensayos y de la sección transversal se muestra en la Fig. 5.25 junto con la discretización transversal de 11x7 prismas para el modelo E-SFI-3D.

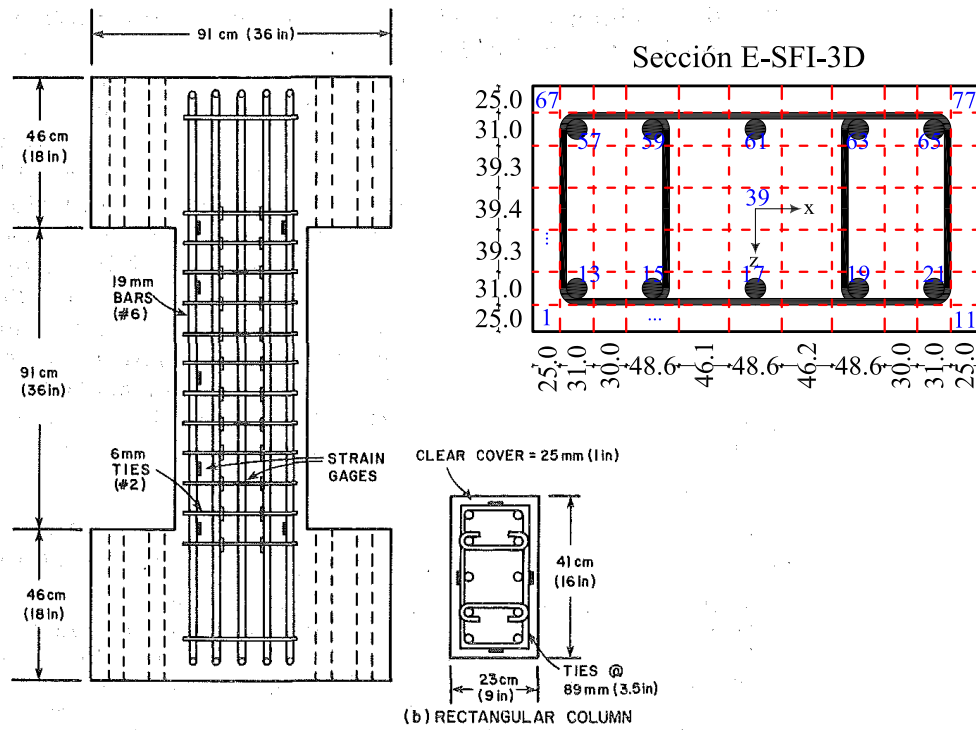


Figura 5.25: Configuración de las columnas de [Umehara, 1983], y discretización transversal para el modelo E-SFI-3D.

Las propiedades principales de las columnas de estas investigaciones se resumen en la [Tabla. 5.9](#), cuyos valores se utilizan en las leyes uniaxiales de los materiales del prisma. Para ello, el valor del hormigón confinado se presenta en la [Tabla. 5.10](#) suficiente para definir la ley uniaxial del hormigón, mientras que para definir las leyes uniaxiales del acero, el módulo de elasticidad es de: $E_s = 200000 \text{ MPa}$ y el factor b supuesto es de 0.01 y de 0.008 para el refuerzo longitudinal y transversal, respectivamente. En relación con el espaciamiento de los estribos, la altura del elemento en los extremos es de 89 mm y de los tres elementos en el centro es de 244 mm .

Tabla 5.9: Propiedades principales de las columnas rectangulares de [Umehara, 1983].

| Ensayo ID | $\frac{L_c}{h_{cx/z}}$ | L_c , mm | h_{cx} , mm | h_{cz} , mm | s , mm | ρ_l , % | ρ_{lx} , % | ρ_{lz} , % | N , kN | Ángulo de Carga | Refuerzo | | | | f'_c , Mpa |
|-----------|------------------------|------------|---------------|---------------|----------|--------------|-----------------|-----------------|----------|-----------------|--------------|-------------|-------------|-------------|--------------|
| | | | | | | | | | | | Longitudinal | | Transversal | | |
| | | | | | | | | | | | Diá., mm | F_y , MPa | Diá., mm | F_y , MPa | |
| CUS | 2.2/4 | 910 | 410 | 230 | 89 | 3.0 | 0.27 | 0.31 | 534 | 0° | 19 | 441 | 6 | 413 | 35.0 |
| CDS30 | | | | | | | | | | 30° | | | | | 42.6 |
| CDW30 | | | | | | | | | | 60° | | | | | 42.2 |
| CUW | | | | | | | | | | 90° | | | | | 35.0 |
| 0US | | | | | | | | | 0 | 0° | | | | | 40.0 |
| 0UW | | | | | | | | | | 90° | | | | | 40.1 |

Definido el modelo con las propiedades de cada ensayo, la [Tabla. 5.10](#) indica el valor de los parámetros calibrados y de los resultados obtenidos de cada ensayo. El promedio en la predicción

de resistencia del modelo es de 1.03 y del inicio de degradación es de 0.74 con unos coeficientes de variación de 0.08 y 0.32, respectivamente. Los resultados comparativos demuestran una alta fiabilidad del modelo para predecir la resistencia última al corte; pero no así el inicio de degradación, debido a la mala predicción de los ensayos cargados en 60 y 90°.

Tabla 5.10: Parámetros de calibración y comparación de resultados de las columnas rectangulares de [Umehara, 1983].

| Especímen ID | Parámetros de Calibración | | | | | | Resultados | | | | | | | | |
|-----------------------------|---------------------------|------------------|------------|-----------------------|------------|-----------------------|--------------------------|----------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|---|---------|------------|--|
| | K_{SEX} , kN m | K_{SEZ} , kN m | α_x | $\tau_{max,xy}$, MPa | α_z | $\tau_{max,yz}$, MPa | V_{exp} , kN | V_{mod} , kN | $\frac{V_{exp}}{V_{mod}}$ | $\Delta_{0.9V_{exp}}$, mm | $\Delta_{0.9V_{mod}}$, mm | $\frac{\Delta_{0.9V_{exp}}}{\Delta_{0.9V_{mod}}}$ | # Pasos | Tiempo, sg | |
| CUS | 10000 | - | 0.005 | 25 | - | - | 329 | 351 | 0.94 | 9.8 | 11.3 | 0.87 | 471 | 974 | |
| CDS30 | 10000 | 4500 | 0.004 | 20 | 0.0025 | 15 | 356 | 325 | 1.10 | 11.9 | 19.0 | 0.63 | 627 | 2928 | |
| CDW30 | 10000 | 4500 | 0.0025 | 15 | 0.004 | 20 | 329 | 291 | 1.13 | 9.8 | 24.8 | 0.4 | 715 | 2268 | |
| CUW | - | 4500 | - | - | 0.005 | 25 | 267 | 290 | 0.92 | 16.5 | 28.6 | 0.58 | 765 | 2372 | |
| 0US | 5000 | - | 0.003 | 25 | - | - | 294 | 287 | 1.02 | 15.4 | 16.2 | 0.95 | 471 | 952 | |
| 0UW | - | 5000 | - | - | 0.003 | 25 | 254 | 236 | 1.08 | 24.1 | 24.2 | 1.0 | 619 | 2096 | |
| $f'_{cc} = f'_c + 6800$ kPa | | | | | | | Promedio | | 1.03 | | 0.74 | | | | |
| | | | | | | | Coeficiente de variación | | 0.08 | | 0.32 | | | | |

El comportamiento histerético de las columnas rectangulares en diferentes direcciones y con una carga axial de compresión de 534 kN se muestra en la Fig. 5.26, la cual se subdivide en cuatro figuras caracterizadas por la dirección de carga lateral aplicada. El modelo predice adecuadamente la resistencia al corte como se dijo, y además, la forma de la respuesta del modelo se ajusta a la forma histerética experimental, especialmente en las Figs. 5.26, a y b de 0 y 30°, donde la degradación es similar en el punto de inicio y con una pendiente drástica de reducción. Mientras que en las Figs. 5.26, c y d de 60 y 90°, la respuesta es más flexural por parte del modelo, ya que actúa en el eje débil, y sobrestima el inicio de degradación. A pesar de estos inconvenientes finales el modelo predice un aumento del desplazamiento de corte y por ende la falla de este estilo.

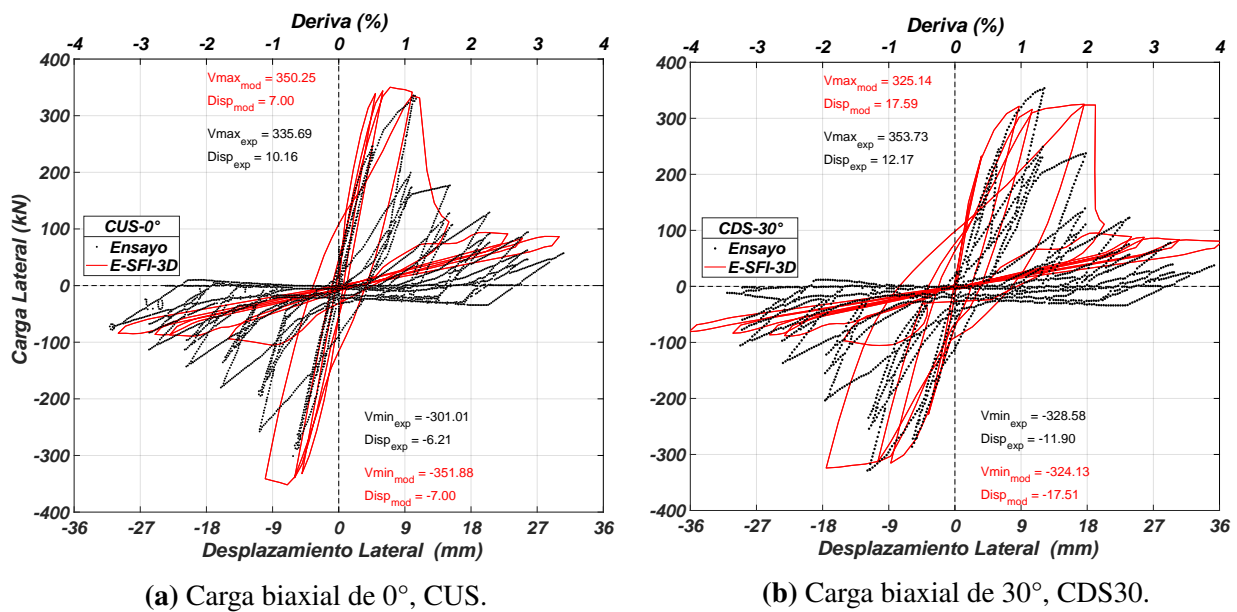
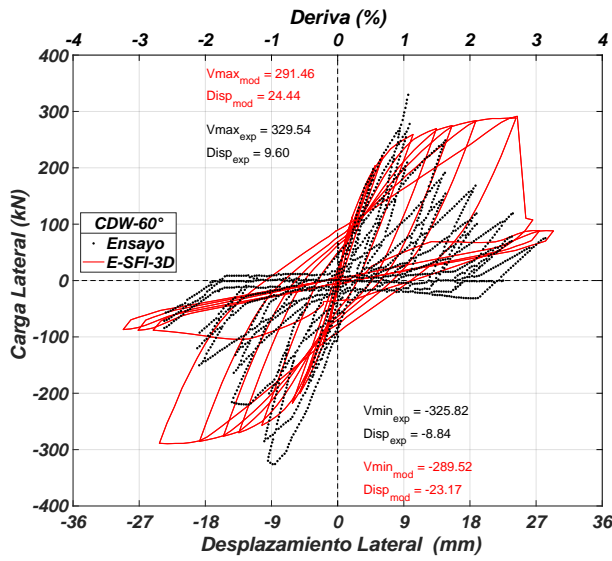
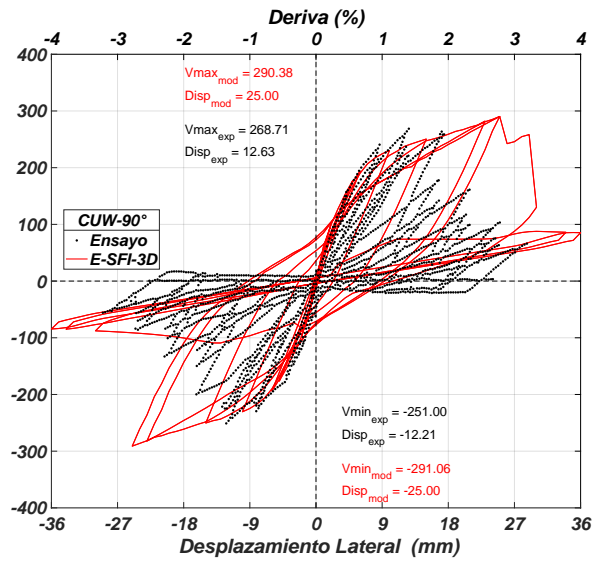


Figura 5.26: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de las columnas rectangulares tipo “CU” con una carga de compresión cerca del 15% de $f'_c \cdot A_g$.



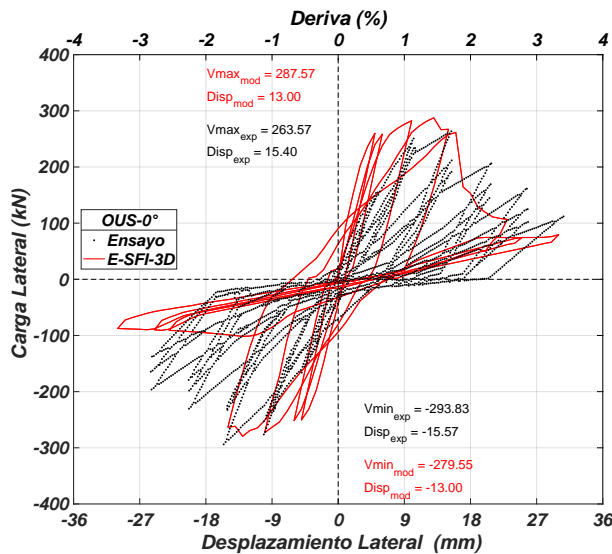
(c) Carga biaxial de 60°, CDW30.



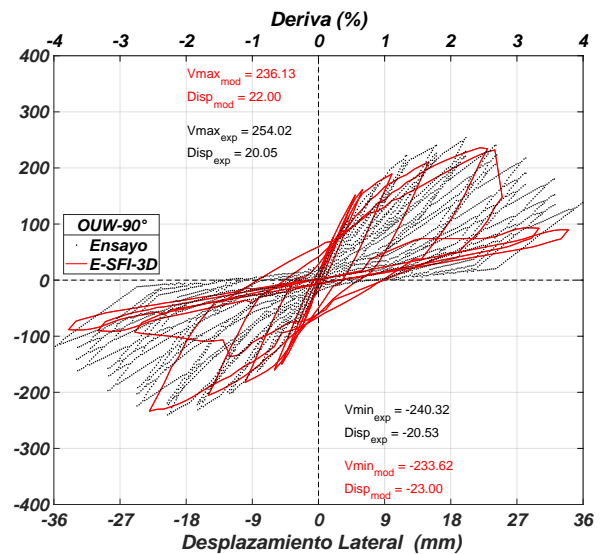
(d) Carga biaxial de 90°, CUW.

Figura 5.26: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de las columnas rectangulares tipo “CU” con una carga de compresión cerca del 15 % de $f'_c \cdot A_g$.

La respuesta histerética de la columna rectangular con una carga axial de cero se muestra en la Fig. 5.27 para una carga lateral de 0° y 90°. Para estos dos casos, la respuesta del modelo es similar a la de los ensayos, excepto por la rigidez y desplazamiento en el punto de máxima resistencia del ensayo en 0°. A diferencia de la respuesta experimental en 90° de la columna anterior con una mayor carga axial de compresión, ahora la respuesta del ensayo en 90° es más dúctil y flexural, lo que el modelo predice correctamente.



(a) Carga biaxial de 0°, OUS.



(b) Carga biaxial de 90°, OUW.

Figura 5.27: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de las columnas rectangulares tipo “OU” con una carga axial de cero.

El efecto de corte biaxial se presenta en la Fig. 5.28 para los datos experimentales y del modelo. Los datos de la resistencia al corte del modelo se ajustan a la curva de interacción elíptica para las columnas rectangulares, sin embargo, los datos experimentales no se ajustan a la curva de interacción. El problema de los resultados experimentales, como se analiza en la Fig. 5.26, es que la resistencia última al corte en 30° es mayor a la de 0°, lo cual crea un alto desconcierto en la comparación de resultados, a pesar de que el valor de f'_c sea mayor en los ensayos de las cargas biaxiales. Lo mismo sucede para los resultados del ensayo en 60°, cuya respuesta actúa primordialmente en el eje débil y aún así la resistencia es similar a la de 0°.

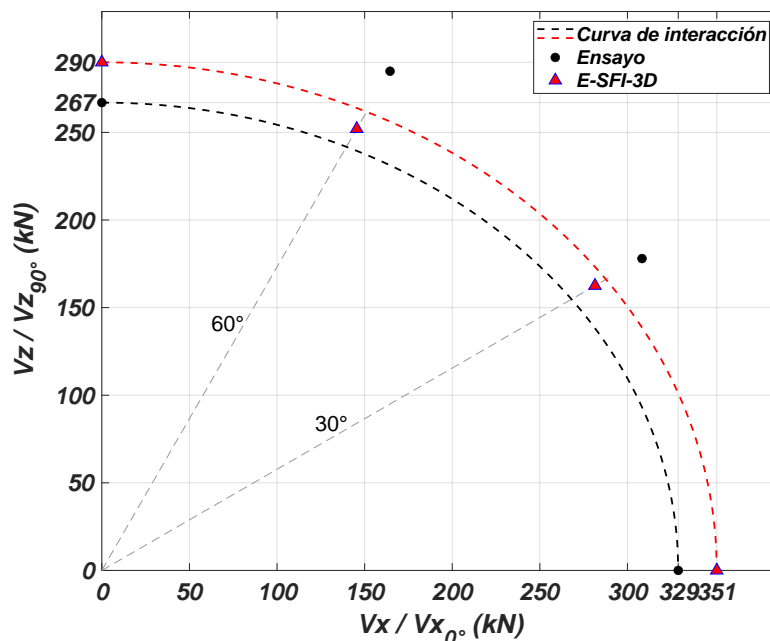
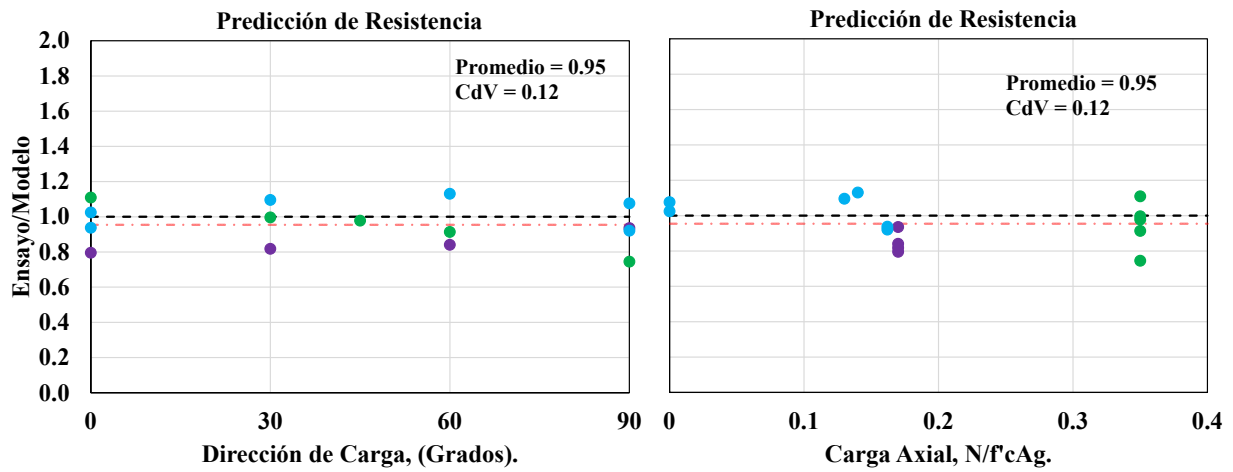


Figura 5.28: Resistencia al corte vs dirección de carga de las columnas rectangulares de [Umehara, 1983]

5.2.3. Resumen de los resultados de las columnas rectangulares.

Esta subsección resume los resultados en cuanto a la predicción de resistencia máxima al corte e inicio de degradación del modelo vs los datos medidos de los ensayos experimentales de columnas rectangulares de hormigón armado. Para ello, se ilustra el error de cada ensayo en relación con dos variables: la dirección de carga lateral y el valor de carga axial. De esta forma la Fig. 5.29 presenta el error entre la resistencia máxima de corte predicha por el modelo y medida por los ensayos, en donde se obtiene un promedio de 0.95 y un coeficiente de variación de 0.12 para los 15 ensayos. Los resultados comparativos demuestran la alta confiabilidad del modelo para predecir la resistencia al corte de las columnas rectangulares de hormigón armado. La Fig. 5.29.(a) muestra un mismo error en la predicción de la resistencia al corte para cargas laterales en diferentes ángulos, mientras que la Fig. 5.29.(b) muestra un menor error en la predicción de la resistencia al corte para cargas axiales de cero y aumenta conforme aumenta la carga axial de compresión.

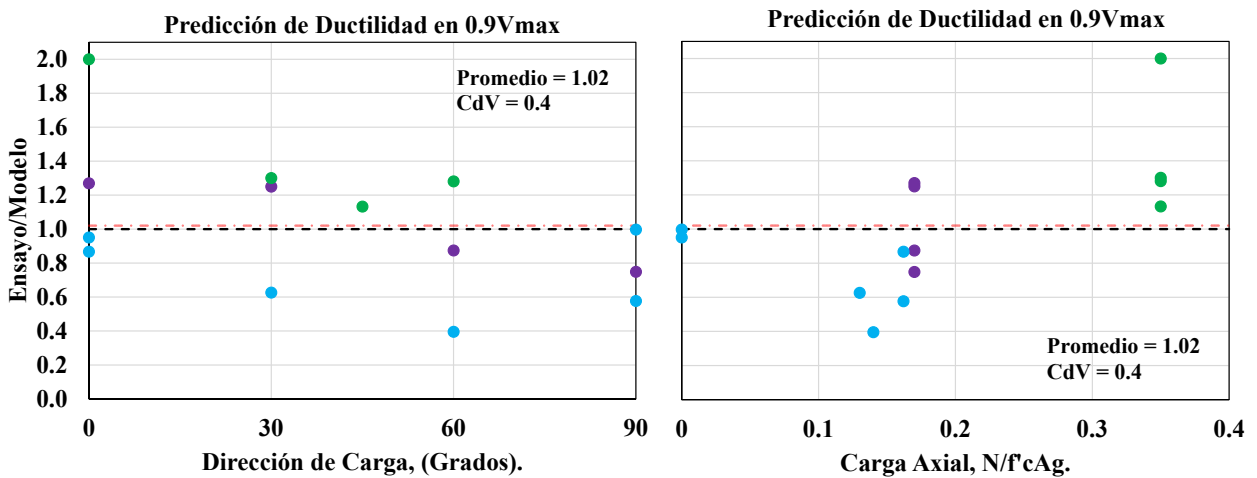


(a) Error en relación con la dirección de carga. (b) Error en relación con la cantidad de carga axial.

--- Promedio ● Umehara, 1983 ● Joh and Shibata, 1984 ● Tran, Pham y Li, 2012, 2013

Figura 5.29: Error en la predicción de resistencia máxima de corte del modelo E-SFI-3D vs los datos experimentales de los ensayos de columnas rectangulares.

Por otro lado, la Fig. 5.30 presenta el error entre el inicio de degradación predicho por el modelo y lo medido en los ensayos, en donde se obtiene un promedio de 1.02 pero una alta variabilidad con un coeficiente de variación de 0.4, por lo que, los resultados comparativos demuestran una confiabilidad media del modelo para predecir el inicio de degradación de las columnas rectangulares de hormigón armado. La alta variabilidad en la predicción del inicio de degradación se observa para todos los ángulos de carga en la Fig. 5.30.(a), y un menor error se estima para las columnas con una carga axial de cero como se presenta en la Fig. 5.30.(b).

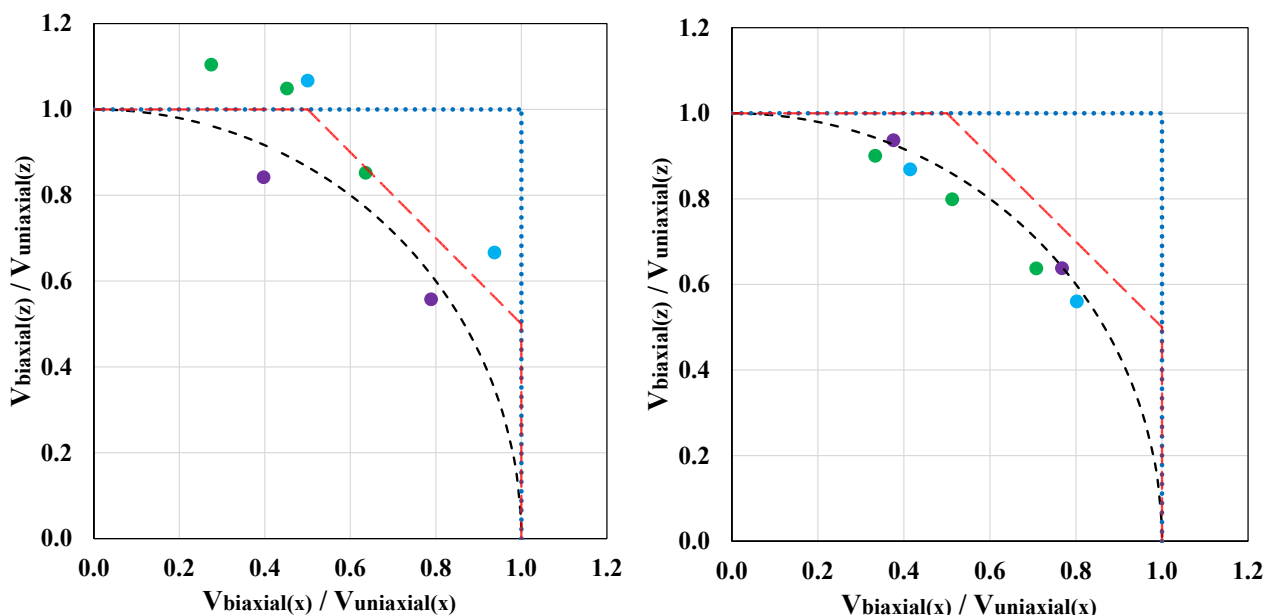


(a) Error en relación con la dirección de carga. (b) Error en relación con la cantidad de carga axial.

--- Promedio ● Umehara, 1983 ● Joh and Shibata, 1984 ● Tran, Pham y Li, 2012, 2013

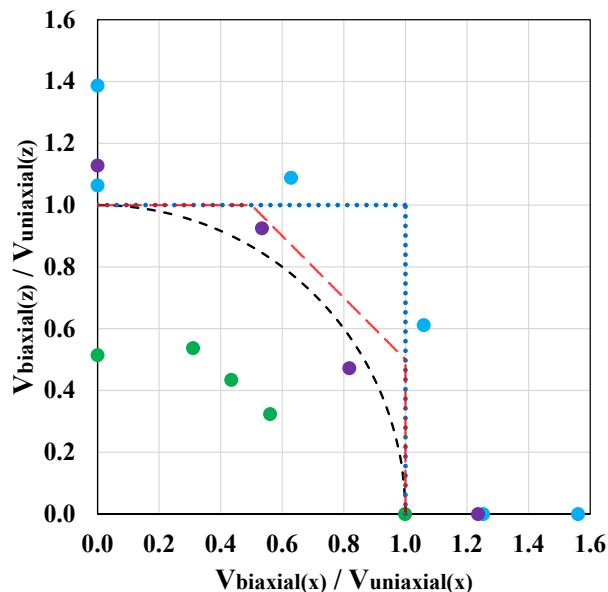
Figura 5.30: Error en la predicción del inicio de degradación en el 90 % de resistencia máxima del modelo E-SFI-3D vs los datos experimentales de los ensayos de las columnas rectangulares.

Para terminar el resumen comparativo de las columnas rectangulares de hormigón armado, se representa la interacción de la resistencia al corte normalizada vs la dirección de carga en la Fig. 5.31 para estudiar el efecto de la resistencia de corte biaxial, la cual está dividida en tres subfiguras que muestran: los resultados experimentales, los resultados del modelo y la resistencia máxima de corte calculada usando las expresiones del ACI 318-19. Las tres subfiguras se comparan con: la curva de interacción, la curva de interacción trilineal propuesta por el ACI 318-19 y lo que proponía anteriormente el ACI 318-14 para el diseño estructural.



(a) Resultados experimentales.

(b) Resultados del modelo E-SFI-3D.



(c) Resistencia al corte usando el ACI 318-19.

- Curva de interacción
- ACI 318-19
- ACI 318-14
- Tran, Pham y Li, 2012, 2013
- Umehara, 1983
- Joh and Shibata, 1984

Figura 5.31: Resistencia al corte normalizada vs dirección de carga para las columnas rectangulares.

Como se observa, los resultados experimentales se desfasan de la curva de interacción entre un 18 %, debido a los problemas comentados en los ensayos. A partir de estos datos, la curva trilineal roja del ACI 318-19 se ajusta mejor a los resultados experimentales que la propuesta azul del ACI 318-14 para cargas biaxiales. Mientras que los resultados del modelo, se ajustan a la curva de interacción y forman una elipse si no estuvieran normalizados los valores de resistencia. La propuesta nueva de la curva trilineal del ACI 318-19 sobrestima la resistencia máxima de corte hasta en un 12 %, pero es mucho más preciso que la propuesta de la versión anterior, lo que constata: la decisión de diseño de la versión actual y la capacidad del modelo para capturar el efecto de corte biaxial incluso en columnas rectangulares.

Por otro lado, la resistencia al corte calcula con las expresiones del ACI 318-19 llega a subestimar y sobrestimar los valores experimentales hasta un 50 %, lo cual no es preciso ya que puede ser muy conservador o muy peligroso, especialmente para la resistencia al corte en el eje débil de las columnas rectangulares.

Capítulo 6

Resumen y Conclusión

En esta investigación se desarrolló un modelo macroscópico tridimensional llamado E-SFI-3D para simular la respuesta no lineal de columnas cuadradas y rectangulares de hormigón armado sujetas a condiciones de cargas cíclicas biaxiales. El modelo se basa en el modelo bidimensional E-SFI, pero con una formulación 3D del material y elemento. Dentro del material, se calcula la relación tensión-deformación del hormigón en las tres direcciones principales mediante el enfoque de ángulo que rota, mientras que se calcula la relación de tensión-deformación del acero en las direcciones normales y ortogonales, y estas tensiones y deformaciones se transforman a los ejes principales para satisfacer el equilibrio en el elemento. A su vez, el elemento E-SFI-3D formado por dos nodos consta de seis grados de libertad por nodo y de una discretización de prismas de hormigón armado. Las deformaciones verticales normales y de corte de cada prisma se calcula en base a los grados de libertad del elemento, junto con las suposiciones de que las secciones planas permanecen planas, la deformación de corte es constante a través de la sección y la curvatura es constante y calculada a una altura $0.4h$. Las deformaciones horizontales normales para cada dirección ortogonal se calculan en cada prisma usando una expresión calibrada en términos de deformación de corte y cuantía transversal. Se utilizan leyes uniaxiales cíclicas para representar el comportamiento del hormigón y acero, y de acción de dovola para controlar las deformaciones de corte en la columna una vez que degrada la respuesta.

Para simular el efecto de deslizamiento en la unión columna-base se propuso el uso de resortes rotacionales en los extremos, cuyos valores de resistencia fueron calibrados; al igual que los valores de rigidez y tensión máxima del modelo elasto-plástico de acción de dovola. Para lograr una respuesta lo más objetiva posible por parte del modelo, se utilizó la técnica de regularización del hormigón y se fijó la altura del primer elemento igual a la del espaciamiento de los estribos, siendo lo suficientemente pequeña como para capturar correctamente la curvatura inelástica en los bordes. Además, se propuso el uso de cinco elementos E-SFI-3D para simular una columna, junto con una discretización transversal que permita tener una barra de acero centrada en un solo prisma.

La resistencia máxima al corte y el inicio de degradación en el punto del 90 % de la resistencia máxima al corte predicha por el modelo fue contrastada con una base de datos de 56 ensayos de columnas de hormigón armado, 41 cuadradas y 15 rectangulares, reportadas en la literatura. La relación promedio entre la resistencia al corte medida y la estimada para las columnas cuadradas es de 0.91 con un coeficiente de variación es 0,078; y para las columnas rectangulares es de 0.95 con un coeficiente de variación de 0.12, lo que indica que el modelo puede proporcionar una buena estimación de la capacidad de corte, si se define adecuadamente el efecto de deslizamiento en la

unión columna-base mediante los resortes rotacionales. Por otra parte, la relación promedio entre el inicio de degradación medido y estimado para las columnas cuadradas es de 1.02 con un coeficiente de variación de 0.32; y para las columnas rectangulares es de 1.02 con un coeficiente de variación de 0.4, lo que indica que el modelo tiene una mayor dispersión para capturar este parámetro.

Los resultados experimentales de columnas cortas, intermedias y esbeltas manifiestan que la curva de interacción circular para las columnas cuadradas o elíptica para las rectangulares puede predecir correctamente la respuesta de resistencia máxima al corte bajo cargas laterales biaxiales, lo cual, también captura el modelo E-SFI-3D, particularmente si las columnas son cortas. En base a este efecto, la propuesta del ACI 318-19 para calcular el efecto de corte biaxial mediante la curva trilineal brinda una mayor precisión y conservadurismo que la versión anterior. Sin embargo, las nuevas expresiones del ACI 318-19 para calcular la resistencia al corte uniaxial discrepan en mayor porcentaje que lo predicho por el modelo, especialmente para las columna cortas, pero provee un método simple y conservador de diseño. En consecuencia, la expresión del ACI 318-19 para la resistencia al corte biaxial expuesta en la ecuación (1.1) que se propuso evaluar en el presente estudio, reduce el nivel de error en la predicción de resistencia de corte de un 41 % de sobre-resistencia, según versiones anteriores del ACI 318, a un 6 % con la versión 2019 para una carga en 45°.

Aunque el macro-modelo E-SFI y la expresión calibrada están validadas para muros, [López et al., 2021], se obtuvo una buena correlación del modelo E-SFI-3D con los resultados experimentales de columnas cuadradas y rectangulares ante cargas biaxiales cíclicas en el presente estudio. Además de la buena predicción de resistencia e inicio de degradación que alcanza el macro-modelo E-SFI-3D con los resultados experimentales, también se logra estimar claramente el modo de falla a corte de las columnas ensayadas. A continuación, se presentan las conclusiones específicas obtenidas del análisis completo del modelo.

- El modelo subestima el aumento gradual del desplazamiento de corte inicial según los datos experimentales, es decir, al menos hasta alcanzar el 10 % del desplazamiento total, luego de lo cual, la deformación de corte crece drásticamente y sobrestima el desplazamiento final de corte entre el 20 %. Esta diferencia entre el comportamiento abrupto de crecimiento del desplazamiento de corte y de los datos experimentales es debido a la expresión calibrada para la deformación transversal y los valores calibrados del modelo de acción de dovela.
- El factor de ablandamiento β del modelo E-SFI-3D, que depende de las deformaciones principales ortogonales, es el que logra degradar la respuesta de la columna y predecir la falla de corte, razón por la cual, el enfoque de ángulo que rota es inmejorable para calcular esta degradación, ya que calcula las máximas deformaciones debido a que están en las direcciones principales. Contrario a un enfoque de ángulo fijo que no necesariamente calcula las deformaciones del hormigón en las direcciones principales. Sin embargo, ya que la predicción del inicio de degradación presenta una considerable dispersión de los resultados, especialmente subestimando el punto de inicio de la degradación, una posible solución involucra diferentes variables como: un enfoque de ángulo fijo, una nueva expresión para el factor de ablandamiento β , un mayor valor de la energía de fractura para la regularización del hormigón o una expresión calibrada en base a datos de columnas de hormigón armado.
- El modelo de acción de dovela mejora el comportamiento histerético de la respuesta degradante del modelo E-SFI-3D, y en general representa bien los ciclos histeréticos experimentales, pero es claro que el modelo debiese ser más complejo con un comportamiento degradante.

Bibliografía

- [ACI Committee 318, 2019] ACI Committee 318 (2019). 318-19 building code requirements for structural concrete and commentary. American Concrete Institute.
- [Arakawa et al., 1989] Arakawa, T., Arai, Y., Mizoguchi, M., and Yoshida, M. (1989). Shear resisting behavior of short reinforced concrete columns under biaxial bending-shear. *Transactions of the Japan Concrete Institute*, 11:317–324.
- [Belarbi and Hsu, 1994] Belarbi, A. and Hsu, T. T. (1994). Constitutive laws of concrete in tension and reinforcing bars stiffened by concrete. *Structural Journal*, 91(4):465–474.
- [Belarbi and Hsu, 1995] Belarbi, A. and Hsu, T. T. (1995). Constitutive laws of softened concrete in biaxial tension compression. *Structural Journal*, 92(5):562–573.
- [Bentz et al., 2006] Bentz, E. C., Vecchio, F. J., and Collins, M. P. (2006). Simplified modified compression field theory for calculating shear strength of reinforced concrete elements. *ACI structural journal*, 103(4):614.
- [Berry and Eberhard, 2008] Berry, M. P. and Eberhard, M. O. (2008). Performance modeling strategies for modern reinforced concrete bridge. *University of California, Berkeley*.
- [Brannon, 2011] Brannon, R. ((accessed December 2021) 2011). Exact solution for eigenvalues and eigenvectors/projectors of a real 3×3 symmetric matrix. <https://csmbrannon.net>.
- [Calabrese et al., 2010] Calabrese, A., Almeida, J. P., and Pinho, R. (2010). Numerical issues in distributed inelasticity modeling of rc frame elements for seismic analysis. *Journal of Earthquake Engineering*, 14(S1):38–68.
- [Coleman and Spacone, 2001] Coleman, J. and Spacone, E. (2001). Localization issues in force-based frame elements. *Journal of Structural Engineering*, 127(11):1257–1265.
- [Dulacska, 1972] Dulacska, H. (1972). Dowel action of reinforcement crossing cracks in concrete. In *Journal Proceedings*, volume 69, pages 754–757.
- [Filippou et al., 1983] Filippou, F. C., Popov, E. P., and Bertero, V. V. (1983). Effects of bond deterioration on hysteretic behavior of reinforced concrete joints.
- [Hua et al., 2021] Hua, J.-J., Gu, X.-L., Eberhard, M. O., and Wouagabe, J. (2021). Influence of lateral loading direction on seismic behavior of shear-critical reinforced concrete intermediate short columns. *Engineering Structures*, page 113573.
- [Jansen and Shah, 1997] Jansen, D. C. and Shah, S. P. (1997). Effect of length on compressive strain softening of concrete. *Journal of engineering mechanics*, 123(1):25–35.

- [Joh and Shibata, 1984] Joh, O. and Shibata, T. (1984). Shear failure of reinforced concrete columns due to biaxial lateral forces. In *Proceedings of the Eighth World Conference on Earthquake Engineering*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, volume 6, pages 577–584.
- [Kagermanov and Ceresa, 2016] Kagermanov, A. and Ceresa, P. (2016). Physically based cyclic tensile model for rc membrane elements. *Journal of Structural Engineering*, 142(12):04016118.
- [Kagermanov and Ceresa, 2018] Kagermanov, A. and Ceresa, P. (2018). 3d fiber-based frame element with multiaxial stress interaction for rc structures. *Advances in Civil Engineering*, 2018.
- [Kolozviri et al., 2019] Kolozviri, K., Biscombe, L., Dashti, F., Dhakal, R. P., Gogus, A., Gullu, M. F., Henry, R. S., Massone, L. M., Orakcal, K., Rojas, F., et al. (2019). State-of-the-art in nonlinear finite element modeling of isolated planar reinforced concrete walls. *Engineering Structures*, 194:46–65.
- [Kolozviri et al., 2021] Kolozviri, K., Kalbasi, K., Orakcal, K., and Wallace, J. (2021). Three-dimensional shear-flexure interaction model for analysis of non-planar reinforced concrete walls. *Journal of Building Engineering*, 44:102946.
- [Kolozviri et al., 2018] Kolozviri, K., Orakcal, K., and Wallace, J. (2018). New openses models for simulation of nonlinear flexural and shear–flexural interaction behavior of reinforced concrete walls and columns. *Computers & Structures*, 196:246–262.
- [López, 2021] López, C. N. (2021). Efficient shear-flexure interaction model for nonlinear analysis of reinforced concrete structural walls. Master’s thesis, Universidad de Chile.
- [López et al., 2021] López, C. N., Massone, L. M., and Kolozviri, K. (2021). Validation of an efficient shear-flexure interaction model for planar reinforced concrete walls. *Engineering Structures*, page 113590.
- [Lowe et al., 2016] Lowe, L. N., Lehman, D. E., and Baker, C. (2016). Recommendations for modeling the nonlinear response of slender reinforced concrete walls using perform-3d. In *2016 SEAOC convention. Maui, USA*.
- [Massone, 2010] Massone, L. M. (2010). Strength prediction of squat structural walls via calibration of a shear–flexure interaction model. *Engineering Structures*, 32(4):922–932.
- [Massone and Correa, 2020] Massone, L. M. and Correa, A. (2020). Behavior of reinforced concrete columns under biaxial shear forces based on aci 318. *Engineering Structures*, 219:110731.
- [Massone et al., 2021] Massone, L. M., López, C. N., and Kolozviri, K. (2021). Formulation of an efficient shear-flexure interaction model for planar reinforced concrete walls. *Engineering Structures*, 243:112680.
- [Massone et al., 2006] Massone, L. M., Orakcal, K., and Wallace, J. (2006). Shear-flexure interaction for structural walls. *Special Publication*, 236:127–150.
- [Massone et al., 2009] Massone, L. M., Orakcal, K., and Wallace, J. W. (2009). Modelling of squat structural walls controlled by shear. *ACI Structural Journal*, 106(5).
- [Mazars et al., 2006] Mazars, J., Kotronis, P., Ragueneau, F., and Casaux, G. (2006). Using multifiber beams to account for shear and torsion: Applications to concrete structural elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(52):7264–7281.

- [McKenna et al., 2010] McKenna, F., Scott, M. H., and Fenves, G. L. (2010). Nonlinear finite-element analysis software architecture using object composition. *Journal of Computing in Civil Engineering*, 24(1):95–107.
- [Menegotto and Pinto, 1973] Menegotto, M. and Pinto, E. (1973). Method of analysis for cyclically loaded rc plane frames including changes in geometry and non-elastic behavior of elements under combined normal force and bending. In *Proc. of IABSE symposium on resistance and ultimate deformability of structures acted on by well defined repeated loads*, pages 15–22.
- [Mizoguchi et al., 1990] Mizoguchi, M., Arakawa, T., Arai, Y., and Yoshida, M. (1990). Shear resisting behavior of short reinforced concrete columns under biaxial bending-shear and varying axial load. *Transactions of the Japan Concrete Institute*, (12):347–354.
- [Mullapudi and Ayoub, 2013] Mullapudi, T. and Ayoub, A. (2013). Analysis of reinforced concrete columns subjected to combined axial, flexure, shear, and torsional loads. *Journal of Structural Engineering*, 139(4):561–573.
- [Nakamura and Higai, 2001] Nakamura, H. and Higai, T. (2001). Localization issues in nonlinear frame elements. *Modeling of inelastic behavior of RC structures under seismic loads*, pages 471–87.
- [Nguyen et al., 2021] Nguyen, T.-A., Nguyen, Q.-H., and Somja, H. (2021). Nonlinear analysis of rc members subjected to combined bending–shear–torsion stresses: a numerical multi-fiber displacement-based finite element model with warping. *Acta Mechanica*, pages 1–24.
- [NIST GCR 17-917-45, 2017] NIST GCR 17-917-45 (2017). Recommended modeling parameters and acceptance criteria for nonlinear analysis in support of seismic evaluation, retrofit, and design.
- [Orakcal et al., 2019] Orakcal, K., Massone, L. M., and Ulugtekin, D. (2019). A hysteretic constitutive model for reinforced concrete panel elements. *International Journal of Concrete Structures and Materials*, 13(1):1–23.
- [Orakcal et al., 2012] Orakcal, K., Ulugtekin, D., and Massone, L. (2012). Constitutive modeling of reinforced concrete panel behavior under cyclic loading. In *Proceedings, 15th World Conference on Earthquake Engineering*, volume 3573.
- [Orakcal and Wallace, 2006] Orakcal, K. and Wallace, J. W. (2006). Flexural modeling of reinforced concrete walls-experimental verification. *ACI Materials Journal*, 103(2):196.
- [Orakcal et al., 2004] Orakcal, K., Wallace, J. W., and Conte, J. P. (2004). Flexural modeling of reinforced concrete walls-model attributes. *Structural Journal*, 101(5):688–698.
- [Pang and Hsu, 1995] Pang, X.-B. D. and Hsu, T. T. (1995). Behavior of reinforced concrete membrane elements in shear. *Structural Journal*, 92(6):665–679.
- [Petrangeli et al., 1999] Petrangeli, M., Pinto, P. E., and Ciampi, V. (1999). Fiber element for cyclic bending and shear of rc structures. i: Theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 125(9):994–1001.

- [Pham and Li, 2013] Pham, T. P. and Li, B. (2013). Seismic behavior of reinforced concrete columns with light transverse reinforcement under different lateral loading directions. *ACI Structural Journal*, 110(5):833.
- [Poliotti et al., 2021] Poliotti, M., Bairán, J.-M., and Möller, O. (2021). A variable order framework for 3d nonlinear analysis of reinforced concrete frames under general loading. *Engineering Structures*, 242:112536.
- [Pozo et al., 2021] Pozo, J. D., Hube, M. A., and Kurama, Y. C. (2021). Effect of material regularization in plastic hinge integration analysis of slender planar rc walls. *Engineering Structures*, 239:112302.
- [Pugh et al., 2015] Pugh, J. S., Lowes, L. N., and Lehman, D. E. (2015). Nonlinear line-element modeling of flexural reinforced concrete walls. *Engineering Structures*, 104:174–192.
- [Saatcioglu and Razvi, 1992] Saatcioglu, M. and Razvi, S. R. (1992). Strength and ductility of confined concrete. *Journal of Structural engineering*, 118(6):1590–1607.
- [Sadeghian and Vecchio, 2018] Sadeghian, V. and Vecchio, F. (2018). The modified compression field theory: then and now. *ACI Struct J, Special Publication (SP-328: Shear in Structural Concrete)*, pages 3–1.
- [Stevens et al., 1991] Stevens, N., Uzumeri, S., and Collins, M. (1991). Reinforced concrete subjected to reversed cyclic shear—experiments and constitutive model. *Structural Journal*, 88(2):135–146.
- [Tran and Li, 2012] Tran, C. T. N. and Li, B. (2012). Initial stiffness of reinforced concrete columns with moderate aspect ratios. *Advances in Structural Engineering*, 15(2):265–276.
- [Ulugtekin, 2010] Ulugtekin, D. (2010). Analytical modeling of reinforced concrete panel elements under reversed cyclic loadings ms thesis. *Turkey: Bogazici University, Istanbul*.
- [Umehara, 1983] Umehara, H. (1983). Shear strength and deterioration of short reinforced concrete columns under cyclic deformations.
- [Vecchio and Selby, 1991] Vecchio, F. and Selby, R. (1991). Toward compression-field analysis of reinforced concrete solids. *Journal of Structural Engineering*, 117(6):1740–1758.
- [Vecchio and Collins, 1986] Vecchio, F. J. and Collins, M. P. (1986). The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. *ACI J.*, 83(2):219–231.
- [Vecchio and Collins, 1993] Vecchio, F. J. and Collins, M. P. (1993). Compression response of cracked reinforced concrete. *Journal of structural engineering*, 119(12):3590–3610.
- [Vulcano et al., 1988] Vulcano, A., Bertero, V. V., and Colotti, V. (1988). Analytical modeling of rc structural walls. In *Proceedings of the 9th world conference on earthquake engineering*, volume 6, pages 41–46.
- [Yassin, 1994] Yassin, M. H. M. (1994). *Nonlinear analysis of prestressed concrete structures under monotonic and cyclic loads*. PhD thesis, University of California, Berkeley.

Anexos

Anexo A

A. Cálculo del vector de fuerzas y de la matriz de rigidez del elemento

En este capítulo se detalla la formulación para la obtención del vector de fuerzas de 12×1 y de la matriz de rigidez de 12×12 del elemento.

Como se propuso en el modelo, el elemento está formado por $M_T = w \cdot t$ prismas de hormigón armado, siendo w el número de prismas en la dirección “ x ” y t el número de prismas en la dirección ortogonal “ z ”, según la Fig. A.1.

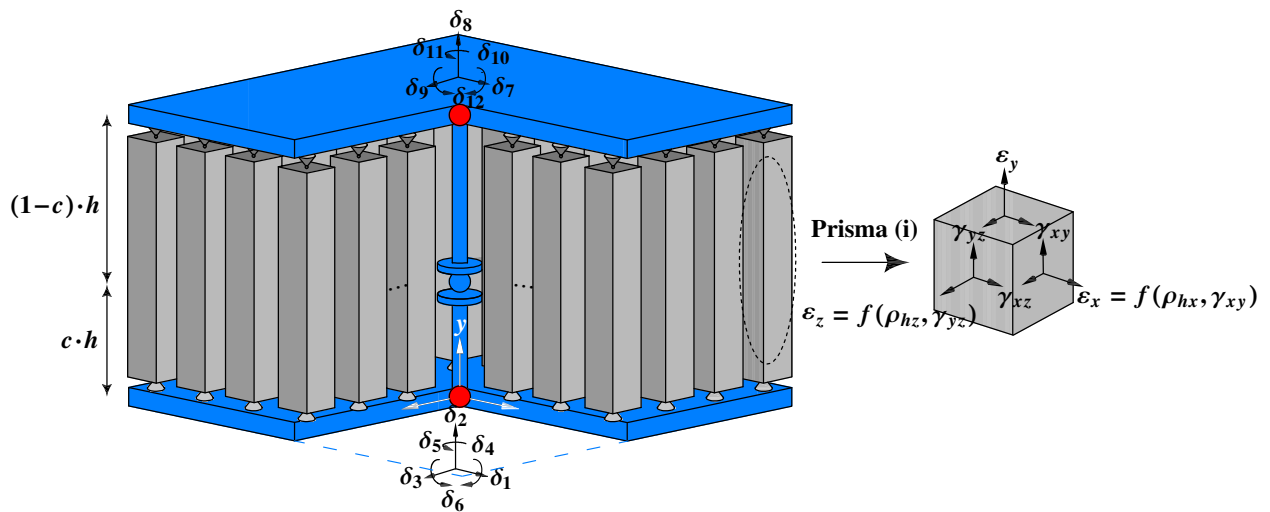


Figura A.1: Idealización del modelo E-SFI-3D.

Para un mayor entendimiento del modelo en cuanto a las fuerzas actuando en el elemento y los desplazamientos de los 12 grados de libertad, en las siguientes secciones se grafica el elemento mostrando solo los prismas en los extremos, los cuales se ordenan de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba. Además, se grafican las fuerzas horizontales a la altura $c \cdot h$ y las fuerzas verticales que actúan a nivel de la placa rígida superior e inferior. Las fuerzas con un subíndice 1 y 2 significa para que nodo se realizó el equilibrio y son iguales para un mismo prisma. En la sección de la matriz de rigidez se observan los 12 desplazamientos correspondiente del elemento; y se han resaltado los términos que constituyen el vector de fuerzas y la matriz de rigidez del modelo.

A.1. Vector de Fuerzas

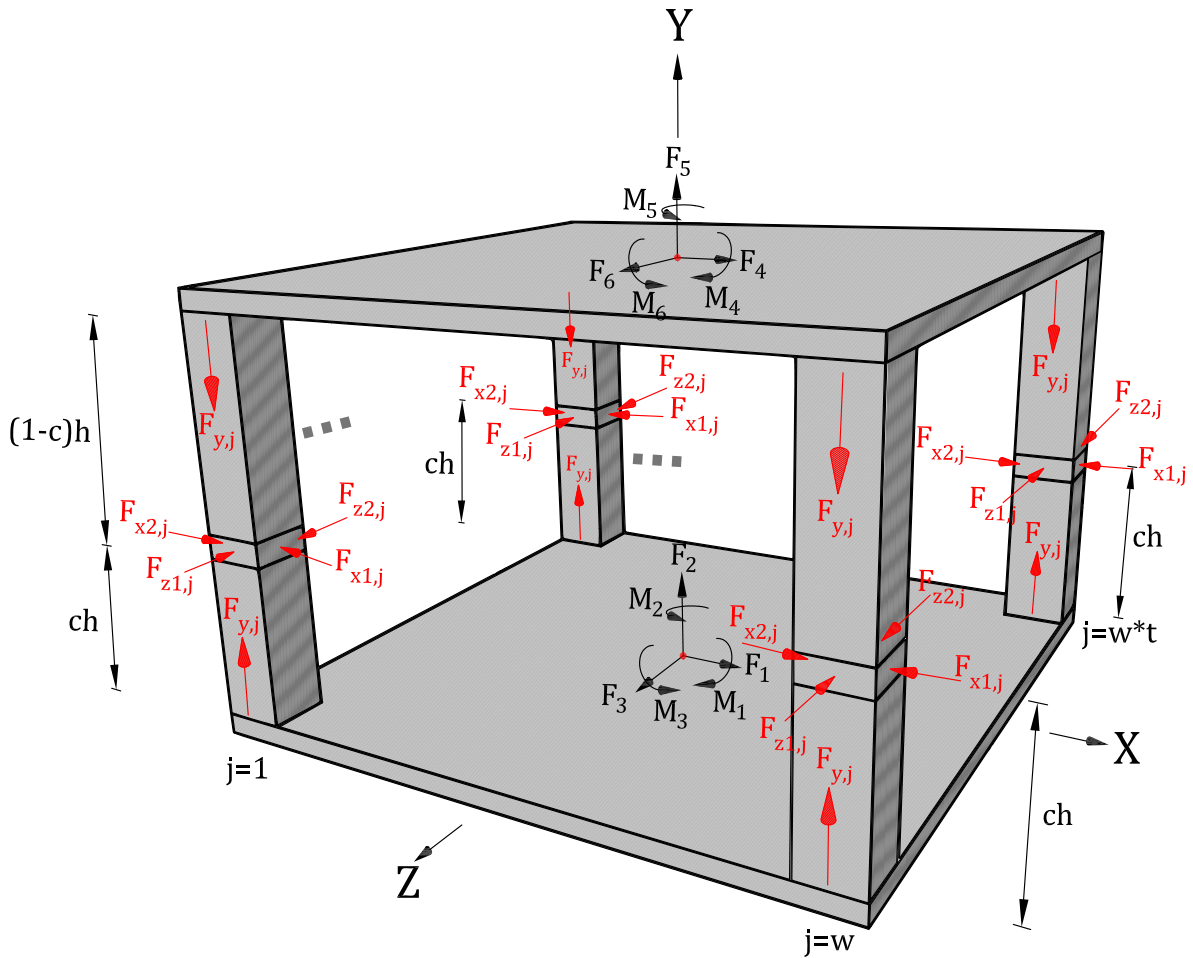


Figura A.2: Fuerzas en el elemento.

Nodo 1

$$\begin{aligned} \sum F_{x1} = 0 & \quad F_1 = \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x1,j} \\ \sum F_{y1} = 0 & \quad F_2 = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} \\ \sum F_{z1} = 0 & \quad F_3 = \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z1,j} \\ \sum M_{x1} = 0 & \quad M_1 = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z1,j} \cdot c \cdot h - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} \cdot z_j \\ \sum M_{y1} = 0 & \quad M_2 = \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x1,j} \cdot z_j - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z1,j} \cdot x_j \\ \sum M_{z1} = 0 & \quad M_3 = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x1,j} \cdot c \cdot h - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} \cdot x_j \end{aligned}$$

Nodo 2

$$\begin{aligned} \sum F_{x2} = 0 & \quad F_4 = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x2,j} \\ \sum F_{y2} = 0 & \quad F_5 = \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} \\ \sum F_{z2} = 0 & \quad F_6 = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z2,j} \\ \sum M_{x2} = 0 & \quad M_4 = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z2,j} \cdot (1-c) \cdot h - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} \cdot z_j \\ \sum M_{y2} = 0 & \quad M_5 = \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z2,j} \cdot x_j - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x2,j} \cdot z_j \\ \sum M_{z2} = 0 & \quad M_6 = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x2,j} \cdot (1-c) \cdot h + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} \cdot x_j \end{aligned}$$

A.2. Matriz de rigidez

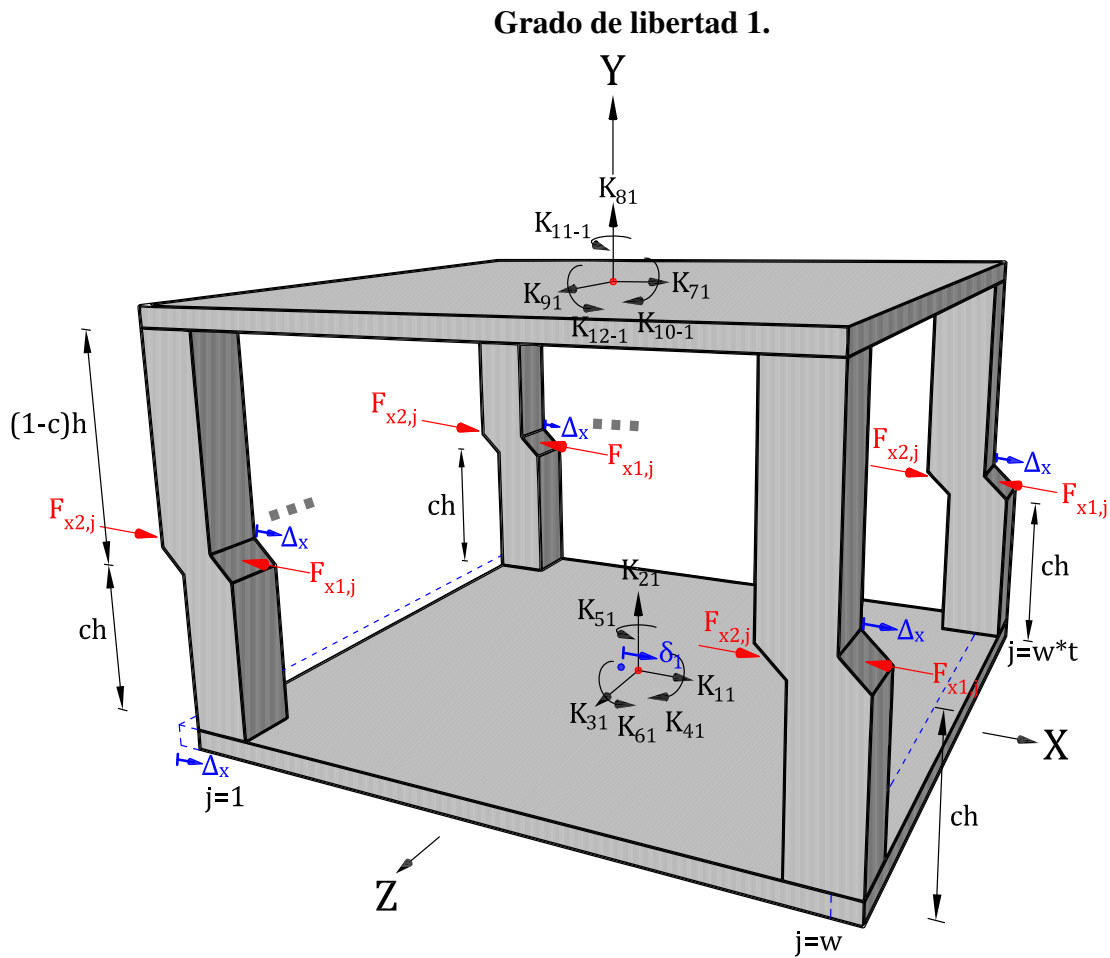


Figura A.3: Desplazamiento del grado de libertad 1, desplazamiento en “x” de la placa inferior.

$$\Delta_x = \delta_1$$

Nodo 1

$$\sum F_{x1} = 0 \quad F_1 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x1,j} = 0$$

$$K_{11} \cdot \delta_1 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot \delta_1 = 0 \quad K_{11} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j}$$

$$\sum F_{y1} = 0 \quad K_{21} = 0$$

$$\sum F_{z1} = 0 \quad K_{31} = 0$$

$$\sum M_{x1} = 0 \quad K_{41} = 0$$

$$\sum M_{y1} = 0 \quad K_{51} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot z_j$$

$$\sum M_{z1} = 0 \quad K_{61} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot c \cdot h$$

Nodo 2

$$\sum F_{x2} = 0 \quad F_2 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x2,j} = 0$$

$$K_{71} \cdot \delta_1 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot \delta_1 = 0 \quad K_{71} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j}$$

$$\sum F_{y2} = 0 \quad K_{81} = 0$$

$$\sum F_{z2} = 0 \quad K_{91} = 0$$

$$\sum M_{x2} = 0 \quad K_{10-1} = 0$$

$$\sum M_{y2} = 0 \quad K_{11-1} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot z_j$$

$$\sum M_{z2} = 0 \quad K_{12-1} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot (1-c) \cdot h$$

Grado de libertad 2.

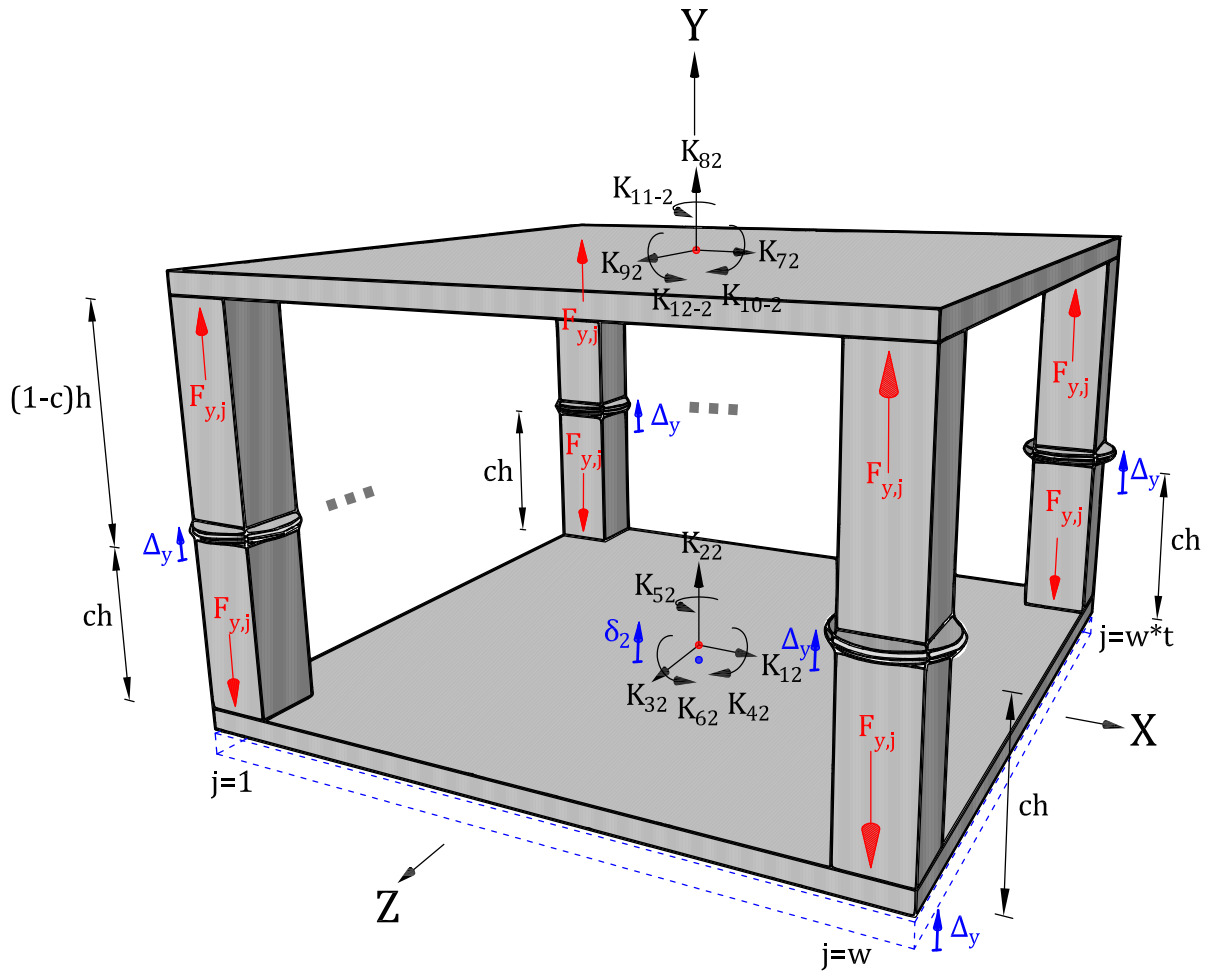


Figura A.4: Desplazamiento del grado de libertad 2, desplazamiento vertical de la placa inferior.

$$\Delta_y = \delta_2$$

Nodo 1

$$\Sigma F_{x1} = 0 \quad K_{12} = 0$$

$$\Sigma F_{y1} = 0 \quad F_2 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} = 0$$

$$K_{22} \cdot \delta_2 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot \delta_2 = 0 \quad K_{22} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j}$$

$$\Sigma F_{z1} = 0 \quad K_{32} = 0$$

$$\Sigma M_{x1} = 0 \quad K_{42} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot z_j$$

$$\Sigma M_{y1} = 0 \quad K_{52} = 0$$

$$\Sigma M_{z1} = 0 \quad K_{62} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot x_j$$

Nodo 2

$$\Sigma F_{x2} = 0 \quad K_{72} = 0$$

$$\Sigma F_{y2} = 0 \quad F_5 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} = 0$$

$$K_{82} \cdot \delta_2 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot \delta_2 = 0 \quad K_{82} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j}$$

$$\Sigma F_{z2} = 0 \quad K_{92} = 0$$

$$\Sigma M_{x2} = 0 \quad K_{10-2} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot z_j$$

$$\Sigma M_{y2} = 0 \quad K_{11-2} = 0$$

$$\Sigma M_{z2} = 0 \quad K_{12-2} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot x_j$$

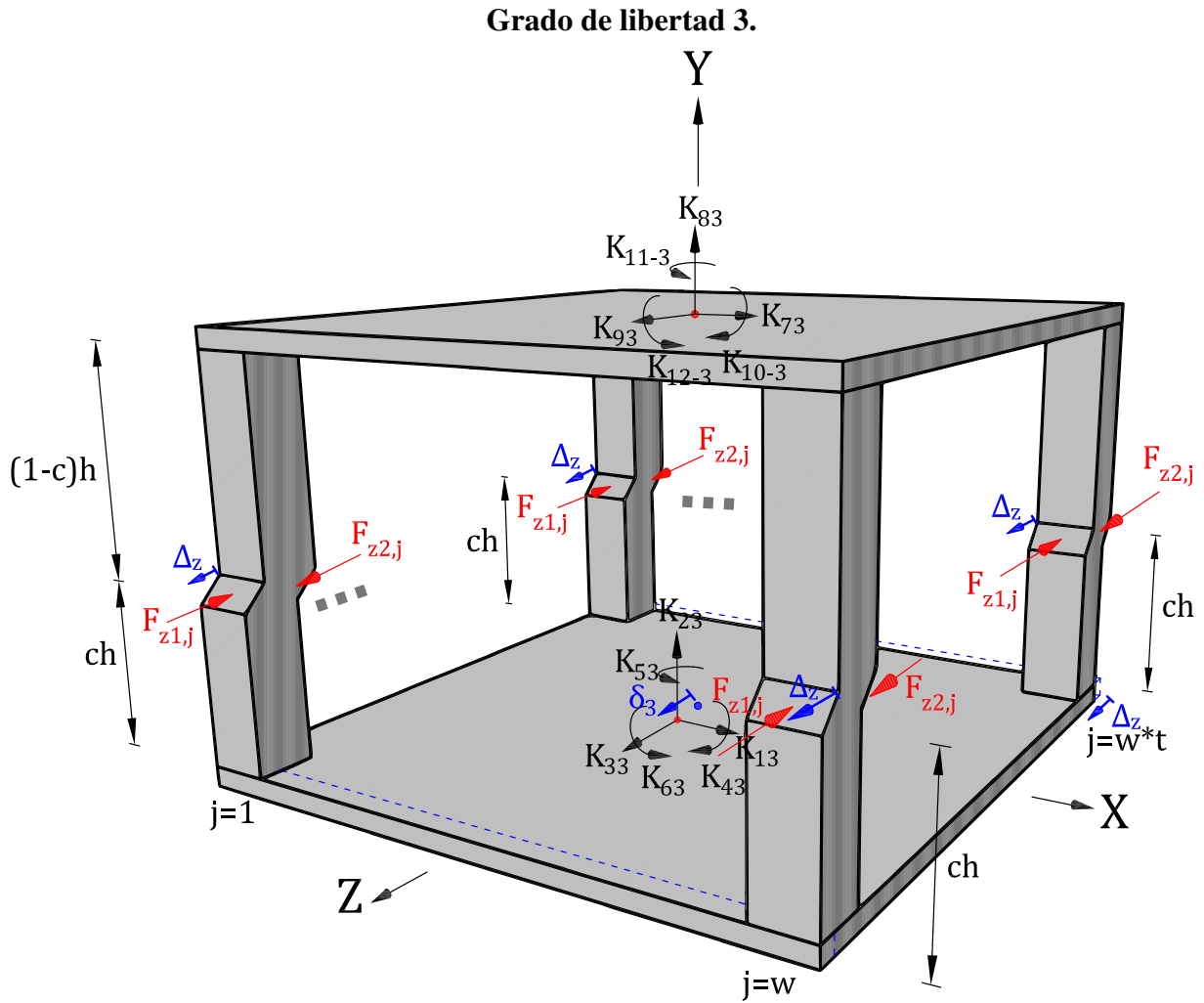


Figura A.5: Desplazamiento del grado de libertad 3, desplazamiento en “z” de la placa inferior.

$$\Delta_z = \delta_3$$

Nodo 1

$$\sum F_{x1} = 0 \quad K_{13} = 0$$

$$\sum F_{y1} = 0 \quad K_{23} = 0$$

$$\sum F_{z1} = 0 \quad F_3 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z1,j} = 0$$

$$K_{33} \cdot \delta_3 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot \delta_3 = 0 \quad K_{33} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j}$$

$$\sum M_{x1} = 0 \quad K_{43} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot c \cdot h$$

$$\sum M_{y1} = 0 \quad K_{53} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot x_j$$

$$\sum M_{z1} = 0 \quad K_{63} = 0$$

Nodo 2

$$\sum F_{x2} = 0 \quad K_{73} = 0$$

$$\sum F_{y2} = 0 \quad K_{83} = 0$$

$$\sum F_{z2} = 0 \quad F_5 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z2,j} = 0$$

$$K_{93} \cdot \delta_3 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot \delta_3 = 0 \quad K_{93} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j}$$

$$\sum M_{x2} = 0 \quad K_{10-3} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot (1-c) \cdot h$$

$$\sum M_{y2} = 0 \quad K_{11-3} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot x_j$$

$$\sum M_{z2} = 0 \quad K_{12-3} = 0$$

Grado de libertad 4.

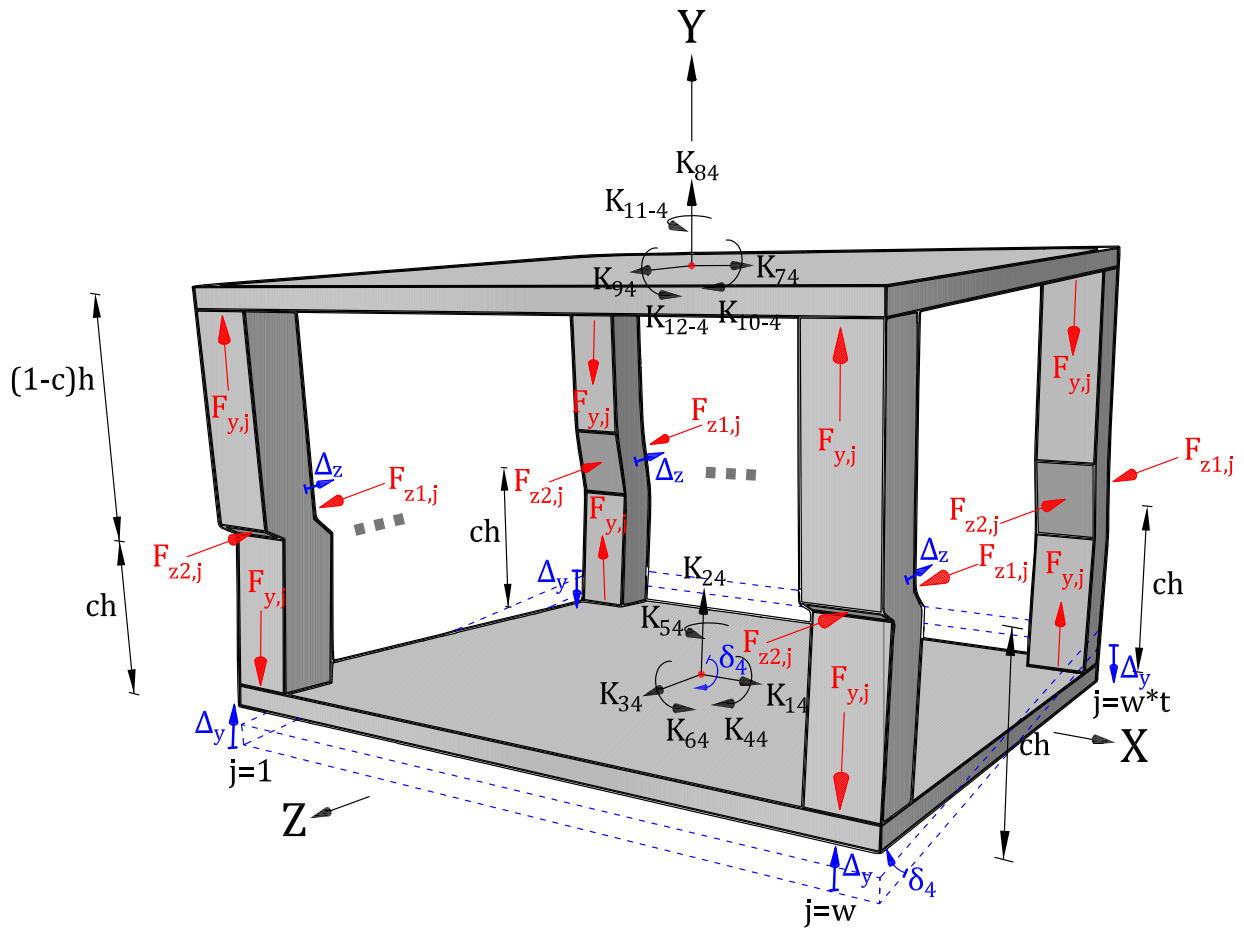


Figura A.6: Desplazamiento del grado de libertad 4, giro en "x" de la placa inferior.

$$\Delta_{y,j} \approx \delta_4 \cdot z_j \quad \Delta_z \approx \delta_4 \cdot c \cdot h$$

Nodo 1

$$\begin{aligned} \sum F_{x1} = 0 & \quad K_{14} = 0 \\ \sum F_{y1} = 0 & \quad F_2 - \sum_{j=1}^{w-t} F_{y,j} = 0 \\ K_{24} \cdot \delta_4 - \sum_{j=1}^{w-t} K_{y,j} \cdot \Delta_y = 0 & \quad K_{24} = \sum_{j=1}^{w-t} K_{y,j} \cdot z_j \\ \sum F_{z1} = 0 & \quad F_3 + \sum_{j=1}^{w-t} F_{z1,j} = 0 \\ K_{34} \cdot \delta_4 + \sum_{j=1}^{w-t} K_{z1,j} \cdot \Delta_z = 0 & \quad K_{34} = - \sum_{j=1}^{w-t} K_{z1,j} \cdot c \cdot h \\ \sum M_{x1} = 0 & \quad M_1 - \sum_{j=1}^{w-t} F_{z1,j} \cdot c \cdot h - \sum_{j=1}^{w-t} F_{y,j} \cdot z_j = 0 \\ K_{44} \cdot \delta_4 - \sum_{j=1}^{w-t} K_{z1,j} \cdot \Delta_z \cdot c \cdot h - \sum_{j=1}^{w-t} K_{y,j} \cdot \Delta_y \cdot z_j = 0 \end{aligned}$$

Nodo 2

$$\begin{aligned} \sum F_{x2} = 0 & \quad K_{74} = 0 \\ \sum F_{y2} = 0 & \quad F_5 + \sum_{j=1}^{w-t} F_{y,j} = 0 \\ K_{84} \cdot \delta_4 + \sum_{j=1}^{w-t} K_{y,j} \cdot \Delta_y = 0 & \quad K_{84} = - \sum_{j=1}^{w-t} K_{y,j} \cdot z_j \\ \sum F_{z2} = 0 & \quad F_5 - \sum_{j=1}^{w-t} F_{z2,j} = 0 \\ K_{94} \cdot \delta_4 - \sum_{j=1}^{w-t} K_{z2,j} \cdot \Delta_z = 0 & \quad K_{94} = \sum_{j=1}^{w-t} K_{z2,j} \cdot c \cdot h \\ \sum M_{x2} = 0 & \quad M_4 - \sum_{j=1}^{w-t} F_{z2,j} \cdot (1-c) \cdot h + \sum_{j=1}^{w-t} F_{y,j} \cdot z_j = 0 \\ K_{10-4} \cdot \delta_4 - \sum_{j=1}^{w-t} K_{z2,j} \cdot \Delta_z \cdot (1-c) \cdot h + \sum_{j=1}^{w-t} K_{y,j} \cdot \Delta_y \cdot z_j = 0 \end{aligned}$$

$$K_{44} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot c^2 \cdot h^2 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot z_j^2$$

$$\sum M_{y1} = 0 \quad K_{54} \cdot \delta_4 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z1,j} \cdot x_j = 0$$

$$K_{54} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot x_j \cdot c \cdot h$$

$$\sum M_{z1} = 0 \quad K_{64} \cdot \delta_4 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} \cdot x_j = 0$$

$$K_{64} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot x_j \cdot z_j$$

$$K_{10-4} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot c \cdot (1-c) \cdot h^2 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot z_j^2$$

$$\sum M_{y2} = 0 \quad K_{11-4} \cdot \delta_4 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z2,j} \cdot x_j$$

$$K_{11-4} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot x_j \cdot c \cdot h$$

$$\sum M_{z2} = 0 \quad K_{12-4} \cdot \delta_4 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} \cdot x_j$$

$$K_{12-4} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot x_j \cdot z_j$$

Grado de libertad 5.

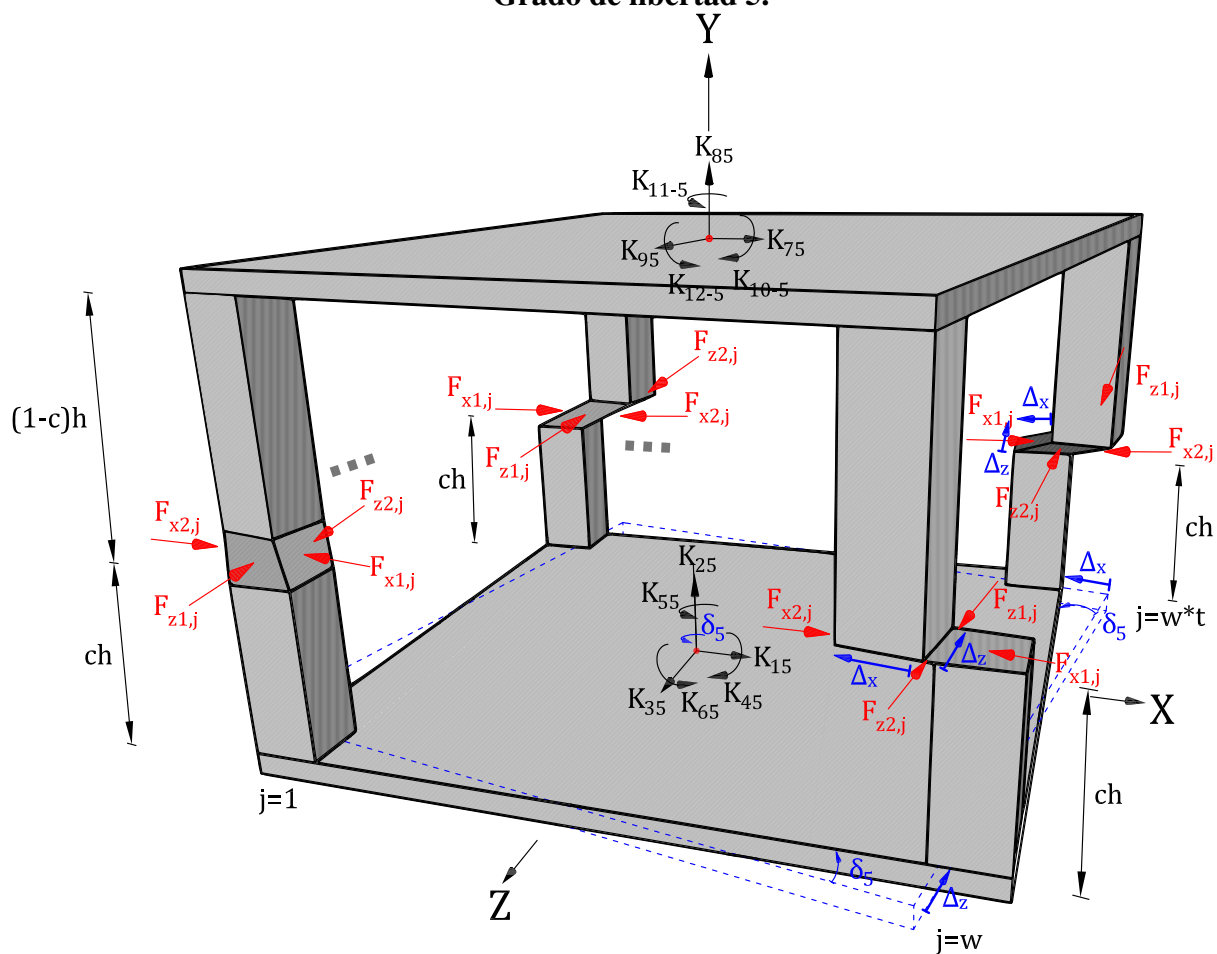


Figura A.7: Desplazamiento del grado de libertad 5, torsión de la placa inferior.

$$\Delta_{x,j} \approx \delta_5 \cdot z_j \quad \Delta_{z,j} \approx \delta_5 \cdot x_j$$

Nodo 1

$$\sum F_{x1} = 0 \quad K_{15} \cdot \delta_5 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x1,j} = 0$$

Nodo 2

$$\sum F_{x2} = 0 \quad K_{75} \cdot \delta_5 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x2,j} = 0$$

$$\begin{aligned}
K_{15} \cdot \delta_5 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot \Delta_x &= 0 & K_{15} &= \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot z_j & K_{75} \cdot \delta_5 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot \Delta_x &= 0 & K_{75} &= - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot z_j \\
\sum F_{y1} &= 0 & K_{25} &= 0 & \sum F_{y2} &= 0 & K_{85} &= 0 \\
\sum F_{z1} &= 0 & F_3 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z1,j} &= 0 & \sum F_{z2} &= 0 & F_5 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z2,j} &= 0 \\
K_{35} \cdot \delta_5 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot \Delta_z &= 0 & K_{35} &= - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot x_j & K_{95} \cdot \delta_5 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot \Delta_z &= 0 & K_{95} &= \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot x_j \\
\sum M_{x1} &= 0 & M_1 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z1,j} \cdot c \cdot h &= 0 & \sum M_{x2} &= 0 & M_4 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z2,j} \cdot (1-c) \cdot h &= 0 \\
K_{45} \cdot \delta_5 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot \Delta_z \cdot c \cdot h &= 0 & K_{10-5} \cdot \delta_4 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot \Delta_z \cdot (1-c) \cdot h &= 0 \\
K_{45} &= \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot x_j \cdot c \cdot h & K_{10-5} &= \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot x_j \cdot (1-c) \cdot h \\
\sum M_{y1} &= 0 & K_{55} \cdot \delta_5 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z1,j} \cdot x_j - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x1,j} \cdot z_j &= 0 & \sum M_{y2} &= 0 & K_{11-5} \cdot \delta_5 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z2,j} \cdot x_j + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x2,j} \cdot z_j &= 0 \\
K_{55} \cdot \delta_5 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot \Delta_z \cdot x_j - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot \Delta_x \cdot z_j &= 0 & K_{11-5} \cdot \delta_5 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot \Delta_z \cdot x_j + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot \Delta_x \cdot z_j &= 0 \\
K_{55} &= \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot z_j^2 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot x_j^2 & K_{11-5} &= - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot z_j^2 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot x_j^2 \\
\sum M_{z1} &= 0 & M_3 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x1,j} \cdot c \cdot h &= 0 & \sum M_{z2} &= 0 & M_6 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x2,j} \cdot (1-c) \cdot h &= 0 \\
K_{65} \cdot \delta_5 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot \Delta_x \cdot c \cdot h &= 0 & K_{12-5} \cdot \delta_5 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot \Delta_x \cdot (1-c) \cdot h &= 0 \\
K_{65} &= - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot z_j \cdot c \cdot h & K_{12-5} &= - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot z_j \cdot (1-c) \cdot h
\end{aligned}$$

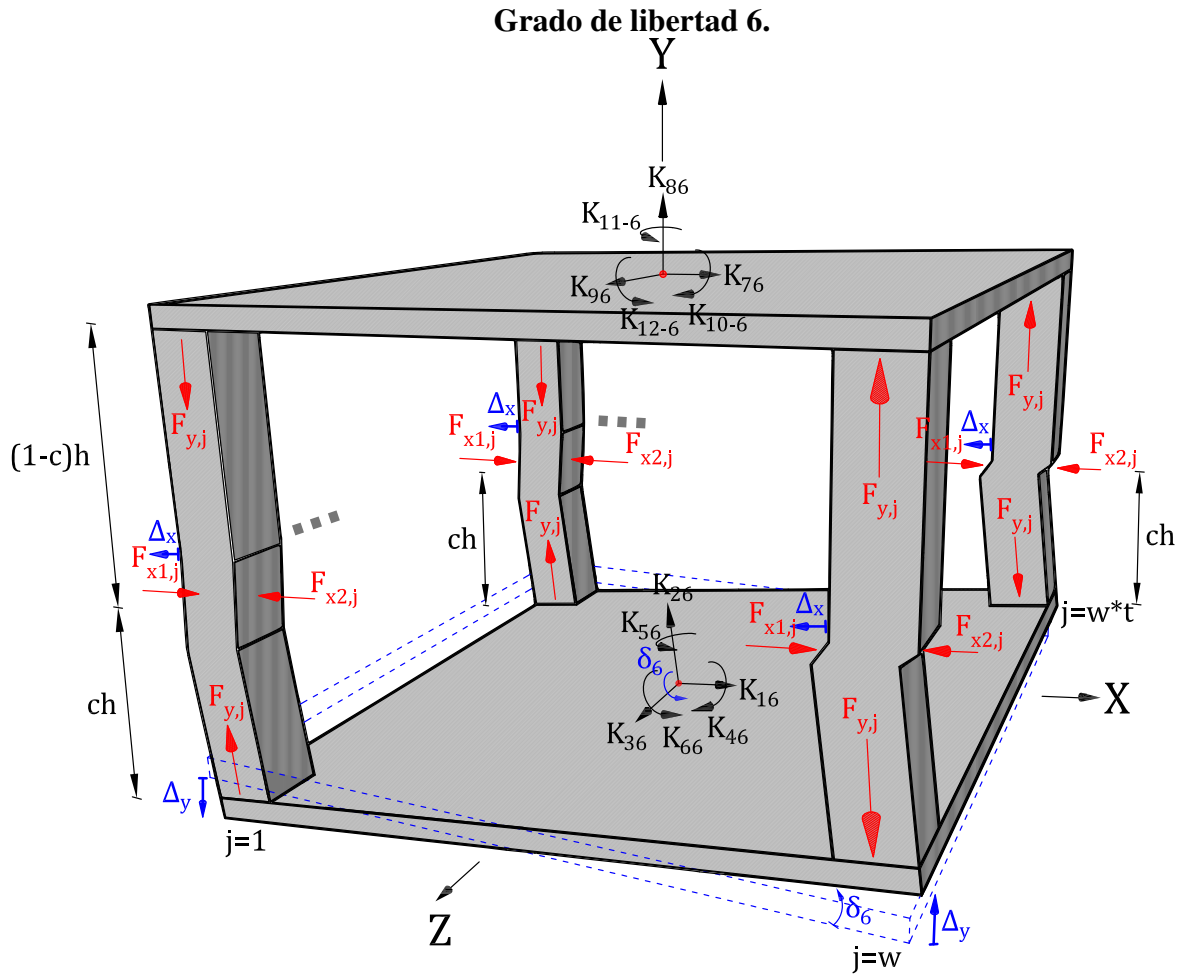


Figura A.8: Desplazamiento del grado de libertad 6, giro en “z” de la placa inferior.

$$\Delta_{y,j} \approx \delta_6 \cdot x_j \quad \Delta_x \approx \delta_6 \cdot c \cdot h$$

Nodo 1

$$\sum F_{x1} = 0 \quad F_1 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x1,j} = 0$$

$$K_{16} \cdot \delta_6 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot \Delta_x = 0 \quad K_{16} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot c \cdot h$$

$$\sum F_{y1} = 0 \quad F_2 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} = 0$$

$$K_{26} \cdot \delta_6 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot \Delta_y = 0 \quad K_{26} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot x_j$$

$$\sum F_{z1} = 0 \quad K_{36} = 0$$

$$\sum M_{x1} = 0 \quad K_{46} \cdot \delta_6 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} \cdot z_j = 0$$

$$K_{46} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot x_j \cdot z_j$$

Nodo 2

$$\sum F_{x2} = 0 \quad F_4 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x2,j} = 0$$

$$K_{76} \cdot \delta_6 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot \Delta_z = 0 \quad K_{76} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot c \cdot h$$

$$\sum F_{y2} = 0 \quad F_5 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} = 0$$

$$K_{86} \cdot \delta_6 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot \Delta_y = 0 \quad K_{86} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot x_j$$

$$\sum F_{z2} = 0 \quad K_{96} = 0$$

$$\sum M_{z2} = 0 \quad K_{10-6} \cdot \delta_6 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} \cdot z_j$$

$$K_{10-6} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot x_j \cdot z_j$$

$$\sum M_{y1} = 0 \quad K_{56} \cdot \delta_6 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x1,j} \cdot z_j = 0$$

$$K_{56} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot z_j \cdot c \cdot h$$

$$\sum M_{y2} = 0 \quad K_{11-6} \cdot \delta_6 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x2,j} \cdot z_j = 0$$

$$K_{11-6} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot z_j \cdot c \cdot h$$

$$\sum M_{z1} = 0 \quad M_3 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x1,j} \cdot c \cdot h - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} \cdot x_j = 0$$

$$\sum M_{x2} = 0 \quad M_6 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x2,j} \cdot (1-c) \cdot h + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} \cdot x_j = 0$$

$$K_{66} \cdot \delta_6 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot \Delta_x \cdot c \cdot h - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot \Delta_y \cdot x_j = 0$$

$$K_{10-6} \cdot \delta_6 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot \Delta_x \cdot (1-c) \cdot h + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot \Delta_y \cdot x_j = 0$$

$$K_{66} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot c^2 \cdot h^2 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot x_j^2$$

$$K_{12-6} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot c \cdot (1-c) \cdot h^2 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot x_j^2$$

Grado de libertad 7.

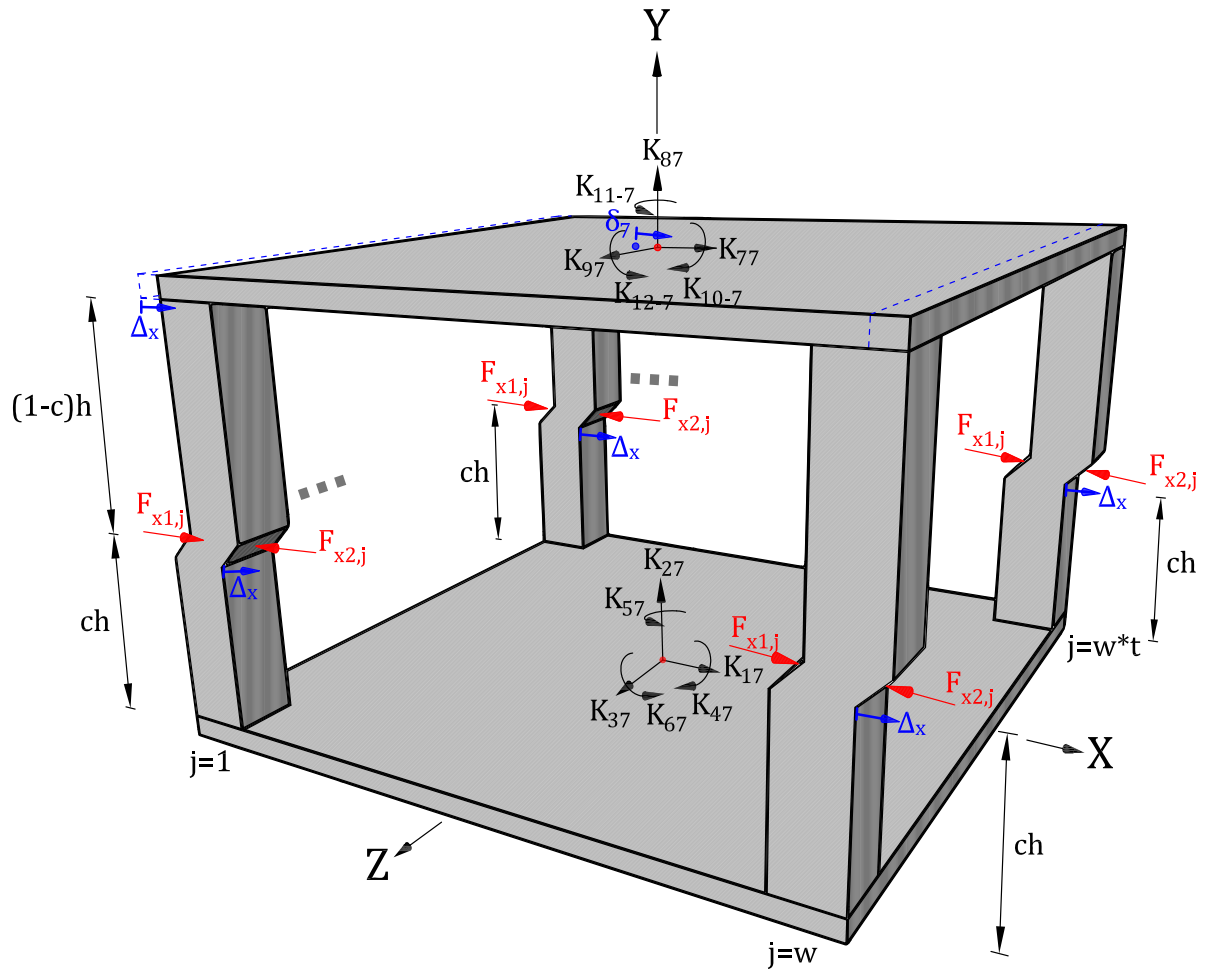


Figura A.9: Desplazamiento del grado de libertad 7, desplazamiento en “x” de la placa superior.
 $\Delta_x = \delta_7$

Nodo 1

$$\sum F_{x1} = 0 \quad F_1 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x1,j} = 0$$

Nodo 2

$$\sum F_{x2} = 0 \quad F_2 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x2,j} = 0$$

| | | | |
|--|--|--|--|
| $K_{17} \cdot \delta_7 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot \delta_7 = 0$ | $K_{17} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j}$ | $K_{77} \cdot \delta_7 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot \delta_7 = 0$ | $K_{77} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j}$ |
| $\sum F_{y1} = 0$ | $K_{27} = 0$ | $\sum F_{y2} = 0$ | $K_{87} = 0$ |
| $\sum F_{z1} = 0$ | $K_{37} = 0$ | $\sum F_{z2} = 0$ | $K_{97} = 0$ |
| $\sum M_{x1} = 0$ | $K_{47} = 0$ | $\sum M_{x2} = 0$ | $K_{10-7} = 0$ |
| $\sum M_{y1} = 0$ | $K_{57} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot z_j$ | $\sum M_{y2} = 0$ | $K_{11-7} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot z_j$ |
| $\sum M_{z1} = 0$ | $K_{67} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot c \cdot h$ | $\sum M_{z2} = 0$ | $K_{12-7} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot (1-c) \cdot h$ |

Grado de libertad 8.

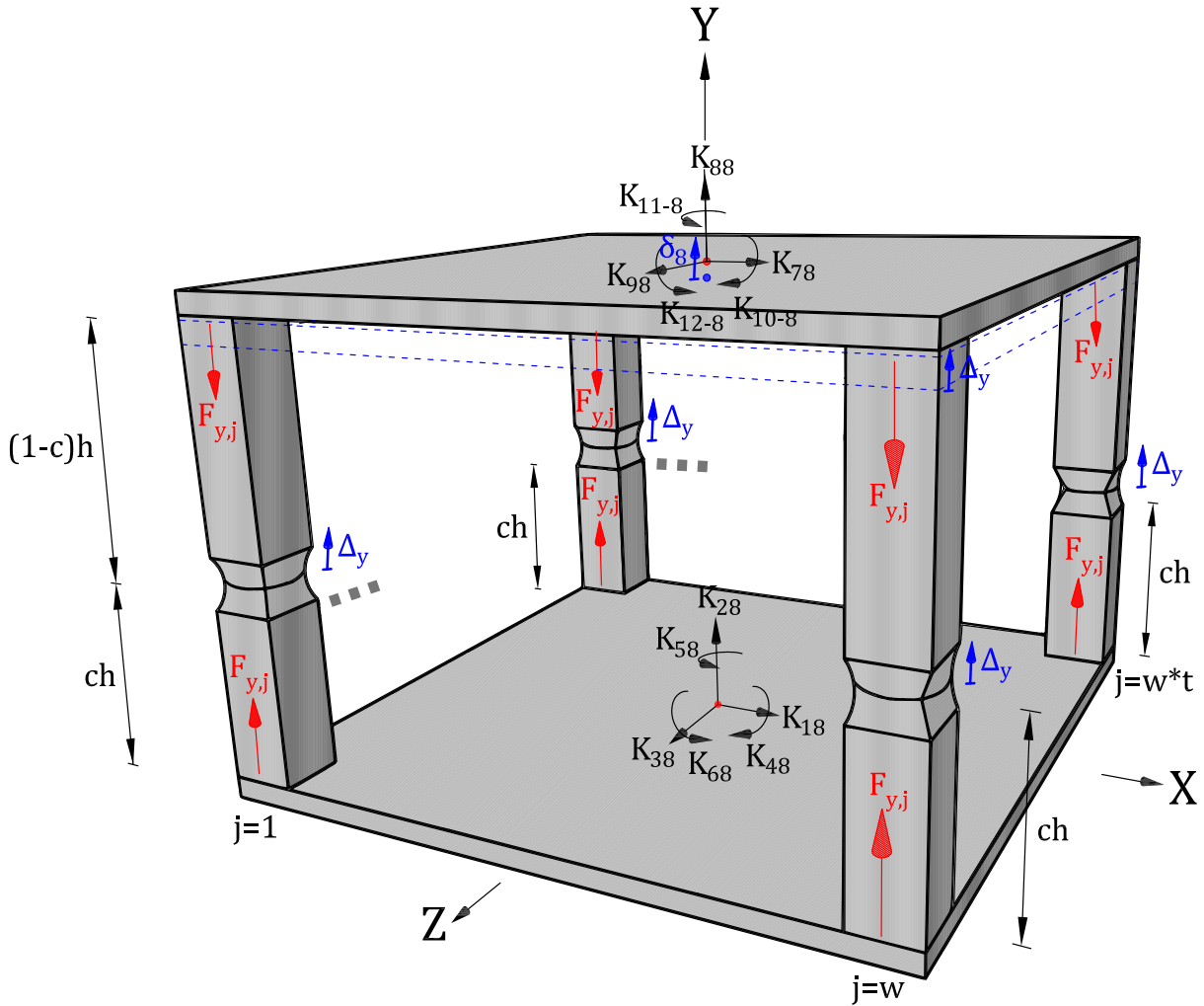


Figura A.10: Desplazamiento del grado de libertad 8, desplazamiento vertical de la placa superior.

$\Delta_y = \delta_8$

Nodo 1

Nodo 2

$\sum F_{x1} = 0$ $K_{18} = 0$

$\sum F_{x2} = 0$ $K_{78} = 0$

$$\sum F_{y1} = 0 \quad F_2 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} = 0$$

$$\sum F_{y2} = 0 \quad F_5 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} = 0$$

$$K_{28} \cdot \delta_8 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot \delta_8 = 0 \quad K_{28} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j}$$

$$K_{88} \cdot \delta_8 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot \delta_8 = 0 \quad K_{88} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j}$$

$$\sum F_{z1} = 0 \quad K_{38} = 0$$

$$\sum F_{z2} = 0 \quad K_{98} = 0$$

$$\sum M_{x1} = 0 \quad K_{48} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot z_j$$

$$\sum M_{x2} = 0 \quad K_{10-8} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot z_j$$

$$\sum M_{y1} = 0 \quad K_{58} = 0$$

$$\sum M_{y2} = 0 \quad K_{11-8} = 0$$

$$\sum M_{z1} = 0 \quad K_{68} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot x_j$$

$$\sum M_{z2} = 0 \quad K_{12-8} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot x_j$$

Grado de libertad 9.

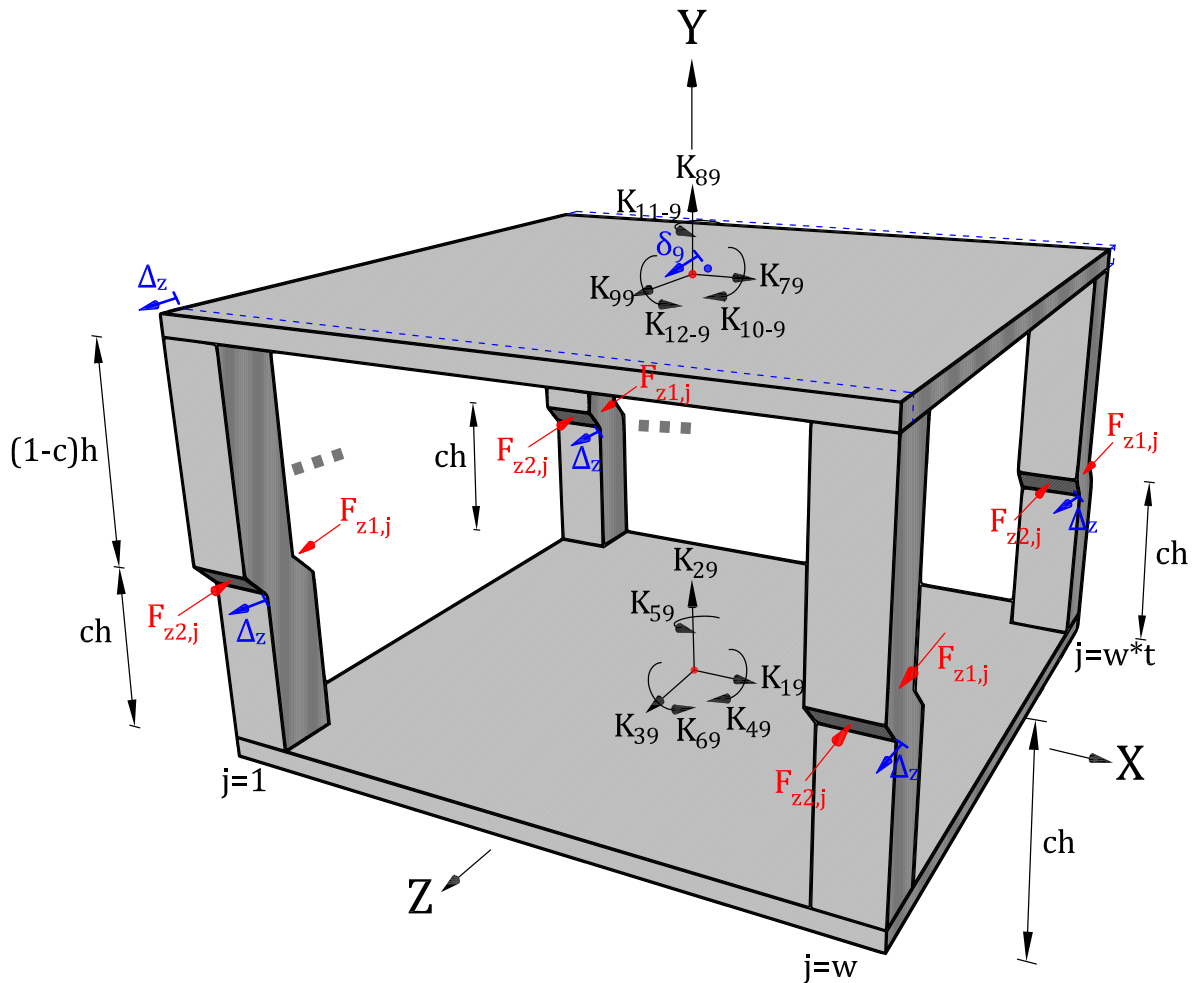


Figura A.11: Desplazamiento del grado de libertad 9, desplazamiento en “z” de la placa superior.

$$\Delta_z = \delta_9$$

Nodo 1

$$\sum F_{x1} = 0 \quad K_{19} = 0$$

Nodo 2

$$\sum F_{x2} = 0 \quad K_{79} = 0$$

$$\begin{aligned} \sum F_{y1} = 0 & \quad K_{29} = 0 & \sum F_{y2} = 0 & \quad K_{89} = 0 \\ \sum F_{z1} = 0 & \quad F_3 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z1,j} = 0 & \sum F_{z2} = 0 & \quad F_5 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z2,j} = 0 \\ K_{39} \cdot \delta_9 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot \delta_9 = 0 & \quad K_{39} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} & K_{99} \cdot \delta_9 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot \delta_9 = 0 & \quad K_{99} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \\ \sum M_{x1} = 0 & \quad K_{49} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot c \cdot h & \sum M_{x2} = 0 & \quad K_{10-9} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot (1-c) \cdot h \\ \sum M_{y1} = 0 & \quad K_{59} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot x_j & \sum M_{y2} = 0 & \quad K_{11-9} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot x_j \\ \sum M_{z1} = 0 & \quad K_{69} = 0 & \sum M_{z2} = 0 & \quad K_{12-9} = 0 \end{aligned}$$

Grado de libertad 10.

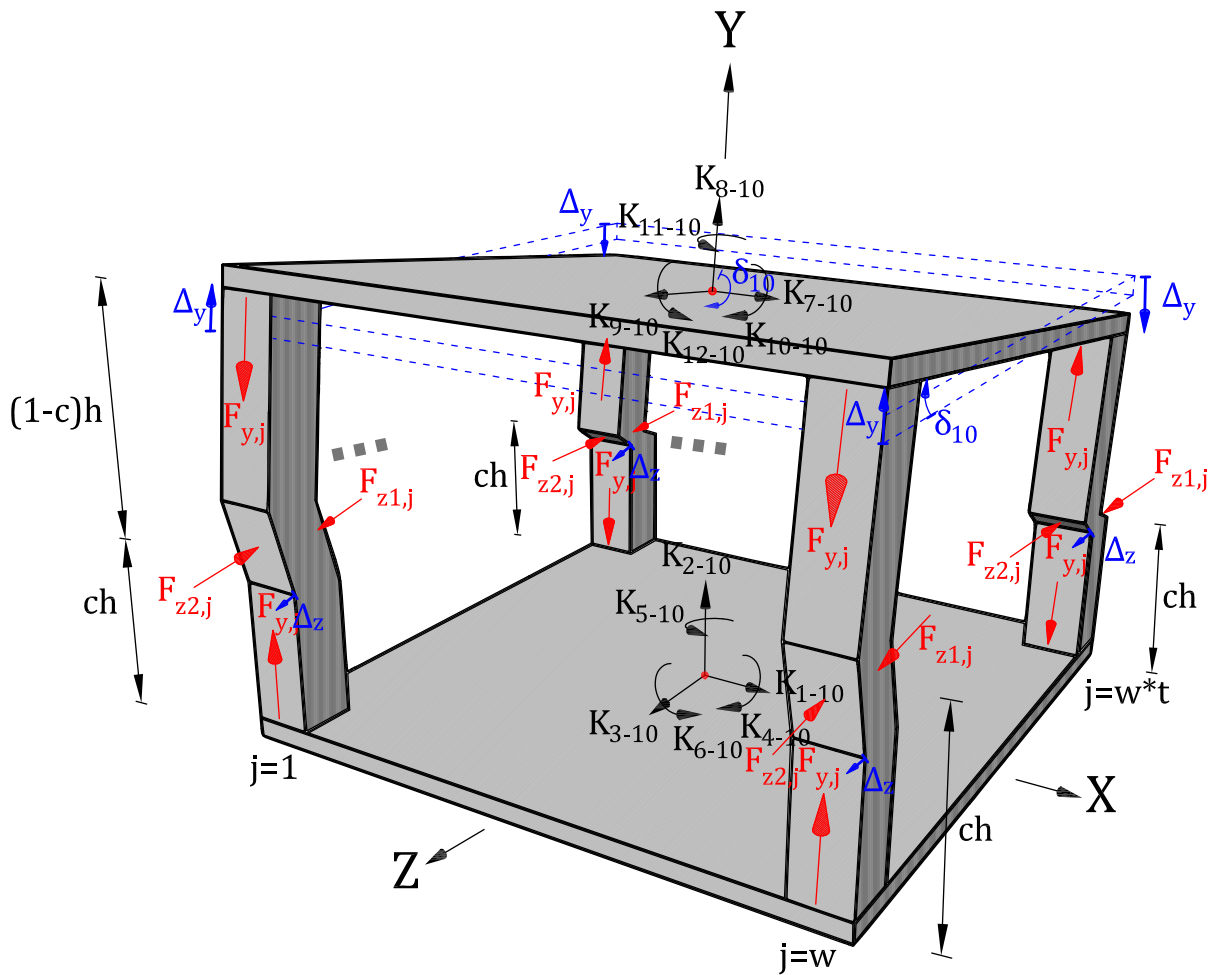


Figura A.12: Desplazamiento del grado de libertad 10, giro en "x" de la placa superior.

$$\Delta_{y,j} \approx \delta_{10} \cdot z_j \quad \Delta_z \approx \delta_{10} \cdot (1-c) \cdot h$$

Nodo 1

$$\sum F_{x1} = 0 \quad K_{1-10} = 0$$

Nodo 2

$$\sum F_{x2} = 0 \quad K_{7-10} = 0$$

$$\Sigma F_{y1} = 0 \quad F_2 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} = 0$$

$$\Sigma F_{y2} = 0 \quad F_5 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} = 0$$

$$K_{2-10} \cdot \delta_{10} + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot \Delta_y = 0 \quad K_{2-10} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot z_j$$

$$K_{8-10} \cdot \delta_{10} - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot \Delta_y = 0 \quad K_{8-10} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot z_j$$

$$\Sigma F_{z1} = 0 \quad F_3 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z1,j} = 0$$

$$\Sigma F_{z2} = 0 \quad F_5 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z2,j} = 0$$

$$K_{3-10} \delta_{10} + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \Delta_z = 0 \quad K_{3-10} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot (1-c) \cdot h$$

$$K_{9-10} \delta_{10} - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \Delta_z = 0 \quad K_{9-10} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot (1-c) \cdot h$$

$$\Sigma M_{x1} = 0 \quad M_1 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z1,j} \cdot c \cdot h + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} \cdot z_j = 0$$

$$\Sigma M_{x2} = 0 \quad M_4 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z2,j} \cdot (1-c) \cdot h - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} \cdot z_j = 0$$

$$K_{4-10} \delta_{10} - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot \Delta_z \cdot c \cdot h + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot \Delta_y \cdot z_j = 0$$

$$K_{10-10} \delta_{10} - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot \Delta_z \cdot (1-c) \cdot h - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot \Delta_y \cdot z_j = 0$$

$$K_{4-10} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot c \cdot (1-c) \cdot h^2 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot z_j^2$$

$$K_{10-10} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot (1-c)^2 \cdot h^2 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot z_j^2$$

$$\Sigma M_{y1} = 0 \quad K_{5-10} \cdot \delta_{10} - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z1,j} \cdot x_j = 0$$

$$\Sigma M_{y2} = 0 \quad K_{11-10} \cdot \delta_{10} + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z2,j} \cdot x_j$$

$$K_{5-10} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot x_j \cdot (1-c) \cdot h$$

$$K_{11-10} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot x_j \cdot (1-c) \cdot h$$

$$\Sigma M_{z1} = 0 \quad K_{6-10} \cdot \delta_{10} + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} \cdot x_j = 0$$

$$\Sigma M_{z2} = 0 \quad K_{12-10} \cdot \delta_{10} - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} \cdot x_j$$

$$K_{6-10} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot x_j \cdot z_j$$

$$K_{12-10} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot x_j \cdot z_j$$

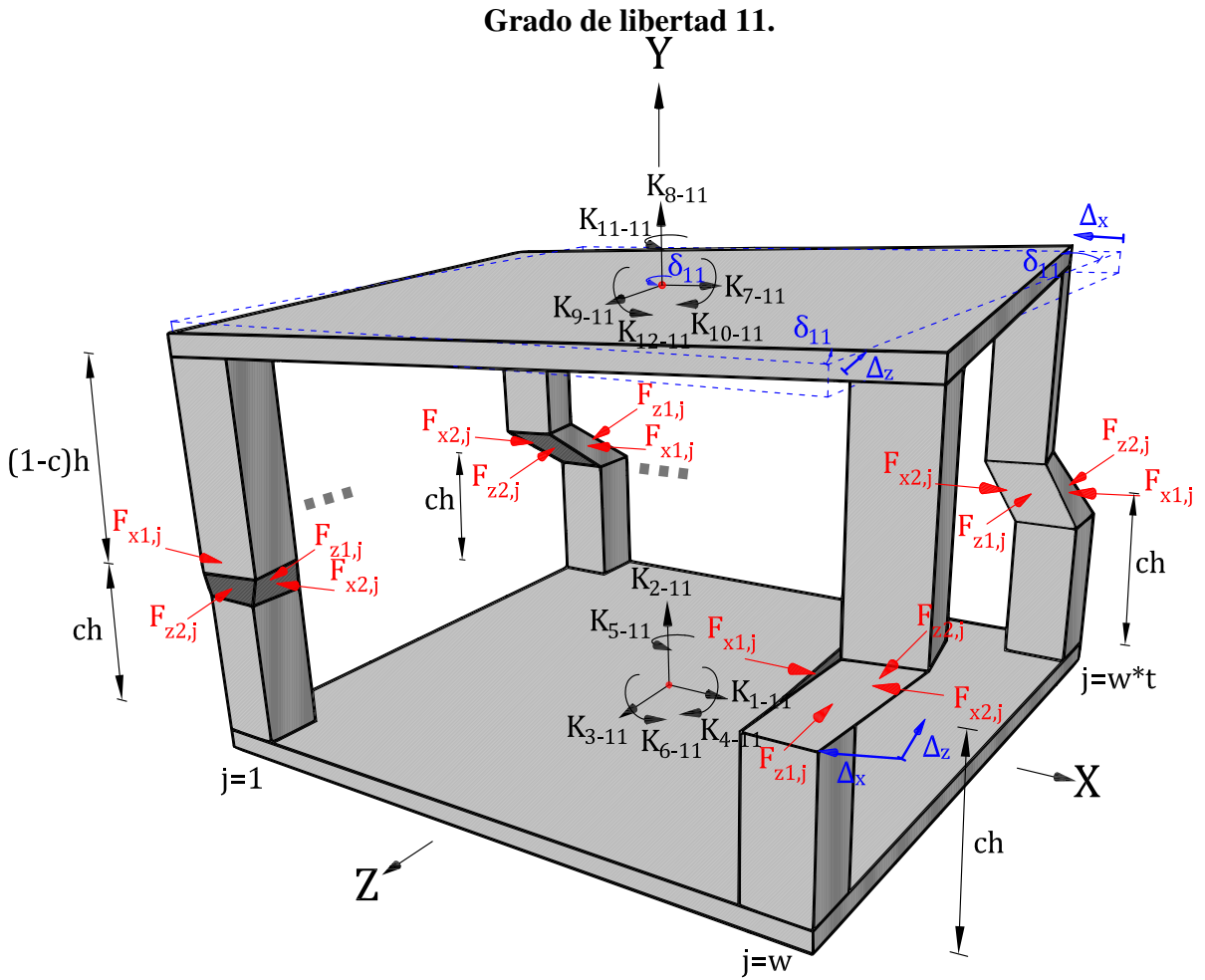


Figura A.13: Desplazamiento del grado de libertad 11, torsión de la placa superior.

$$\Delta_{x,j} \approx \delta_{11} \cdot z_j \quad \Delta_{z,j} \approx \delta_{11} \cdot x_j$$

Nodo 1

$$\sum F_{x1} = 0 \quad K_{1-11} \cdot \delta_{11} + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x1,j} = 0$$

$$K_{1-11} \cdot \delta_{11} + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot \Delta_x = 0 \quad K_{1-11} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot z_j$$

$$\sum F_{y1} = 0 \quad K_{2-11} = 0$$

$$\sum F_{z1} = 0 \quad F_3 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z1,j} = 0$$

$$K_{3-11} \cdot \delta_{11} - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot \Delta_z = 0 \quad K_{3-11} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot x_j$$

$$\sum M_{x1} = 0 \quad M_1 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z1,j} \cdot c \cdot h = 0$$

$$K_{4-11} \cdot \delta_{11} + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot \Delta_z \cdot c \cdot h = 0$$

Nodo 2

$$\sum F_{x2} = 0 \quad K_{7-11} \cdot \delta_{11} - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x2,j} = 0$$

$$K_{7-11} \cdot \delta_{11} - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot \Delta_x = 0 \quad K_{7-11} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot z_j$$

$$\sum F_{y2} = 0 \quad K_{8-11} = 0$$

$$\sum F_{z2} = 0 \quad F_5 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z2,j} = 0$$

$$K_{9-11} \cdot \delta_{11} + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot \Delta_z = 0 \quad K_{9-11} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot x_j$$

$$\sum M_{x2} = 0 \quad M_4 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z2,j} \cdot (1-c) \cdot h = 0$$

$$K_{10-11} \cdot \delta_{11} + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot \Delta_z \cdot (1-c) \cdot h = 0$$

$$K_{4-11} = -\sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot x_j \cdot c \cdot h$$

$$K_{10-11} = -\sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot x_j \cdot (1-c) \cdot h$$

$$\sum M_{y1} = 0 \quad K_{5-11} \cdot \delta_{11} + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z1,j} \cdot x_j + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x1,j} \cdot z_j = 0$$

$$\sum M_{y2} = 0 \quad K_{11-11} \cdot \delta_{11} - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{z2,j} \cdot x_j - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x2,j} \cdot z_j = 0$$

$$K_{5-11} \cdot \delta_{11} + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot \Delta_z \cdot x_j + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot \Delta_x \cdot z_j = 0$$

$$K_{11-11} \cdot \delta_{11} - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot \Delta_z \cdot x_j - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot \Delta_x \cdot z_j = 0$$

$$K_{5-11} = -\sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot z_j^2 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z1,j} \cdot x_j^2$$

$$K_{11-11} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot z_j^2 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \cdot x_j^2$$

$$\sum M_{z1} = 0 \quad M_3 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x1,j} \cdot c \cdot h = 0$$

$$\sum M_{z2} = 0 \quad M_6 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x2,j} \cdot (1-c) \cdot h = 0$$

$$K_{6-11} \cdot \delta_{11} - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot \Delta_x \cdot c \cdot h = 0$$

$$K_{12-11} \cdot \delta_{11} - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot \Delta_x \cdot (1-c) \cdot h = 0$$

$$K_{6-11} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot z_j \cdot c \cdot h$$

$$K_{12-11} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot z_j \cdot (1-c) \cdot h$$

Grado de libertad 12.

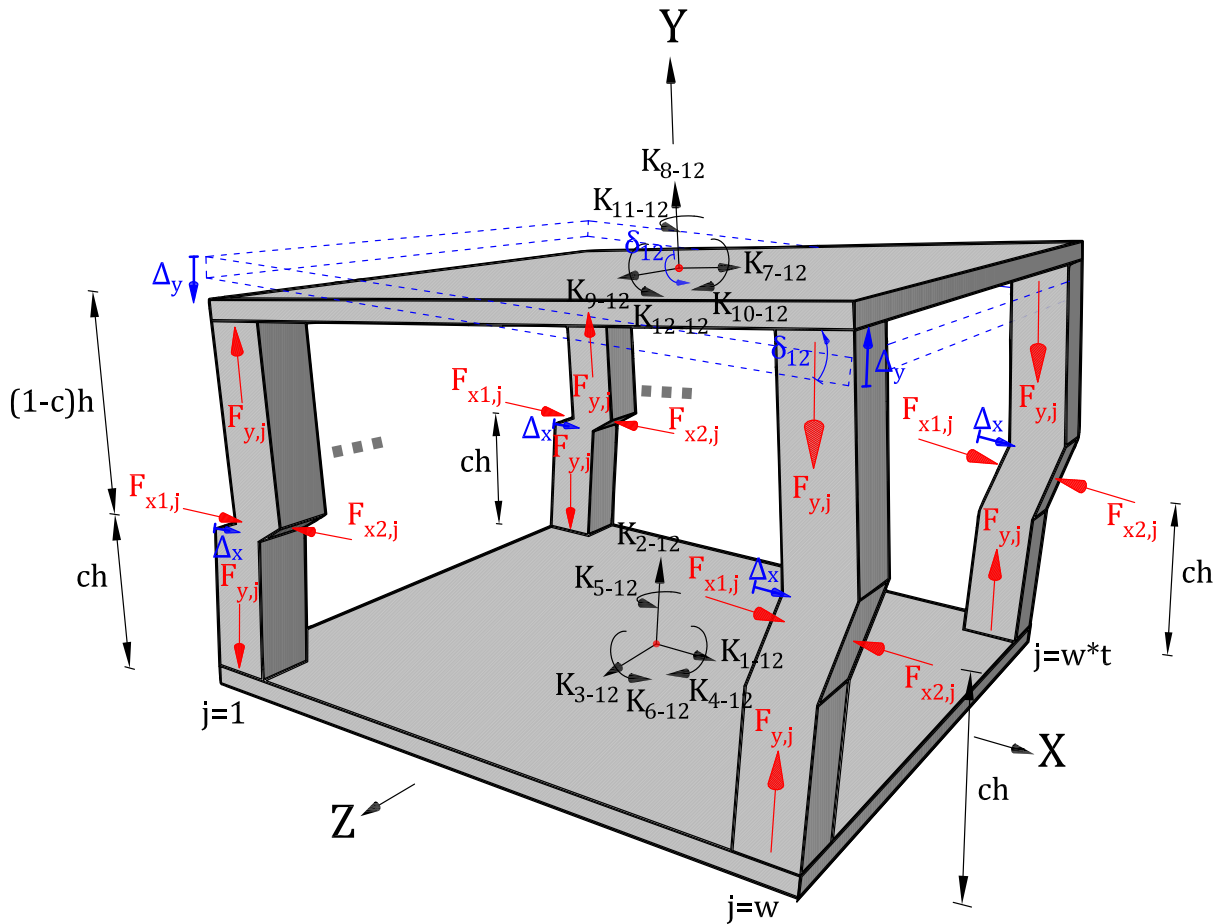


Figura A.14: Desplazamiento del grado de libertad 12, giro en “z” de la placa superior.

$$\Delta_{y,j} \approx \delta_{12} \cdot x_j \quad \Delta_x \approx \delta_{12} \cdot (1-c) \cdot h$$

Nodo 1

$$\Sigma F_{x1} = 0 \quad F_1 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x1,j} = 0$$

$$K_{1-12} \delta_{12} + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \Delta_x = 0 \quad K_{1-12} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot (1-c) \cdot h$$

$$\Sigma F_{y1} = 0 \quad F_2 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} = 0$$

$$K_{2-12} \cdot \delta_{12} + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot \Delta_y = 0 \quad K_{2-12} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot x_j$$

$$\Sigma F_{z1} = 0 \quad K_{3-12} = 0$$

$$\Sigma M_{x1} = 0 \quad K_{4-12} \cdot \delta_{12} + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} \cdot z_j = 0$$

$$K_{4-12} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot x_j \cdot z_j$$

$$\Sigma M_{y1} = 0 \quad K_{5-12} \cdot \delta_{12} + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x1,j} \cdot z_j = 0$$

$$K_{5-12} = - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot z_j \cdot (1-c) \cdot h$$

$$\Sigma M_{z1} = 0 \quad M_3 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x1,j} \cdot c \cdot h + \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} \cdot x_j = 0$$

$$K_{6-12} \cdot \delta_{12} - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot \Delta_x \cdot c \cdot h + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot \Delta_y \cdot x_j = 0$$

$$K_{6-12} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot (1-c) \cdot c \cdot h^2 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot x_j^2$$

Nodo 2

$$\Sigma F_{x2} = 0 \quad F_4 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x2,j} = 0$$

$$K_{7-12} \delta_{12} - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{z2,j} \Delta_z = 0 \quad K_{7-12} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot (1-c) \cdot h$$

$$\Sigma F_{y2} = 0 \quad F_5 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} = 0$$

$$K_{8-12} \cdot \delta_{12} - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot \Delta_y = 0 \quad K_{8-12} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot x_j$$

$$\Sigma F_{z2} = 0 \quad K_{9-12} = 0$$

$$\Sigma M_{z2} = 0 \quad K_{10-12} \cdot \delta_{12} - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} \cdot z_j$$

$$K_{10-12} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot x_j \cdot z_j$$

$$\Sigma M_{y2} = 0 \quad K_{11-12} \cdot \delta_{12} - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x2,j} \cdot z_j$$

$$K_{11-12} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot z_j \cdot (1-c) \cdot h$$

$$\Sigma M_{x2} = 0 \quad M_6 - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{x2,j} \cdot (1-c) \cdot h - \sum_{j=1}^{w \cdot t} F_{y,j} \cdot x_j = 0$$

$$K_{10-12} \cdot \delta_{12} - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x2,j} \cdot \Delta_x \cdot (1-c) \cdot h - \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot \Delta_y \cdot x_j = 0$$

$$K_{12-12} = \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{x1,j} \cdot (1-c)^2 \cdot h^2 + \sum_{j=1}^{w \cdot t} K_{y,j} \cdot x_j^2$$

Anexo B

B. Resultados Adicionales

B.1. Columnas Cuadradas de Hormigón Armado.

B.1.1. Columnas experimentales de [Mizoguchi et al., 1990].

Esta investigación describe un estudio experimental del comportamiento de la resistencia al corte de columnas cuadradas cortas de hormigón armado, $L/h = 2.5$, bajo cargas laterales uniaxiales y biaxiales. Se comparan diez ensayos experimentales cuya configuración se muestra en la Fig. B.1, junto con la discretización mínima necesaria de 7×7 prismas de hormigón armado para el modelo E-SFI-3D. Los diez ensayos se diferencian en cuatro tipos de acuerdo al valor de carga axial aplicada, dentro de los cuales, se distinguen tres tipos de ensayos según la dirección de carga pudiendo ser de 0 , 22.5 y 45° . Estos ensayos son parecidos a los de la investigación anterior, solo que ahora se añade un estribo adicional en cada dirección, lo que aumenta la cuantía transversal de las columnas de hormigón armado.

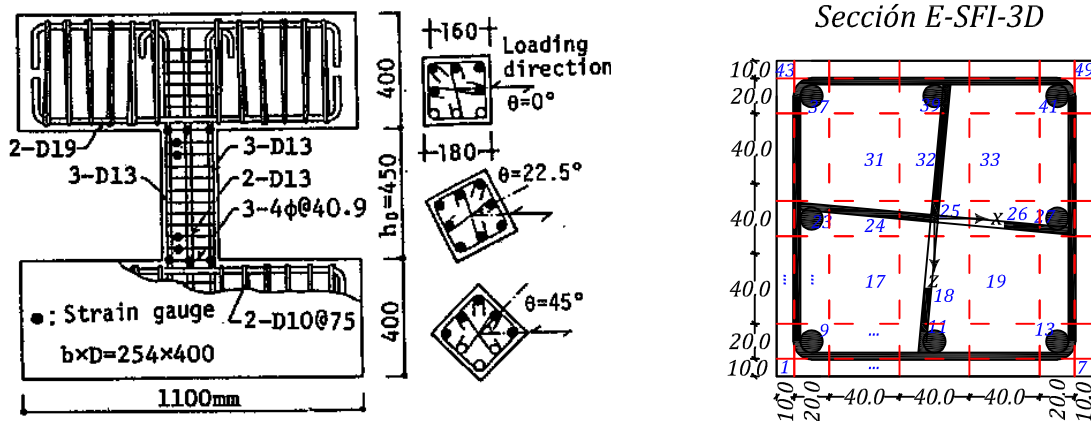


Figura B.1: Configuración de las columnas de [Mizoguchi et al., 1990], y discretización transversal para el modelo E-SFI-3D.

Las propiedades principales de las columnas de esta investigación se resumen en la Tabla. B.1, cuyos valores se utilizan en las leyes uniaxiales de los materiales del prisma. Para ello, el valor del hormigón confinado se presenta en la Tabla. B.2 suficiente para definir la ley uniaxial del hormigón, mientras que para definir las leyes uniaxiales del acero el módulo de elasticidad del refuerzo longitudinal es de: $E_{sy} = 170000 \text{ MPa}$, y del refuerzo transversal es igual a: $E_{s,x/z} = 200000 \text{ MPa}$,

y el factor b supuesto es de 0.01 para el acero longitudinal y de 0.008 para el acero transversal. En relación con el espaciamiento de los estribos, la altura del elemento en los extremos es de 40.9 mm y de los tres elementos en el centro es de 122.7 mm.

Tabla B.1: Propiedades principales de las columnas cuadradas de [Mizoguchi et al., 1990].

| Ensayo ID | $\frac{L_c}{h_c}$ | L_c , mm | h_c , mm | s , mm | ρ_l , % | ρ_t , % | $\frac{N}{f'_c \cdot A_g}$ | Ángulo de Carga | Refuerzo | | | | f'_c , Mpa |
|--------------|-------------------|---------------|---------------|-------------|-----------------|-----------------|----------------------------|-----------------------|--------------|----------------|-------------|----------------|-----------------|
| | | | | | | | | | Longitudinal | | Transversal | | |
| | | | | | | | | | Diá., mm | F_y , MPa | Diá., mm | F_y , MPa | |
| 0V04+ | 2.5 | 450 | 180 | 40.9 | 3.28 | 0.51 | 0.44 | 0° | 13 | 342 | 4 | 273.6 | 26.46 |
| 0V04- | | | | | | | 0 | | | | | | 26.46 |
| 0V15+ | | | | | | | 0.57 | | | | | | 25.8 |
| 0V15- | | | | | | | -0.114 | | | | | | 25.8 |
| 2V04+ | | | | | | | 0.385 | 22.5° | | | | | 30.6 |
| 2V04- | | | | | | | 0 | | | | | | 30.6 |
| 4V04+ | | | | | | | 0.4 | 45° | | | | | 29.5 |
| 4V04- | | | | | | | 0 | | | | | | 29.5 |
| 4V15+ | | | | | | | 0.52 | | | | | | 28.5 |
| 4V15- | | | | | | | -0.10 | | | | | | 28.5 |

Definido el modelo con las propiedades de cada ensayo, la [Tabla B.2](#) indica el valor de los parámetros calibrados y de los resultados obtenidos de cada ensayo. Se alcanza un promedio de la resistencia al corte y del inicio de degradación medida a la calculada de 0.93 y 1.42 con un coeficiente de variación de 0.07 y 0.21, respectivamente. Los resultados comparativos demuestran una alta fiabilidad del modelo para predecir la resistencia al corte de los ensayos de esta investigación, sin embargo, no es tan buena la predicción para el inicio de degradación.

Tabla B.2: Parámetros de calibración y comparación de resultados de las columnas cuadradas de [Mizoguchi et al., 1990].

| Ensayo ID | Parámetros de Calibración | | | | | Resultados | | | | | | | |
|-----------|---------------------------|------------|-----------------------|------------|-----------------------|--------------------------|----------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|---|---------|------------|
| | K_{SE} , kN m | α_x | $\tau_{max,xy}$, MPa | α_z | $\tau_{max,yz}$, MPa | V_{exp} , kN | V_{mod} , kN | $\frac{V_{exp}}{V_{mod}}$ | $\Delta_{0,9V_{exp}}$, mm | $\Delta_{0,9V_{mod}}$, mm | $\frac{\Delta_{0,9V_{exp}}}{\Delta_{0,9V_{mod}}}$ | # Pasos | Tiempo, sg |
| 0V04+ | 4500 | 0.011 | 70 | - | - | 131.5 | 142.7 | 0.92 | 5.44 | 3.6 | 1.51 | 755 | 1080 |
| 0V04- | 3000 | 0.003 | 45 | - | - | 91.5 | 100 | 0.92 | 6.3 | 5.4 | 1.17 | 755 | 777 |
| 0V15+ | 4500 | 0.02 | 70 | - | - | 134 | 140.6 | 0.95 | 4.5 | 3.5 | 1.29 | 755 | 1032 |
| 0V15- | 2140 | - | - | - | - | 68.8 | 66.4 | 1.04 | 9.40 | 5 | 1.88 | 755 | 989 |
| 2V04+ | 5500 | 0.01 | 65 | 0.004 | 27 | 136.2 | 157 | 0.87 | 4.47 | 3.6 | 1.24 | 551 | 724 |
| 2V04- | 3300 | 0.0028 | 42 | 0.0015 | 20 | 90.8 | 94.3 | 0.96 | 5.14 | 4.6 | 1.12 | 551 | 993 |
| 4V04+ | 5000 | 0.008 | 50 | 0.008 | 50 | 127.5 | 151.6 | 0.84 | 5.2 | 4.5 | 1.16 | 413 | 640 |
| 4V04- | 3000 | 0.0022 | 30 | 0.0022 | 30 | 92 | 104.5 | 0.88 | 7.0 | 5 | 1.4 | 630 | 986 |
| 4V15+ | 4500 | 0.015 | 50 | 0.015 | 50 | 125 | 141.7 | 0.88 | 5.0 | 3.5 | 1.43 | 413 | 835 |
| 4V15- | 2500 | - | - | - | - | 75.6 | 75.24 | 1 | 7.9 | 3.9 | 2.03 | 413 | 1021 |
| | | | | | | Promedio | | 0.93 | | | 1.42 | | |
| | | | | | | Coeficiente de variación | | 0.07 | | | 0.21 | | |

$$f'_{cc} = f'_c + 6000 \text{ kPa}$$

A continuación, en una serie de figuras se compara el comportamiento histerético de los ensayos y del modelo que comparten la misma carga axial pero se distinguen únicamente por la dirección de carga lateral. Por ejemplo, la Fig. B.2 muestra la respuesta de la columna corta con una carga de compresión cerca del 40% de $f'_c \cdot A_g$. En donde, los datos experimentales muestran que las columnas desarrollan prácticamente la misma resistencia al corte, a pesar de que el valor de f'_c llega a aumentar un 16%; lo que hace que el modelo calcule una mayor resistencia para el ensayo con una carga de 22.5°

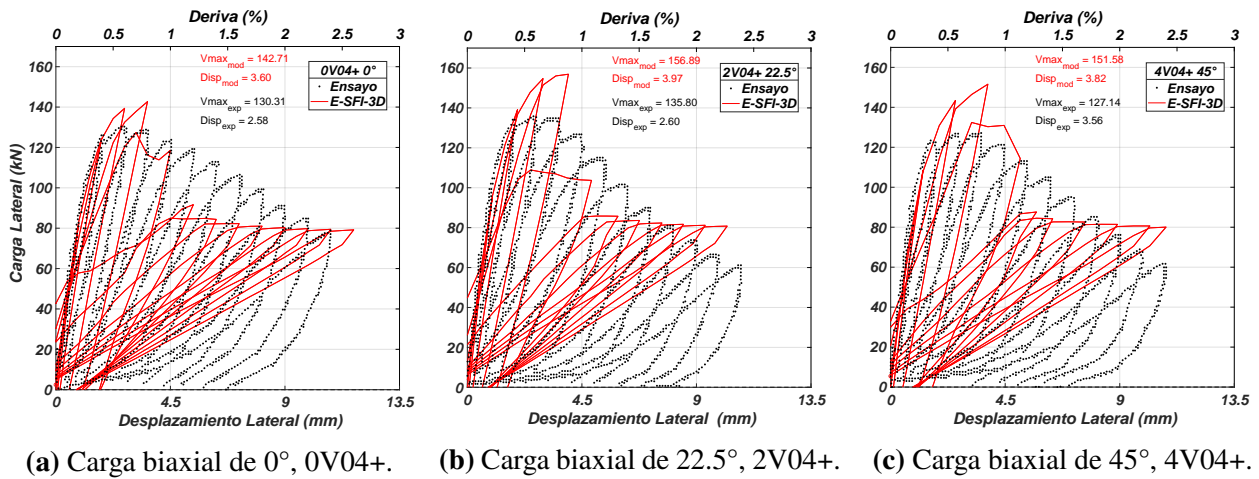
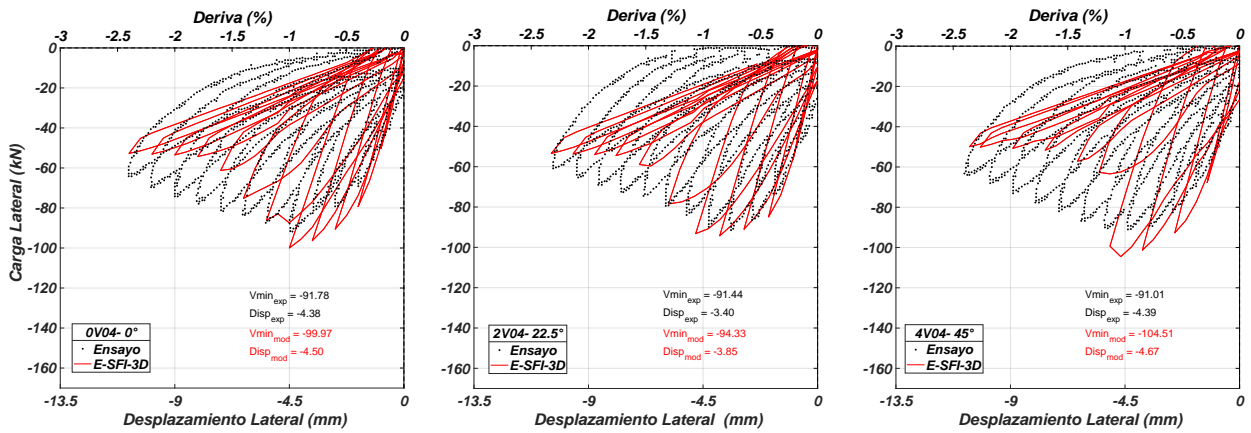


Figura B.2: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “04+” con una carga de compresión cerca del 40% de $f'_c \cdot A_g$ y una carga lateral biaxial de 0, 22.5 y 45°.

El comportamiento histerético de los ensayos y del modelo para una carga axial de cero se muestran en la Fig. B.3 comparado entre cargas laterales de 0, 22.5 y 45°. Tanto la resistencia al corte del modelo y de los ensayos alcanzan valores similares para las tres direcciones, y en sí el modelo predice valores similares a los datos del ensayo. En cuanto al inicio de degradación, el

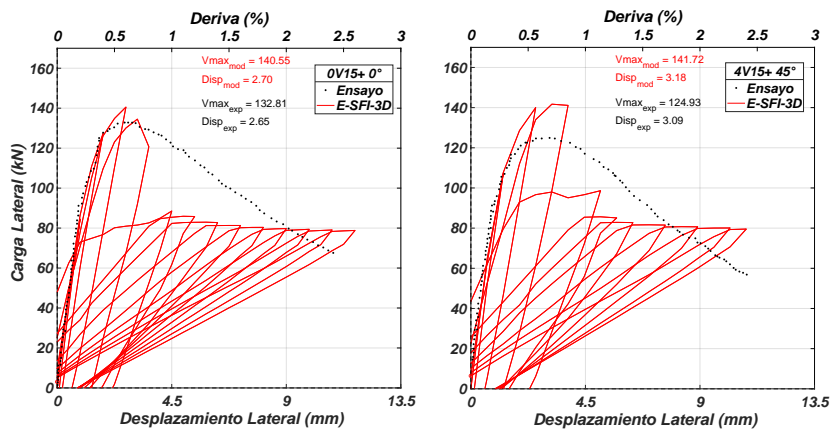
modelo se ajusta a los datos experimentales para las columnas en 0 y 22.5, pero tienen un mayor error para la de 45°.



(a) Carga biaxial de 0°, 0V04-. (b) Carga biaxial de 22.5°, 2V04-. (c) Carga biaxial de 45°, 4V04-.

Figura B.3: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “04-” con una carga axial de cero y una carga lateral biaxial de 0, 22.5 y 45°.

El comportamiento histerético de los ensayos y del modelo para una carga de compresión cercana al 55 % de $f'_c \cdot A_g$ se muestran en la Fig. B.4 comparado entre cargas laterales de 0 y 45°. La resistencia al corte predicha por el modelo es similar a la expuesta por el ensayo en 0°, pero en 45° solo el modelo mantiene prácticamente ese mismo valor. Por otro lado, la predicción de inicio de degradación no es confiable por parte del modelo, a causa de la drástica degradación del modelo.



(a) Carga biaxial de 0°, 0V15+. (b) Carga biaxial de 45°, 4V15+.

Figura B.4: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “15+” con una carga axial de compresión cerca del 55 % de $f'_c \cdot A_g$ y una carga lateral biaxial de 0 y 45°.

El comportamiento histerético de los ensayos y del modelo para una carga de tracción cercana al 10 % de $f'_c \cdot A_g$ se muestran en la Fig. B.5 comparado entre cargas laterales de 0 y 45°. La predicción de resistencia del modelo se ajusta a los datos experimentales, pero no así la predicción del inicio de degradación teniendo en cuenta que no se tiene la acción de dovola. Sin embargo, existe un 10 % de aumento en la resistencia al corte del ensayo biaxial en 45° en comparación con el de 0°.

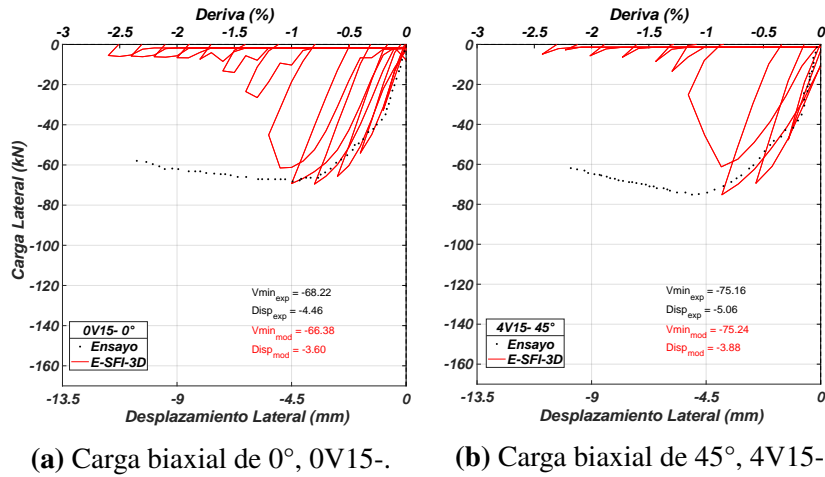


Figura B.5: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “15-” con una carga axial de tracción cerca del 10 % de $f'_c \cdot A_g$ y una carga lateral biaxial de 0 y 45°.

Para el análisis del efecto de corte biaxial se construye la Fig. B.6, indicando la resistencia al corte vs la dirección de carga de los resultados experimentales en la Fig. B.6.(a) y para los resultados del modelo en la Fig. B.6.(b). Los resultados experimentales exhiben un buen ajuste a la curva de interacción, especialmente, para los ensayos con 0 y 40 % de carga de compresión. Mientras que los resultados biaxiales del modelo presentan un mayor desfase a la curva de interacción pero debido al aumento del valor de f'_c para los casos biaxiales.

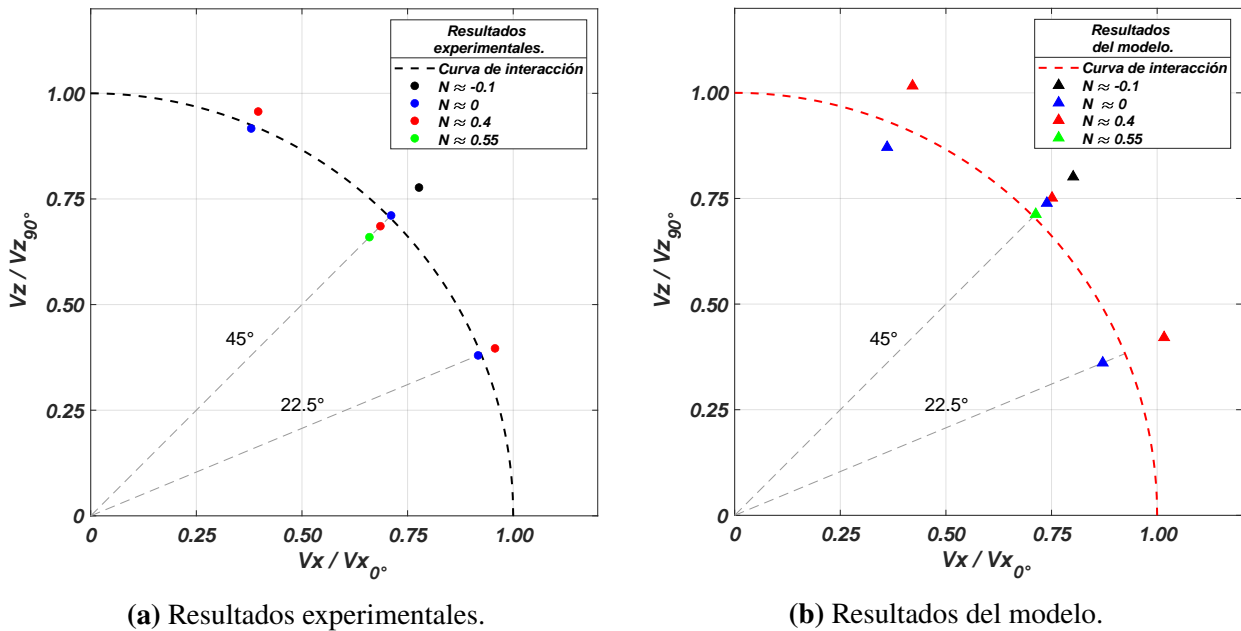


Figura B.6: Resistencia al corte normalizada vs dirección de carga de las columnas de [Mizoguchi et al., 1990].

B.1.2. Columnas experimentales de [Joh and Shibata, 1984].

Esta investigación describe un estudio experimental del comportamiento de la resistencia al corte de columnas cuadradas cortas de hormigón armado, $L/h = 3$, bajo cargas laterales uniaxiales

y biaxiales. Se comparan nueve ensayos experimentales cuya configuración se muestra en la Fig. B.7, junto con la discretización mínima necesaria de 7x7 prismas de hormigón armado para el modelo E-SFI-3D. Los nueve ensayos se diferencian en tres tipos de acuerdo al valor de carga axial aplicada, dentro de los cuales, se distinguen tres tipos de ensayos según la dirección de carga.

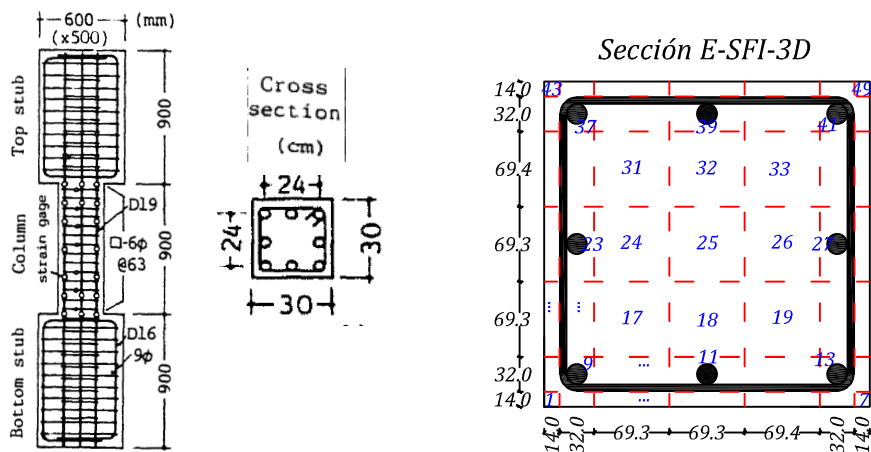


Figura B.7: Configuración de las columnas de [Joh and Shibata, 1984], y discretización transversal para el modelo E-SFI-3D.

Las propiedades principales de las columnas de esta investigación se resumen en la Tabla. B.3, cuyos valores se utilizan en las leyes uniaxiales de los materiales del prisma. Para ello, el valor del hormigón confinado se presenta en la Tabla. B.4 suficiente para definir la ley uniaxial del hormigón, mientras que para definir las leyes uniaxiales del acero, el módulo de elasticidad del refuerzo longitudinal y transversal es de: $E_s = 200000 \text{ MPa}$, y el factor b supuesto es de 0.008 para el acero longitudinal y de 0.004 para el transversal. En relación con el espaciamiento de los estribos, la altura del elemento en los extremos es de 63 mm y de los tres elementos en el centro es de 258 mm.

Tabla B.3: Propiedades principales de las columnas cuadradas de [Joh and Shibata, 1984].

| Ensayo ID | $\frac{L_c}{h_c}$ | L_c , mm | h_c , mm | s , mm | ρ_l , % | ρ_t , % | $\frac{N}{f'_c \cdot A_g}$ | Ángulo de Carga | Refuerzo | | | | f'_c , Mpa |
|-----------|-------------------|------------|------------|----------|--------------|--------------|----------------------------|-----------------|--------------|-------------|-------------|-------------|--------------|
| | | | | | | | | | Longitudinal | | Transversal | | |
| | | | | | | | | | Diá., mm | F_y , MPa | Diá., mm | F_y , MPa | |
| SS0N0 | 3 | 900 | 300 | 63 | 2.5 | 0.3 | 0 | 0° | 19 | 390 | 6 | 307 | 23 |
| SS0N1 | | | | | | | 0.057 | | | | | | 23.33 |
| SS0N2 | | | | | | | 0.33 | | | | | | 23.24 |
| SS22.5N0 | | | | | | | 0 | 22.5° | | | | | 22.4 |
| SS22.5N1 | | | | | | | 0.057 | | | | | | 21.87 |
| SS22.5N2 | | | | | | | 0.33 | | | | | | 24.71 |
| SS45N0 | | | | | | | 0 | 45° | | | | | 26.87 |
| SS45N1 | | | | | | | 0.057 | | | | | | 23.73 |
| SS45N2 | | | | | | | 0.33 | | | | | | 25.9 |

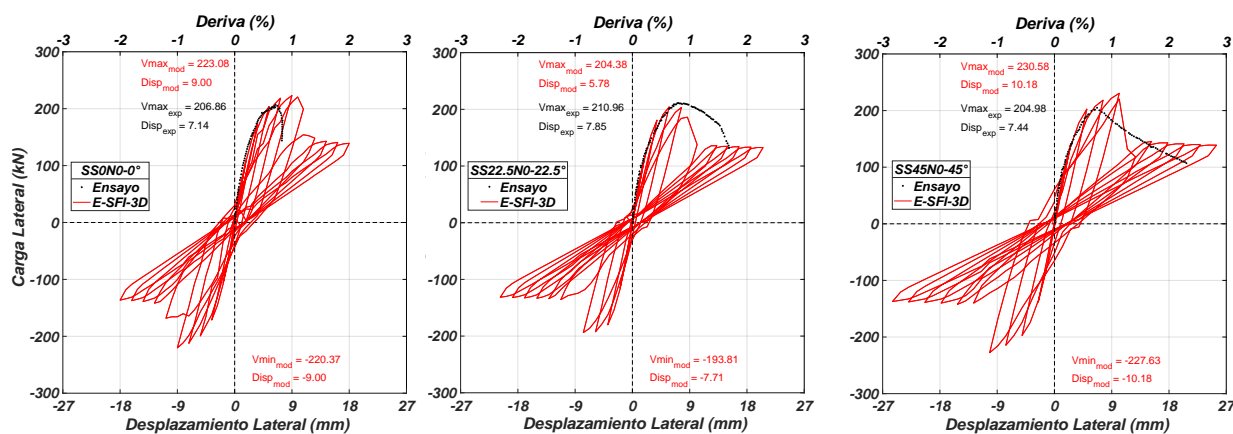
Definido el modelo con las propiedades de cada ensayo, la Tabla. B.4 indica el valor de los parámetros calibrados y de los resultados obtenidos de cada ensayo. Se alcanza un promedio de

la resistencia al corte y del inicio de degradación medida a la calculada de 0.92 y 0.97 con un coeficiente de variación de 0.06 y 0.21, respectivamente. Los resultados comparativos demuestran una alta fiabilidad del modelo para predecir la resistencia al corte de los ensayos de esta investigación y del inicio de degradación pero con una mayor variación para este último.

Tabla B.4: Parámetros de calibración y comparación de resultados de las columnas cuadradas de [Joh and Shibata, 1984].

| Ensayo ID | Parámetros de Calibración | | | | | Resultados | | | | | | | |
|-------------------------------------|---------------------------|------------|-----------------------|------------|-----------------------|----------------|----------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|---|---------|------------|
| | K_{SE} , kN m | α_x | $\tau_{max,xy}$, MPa | α_z | $\tau_{max,yz}$, MPa | V_{exp} , kN | V_{mod} , kN | $\frac{V_{exp}}{V_{mod}}$ | $\Delta_{0.9V_{exp}}$, mm | $\Delta_{0.9V_{mod}}$, mm | $\frac{\Delta_{0.9V_{exp}}}{\Delta_{0.9V_{mod}}}$ | # Pasos | Tiempo, sg |
| SS0N0 | 16000 | 0.003 | 55 | - | - | 207.9 | 223 | 0.93 | 7.35 | 10.8 | 0.68 | 461 | 797 |
| SS0N1 | 20000 | 0.005 | 55 | - | - | 259.9 | 278 | 0.93 | 8.8 | 10.1 | 0.87 | 755 | 1307 |
| SS0N2 | 20000 | 0.01 | 65 | - | - | 262.8 | 284 | 0.93 | 8.2 | 8.4 | 0.98 | 755 | 1187 |
| SS22.5N0 | 16000 | 0.0028 | 50 | 0.001 | 20 | 209.9 | 204.4 | 1.03 | 11.6 | 8.6 | 1.35 | 461 | 1258 |
| SS22.5N1 | 17000 | 0.0046 | 50 | 0.002 | 20 | 229.5 | 250.4 | 0.92 | 9.8 | 8.2 | 1.2 | 461 | 696 |
| SS22.5N2 | 20000 | 0.009 | 60 | 0.004 | 25 | 257 | 299.3 | 0.86 | 8.0 | 7.5 | 1.07 | 461 | 1010 |
| SS45N0 | 13000 | 0.002 | 40 | 0.002 | 40 | 201 | 230.6 | 0.87 | 8.9 | 10.4 | 0.86 | 461 | 1177 |
| SS45N1 | 17000 | 0.0035 | 40 | 0.0035 | 40 | 258 | 267 | 0.97 | 7.4 | 8.8 | 0.84 | 461 | 942 |
| SS45N2 | 20000 | 0.007 | 45 | 0.007 | 45 | 257 | 300 | 0.86 | 7.5 | 8.7 | 0.86 | 461 | 1270 |
| Promedio | | | | | | | | | | 0.92 | | | |
| Coeficiente de variación | | | | | | | | | | 0.06 | | | |
| $f'_{cc} = f'_c + 5400 \text{ kPa}$ | | | | | | | | | | 0.97 | | | |
| | | | | | | | | | | 0.21 | | | |

De igual manera que antes, se compara el comportamiento histerético de los ensayos y del modelo según la dirección de carga lateral. La Fig. B.8 muestra el comportamiento de la columna corta sin carga axial y una carga lateral en 0, 22.5 y 45°. La resistencia al corte de los ensayos son similares para las tres cargas biaxiales, mientras que la resistencia al corte del modelo son ligeramente diferentes en parte por la variación de f'_c , y en general el modelo predice correctamente el valor de resistencia de los ensayos, pero no así la predicción del inicio de degradación.

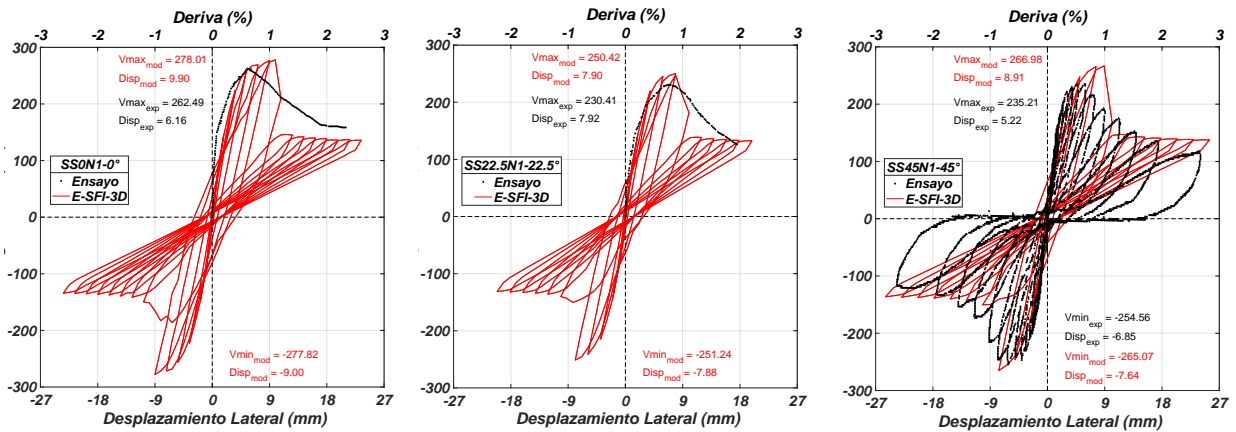


(a) Carga biaxial de 0°, SS0N0. (b) Carga biaxial de 22.5°, SS22.5N0. (c) Carga biaxial de 45°, SS45N0.

Figura B.8: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “N0” con una carga axial de cero y una carga lateral biaxial en diferentes direcciones.

El comportamiento histerético de los ensayos y del modelo para una carga de compresión cercana al 17% de $f'_c \cdot A_g$ se muestran en la Fig. B.9 comparado entre cargas laterales de 0, 22.5

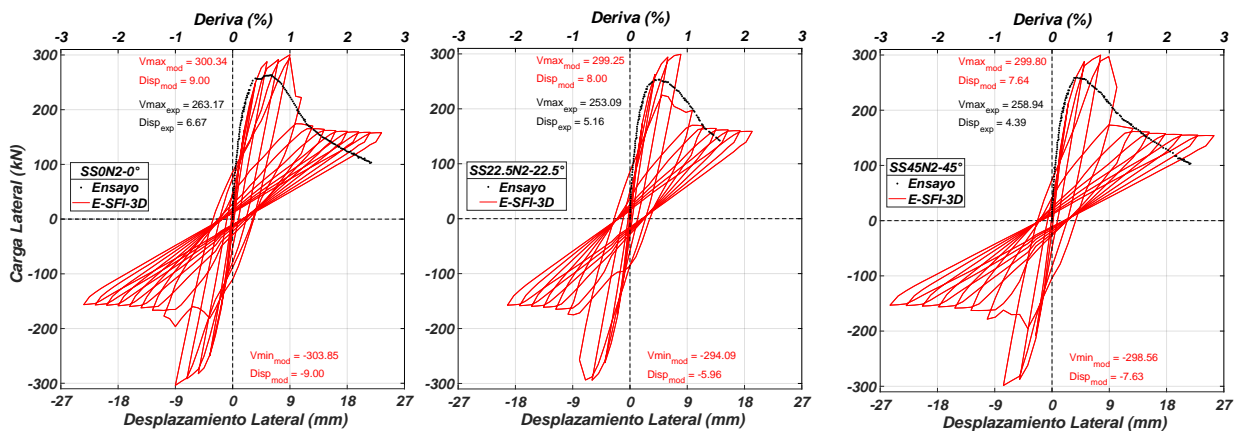
y 45°. La resistencia al corte del ensayo se reduce en un 12 % para los especímenes en 22.5 y 45° en comparación con el ensayo en 0°, y el modelo también presenta un comportamiento parecido para las cargas biaxiales, el cual muestra una buena relación con los datos experimentales. Por otra parte, el modelo no predice de buena manera el punto de inicio de degradación, porque los ensayos presentan una degradación de la respuesta uniforme, sin embargo, el comportamiento histerético general del modelo, como se observa en la Fig. B.9.(c), se ajusta a la forma de la respuesta del ensayo, con un ligero estrangulamiento en el origen, pero con una mayor pendiente para la descarga de los últimos ciclos.



(a) Carga biaxial de 0°, SS0N1. (b) Carga biaxial de 22.5°, SS22.5N1. (c) Carga biaxial de 45°, SS45N1.

Figura B.9: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “N1” con una carga axial de compresión del 16.7 % de $f'_c \cdot A_g$ y una carga lateral biaxial de 0, 22.5 y 45°.

El comportamiento histerético de los ensayos y del modelo para una carga de compresión cercana al 33.3 % de $f'_c \cdot A_g$ se muestran en la Fig. B.10 comparado entre cargas laterales de 0, 22.5 y 45°. La resistencia al corte del modelo y de los datos experimentales mantienen prácticamente el mismo valor para los tres casos biaxiales, con una diferencia del 14 % de sobre-resistencia predicha por el modelo. El punto de inicio de degradación predicho por el modelo se ajusta a los datos experimentales, pero no a la forma constante de degradación del ensayo.



(a) Carga biaxial de 0°, SS0N2. (b) Carga biaxial de 22.5°, SS22.5N2. (c) Carga biaxial de 45°, SS45N2.

Figura B.10: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de los ensayos tipo “N2” con una carga axial de compresión del 33.33 % de $f'_c \cdot A_g$ y una carga lateral biaxial de 0, 22.5 y 45°.

Para el análisis del efecto de corte biaxial se construye la Fig. B.11, indicando la resistencia al corte vs la dirección de carga de los resultados experimentales en la Fig. B.11.(a) y para los resultados del modelo en la Fig. B.11.(b). Los resultados experimentales exhiben un buen ajuste a la curva de interacción, excepto, por los ensayos con una carga axial de compresión del 16.6 %, para los otros dos tipos es claro observar un arco de círculo. Por otro lado, los resultados biaxiales del modelo presentan un mayor desfase a la curva de interacción, pero si forman el arco de círculo, excepto por los especímenes con una carga axial de cero ya que la el valor de f'_c aumenta un 17 %.

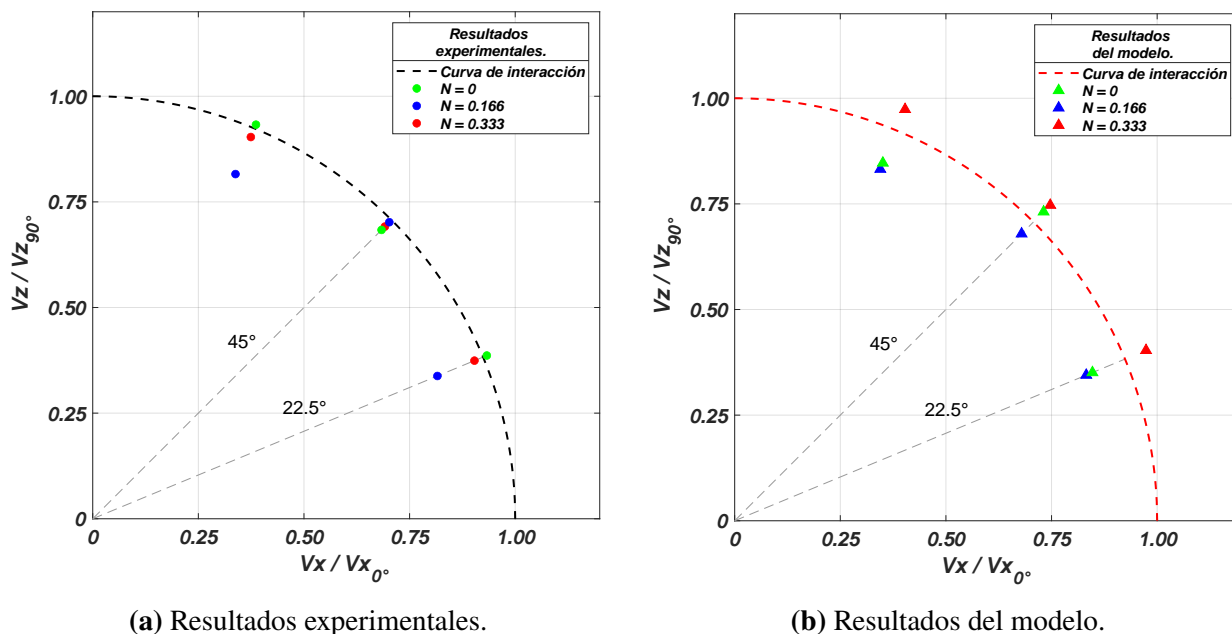


Figura B.11: Resistencia al corte normalizada vs dirección de carga de las columnas de [Joh and Shibata, 1984].

B.2. Columnas Rectangulares de Hormigón Armado.

B.2.1. Columnas experimentales de [Joh and Shibata, 1984].

Esta investigación describe un estudio experimental del comportamiento de la resistencia al corte de una columna rectangular corta de hormigón armado, bajo cargas laterales uniaxiales y biaxiales de 0, 30, 60 y 90°. La configuración del ensayo y de la sección transversal se muestra en la Fig. B.12 junto con la discretización transversal de 9x7 prismas para el modelo E-SFI-3D.

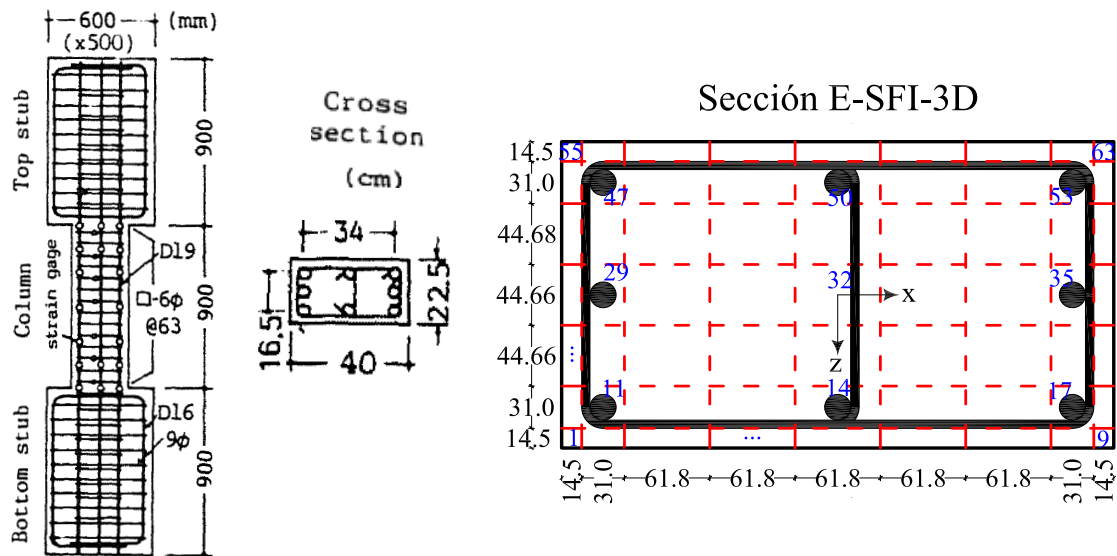


Figura B.12: Configuración de las columnas de [Joh and Shibata, 1984], y discretización transversal para el modelo E-SFI-3D.

Las propiedades principales de las columnas de estas investigaciones se resumen en la [Tabla B.5](#), cuyos valores se utilizan en las leyes uniaxiales de los materiales del prisma. Para ello, el valor del hormigón confinado se presenta en la [Tabla B.6](#) suficiente para definir la ley uniaxial del hormigón, mientras que para definir las leyes uniaxiales del acero se utilizan los mismos valores de la sección [B.1.2](#). En relación con el espaciamiento de los estribos, la altura del elemento en los extremos es de 71 mm , según lo reportado en la literatura a diferencia de lo que se muestra en la [Fig. B.12](#), y de los tres elementos en el centro es de 252.7 mm .

Tabla B.5: Propiedades principales de las columnas rectangulares de [Joh and Shibata, 1984].

| Ensayo ID | $\frac{L_c}{h_{ex/z}}$ | L_c , mm | h_{ex} , mm | h_{cz} , mm | s , mm | ρ_l , % | ρ_{tx} , % | ρ_{tz} , % | $\frac{N}{f'_c \cdot A_g}$ | Ángulo de Carga | Refuerzo | | | | f'_c , Mpa |
|-----------|------------------------|------------|---------------|---------------|----------|--------------|-----------------|-----------------|----------------------------|-----------------|--------------|-------------|-------------|-------------|--------------|
| | | | | | | | | | | | Longitudinal | | Transversal | | |
| | | | | | | | | | | | Diá., mm | F_y , MPa | Diá., mm | F_y , MPa | |
| SR0N1 | 2.3/4 | 900 | 400 | 225 | 71 | 2.5 | 0.35 | 0.3 | 0.17 | 0° | 19 | 390 | 6 | 307 | 23.6 |
| SR30N1 | | | | | | | | | | 30° | | | | | 25.0 |
| SR60N1 | | | | | | | | | | 60° | | | | | 26.3 |
| SR90N1 | | | | | | | | | | 90° | | | | | 24.8 |

Definido el modelo con las propiedades de cada ensayo, la [Tabla B.6](#) indica el valor de los parámetros calibrados y de los resultados obtenidos de cada ensayo. El promedio en la predicción de resistencia del modelo es de 0.85 y del inicio de degradación es de 1.04 con unos coeficientes de variación de 0.07 y 0.26, respectivamente. Los resultados comparativos demuestran una alta precisión por parte del modelo para predecir el comportamiento histerético de los ensayos.

Tabla B.6: Parámetros de calibración y comparación de resultados de las columnas rectangulares de [Joh and Shibata, 1984].

| Especimen ID | Parámetros de Calibración | | | | | | Resultados | | | | | | | |
|-----------------------------|---------------------------|------------------|------------|-----------------------|------------|-----------------------|--------------------------|----------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|---|---------|------------|
| | K_{SEX} , kN m | K_{SEZ} , kN m | α_x | $\tau_{max,xy}$, MPa | α_z | $\tau_{max,yz}$, MPa | V_{exp} , kN | V_{mod} , kN | $\frac{V_{exp}}{V_{mod}}$ | $\Delta_{0.9V_{exp}}$, mm | $\Delta_{0.9V_{mod}}$, mm | $\frac{\Delta_{0.9V_{exp}}}{\Delta_{0.9V_{mod}}}$ | # Pasos | Tiempo, sg |
| SR0N1 | 28000 | 20000 | 0.005 | 60 | - | - | 266 | 334 | 0.8 | 8.0 | 6.3 | 1.27 | 755 | 1224 |
| SR30N1 | 28000 | 20000 | 0.0043 | 52 | 0.0025 | 30 | 242 | 296 | 0.82 | 10.5 | 8.4 | 1.25 | 441 | 997 |
| SR60N1 | 28000 | 20000 | 0.0025 | 25 | 0.0043 | 43 | 211 | 251 | 0.84 | 14.6 | 16.7 | 0.87 | 533 | 1181 |
| SR90N1 | 28000 | 20000 | - | - | 0.001 | 40 | 217 | 232 | 0.94 | 11.6 | 15.5 | 0.75 | 755 | 932 |
| | | | | | | | Promedio | | 0.85 | | | 1.04 | | |
| $f'_{cc} = f'_c + 5000$ kPa | | | | | | | Coeficiente de variación | | 0.07 | | | 0.26 | | |

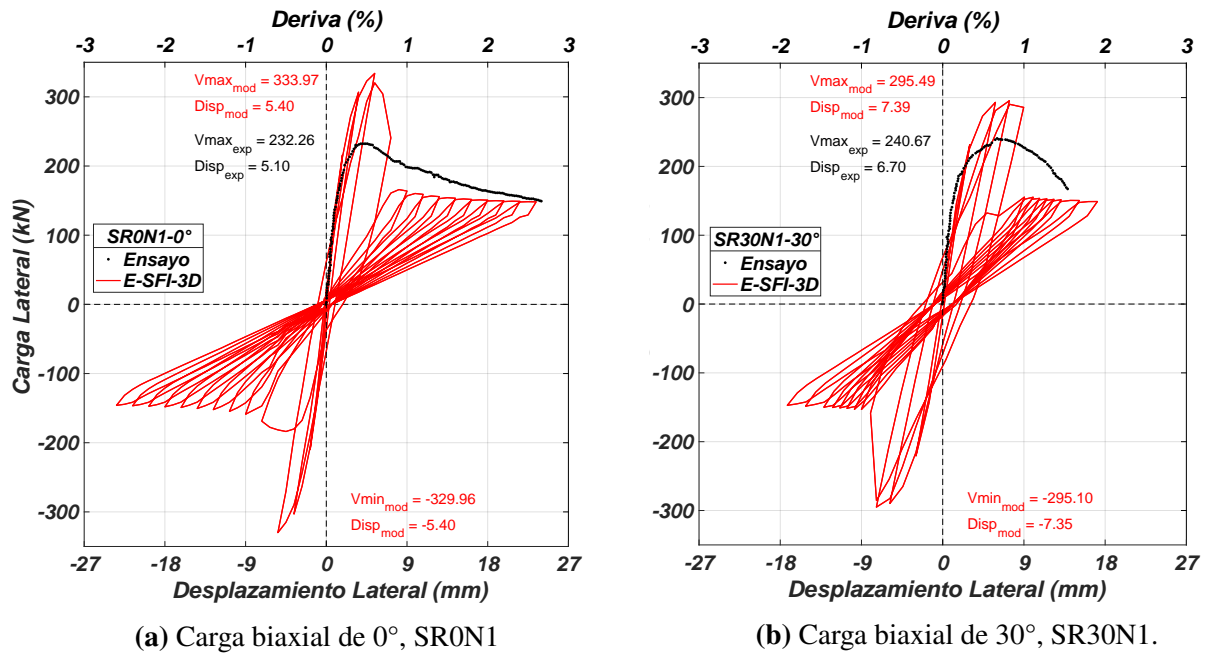
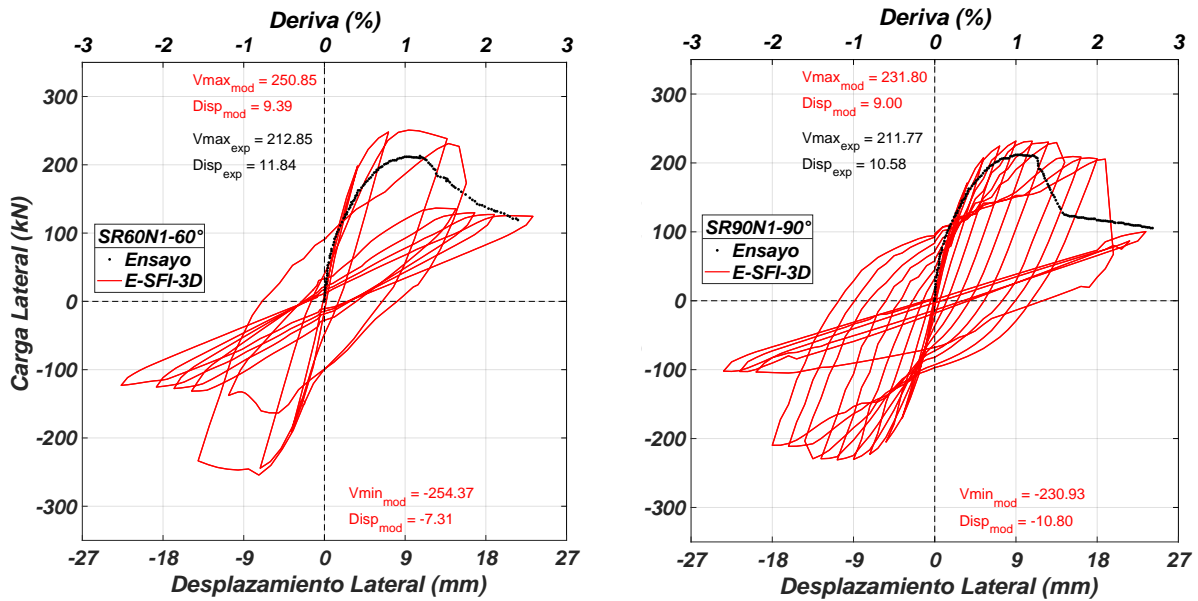


Figura B.13: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de la columna rectangular.



(c) Carga biaxial de 60°, SR60N1

(d) Carga biaxial de 90°, SR90N1

Figura B.13: Respuesta del modelo E-SFI-3D vs datos experimentales de la columna rectangular.

Como se esperaba, los valores de resistencia última al corte tanto del modelo como de los datos experimentales se ajustan a la curva de interacción elíptica.

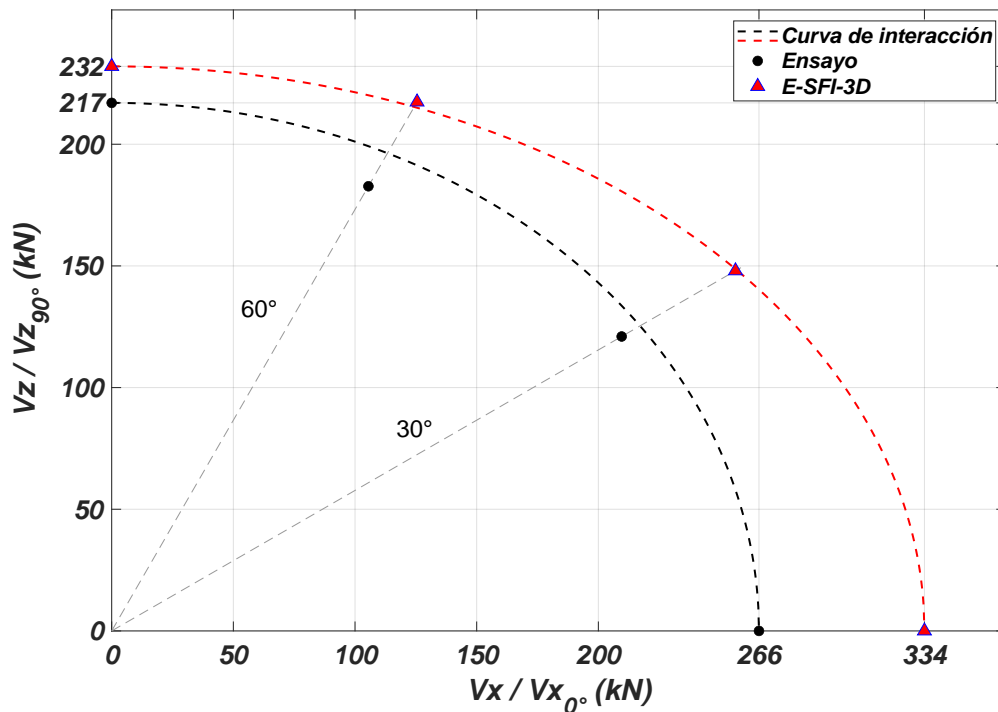


Figura B.14: Resistencia al corte vs dirección de carga de las columnas rectangulares de [Joh and Shibata, 1984]

Anexo C

C. Manual de Usuario, Modelo E-SFI-3D

Descripción:

El comando E-SFI-3D se utiliza para construir un modelo de elemento tridimensional de dos nodos con doce grados de libertad con la interacción de flexión-corte-axial mediante prismas de hormigón armado. El comportamiento implementado en cada dirección ortogonal, (“x” y “z”), mantiene los conceptos de la mecánica del modelo E-SFI 2D, [López et al., 2021], el cual captura la interacción de flexión-corte-axial mediante paneles de hormigón armado completando el campo de deformaciones mediante una expresión calibrada para ε_x , la cual también se utiliza para la deformación horizontal en “z”, ε_z , dentro del modelo 3D. El elemento E-SFI-3D, ver Fig. C.1, incorpora un comportamiento 3D de prisma de hormigón armado descrito por un modelo de ángulo que rota (RAM3D), [Vecchio and Collins, 1986], [Pang and Hsu, 1995], para el material 3D.

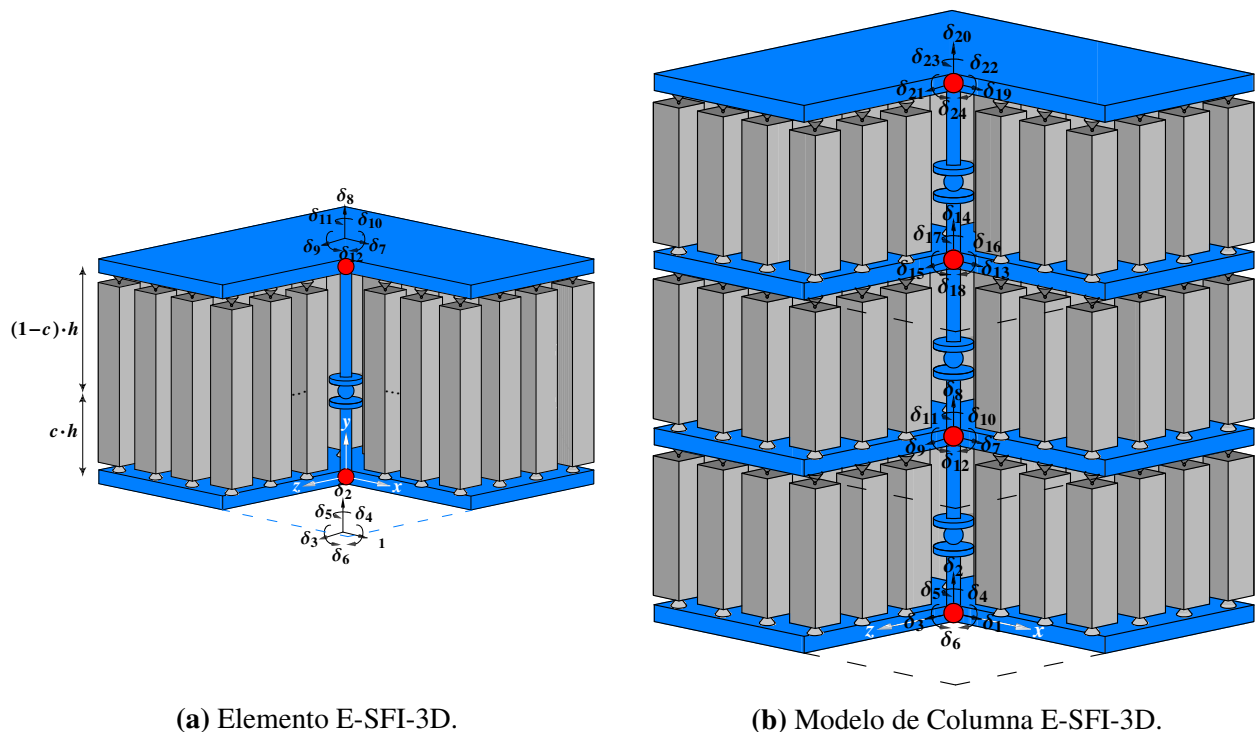


Figura C.1: Enfoque de modelado tridimensional utilizando elementos E-SFI-3D.

El material 3D llamado, **RAM3D**, utiliza un enfoque de ángulo que rota para calcular las tensio-

nes del hormigón dentro del prisma como se muestra en la Fig. C.2, calculando las tensiones con la ley constitutiva del hormigón usando las deformaciones principales en las direcciones principales, por lo tanto se obtienen tensiones principales del hormigón. Las tensiones del acero se calculan con las leyes constitutivas del acero usando las deformaciones normales. Aunque la relación tensión-deformación del hormigón utilizada en el RAM3D es fundamentalmente de naturaleza uniaxial, también incorpora el ablandamiento por compresión tridimensional del hormigón, y el efecto de acción de dovela según la sección 4.3.

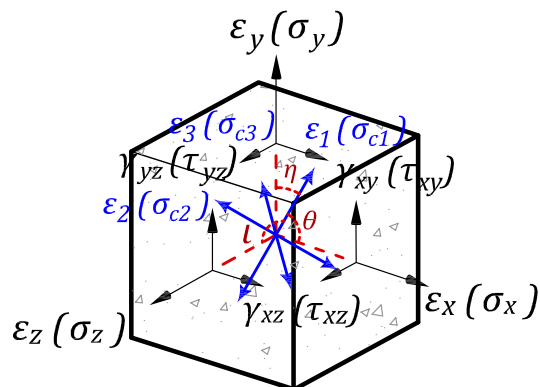


Figura C.2: Enfoque de ángulo que rota para calcular las tensiones del hormigón.

Parámetros de ingreso del Material 3D:

Los siguientes parámetros definen el comportamiento tridimensional de un prisma de H°. A.

nDMaterial RAM3D \$matTag \$rho \$sX \$sY \$sZ \$conc \$rouX \$rouY \$rouZ \$tmaxX \$alphaX \$tmaxZ \$alphaZ \$ec

| | |
|-----------------|---|
| \$matTag | Unique nDMaterial tag |
| \$rho | Material density |
| \$sX | Tag of uniaxialMaterial simulating horizontal (x) reinforcement |
| \$sY | Tag of uniaxialMaterial simulating horizontal (y) reinforcement |
| \$sZ | Tag of uniaxialMaterial simulating horizontal (z) reinforcement |
| \$conc | Tag of uniaxialMaterial simulating concrete |
| \$rouX | Reinforcing ratio in horizontal (x) direction ($rouX = A_{s,x}/A_{gross,x}$) |
| \$rouY | Reinforcing ratio in horizontal (x) direction ($rouY = A_{s,y}/A_{gross,y}$) |
| \$rouZ | Reinforcing ratio in horizontal (x) direction ($rouZ = A_{s,z}/A_{gross,z}$) |
| \$tmaxX | Maximum shear stress of longitudinal reinforcement dowel action in X direction |
| \$alphaX | Stiffness coefficient of longitudinal reinforcement dowel action in X direction |
| \$tmaxZ | Maximum shear stress of longitudinal reinforcement dowel action in Z direction |
| \$alphaZ | Stiffness coefficient of longitudinal reinforcement dowel action in Z direction |
| \$ec | concrete strain at maximum strength (negative value) |

Parámetros de salida del Material 3D:

Los siguientes resultados están disponibles para cada modelo de prisma de H°. A., *RAM3D*:

| | |
|--------------------------------|---|
| prism_strain | Strains $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$ |
| prism_stress | Resulting prism stresses $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ |
| prism_stress_concrete | Resulting prism concrete stresses $\sigma_{xc}, \sigma_{yc}, \sigma_{zc}, \tau_{yzc}, \tau_{xzc}, \tau_{xyc}$ |
| prism_stress_steel | Resulting prism steel stresses $\sigma_{xs}, \sigma_{ys}, \sigma_{zs}, \tau_{yzs}, \tau_{xzs}, \tau_{xys}$ |
| strain_stress_steelX | Uniaxial strain and stress of horizontal reinforcement in X $\varepsilon_x, \sigma_{xxs}$ |
| strain_stress_steelY | Uniaxial strain and stress of vertical reinforcement $\varepsilon_y, \sigma_{yys}$ |
| strain_stress_steelZ | Uniaxial strain and stress of horizontal reinforcement in Z $\varepsilon_z, \sigma_{zzs}$ |
| strain_stress_concrete1 | Uniaxial strain and stress of concrete principal direction 1 (High) $\varepsilon_{c1}, \sigma_{c1}$ |
| strain_stress_concrete2 | Uniaxial strain and stress of concrete principal direction 2 (Medium) $\varepsilon_{c2}, \sigma_{c2}$ |
| strain_stress_concrete3 | Uniaxial strain and stress of concrete principal direction 3 (Low) $\varepsilon_{c3}, \sigma_{c3}$ |

Parámetros de ingreso del Elemento 3D:

Los siguientes parámetros de ingreso permiten construir el elemento E-SFI-3D:

Element E_SFI_biaxial \$eleTag \$iNode \$jNode \$w \$t \$c -thick {Thicknesses} -width {Widths} -mat {Material_tags}

| | |
|------------------------|---|
| \$eleTag | Unique element object tag |
| \$iNode \$jNode | End node tags |
| \$w | Number of element macro-fibers in X direction |
| \$t | Number of element macro-fibers in Z direction |
| \$c | Location of center of rotation with from the iNode, $c = 0.4$ (recommended) |
| {Thicknesses} | Array of “t” macro-fiber in Z direction, thicknesses |
| {Widths} | Array of “w” macro-fiber in X direction, widths |
| {Material_tags} | Array of “M” macro-fiber nDMaterial ¹ tags, $M = w \cdot t$ |

1._ El elemento E-SFI-3D se debe utilizar con el material nDMaterial RAM3D, que es una relación constitutiva tridimensional que representa el comportamiento del prisma de hormigón armado.

Parámetros de salida del Elemento 3D:

Los siguientes resultados están disponibles para el elemento E-SFI-3D:

- globalForce** Element global forces
- CurvatureX** Element curvature in X direction
- CurvatureZ** Element curvature in Z direction
- ShearDefx** Element shear deformation in X direction
- ShearDefz** Element shear deformation in Z direction

C.1. Ejemplo.

Example: Simulation of Shear-Flexural Behavior of a Rectangular reinforced concrete Column Specimen under Biaxial Cyclic Loading using the E-SFI-3D Model.

The behavior of RC column specimen RC-17-45° [Pham and Li, 2013] tested under constant axial load and 45° cyclic lateral displacement history applied at the top of the column is predicted using the E-SFI-3D model. The input parameters are presented in the following sections.

C.1.1. Model Calibration

Basic properties of the specimen with model discretization are shown on Fig. C.3. Detailed information about the test specimen can be found in paper by [Pham and Li, 2013], whereas details of model calibration are provided in section 5.2.1.

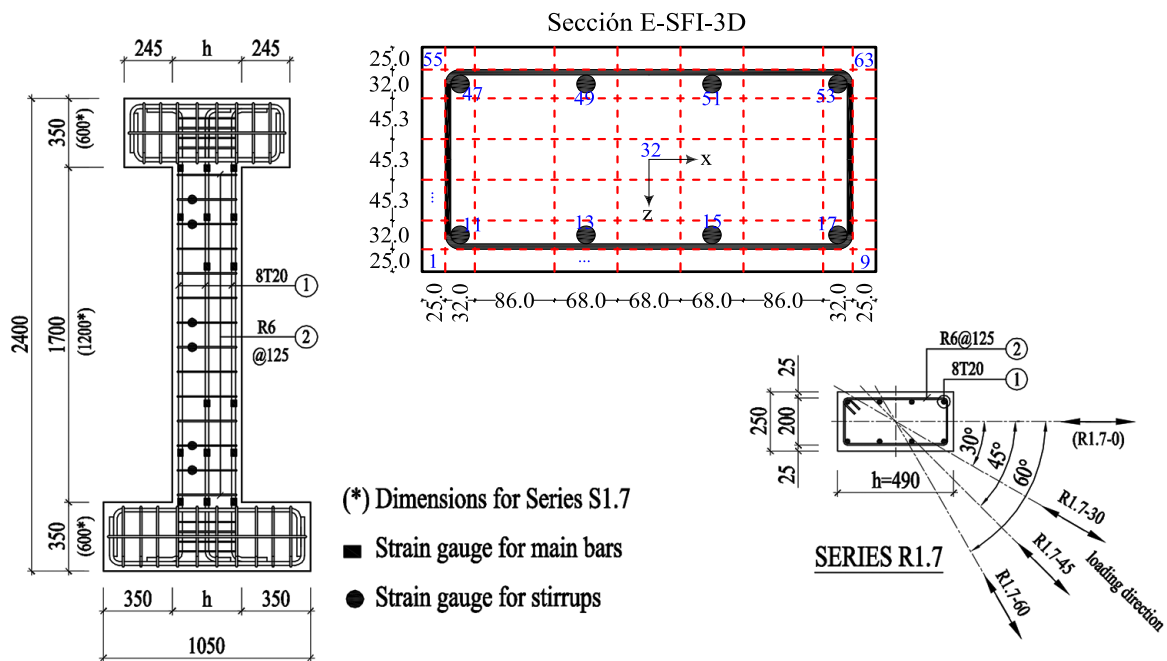


Figura C.3: Configuración de las columnas de [Tran and Li, 2012] y [Pham and Li, 2013], y discretización transversal para el modelo E-SFI-3D.

The code necessary in OpenSees for the correct execution of the model to simulate the specimen RC-17-45° is described below.

```

# -----
# Start of model generation (Units: kN, mm, sec, kPa)
# -----

# Set Up Directories
set modelName "RC1735453D" ;

# Create ModelBuilder for 3D element (with 3-dimensions and 6 DOF/node)
model BasicBuilder -ndm 3 -ndf 6

# -----
# Set geometry, nodes, boundary conditions
# -----

# Column/Wall Geometry

set H 1.7;      # m Column/Wall height
set Ag [expr 0.25*0.49]; # Section area

set NoOfElf 3; # Number of elements in the center
set NoOfElrp 1; # Number of elements in the each end

set Ls 0.125; # Stirrup spacing

set LRP1 [expr $Ls]; # Element length at base
set LRP2 [expr $Ls]; # Element length at top

# Strain penetration spring value
set krx 40000.0; # kN*m/rad # X direction
set krz 20000.0; # kN*m/rad # Z direction

set direc "xz"; # Analysis direction

set resor "y"; # y\n Strain penetration spring value

set Gfc 21.37; # N/mm = KN/m Cover Fracture energy
set Gfn 27.7; # N/mm = KN/m Core Fracture energy

# CONCRETE .....
# unconfined
set fpc [expr 1*30100.0]; # kN/m2 peak compressive stress

# confined
set fpc [expr 1*30100.0+3300.0]; # kN/m2 peak compressive stress -
    Saatcioglu & Razvi (1992)

#Nodes creation

```

```

for {set i 1} {$i <= [expr $NoOfElrp+1]} {incr i} { # Base Node
  node [expr $i] 0.0 [expr ($i-1)*$LRP1/$NoOfElrp] 0.0;
}

for {set i 1} {$i <= [expr $NoOfElf]} {incr i} { # Center Nodes
  node [expr $i+$NoOfElrp+1] 0.0 [expr ($i)*($H-($LRP1+$LRP2))/ $NoOfElf +
    $LRP1] 0.0;
}

for {set i 1} {$i <= [expr $NoOfElrp]} {incr i} { # Top Node
  node [expr $i+$NoOfElrp+ $NoOfElf +1] 0.0 [expr $LRP1+($H-($LRP1+$LRP2))+($i)*$LRP2/$NoOfElrp] 0.0;
}

# Set Control Node and DOF
set IDctrlNode [expr $NoOfElf +2*$NoOfElrp+1]; # Control of the last node

#Boundary conditions
if {$direc == "xz"} { # Biaxial Direction

  set IDctrlDOF 1;

  if {$resor == "y"} { # X and Z direction view file
    fix 1 1 1 1 0 1 0; # Fixed condition at node 1, free for springs
    fix $IDctrlNode 0 0 0 0 1 0; # Fixed condition at last node ,
  }

  if {$resor == "n"} {
    fix 1 1 1 1 1 1 1;
    fix $IDctrlNode 0 0 0 1 1 1;
  }

  for {set i 1} {$i <= [expr $NoOfElf +2*$NoOfElrp-1]} {incr i} {
    fix [expr $i+1] 0 0 0 0 1 0; # Fixed conditions in the other nodes
  }
}

#Strain penetration
if {$resor == "si"} {
  node 1000 0.0 0.0 0.0; # Base spring
  node 1001 0.0 $H 0.0; # Top spring

  fix 1000 1 1 1 1 1 1; # Displacement and rotation are restricted
  fix 1001 1 1 1 1 1 1;

  #Material para el resorte
  uniaxialMaterial Elastic 111 $krx; # Rotational spring material
  uniaxialMaterial Elastic 121 $krz; # Rotational spring material
}

```



```

# Spring in X and Z direction
element zeroLength 10 1000 1 -mat 111 -dir 6; # Base rotational spring
    with material 111 acting in the Z direction
element zeroLength 11 $IDctrlNode 1001 -mat 111 -dir 6; # Top
    rotational spring with material 111 acting in the Z direction
element zeroLength 12 1000 1 -mat 121 -dir 4;# Base rotational spring
    with material 121 acting in the X direction
element zeroLength 13 $IDctrlNode 1001 -mat 121 -dir 4;# Top
    rotational spring with material 121 acting in the X direction

if {$direc == "xz"} {
    equalDOF 1000 1 1 2 3 5;
    equalDOF $IDctrlNode 1001 1 2 3 5;
}
}

# -----
# Define uniaxial materials for 3D RC Prism Constitutive Model (RAM3D)
# -----

# STEEL .....
# uniaxialMaterial SteelMPF $mattag $fyp $fyn $E0 $bp $bn $R0 $A1 $A2
# steel X
set fyX 392000.0; # fy kN/m2
set bx 0.008; # Strain hardening

# steel Y
set fyY 408000.0; # fy kN/m2
set by 0.01; # Strain hardening

# steel misc
set Esy 2.00e8; # kN/m2 Young's modulus
set Esx 1.7e8; # Young's modulus
set R0 20.0; # Initial value of curvature parameter
set A1 0.925; # Curvature degradation parameter
set A2 0.15; # Curvature degradation parameter

# Build steel materials
uniaxialMaterial SteelMPF 1 $fyX $fyX $Esx $bx $bx $R0 $A1 $A2; # Steel X
uniaxialMaterial SteelMPF 2 $fyY $fyY $Esy $by $by $R0 $A1 $A2; # Steel Y

# CONCRETE .....

# Residual Stress
set Rs 0.2; # Plain Concrete
set Rc 0.2; # Confined concrete

# Unconfined
set Ec [expr 4700*pow($fpc/1000.0,1.0/2.0)*1000.0]; # kN/m2 Young's
    modulus

```

```

set ec0 -[expr 2*$fpc / $Ec]; # Strain at peak compressive stress

set ft [expr 0.31*sqrt( $fpc / 1000.0)*1000.0]; # kN/m2 peak tensile stress

set Et [expr $ft / 0.002]; # kN/m2

# Confined
set Ecc [expr 4700*pow( $fpcc / 1000.0, 1.0/2.0)*1000.0]; # kN/m2 Young's
  modulus

set ec0c -[expr 2*$fpcc / $Ecc];

set ftc [expr 0.31*sqrt( $fpcc / 1000.0)*1000.0]; # kn/m2 peak tensile stress

set Etc [expr $ftc / 0.002]; # kn/m2 peak tensile stress

#Regularization

set Liprp1 [expr $LRP1/$NoOfElrp]; # Element length at base

# Coleman and Spacone, 2001
set errp1 [expr 1.0/(1.0+$Rs)*(2.0*$Gfc / ( $fpc * $Liprp1 )- $fpc / $Ec +(1.0+$Rs)*
  (-1.0*$ec0)+$Rs*$Rs* $fpc / $Ec)]; # Plain Concrete

set ercrp1 [expr 1.0/(1.0+$Rc)*(2.0*$Gfn / ( $fpcc * $Liprp1 )- $fpcc / $Ecc +(1.0+
  $Rc)*(-1.0*$ec0c)+$Rc*$Rc* $fpcc / $Ecc)]; # Confined concrete

set Lipf [expr ($H-($LRP1+$LRP2)) / $NoOfElf ]; #length of elements in the
  center

# Coleman and Spacone, 2001
set erf [expr 1.0/(1.0+$Rs)*(2.0*$Gfc / ( $fpc * $Lipf )- $fpc / $Ec +(1.0+$Rs)*(-1.0
  *$ec0)+$Rs*$Rs* $fpc / $Ec)]; # Plain Concrete

set ercf [expr 1.0/(1.0+$Rc)*(2.0*$Gfn / ( $fpcc * $Lipf )- $fpcc / $Ecc +(1.0+$Rc)*(-
  1.0*$ec0c)+$Rc*$Rc* $fpcc / $Ecc)]; # Confined concrete

set Liprp2 [expr $LRP2/$NoOfElrp];

# Coleman and Spacone, 2001
set errp2 [expr $Gfc / (0.6* $fpc * $Liprp2 )-0.8* $fpc / $Ec - $ec0];#Rs=0.2
set ercrp2 [expr $Gfn / (0.6* $fpcc * $Liprp2 )-0.8* $fpcc / $Ecc - $ec0c];#Rc=0.2

# Concrete Uniaxial Material with Regularization
uniaxialMaterial Concrete02 3 - $fpc $ec0 [expr -$Rs* $fpc ] - $errp1 0.1
  $ft [expr 0.05*$Ec]; # unconfined concrete, Base
uniaxialMaterial Concrete02 4 - $fpcc $ec0c [expr -$Rc* $fpcc ] - $ercrp1 0.1
  $ftc [expr 0.05*$Ecc]; # confined concrete, Base

```

```

uniaxialMaterial Concrete02 5 - $fpc $ec0 [expr -$Rs* $fpc ] - $serf 0.1 $ft
    [expr 0.05*$Ec]; # unconfined concrete, Center
uniaxialMaterial Concrete02 6 - $fpcc $ec0c [expr -$Rc* $fpcc ] - $sercf 0.1
    $ftc [expr 0.05*$Ecc]; # confined concrete, Center

uniaxialMaterial Concrete02 7 - $fpc $ec0 [expr -$Rs* $fpc ] - $serrp2 0.1
    $ft [expr 0.05*$Ec]; # unconfined concrete, Top
uniaxialMaterial Concrete02 8 - $fpcc $ec0c [expr -$Rc* $fpcc ] - $sercrp2 0.1
    $ftc [expr 0.05*$Ecc]; # confined concrete, Top

# -----
# Define 3D RC Prism Material (RAMBD)
# -----

# Reinforcing ratios
set rouXrp 0.00226; # X base-top
set rouXf 0.00226; # X center

set rouZrp 0.00103; # X base-top
set rouZf 0.00103; # X center

# Dowel Action
set tmaxX 30000.0; # Shear Stress of dowel action X
set tmaxZ 30000.0; # Shear Stress of dowel action Z
set alfadowX 0.007; # dowel action stiffness parameter X
set alfadowZ 0.007; # dowel action stiffness parameter Z

# Fiber widths
set w1 0.025;
set w2 0.032;
set w3 0.086;
set w4 0.068;
set w5 0.068;
set w6 $w4;
set w7 $w3;
set w8 $w2;
set w9 $w1;

# Fiber thickness
set t1 0.025;
set t2 0.032;
set t3 0.0453;
set t4 0.0454;
set t5 $t3;
set t6 $t2;
set t7 $t1;

```

```

# nDMaterial RAM3D $mattag $rho $sX $sY $sZ $conc $rouX $rouY
  $rouZ $tmaxX $alphaX $tmaxZ $alphaZ $ec

# Base element materials
nDMaterial RAM3D 5 0.0 1 2 1 3 0.0 0.0 0.0 $tmaxX $alfadowX
  $tmaxZ $alfadowZ $ec0 ; # (Base unconfined concrete)

nDMaterial RAM3D 6 0.0 1 2 1 4 $rouXrp [expr 1*(3.1416*pow(0.02,
  2.0)/4)/($w2$t2)] $rouZrp $tmaxX $alfadowX $tmaxZ $alfadowZ $ec0c ; # (
  Base confined concrete )

nDMaterial RAM3D 7 0.0 1 2 1 4 $rouXrp 0.0 $rouZrp $tmaxX
  $alfadowX $tmaxZ $alfadowZ $ec0c ; # (Base confined concrete)

nDMaterial RAM3D 8 0.0 1 2 1 4 $rouXrp [expr 1*(3.1416*pow(0.02,
  2.0)/4)/($w4*$t2)] $rouZrp $tmaxX $alfadowX $tmaxZ $alfadowZ $ec0c ; # (
  Base confined concrete)

# Center element materials
nDMaterial RAM3D 9 0.0 1 2 1 5 0.0 0.0 0.0 $tmaxX $alfadowX
  $tmaxZ $alfadowZ $ec0 ; # (Center unconfined concrete)

nDMaterial RAM3D 10 0.0 1 2 1 6 $rouXf [expr 1*(3.1416*pow(0.02,
  2.0)/4)/($w2$t2)] $rouZf $tmaxX $alfadowX $tmaxZ $alfadowZ $ec0c ; # (
  Center confined concrete )

nDMaterial RAM3D 11 0.0 1 2 1 6 $rouXf 0.0 $rouZf $tmaxX
  $alfadowX $tmaxZ $alfadowZ $ec0c ; # (Center confined concrete)

nDMaterial RAM3D 111 0.0 1 2 1 6 $rouXf [expr 1*(3.1416*pow(0.02
  ,2.0)/4)/($w4*$t2)] $rouZf $tmaxX $alfadowX $tmaxZ $alfadowZ $ec0c ; # (
  Center confined concrete)

# Top element materials
nDMaterial RAM3D 12 0.0 1 2 1 7 0.0 0.0 0.0 $tmaxX $alfadowX
  $tmaxZ $alfadowZ $ec0 ; # (Top unconfined concrete)

nDMaterial RAM3D 13 0.0 1 2 1 8 $rouXrp [expr 1*(3.1416*pow(0.02
  ,2.0)/4)/($w2$t2)] $rouZrp $tmaxX $alfadowX $tmaxZ $alfadowZ $ec0c ; # (
  Top confined concrete )

nDMaterial RAM3D 14 0.0 1 2 1 8 $rouXrp 0.0 $rouZrp $tmaxX
  $alfadowX $tmaxZ $alfadowZ $ec0c ; # (Top confined concrete)

nDMaterial RAM3D 15 0.0 1 2 1 8 $rouXrp [expr 1*(3.1416*pow(0.02
  ,2.0)/4)/($w4*$t2)] $rouZrp $tmaxX $alfadowX $tmaxZ $alfadowZ $ec0c ; #
  (Top confined concrete)

```

```

# -----
# Define E_SFI_3D elements
# -----

set m_fibersX 9; # No. of macro fibers in X direction
set m_fibersZ 7; # No. of macro fibers in Z direction
set c_rot 0.4; # Location of center of rotation with respect to iNode (0
.4 recommended)

# Command: element E_SFI_BIAXIAL eleTag iNode jNode m_fibersX m_fibersZ c
-thick fiberThick -width fiberWidth -mat matTags

for {set i 1} {$i <= $NoOfElrp} {incr i} { # Base elements
  element E_SFI_BIAXIAL [expr 100 + $i] [expr 1 + $i - 1] [expr 1 + $i]
    $m_fibersX $m_fibersZ $c_rot -thick $t1 $t2 $t3 $t4 $t5 $t6 $t7 -width $w1
    $w2 $w3 $w4 $w5 $w6 $w7 $w8 $w9 -mat 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 6 7 8 7 8
    7 6 5 5 7 7 7 7 7 7 7 5 5 7 7 7 7 7 7 5 5 7 7 7 7 7 5 5 7 7 7 7 7 5
    5 6 7 8 7 8 7 6 5 5 5 5 5 5 5 5 5; # 63 materials
}

for {set i 1} {$i <= $NoOfElf} {incr i} { # Center elements
  element E_SFI_BIAXIAL [expr 100 + $NoOfElrp + $i] [expr $NoOfElrp + $i] [
  expr $NoOfElrp + 1 + $i] $m_fibersX $m_fibersZ $c_rot -thick $t1 $t2 $t3 $t4
  $t5 $t6 $t7 -width $w1 $w2 $w3 $w4 $w5 $w6 $w7 $w8 $w9 -mat 9 9 9 9 9
  9 9 9 9 9 10 11 11 11 11 11 11 10 9 9 11 11 11 11 11 11 11 9
  9 11 11 11 11 11 11 11 9 9 11 11 11 11 11 11 11 9 9 10 11
  11 11 11 11 10 9 9 9 9 9 9 9 9; # 63 materials
}

for {set i 1} {$i <= $NoOfElrp} {incr i} { # Top elements
  element E_SFI_BIAXIAL [expr 100 + $NoOfElrp + $NoOfElf + $i] [expr
  $NoOfElrp + $NoOfElf + $i] [expr $NoOfElrp + $NoOfElf + $i+1]
  $m_fibersX $m_fibersZ $c_rot -thick $t1 $t2 $t3 $t4 $t5 $t6 $t7 -width $w1
  $w2 $w3 $w4 $w5 $w6 $w7 $w8 $w9 -mat 12 12 12 12 12 12 12 12 12 12
  13 14 15 14 15 14 13 12 12 14 14 14 14 14 14 12 12 14 14
  14 14 14 14 14 12 12 14 14 14 14 14 14 14 12 12 13 14 15 14 15
  14 13 12 12 12 12 12 12 12 12 12; # 63 materials
}

# -----
# End of model generation
# -----

# -----
# Recorder generation
# -----

# Nodal recorders
recorder Node -file DtopX.out -time -node $IDctrlNode -dof 1 disp
recorder Node -file DtopZ.out -time -node $IDctrlNode -dof 3 disp
recorder Node -file DOFs.out -time -nodeRange 1 [expr 2*$NoOfElrp+ $NoOfElf +1]

```

```

    -dof 1 2 3 4 5 6 disp
recorder Node -file Reac.out -time -nodeRange 1000 1001 -dof 1 2 3 4 5 6
reaction

# Element recorders
recorder Element -file Fgl.out -time -eleRange 101 [expr 2*$NoOfElrp+ $NoOfElf +
100] globalForce
recorder Element -file DshX.out -time -eleRange 101 [expr 2*$NoOfElrp+ $NoOfElf
+100] ShearDefx
recorder Element -file DshZ.out -time -eleRange 101 [expr 2*$NoOfElrp+ $NoOfElf
+100] ShearDefz
recorder Element -file CurvatureX.out -time -eleRange 101 [expr 2*$NoOfElrp+
$NoOfElf +100] CurvatureX
recorder Element -file CurvatureZ.out -time -eleRange 101 [expr 2*$NoOfElrp+
$NoOfElf +100] CurvatureZ

#Recorders for all prisms
for {set j 1} {$j <= [expr $m_fibersX*$m_fibersZ]} {incr j} {
    recorder Element -file prism_strain_${j}.out -time -ele 101 RCPrism $j
        prism_strain
    recorder Element -file prism_stress_${j}.out -time -ele 101 RCPrism $j
        prism_stress
    recorder Element -file prism_stress_concrete_${j}.out -time -ele 101
        RCPrism $j panel_stress_concrete
    recorder Element -file prism_stress_steel_${j}.out -time -ele 101 RCPrism
        $j prism_stress_steel
# Unaxial Material
recorder Element -file strain_stress_steel1_${j}.out -time -ele 101 RCPrism
    $j strain_stress_steelX
recorder Element -file strain_stress_steel2_${j}.out -time -ele 101 RCPrism
    $j strain_stress_steelY
recorder Element -file strain_stress_steel3_${j}.out -time -ele 101 RCPrism
    $j strain_stress_steelZ
recorder Element -file strain_stress_concrete1_${j}.out -time -ele 101
    RCPrism $j strain_stress_concrete1
recorder Element -file strain_stress_concrete2_${j}.out -time -ele 101
    RCPrism $j strain_stress_concrete2
recorder Element -file strain_stress_concrete3_${j}.out -time -ele 101
    RCPrism $j strain_stress_concrete3
}

# -----
# Define Axial Load
# -----

set N [expr 0.35*$fpc*$Ag]; # kN fc*Ag

```

```
# -----  
# Set parameters for displacement controlled analysis  
# -----  
  
# Vector of displacement-cycle peaks in terms of column drift ratio  
  
set iDmax "0.002 0.004 0.006 0.008 0.01 0.012 0.014 0.016 0.018 0.02";  
  
set Dincr 0.00085; # Displacement increment for displacement controlled  
analysis.  
set CycleType Full; # Type of cyclic analysis: Full / Push / Half  
set Ncycles 1; # Specify the number of cycles at each peak  
set Tol 1.0e-7;  
set LunitTXT "mm";
```

Anexo D

D. Código del material y elemento del modelo E-SFI-3D

En este capítulo se detallan las funciones principales del código fuente usado en “OpenSees”, para la implementación del material 3D, (“RAM3D”), y del elemento 3D, (“E-SFI-3D”). El código está escrito en el lenguaje de programación C++ y se especifican en los archivos RAM3D.cpp y E_SFI_BIAXIAL.cpp.

D.1. Código del material 3D, “RAM3D”.

Función para el estado de ángulo que rota del prisma de hormigón armado.

```
//Stage 1 – Rotating angle
void RAM3D::Stage1(double& ex, double& ey, double& ez, double& gammaxy, double&
    gammaxz, double& gammayz)
{
    // START – Declaration of temporary variables

    // Stress
    double fx;
    double fy;
    double fz;
    double tauxy;
    double tauxz;
    double tauyz;

    // Steel Material .....
    // Strain
    double estxp;
    double estyp;
    double estzp;

    // Stress
    double fstx;
    double fsty;
```



```

double fstz ;
double taustxy ;
double taustxz ;
double taustyz ;
double fstxp ; // Stress of steel layers in X direction
double fstyp ; // Stress of steel layers in Y direction
double fstzp ; // Stress of steel layers in Z direction

// Stiffness
double Estxp ;
double Estyp ;
double Estzp ;
double stifstypF ;
double stifstxpF ;
double stifstzpF ;

// Concrete Material .....

double fcx ; // Concrete axial stress in X direction
double fcy ; // Concrete axial stress in Y direction
double fcz ; // Concrete axial stress in Z direction
double tauctxy ; // Concrete shear stress in XY direction
double tauctxz ; // Concrete shear stress in XZ direction
double tauctxy ; // Concrete shear stress in YZ direction

//// END – Declaration of temporary variables .....

int first_iteration = 0;

if (ex == 0.0 && ey == 0.0 && ez == 0.0 && gammaxy == 0.0 && gammaxz == 0.0 &&
    gammayz)
{
    first_iteration = 1;
}

double eyz3d = gammayz / 2.0;
double exy3d = gammaxy / 2.0;
double exz3d = gammaxz / 2.0;

EigenValor(ex, ey, ez, exy3d, exz3d, eyz3d); // Compute eigenvalues and
    eigenvectors (gH, gM, gL, vH(3), vM(3), vL(3))

// Strain transformation for steel reinforcements
estxp = ex;
estyp = ey;
estzp = ez;

// Direction gH, (High)
double fc1H;
double ghB;

```

```

double Ect1H;
double beta1H;
double delbeta1H;
double fcmo1H;

theMaterial[3]->setTrialStrain(gH);
fc1H = theMaterial[3]->getStress();
Ect1H = theMaterial[3]->getTangent();

ghB = gM+gL;
double au = 0.0;
betaf4(ghB, epcc, fc1H, au); //beta function, epcc = concrete strain at
    compressive stress
beta1H = beta;
delbeta1H = delbeta;
fcmo1H = beta1H * fc1H;

    // Direction gM, (Medium)
double fc1M;
double gmB;
double Ect1M;
double beta1M;
double delbeta1M;
double fcmo1M;

theMaterial[4]->setTrialStrain(gM);
fc1M = theMaterial[4]->getStress();
Ect1M = theMaterial[4]->getTangent();

gmB = gH + gL;
betaf4(gmB, epcc, fc1M, au);
beta1M = beta;
delbeta1M = delbeta;
fcmo1M = beta1M * fc1M;

    // Direction gL, (Low)
double fc1L;
double gLB;
double Ect1L;
double beta1L;
double delbeta1L;
double fcmo1L;

theMaterial[5]->setTrialStrain(gL);
fc1L = theMaterial[5]->getStress();
Ect1L = theMaterial[5]->getTangent();
gLB = gH + gM;
betaf4(gLB, epcc, fc1L, au);
beta1L = beta;
delbeta1L = delbeta;

```

```

fcm01L = beta1L * fc1M;

// Back Transform concrete stresses in X-Y-Z coordinate system

fcx = pow(vH(0), 2.0) * fcm01H + pow(vM(0), 2.0) * fcm01M + pow(vL(0), 2.0) *
      fcm01L;
fcy = pow(vH(1), 2.0) * fcm01H + pow(vM(1), 2.0) * fcm01M + pow(vL(1), 2.0) *
      fcm01L;
fcz = pow(vH(2), 2.0) * fcm01H + pow(vM(2), 2.0) * fcm01M + pow(vL(2), 2.0) *
      fcm01L;
taucxy = vH(0) * vH(1) * fcm01H + vM(0) * fcm01M * vM(1) + vL(0) * vL(1) *
          fcm01L;
taucz = vH(0) * vH(2) * fcm01H + vM(0) * fcm01M * vM(2) + vL(0) * vL(2) *
          fcm01L;
taucyz = vH(1) * vH(2) * fcm01H + vM(1) * fcm01M * vM(2) + vL(1) * vL(2) *
          fcm01L;

// Direction One
TStrainStressConc1(0) = gH;
TStrainStressConc1(1) = fc1H;

// Direction Two
TStrainStressConc2(0) = gM;
TStrainStressConc2(1) = fc1M;

// Direction Three
TStrainStressConc3(0) = gL;
TStrainStressConc3(1) = fc1M;

TPanelConcStress(0) = fcx;
TPanelConcStress(1) = fcy;
TPanelConcStress(2) = fcz;
TPanelConcStress(3) = taucyz;
TPanelConcStress(4) = taucz;
TPanelConcStress(5) = taucxy;

// Get STEEL Stress and Tangent Stiffness – X Direction
theMaterial[0]->setTrialStrain( estxp );
Estxp = theMaterial[0]->getTangent(); // EsX
fstxp = theMaterial[0]->getStress(); // SigSX
stifstxpF = Estxp;

TStrainStressSteel1(0) = estxp;
TStrainStressSteel1(1) = fstxp;

// Get STEEL Stress and Tangent Stiffness – Y Direction
theMaterial[1]->setTrialStrain( estyp );
Estyp = theMaterial[1]->getTangent(); // EsY
fstyp = theMaterial[1]->getStress(); // SigSY
stifstypF = Estyp;

```

```

TStrainStressSteel2(0) = estyp ;
TStrainStressSteel2(1) = fstyp ;

// Get STEEL Stress and Tangent Stiffness - Z Direction
theMaterial[2]->setTrialStrain( estzp );
Estzp = theMaterial[2]->getTangent(); // EsZ
fstzp = theMaterial[2]->getStress(); // SigSZ
stifstzpF = Estzp ;

TStrainStressSteel3(0) = estzp ;
TStrainStressSteel3(1) = fstzp ;

// Dowel Action - only on the horizontal plane X y Z
// Strain Transformation
double gamma_dow_A_y_x = gammaxy;
double gamma_dow_A_y_z = gammayz;

dowel_action(gamma_dow_A_y_x, E0y);
double Tau_Dowel_A_y_x = Tau_Dowel;
double dTau_dgamma_A_y_x = dTau_dgamma;

dowel_actionz(gamma_dow_A_y_z, E0y);
double Tau_Dowel_A_y_z = Tau_DowelZ;
double dTau_dgamma_A_y_z = dTau_dgammaZ;

// Back Transfor Steel Stresses in X-Y-Z coordinate system
taustxy = rouy * Tau_Dowel_A_y_x; // Dowell action in XY

taustxz = 0.0;

taustyz = rouy * Tau_Dowel_A_y_z; // Dowell action in YZ

fstx = roux* fstxp ;

fsty = rouy* fstyp ;

fstz = rouz * fstzp ;

TPanelSteelStress(0) = fstx ;
TPanelSteelStress(1) = fsty ;
TPanelSteelStress(2) = fstz ;

TPanelSteelStress(3) = taustyz ;
TPanelSteelStress(4) = taustxz ;
TPanelSteelStress(5) = taustxy ;

// Stress Superposition | Concrete + Steel
fx = fcx + fstx ;
fy = fcy + fsty ;

```

```

fz = fcz + fstz ;
tauxy = taucxy + taustxy ;
tauxz = taucxz + taustxz ;
tauyz = taucyz + taustyz ;

stress_vec(0) = fx ;
stress_vec(1) = fy ;
stress_vec(2) = fz ;

stress_vec(3) = tauyz ;
stress_vec(4) = tauxz ;
stress_vec(5) = tauxy ;

double dsx3dex ;
double dsy3dex ;
double dtxy3dex ;
double dsx3dey ;
double dsy3dey ;
double dtxy3dey ;
double dsx3dexy ;
double dsy3dexy ;
double dtxy3dexy ;
double dtyz3deyz ;
double auxgH = gH ;
double auxgM = gM ;
double auxgL = gL ;

Vector auxvH(3) ;
Vector auxvM(3) ;
Vector auxvL(3) ;

auxvH = vH ; // Save eigenvectors
auxvM = vM ;
auxvL = vL ;

Vector DPH(3) ; // Eigenvectors Derivative
Vector DPM(3) ;
Vector DPL(3) ;

double dgH ; // Eigenvalues Derivative
double dgM ;
double dgL ;

// Eigenvalues and Eigenvectors Derivative
double dteig ;
dteig = 1e-9 ; // Delta Increase

dsx3dex = 0.0 ;

dsy3dex = 0.0 ;

```

```

dtxy3dex = 0.0;

double eyderi = ey + dteig; // Derivative with respect to ey

if (ey == 0.0) {
    dgH = 0.0; dgM = 0.0; dgL = 0.0;
    DPH.Zero(); DPM.Zero(); DPL.Zero();
} else {
    EigenValor(ex, eyderi, ez, exy3d, exz3d, eyz3d); //Change value of gH, gM, gL
    DerivarValor(dgH, dgM, dgL, gH, gM, gL, auxgH, auxgM, auxgL, dteig); //
        Eigenvalue Numerical derivative.
    DerivarVector(DPH, DPM, DPL, vH, vM, vL, auxvH, auxvM, auxvL, dteig); //
        Eigenvector Numerical derivative.
}

dsx3dey = 0.0;

dsy3dey = 2 * auxvH(1) * DPH(1) * fcm0d1H + pow(auxvH(1), 2.0) * ((delbeta1H *
    dgM + delbeta1H * dgL) * fc1H + beta1H * Ect1H * dgH) +
    2 * auxvM(1) * DPM(1) * fcm0d1M + pow(auxvM(1), 2.0) * ((delbeta1M * dgH +
    delbeta1M * dgL) * fc1M + beta1M * Ect1M * dgM) +
    2 * auxvL(1) * DPL(1) * fcm0d1L + pow(auxvL(1), 2.0) * ((delbeta1L * dgH +
    delbeta1L * dgM) * fc1M + beta1L * Ect1L * dgL) + stifstypF * rouy;

dtxy3dey = 0.0;

double exyderi = exy3d + dteig; // Derivative with respect to exy

if (exy3d == 0.0) {
    dgH = 0.0; dgM = 0.0; dgL = 0.0;
    DPH.Zero(); DPM.Zero(); DPL.Zero();
}
else {
    EigenValor(ex, ey, ez, exyderi, exz3d, eyz3d); // Change value of gH, gM, gL, vH,
        vM, vL
    DerivarValor(dgH, dgM, dgL, gH, gM, gL, auxgH, auxgM, auxgL, dteig); //
        Eigenvalue Numerical derivative.
    DerivarVector(DPH, DPM, DPL, vH, vM, vL, auxvH, auxvM, auxvL, dteig); //
        Eigenvector Numerical derivative.
}

dsx3dexy = 0.0;

dsy3dexy = 0.0;

dtxy3dexy = auxvH(1) * DPH(0) * fcm0d1H + auxvH(0) * DPH(1) * fcm0d1H + auxvH(0)
    * auxvH(1) * ((delbeta1H * dgM + delbeta1H * dgL) * fc1H + beta1H * Ect1H *
    dgH) +

```

```

auxvM(1) * DPM(0) * fmod1M + auxvM(0) * DPM(1) * fmod1M + auxvM(0) * auxvM(
    1) * ((delbeta1M * dgH + delbeta1M * dgL) * fc1M + beta1M * Ect1M * dgM) +
auxvL(1) * DPL(0) * fmod1L + auxvL(0) * DPL(1) * fmod1L + auxvL(0) * auxvL(
    1) * ((delbeta1L * dgH + delbeta1L * dgM) * fc1M + beta1L * Ect1L * dgL)+
dTau_dgamma_A_y_x* rouy+ 0.05 * Ec;

if (abs(exy3d) < 1e-8 && abs(eyz3d) < 1e-8) {
    dtxy3dexy = Ec;
}

dtxy3dexy = dtxy3dexy / 2.0; //0.05*Ec necessary so that the expression is not
    indeterminate.

double eyzderi = eyz3d + dteig; // Derivative with respect to eyz

if (eyz3d == 0.0) {
    dgH = 0.0; dgM = 0.0; dgL = 0.0;
    DPH.Zero (); DPM.Zero (); DPL.Zero ();
}
else {
    EigenValor(ex, ey, ez, exy3d, exz3d, eyzderi); //Change value of gH, gM, gL, vH,
        vM, vL

    DerivarValor(dgH, dgM, dgL, gH, gM, gL, auxgH, auxgM, auxgL, dteig); //
        Eigenvalue Numerical derivative.

    DerivarVector(DPH, DPM, DPL, vH, vM, vL, auxvH, auxvM, auxvL, dteig); //
        Eigenvector Numerical derivative.
}

dtyz3deyz = auxvH(2) * DPH(1) * fmod1H + auxvH(1) * DPH(2) * fmod1H + auxvH(1)
    * auxvH(2) * ((delbeta1H * dgM + delbeta1H * dgL) * fc1H + beta1H * Ect1H *
    dgH) +
auxvM(2) * DPM(1) * fmod1M + auxvM(1) * DPM(2) * fmod1M + auxvM(1) * auxvM(2)
    ) * ((delbeta1M * dgH + delbeta1M * dgL) * fc1M + beta1M * Ect1M * dgM) +
auxvL(2) * DPL(1) * fmod1L + auxvL(1) * DPL(2) * fmod1L + auxvL(1) * auxvL(2)
    ) * ((delbeta1L * dgH + delbeta1L * dgM) * fc1M + beta1L * Ect1L * dgL)+
dTau_dgamma_A_y_z * rouy+ 0.05 * Ec;

if (abs(exy3d) < 1e-8 && abs(eyz3d) < 1e-8) {
    dtyz3deyz = Ec;
}

dtyz3deyz = dtyz3deyz / 2.0 ; //0.05*Ec necessary so that the expression is not
    indeterminate.

// Assemble partial tangent stiffness matrix
tangent_matrix(0,0) = dsx3dex;

```

```

tangent_matrix(0,1) = dsx3dex;
tangent_matrix(0,2) = dsx3dexy;
tangent_matrix(0,3) = 0.0;
tangent_matrix(0,4) = 0.0;
tangent_matrix(0,5) = 0.0;

tangent_matrix(1,0) = dsy3dex;
tangent_matrix(1,1) = dsy3dex;
tangent_matrix(1,2) = dsy3dexy;
tangent_matrix(1,3) = 0.0;
tangent_matrix(1,4) = 0.0;
tangent_matrix(1,5) = 0.0;

tangent_matrix(2,0) = 0.0;
tangent_matrix(2,1) = 0.0;
tangent_matrix(2,2) = 0.0;
tangent_matrix(2,3) = 0.0;
tangent_matrix(2,4) = 0.0;
tangent_matrix(2,5) = 0.0;

tangent_matrix(3,0) = dtxy3dex;
tangent_matrix(3,1) = dtxy3dex;
tangent_matrix(3,2) = 0.0;
tangent_matrix(3,3) = dtxy3dexy;
tangent_matrix(3,4) = 0.0;
tangent_matrix(3,5) = 0.0;

tangent_matrix(4,0) = 0.0;
tangent_matrix(4,1) = 0.0;
tangent_matrix(4,2) = 0.0;
tangent_matrix(4,3) = 0.0;
tangent_matrix(4,4) = 0.0;
tangent_matrix(4,5) = 0.0;

tangent_matrix(5,0) = 0.0;
tangent_matrix(5,1) = 0.0;
tangent_matrix(5,2) = 0.0;
tangent_matrix(5,3) = 0.0;
tangent_matrix(5,4) = 0.0;
tangent_matrix(5,5) = dtyz3deyz;

// if 1st iteration calculate initial stiffness

if (first_iteration == 1) {
    tangent_matrix = this ->getInitialTangent();
}
}

```


Función para obtener los valores y vectores propios.

```

void RAM3D::EigenValor(double& ex, double& ey, double& ez, double& exy, double&
    exz, double& eyz)
{
    A(0, 0) = ex; A(0, 1) = exy; A(0, 2) = exz;
    A(1, 0) = exy; A(1, 1) = ey; A(1, 2) = eyz;
    A(2, 0) = exz; A(2, 1) = eyz; A(2, 2) = ez;

    double In = ex + ey + ez;
    double z = In / sqrt(3.0);

    // Variables

    Matrix S(3, 3);
    Matrix Ez(3, 3);
    Matrix Er(3, 3);
    Matrix E0(3, 3);

    S = A-(z/sqrt(3.0))*I;
    Ez = I / sqrt(3.0);

    double r3d = sqrt( pow(S(0,0), 2.0)+ pow(S(1, 1), 2.0)+ pow(S(2, 2), 2.0)+2*(
        pow(S(0, 1), 2.0)+ pow(S(0, 2), 2.0)+ pow(S(1, 2), 2.0)));

    if (r3d>0.0) {
        Er = S / r3d;
        double sin3t = 3.0 * sqrt(6.0) * (Er(0, 0) * Er(1, 1) * Er(2, 2) - Er(1, 2) *
            Er(2, 1) * Er(0, 0) - Er(2, 2) * Er(0, 1) * Er(1, 0)); //Solo para caso
            exz = 0;

        double cos3t = sqrt(1.0 - pow(sin3t, 2.0));
        if (cos3t > 0.0) {
            double t = asin(sin3t) / 3.0;

            gH = z / sqrt(3.0) + (r3d * (sin(t) / sqrt(3.0) + cos(t))) / sqrt(2.0); //
            Eigenvalues
            gM = z / sqrt(3.0) - sqrt(2.0 / 3.0) * r3d * sin(t);
            gL = z / sqrt(3.0) + (r3d * (sin(t) / sqrt(3.0) - cos(t))) / sqrt(2.0);

            E0 = (sqrt(6.0) * (Er * Er - I / 3.0) - sin3t * Er) / cos3t;

            PH = (cos(t) / sqrt(2.0) + sin(t) / sqrt(6.0)) * Er + (cos(t) / sqrt(6.0) - sin(t) /
                sqrt(2.0)) * E0 + Ez / sqrt(3.0); // Eigenvectors
            PM = -sqrt(2.0 / 3.0) * sin((t) * Er - sqrt(2.0 / 3.0) * cos(t) * E0 + Ez / sqrt(3
                .0));
            PL = (-cos(t) / sqrt(2.0) + sin(t) / sqrt(6.0)) * Er + (cos(t) / sqrt(6.0) + sin(t)
                / sqrt(2.0)) * E0 + Ez / sqrt(3.0);
        }
    }
    else {
        E0.Zero ();
    }
}

```

```

if ( sin3t > 0.0 ) {
    gL = (z-r3d/sqrt(2.0))/sqrt(3.0);
    gM = gL;
    gH = (z + sqrt(2.0) * r3d) / sqrt(3.0);
    PH = 1.0 / 3.0 * (I + sqrt(6.0) * Er);
    PM = I - PH;
    PL.Zero ();
    PL(2, 0) = 1.0;
}
else {
    gM = (z + r3d / sqrt(2.0)) / sqrt(3.0);
    gL = (z - sqrt(2.0) * r3d) / sqrt(3.0);
    gH = gM;
    PL = 1.0 / 3.0 * (I - sqrt(6.0) * Er);
    PM = I - PL;
    PH.Zero ();
}
}

} else {
    Er.Zero ();
    E0.Zero ();
    gH = z / sqrt(3.0);
    gM = gH;
    gL = gH;

    PH.Zero ();
    PM.Zero ();
    PL.Zero ();
    PH(0, 0) = 1.0;
    PM(1, 0) = 1.0;
    PL(2, 0) = 1.0;
}

double tole = 1e-8;

//Normalize

if ( abs(PH(0, 0)) < tole && abs(PH(1, 0)) < tole && abs(PH(2, 0)) < tole ) {
    vH(0) = PH(0, 1) / sqrt(pow(PH(0, 1), 2.0) + pow(PH(1, 1), 2.0) + pow(PH(2, 1),
    2.0)); vH(1) = PH(1, 1) / sqrt(pow(PH(0, 1), 2.0) + pow(PH(1, 1), 2.0) +
    pow(PH(2, 1), 2.0)); vH(2) = PH(2, 1) / sqrt(pow(PH(0, 1), 2.0) + pow(PH(1,
    1), 2.0) + pow(PH(2, 1), 2.0));
    if ( abs(PH(0, 1)) == 0.0 && abs(PH(1, 1)) == 0.0 && abs(PH(2, 1)) == 0.0 ) {
        vH(0) = PH(0, 2) / sqrt(pow(PH(0, 2), 2.0) + pow(PH(1, 2), 2.0) + pow(PH(2, 2),
        2.0)); vH(1) = PH(1, 2) / sqrt(pow(PH(0, 2), 2.0) + pow(PH(1, 2), 2.0)
        + pow(PH(2, 2), 2.0)); vH(2) = PH(2, 2) / sqrt(pow(PH(0, 2), 2.0) + pow(PH
        (1, 2), 2.0) + pow(PH(2, 2), 2.0));
    }
}
else {}

```

```

}
else {
  vH(0) = PH(0, 0) / sqrt(pow(PH(0, 0), 2.0) + pow(PH(1, 0), 2.0) + pow(PH(2, 0),
    , 2.0)); vH(1) = PH(1, 0) / sqrt(pow(PH(0, 0), 2.0) + pow(PH(1, 0), 2.0) +
    pow(PH(2, 0), 2.0)); vH(2) = PH(2, 0) / sqrt(pow(PH(0, 0), 2.0) + pow(PH(1,
    0), 2.0) + pow(PH(2, 0), 2.0));
}

if ( abs (PM(0, 0)) < tole && abs (PM(1, 0)) < tole && abs (PM(2, 0)) < tole ) {
  vM(0) = PM(0, 1) / sqrt(pow(PM(0, 1), 2.0) + pow(PM(1, 1), 2.0) + pow(PM(2, 1)
    , 2.0)); vM(1) = PM(1, 1) / sqrt(pow(PM(0, 1), 2.0) + pow(PM(1, 1), 2.0) +
    pow(PM(2, 1), 2.0)); vM(2) = PM(2, 1) / sqrt(pow(PM(0, 1), 2.0) + pow(PM(1,
    1), 2.0) + pow(PM(2, 1), 2.0));
  if ( abs (PM(0, 1)) < tole && abs (PM(1, 1)) < tole && abs (PM(2, 1)) < tole ) {
    vM(0) = PM(0, 2) / sqrt(pow(PM(0, 2), 2.0) + pow(PM(1, 2), 2.0) + pow(PM(2, 2)
      ), 2.0)); vM(1) = PM(1, 2) / sqrt(pow(PM(0, 2), 2.0) + pow(PM(1, 2), 2.0)
      + pow(PM(2, 2), 2.0)); vM(2) = PM(2, 2) / sqrt(pow(PM(0, 2), 2.0) + pow(PM
      (1, 2), 2.0) + pow(PM(2, 2), 2.0));
  }
  else {}
}
else {
  vM(0) = PM(0, 0) / sqrt(pow(PM(0, 0), 2.0) + pow(PM(1, 0), 2.0) + pow(PM(2, 0)
    , 2.0)); vM(1) = PM(1, 0) / sqrt(pow(PM(0, 0), 2.0) + pow(PM(1, 0), 2.0) +
    pow(PM(2, 0), 2.0)); vM(2) = PM(2, 0) / sqrt(pow(PM(0, 0), 2.0) + pow(PM(1,
    0), 2.0) + pow(PM(2, 0), 2.0));
}

if ( abs (PL(0, 0)) < tole && abs (PL(1, 0)) < tole && abs (PL(2, 0)) < tole ) {
  vL(0) = PL(0, 1) / sqrt(pow(PL(0, 1), 2.0) + pow(PL (1, 1), 2.0) + pow(PL(2, 1)
    ), 2.0)); vL(1) = PL(1, 1) / sqrt(pow(PL(0, 1), 2.0) + pow(PL(1, 1), 2.0) +
    pow(PL(2, 1), 2.0)); vL(2) = PL(2, 1) / sqrt(pow(PL(0, 1), 2.0) + pow(PL(1
    , 1), 2.0) + pow(PL(2, 1), 2.0));
  if ( abs (PL(0, 1)) < tole && abs (PL(1, 1)) < tole && abs (PL(2, 1)) < tole ) {
    vL(0) = PL(0, 2) / sqrt(pow(PL(0, 2), 2.0) + pow(PL(1, 2), 2.0) + pow(PL(2, 2)
      ), 2.0)); vL(1) = PL(1, 2) / sqrt(pow(PL(0, 2), 2.0) + pow(PL(1, 2), 2.0)
      + pow(PL(2, 2), 2.0)); vL(2) = PL(2, 2) / sqrt(pow(PL(0, 2), 2.0) + pow(PL
      (1, 2), 2.0) + pow(PL(2, 2), 2.0));
  }
  else {}
}
else {
  vL(0) = PL(0, 0) / sqrt(pow(PL(0, 0), 2.0) + pow(PL(1, 0), 2.0) + pow(PL(2, 0)
    , 2.0)); vL(1) = PL(1, 0) / sqrt(pow(PL(0, 0), 2.0) + pow(PL(1, 0), 2.0) +
    pow(PL(2, 0), 2.0)); vL(2) = PL(2, 0) / sqrt(pow(PL(0, 0), 2.0) + pow(PL(1,
    0), 2.0) + pow(PL(2, 0), 2.0));
}
}

```

```

double tole2 = 1e-10; // Identify cases of principal directions
if (exz == 0.0 && eyz == 0.0) {
  if (abs(ez- gL) <= tole2) {
    vL(0) = 0.0; vL(1) = 0.0; vL(2) = 1.0;
    if (exy == 0.0) {
      if (abs(ex- gM) <= tole2) {
        vM(0) = 1.0; vM(1) = 0.0; vM(2) = 0.0;
      }

      if (abs(ey- gH) <= tole2) {
        vH(0) = 0.0; vH(1) = 1.0; vH(2) = 0.0;
      }

      if (abs(ex- gH) <= tole2) {
        vH(0) = 1.0; vH(1) = 0.0; vH(2) = 0.0;
      }

      if (abs(ey- gM) <= tole2) {
        vM(0) = 0.0; vM(1) = 1.0; vM(2) = 0.0;
      }
    }
  }
  if (abs(ez- gM) <= tole2) {
    vM(0) = 0.0; vM(1) = 0.0; vM(2) = 1.0;
    if (exy == 0.0) {
      if (abs(ex- gL) <= tole2) {
        vL(0) = 1.0; vL(1) = 0.0; vL(2) = 0.0;
      }

      if (abs(ey- gH) <= tole2) {
        vH(0) = 0.0; vH(1) = 1.0; vH(2) = 0.0;
      }
      if (abs(ex- gH) <= tole2) {
        vH(0) = 1.0; vH(1) = 0.0; vH(2) = 0.0;
      }
      if (abs(ey- gL) <= tole2) {
        vL(0) = 0.0; vL(1) = 1.0; vL(2) = 0.0;
      }
    }
  }
  if (abs(ez- gH) <= tole2) {
    vH(0) = 0.0; vH(1) = 0.0; vH(2) = 1.0;
    if (exy == 0.0) {
      if (abs(ex- gL) <= tole2) {
        vL(0) = 1.0; vL(1) = 0.0; vL(2) = 0.0;
      }
      if (abs(ey- gM) <= tole2) {
        vM(0) = 0.0; vM(1) = 1.0; vM(2) = 0.0;
      }
    }
  }
  if (abs(ex- gM) <= tole2) {

```

```

    vM(0) = 1.0; vM(1) = 0.0; vM(2) = 0.0;
  }
  if (abs(ey- gL) <= tole2) {
    vL(0) = 0.0; vL(1) = 1.0; vL(2) = 0.0;
  }
}
}
}
}

```

Función para derivar los vectores y valores propios.

```

void RAM3D::DerivarVector (Vector& DPH, Vector& DPM, Vector& DPL, Vector& vH,
    Vector& vM, Vector& vL, Vector& auxvH, Vector& auxvM, Vector& auxvL, double& dteig)
{
    DPH(0) = (vH(0) - auxvH(0)) / dteig;  DPH(1) = (vH(1) - auxvH(1)) / dteig;  DPH(
    2) = (vH(2) - auxvH(2)) / dteig;

    DPL(0) = (vL(0) - auxvL(0)) / dteig;  DPL(1) = (vL(1) - auxvL(1)) / dteig;  DPL(2
    ) = (vL(2) - auxvL(2)) / dteig;

    DPM(0) = (vM(0) - auxvM(0)) / dteig;  DPM(1) = (vM(1) - auxvM(1)) / dteig;
    DPM(2) = (vM(2) - auxvM(2)) / dteig;
}

void RAM3D::DerivarValor(double& dgH, double& dgM, double& dgL, double& gH,
    double& gM, double& gL, double& auxgH, double& auxgM, double& auxgL, double&
    dteig)
{
    dgH = (gH - auxgH) / dteig;
    dgM = (gM - auxgM) / dteig;
    dgL = (gL - auxgL) / dteig;
}

```

D.2. Código del elemento 3D, “E-SFI-BIAXIAL”.

Función para obtener la matriz de rigidez del elemento.

```

// Get the element initial element tangent matrix
const Matrix & E_SFI_BIAXIAL ::getTangentStiff(void)
{
    double Kh = 0.0; double Khz = 0.0;
    double khxz = 0.0; double khzx = 0.0; double khxz2 = 0.0; double khxz2 = 0.0;

    for (int i=0; i < mt; i++)
    {
        // Get material initial tangent
        const Matrix &D = theMaterial[i]->getTangent();

        double D00 = D(0,0); double D01 = D(0,1); double D02 = D(0,2);
        double D10 = D(1,0); double D11 = D(1,1); double D12 = D(1,2);
    }
}

```

```

    double D20 = D(2,0); double D21 = D(2,1); double D22 = D(2,2);
    double D33 = D(3, 3); double D55 = D(5, 5);

    // Necessary only D11, D33 and D55
    // b = macro-fiber widths; t = macro-fiber thickness; h = height of element
    // x, z = macro-fiber location in X and Z direction

    //kx[i] = D00 * h*t[i] / b[i];
    ky[i] = D11 * b[i]*t[i] / h;
    Kh += D33 * b[i]*t[i] / h;
    Khz += D55 * b[i] * t[i] / h;
    khxz += D33 * b[i] * t[i] * z[i] / h;
    khzx += D55 * b[i] * t[i] * x[i] / h;
    khxz2 += D55 * b[i] * t[i] * x[i] * x[i] / h;
    khxz2 += D33 * b[i] * t[i] * z[i] * z[i] / h;
}

// Build the initial stiffness matrix
double Kv = 0.0; double Km = 0.0; double e = 0.0; double ex = 0.0; double kyz
    = 0.0; double kyz2 = 0.0;
double kyxz = 0.0;

for(int i=0; i<mt; ++i)
{
    Kv += ky[i];
    Km += ky[i]*x[i]*x[i];
    e += ky[i]*x[i];
    kyz += ky[i]*z[i];
    kyz2 += ky[i] * z[i]*z[i];
    kyxz += ky[i] * x[i] * z[i];
}

// Stiffness matrix
E_SFI_BIAXIALK(0, 0) = Kh;
E_SFI_BIAXIALK(0, 1) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(0, 2) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(0, 3) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(0, 4) = khxz;
E_SFI_BIAXIALK(0, 5) = -Kh * c * h;
E_SFI_BIAXIALK(0, 6) = -Kh;
E_SFI_BIAXIALK(0, 7) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(0, 8) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(0, 9) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(0, 10) = -khxz;
E_SFI_BIAXIALK(0, 11) = -Kh * (1 - c) * h;

E_SFI_BIAXIALK(1, 0) = E_SFI_BIAXIALK(0, 1);
E_SFI_BIAXIALK(1, 1) = Kv;
E_SFI_BIAXIALK(1, 2) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(1, 3) = kyz;

```

```

E_SFI_BIAXIALK(1, 4) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(1, 5) = e;
E_SFI_BIAXIALK(1, 6) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(1, 7) = -Kv;
E_SFI_BIAXIALK(1, 8) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(1, 9) = -kyz;
E_SFI_BIAXIALK(1, 10) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(1, 11) = -e;

E_SFI_BIAXIALK(2, 0) = E_SFI_BIAXIALK(0, 2);
E_SFI_BIAXIALK(2, 1) = E_SFI_BIAXIALK(1, 2);
E_SFI_BIAXIALK(2, 2) = Khz;
E_SFI_BIAXIALK(2, 3) = -Khz * c * h;
E_SFI_BIAXIALK(2, 4) = -khzx;
E_SFI_BIAXIALK(2, 5) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(2, 6) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(2, 7) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(2, 8) = -Khz;
E_SFI_BIAXIALK(2, 9) = -Khz * (1 - c) * h;
E_SFI_BIAXIALK(2, 10) = khzx;
E_SFI_BIAXIALK(2, 11) = 0.0;

E_SFI_BIAXIALK(3, 0) = E_SFI_BIAXIALK(0, 3);
E_SFI_BIAXIALK(3, 1) = E_SFI_BIAXIALK(1, 3);
E_SFI_BIAXIALK(3, 2) = E_SFI_BIAXIALK(2, 3);
E_SFI_BIAXIALK(3, 3) = Khz * c * c * h * h + kyz2;
E_SFI_BIAXIALK(3, 4) = khzx * c * h;
E_SFI_BIAXIALK(3, 5) = kyxz;
E_SFI_BIAXIALK(3, 6) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(3, 7) = -kyz;
E_SFI_BIAXIALK(3, 8) = Khz * c * h;
E_SFI_BIAXIALK(3, 9) = Khz * (1 - c) * c * h * h - kyz2;
E_SFI_BIAXIALK(3, 10) = -khzx * c * h;
E_SFI_BIAXIALK(3, 11) = -kyxz;

E_SFI_BIAXIALK(4, 0) = E_SFI_BIAXIALK(0, 4);
E_SFI_BIAXIALK(4, 1) = E_SFI_BIAXIALK(1, 4);
E_SFI_BIAXIALK(4, 2) = E_SFI_BIAXIALK(2, 4);
E_SFI_BIAXIALK(4, 3) = E_SFI_BIAXIALK(3, 4);
E_SFI_BIAXIALK(4, 4) = khzx2 + khxz2;
E_SFI_BIAXIALK(4, 5) = -khxz * c * h;
E_SFI_BIAXIALK(4, 6) = -khxz;
E_SFI_BIAXIALK(4, 7) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(4, 8) = khzx;
E_SFI_BIAXIALK(4, 9) = khzx * (1 - c) * h;
E_SFI_BIAXIALK(4, 10) = -khzx2 - khxz2;
E_SFI_BIAXIALK(4, 11) = -khxz * (1 - c) * h;

E_SFI_BIAXIALK(5, 0) = E_SFI_BIAXIALK(0, 5);
E_SFI_BIAXIALK(5, 1) = E_SFI_BIAXIALK(1, 5);

```

```

E_SFI_BIAXIALK(5, 2) = E_SFI_BIAXIALK(2, 5);
E_SFI_BIAXIALK(5, 3) = E_SFI_BIAXIALK(3, 5);
E_SFI_BIAXIALK(5, 4) = E_SFI_BIAXIALK(4, 5);
E_SFI_BIAXIALK(5, 5) = h * h * c * c * Kh + Km;
E_SFI_BIAXIALK(5, 6) = h * c * Kh;
E_SFI_BIAXIALK(5, 7) = -e;
E_SFI_BIAXIALK(5, 8) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(5, 9) = -kyxz;
E_SFI_BIAXIALK(5, 10) = khxz * c * h;
E_SFI_BIAXIALK(5, 11) = (1 - c) * c * h * h * Kh - Km;

```

```

E_SFI_BIAXIALK(6, 0) = E_SFI_BIAXIALK(0, 6);
E_SFI_BIAXIALK(6, 1) = E_SFI_BIAXIALK(1, 6);
E_SFI_BIAXIALK(6, 2) = E_SFI_BIAXIALK(2, 6);
E_SFI_BIAXIALK(6, 3) = E_SFI_BIAXIALK(3, 6);
E_SFI_BIAXIALK(6, 4) = E_SFI_BIAXIALK(4, 6);
E_SFI_BIAXIALK(6, 5) = E_SFI_BIAXIALK(5, 6);
E_SFI_BIAXIALK(6, 6) = Kh;
E_SFI_BIAXIALK(6, 7) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(6, 8) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(6, 9) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(6, 10) = khxz;
E_SFI_BIAXIALK(6, 11) = Kh * (1 - c) * h;

```

```

E_SFI_BIAXIALK(7, 0) = E_SFI_BIAXIALK(0, 7);
E_SFI_BIAXIALK(7, 1) = E_SFI_BIAXIALK(1, 7);
E_SFI_BIAXIALK(7, 2) = E_SFI_BIAXIALK(2, 7);
E_SFI_BIAXIALK(7, 3) = E_SFI_BIAXIALK(3, 7);
E_SFI_BIAXIALK(7, 4) = E_SFI_BIAXIALK(4, 7);
E_SFI_BIAXIALK(7, 5) = E_SFI_BIAXIALK(5, 7);
E_SFI_BIAXIALK(7, 6) = E_SFI_BIAXIALK(6, 7);
E_SFI_BIAXIALK(7, 7) = Kv;
E_SFI_BIAXIALK(7, 8) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(7, 9) = kyz;
E_SFI_BIAXIALK(7, 10) = 0.0;
E_SFI_BIAXIALK(7, 11) = e;

```

```

E_SFI_BIAXIALK(8, 0) = E_SFI_BIAXIALK(0, 8);
E_SFI_BIAXIALK(8, 1) = E_SFI_BIAXIALK(1, 8);
E_SFI_BIAXIALK(8, 2) = E_SFI_BIAXIALK(2, 8);
E_SFI_BIAXIALK(8, 3) = E_SFI_BIAXIALK(3, 8);
E_SFI_BIAXIALK(8, 4) = E_SFI_BIAXIALK(4, 8);
E_SFI_BIAXIALK(8, 5) = E_SFI_BIAXIALK(5, 8);
E_SFI_BIAXIALK(8, 6) = E_SFI_BIAXIALK(6, 8);
E_SFI_BIAXIALK(8, 7) = E_SFI_BIAXIALK(7, 8);
E_SFI_BIAXIALK(8, 8) = Khz;
E_SFI_BIAXIALK(8, 9) = Khz * (1 - c) * h;
E_SFI_BIAXIALK(8, 10) = -khxz;
E_SFI_BIAXIALK(8, 11) = 0.0;

```



```

E_SFI_BIAXIALK(9, 0) = E_SFI_BIAXIALK(0, 9);
E_SFI_BIAXIALK(9, 1) = E_SFI_BIAXIALK(1, 9);
E_SFI_BIAXIALK(9, 2) = E_SFI_BIAXIALK(2, 9);
E_SFI_BIAXIALK(9, 3) = E_SFI_BIAXIALK(3, 9);
E_SFI_BIAXIALK(9, 4) = E_SFI_BIAXIALK(4, 9);
E_SFI_BIAXIALK(9, 5) = E_SFI_BIAXIALK(5, 9);
E_SFI_BIAXIALK(9, 6) = E_SFI_BIAXIALK(6, 9);
E_SFI_BIAXIALK(9, 7) = E_SFI_BIAXIALK(7, 9);
E_SFI_BIAXIALK(9, 8) = E_SFI_BIAXIALK(8, 9);
E_SFI_BIAXIALK(9, 9) = Khz * (1 - c) * (1 - c) * h * h + ky2;
E_SFI_BIAXIALK(9, 10) = -khzx * (1 - c) * h;
E_SFI_BIAXIALK(9, 11) = kyxz;

E_SFI_BIAXIALK(10, 0) = E_SFI_BIAXIALK(0, 10);
E_SFI_BIAXIALK(10, 1) = E_SFI_BIAXIALK(1, 10);
E_SFI_BIAXIALK(10, 2) = E_SFI_BIAXIALK(2, 10);
E_SFI_BIAXIALK(10, 3) = E_SFI_BIAXIALK(3, 10);
E_SFI_BIAXIALK(10, 4) = E_SFI_BIAXIALK(4, 10);
E_SFI_BIAXIALK(10, 5) = E_SFI_BIAXIALK(5, 10);
E_SFI_BIAXIALK(10, 6) = E_SFI_BIAXIALK(6, 10);
E_SFI_BIAXIALK(10, 7) = E_SFI_BIAXIALK(7, 10);
E_SFI_BIAXIALK(10, 8) = E_SFI_BIAXIALK(8, 10);
E_SFI_BIAXIALK(10, 9) = E_SFI_BIAXIALK(9, 10);
E_SFI_BIAXIALK(10, 10) = khxz2 + khxz2;
E_SFI_BIAXIALK(10, 11) = khxz * (1 - c) * h;

E_SFI_BIAXIALK(11, 0) = E_SFI_BIAXIALK(0, 11);
E_SFI_BIAXIALK(11, 1) = E_SFI_BIAXIALK(1, 11);
E_SFI_BIAXIALK(11, 2) = E_SFI_BIAXIALK(2, 11);
E_SFI_BIAXIALK(11, 3) = E_SFI_BIAXIALK(3, 11);
E_SFI_BIAXIALK(11, 4) = E_SFI_BIAXIALK(4, 11);
E_SFI_BIAXIALK(11, 5) = E_SFI_BIAXIALK(5, 11);
E_SFI_BIAXIALK(11, 6) = E_SFI_BIAXIALK(6, 11);
E_SFI_BIAXIALK(11, 7) = E_SFI_BIAXIALK(7, 11);
E_SFI_BIAXIALK(11, 8) = E_SFI_BIAXIALK(8, 11);
E_SFI_BIAXIALK(11, 9) = E_SFI_BIAXIALK(9, 11);
E_SFI_BIAXIALK(11, 10) = E_SFI_BIAXIALK(10, 11);
E_SFI_BIAXIALK(11, 11) = (1 - c) * (1 - c) * h * h * Kh + Km;

for(int i=0; i<12; ++i)
{
    if (E_SFI_BIAXIALK(i,i) == 0.0)
    {
        opserr << "Singular E_SFI_BIAXIAL inicial /n";
    }
}
// Return element stiffness matrix
return E_SFI_BIAXIALK;
}

```

Función para obtener el vector de fuerzas del elemento.

```
// Get element force vector
const Vector & E_SFI_BIAXIAL::getResistingForce()
{
    // Get the current force vector from prism stresses
    for (int i=0; i < mt; i++)
    {
        const Vector &Stress = theMaterial[i]->getStress(); // Get the material stress

        double fx = Stress(0);
        double fy = Stress(1);
        double fz = Stress(2);
        double tauyz = Stress(3);
        double tauxz = Stress(4);
        double tauxy = Stress(5);
        Fx[i] = fx * AcX[i];
        Fy[i] = fy * AcY[i];
        Fz[i] = fz * AcZ[i];
        Fxy[i] = tauxy * AcY[i];
        Fxz[i] = tauxz * AcY[i]; // Not necessary
        Fyz[i] = tauyz * AcY[i];
    }
    // Build force vector
    double Fh = 0.0; // Force in horizontal spring (at location c*h)
    double Fysum = 0.0; // Sum of vertical forces
    double Fhz = 0.0; // Force in horizontal z spring (at location c*h)
    double Fhxz = 0.0;
    double Fhzx = 0.0;

    for (int i=0; i < mt; i++)
    {
        Fh += -1.0*Fxy[i];
        Fysum += Fy[i];
        Fhz += -1.0 * Fyz[i];
        Fhxz += -1.0 * Fxy[i]*z[i];
        Fhzx += -1.0 * Fyz[i]*x[i];
    }
    E_SFI_BIAXIALR(0) = Fh;
    E_SFI_BIAXIALR(1) = -Fysum;
    E_SFI_BIAXIALR(2) = Fhz;
    E_SFI_BIAXIALR(3) = -Fhz*c*h;
    E_SFI_BIAXIALR(4) = Fhxz - Fhzx;
    E_SFI_BIAXIALR(5) = -Fh*c*h;
    E_SFI_BIAXIALR(6) = -Fh;
    E_SFI_BIAXIALR(7) = Fysum;
    E_SFI_BIAXIALR(8) = -Fhz;
    E_SFI_BIAXIALR(9) = -Fhz * (1-c) * h;
    E_SFI_BIAXIALR(10) = Fhzx - Fhxz;
    E_SFI_BIAXIALR(11) = -Fh*(1-c)*h;
}
```

```

for (int i=0; i < mt; i++) {
    E_SFI_BIAXIALR(3) -= Fy[i] * z[i];
    E_SFI_BIAXIALR(5) -= Fy[i]*x[i];
    E_SFI_BIAXIALR(9) += Fy[i] * z[i];
    E_SFI_BIAXIALR(11) += +Fy[i]*x[i];
}
// Return element force vector
return E_SFI_BIAXIALR;
}

```

Función para calcular los desplazamientos y deformaciones de cada prisma.

```

// Get current strains at RC prisms (macro-fibers)
void E_SFI_BIAXIAL ::computeCurrentStrain(void)
{
    const Vector &disp1 = theNodes[0]->getTrialDisp(); // DOFs D1,D2,D3,D4,D5,D6
    const Vector &disp2 = theNodes[1]->getTrialDisp(); // DOFs D7,D8,D9,D10,D11,D12

// Deformations at each RC prism (macro-fiber)
    for(int i=0; i<mt; i++) {
        Dy[i] = -disp1(1) - z[i] * disp1(3) - x[i] * disp1(5) + disp2(1) + z[i] * disp2(3) +
            x[i] * disp2(5) ;
        Dxy[i] = disp1(0) - disp2(0) - c * h * disp1(5) - (1 - c) * h * disp2(5);
        Dyz[i] = disp1(2) - disp2(2) - c * h * disp1(3) - (1 - c) * h * disp2(3);
        Dxz[i] = -sqrt(pow(x[i], 2.0)+ pow(z[i], 2.0))* disp1(4)+ sqrt(pow(x[i], 2.0) + pow
            (z[i], 2.0)) * disp2(4); // Torsion
    }
    Dshx = - Dxy[0]; Dshz = -Dyz[0]; //Store shear deformations for the recorder

// Strains at each RC prism (macro-fiber)
    for(int i=0;i<mt;i++) {
        E_SFI_BIAXIALStrainY[i] = Dy[i]/h;
        E_SFI_BIAXIALStrainXY[i] = -Dxy[i]/h;
        E_SFI_BIAXIALStrainYZ[i] = -Dyz[i] / h;
        E_SFI_BIAXIALStrainX[i] = 0.55 * pow(1.0 + Roux[i], -60.0) * (1.0-pow(3.0,-80
            0.0* abs(E_SFI_BIAXIALStrainXY[i]))) * abs(E_SFI_BIAXIALStrainXY[i]);
        E_SFI_BIAXIALStrainZ[i] = 0.55 * pow(1.0 + Rouz[i], -60.0) * (1.0 - pow(3.0,
            -800.0 * abs(E_SFI_BIAXIALStrainYZ[i]))) * abs(E_SFI_BIAXIALStrainYZ[i]);
        E_SFI_BIAXIALStrainXZ[i] = -Dxz[i] / h;
    }
// Store strains into a single vector
    for(int i=0; i<mt; i++) {
        E_SFI_BIAXIALStrain[i] = E_SFI_BIAXIALStrainX[i];
        E_SFI_BIAXIALStrain[i+mt] = E_SFI_BIAXIALStrainY[i];
        E_SFI_BIAXIALStrain[i+2*mt] = E_SFI_BIAXIALStrainZ[i];
        E_SFI_BIAXIALStrain[i + 3 * mt] = E_SFI_BIAXIALStrainYZ[i];
        E_SFI_BIAXIALStrain[i + 4 * mt] = E_SFI_BIAXIALStrainXZ[i];
        E_SFI_BIAXIALStrain[i + 5 * mt] = E_SFI_BIAXIALStrainXY[i];
    }
}

```