Espacio de formas bilineales invariantes de un módulo simple sobre un álgebra de Lie

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias Matemáticas.

Facultad de Ciencias

Camilo Vera Albornoz

Mayo 2016

Director de Tesis: Dr. Manuel Arenas Carmona

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE MAGISTER

Se informa a la escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Camilo Ignacio Vera Albornoz

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Matemáticas, en el examen de Defensa Privada de Tesis rendido el día Lunes 25 de Abril de 2016.

Director de Tesis:

Dr. Manuel Arenas

Comisión de Evaluación de Tesis:

Dra. Alicia Labra (Presidenta)

Dr. Antonio Behn

Somos el resultado de lo que pensamos
Buda

Agradecimientos

Para comenzar, quiero agradecer a mi profesor guía, Manuel Arenas, por su enorme apoyo en este trabajo, por su tiempo dedicado para que nos juntáramos una vez a la semana a revisar los resultados conseguidos y por la confianza que me brindó durante el tiempo en que trabajamos en esta tesis.

También quiero dar gracias a la profesora Alicia Labra por el dinero de Fondecyt para tesistas que me otorgó durante mi estancia en el programa y al profesor Antonio Behn por su ayuda en la confección de matrices gigantes con el programa computacional Sage.

Agradezco también a Santiago Andrews, auxiliar del departamento de matemática, por su disposición para ayudarme a utilizar la fotocopiadora las veces que necesité y además por su cordialidad y buen humor de todos los días.

También agradezco a mi familia, incluyendo a la perrita Yelyah, por el apoyo y confianza que me han dado, en particular a mi hermana Carolina que me ayudó con la biografía.

Quiero también dar gracias a todas las personas con las que compartí tanto en el pregrado como en el postgrado. Sobre todo a mis amigos Marco Cornejo, por la ayuda con los documentos latex, a Boris Roa, Ricardo Osorio, Fernando Herrera y la Coni, por nombrar algunos, por los grandes momentos compartidos, además de estar con los chiquillos en las clases de ajedrez impartidas por el maestro Pablo Calvo, a quien también agradezco por sus buenas clases y disposición para ayudarnos a mejorar nuestro juego.

Por último, quiero agradecer a la familia Huang y Chen por su gran hospitalidad y también al Muteki, un amigo mío y tanto de Boris y de Ricardo.

Resumen

Dado un espacio vectorial M y un álgebra A, ambos de dimensión finita y sobre un mismo cuerpo $\mathbb{F}$, junto con aplicaciones bilineales $\lambda : A \times M \longrightarrow M$ y $\rho : M \times A \longrightarrow M$ denotadas por $\lambda(x, u) = x.u$ y $\rho(u, x) = u.x$, queremos encontrar las funciones $f : M \times M \longrightarrow \mathbb{F}$ tales que $f(u.x, v) = f(u, x.v)$, para todo $u, v \in M; x \in A$. Para tal objetivo nos apoyaremos en un algoritmo que resuelve el mismo problema para álgebras y lo adaptaremos para nuestro propósito. Una vez hecho esto, aplicaremos ese procedimiento para el caso en que A sea $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ y $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, las álgebras de Lie de matrices complejas de traza cero de tamaño 2 por 2 y 3 por 3, respectivamente.

Abstract

Given a vector space M and an algebra A, both finite-dimensional and over a same field $\mathbb{F}$, together with bilinear maps $\lambda : A \times M \longrightarrow M$ and $\rho : M \times A \longrightarrow M$ denoted by $\lambda(x, u) = x.u$ and $\rho(u, x) = u.x$, we want find the functions $f : M \times M \longrightarrow \mathbb{F}$ such that $f(u.x, v) = f(u, x.v)$, for all $u, v \in M; x \in A$. For that goal we will support on an algorithm that solves the problem for algebras and we will adapt to our purpose. Once this is done, we will apply this procedure for the case that A be $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ and $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, the complex matrix Lie algebras with trace zero of size 2 times 2 and 3 times 3, respectively.

Índice general

Introducción

Existe una amplia gama de referencias para dar el puntapié inicial en el estudio de la teoría de Lie, ya sea en álgebras o en grupos. Para el caso de álgebras el libro por excelencia desde mi punto de vista es [6] de James Humphreys ya que su forma de explicar e introducir cada sección hace que sea fácil de abordar. Otro libro bastante interesante pero al parecer menos conocido es [3] de Luiz Barrera San Martin, ya que solo se vende en Brasil (de hecho lo busqué en libgen y no apareció). Ambos libros los utilicé cuando hice un tutorial de Álgebras de Lie con el profesor Manuel Arenas el segundo semestre del 2013. Ese mismo semestre tuve el curso de Grupos de Lie, dictado también por el profesor Manuel. Los libros usados fueron [5] y [9] de Brian Hall y Alexander Kirillov, respectivamente, siendo el primero muy bueno para comenzar a estudiar grupos de Lie mientras que el segundo es algo más denso. De hecho, el libro que me dio la llave maestra para conseguir uno de los resultados más importantes de esta tesis es justamente [5] porque además de grupos de Lie trabaja mucho con la parte de álgebras.

El capítulo uno comienza con datos históricos con respecto al surgimiento de las álgebras no asociativas y de la teoría de representaciones. Luego se dan las definiciones básicas de la teoría de álgebras, los ejemplos más importantes, los subconjuntos imprescindibles de un álgebra (como las subálgebras y los ideales), homomorfismos entre ellas y construcciones como la de extender el cuerpo de escalares. También se da la definición de variedad de álgebras y se mencionan las más conocidas y estudiadas que son las asociativas, las alternativas, las de Jordan y las de Lie. Luego, dado un espacio vectorial M y un álgebra A, ambos sobre un mismo cuerpo, se definen bimódulos y birrepresentaciones de A en M, para finalmente dar sus propiedades en las cuatro categorías antes mencionadas.

En el capítulo dos se define el concepto esencial de este trabajo, el de forma bilineal invariante. Primero se hace para álgebras de dimensión finita en general y se menciona un método hecho en [1] para encontrarlas. Enseguida se generaliza la definición anterior para bimódulos sobre un álgebra para después extender el método descrito a este caso y que viene seguido de una serie de ejemplos en las variedades más conocidas. En la última sección nos centraremos en el caso en que el álgebra sea de Lie. Ahí se define módulo simple y se prueba que el espacio de formas invariantes de un módulo simple tiene una propiedad muy importante, resultado que será clave en lo que viene.

En el capítulo tres nos reduciremos a un caso bien particular: el álgebra de Lie de matrices complejas de 2 por 2 con traza cero denotada por $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Al principio se menciona (tal como se hace en [6]) la forma que tienen los módulos simples sobre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. También se define peso de un módulo y peso maximal, y se muestra que los pesos son números enteros, mientras que el peso maximal es un entero no negativo. Una vez hecho esto, aplicamos el algoritmo demostrado en la sección anterior para los casos en que el peso maximal es menor o igual que 3 y gracias a eso pudimos encontrar un patrón de las formas invariantes cuando el peso maximal es arbitrario.

En el capítulo cuatro se adaptan las definiciones del capítulo tres para el caso del álgebra de Lie de matrices complejas de 3 por 3 con traza cero, $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. Aquí, a diferencia de lo que ocurre en $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, los pesos de un módulo resultan ser pares ordenados con coordenadas complejas pero como $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ contiene subálgebras isomorfas a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ se muestra (la demostración está en [5]) que las coordenadas de cualquier peso son números enteros y que las del peso maximal son enteros no negativos. Además los pesos de un módulo simple generan un reticulado en $\mathbb{Z}^2$ que nos permitió saber en qué casos los módulos simples poseían formas invariantes no nulas, a la postre uno de los resultados principales de este trabajo.

En el capítulo cinco se dan a conocer los problemas que quedaron pendientes o bien que surgieron a partir de esta tesis.

Finalmente, se lista una serie de referencias que fueron utilizadas para extraer ejemplos, teoremas y ejercicios propuestos (que por supuesto aquí fueron resueltos) que permitieron desembocar en los resultados conseguidos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Historia

Hasta mediados del siglo XIX se trabajaba con álgebras que satisfacían la ley asociativa y que tuvieran elemento neutro. En 1845, el matemático británico Arthur Cayley construyó el álgebra de octoniones (también llamados números de Cayley), álgebra de dimensión 8 sobre $\mathbb{R}$ y que resultó ser no asociativa, siendo la primera aparición de este tipo de álgebras. Sin embargo, Cayley no buscaba un ejemplo de un álgebra donde la asociatividad fallara, sino que quería encontrar una forma de representar el producto de dos elementos que son suma de ocho cuadrados (que finalmente resulta ser una suma de ocho cuadrados), de la misma manera que el álgebra de cuaterniones resolvía el problema para dos elementos que son suma de cuatro cuadrados, cuyo producto también es suma de cuatro cuadrados.

Ya en 1870, el matemático noruego Marius Sophus Lie, estudiando los grupos de transformaciones (ahora llamados grupos de Lie), descubre una estructura de álgebra en el plano tangente del elemento identidad del grupo visto como variedad diferenciable. De esta manera aparecen los grupos infinitesimales, actualmente conocidos como álgebras de Lie, y que le sirvieron a Lie para abordar las ecuaciones diferenciales vía sus grupos de simetría, del mismo modo que la teoría de Galois hace con las ecuaciones algebraicas. Esta clase de álgebras son, en general, no asociativas y además no tienen elemento neutro ya que cumplen la relación $x^2 = 0$, para todo x. Desde entonces estas álgebras han sido muy estudiadas y tienen diversas aplicaciones en muchas áreas.

En 1934, el físico alemán Pascual Jordan, con el objetivo de dar formalismos matemáticos a la física cuántica, creó una clase de álgebras conmutativas pero no asociativas que satisfacen la identidad $(x^2y)x = x^2(yx)$, para todo x, y. Estas álgebras se comenzaron a llamar álgebras de Jordan y fueron objeto de estudio de muchos matemáticos. Cabe destacar el trabajo de Abraham Adrian Albert, quien formuló numerosos teoremas respecto de la estructura de álgebras de Jordan.

Luego de todas estas construcciones se hizo necesaria una teoría general sobre álgebras no asociativas, donde las álgebras de Lie y las de Jordan son, quizás, las más estudiadas.

Un área muy importante dentro de la teoría de álgebras no asociativas es la de representaciones, que tuvo su apogeo durante la primera mitad del siglo XX. En un comienzo se trabajaba solo con representaciones de álgebras asociativas, hasta que en 1945 el matemático polaco Samuel Eilenberg generalizó la noción de representación para un álgebra cualquiera.

1.2. Conceptos básicos

Definición 1.1 *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo. Una $\mathbb{F}$-álgebra es un espacio vectorial A sobre $\mathbb{F}$ provisto de una aplicación bilineal $p : A \times A \longrightarrow A$, denotada por $p(x, y) = xy$, y llamada multiplicación o producto del álgebra.*

Diremos que una $\mathbb{F}$-álgebra A es asociativa si $(xy)z = x(yz)$, para todo $x, y, z \in A$; se dice conmutativa si $xy = yx$, para todo $x, y \in A$; se dice que tiene elemento neutro si existe $1_A \in A$ tal que $x1_A = 1_Ax = x$, para todo $x \in A$. En el último caso se tiene que $\mathbb{F}$ se inyecta en A ya que si $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces $\alpha 1_A \in A$ y la función $\alpha \mapsto \alpha 1_A$ es inyectiva.

Definición 1.2 *Sea A una $\mathbb{F}$-álgebra. El asociador $(, ,) : A \times A \times A \longrightarrow A$ está definido como $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$, el conmutador $[,] : A \times A \longrightarrow A$ se define como $[x, y] := xy - yx$ y el producto simétrico $* : A \times A \longrightarrow A$ se define por $x * y := \frac{1}{2}(xy + yx)$ si $car(\mathbb{F}) \neq 2$ y por $x * y := xy + yx$ si $car(\mathbb{F}) = 2$.*

Notamos que tanto el conmutador como el producto simétrico definen una nueva multiplicación en A. Además es claro que A será asociativa si y solo si su asociador es la función idénticamente cero y será conmutativa si y solo si su conmutador es cero.

Sea A un álgebra y sea $x \in A$. Definimos recursivamente las potencias principales izquierdas de x como sigue:

$$x^n := \begin{cases} x & n = 1 \\ x^{n-1}x & n > 1 \end{cases}$$

Notemos que si el álgebra A no es asociativa entonces puede ocurrir que para algún $x \in A$ las potencias $x^2x^2 = (xx)(xx)$ y $x^4 = x^3x = (x^2x)x = ((xx)x)x$ sean elementos distintos.

Definición 1.3 *Sea A un álgebra y $a \in A$ un elemento arbitrario y fijo. Definimos el operador de multiplicación a la izquierda por a como la aplicación $L_a : A \longrightarrow A$ dada por $L_a(x) = ax$ y el operador de multiplicación a la derecha por a como la aplicación $R_a : A \longrightarrow A$ dada por $R_a(x) = xa$.*

Observemos que al ser el producto del álgebra una aplicación bilineal, los dos operadores de la definición anterior son lineales. Notemos que si el álgebra es conmutativa ambos operadores coinciden puesto que no hay distinción entre multiplicar a la izquierda o a la derecha.

Definición 1.4 *Sea A una $\mathbb{F}$-álgebra. Definimos las siguientes subestructuras de A:*

1. *Sean M y N dos subconjuntos no vacíos arbitrarios de A. Entonces denotamos por MN al subespacio generado por el conjunto $\{xy \mid x \in M, y \in N\}$.*
2. *Un subespacio B de A es una subálgebra si $B^2 := BB \subseteq B$, es decir, si $xy \in B$, para todo $x, y \in B$.*
3. *Un subespacio C de A es un ideal izquierdo si $AC \subseteq C$, es decir, si $xy \in C$, para todo $x \in A; y \in C$.*
4. *Un subespacio D de A es un ideal derecho si $DA \subseteq D$, es decir, si $xy \in D$, para todo $x \in D; y \in A$.*
5. *Un subespacio E de A es un ideal bilátero si es ideal izquierdo y derecho a la vez.*

En adelante, a los ideales biláteros los llamaremos simplemente ideales. Con esto podemos dar la siguiente definición.

Definición 1.5

1. *Diremos que un álgebra A es simple si $A \neq \{0\}$ y sus únicos ideales son $\{0\}$ y A (llamados ideales triviales).*

2. *Diremos que un álgebra A es semisimple si $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$, donde cada A_j, $j = 1, ..., n$, es una subálgebra simple de A y la suma directa es en el sentido de álgebras.*

Notemos que toda álgebra simple es semisimple (es suficiente considerar la suma directa en 1.5.2 con un único sumando).

Definición 1.6 *Sean A y B dos $\mathbb{F}$-álgebras. Una función $\varphi : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de álgebras si cumple:*

1. *$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, para todo $x, y \in A$.*

2. *$\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$, para todo $\alpha \in \mathbb{F}$, $x \in A$.*

3. *$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, para todo $x, y \in A$.*

Dado un homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$ de álgebras, definimos $ker(\varphi) := \{x \in A \mid \varphi(x) = 0\}$ e $Im(\varphi) := \{\varphi(x) \mid x \in A\} = \{y \in B \mid \text{ existe } x \in A \text{ con } y = \varphi(x)\}$. Es fácil verificar que $ker(\varphi)$ es un ideal de A e $Im(\varphi)$ es una subálgebra de B. Por otra parte, diremos que φ es un monomorfismo si, además, es inyectiva; un epimorfismo si es sobreyectiva y un isomorfismo si es biyectiva.

Si A es una $\mathbb{F}$-álgebra definimos $\hat{A} := \mathbb{F} \times A = \{(\alpha, x) \mid \alpha \in \mathbb{F}, x \in A\}$. La suma, la ponderación y el producto en $\hat{A}$ se definen como sigue, para todo $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{F}; x, y \in A$:

$$(\alpha, x) + (\beta, y) := (\alpha + \beta, x + y)$$

$$\lambda(\alpha, x) := (\lambda\alpha, \lambda x)$$

$$(\alpha, x)(\beta, y) := (\alpha\beta, \beta x + \alpha y + xy)$$

Así $\hat{A}$ es una $\mathbb{F}$-álgebra con elemento neutro $1_{\hat{A}} = (1, 0)$ y el conjunto $\{(0, x) \mid x \in A\}$ es un ideal de $\hat{A}$ isomorfo a A. Una propiedad importante es que si A es asociativa o conmutativa entonces $\hat{A}$ también hereda esa condición, de esta manera, toda álgebra asociativa o conmutativa se puede suponer con 1. ¿Qué sucede si A tiene 1?. En este caso el 1 de A pierde su condición de neutro y es sustituido por el 1 de $\hat{A}$.

Otra construcción estándar en la teoría de álgebras es la siguiente: si A es una $\mathbb{F}$-álgebra y $\mathbb{K}$ una extensión de $\mathbb{F}$ definimos $A_{\mathbb{K}} := \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{F}} A$. La suma se define de manera natural, la ponderación y el producto se definen, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}; x, y \in A$, así:

$$\alpha(\beta \otimes x) := \alpha\beta \otimes x$$

$$(\alpha \otimes x)(\beta \otimes y) := \alpha\beta \otimes xy$$

De esta manera $A_{\mathbb{K}}$ es una $\mathbb{K}$-álgebra con la propiedad de que el subespacio $\{1 \otimes x \mid x \in A\}$ de $A_{\mathbb{K}}$ es, como $\mathbb{F}$-álgebra, isomorfo a A. Este método es muy usado cuando se necesita trabajar con cuerpos algebraicamente cerrados y asegurar la existencia de valores propios.

1.3. Principales clases de álgebras

En esta sección veremos las definiciones, ejemplos y propiedades más importantes de álgebras asociativas, alternativas, Lie y Jordan, las más conocidas dentro de las álgebras no asociativas.

1.3.1. Álgebras asociativas

Los ejemplos más simples de álgebras asociativas son el álgebra de matrices cuadradas, el álgebra de endomorfismos de un espacio vectorial y el álgebra de polinomios.

Otro ejemplo y muy importante es el álgebra de cuaterniones. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo de característica distinta de 2 y sean $a, b \in \mathbb{F}$ ambos no nulos. Sea A una $\mathbb{F}$-álgebra con base $\{1, i, j, k\}$. Definimos $i^2 = a, j^2 = b, ij = -ji = k$. Entonces tenemos que $k^2 = -ab, ki = -ik = -aj, jk = -kj = -bi, 1i = i1 = i, 1j = j1 = j, 1k = k1 = k$ si y solo si A es asociativa, con elemento neutro $1_A = 1$ y no conmutativa. Denotamos a A por $(\frac{a,b}{\mathbb{F}})$ y se llama álgebra de cuaterniones sobre $\mathbb{F}$. En el caso en que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y $a = b = -1$ se obtienen los cuaterniones que Hamilton descubrió en 1843 y se denotan por $\mathbb{H}$.

Para el siguiente ejemplo consideremos un cuerpo $\mathbb{F}$ y un grupo G. Definimos el conjunto $\mathbb{F}[G] := \{u : G \longrightarrow \mathbb{F}$ función $\mid u$ tiene soporte finito$\}$, donde el soporte de u se define por $\text{sop}(u) := \{r \in G \mid u(r) \neq 0\}$. Definimos en $\mathbb{F}[G]$ las operaciones de suma, ponderación y producto, para todo $u, v \in \mathbb{F}[G]; r, r_1, r_2 \in G; \alpha \in \mathbb{F}$:

$$(u + v)(r) := u(r) + v(r)$$

$$(\alpha u)(r) := \alpha u(r)$$

$$(uv)(r) := \sum_{r_1 r_2 = r} u(r_1)v(r_2)$$

Así $\mathbb{F}[G]$ es una $\mathbb{F}$-álgebra asociativa llamada álgebra de grupo con base $\{\delta_r \mid r \in G\}$, donde $\delta_r : G \longrightarrow \mathbb{F}$ es la función $\delta_r(s) = 1$ si $s = r$ y $\delta_r(s) = 0$ si $s \neq r$. Notemos que $\mathbb{F}[G]$ es un álgebra conmutativa si y solo si G es un grupo abeliano. Por otra parte, si $f : G \longrightarrow GL(V)$ es un homomorfismo de grupos, con V un espacio vectorial, entonces se puede extender a una aplicación lineal $\hat{f} : \mathbb{F}[G] \longrightarrow End(V)$. En efecto, si $u \in \mathbb{F}[G]$ entonces $u = \sum_{r \in G} a_r \delta_r$, con $a_r \in \mathbb{F}$. Más aún, si $s \in G$ se tiene que $u(s) = \sum_{r \in G} a_r \delta_r(s) = a_s$, por lo que $u = \sum_{r \in G} u(r)\delta_r$. De esta manera definimos $\hat{f}(u) := \sum_{r \in G} u(r) f(r)$, que es claramente lineal.

1.3.2. Álgebras alternativas

Un álgebra A se llama alternativa si $(xx)y = x(xy)$ y $y(xx) = (yx)x$, para todo $x, y \in A$. En términos de asociadores la definición anterior se reescribe como $(x, x, y) = 0$ y $(y, x, x) = 0$, para todo $x, y \in A$. Por otra parte, usando operadores de multiplicación la definición quedaría $L_{x^2} = {L_x}^2$ y $R_{x^2} = {R_x}^2$, para todo $x \in A$. Es decir, las álgebras alternativas son una versión más débil de las álgebras asociativas. Por otra parte, consideremos el álgebra de cuaterniones $A = (\frac{a,b}{\mathbb{F}})$. Si $x = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k \in A$ definimos el conjugado de x como el cuaternión $\bar{x} := \alpha_1 - \alpha_2 i - \alpha_3 j - \alpha_4 k$. Luego, para $c \in \mathbb{F}$ no nulo, se define $B := A \times A = C(a, b, c)$ dotado del producto $(x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1 x_2 + c y_2 \bar{y}_1, \bar{x}_1 y_2 + x_2 y_1)$. Luego todo elemento $y \in B$ se escribe de la forma $y = q_1 + l q_2$, donde $q_1, q_2 \in A$ y $l^2 = c$. Al álgebra B se le llama álgebra de octoniones y es el ejemplo más importante de álgebra alternativa. Si $a = b = c = -1$ y $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ resulta el álgebra $\mathbb{O}$ de los números de Cayley.

1.3.3. Álgebras de Jordan

Definición 1.7 *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo de característica distinta de 2. Diremos que una $\mathbb{F}$-álgebra $\mathfrak{J}$ es de Jordan si cumple:*

1. $xy = yx$, *para todo* $x, y \in \mathfrak{J}$ *(conmutatividad).*
2. $(x^2y)x = x^2(yx)$, *para todo* $x, y \in \mathfrak{J}$ *(identidad de Jordan).*

Ejemplo 1.8

1. *Si A es una $\mathbb{F}$-álgebra asociativa, con $car(\mathbb{F}) \neq 2$, y definimos el producto simétrico en A, resulta un álgebra de Jordan denotada por A^+.*
2. *Sea $S := \{x \in M_n(\mathbb{R}) \mid x^t = x\}$ el conjunto de matrices simétricas con el producto simétrico. Entonces S es un álgebra de Jordan.*
3. *Sea $\mathbb{R}^2$ con el producto $(a, b)(c, d) = (ac + bd, ad + bc)$. Entonces $\mathbb{R}^2$ es un álgebra de Jordan.*

A partir de aquí denotaremos el producto del álgebra como $*$ sin que se preste a confusión con el producto simétrico.

El producto $*$ no es necesariamente asociativo. Considerando las matrices

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en $M_2(\mathbb{R})$ con el producto $x * y = \frac{1}{2}(xy + yx)$, se tiene por un lado que $(x * x) * y = \frac{1}{2}y$, mientras que $x * (x * y) = \frac{1}{4}y$. Así $(x * x) * y \neq x * (x * y)$.

Una observación importante que debemos hacer sobre las álgebras de Jordan es que siempre se puede suponer que tienen elemento neutro, ya que dada una $\mathbb{F}$-álgebra de Jordan $\mathfrak{J}$ podemos construir el álgebra $\hat{\mathfrak{J}} = \mathbb{F} \times \mathfrak{J}$ hecha en la sección 1.2 y que resulta ser también de Jordan.

Diremos que un álgebra de Jordan $\mathfrak{J}$ es especial si existe una $\mathbb{F}$-álgebra asociativa A, car$(\mathbb{F}) \neq 2$, tal que $\mathfrak{J}$ es una subálgebra de A^+. La razón de dar esta definición es que no toda álgebra de Jordan se puede ver como una subálgebra de A^+. Las álgebras de Jordan que no son especiales se llaman excepcionales.

1.3.4. Álgebras de Lie

Definición 1.9 *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y $\mathfrak{g}$ una $\mathbb{F}$-álgebra. Diremos que $\mathfrak{g}$ es de Lie si satisface:*

1. $x^2 = 0$, *para todo* $x \in \mathfrak{g}$ *(anticonmutatividad).*
2. $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$, *para todo* $x, y, z \in \mathfrak{g}$ *(identidad de Jacobi).*

Ejemplo 1.10

1. *Si A es un álgebra asociativa y definimos el conmutador en A, se consigue un álgebra de Lie denotada por A^-. Un caso particular es $A = M_n(\mathbb{F})$, el álgebra de matrices cuadradas de n por n con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{F}$, donde A^- se denota por $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$. Por otra parte, dado un espacio vectorial V, consideramos $A = End(V)$, el álgebra de endomorfismos de V, entonces $A^- = \mathfrak{gl}(V)$.*
2. *El espacio $\mathbb{R}^3$ con $xy := \vec{x} \times \vec{y}$, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, es un álgebra de Lie.*

De ahora en adelante el producto de un álgebra de Lie lo denotaremos por $[\,,\,]$ y no por yuxtaposición. Cuando pongamos dicho corchete no se debe confundir con el conmutador, ya que esa operación es solo un ejemplo de álgebra de Lie como lo muestra el ejemplo 1.10.1.

Observación 1.11

1. *Notemos que si* $[x,x]=0$, *para todo* $x\in\mathfrak{g}$, *entonces* $[x,y]=-[y,x]$, *para todo* $x,y\in\mathfrak{g}$. *En efecto, tenemos* $0=[x+y,x+y]=[x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y]=[x,y]+[y,x]$, *para todo* $x,y\in\mathfrak{g}$. *El recíproco se cumple solo si* $car(\mathbb{F})\neq 2$, *ya que si* $[x,y]=-[y,x]$, *para todo* $x,y\in\mathfrak{g}$, *tomamos* $y=x$, *así* $2[x,x]=0$ *implica que* $[x,x]=0$, *para todo* $x\in\mathfrak{g}$.

2. *El corchete es, en general, no asociativo. Consideremos el álgebra de Lie* $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ *junto con las matrices* $x=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ *e* $y=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$. *Entonces tenemos por un lado que* $[[x,x],y]=[0,y]=0$ *pero:*
$$[x,[x,y]]=[x,xy-yx]=x(xy-yx)-(xy-yx)x=y\neq 0.$$
De esta manera, tenemos que $[[x,x],y]\neq[x,[x,y]]$.

3. *A diferencia del caso Jordan, dada un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$, *siempre existe un álgebra asociativa* A *tal que* $\mathfrak{g}$ *es una subálgebra de* A^-, *resultado que es consecuencia del teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (este teorema se puede encontrar en [7] (pág. 159)).*

Los ejemplos más importantes de álgebras de Lie son las subálgebras de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$. Por mencionar algunos:

Ejemplo 1.12 *Subálgebras de* $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$:

1. $\mathfrak{so}_n(\mathbb{K}):=\{x\in\mathfrak{g}\mid x+x^t=0\}$, *llamada álgebra ortogonal.*
2. $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}):=\{x\in\mathfrak{g}\mid Tr(x)=0\}$, *llamada álgebra especial lineal.*
3. $\mathfrak{N}:=\{x\in\mathfrak{g}\mid x_{ij}=0, i\geq j\}$, *conjunto de matrices estrictamente triangulares superiores.*
4. $\mathfrak{T}:=\{x\in\mathfrak{g}\mid x_{ij}=0, i>j\}$, *conjunto de matrices triangulares superiores.*
5. $\mathcal{H}:=\{x\in\mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})\mid x_{ij}=0, i\geq j\}$ *se llama álgebra de Heisenberg.*
6. $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{K}):=\{x\in\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{K})\mid xJ+Jx^t=0\}$, *donde* $J=\begin{pmatrix}0&-I_n\\I_n&0\end{pmatrix}$, *se llama álgebra simpléctica.*
7. $\mathfrak{u}_n:=\{x\in\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})\mid x+x^*=0\}$, *donde* x^* *es la traspuesta conjugada de* x, *se llama álgebra unitaria.*
8. $\mathfrak{su}_n:=\{x\in\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})\mid x+x^*=0$ *y* $Tr(x)=0\}$, *se llama álgebra especial unitaria.*

Una observación respecto a las dos últimas álgebras es que si bien son subconjuntos de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, no son un subespacio sobre $\mathbb{C}$ pero sí sobre $\mathbb{R}$. Para notarlo es suficiente considerar $x=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}\in\mathfrak{su}_2$ y multiplicarla por i, lo que resulta $ix=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\notin\mathfrak{su}_2$.

Por otra parte, un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es simple si además de cumplir la definición 1.5.1 se tiene $\dim(\mathfrak{g})\geq 2$. Como ejemplo de álgebras de Lie simples tenemos $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ con $\mathrm{car}(\mathbb{K})\neq 2$, $\mathbb{R}^3$ con el producto cruz y $\mathfrak{su}_n$. Un ejemplo de álgebra de Lie semisimple que no es simple es $\mathfrak{so}_4(\mathbb{C})$ ya que en [5] (pág. 271, cap. 8) se muestra que $\mathfrak{so}_4(\mathbb{C})\cong\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Una función muy importante es la representación adjunta. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie definimos $ad:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ como $ad(x):=ad_x$, donde $ad_x:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$ es la función $ad_x(y):=[x,y]$. Esta aplicación es lineal gracias a la bilinealidad del corchete y de hecho es un homomorfismo de álgebras como consecuencia de la identidad de Jacobi. Algunas propiedades de la adjunta son, por ejemplo, que $ad_x([y,z])=[ad_x(y),z]+[y,ad_x(z)]$, para todo $x,y,z\in\mathfrak{g}$ y si $\mathfrak{g}$ es semisimple entonces ad es un monomorfismo (lo que dice que $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$).

1.4. Variedades de álgebras

1.4.1. Definiciones y ejemplos

Sea $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...\}$ un conjunto numerable de símbolos. Denotamos por $\mathcal{W}$ al conjunto de todas las sucesiones finitas que se pueden formar con elementos de X y por $\{X\}$ al subconjunto más pequeño de $\mathcal{W}$ con las siguientes propiedades:

1. $\{X\}$ contiene a X.
2. $ab \in \{X\}$ si $a, b \in X$.
3. $(a)b \in \{X\}$ si $a \in \{X\} \setminus X, b \in X$.
4. $a(b) \in \{X\}$ si $a \in X, b \in \{X\} \setminus X$.
5. $(a)(b) \in \{X\}$ si $a, b \in \{X\} \setminus X$.

Así tenemos, por ejemplo, que x_1, x_1x_2 y $x_1(x_2x_3)$ están en $\{X\}$ pero $x_1x_2x_3$ no lo está. Si $\mathbb{F}$ es un cuerpo, definimos $\mathbb{F}\{X\}$ como el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de $\{X\}$ con coeficientes en $\mathbb{F}$. En este conjunto se define una suma, una ponderación y un producto. Sea I un subconjunto finito de $\{X\}$ y sean $u = \sum_{x\in I} \alpha_x x$ y $v = \sum_{x\in I} \beta_x x$, con $\alpha_x, \beta_x \in \mathbb{F}$. Luego, para $\lambda \in \mathbb{F}$:

$$u + v := \sum_{x\in I}(\alpha_x + \beta_x)x$$

$$\lambda u := \sum_{x\in I}(\lambda\alpha_x)x$$

$$uv := \sum_{x\in J}(\alpha_x\beta_x)x$$

donde J es un subconjunto de $\{X\}$ que contiene a todos los productos de elementos de I. De esta manera $\mathbb{F}\{X\}$ es un álgebra no asociativa llamada álgebra libre sobre $\mathbb{F}$ con base X. Los elementos de $\mathbb{F}\{X\}$ se denominan identidades polinomiales o simplemente identidades.

Una identidad f se llama monomio si $f = \alpha g$, donde $\alpha \in \mathbb{F}, \alpha \neq 0$ y $g \in \{X\}$. Dado $x_i \in X$ y un monomio f definimos el grado de x_i en f, y lo denotamos por $\text{gr}\{x_i, f\}$, como el número de veces que x_i aparece en f. Por ejemplo, el grado de x_1 en $((x_1x_1)x_2)x_1$ es 3 y en x_2x_3 es 0. Es inmediato de la definición de $\{X\}$ que para cada monomio f existe una cantidad finita de x_i tales que su grado en f es distinto de cero. Por esta razón escribiremos $f = f(x_1, ..., x_k)$ para decir que k es el mayor índice tal que $\text{gr}\{x_k, f\} > 0$. Luego definimos el grado de f como $\text{gr}(f) := \sum_{x_i\in X} \text{gr}\{x_i, f\}$. Por otra parte, dada una identidad $h = f_1 + \cdots + f_k$, donde los f_i son monomios, para todo $1 \leq i \leq k$, definimos el grado de h como $\text{gr}(h) :=\text{máx}\{\text{gr}(f_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$. Diremos que h es homogénea si $\text{gr}\{x_i, f_1\} = \cdots = \text{gr}\{x_i, f_k\}$, para todo i. En tal caso se tiene que $gr(h) = gr(f_i)$, para todo i.

Dada A una $\mathbb{F}$-álgebra, llamamos evaluación en A a una función $E : X \longrightarrow A$. Una propiedad importante de $\mathbb{F}\{X\}$ con respecto a X es la siguiente: sea A una $\mathbb{F}$-álgebra y E una evaluación en A. Entonces existe un único homomorfismo de álgebras $\hat{E} : \mathbb{F}\{X\} \longrightarrow A$ tal que $\hat{E}|_X = E$. Así tenemos la siguiente definición:

Definición 1.13 *Sea A una $\mathbb{F}$-álgebra y $f \in \mathbb{F}\{X\}$ una identidad. Diremos que A satisface f, o que f es válida en A, si $\hat{E}(f) = 0$, para toda evaluación E en A.*

Sea $f \in \mathbb{F}\{X\}$, $f = f(x_1, ..., x_k)$ y A una $\mathbb{F}$-álgebra. Definimos, para $a_1, ..., a_k \in A$, la evaluación $E_{a_1,...,a_k} : X \longrightarrow A$ dada por $E_{a_1,...,a_k}(x_i) := a_i$, para todo $i = 1, ..., k$. Luego identificamos f con la función $F : A^k \longrightarrow A$ definida por $F(a_1, ..., a_k) := \hat{E}_{a_1,...,a_k}(f)$. Claramente A satisface f si y solo si F es idénticamente cero, por lo tanto, A satisface f será escrito como $f(a_1, ..., a_k) = 0$, para todo $a_1, ..., a_k \in A$.

Definición 1.14 *Sea S un subconjunto de $\mathbb{F}\{X\}$. Al conjunto de todas las $\mathbb{F}$-álgebras que satisfacen todas las identidades de S lo llamaremos variedad de álgebras determinada por S y se denotará por $V(S)$.*

Los siguientes ejemplos son las variedades más estudiadas en la teoría de álgebras no asociativas:

1. El conjunto $S = \{xy - yx\}$ determina la variedad de álgebras conmutativas.

2. El conjunto $S = \{(xy)z - x(yz)\}$ determina la variedad de álgebras asociativas.

3. El conjunto $S = \{x^2, (xy)z + (yz)x + (zx)y\}$ determina la variedad de álgebras de Lie.

4. El conjunto $S = \{xy - yx, (x^2y)x - x^2(yx)\}$ determina la variedad de álgebras de Jordan.

5. El conjunto $S = \{x^2y - x(xy), (yx)x - yx^2\}$ determina la variedad de álgebras alternativas.

6. El conjunto $S = \{x^{i+j} - x^i x^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ determina la variedad de álgebras de potencia asociativa.

7. El conjunto $S = \{(xy)x - x(yx)\}$ determina la variedad de álgebras flexibles.

Algunas relaciones entre estas variedades son, por ejemplo, que toda álgebra conmutativa y asociativa es de Jordan, toda álgebra en la variedad asociativa, Lie, Jordan o alternativa es de potencia asociativa y que las variedades conmutativa, asociativa, alternativa, Lie y Jordan están contenidas en la variedad de álgebras flexibles.

1.4.2. Bimódulos y birrepresentaciones

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y sean M un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y A una $\mathbb{F}$-álgebra. Diremos que M es un bimódulo sobre A si existen un par de aplicaciones bilineales $\lambda : A \times M \longrightarrow M$, denotada por $\lambda(x, m) = x.m$ y llamada acción por la izquierda de A en M y $\rho : M \times A \longrightarrow M$, denotada por $\rho(m, x) = m.x$ y llamada acción por la derecha de A en M. Por otra parte, definimos el espacio vectorial $C := A \oplus M$ y lo dotamos del siguiente producto:

$$(a + m)(b + n) := ab + a.n + m.b$$

Entonces, al ser este producto bilineal, C se convierte en una $\mathbb{F}$-álgebra llamada extensión nula escindida de A determinada por λ y ρ. Además A es una subálgebra de C, mientras que M es un ideal de C tal que $M^2 = \{0\}$.

Definición 1.15 *Sea S un subconjunto de $\mathbb{F}\{X\}$, A una $\mathbb{F}$-álgebra en $V(S)$, M un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y las aplicaciones bilineales λ y ρ definidas como antes. Diremos que M junto con estas aplicaciones bilineales es un S-bimódulo para A si $A \oplus M$ es un álgebra en $V(S)$.*

También, dicho de otra forma, diremos que M es un A-bimódulo en la variedad $V(S)$.

Definición 1.16 *Consideremos una $\mathbb{F}$-álgebra A y un $\mathbb{F}$-espacio vectorial M. Un par de aplicaciones lineales $\mu, \nu : A \longrightarrow End(M)$ se llaman birrepresentación de A en M.*

Veamos que hay un importante nexo entre un bimódulo y una birrepresentación.

Observación 1.17

1. *Sea M un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y A una $\mathbb{F}$-álgebra. Supongamos que M es un A-bimódulo. Luego tenemos las acciones izquierda λ y derecha ρ definidas antes. Para cada $a \in A$ definimos $\mu_a : M \longrightarrow M$ como $\mu_a(m) := \lambda(a,m)$ y $\nu_a : M \longrightarrow M$ como $\nu_a(m) := \rho(m,a)$. Ambas son lineales, luego las aplicaciones $\mu, \nu : A \longrightarrow End(M)$ dadas por $\mu(a) := \mu_a$ y $\nu(a) := \nu_a$ son también lineales y por lo tanto definen una birrepresentación de A en M.*

   Recíprocamente, supongamos que $\mu, \nu : A \longrightarrow End(M)$ forman una birrepresentación de A en M. Definimos $\lambda : A \times M \longrightarrow M$ como $\lambda(a,m) := \mu_a(m)$ y $\rho : M \times A \longrightarrow M$ como $\rho(m,a) := \nu_a(m)$. Al ser ambas bilineales resulta que M es un A-bimódulo. De esta manera, los conceptos de bimódulo y birrepresentación son equivalentes.

2. *Si A es un álgebra conmutativa (respectivamente anticonmutativa) y M es un A-bimódulo en la variedad conmutativa (respectivamente variedad anticonmutativa) entonces tenemos que $a.m = m.a$ (respectivamente $a.m = -m.a$), para todo $a \in A$, $m \in M$. Por lo tanto, en estos casos hablamos simplemente de módulos y representaciones.*

En virtud de la observación 1.17.1, de ahora en adelante usaremos los conceptos de bimódulo y birrepresentación sin hacer ninguna distinción.

1.5. Representaciones de álgebras asociativas, alternativas, Jordan y Lie

En esta sección veremos las propiedades que satisfacen las birrepresentaciones de las álgebras vistas en 1.3 de acuerdo a lo desarrollado en la sección precedente. Sea A un álgebra en alguna variedad $V(S)$ y sea M un A-bimódulo en la misma variedad. Consideremos las aplicaciones lineales μ y ν de la definición 1.16 como $\mu_x = \lambda(x,\cdot)$ y $\nu_x = \rho(\cdot, x)$, con $x \in A$.

1. Sea A asociativa y sean $x,y,z \in A$ y $u,v,w \in M$. Como $A \oplus M$ es asociativa tenemos:

$$[(x+u)(y+v)](z+w) = (x+u)[(y+v)(z+w)]$$

   Desarrollando cada lado de la igualdad se consigue:

$$(xy)z + (\nu_z \circ \mu_x)(v) + (\nu_z \circ \nu_y)(u) + \mu_{xy}(w) = x(yz) + (\mu_x \circ \nu_z)(v) + \nu_{yz}(u) + (\mu_x \circ \mu_y)(w)$$

   Ahora si $z = 0$ y $u = v = 0$ entonces $\mu_{xy} = \mu_x \circ \mu_y$. Si $v = w = 0$ y $x = 0$ entonces $\nu_{yz} = \nu_z \circ \nu_y$. Si $u = w = 0$ y $y = 0$ entonces $\nu_z \circ \mu_x = \mu_x \circ \nu_z$.

2. Sea A alternativa, $x,y \in A$ y $u,v \in M$. Como $A \oplus M$ es alternativa entonces:

$$[(x+u)(x+u)](y+v) = (x+u)[(x+u)(y+v)]$$

$$[(y+v)(x+u)](x+u) = (y+v)[(x+u)(x+u)]$$

   Desarrollando las dos igualdades resulta:

$$x^2y + \mu_{x^2}(v) + (\nu_y \circ (\mu_x + \nu_x))(u) = x(xy) + (\mu_x \circ \mu_x)(v) + (\mu_x \circ \nu_y + \nu_{xy})(u)$$

$$(yx)x + (\mu_{yx} + \nu_x \circ \mu_y)(u) + (\nu_x \circ \nu_x)(v) = yx^2 + (\mu_y \circ (\mu_x + \nu_x))(u) + \nu_{x^2}(v)$$

   Haciendo $u = 0$ se consigue $\mu_{x^2} = \mu_x \circ \mu_x$ y $\nu_x \circ \nu_x = \nu_{x^2}$. Mientras que si $v = 0$ entonces $\nu_y \circ (\mu_x + \nu_x) = \mu_x \circ \nu_y + \nu_{xy}$ y $\mu_{yx} + \nu_x \circ \mu_y = \mu_y \circ (\mu_x + \nu_x)$.

3. Sea A de Jordan, $x,y \in A$ y $u,v \in M$. Al ser $A \oplus M$ de Jordan tenemos:

$$(x+u)(y+v) = (y+v)(x+u)$$

$$[(x+u)(x+u)][(y+v)(x+u)] = [((x+u)(x+u))(y+v)](x+u)$$

Entonces de la primera igualdad se obtiene:

$$xy + \mu_x(v) + \nu_y(u) = yx + \mu_y(u) + \nu_x(v)$$

Es decir, si $u = 0$ o $v = 0$ resulta que $\mu_x = \nu_x$, lo que dice que las acciones izquierda y derecha coinciden, verificando lo dicho en la observación 1.18.2. Usando esto, de la segunda igualdad se tiene:

$$\mu_{x^2} \circ \mu_x = \mu_x \circ \mu_{x^2}$$

$$\mu_{x^2} \circ \mu_y + 2\mu_{yx} \circ \mu_x = \mu_{x^2 y} + 2\mu_x \circ \mu_y \circ \mu_x.$$

4. Sea A de Lie, $x, y, z \in A$ y $u, v, w \in M$. Como $A \oplus M$ es de Lie entonces:

$$[x + u, x + u] = 0$$

$$[[x + u, y + v], z + w] + [[y + v, z + w], x + u] + [[z + w, x + u], y + v] = 0$$

De la primera igualdad resulta que $\mu_x = -\nu_x$, que es lo que se esperaba de acuerdo a la observación 1.18.2. Con esto, de la segunda igualdad resulta:

$$\mu_{[x,y]} = \mu_x \circ \mu_y - \mu_y \circ \mu_x$$

Esto es, si $u \in M$ es un vector cualquiera entonces $[x, y].v = x.(y.v) - y.(x.v)$.

Capítulo 2

Formas bilineales invariantes

Este capítulo es por lejos el más importante ya que es en lo que se centra este trabajo. Por esto, los principales resultados que se probarán en esta tesis son en relación a formas bilineales invariantes. Si V es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial, una forma bilineal en V se define como una aplicación $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ bilineal.

2.1. Formas bilineales invariantes en un álgebra

En esta sección mencionaremos los resultados más importantes sobre formas bilineales invariantes en un álgebra cualquiera.

Definición 2.1 *Sea A una $\mathbb{F}$-álgebra. Diremos que una forma bilineal $f : A \times A \longrightarrow \mathbb{F}$ es invariante o asociativa si $f(xy, z) = f(x, yz)$, para todo $x, y, z \in A$.*

Una forma bilineal f en A se dice simétrica si $f(x, y) = f(y, x)$, para todo $x, y \in A$. Una propiedad importante es la siguiente: dada una forma bilineal invariante simétrica f en un álgebra A, entonces para todo ideal I de A, su ortogonal $I^{\perp} := \{x \in A \mid f(x, y) = 0, \text{ para todo } y \in I\}$ es también un ideal de A. En efecto, sea $a \in I^{\perp}$ y $x \in A$. Es claro que $I^{\perp}$ es un subespacio de A. Luego debemos probar que $xa \in I^{\perp}$ y $ax \in I^{\perp}$. Entonces, para todo $y \in I$, se tiene que $f(xa, y) = f(y, xa) = f(yx, a) = f(a, yx) = 0$ porque $yx \in I$ y $f(ax, y) = f(a, xy) = 0$ ya que $xy \in I$. Así $I^{\perp}$ es un ideal de A.

Ejemplo 2.2

1. *Para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ definimos la función $K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{F}$ como $K(x, y) = Tr(ad_x \circ ad_y)$. Es fácil verificar que K es una forma bilineal invariante simétrica y se llama forma de Killing de $\mathfrak{g}$.*

2. *En una $\mathbb{F}$-álgebra de Jordan $\mathfrak{J}$ se define $f : \mathfrak{J} \times \mathfrak{J} \longrightarrow \mathbb{F}$ como $f(x, y) = Tr(R_{xy})$, donde R_{xy} es el operador de multiplicación a la derecha por xy: Así f es una forma bilineal invariante simétrica de $\mathfrak{J}$ como se demuestra en [11] (pág. 32, cap. 4).*

3. *Sea $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-álgebra con base $\{1, i\}$ y con el producto $*$ dado por $w * z := \overline{wz}$. Si escribimos $w = \alpha 1 + \beta i$ y $z = \gamma 1 + \delta i$ entonces la función $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(w, z) := \alpha\gamma + \beta\delta$ es una forma bilineal invariante simétrica de $\mathbb{C}$.*

4. *El álgebra de Suttles (llamada así por el ajedrecista estadounidense Duncan Suttles quien la construyó en 1972) se define como el álgebra conmutativa A sobre $\mathbb{R}$ generada por $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ con tabla de multiplicación dada por $e_i^2 = 0$, para todo $i = 1, 2, 3, 4, 5$ y $e_1e_2 = e_2e_4 = -e_1e_5 = e_3, e_1e_3 = e_4, e_2e_3 = e_5$. Es un ejemplo de un álgebra de potencia asociativa que no es Jordan (considere $x = e_1 + e_2$ e $y = e_1$, así $(x^2y)x = 2e_3$ y $x^2(yx) = 0$). Si $x, y \in A$ se escriben como $x = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i e_i$ e $y = \sum_{i=1}^{5} \beta_i e_i$ entonces la función $f : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = (\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2)$ es una forma bilineal invariante simétrica de A.*

Ahora mencionaremos algunas propiedades que un álgebra debe tener para que esté provista de una forma bilineal invariante simétrica no nula y para eso necesitamos algunas definiciones.

Definición 2.3 *Sea A un álgebra. Definimos inductivamente las siguientes potencias de A:*

1. $A^1 = A, A^n = \sum_{i=1}^{n-1} A^i A^{n-i}$ *si* $n > 1$.
2. $A^{<1>} = A, A^{<n>} = A^{<n-1>}A$ *si* $n > 1$.
3. $A^{(1)} = A, A^{(n)} = (A^{(n-1)})^2$ *si* $n > 1$.

Todas estas potencias son subálgebras de A y a partir de ellas tenemos las siguientes definiciones:

Definición 2.4 *Sea A un álgebra.*

1. *Diremos que A es nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = \{0\}$.*
2. *Diremos que A es nilpotente a la derecha si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^{<k>} = \{0\}$.*
3. *Diremos que A es soluble si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^{(k)} = \{0\}$.*

Luego, de las dos definiciones anteriores tenemos que nilpotente implica nilpotente a la derecha y también soluble. El hecho de hablar de nilpotencia a la derecha radica en la forma en que se definieron las potencias de un elemento $x \in A$ en el capítulo anterior, en la sección 1.2, donde se multiplica por x a la derecha de la potencia anterior para obtener la que sigue.

Si A es un álgebra se define (A, A, A) como el subespacio de A generado por el conjunto $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in A\}$, es decir, generado por todos los asociadores. Un resultado importante es el que aparece en [2] (pág. 75) y es el siguiente:

Proposición 2.5 *Sea A un álgebra conmutativa tal que $A \neq (A, A, A)$. Entonces A tiene una forma bilineal invariante simétrica no nula.*

Como corolarios de esta proposición, que también aparecen en [2] (pág. 75), tenemos:

Corolario 2.6

1. *Si A es un álgebra conmutativa y soluble entonces posee una forma bilineal invariante simétrica no nula.*
2. *Si A es un álgebra conmutativa y asociativa entonces posee una forma bilineal invariante simétrica no nula.*

Otro resultado relevante y que aparece en [1] es:

Teorema 2.7 *Si un álgebra conmutativa de dimensión finita posee una forma bilineal invariante, entonces tiene una forma bilineal invariante simétrica.*

En [1] se da un algoritmo que permite encontrar todas las formas bilineales invariantes de un álgebra de dimensión finita. Más precisamente, si A es una $\mathbb{F}$-álgebra de dimensión finita y $B = \{e_1, ..., e_n\}$ es una base de A, es posible establecer un isomorfismo entre $Bil(A \times A, \mathbb{F})$, el espacio de aplicaciones bilineales de $A \times A$ en $\mathbb{F}$, y $A \otimes A$. En efecto, para todo $i, j = 1, ..., n$ definimos las aplicaciones bilineales $E_{i,j} : A \times A \longrightarrow \mathbb{F}$ como $E_{i,j}(e_k, e_l) := \delta_{ik}\delta_{jl}$. Notemos que estas funciones son linealmente independientes ya que si $\alpha_{ij} \in \mathbb{F}$ son tales que $\sum_{i,j} \alpha_{ij} E_{i,j} = 0$, entonces $\sum_{i,j} \alpha_{ij} E_{i,j}(e_k, e_l) = 0$, para todo $k, l = 1, ..., n$, luego $\sum_{i,j} \alpha_{ij}\delta_{ik}\delta_{jl} = 0$, así tenemos que $\alpha_{kl} = 0$, para todo $k, l = 1, ..., n$. De esta manera, estas funciones forman una base de $Bil(A \times A, \mathbb{F})$. Así podemos definir un isomorfismo $\phi_B : Bil(A \times A, \mathbb{F}) \longrightarrow A \otimes A$ como $\phi_B(E_{i,j}) := e_i \otimes e_j$. Luego podemos definir un producto interno $<, >_B$: $(A \otimes A) \times (A \otimes A) \longrightarrow \mathbb{F}$ como $< e_i \otimes e_j, e_k \otimes e_l >_B := \delta_{ik}\delta_{jl}$. Es claro que $E_{i,j}(e_k, e_l) =< e_i \otimes e_j, e_k \otimes e_l >_B$. Así, dado un subespacio V de $A \otimes A$ definimos $V^{\perp_B} := \{x \in A \otimes A \mid < x, y >_B = 0, \text{ para todo } y \in V\}$.

Por otra parte, definimos el subespacio $\mathcal{T}(A) := \{f \in Bil(A \times A, \mathbb{F}) \mid f \text{ es invariante}\}$ de $Bil(A \times A, \mathbb{F})$.

Por otro lado, la aplicación $q : A \times A \times A \longrightarrow A \otimes A$ definida por $q(x, y, z) := xy \otimes z - x \otimes yz$ es trilineal. Luego por propiedad universal del producto tensorial, existe una única aplicación lineal $\hat{q} : A \otimes A \otimes A \longrightarrow A \otimes A$ dada por $\hat{q}(x \otimes y \otimes z) = xy \otimes z - x \otimes yz$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \times A \times A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "i"'] & A \otimes A \\ A \otimes A \otimes A \arrow[ur, "\hat{q}"'] & \end{tikzcd}$$

Luego el resultado más importante que aparece en [1] es:

Proposición 2.8 *Sea A un álgebra de dimensión finita con base B. Si consideramos la aplicación lineal $\hat{q} : A \otimes A \otimes A \longrightarrow A \otimes A$ dada por $\hat{q}(x \otimes y \otimes z) = xy \otimes z - x \otimes yz$ entonces:*

$$\phi_B(\mathcal{T}(A)) = (Im(\hat{q}))^{\perp_B}$$

2.2. Formas bilineales invariantes de un bimódulo sobre un álgebra

La definición 2.1 se puede generalizar para bimódulos de la siguiente manera:

Definición 2.9 *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo, M un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y A una $\mathbb{F}$-álgebra. Supongamos que M es un A-bimódulo. Una forma bilineal $f : M \times M \longrightarrow \mathbb{F}$ se dice A-invariante si satisface $f(u.x, v) = f(u, x.v)$, para todo $u, v \in M; x \in A$.*

En ausencia de ambigüedad solo diremos invariante en lugar de A-invariante. La idea es poder generalizar la proposición 2.8 a un resultado equivalente para bimódulos sobre un álgebra, esto motivado porque toda álgebra A es un A-bimódulo con la acción izquierda dada por $\lambda(x, y) = xy$ y la derecha dada por $\rho(x, y) = yx$, es decir, dadas por los operadores de multiplicación a la izquierda y a la derecha, respectivamente, por lo que se pretende extender para un bimódulo cualquiera. Si M es un A-bimódulo entonces tenemos las aplicaciones bilineales $\lambda : A \times M \longrightarrow M$ y $\rho : M \times A \longrightarrow M$. Definamos las aplicaciones $i_1 : A \times M \longrightarrow A \otimes M$ como $i_1(a, m) := a \otimes m$ y $i_2 : M \times A \longrightarrow M \otimes A$ como $i_2(m, a) := m \otimes a$. Luego por propiedad universal del producto tensorial existen únicas aplicaciones lineales $\hat{\lambda} : A \otimes M \longrightarrow M$ y $\hat{\rho} : M \otimes A \longrightarrow M$ tales que $\hat{\lambda} \circ i_1 = \lambda$ y $\hat{\rho} \circ i_2 = \rho$, es decir, $\hat{\lambda}(a \otimes m) = a.m$ y $\hat{\rho}(m \otimes a) = m.a$, para todo $a \in A; m \in M$.

Definamos la aplicación $q : M \times A \times M \longrightarrow M \otimes M$ como $q(u, x, v) := u.x \otimes v - u \otimes x.v$. Notamos que q es trilineal, por lo que la propiedad universal del producto tensorial asegura la existencia y unicidad de una aplicación lineal $\hat{q} : M \otimes A \otimes M \longrightarrow M \otimes M$ dada por $\hat{q}(u \otimes x \otimes v) = u.x \otimes v - u \otimes x.v$, es decir, $\hat{q} = \hat{\rho} \otimes id_M - id_M \otimes \hat{\lambda}$.

Debemos hacer una fuerte observación en esta parte. Todo lo hecho anteriormente para álgebras ocupa solamente su estructura como espacio vectorial, por lo tanto, también es válido para bimódulos, es decir, si M es un A-bimódulo de dimensión finita con base B, entonces tenemos que $Bil(M \times M, \mathbb{F})$ es isomorfo a $M \otimes M$ bajo ϕ_B definida como antes. Por otra parte, podemos definir el conjunto $\mathcal{T}(M) := \{f \in Bil(M \times M, \mathbb{F}) \mid f \text{ es invariante}\}$, que claramente es un subespacio de $Bil(M \times M, \mathbb{F})$. También tenemos un producto interno en $M \otimes M$ definido de la misma manera que para álgebras, así que se puede definir el ortogonal de un subespacio de $M \otimes M$. Además en [1] se demuestra que si f es una forma bilineal de un álgebra A de dimensión finita entonces $f(x, y) = < \phi_B(f), x \otimes y >_B$, para todo $x, y \in A$. Esta igualdad también es cierta para bimódulos, por lo que podemos enunciar el siguiente resultado:

Proposición 2.10 *Sean $\mathbb{F}$ un cuerpo, M un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita con base B y A una $\mathbb{F}$-álgebra también de dimensión finita. Supongamos que M es un A-bimódulo y consideremos $\hat{q} : M \otimes A \otimes M \longrightarrow M \otimes M$ definida por $\hat{q}(u \otimes x \otimes v) = u.x \otimes v - u \otimes x.v$. Entonces:*

$$\phi_B(\mathcal{T}(M)) = (Im(\hat{q}))^{\perp_B}.$$

Demostración. Sea $f \in Bil(M \times M, \mathbb{F})$. Luego tenemos que $f(u,v) =< \phi_B(f), u \otimes v >_B$, para todo $u, v \in M$ y de esta manera se consigue, para todo $u, v \in M; x \in A$:

$$\begin{aligned} f(u.x, v) - f(u, x.v) &= < \phi_B(f), u.x \otimes v >_B - < \phi_B(f), u \otimes x.v >_B \\ &= < \phi_B(f), u.x \otimes v - u \otimes x.v >_B \\ &= < \phi_B(f), \hat{q}(u \otimes x \otimes v) >_B \end{aligned}$$

Como el conjunto $\{u \otimes x \otimes v \mid u, v \in M, x \in A\}$ genera $M \otimes A \otimes M$ entonces el conjunto $\{\hat{q}(u \otimes x \otimes v) \mid u, v \in M, x \in A\}$ genera $Im(\hat{q})$. Así se prueba que f es invariante si y solo si $\phi_B(f) \in (Im(\hat{q}))^{\perp_B}$. ∎

Esta última proposición nos da un algoritmo que permite calcular todas las formas invariantes de un bimódulo. Consideremos un A-bimódulo M de dimensión finita.

1. Se debe escoger una base ordenada para M y otra para A. Supongamos que el conjunto $B = \{e_1, ..., e_n\}$ es una base de M (es decir, $\dim(M) = n$) y $\hat{B} = \{v_1, ..., v_m\}$ es una base de A (es decir, $\dim(A) = m$).

2. Luego debemos escoger una base ordenada para $A \otimes M$ y otra para $M \otimes A$. La manera de hacerlo será fijando los elementos de la base del espacio en el lado izquierdo y moviendo los del espacio del lado derecho. Por ejemplo, $A \otimes M =< v_1 \otimes e_1, v_1 \otimes e_2, ..., v_m \otimes e_{n-1}, v_m \otimes e_n >$ y $M \otimes A =< e_1 \otimes v_1, e_1 \otimes v_2, ..., e_n \otimes v_{m-1}, e_n \otimes v_m >$.

3. Después hay que encontrar las matrices de $\hat{\lambda} : A \otimes M \longrightarrow M$ y de $\hat{\rho} : M \otimes A \longrightarrow M$, lo que nos permite encontrar la matriz de $\hat{q} : M \otimes A \otimes M \longrightarrow M \otimes M$, de tamaño $n^2 \times n^2 m$, por lo que el rango de $\hat{q}$ es menor o igual a n^2. Esta matriz se consigue haciendo $[\hat{q}] = [\hat{\rho}] \dot{\times} I_n - I_n \dot{\times} [\hat{\lambda}]$, donde $\dot{\times}$ representa el producto de Kronecker de matrices.

4. Si el rango de $\hat{q}$ es n^2 entonces $(Im(\hat{q}))^{\perp_B} = \{0\}$ y por la proposición 2.10 concluimos que la única forma invariante es la trivial. Si el rango de $\hat{q}$ es menor que n^2 entonces existe una forma invariante no trivial.

5. Supongamos que el rango de $\hat{q}$ es $k < n^2$. Sea $\{w_i \mid i = 1, ..., n^2 - k\}$ una base del espacio ortogonal al espacio generado por las columnas de $[\hat{q}]$. Estos vectores los veremos en $\mathbb{F}^{n^2}$ que, como $\mathbb{F}$-espacio vectorial, es isomorfo a $M \otimes M$, y por el punto 3 su base ordenada será $B' = \{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, ..., e_n \otimes e_n\}$. El isomorfismo está dado por la función $(\alpha_1, ..., \alpha_{n^2}) \mapsto \alpha_1 e_1 \otimes e_1 + \cdots + \alpha_{n^2} e_n \otimes e_n$. Luego consideramos, para cada w_i, su vector correspondiente en $M \otimes M$ bajo ese isomorfismo.

Ejemplo 2.11 *Aquí aplicaremos el algoritmo sobre bimódulos en las variedades mencionadas en el capítulo anterior.*

1. *Sea $M = \mathbb{R}^2$ generado por su base canónica $\{e_1, e_2\}$ y $A = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ generada por $\{x, h, y\}$, donde:*

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta base es la estándar de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Entonces M es un A-módulo con la acción definida por $a.m := am$, es decir, la multiplicación usual de una matriz con un vector columna, por lo que $\hat{\lambda}(a \otimes m) = am$ y $\hat{\rho}(m \otimes a) = -am$. Entonces si consideramos los espacios de acuerdo al punto 3 resulta $A \otimes M =< x \otimes e_1, x \otimes e_2, h \otimes e_1, h \otimes e_2, y \otimes e_1, y \otimes e_2 >$ y $M \otimes A =< e_1 \otimes x, e_1 \otimes h, e_1 \otimes y, e_2 \otimes x, e_2 \otimes h, e_2 \otimes y >$ y se consigue:

$$[\hat{\lambda}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\hat{\rho}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así tenemos la siguiente matriz:

$$[\hat{q}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

De aquí tenemos que el conjunto $\{(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$ *genera el espacio columna de* $[\hat{q}]$, *lo que dice que tiene rango 3. Luego el vector* $w_1 = (0,1,-1,0)$ *genera el ortogonal de este espacio y le corresponde* $e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$ *en* $M \otimes M$. *La matriz de Gram de* $E_{1,2} - E_{2,1}$ *(que es la forma bilineal asociada a* $e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$*) es:*

$$[E_{1,2} - E_{2,1}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si $u = u_1e_1 + u_2e_2$ *y* $v = v_1e_1 + v_2e_2$ *son vectores en* M, *una forma bilineal invariante, digamos* f, *en* M *será:*

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1v_2 - u_2v_1$$

2. *Sea* $M = \mathbb{R}^3 =< e_1, e_2, e_3 >$ *y* $A = \mathfrak{so}_3(\mathbb{R}) =< x, y, z >$*,donde:*

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La acción de A *en* M *será* $a.m = am$, *así* $\hat{\lambda}(a \otimes m) = am$ *y* $\hat{\rho}(m \otimes a) = -am$. *Además tenemos* $A \otimes M =< x \otimes e_1, x \otimes e_2, x \otimes e_3, y \otimes e_1, y \otimes e_2, y \otimes e_3, z \otimes e_1, z \otimes e_2, z \otimes e_3 >$ *y* $M \otimes A =< e_1 \otimes x, e_1 \otimes y, e_1 \otimes z, e_2 \otimes x, e_2 \otimes y, e_2 \otimes z, e_3 \otimes x, e_3 \otimes y, e_3 \otimes z >$. *Luego las matrices que las representan son:*

$$[\hat{\lambda}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\hat{\rho}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera la matriz de $\hat{q}$ *es de tamaño 9 por 27 y el espacio ortogonal al de sus columnas está generado por* $w_1 = (1,0,0,0,1,0,0,0,1)$. *Su vector asociado en* $M \otimes M$ *es* $e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3$. *La matriz de Gram de* $E_{1,1} + E_{2,2} + E_{3,3}$ *es:*

$$[E_{1,1} + E_{2,2} + E_{3,3}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego si $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$ *y* $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ *están en* M, *una forma bilineal invariante* f *en* M *será:*

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

3. Sea $M = \mathbb{R}^3 =< e_1, e_2, e_3 >$ y $A = \mathcal{H} =< x, y, z >$ el álgebra de Heisenberg, donde

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La acción será dada por $a.m = am$, la multiplicación usual, para todo $a \in A; m \in M$. De esta manera tenemos $\hat{\lambda}(a \otimes m) = am$ y $\hat{\rho}(m \otimes a) = -am$. Por otra parte, sean los espacios $A \otimes M =< x \otimes e_1, x \otimes e_2, x \otimes e_3, y \otimes e_1, y \otimes e_2, y \otimes e_3, z \otimes e_1, z \otimes e_2, z \otimes e_3 >$ y $M \otimes A =< e_1 \otimes x, e_1 \otimes y, e_1 \otimes z, e_2 \otimes x, e_2 \otimes y, e_2 \otimes z, e_3 \otimes x, e_3 \otimes y, e_3 \otimes z >$, luego:

$$[\hat{\lambda}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\hat{\rho}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí nuevamente la matriz de $\hat{q}$ es de 9 por 27, pero su rango es 7 y los vectores que generan el ortogonal al espacio de las columnas de $[\hat{q}]$ son $w_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -1, 0)$ y $w_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$, por lo que el espacio de formas invariantes tiene dimensión dos. Los vectores asociados de w_1 y w_2 en $M \otimes M$ son, respectivamente, $e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2$ y $e_3 \otimes e_3$. Luego sus matrices de Gram son:

$$[E_{2,3} - E_{3,2}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, [E_{3,3}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$ y $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$ pertenecen a M entonces las formas invariantes f y g son:

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_2 v_3 - u_3 v_2.$$

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_3 v_3.$$

4. Sea $M = M_3(\mathbb{R}) = Sym_3(\mathbb{R}) \oplus Skw_3(\mathbb{R})$, donde $Sym_3(\mathbb{R})$ son las matrices 3 por 3 simétricas y $Skw_3(\mathbb{R})$ son las matrices 3 por 3 antisimétricas. De esta manera una base B_1 de M está formada por las matrices:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

donde de a_1 hasta a_6 son simétricas y a_7, a_8 y a_9 son antisimétricas. Sea $A = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ con base B_2:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta base es la usual de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$*. La acción de* A *en* M *será definida por* $x.a := xa^t + a^t x^t$*, para todo* $x \in A; a \in M$*. Entonces* $\hat{\lambda}(x \otimes a) := xa^t + a^t x^t$ *y* $\hat{\rho}(a \otimes x) := -xa^t - a^t x^t$*. Por otro lado tenemos* $A \otimes M =< x \otimes a \mid x \in B_2, a \in B_1 >$ *y* $M \otimes A =< a \otimes x \mid a \in B_1, x \in B_2 >$*. Luego las matrices de* $\hat{\lambda}$ *y* $\hat{\rho}$ *son de tamaño 9 por 72 (por supuesto, no las pondremos), por lo que* $[\hat{q}]$ *tiene tamaño 81 por 648. Un cálculo simple prueba que esta matriz tiene rango 81, lo que dice que la única forma invariante es la trivial.*

5. *Sea* $M = \mathbb{R}^2 =< e_1, e_2 >$ *y* $A = \{x \in M_2(\mathbb{R}) \mid x^t = x\} =< a, b, c >$ *el álgebra del ejemplo 1.7.2, donde*
$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La acción será $x.m = xm$*, para todo* $x \in A; m \in M$*. Entonces* $\hat{\lambda}(x \otimes m) = xm$ *y* $\hat{\rho}(m \otimes x) = xm$*. Además* $A \otimes M =< a \otimes e_1, a \otimes e_2, b \otimes e_1, b \otimes e_2, c \otimes e_1, c \otimes e_2 >$ *y* $M \otimes A =< e_1 \otimes a, e_1 \otimes b, e_1 \otimes c, e_2 \otimes a, e_2 \otimes b, e_2 \otimes c >$*. Luego*
$$[\hat{\lambda}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$[\hat{\rho}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de $\hat{q}$ *tiene rango 3 y el espacio ortogonal está generado por* $w_1 = (1, 0, 0, 1)$*. De esta manera le corresponde el vector* $e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$ *en* $M \otimes M$ *y la matriz de Gram es*
$$[E_{1,1} + E_{2,2}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si $u = u_1 e_1 + u_2 e_2$ *y* $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$ *entonces una forma invariante* f *en* M *es*
$$f(u, v) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

6. *Sea* $M = A = \mathbb{H} =< 1, i, j, k >$ *el álgebra de cuaterniones de Hamilton con las acciones* $\lambda(x, y) = \overline{xy}$ *y* $\rho(x, y) = \overline{yx}$*, donde la barra denota el cuaternión conjugado. Luego*
$$[\hat{\lambda}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$[\hat{\rho}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un cálculo simple muestra que la matriz de $\hat{q}$*, de tamaño 16 por 64, tiene rango 16, por lo que la única forma invariante es la trivial.*

7. *Sea $M = \mathbb{C}^3$ y $A = \mathbb{C}[S_3]$, donde S_3 es el grupo de permutaciones de 3 elementos. Entonces $M =< e_1, e_2, e_3 >$ y $A =< \delta_{id}, \delta_{(12)}, \delta_{(13)}, \delta_{(23)}, \delta_{(123)}, \delta_{(132)} >$. Ahora definimos $\hat{\lambda}(\delta_\sigma \otimes e_i) := e_{\sigma(i)}$ y $\hat{\rho}(e_i \otimes \delta_\sigma) := e_{\sigma^{-1}(i)}$, para todo $\sigma \in S_3; i = 1,2,3$. Por lo tanto, las matrices correspondientes son:*

$$[\hat{\lambda}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\hat{\rho}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera la matriz $[\hat{q}]$ es de 9 por 54 y su rango es 8. El vector que genera el ortogonal al espacio de las columnas de $[\hat{q}]$ es $w_1 = (1,1,1,1,1,1,1,1,1)$, por lo que su correspondiente en $M \otimes M$ es $e_1 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_3 + e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3$. De esta manera su matriz de Gram es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, dados $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$ y $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ en M, una forma invariante f será:

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (u_1 + u_2 + u_3)(v_1 + v_2 + v_3).$$

2.3. Módulos simples sobre un álgebra de Lie

Después de haber visto y trabajado con bimódulos sobre un álgebra cualquiera, en esta sección (y en los próximos capítulos) nos reduciremos al caso de álgebras de Lie y módulos simples sobre ellas, concepto que definiremos a continuación.

Definición 2.12 *Sea M un $\mathfrak{g}$-módulo y N un subespacio vectorial de M. Diremos que N es un submódulo de M si $x.n \in N$, para todo $x \in \mathfrak{g}; n \in N$ (es decir, si la acción restringida a N es cerrada en N).*

Notemos que todo módulo M tiene siempre dos submódulos, a saber, $\{0\}$ y M, que son llamados submódulos triviales.

Definición 2.13 *Sea M un $\mathfrak{g}$-módulo. Diremos que M es simple o irreducible si $M \neq \{0\}$ y sus únicos submódulos son los triviales.*

Sea M un $\mathfrak{g}$-módulo. Consideremos su representación $\mu : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(M)$ correspondiente, es decir, tenemos $\mu(x) = \mu_x$, donde $\mu_x : M \longrightarrow M$ se define como $\mu_x(m) = x.m$. Si N es un submódulo de M entonces para todo $n \in N$ se tiene que $\mu_x(n) = x.n \in N$, lo que dice que N es un subespacio μ_x-invariante, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Diremos que μ es una representación irreducible si los únicos subespacios de M que son μ_x-invariantes, para todo $x \in \mathfrak{g}$, son los triviales, lo que dice que M es simple si y solo si μ es irreducible.

El objetivo de esta sección es probar que si M es un $\mathfrak{g}$-módulo simple entonces la dimensión de $\mathcal{T}(M)$ es menor o igual que 1. Sea $\mu : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(M)$ una representación de $\mathfrak{g}$ en M. Definimos la representación dual de μ como la función $\mu^* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(M^*)$ definida por $\mu^*(x) := \mu_x{}^*$, para todo $x \in \mathfrak{g}$, donde $\mu_x{}^* : M^* \longrightarrow M^*$ se define como $\mu_x{}^*(f) := -f \circ \mu_x$. Escribiremos $x.f$ en lugar de $\mu_x{}^*(f)$ para denotar la acción de $\mathfrak{g}$ en M^*, por lo que si $m \in M$ entonces $(x.f)(m) = -f(x.m)$. Luego tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.14 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y M un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita. Entonces M es simple si y solo si M^* es simple.*

Demostración. Supongamos que M es simple. Sea P un submódulo no nulo de M^*. De esta manera $\dim(P) = k \geq 1$ y entonces $P =< f_1, ..., f_k >$. Completando esta base a una de M^* tenemos que $M^* =< f_1, ..., f_k, f_{k+1}, ..., f_n >$. Luego existe una base $\{v_1, ..., v_n\}$ de M tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, para todo $i, j = 1, ..., n$.

Definimos $\tilde{P} := \{m \in M \mid f(m) = 0, \text{para todo } f \in P\}$. Es claro que $\tilde{P}$ es no vacío y un subespacio de M. Probemos que es un submódulo. Sea $x \in \mathfrak{g}$ y $m \in \tilde{P}$. Veamos que $x.m \in \tilde{P}$. Sea $f \in P$, luego $f(x.m) = -(x.f)(m) = 0$ ya que como $f \in P$ entonces $x.f \in P$ por ser P un submódulo. Por lo tanto, $x.m \in \tilde{P}$. Como M es simple entonces $\tilde{P} = \{0\}$ o $\tilde{P} = M$. Como P es no nulo, existe $g \in P$ tal que $g \neq 0$, lo que dice que existe $m_0 \in M$ tal que $g(m_0) \neq 0$, es decir, $m_0 \notin \tilde{P}$. Por lo tanto, $\tilde{P} \neq M$, así $\tilde{P} = \{0\}$.

Afirmamos que $P = M^*$. Si no fuera así entonces tendríamos $k < n$, por lo que $f_{k+1} \in M^*$ pero $f_{k+1} \notin P$. Consideremos el vector $v_{k+1} \in M$, que al ser parte de una base es distinto de cero. Luego $f(v_{k+1}) = 0$, para todo $f \in P$, así $v_{k+1} \in \tilde{P}$, lo que no puede ocurrir porque $\tilde{P} = \{0\}$. En conclusión, $P = M^*$, lo que prueba que M^* es simple.

Recíprocamente, supongamos que M^* es simple. Sea N un submódulo no nulo de M. Luego $\dim(N) = r \geq 1$, así escribimos $N =< v_1, ..., v_r >$. Completando a una base de M tenemos que $M =< v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_s >$. Sea $\{f_1, ..., f_s\}$ su base dual, es decir, $M^* =< f_1, ..., f_s >$ y $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, para todo $i, j = 1, ..., s$.

Ahora definimos $N^0 := \{f \in M^* \mid f(n) = 0, \text{para todo } n \in N\}$. Es inmediato que este conjunto es un subespacio de M^*. Para mostrar que N^0 es un submódulo de M^*, sean $x \in \mathfrak{g}$ y $f \in N^0$. Sea $n \in N$, luego $(x.f)(n) = -f(x.n) = 0$ porque $x.n \in N$ debido a que N es un submódulo. De esta manera, $x.f \in N^0$. Como M^* es simple entonces $N^0 = \{0\}$ o $N^0 = M^*$. Si $N^0 = M^*$ entonces para cada $f \in M^*$ se tiene que $f(n) = 0$, para todo $n \in N$, lo que es falso puesto que $f_1 \in M^*$ y $v_1 \in N$ pero $f_1(v_1) = 1 \neq 0$. Por lo tanto, $N^0 = \{0\}$. Queremos probar que $N = M$. Supongamos $N \neq M$. Así $r < s$ y tenemos que, por ejemplo, $v_{r+1} \in M$ pero $v_{r+1} \notin N$, entonces existe $f_{r+1} \in M^*$ (que forma parte de la base de M^*, luego es un funcional no nulo) y satisface $f_{r+1}(n) = 0$, para todo $n \in N$, lo que dice que $f_{r+1} \in N^0$, contradicción porque $N^0 = \{0\}$. Por lo tanto, $N = M$ y entonces M es simple. ■

Otro concepto importante es el de homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. Sean M y N dos $\mathfrak{g}$-módulos. Una aplicación lineal $f : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos si $f(x.m) = x.f(m)$, para todo $m \in M; x \in \mathfrak{g}$. Notemos que la acción del lado izquierdo corresponde a la de M, mientras que la acción del lado derecho es la de N, por lo que un homomorfismo de módulos es una aplicación lineal que entrelaza las acciones de M y N. Probemos que $ker(f)$ e $Im(f)$ son submódulos de M y N, respectivamente. Sea $x \in \mathfrak{g}$. Si $u \in ker(f)$ entonces se tiene $f(x.u) = x.f(u) = x{,}0 = 0$, luego $x.u \in ker(f)$. Si $v \in Im(f)$ entonces existe $m \in M$ tal que $v = f(m)$, luego $x.v = x.f(m) = f(x.m)$, así $x.v \in Im(f)$. Definimos $Hom_{\mathfrak{g}}(M, N) := \{f : M \longrightarrow N \mid f \text{ es homomorfismo de } \mathfrak{g}\text{-módulos}\}$, que es un subespacio de $\mathcal{L}(M, N)$, el espacio de aplicaciones lineales de M en N. Si además f es biyectiva diremos que M y N son módulos isomorfos o equivalentes.

La siguiente proposición nos servirá para demostrar otros resultados más adelante.

Proposición 2.15 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y M un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita. Entonces M y M^{**} son módulos isomorfos.*

Demostración. Sabemos que M y M^{**} son isomorfos como espacios vectoriales bajo la función $\psi : M \longrightarrow M^{**}$ dada por $[\psi(m)](f) := f(m)$, para todo $m \in M; f \in M^*$. Afirmamos que ψ es un homomorfismo de módulos. En efecto, si $x \in \mathfrak{g}$ y $m \in M$ entonces tenemos $[\psi(x.m)](f) = f(x.m) = -(x.f)(m) = -[\psi(m)](x.f) = [x.\psi(m)](f)$, para todo $f \in M^*$, es decir, $\psi(x.m) = x.\psi(m)$. ■

Sean M y N dos $\mathbb{F}$-espacios vectoriales de dimensión finita. Supongamos además que $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado. Luego tenemos el siguiente lema:

Lema 2.16 *(Schur) Supongamos que M y N son dos $\mathfrak{g}$-módulos simples y $f \in Hom_{\mathfrak{g}}(M, N)$.*

1. *Entonces $f \equiv 0$ o f es biyectiva.*
2. *Si además $N = M$ entonces $f = \alpha id$, para algún $\alpha \in \mathbb{F}$.*
3. *Si $g \in Hom_{\mathfrak{g}}(M, N)$ y $f \not\equiv 0$ entonces $g = \beta f$, para algún $\beta \in \mathbb{F}$.*

Demostración. Sea $f \in Hom_{\mathfrak{g}}(M, N)$. Si $f \equiv 0$ entonces no hay nada que probar. Si $f \not\equiv 0$ entonces existe $m \in M$ tal que $f(m) \neq 0$. Esto dice que $ker(f) \neq M$ e $Im(f) \neq \{0\}$. Como M y N son simples se concluye que $ker(f) = \{0\}$ e $Im(f) = N$, lo que dice que f es biyectiva.

Probemos la segunda afirmación. Si $N = M$ entonces $f \in End(M)$. Al ser $\mathbb{F}$ algebraicamente cerrado, sea $\alpha \in \mathbb{F}$ un valor propio de f con vector propio $v \in M$, es decir, $f(v) = \alpha v$. Definamos $h \in End(M)$ como $h := f - \alpha id$. Observamos que h es un homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos, en efecto, $h(x.m) = f(x.m) - \alpha(x.m) = x.f(m) - x.(\alpha m) = x.(f(m) - \alpha m) = x.h(m)$, para todo $x \in \mathfrak{g}; m \in M$. Además tenemos que $v \in ker(h)$, es decir, $ker(h) \neq \{0\}$ y al ser M simple, $ker(h) = M$, así $h \equiv 0$ y por lo tanto $f = \alpha id$.

Ahora probemos la tercera afirmación. Como $f \not\equiv 0$ entonces por 1 se tiene que es biyectiva. Luego tenemos que $g \circ f^{-1} : N \longrightarrow N$ es también un homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. En efecto, sean $n \in N$, $x \in \mathfrak{g}$ y $m = f^{-1}(n) \in M$, entonces $f(x.m) = x.f(m) = x.n$ y así se tiene $(g \circ f^{-1})(x.n) = g(x.m) = x.g(m) = x.(g \circ f^{-1})(n)$. Por 2 existe $\beta \in \mathbb{F}$ tal que $g \circ f^{-1} = \beta id$. Así $g = \beta f$. ■

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente resultado:

Proposición 2.17 *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo algebraicamente cerrado, $\mathfrak{g}$ una $\mathbb{F}$-álgebra de Lie y M un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita. Si M es un $\mathfrak{g}$-módulo simple entonces $dim(\mathcal{T}(M)) \leq 1$.*

Demostración. Si $\mathcal{T}(M) = \{0\}$ entonces $\dim(\mathcal{T}(M)) = 0$. Supongamos que $\mathcal{T}(M) \neq \{0\}$. Luego existe $f \in \mathcal{T}(M)$ tal que $f \neq 0$. Probemos que $\dim(\mathcal{T}(M)) = 1$. Definamos $W :=< f >$, así tenemos que W es un subespacio de $\mathcal{T}(M)$ de dimensión 1. Sea $g \in \mathcal{T}(M)$. Demostremos que $g \in W$.

Para cada $u \in M$ definimos $f_u : M \longrightarrow \mathbb{F}$ dada por $f_u(v) := f(u, v)$. Esta función es claramente lineal. Luego $f_u \in M^*$. Así podemos definir $\hat{f} : M \longrightarrow M^*$ como $\hat{f}(u) := f_u$. De manera similar se definen $g_u : M \longrightarrow \mathbb{F}$, para cada $u \in M$, y $\hat{g} : M \longrightarrow M^*$. Notemos además que al tener $f \neq 0$ entonces $\hat{f} \neq 0$.

Veamos que tanto $\hat{f}$ como $\hat{g}$ son homomorfismos de $\mathfrak{g}$-módulos. Sean $x \in \mathfrak{g}$ y $u \in M$. Luego debemos probar que $\hat{f}(x.u) = x.\hat{f}(u)$, es decir, $f_{x.u} = x.f_u$. Si $v \in M$ entonces tenemos $f_{x.u}(v) = f(x.u, v) = -f(u, x.v) = -f_u(x.v) = (x.f_u)(v)$ por ser f invariante. Por lo tanto $\hat{f}(x.u) = x.\hat{f}(u)$. Análogamente se cumple $\hat{g}(x.u) = x.\hat{g}(u)$. Además por hipótesis tenemos que M es simple y por proposición 2.14 resulta que M^* es simple. Luego por lema 2.16.3, existe $\alpha \in \mathbb{F}$ tal que $\hat{g} = \alpha \hat{f}$ y en consecuencia, $g = \alpha f$, lo que dice que $g \in W$. Por lo tanto, $\mathcal{T}(M) \subseteq W$ y entonces $W = \mathcal{T}(M)$. Así, $\dim(\mathcal{T}(M)) = 1$. ■

Un resultado interesante sería saber si el recíproco de esta proposición es cierto. Más precisamente, sea M un $\mathfrak{g}$-módulo tal que $\dim(\mathcal{T}(M)) \leq 1$, ¿será posible afirmar que M es simple? La respuesta es no. Para mostrar que es falso, consideremos $M = \mathbb{R}^2$ con la base canónica $\{e_1, e_2\}$ y $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, como subálgebra de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$, con la base $\{x, y\}$, donde:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La acción de $\mathfrak{g}$ en M será la multiplicación usual de una matriz con un vector columna, por lo tanto, las matrices de $\hat{\lambda}$ y de $\hat{\rho}$ son:

$$[\hat{\lambda}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\hat{\rho}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De esta manera:

$$[\hat{q}] = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Así es claro que el rango de esta matriz es 4. Por lo tanto, el ortogonal al espacio generado por las columnas es $\{0\}$, luego $\mathcal{T}(M) = \{0\}$ y entonces $\dim(\mathcal{T}(M)) = 0 \leq 1$. Sin embargo, M no es un módulo simple porque el subespacio generado por e_1 es invariante bajo $\mathfrak{g}$.

Capítulo 3

Espacio de formas invariantes de un módulo simple sobre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Como dijimos en la sección 2.3 nos centraremos en módulos simples sobre álgebras de Lie. Pero eso no es todo, ya que dicha álgebra de Lie será semisimple y compleja de ahora en adelante. Primero que nada, en [3] y [7] se prueba que toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita posee un único ideal soluble $\mathcal{R}$ de dimensión máxima, vale decir, cualquier otro ideal soluble de $\mathfrak{g}$ está contenido en $\mathcal{R}$. Llamamos a $\mathcal{R}$ el radical soluble de $\mathfrak{g}$ y es denotado por $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$. El rol principal del radical soluble se da en el teorema de descomposición de Levi, que afirma que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie finito-dimensional con radical soluble $\mathcal{R}$, entonces existe una subálgebra $\mathcal{S}$ de $\mathfrak{g}$ (llamada componente de Levi de $\mathfrak{g}$) tal que $\mathfrak{g} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$ y $\mathcal{S} \cong \mathfrak{g}/\mathcal{R}$. En [3] (pág. 51, cap. 1) se demuestra que $\mathfrak{g}/\mathcal{R}$ es semisimple, por lo que $\mathcal{S}$ es semisimple. Ahora bien, el punto fuerte viene aquí. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja con radical soluble $\mathcal{R}$ y componente de Levi $\mathcal{S}$. En [4] (pág. 127, cap. 9) se prueba que si V es un $\mathfrak{g}$-módulo simple entonces $V \cong V_0 \otimes V_1$, donde V_0 es un $\mathcal{S}$-módulo simple (es decir, un $\mathfrak{g}$-módulo que es trivial en $\mathcal{R}$) y V_1 es un $\mathcal{R}$-módulo simple de dimensión uno. Por esta razón podremos conocer los módulos simples de un álgebra de Lie arbitraria cuando los conocemos para el caso semisimple.

Por otra parte, sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ su complejizado y V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Sea μ una representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ en V. En [5] (pág. 93, cap. 4) se prueba que existe una única representación $\hat{\mu}$ de dimensión finita de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ en V tal que $\hat{\mu}|_{\mathfrak{g}} = \mu$. Además se demuestra que μ es irreducible si y solo si $\hat{\mu}$ es irreducible. Como, por ejemplo, $(\mathfrak{su}_2)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, trabajar con módulos simples sobre $\mathfrak{su}_2$ es equivalente a trabajar con módulos simples sobre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, lo que es una ventaja puesto que $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado.

Lo que haremos en este capítulo es calcular las formas bilineales invariantes de un módulo simple V sobre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (que es semisimple ya que de hecho es simple) y notaremos que tienen una forma muy particular y ciertas propiedades dependiendo de la dimensión de V.

3.1. Módulos simples sobre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita. Diremos que $f \in End(V)$ es semisimple si las raíces de su polinomio minimal son todas distintas. Si $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado entonces semisimple y diagonalizable son equivalentes. La siguiente proposición aparece en [6] (pág. 17, cap. 2.4.2) se llama descomposición de Jordan-Chevalley y dice: sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita y $x \in End(V)$. Entonces existen únicos $x_s, x_n \in End(V)$ tales que $x = x_s + x_n$, x_s es semisimple, x_n es nilpotente y ambas conmutan, donde x_s y x_n se llaman la parte semisimple y nilpotente de x, respectivamente.

Un resultado que también aparece en [6] (pág. 30, cap. 2.6.4) es el siguiente: sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple y sea $\mu : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ una representación de dimensión finita en V. Si

$x \in End(V)$ tiene descomposición de Jordan $x = x_s + x_n$ entonces la descomposición de Jordan de $\mu(x)$ es $\mu(x) = \mu(x_s) + \mu(x_n)$ (es decir, la parte semisimple de $\mu(x)$ es $\mu(x_s)$ y la parte nilpotente es $\mu(x_n)$).

Ahora debemos saber qué forma tienen los módulos simples sobre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Como se mencionó antes, la base canónica de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ es:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí se tiene $[h, x] = 2x, [h, y] = -2y$ y $[x, y] = h$.

Sea V un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo simple no trivial de dimensión finita y μ la acción correspondiente, así $h.v = \mu_h(v), x.v = \mu_x(v)$ e $y.v = \mu_y(v)$, para todo $v \in V$. Como h es una matriz diagonalizable y $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ es un álgebra semisimple el resultado mencionado anteriormente implica que h actúa diagonalmente en V, es decir, que la imagen de h bajo μ, es decir, μ_h, es también diagonalizable. Luego, para $\alpha \in \mathbb{C}$, definimos $V_\alpha := \{v \in V \mid h.v = \alpha v\}$. Si α no es un valor propio de μ_h entonces $V_\alpha = \{0\}$. En caso contrario se tiene $V_\alpha \neq \{0\}$, donde α se llama peso de h y V_α se llama espacio de peso α. Además $V = \oplus_{\alpha \in \mathbb{C}} V_\alpha$ y al ser V de dimensión finita, los α que son valores propios son finitos. Un lema que aparece en [6] (pág. 31, cap. 2.7.1) es el siguiente:

Lema 3.1 *Sea $v \in V_\alpha$. Entonces $x.v \in V_{\alpha+2}$ e $y.v \in V_{\alpha-2}$.*

Definición 3.2 *Diremos que $\alpha \in \mathbb{C}$ es un peso maximal de V si $x.v = 0$, para todo $v \in V_\alpha$. Cualquier vector no nulo que satisfaga esta propiedad se llama vector de peso maximal α.*

Para comenzar, sea $v_0 \in V_\alpha$ un vector de peso maximal α (que existe gracias a que V es de dimensión finita y como consecuencia del lema 3.1). Definimos $v_k := \frac{1}{k!}{\mu_y}^k(v_0)$, con k un entero no negativo. Luego tenemos el siguiente lema:

Lema 3.3

1. $h.v_k = (\alpha - 2k)v_k$

2. $y.v_k = (k+1)v_{k+1}$

3. $x.v_k = \begin{cases} 0 & si\ k = 0 \\ (\alpha - k + 1)v_{k-1} & si\ k \neq 0 \end{cases}$

Su demostración es por inducción sobre k y se encuentra en [6] (pág. 32, cap. 2.7.2). Usando la ecuación 2 del lema anterior se tiene que los v_k que son diferentes de cero son linealmente independientes. Como V es de dimensión finita entonces existe un entero no negativo m tal que $v_m \neq 0$ y $v_{m+1} = 0$, es decir, $y.v_m = 0$. De hecho, podemos suponer que tal m es el entero no negativo más pequeño que tiene esta propiedad. De esta manera definimos el subespacio $W := < v_0, v_1, ..., v_m >$ de V. El lema precedente dice que este subespacio es un submódulo (no nulo porque $v_0 \in W$) y al ser V simple se concluye que $W = V$. Además, como $v_{m+1} = 0$ entonces $x.v_{m+1} = 0$, y desarrollando el lado izquierdo según la ecuación 3 del lema anterior resulta $(\alpha - m)v_m = 0$. Como $v_m \neq 0$ entonces $\alpha - m = 0$, es decir, $\alpha = m$, lo que dice que el peso maximal de V es un entero no negativo. Además $\dim(V) = m + 1$. De esta manera el lema 3.3 se reescribe así:

1. $h.v_k = (m - 2k)v_k$

2. $y.v_k = \begin{cases} (k+1)v_{k+1} & \text{si } k \neq m \\ 0 & \text{si } k = m \end{cases}$

3. $x.v_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ (m - k + 1)v_{k-1} & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$

para todo $k \in \{0, 1, ..., m\}$. Por último, enunciaremos un teorema que resume todo lo mencionado hasta ahora y que aparece en [6] (pág. 33).

Teorema 3.4 *Sea V un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo simple de dimensión finita y de peso maximal m.*

1. *Entonces $dim(V) = m + 1$ y $V = \oplus_\beta V_\beta$, donde $\beta \in \{m, m-2, ..., -(m-2), -m\}$ y $dim(V_\beta) = 1$, para todo β.*
2. *El vector de peso maximal m de V es único salvo múltiplo escalar.*
3. *La acción de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ en V es la dada por el lema 3.3 si la base es escogida en la manera prescrita. En particular, si U es un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo simple de dimensión $m + 1$ entonces U y V son módulos isomorfos.*

En virtud del punto 3 del teorema anterior, al módulo simple de peso maximal m lo denotaremos por $V^{[m]}$. Como corolario, que también aparece en [6] es:

Corolario 3.5 *Sea V cualquier $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo finito-dimensional. Entonces los valores propios de h son todos enteros y cada uno aparece con su negativo. Por otra parte, en cualquier descomposición de V en suma directa de submódulos simples el número de sumandos es precisamente $dim(V_0)+dim(V_1)$.*

3.2. Cálculo del espacio de formas bilineales invariantes

Una vez conocida la forma de los módulos simples V procederemos a encontrar el espacio de formas invariantes. Para ello emplearemos el algoritmo descrito en la proposición 2.10. Sabemos por proposición 2.15 que $\dim(\mathcal{T}(V)) \leq 1$, que de hecho veremos que es igual a 1. Lo que haremos primero es analizar los casos en que el peso maximal m es 0,1,2 y 3 para después probar el caso general.

3.2.1. Peso maximal $m \leq 3$

1. **Peso maximal $m = 0$**

   Aquí el resultado es trivial puesto que si el peso maximal es cero entonces su módulo simple tiene dimensión uno. Sin embargo, aplicaremos la proposición 2.10 para mostrar como funciona el algoritmo. De acuerdo a lo visto en la sección anterior tenemos que $V^{[0]} =< v_0 >$, por lo tanto la acción de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ en $V^{[0]}$ está dada por:

   $$x.v_0 = h.v_0 = y.v_0 = 0$$

   De esta manera las matrices de $\hat{\lambda}$ y $\hat{\rho}$ son:

   $$[\hat{\lambda}] = [\hat{\rho}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   En consecuencia, $[\hat{q}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Por lo tanto, el rango de $[\hat{q}]$ es 0 y entonces su ortogonal tiene dimensión 1 y está generado por 1. De esta manera, $\dim(\mathcal{T}(V^{[0]})) = 1$. Si $u, v \in V^{[0]}$ entonces $u = \alpha_0 v_0$ y $v = \beta_0 v_0$, por lo tanto, una forma bilineal invariante f en $V^{[0]}$ es de la forma $f(u, v) = \alpha_0 \cdot 1 \cdot \beta_0 = \alpha_0\beta_0$.

2. **Peso maximal $m = 1$**

   En este caso se tiene que $V^{[1]} =< v_0, v_1 >$, así la acción viene dada por:

   $$\begin{array}{lll} x.v_0 = 0 & h.v_0 = v_0 & y.v_0 = v_1 \\ x.v_1 = v_0 & h.v_1 = -v_1 & y.v_1 = 0 \end{array}$$

Luego de esto las matrices de $\hat{\lambda}$ y $\hat{\rho}$ son:

$$[\hat{\lambda}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\hat{\rho}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de $\hat{q}$ es:

$$[\hat{q}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notamos que $[\hat{q}]$ tiene rango 3 y el conjunto $\{(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$ genera el espacio de sus columnas, por lo tanto, el vector $(0,1,-1,0)$ genera el ortogonal de este espacio. Luego $(0,1,-1,0)$ está representado en $V^{[1]} \otimes V^{[1]}$ por $v_0 \otimes v_1 - v_1 \otimes v_0$ y su matriz correspondiente es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si $u, v \in V^{[1]}$ entonces $u = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1$ y $v = \beta_0 v_0 + \beta_1 v_1$, por lo que finalmente tenemos que una forma bilineal invariante f en $V^{[1]}$ es:

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0.$$

3. **Peso maximal** $m = 2$

   En este caso tenemos $V^{[2]} =< v_0, v_1, v_2 >$ y la acción es:

$$\begin{array}{lll} x.v_0 = 0 & h.v_0 = 2v_0 & y.v_0 = v_1 \\ x.v_1 = 2v_0 & h.v_1 = 0 & y.v_1 = 2v_2 \\ x.v_2 = v_1 & h.v_2 = -2v_2 & y.v_2 = 0 \end{array}$$

   De esta manera las matrices de $\hat{\lambda}$ y de $\hat{\rho}$ son:

$$[\hat{\lambda}] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\hat{\rho}] = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   La matriz de $\hat{q}$ es de 9 por 27, por lo que no la pondremos, pero un cálculo simple muestra que tiene rango 8. El vector $(0,0,1,0,-2,0,1,0,0)$ genera el ortogonal al espacio generado por las columnas de $[\hat{q}]$ y su correspondiente en $V^{[2]} \otimes V^{[2]}$ es $v_0 \otimes v_2 - 2v_1 \otimes v_1 + v_2 \otimes v_0$, así su matriz es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego si $u = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in V^{[2]}$ y $v = \beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \in V^{[2]}$, una forma bilineal invariante f en $V^{[2]}$ tiene la forma:

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \alpha_0\beta_2 - 2\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0.$$

4. **Peso maximal $m = 3$**

   En este caso tenemos $V^{[3]} =< v_0, v_1, v_2, v_3 >$ y la acción es:

$$\begin{array}{lll} x.v_0 = 0 & h.v_0 = 3v_0 & y.v_0 = v_1 \\ x.v_1 = 3v_0 & h.v_1 = v_1 & y.v_1 = 2v_2 \\ x.v_2 = 2v_1 & h.v_2 = -v_2 & y.v_2 = 3v_3 \\ x.v_3 = v_2 & h.v_3 = -3v_3 & y.v_3 = 0 \end{array}$$

   Luego las matrices de $\hat{\lambda}$ y de $\hat{\rho}$ son:

$$[\hat{\lambda}] = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\hat{\rho}] = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

   De esta manera la matriz de $\hat{q}$ es de tamaño 16 por 48 y su rango es 15. El vector $(0,0,0,1,0,0,-3,0,0,3,0,0,-1,0,0,0)$ genera el ortogonal al espacio de las columnas de $\hat{q}$ y su correspondiente en $V^{[3]} \otimes V^{[3]}$ es $v_0 \otimes v_3 - 3v_1 \otimes v_2 + 3v_2 \otimes v_1 - v_3 \otimes v_0$. Su matriz es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Luego si $u = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in V^{[3]}$ y $v = \beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 \in V^{[3]}$, una forma bilineal invariante f de $V^{[3]}$ es de la forma:

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \alpha_0\beta_3 - 3\alpha_1\beta_2 + 3\alpha_2\beta_1 - \alpha_3\beta_0.$$

3.2.2. Peso maximal m arbitrario

En este caso nuestro módulo simple es $V^{[m]} =< v_0, v_1, ..., v_m >$. Si f es una forma bilineal invariante de $V^{[m]}$ entonces $f(h.v_i, v_j) + f(v_i, h.v_j) = 0$, para todo $i, j = 0, ..., m$. De acuerdo al lema 3.3.1 tenemos $f((m-2i)v_i, v_j) + f(v_i, (m-2j)v_j) = 0$, esto es, $(m - (i+j))f(v_i, v_j) = 0$. Por lo tanto, si $i + j \neq m$ entonces $f(v_i, v_j) = 0$. Así debemos analizar lo que ocurre cuando $i + j = m$, o bien, $j = m - i$. Si notamos la subsección anterior podemos ver que los sumandos de cada forma invariante posee los coeficientes del triángulo de Pascal con signos alternados de acuerdo al peso maximal asignado. De esta manera enunciamos el siguiente resultado:

Proposición 3.6 *Sea $V^{[m]}$ el $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo simple de peso maximal m. Si f es una forma invariante de $V^{[m]}$ entonces $f(v_i, v_{m-i}) = (-1)^i \binom{m}{i} f(v_0, v_m)$, para todo $i = 0, 1, ..., m$.*

Demostración. Usaremos inducción en i. Si $i=0$ entonces:

$$f(v_0, v_m) = (-1)^0 \binom{m}{0} f(v_0, v_m)$$

Supongamos que la proposición es cierta para todo i y probemos que lo es para $i+1$. En efecto, desarrollando el lado izquierdo se tiene:

$$\begin{aligned}
f(v_{i+1}, v_{m-(i+1)}) &= \frac{1}{i+1} f(y.v_i, v_{m-(i+1)}) \\
&= \frac{-1}{i+1} f(v_i, y.v_{m-(i+1)}) \\
&= \frac{-(m-i)}{i+1} f(v_i, v_{m-i}) \\
&= \frac{-(m-i)}{i+1} (-1)^i \binom{m}{i} f(v_0, v_m) \\
&= \frac{m-i}{i+1} (-1)^{i+1} \frac{m!}{i!(m-i)!} f(v_0, v_m) \\
&= (-1)^{i+1} \frac{m!}{(i+1)!(m-i-1)!} f(v_0, v_m) \\
&= (-1)^{i+1} \binom{m}{i+1} f(v_0, v_m)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la proposición se sigue. ■

Además de lo mencionado con respecto a los coeficientes de las formas invariantes podemos hacer otra observación. Si $i = m$ entonces $f(v_m, v_0) = (-1)^m f(v_0, v_m)$. Por lo tanto, si m es par entonces $f(v_m, v_0) = f(v_0, v_m)$, lo que dice que f es simétrica. Por el contrario, si m es impar entonces $f(v_m, v_0) = -f(v_0, v_m)$, es decir, f es antisimétrica.

Capítulo 4

Módulos simples sobre $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$

Una vez encontradas las formas invariantes de un módulo simple sobre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sería interesante saber lo que sucede con los módulos simples sobre el álgebra $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. Para esto debemos adaptar los conceptos que fueron usados en el capítulo anterior para este caso. Sabemos que $(\mathfrak{su}_3)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, por lo que el mismo argumento mencionado en el capítulo anterior nos dice que trabajar con módulos simples sobre $\mathfrak{su}_3$ es equivalente a trabajar con módulos simples sobre $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$.

4.1. Definiciones básicas

Primero debemos fijar una base de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. En general la dimensión de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ es $n^2 - 1$, por lo que $\dim(\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})) = 8$. De esta manera, las siguientes matrices forman una base de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siguiendo el mismo orden de las matrices que forman la base canónica de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, la base que designaremos como usual para $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ es $\{x_1, x_2, x_3, h_1, h_2, y_1, y_2, y_3\}$. Además los conmutadores entre estas matrices son:

$[h_1, h_2] = 0$	$[h_1, y_2] = y_2$	$[x_2, y_2] = h_2$	$[x_1, y_3] = -y_2$
$[h_1, x_1] = 2x_1$	$[h_2, y_2] = -2y_2$	$[x_3, y_3] = h_1 + h_2$	$[y_1, y_3] = 0$
$[h_2, x_1] = -x_1$	$[h_1, x_3] = x_3$	$[x_1, x_2] = x_3$	$[x_3, y_1] = -x_2$
$[h_1, y_1] = -2y_1$	$[h_2, x_3] = x_3$	$[x_1, y_2] = 0$	$[x_2, x_3] = 0$
$[h_2, y_1] = y_1$	$[h_1, y_3] = -y_3$	$[y_1, y_2] = -y_3$	$[x_2, y_3] = y_1$
$[h_1, x_2] = -x_2$	$[h_2, y_3] = -y_3$	$[x_2, y_1] = 0$	$[y_2, y_3] = 0$
$[h_2, x_2] = 2x_2$	$[x_1, y_1] = h_1$	$[x_1, x_3] = 0$	$[x_3, y_2] = x_1$

Notemos que las subálgebras de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ generadas por $\{x_1, h_1, y_1\}$, $\{x_2, h_2, y_2\}$ y $\{x_3, h_3, y_3\}$, donde $h_3 := h_1 + h_2$, son isomorfas a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Definición 4.1 *Sea V un $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$-módulo y μ la acción correspondiente, es decir, $\mu_x(u) = x.u$, para todo $x \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}); u \in V$.*

1. *Diremos que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ es un peso de V si existe $v \in V$ no nulo tal que $h_1.v = \alpha_1 v$ y $h_2.v = \alpha_2 v$.*
2. *Al vector v de la parte anterior se le llama vector de peso α.*
3. *El subespacio $V_\alpha := \{v \in V \mid h_1.v = \alpha_1 v \text{ y } h_2.v = \alpha_2 v\}$ de V recibe el nombre de espacio de peso α. La multiplicidad de α es la dimensión de V_α.*

Notemos que si α es un peso de un módulo V de dimensión finita entonces $V_\alpha \neq \{0\}$ y además $V = \oplus_\alpha V_\alpha$.

En [5] (pág. 130) se demuestra que toda representación de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ tiene al menos un peso α y que todos ellos son de la forma $\alpha = (n_1, n_2)$, con $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$.

Definición 4.2 *Diremos que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$, α no nulo, es una raíz de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ si existe $x \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ no nulo tal que $[h_1, x] = \alpha_1 x$ y $[h_2, x] = \alpha_2 x$. El vector x recibe el nombre de vector de raíz α.*

Notemos que las raíces no son más que los pesos de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ bajo la representación adjunta $ad : \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}))$. Por otra parte, las relaciones entre los conmutadores dada más arriba nos permiten calcular todas las raíces de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}
x &= x_1 \Rightarrow \alpha = (2, -1)\\
x &= x_2 \Rightarrow \alpha = (-1, 2)\\
x &= x_3 \Rightarrow \alpha = (1, 1)\\
x &= y_1 \Rightarrow \alpha = (-2, 1)\\
x &= y_2 \Rightarrow \alpha = (1, -2)\\
x &= y_3 \Rightarrow \alpha = (-1, -1)
\end{aligned}$$

Ya que el conjunto $\{x_1, x_2, x_3, h_1, h_2, y_1, y_2, y_3\}$ es una base de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, las únicas raíces son las seis recién calculadas. A las raíces $r_1 = (2, -1)$ y $r_2 = (-1, 2)$ las denominaremos raíces simples positivas ya que cualquier otra raíz se puede escribir como combinación lineal entera de r_1 y r_2 y además todos los coeficientes de esa combinación son mayores o iguales que cero, o bien son menores o iguales que cero. En efecto, tenemos que $(2, -1) = 1r_1 + 0r_2$, $(-1, 2) = 0r_1 + 1r_2$, $(1, 1) = 1r_1 + 1r_2$, $(-2, 1) = (-1)r_1 + 0r_2$, $(1, -2) = 0r_1 + (-1)r_2$ y $(-1, -1) = (-1)r_1 + (-1)r_2$. Por esta razón, a las raíces asociadas a x_1, x_2 y x_3 las llamaremos raíces positivas, por el contrario, a las correspondientes a y_1, y_2 e y_3 las denominaremos raíces negativas. El hecho de escoger r_1 y r_2 como raíces simples positivas es arbitrario; cualquier otro par de raíces que tengan las mismas propiedades que r_1 y r_2 pueden ser llamadas raíces simples positivas. Además definimos el conjunto $R := \{\alpha \in \mathbb{Z}^2 \mid \alpha \text{ es raíz de } \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})\}$. Si denotamos por R^+ al conjunto de raíces positivas y R^- al conjunto de raíces negativas resulta que $R = R^+ \cup R^-$.

De ahora en adelante, V será un $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$-módulo simple no trivial de dimensión finita.

Proposición 4.3 *Sea $v \in V_\alpha$ un vector de peso α. Entonces $x_1.v \in V_{\alpha+(2,-1)}$, $x_2.v \in V_{\alpha+(-1,2)}$, $x_3.v \in V_{\alpha+(1,1)}$ e $y_1.v \in V_{\alpha+(-2,1)}$, $y_2.v \in V_{\alpha+(1,-2)}$, $y_3.v \in V_{\alpha+(-1,-1)}$.*

Demostración. Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Luego:

$$h_1.(x_1.v) = [h_1, x_1].v + x_1.(h_1.v) = 2x_1.v + x_1.(\alpha_1 v) = (\alpha_1 + 2)x_1.v$$

$$h_2.(x_1.v) = [h_2, x_1].v + x_1.(h_2.v) = -x_1.v + x_1.(\alpha_2 v) = (\alpha_2 - 1)x_1.v$$

Por lo tanto, $x_1.v \in V_{(\alpha_1+2,\alpha_2-1)} = V_{\alpha+(2,-1)}$. De igual manera se prueban las demás aseveraciones y la proposición se sigue. ∎

Definición 4.4 *Diremos que $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ es un peso maximal de V si $x_1.v = x_2.v = x_3.v = 0$, para todo $v \in V_\alpha$. Cualquier vector no nulo con esta propiedad se llama vector de peso maximal α.*

En [5] (pág. 138, cap. 5) se demuestra que el peso maximal α de un módulo simple es de la forma $\alpha = (m_1, m_2)$, con m_1 y m_2 enteros no negativos. Un resultado importante que aparece en [5] (pág. 133, cap. 5) es el siguiente teorema, llamado teorema del peso maximal.

Teorema 4.5

1. *Cada representación irreducible μ de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ es la suma directa de los espacios asociados a los pesos, esto es, μ_{h_1} y μ_{h_2} son simultáneamente diagonalizables.*

2. *Cada representación irreducible de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ tiene un único peso maximal, y dos representaciones irreducibles isomorfas tienen el mismo peso maximal.*

3. *Dos representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ con el mismo peso maximal son isomorfas.*

4. *Si μ es una representación irreducible de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ entonces su peso maximal α es de la forma $\alpha = (m_1, m_2)$, con m_1 y m_2 enteros no negativos.*

5. *Si m_1 y m_2 son enteros no negativos entonces existe una representación irreducible de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ con peso maximal $\alpha = (m_1, m_2)$.*

4.2. Propiedades de los módulos simples

Una vez definidos los conceptos vistos en el capítulo anterior para este caso procederemos a mostrar las propiedades de un módulo simple sobre $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. En [5] (pág. 134, cap. 5) se prueba que si V es un módulo simple con peso maximal (m_1, m_2) entonces su dimensión está dada por $\dim(V) = \frac{1}{2}(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)$. Notemos que sin perder generalidad podemos suponer $m_1 \geq m_2$ ya que de la dimensión se concluye que el rol de m_1 y m_2 es simétrico, en el sentido en que la dimensión no varía si los intercambiamos.

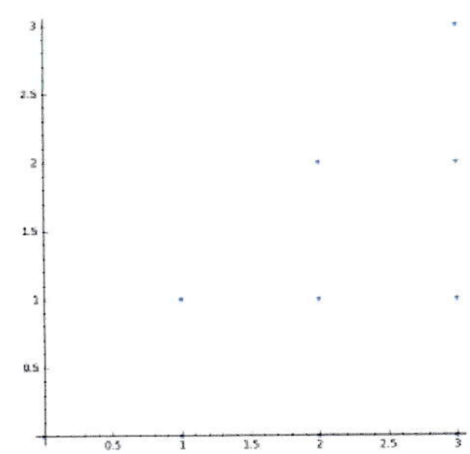

Figura 1: Pesos maximales considerando la primera coordenada mayor o igual que la segunda.

Además dijimos que $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ contiene tres copias isomorfas a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Más precisamente, sean $\mathfrak{s}_1 := < x_1, h_1, y_1 >$, $\mathfrak{s}_2 := < x_2, h_2, y_2 >$ y $\mathfrak{s}_3 := < x_3, h_3, y_3 >$ esas subálgebras. Sea V un módulo simple sobre $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ de peso maximal (m_1, m_2). Recordemos que todos los pesos de un módulo (no necesariamente simple) sobre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ son enteros y aparecen con su negativo; con esto y usando la proposición 4.3 es posible formar un reticulado de $\mathbb{Z}^2$, comenzando con (m_1, m_2), que consiste de todos los pesos de V y lo denotaremos por $\Omega_{(m_1,m_2)}$.

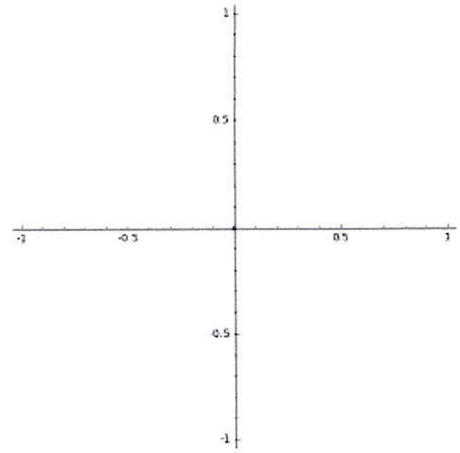

Figura 2: $\Omega_{(0,0)} = \{(0,0)\}$

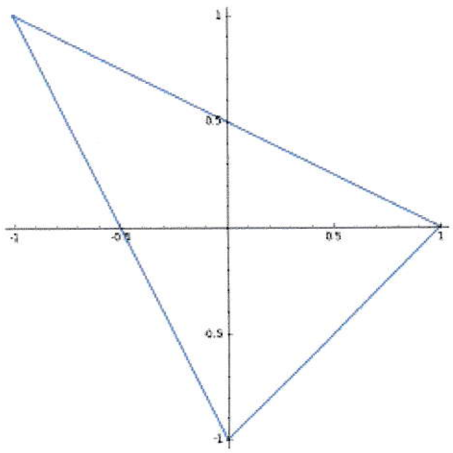

Figura 3: $\Omega_{(1,0)} = \{(1,0),(-1,1),(0,-1)\}$

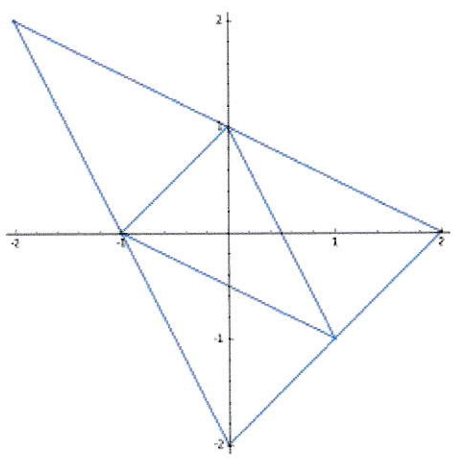

Figura 4: $\Omega_{(2,0)} = \{(2,0),(0,1),(-2,2),(-1,0),(0,-2),(1,-1)\}$

Si $\alpha = (a, b)$ es un peso de V, diremos que a es un $\mathfrak{s}_1$-peso de V y b es un $\mathfrak{s}_2$-peso de V. En otras palabras, a es un peso de V visto como módulo sobre $\mathfrak{s}_1$ y b es un peso de V como módulo sobre $\mathfrak{s}_2$. Además tenemos que $a+b$ es un peso de V como módulo sobre $\mathfrak{s}_3$ (es decir, un $\mathfrak{s}_3$-peso de V). En efecto, al ser α un peso entonces existe $v \in V$ no nulo tal que $h_1.v = av$ y $h_2.v = bv$, por lo que $h_3.v = (h_1 + h_2).v = h_1.v + h_2.v = av + bv = (a+b)v$.

Por otra parte, si (a, b) es un peso de V entonces $(-b, -a)$ también lo es. Como a es un $\mathfrak{s}_1$-peso de V entonces $-a$ también, por lo que $(a, b) + a(-2, 1) = (-a, a+b)$ es un peso de V gracias a la proposición 4.3 (notemos que a (a, b) le sumamos a veces $(-2, 1)$ porque es la raíz de y_1 que pertenece a $\mathfrak{s}_1$). Luego $a+b$ es un $\mathfrak{s}_2$-peso de V, por lo tanto $-a-b$ también. Así $(-a, a+b) + (a+b)(1, -2) = (b, -a-b)$ es un peso de V (de igual manera a $(-a, a+b)$ le sumamos $a+b$ veces $(1, -2)$ porque es la raíz de y_2 que pertenece a $\mathfrak{s}_2$). Ahora b es un $\mathfrak{s}_1$-peso de V por lo que $-b$ también, entonces $(b, -a-b) + b(-2, 1) = (-b, -a)$ es un peso de V.

Diremos que $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ es un peso minimal de V si $y_1.v = y_2.v = y_3.v = 0$, para todo $v \in V_\alpha$. Cualquier vector no nulo que satisfaga lo anterior se llama vector de peso minimal α. El siguiente lema muestra la estrecha relación entre un peso maximal y un minimal.

Lema 4.6 *Sea V un módulo simple de peso maximal (m_1, m_2). Entonces $(-m_2, -m_1)$ es un peso minimal de V.*

Demostración. Como (m_1, m_2) es un peso de V, de acuerdo a lo anterior $(-m_2, -m_1)$ es también un peso de V. Falta ver que es minimal.

Sea $u \in V$ un vector de peso $(-m_2, -m_1)$. Afirmamos en primer lugar que el par ordenado $(-m_2, -m_1) + (-2, 1) = (-m_2 - 2, -m_1 + 1)$ no es un peso de V ya que si lo fuera entonces $-m_2 - 2$ es un $\mathfrak{s}_1$-peso de V y así $m_2 + 2$ también. De esta manera resulta que $(-m_2 - 2, -m_1 + 1) + (m_2 + 2)(2, -1) = (m_2 + 2, -m_1 - m_2 - 1)$ es un peso de V. Entonces $-m_1 - m_2 - 1$ es un $\mathfrak{s}_2$-peso de V, por lo que $m_1 + m_2 + 1$ también lo es, por lo tanto $(m_2 + 2, -m_1 - m_2 - 1) + (m_1 + m_2 + 1)(-1, 2) = (-m_1 + 1, m_1 + m_2 + 1)$ es un peso de V. Continuando, $-m_1 + 1$ es un $\mathfrak{s}_1$-peso de V, lo que dice que $m_1 - 1$ también. Así $(-m_1 + 1, m_1 + m_2 + 1) + (m_1 - 1)(2, -1) = (m_1 - 1, m_2 + 2) = (m_1, m_2) + (-1, 2)$ es un peso de V, lo que es contradictorio porque (m_1, m_2) es el peso maximal. Por lo tanto, $(-m_2, -m_1) + (-2, 1) = (-m_2 - 2, -m_1 + 1)$ no es un peso y así $y_1.u = 0$.

Similarmente, $(-m_2, -m_1) + (1, -2) = (-m_2 + 1, -m_1 - 2)$ no es un peso de V porque de lo contrario tendríamos que $-m_1 - 2$ es un $\mathfrak{s}_2$-peso de V y entonces $m_1 + 2$ también lo sería. De esta manera $(-m_2 + 1, -m_1 - 2) + (m_1 + 2)(-1, 2) = (-m_1 - m_2 - 1, m_1 + 2)$ es un peso de V. Luego $-m_1 - m_2 - 1$ es un $\mathfrak{s}_1$-peso de V y $m_1 + m_2 + 1$ también lo es, así $(-m_1 - m_2 - 1, m_1 + 2) + (m_1 + m_2 + 1)(2, -1) = (m_1 + m_2 + 1, -m_2 + 1)$ es un peso de V. Entonces $-m_2 + 1$ es un $\mathfrak{s}_2$-peso de V y $m_2 - 1$ también, lo que dice que $(m_1 + m_2 + 1, -m_2 + 1) + (m_2 - 1)(-1, 2) = (m_1 + 2, m_2 - 1) = (m_1, m_2) + (2, -1)$ es un peso de V, lo que no puede ocurrir porque (m_1, m_2) es el peso maximal. Por lo tanto $(-m_2, -m_1) + (1, -2) = (-m_2 + 1, -m_1 - 2)$ no es un peso de V y así $y_2.u = 0$.

Por último, $y_3.u = [y_2, y_1].u = y_2.(y_1.u) - y_1.(y_2.u) = 0 - 0 = 0$ y en conclusión u es un vector de peso minimal $(-m_2, -m_1)$. ■

Para visualizar mejor lo hecho observemos los siguientes diagramas correspondientes a los pesos maximales $(1, 1)$ y $(2, 2)$, respectivamente:

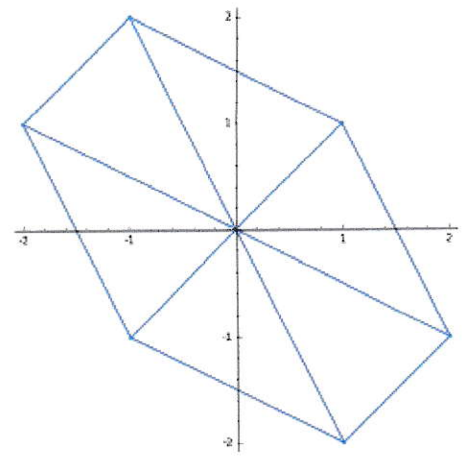

Figura 5: $\Omega_{(1,1)} = \{(1,1),(-1,2),(-2,1),(0,0),(2,-1),(1,-2),(-1,-1)\}$

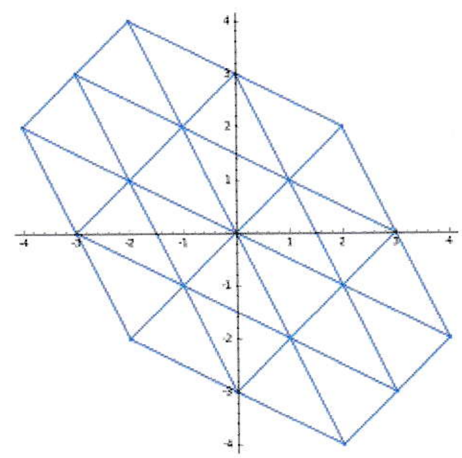

Figura 6: $\Omega_{(2,2)}$ (posee 19 puntos)

El lema precedente y el que anunciaremos a continuación nos servirán para dar un nexo entre los pesos maximales de un módulo simple V y su dual V^*.

Lema 4.7 *Sea V un $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$-módulo simple de dimensión finita. Si α es un peso de V entonces $-\alpha$ es un peso de V^*.*

Demostración. Sea $\alpha = (n_1, n_2)$ un peso cualquiera de V. Sabemos que $V = \oplus_\alpha V_\alpha$, por lo que existe una base B de V tal que $B = \cup_\alpha B_\alpha$, donde B_α es una base de V_α. Sea $v \in B_\alpha \subseteq V_\alpha$. Luego $h_1.v = n_1 v$ y $h_2.v = n_2 v$. Si v^* es el funcional de la base dual de B tal que $v^*(v) = 1$ y es cero en los otros elementos de B se tiene $(h_1.v^*)(v) = -v^*(h_1.v) = -v^*(n_1 v) = -n_1$ y $(h_2.v^*)(v) = -v^*(h_2.v) = -v^*(n_2 v) = -n_2$, es decir, $h_1.v^* = -n_1 v^*$ y $h_2.v^* = -n_2 v^*$. Así v^* es un vector de peso $-\alpha = (-n_1, -n_2)$. ■

Notemos que si β es un peso de V^* entonces $-\beta$ es un peso de V^{**} por el lema precedente. Así, por proposición 2.15, resulta que $-\beta$ es un peso de V. La siguiente proposición nos da la conexión entre los pesos maximales de V y V^*.

Proposición 4.8 *Si V es un módulo simple de peso maximal (m_1, m_2) entonces V^* tiene peso maximal (m_2, m_1).*

Demostración. Si (m_1, m_2) es el peso maximal de V entonces $(-m_2, -m_1)$ es el peso minimal de acuerdo al lema 4.6. Por lema 4.7 tenemos que $-(-m_2, -m_1) = (m_2, m_1)$ es un peso de V^*.

Veamos que es el peso maximal de V^*. Sea $g \in V^*$ un vector de peso (m_2, m_1). Por proposición 4.3 tenemos $x_1.g \in V_{(m_2,m_1)+(2,-1)}, x_2.g \in V_{(m_2,m_1)+(-1,2)}$ y $x_3.g \in V_{(m_2,m_1)+(1,1)}$. Afirmamos que estos tres espacios son nulos. Supongamos que $(m_2, m_1) + (2, -1) = (m_2 + 2, m_1 - 1)$ es un peso de V^*. Entonces $-(m_2 + 2, m_1 - 1) = (-m_2 - 2, -m_1 + 1) = (-m_2, -m_1) + (-2, 1)$ es un peso de V, lo que contradice la minimalidad de $(-m_2, -m_1)$. De esta manera $(m_2, m_1) + (2, -1)$ no es un peso de V^* y $V_{(m_2,m_1)+(2,-1)} = \{0\}$, por lo que $x_1.g = 0$. Similarmente se prueba que $x_2.g = 0$ y $x_3.g = 0$. En consecuencia, $g \in V^*$ es un vector de peso maximal (m_2, m_1). ■

4.3. Formas invariantes de un módulo simple

Como dijimos al comienzo del capítulo el objetivo propuesto es calcular el espacio de formas invariantes de un $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$-módulo simple V. Lo único que podemos asegurar en un principio es que la dimensión de $\mathcal{T}(V)$ es a lo más uno en virtud de la proposición 2.17. De la definición 4.1.1 podemos decir algo respecto a las formas invariantes. Sean $v_{(a,b)} \in V$ y $v_{(c,d)} \in V$ vectores de peso (a, b) y (c, d), respectivamente. Entonces si $f \in \mathcal{T}(V)$ resulta $f(h_1.v_{(a,b)}, v_{(c,d)}) + f(v_{(a,b)}, h_1.v_{(c,d)}) = 0$ y $f(h_2.v_{(a,b)}, v_{(c,d)}) + f(v_{(a,b)}, h_2.v_{(c,d)}) = 0$. Así se consigue $(a + c)f(v_{(a,b)}, v_{(c,d)}) = 0$ y $(b + d)f(v_{(a,b)}, v_{(c,d)}) = 0$. En conclusión, si $a + c \neq 0$ o $b + d \neq 0$ entonces $f(v_{(a,b)}, v_{(c,d)}) = 0$. Por el contrario, si $a + c = 0$ y $b + d = 0$, es decir, si $(a, b) = -(c, d)$, entonces es posible que $f(v_{(a,b)}, v_{(c,d)})$ sea no nulo. Notemos que en las figuras 2, 5 y 6 cada peso aparece con su negativo, no así con las figuras 3 y 4. Además podemos observar que la figura 5 está contenida en la figura 6 y son hexágonos concéntricos en $(0, 0)$. Más aún, en general tendremos que el reticulado $\Omega_{(m,m)}$ está contenido en $\Omega_{(m+1,m+1)}$, para todo entero no negativo m y son hexágonos que tienen su centro en $(0, 0)$. De esta manera enunciamos el siguiente teorema:

Teorema 4.9 *Sea V un $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$-módulo simple de dimensión finita con peso maximal (m_1, m_2). Entonces $\mathcal{T}(V) \neq \{0\}$ si y solo si $m_1 = m_2$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{T}(V) \neq \{0\}$. Entonces existe $f \in \mathcal{T}(V)$ no nula. Probemos que tal f es no degenerada. En la demostración de la proposición 2.16 se definió la función $\hat{f} : V \longrightarrow V^*$ como $\hat{f}(u) := f_u$, donde $f_u : V \longrightarrow \mathbb{C}$ está dada por $f_u(v) := f(u, v)$. Luego como f es invariante entonces $\hat{f}$ es un homomorfismo de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$-módulos ya que si $f(x.u, v) = -f(u, x.v)$, para todo $u, v \in V$; $x \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, se tiene que $f_{x.u}(v) = (x.f_u)(v)$, es decir, $\hat{f}(x.u) = x.\hat{f}(u)$. Ahora debemos probar que $ker(\hat{f}) = \{0\}$. Sabemos que $ker(\hat{f})$ es un submódulo de V, y al ser V simple se tiene que $ker(\hat{f}) = \{0\}$ o bien $ker(\hat{f}) = V$. Como $f \neq 0$ entonces $\hat{f} \neq 0$, por lo tanto se concluye que $ker(\hat{f}) = \{0\}$ y así f es no degenerada.

Por otra parte, afirmamos que V y V^* son módulos isomorfos. En efecto, como $\hat{f}$ es inyectiva y además V y V^* tienen la misma dimensión, entonces $\hat{f}$ es una biyección y, por lo tanto, es un isomorfismo de módulos. Además tenemos por hipótesis que V es simple y por proposición 2.14 su dual V^* también lo es. Entonces por el teorema 4.5.2 resulta que V y V^* tienen el mismo peso maximal y por la proposición 4.8 tenemos que $(m_1, m_2) = (m_2, m_1)$, es decir, $m_1 = m_2$.

Recíprocamente, supongamos que $m_1 = m_2 = m$. Entonces V es de peso maximal (m, m) y por proposición 4.8 ese mismo peso maximal tiene V^*. Luego por teorema 4.5.3 ambos espacios son isomorfos como módulos, digamos que $\varphi : V \longrightarrow V^*$ es tal isomorfismo. Si $u \in V$ entonces $\varphi(u) := \varphi_u \in V^*$ y así definimos $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ como $f(u, v) := \varphi_u(v)$. Como φ es una biyección y $\dim(V) \geq 1$ entonces $\varphi \neq 0$, por lo que $f \neq 0$. Es inmediato que f es bilineal. Afirmamos que también es invariante. En efecto, sean $u \in V$ y $x \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. Entonces $\varphi(x.u) = x.\varphi(u)$, así $\varphi_{x.u} = x.\varphi_u$, es decir, para todo $v \in V$ se tiene que $\varphi_{x.u}(v) = (x.\varphi_u)(v)$. Desarrollando el lado derecho de la última igualdad se consigue que $\varphi_{x.u}(v) = -\varphi_u(x.v)$, esto es, $f(x.u, v) = -f(u, x.v)$. Así $f \in \mathcal{T}(V)$ y en conclusión $\mathcal{T}(V) \neq \{0\}$. ■

Con esto sería interesante conocer las formas invariantes cuando, por supuesto, las coordenadas del peso maximal son iguales. Nuevamente la proposición 2.10 viene a darnos una mano.

Si las coordenadas del peso maximal son iguales a $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ entonces la dimensión del módulo simple V correspondiente es $\dim(V) = \frac{1}{2}(m+1)(m+1)(m+m+2) = (m+1)^3$ de acuerdo a la ecuación dada en el comienzo de la sección anterior. Además por teorema 4.5.3 el módulo simple de peso maximal dado es único salvo isomorfía, por lo que si es de peso maximal (m, m) lo denotaremos por $V^{[(m,m)]}$.

1. **Peso maximal** $(0,0)$

   Sustituyendo $m = 0$ en la ecuación de dimensión mencionada más arriba resulta que la dimensión del módulo es 1, por lo que $V^{[(0,0)]} =< v_{(0,0)} >$. De acuerdo a la figura 2 el único peso de este módulo es $(0,0)$, por lo tanto $x_i.v_{(0,0)} = 0$, $y_i.v_{(0,0)} = 0$ y $h_j.v_{(0,0)} = 0$, para todo $i = 1,2,3; j = 1,2$. Luego:

   $$[\hat{\lambda}] = [\hat{\rho}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Por lo tanto resulta $[\hat{q}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Como el rango de $[\hat{q}]$ es cero entonces el ortogonal al espacio columna está generado por 1. De esta manera si $u = \alpha v_{(0,0)}$ y $v = \beta v_{(0,0)}$ son vectores en $V^{[(0,0)]}$ entonces una forma invariante f en $V^{[(0,0)]}$ es $f(u,v) = \alpha \cdot 1 \cdot \beta = \alpha\beta$. Más aún, si $g \in Bil(V^{[(0,0)]} \times V^{[(0,0)]}, \mathbb{C})$ entonces $g(x.u, v) + g(u, x.v) = 0 + 0 = 0$, para todo $u, v \in V^{[(0,0)]}; x \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, lo que dice que toda forma bilineal en $V^{[(0,0)]}$ es invariante.

   Si ahora $m \neq 0$, consideremos $\mu : \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^3)$ como la representación estándar, es decir, $\mu(x) := x$, para todo $x \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ y $\mu^* : \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}((\mathbb{C}^3)^*)$ su representación dual, vale decir, $\mu^*(x) := -x^t$, para todo $x \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. En [5] (pág. 139) se muestra que e_1, e_2 y e_3 son los vectores propios de μ con e_1 como vector de peso maximal $(1,0)$ y también son los vectores propios de μ^* con e_3 como vector de peso maximal $(0,1)$. Luego si consideramos $V := \mathbb{C}^3 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^3$, $2m$ veces, definimos la representación $\tilde{\mu} : \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ como

   $$\tilde{\mu}(x) := \mu(x) \otimes id \otimes id \otimes \cdots \otimes id + id \otimes \mu(x) \otimes id \otimes \cdots \otimes id + \cdots + id \otimes \cdots \otimes \mu^*(x).$$

   Además si definimos $f_1 := e_3, f_2 := -e_2$ y $f_3 := e_1$ entonces $v := e_1 \otimes \cdots \otimes e_1 \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_1$, donde e_1 y f_1 aparecen m veces cada uno, es el vector de peso maximal (m,m) de $\tilde{\mu}$. Sin embargo, $\tilde{\mu}$ no es una representación irreducible. Para conseguir una representación irreducible de peso maximal (m,m) debemos aplicar $\tilde{\mu}(y_1)$ y $\tilde{\mu}(y_2)$ a v repetidamente hasta obtener cero. Los vectores que aparezcan formarán una base del módulo simple que queremos y tendrá dimensión $(m+1)^3$.

2. **Peso maximal** $(1,1)$

   Aquí $m = 1$ y de acuerdo a lo anterior tenemos que $V = \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ y $v = e_1 \otimes f_1$ y al aplicarle $\tilde{\mu}(y_i) = \mu(y_i) \otimes id + id \otimes \mu^*(y_i)$, para $i = 1,2$, resulta

   $V^{[(1,1)]} =< e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, e_3 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2, e_2 \otimes f_2 + e_1 \otimes f_3, e_2 \otimes f_3, e_3 \otimes f_2, e_3 \otimes f_3 >$

   que es un submódulo de V. Luego definimos $\hat{\lambda}(x \otimes (e_i \otimes f_j)) := xe_i \otimes f_j - e_i \otimes x^t f_j$ y $\hat{\rho}((e_i \otimes f_j) \otimes x) := -\hat{\lambda}(x \otimes (e_i \otimes f_j))$, para todo $x \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$; $i, j = 1,2,3$. Las matrices de $\hat{\lambda}$ y de $\hat{\rho}$ son de tamaño 8 por 64 por lo que la matriz de $\hat{q}$ es de tamaño 64 por 512 y su rango es 63. Luego la matriz de Gram es

   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si $u = u_1(e_1 \otimes f_1) + u_2(e_2 \otimes f_1) + u_3(e_1 \otimes f_2) + u_4(e_3 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2) + u_5(e_2 \otimes f_2 + e_1 \otimes f_3) + u_6(e_2 \otimes f_3) + u_7(e_3 \otimes f_2) + u_8(e_3 \otimes f_3)$ y $v = v_1(e_1 \otimes f_1) + v_2(e_2 \otimes f_1) + v_3(e_1 \otimes f_2) + v_4(e_3 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2) + v_5(e_2 \otimes f_2 + e_1 \otimes f_3) + v_6(e_2 \otimes f_3) + v_7(e_3 \otimes f_2) + v_8(e_3 \otimes f_3)$ son vectores en $V^{[(1,1)]}$ entonces una forma bilineal invariante f en $V^{[(1,1)]}$ es

$$f(u,v) = u_8 v_1 - u_7 v_2 - u_6 v_3 + (2u_4 + u_5)v_4 + (u_4 + 2u_5)v_5 - u_3 v_2 - u_2 v_7 + u_1 v_8.$$

3. **Peso maximal** $(2,2)$

   Aquí $m = 2$ y entonces $V = \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ y $v = e_1 \otimes e_1 \otimes f_1 \otimes f_1$. Al aplicarle $\tilde{\mu}(x) = \mu(x) \otimes id \otimes id \otimes id + id \otimes \mu(x) \otimes id \otimes id + id \otimes id \otimes \mu^*(x) \otimes id + id \otimes id \otimes id \otimes \mu^*(x)$ a v conseguimos que la dimensión de $V^{[(2,2)]}$ es 27. Aquí no calcularemos una forma invariante de $V^{[(2,2)]}$ puesto que su dimensión es muy grande y hace que las matrices sean de gran tamaño.

Capítulo 5

Problemas abiertos

Finalmente, para concluir este trabajo y después de todo lo hecho hasta ahora los problemas que quedan pendientes de esta tesis son los siguientes:

5.1. Módulos simples sobre $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$

Repitiendo lo hecho con $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ debemos fijar una base para $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$. Si E_{ij} es la matriz de tamaño $n+1$ por $n+1$ con 1 en la intersección de la i-ésima fila con la j-ésima columna y 0 en el resto, definimos $h_i := E_{ii} - E_{(i+1)(i+1)}$, para todo $i = 1, ..., n$; x_i son las matrices triangulares superiores y se ordenarán de acuerdo a las diagonales, es decir, $x_1 := E_{12}$, $x_2 := E_{23}$,..., $x_n := E_{n(n+1)}$, $x_{n+1} := E_{13}$, $x_{n+2} := E_{24}$ hasta completar las $\frac{n(n+1)}{2}$ matrices correspondientes; $y_i := x_i^t$, para todo $i = 1, ..., \frac{n(n+1)}{2}$. Por lo tanto, la base usual de $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ es $\{x_1, ..., x_{\frac{n(n+1)}{2}}, h_1, ..., h_n, y_1, ..., y_{\frac{n(n+1)}{2}}\}$.

Las nociones de peso y raíz se extienden de manera natural a n-uplas y también se puede probar que sus coordenadas son números enteros. También se define peso maximal y no sería difícil demostrar que sus coordenadas son enteros no negativos. Sea V un $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$-módulo simple con peso maximal $(m_1, ..., m_n)$. Conjeturamos que V^* tiene peso maximal $(m_n, ..., m_1)$ y que además existiría una forma invariante no nula de V si y solo si $m_i = m_{n+1-i}$, para todo $i = 1, ..., n$.

5.2. Módulos simples sobre un álgebra de Lie semisimple

En libros tales como [4] y [5] hay secciones donde se trata bastante las representaciones irreducibles sobre un álgebra de Lie semisimple compleja cualquiera. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\mathfrak{h}$ una subálgebra de $\mathfrak{g}$. Diremos que $\mathfrak{h}$ es de Cartan si $\mathfrak{h}$ es nilpotente y si $x \in \mathfrak{g}$ satisface $[x, y] \in \mathfrak{h}$, para todo $y \in \mathfrak{h}$, entonces $x \in \mathfrak{h}$. En [5] (pág. 163, cap. 6) se prueba que toda álgebra de Lie semisimple compleja posee una subálgebra de Cartan. Posterior a esto, procederemos a definir la noción de peso y raíz asociado a un módulo simple.

Definición 5.1

1. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple compleja, $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ y V un $\mathfrak{g}$-módulo. Un funcional lineal $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ se llama peso de V si existe $v \in V$ no nulo tal que $h.v = \alpha(h)v$, para todo $h \in \mathfrak{h}$. El vector v recibe el nombre de vector de peso α y el conjunto $V_\alpha := \{v \in V \mid h.v = \alpha(h)v, \text{para todo } h \in \mathfrak{h}\} \subseteq V$ se llama espacio de peso α.*

2. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Un funcional lineal $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ no nulo es una raíz de $\mathfrak{g}$ si existe $x \in \mathfrak{g}$ no nulo tal que $[h, x] = \alpha(h)x$, para todo $h \in \mathfrak{h}$. El vector x se llama vector de raíz α y $\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x, \text{para todo } h \in \mathfrak{h}\}$ recibe el nombre de espacio de raíz α.*

Al conjunto de todas las raíces lo denotaremos por R y también se clasifican en raíces positivas y negativas. Notemos que hay una pequeña sutileza entre la definición recién hecha y las dadas en el capítulo anterior numeradas por 4.1 y 4.2. La definición de peso y raíz que se dio para el caso de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ se hizo como par ordenado y no como una función. La razón es que la subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ tiene dimensión dos, generada por h_1 y h_2. De esta manera, si sustituimos h por h_1 en la definición 5.1 resulta que $h_1.v = \alpha(h_1)v$, así tenemos $\alpha_1 = \alpha(h_1)$. Similarmente, $\alpha_2 = \alpha(h_2)$, y así aparecen α_1 y α_2 de la definición 4.1. El mismo criterio vale para el caso de las raíces. Para el álgebra $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, considerar los pesos de acuerdo a la definición 4.1 nos permitió elaborar el teorema 4.9.

En [4] (pág. 326, cap. 21) se clasifican todas las álgebras de Lie simples complejas, las llamadas álgebras de Lie clásicas que se dividen en cuatro grupos:

1. $A_n : \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$, con $n \geq 1$.
2. $B_n : \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$, con $n \geq 2$.
3. $C_n : \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$, con $n \geq 3$.
4. $D_n : \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$, con $n \geq 4$.

donde n es la dimensión de cualquiera de sus subálgebras de Cartan (en [5] (pág. 164) se prueba que todas las subálgebras de Cartan tienen la misma dimensión); y las llamadas álgebras de Lie excepcionales denotadas por $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$, $\mathfrak{e}_8$, $\mathfrak{f}_4$ y $\mathfrak{g}_2$.

Ahora enunciaremos un teorema equivalente a 4.5 para álgebras de Lie semisimples también llamado teorema del peso maximal, que aparece en [5] (pág. 197, cap. 7).

Teorema 5.2 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple compleja.*

1. *Cada representación irreducible de $\mathfrak{g}$ tiene un único peso maximal.*
2. *Dos representaciones irreducibles de $\mathfrak{g}$ con el mismo peso maximal son isomorfas.*
3. *El peso maximal de cada representación irreducible de $\mathfrak{g}$ es un elemento entero dominante.*
4. *Cada elemento entero dominante es el peso maximal de alguna representación irreducible de $\mathfrak{g}$.*

La definición de elemento entero dominante se puede encontrar en [5] (pág. 194) y aquí no se ocupará. Con esto se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 5.3 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple compleja y V un $\mathfrak{g}$-módulo simple de dimensión finita. Entonces $\mathcal{T}(V) \neq \{0\}$ si y solo si V y V^* tienen el mismo peso maximal.*

Demostración. Consecuencia del teorema 5.2 y análoga al caso de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. ∎

De esta manera sería interesante describir los pesos y raíces de las álgebras más arriba mencionadas como n-uplas y aplicar el teorema 5.3 para encontrar relaciones entre las coordenadas del peso maximal que permitan la existencia de formas invariantes no nulas, de la misma manera que se hizo con $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$.

5.3. Módulos sobre un grupo de Lie

Definición 5.4 *Sea G un conjunto no vacío. La terna $(G, *, \mathcal{A})$ es un grupo de Lie si:*

1. *$(G, *)$ es un grupo.*
2. *$(G, \mathcal{A})$ es una variedad diferenciable.*
3. *Las funciones $* : G \times G \longrightarrow G$ e $inv : G \longrightarrow G$, $x \mapsto x^{-1}$, son infinitamente diferenciables.*

Abusando de la notación diremos que G es un grupo de Lie.

Ejemplo 5.5 *Sea* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1. $GL_n(\mathbb{K}) := \{x \in M_n(\mathbb{K}) \mid x$ *es invertible*$\}$ *se llama grupo general lineal.*

2. $SL_n(\mathbb{K}) := \{x \in GL_n(\mathbb{K}) \mid det(x) = 1\}$ *se llama grupo especial lineal.*

3. $O_n(\mathbb{K}) := \{x \in GL_n(\mathbb{K}) \mid x^{-1} = x^t\}$ *se llama grupo ortogonal.*

4. $SO_n(\mathbb{K}) := \{x \in GL_n(\mathbb{K}) \mid x^{-1} = x^t$ *y* $det(x) = 1\}$ *se llama grupo especial ortogonal.*

Definición 5.6 *Un grupo de Lie de matrices es un subgrupo* G *cerrado de* $GL_n(\mathbb{C})$, *es decir, si* $\{x_m\}_m \subseteq G$ *es tal que* $x = \lim_{m\to\infty} x_m$ *entonces* $x \in G$ *o* x *es no invertible.*

Definición 5.7

1. *Sean* G *y* H *dos grupos de Lie. Una función* $f : G \longrightarrow H$ *es un homomorfismo de grupos de Lie si* f *es un homomorfismo de grupos diferenciable.*

2. *Sea* G *un grupo de Lie y* V *un espacio vectorial complejo. Una representación de* G *en* V *es un homomorfismo* $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ *de grupos de Lie. Diremos que* ρ *da a* V *la estructura de* G*-módulo. Si* $\rho(s) := \rho_s$ *entonces usaremos la notación* $s.v = \rho_s(v)$, *para todo* $s \in G; v \in V$.

Si $x \in M_n(\mathbb{C})$ definimos $e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Luego dado un grupo de Lie de matrices G definimos $Lie(G) := \{x \in M_n(\mathbb{C}) \mid e^{tx} \in G$, para todo $t \in \mathbb{R}\}$, llamada álgebra de Lie asociada a G. Si G es un grupo de Lie de matrices con álgebra de Lie asociada $\mathfrak{g}$ y V es un G-módulo entonces V es un $\mathfrak{g}$-módulo como se muestra en [9] (pág. 54).

Un resultado importante que aparece en [5] (pág. 51) es el siguiente: si G es un grupo de Lie de matrices conexo con álgebra de Lie asociada $\mathfrak{g}$ entonces cada $s \in G$ se puede escribir de la forma $s = e^{x_1} \cdots e^{x_m}$, para algunos $x_1, ..., x_m \in \mathfrak{g}$.

Sea V un G-módulo y $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ una forma bilineal. Diremos que f es G-invariante si $f(s.u, s.v) = f(u, v)$, para todo $s \in G; u, v \in V$. Al igual que en el caso de álgebras definimos el conjunto $T(V) := \{f \in Bil(V \times V, \mathbb{C}) \mid f$ es G-invariante$\}$ que también es un subespacio de $Bil(V \times V, \mathbb{C})$. Luego tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.8 *Sea* G *un grupo de Lie de matrices conexo con álgebra de Lie asociada* $\mathfrak{g}$. *Si* V *es un* G*-módulo entonces* $T(V) = \mathcal{T}(V)$.

Demostración. Sean $f \in T(V)$, $x \in \mathfrak{g}$ y $u, v \in V$. Luego $f(e^{tx}.u, e^{tx}.v) = f(u, v)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Derivando a ambos lados respecto a t y haciendo $t = 0$ resulta $f(x.u, v) + f(u, x.v) = 0$, es decir, $f \in \mathcal{T}(V)$. Por lo tanto, $T(V) \subseteq \mathcal{T}(V)$.

Si $g \in \mathcal{T}(V)$, $x \in \mathfrak{g}$ y $u, v \in V$ definimos $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ como $\varphi(t) := g(e^{tx}.u, e^{tx}.v)$. Luego $\varphi\prime(t) = g(xe^{tx}.u, e^{tx}.v) + g(e^{tx}.u, xe^{tx}.v)$ y si hacemos $\hat{u}(t) := e^{tx}.u$ y $\hat{v}(t) := e^{tx}.v$ entonces $\varphi\prime(t) = g(x.\hat{u}(t), \hat{w}(t)) + g(\hat{u}(t), x.\hat{v}(t)) = 0$ porque $g \in \mathcal{T}(V)$. Luego tenemos que φ es constante, por lo que $g(e^x.u, e^x.v) = \varphi(1) = \varphi(0) = g(u, v)$. En virtud del resultado mencionado más arriba, por ser G conexo, tenemos que $g(s.u, s.v) = g(u, v)$, para todo $s \in G$, luego $g \in T(V)$ y $\mathcal{T}(V) \subseteq T(V)$. ∎

En [5] (pág. 15) se muestra por ejemplo que $SL_n(\mathbb{C})$ es conexo. De esta manera si V es un $SL_2(\mathbb{C})$-módulo simple entonces el espacio de formas invariantes de V es el mismo que el encontrado en el capítulo 3. Sería interesante encontrar aplicaciones de este teorema conociendo los resultados que existen para álgebras de Lie.

Bibliografía

[1] Manuel Arenas, *An Algorithm for Associative Bilinear Forms*, journal of Linear Algebra and its Applications 430, 2009, 286-295.

[2] Manuel Arenas y Alicia Labra, *On Nilpotency of Generalized Almost-Jordan Right-Nilalgebras*, Algebra Colloquium 15:1, 2008, 69-82 (17A30, 17C50).

[3] Luiz A. Barrera San Martín, *Algebras de Lie*, 2^{da} edición, Campinas, San Pablo, Editora da Unicamp, 2010.

[4] W. Fulton y J. Harris, *Representation Theory, A First Course*, 1991 Springer-Verlag New York Inc.

[5] B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations, An Elementary Introduction*, 2003 Springer-Verlag New York Inc.

[6] James E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, 1972 by Springer-Verlag New York Inc.

[7] Nathan Jacobson, *Lie Algebras*, Dover Publications, Inc. New York, 1962.

[8] Nathan Jacobson, *Structure and Representations of Jordan Algebras*, 1968 by the American Mathematical Society.

[9] Alexander Kirillov, *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, Cambridge University Press, New York, 2008.

[10] R. S. Pierce, *Associative Algebras*, 1982 by Springer-Verlag New York Inc.

[11] R. D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Stillwater, Oklahoma, 1961.

[12] J. P. Serre, *Complex Semisimple Lie Algebras*, Springer-Verlag Berlín Heidelberg 2001.