# Existencia y Unicidad de Solución de Ecuaciones Integro-diferenciales de Evolución

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias
por

Salvador Gabriel Yáñez Collao

Diciembre, 2012

Directora de Tesis: Dra. Verónica Poblete Oviedo

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**UNIVERSIDAD DE CHILE**

**INFORME DE APROBACION**

**TESIS DE MAGISTER**

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la tesis de Magíster presentada por el candidato

Salvador Gabriel Yáñez Collao

Ha sido aprobada por la comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Matemáticas, en el examen de Defensa Privada de Tesis rendido el día 6 de Noviembre de 2012

Director de Tesis :

Dra. Verónica Poblete ..........................................

Comisión Evaluación de la Tesis :

Dr. Carlos Lizama ..........................................

Dr. Gonzalo Robledo ..........................................

# Agradecimientos

Daré los siguientes agradecimientos a aquellos que hicieron posible concluir este magister:

Al Departamento de Matemática y a la Falcultad de Ciencias por las facilidades dadas para realizar mis estudios.

A mi Directora de Tesis, Dra. Verónica Poblete Oviedo, por apoyarme a concluir el programa, su gran disposición para guiarme y entregarme valiosas herramientas para mi formación, y en particular por su paciencia infinita.

Al Proyecto Fondecyt de Iniciación 11075046 que financia parcialmente este trabajo.

A mi familia y amigos, quienes siempre me han apoyado en todo lo que he emprendido.

A Francisca, la mujer de mi vida, quien ha estado a mi lado en todo momento y ha sido un pilar fundamental en mi vida.

# Índice General

# Resumen


En este trabajo consideramos la ecuación integro-diferencial abstracta,

$$\begin{cases} u''(t) = \eta Au'(t) + \beta Au(t) \ + \ \displaystyle\int_0^t k(t-s)Au(s)\,ds \ + \ f(t) \ , \quad t > 0 \\ u(0) = x, \\ u'(0) = y, \end{cases}$$

donde $k$ es una función a valores reales, $\eta$ y $\beta$ son constantes reales, $A : D(A) \subseteq X \to X$ es un operador lineal que genera un semigrupo analítico en un espacio de Banach $X$ y $f$ es una función $X$-valuada. Consideramos también la ecuación diferencial de segundo orden con retardo,

$$u''(t) + Bu'(t) + Au(t) = Gu'_t + Fu_t + f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $A : D(A) \subseteq X \to X$ y $B : D(B) \subseteq X \to X$, son operadores lineales cerrados definidos en un espacio de Banach $X$, los operadores de retardo $G, F : C([-r, 0], X) \to X$ son operadores lineales y acotados, las funciones $u_t, u'_t : [-r, 0] \to X$ están definidas por $u_t(\cdot) = u(t + \cdot)$, $u'_t(\cdot) = u'(t + \cdot)$ y $f$ es una función tipo dato $X$-valuada. Para ambas ecuaciones estudiamos los resultados de máxima regularidad en espacios de Hölder. Estos resultado de máxima regularidad fueron obtenidos en [22] en el caso de la primera ecuación y en [21] en el caso de la segunda ecuación.
Finalmente, estudiamos la ecuación diferencial de segundo orden con retardo,

$$u''(t) = Au(t) + Fu_t + Gu'_t + f(t), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Carecterizamos la existencia y unicidad de solución periódica de esta ecuación diferencial de segundo orden con retardo no-homogénea y establecemos resultados de máxima regularidad para soluciones fuertes. Las condiciones son obtenidas en términos de R-acotamiento de ciertos operadores determinados por la ecuación y multiplicadores de Fourier en espacios de Lebesgue.

# Abstract


we considerer the abstract integro-differential equation,

$$\begin{cases} u''(t) = \eta A u'(t) + \beta A u(t) \; + \; \displaystyle\int_0^t k(t-s) A u(s)\, ds \; + \; f(t)\;, \quad t > 0 \\ \\ u(0) = x, \\ u'(0) = y, \end{cases}$$

where $k$ is a real function, $\eta$ y $\beta$ are real constants, $A : D(A) \subseteq X \to X$ is a linear operator, which generates an analytic semigruop on a Banach space $X$ and $f$ is a given $X$-valued function. We considerer also, the second order differential equations with delay,

$$u''(t) + Bu'(t) + Au(t) = Gu'_t + Fu_t + f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

where $A : D(A) \subseteq X \to X$ and $B : D(B) \subseteq X \to X$ are two closed linear operators defined on a Banach space $X$, the delays $G, F : C([-r, 0], X) \to X$ are linear bounded oparators, the functions $u_t, u'_t : [-r, 0] \to X$ are defined by $u_t(\cdot) = u(t + \cdot)$, $u'_t(\cdot) = u'(t + \cdot)$ and $f$ is a given $X$-valued function. We study for the maximal regularity results in Hölder Spaces for both equations. In the case of the first equations these maximal regularity results were obtained by Sforza in [22] and in the case of the second equation these maximal regularity results were obtained by Poblete in [21].

Finally, we study the second order differential equation with delay,

$$u''(t) = Au(t) + Fu_t + Gu'_t + f(t), \quad t \in \mathbb{T},$$

where $A : D(A) \subseteq X \to X$ is a closed linear operator on a Banach space $X$. we fix $r := 2\pi N$ for some $N \in \mathbb{N}$. The delays $F, G : L^p[-r, 0] \to X$ are bounder linear operators, the functions $u_t, u'_t : [-r, 0] \to X$ are defined by $u_t(\cdot) = u(t + \cdot)$, $u'_t(\cdot) = u'(t + \cdot)$ and $f$ is a given $X$-valued function. we characterize the existence and uniqueness of periodic solutions of this inhomogeneous abstract delay equations and establish maximal regularity results for strong solutions. The conditions are obtained in terms of R-boundedness of linear operators determined by the equations and Fourier multipliers in Lebesgue spaces.

# Introducción

El objetivo de esta tesis es estudiar existencia, unicidad y regularidad maximal de la solución de ecuaciones integro-diferenciales de segundo orden con y sin retardo usando métodos basados en teoría de semigrupos analíticos, teoría de familias resolventes y teoría de multiplicadores de Fourier.

La teoría de semigrupos analíticos tiene un rol importante en el estudio de ecuaciones de evolución, de hecho, varios estudios actuales de ecuaciones parabólicas lineales y no lineales estan basado en esta teoría. Cuando comparamos esta clase de semigrupos con los $C_0$-semigrupos, surgen importantes diferencias en términos de las propiedades de su generador. Una de ellas, que es de relevancia en nuestro trabajo, es la densidad del dominio del generador. Recordemos que un semigrupo es un $C_0$-semigrupo, si y sólo si, su generador es densamente definido. Así, trabajar con un semigrupo analítico permite no imponer la densidad del dominio de su generador, lo cual tiene impacto en las aplicaciones de los resultados que se pueden obtener, ver sección 5 en [22]. Algunos teoremas de regularidad maximal que utilizan teoría de semigrupos analíticos han sido estudiados, por ejemplo, por Sinestrari [24].

Caracterizamos el buen planteamiento de algunas ecuaciones integro-diferenciales abstractas de segundo orden en espacios de Lebesgue y de Hölder. En el caso de espacios de Hölder, nuestros resultados involucran condiciones de acotamiento en el operador resolvente. En el caso de espacios de Lebesgue, estamos interesados en obtener solución periódica de cierta ecuación, para esto, son necesarias la noción de espacios UMD y de $R$-acotamiento, además de condiciones sobre el operador resolvente. Por otro lado, no menos importante es la propiedad de $R$-acotamiento de conjuntos, para definición y criterios de $R$-acotamiento ver a [25, 12] y referencias.

En este trabajo, estudiaremos tres problemas abstractos de segundo orden descritos a continuación.

***Problema 1.*** Sea $X$ un espacio de Banach y $C^\alpha([0,T],X)$ el subespacio de $C(0,T],X)$ que consiste en las funciones $\alpha$-Hölder continuas $f$ tales que

$$\|f\|_\alpha = \sup_{t\neq s,\ t,s\in[t_1,t_2]} \frac{\|u(t)-u(s)\|}{|t-s|^\alpha} < \infty.$$

Consideremos la ecuación

$$\begin{cases} u''(t) = \eta Au'(t) + \beta Au(t) \ + \ \displaystyle\int_0^t k(t-s)Au(s)\,ds \ + \ f(t)\ , \quad t>0, \\ \\ u(0) = x, \\ u'(0) = y. \end{cases} \tag{1}$$

Aquí, $A$ es un operador lineal cerrado definido en $X$, no necesariamente con dominio denso, que genera un semigrupo analítico, $\eta > 0$ y $\beta$ son constantes reales, $k$ es un núcleo escalar definido en $[0,\infty)$ y $f:[0,\infty)\to X$ es una función dada. Problemas de este tipo surgen, por ejemplo, en el estudio de modelos que involucran material viscolelástico, ver [15] y las referencias contenidas ahí.

La estrategia para el estudio de esta ecuación, comienza por pedir al núcleo $k$ ciertas hipótesis que tienen relación con la existencia de la transformada de Laplace. Luego, se prueba la existencia del operador resolvente $R$ de la ecuación (1). Posteriormente, se obtiene la solución de la ecuación (1) vía fórmula de variación de parámetros.

Estudiaremos existencia, unicidad y regularidad maximal de solución estricta y fuerte de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (1), esto es, para $f\equiv 0$. Posteriormente dada $f\in C^\alpha([0,T],X)$, estudiaremos regularidad del término de convolución $R*f$, esto junto con lo anterior, nos permitirá obtener resultados de regularidad maximal de solución estricta de la ecuación no-homogénea (1). Los resultados mencionados son desarrollados en [22] y en este trabajo se completaron los detalles de las demostraciones.

Los siguientes dos problemas, involucran una ecuación de segundo orden con retardo. Este tipo de ecuaciones requieren un trato cuidadoso debido al efecto que tiene en el modelo dicho retardo, esto lo hace especialmente interesante, pues este problema aparece en muchos fenómenos de evolución que surgen de la física, biología e ingeniería. Ejemplos de ecuaciones con retardo pueden encontrarse en [6, 26].

***Problema 2.*** Sea $X$ un espacio de Banach y $C^\alpha(\mathbb{R},X)$ el espacio de las funciones $\alpha$-Hölder continuas definidas en $\mathbb{R}$. Consideremos la ecuación de segundo orden con retardo

$$u''(t) + Bu'(t) + Au(t) = Gu'_t + Fu_t + f(t), \quad t\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Aquí, $A$ y $B$ son operadores lineales cerrados, las funciones $G, F : C([-r,0],X)\to X$ son operadores lineales acotados de retardo. Las funciones $u_t, u'_t : [-r,0]\to X$ estan definidas por $u_t(\cdot) = u(t+\cdot)$, $u'_t(\cdot) = u'(t+\cdot)$ y $f$ es una función que pertenece a $C^\alpha(\mathbb{R},X)$.

Estamos interesados en estudiar regularidad maximal de la ecuación (2), esto es, para cada función $f \in C^{\alpha}(\mathbb{R}, X)$ probar que existe una única función $u \in C^{\alpha}(\mathbb{R}, [D(A)]) \cap C^{\alpha+1}(\mathbb{R}, [D(B)]) \cap C^{\alpha+2}(\mathbb{R}, X)$ que satisface la ecuación (2) casi en todas partes.

Como herramienta, utilizaremos multiplicadores de Fourier en espacios de Hölder. La teoría de multiplicadores de Fourier nos entrega una técnica importante en el estudio de regularidad maximal y ha sido muy utilizada en los últimos años. Por ejemplo, en [5] se utilizan para obtener resultados de hiperbolicidad de ecuaciones con retardo, y en [16] obtienen estabilidad de sistemas de control lineales en espacios de Banach. En los trabajos de [2, 3, 10, 11, 20, 17, 18, 19] hay interesantes resultados que involucran esta teoría.

En [4], Arendt, Batty y Bu introducen la noción de $C^{\alpha}$−multiplicador, y prueban un teorema de multiplicadores de Fourier en espacios de Hölder en la línea real. Los resultados fueron utilizados para obtener existencia, unicidad, y buen planteamiento del problema de Cauchy de primer y segundo orden. En [19], Keyantuo y Lizama prueban una caracterización de buen planteamiento para una clase de ecuaciones integro-diferenciales.

El estudio de la ecuación (2) esta basado en [4] y los resultados concernientes a este problema están desarrollados en [7, 21].

***Problema 3.*** Sea $1 < p < \infty$. Sean $X$ un espacio de UMD y $L^p(\mathbb{T}, X)$ el espacio de las funciones periódicas Bochner Lebesgue integrable. Consideremos la ecuación de segundo orden con retardo,

$$u''(t) = Au(t) + Fu_t + Gu'_t + f(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{3}$$

donde $A$ es un operador lineal cerrado, que no necesariamente genera un $C_0$-semigrupo. Para algún $N \in \mathbb{N}$, se escribe el número $r := 2\pi N$ y se consideran los operadores lineales acotados de retardo $F, G : L^p[-r, 0] \to X$. Aquí, $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$ es la función dato.

Vamos a probar, existencia, unicidad y regularidad maximal de la solución periódica de la ecuación (3). Para esto se definen subespacios apropiados de $L^p(\mathbb{T}, X)$ y se utiliza como técnica multiplicadores de Fourier en espacio de funciones periódicas Lebesgue integrables, ver [2]. Los resultados expuestos en este capítulo fueron desarrollados en forma paralela al trabajo publicado por Bu, ver [8], y motivado por el trabajo en [20].

# Capítulo 1

# Resultados de Regularidad Maximal para una Ecuación Integro-diferencial de Segundo Orden

## 1.1 Introducción.

En este capítulo expondremos algunos resultados, obtenidos por D.Sforza, ver [22], acerca de existencia, unicidad y regularidad de solución de la ecuación de segundo orden

$$\begin{cases} u''(t) = \eta A u'(t) + \beta A u(t) \;+\; \displaystyle\int_0^t k(t-s)Au(s)\,ds \;+\; f(t)\;, \quad t > 0, \\ \\ u(0) = x, \\ u'(0) = y. \end{cases} \tag{1.1}$$

Aquí, $X$ es un espacio de Banach, $A : D(A) \subseteq X \to X$ es un operador lineal que genera un semigrupo analítico, $u$ es una función $X$-valuada, $k$ es el núcleo escalar, $\eta > 0$ y $\beta$ son constantes reales, y $f$ es una función $X-$valuada.

Como principal herramienta, usaremos transformada de Laplace para probar existencia de solución de la ecuación (1.1). Con esto en mente, veremos que la construcción de un operador resolvente $R(t)$ conduce a la existencia y unicidad del problema homogéneo asociado, es decir, para $f \equiv 0$. Luego, veremos la regularidad del término de convolución $R * f$ que, junto con lo anterior, permite obtener resultados de existencia, unicidad y regularidad maximal de la ecuación (1.1).

En lo que sigue, introduciremos algunas notaciones preliminares. Sean $X$ e $Y$ espacios de Banach complejos. Denotaremos por $\mathcal{L}(X,Y)$ el conjunto de operadores $T : X \to Y$

lineales y acotados, con la norma $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}$ el conjunto $\mathcal{L}(X,Y)$ es un espacio de Banach . Escribiremos $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$.

Para $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$, el conjunto $C([t_1,t_2],X)$ denota el espacio de funciones continuas $u : [t_1,t_2] \to X$ (respectivamente, $C^1([t_1,t_2],X)$ y $C^2([t_1,t_2],X)$ denotan los conjuntos de funciones continuamente diferenciables y dos veces continuamente diferenciables). Con la norma $||u|| = \sup\{||u(t)|| : t \in [t_1,t_2]\}$ tenemos que $C([t_1,t_2],X)$ es un espacio de Banach (con las normas $||u|| = \sup\{||u(t)|| + ||u'(t)|| : t \in [t_1,t_2]\}$ y $||u|| = \sup\{||u(t)|| + ||u'(t)|| + ||u''(t)|| : t \in [t_1,t_2]\}$, respectivamente, se sigue que $C^1([t_1,t_2],X)$ y $C^2([t_1,t_2],X)$ son espacios de Banach).

Para $\alpha \in (0,1)$ sea $C^\alpha([t_1,t_2],X)$ el subespacio de $C([t_1,t_2],X)$ que consiste en las funciones $\alpha$-Hölder continuas $u$ tales que

$$\|u\|_\alpha = \sup_{t\neq s,\ t,s\in[t_1,t_2]} \frac{\|u(t)-u(s)\|}{|t-s|^\alpha} < \infty.$$

Este espacio dotado con la norma $\|u\|_{C^\alpha} = \|u\|_\infty + \|u\|_\alpha$ es un espacio de Banach.

Análogamente, $C^{1,\alpha}([t_1,t_2],X)$ y $C^{2,\alpha}([t_1,t_2],X)$ denotan los espacios de funciones $u$ continuamente diferenciables y dos veces continuamente diferenciable, tales que $u'$ y $u''$ pertenecen a $C^\alpha([t_1,t_2],X)$, respectivamente.

## 1.2 Construcción del Operador Resolvente.

En esta sección, veremos la construcción del operador resolvente para la ecuación (1.1). Para esto, necesitamos la siguiente definición.

**Definición 1.1.** *Diremos que el operador $A$ genera un semigrupo analítico si existen constantes $M_1 > 0$ y $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2},\pi)$ tales que*

$$S_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : |Arg(z)| < \theta_0\} \subset \rho(A) \tag{1.2}$$

*y*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_1}{|\lambda|}, \quad \text{para } \lambda \in S_{\theta_0}. \tag{1.3}$$

**Observación 1.2.** *De la definición anterior podemos notar que*

(i) *Un operador lineal $A$ que satisface (1.2) es cerrado. De aquí, se concluye que el dominio de $A$, denotado por $D(A)$, es un espacio de Banach con la norma del gráfico $||x||_{D(A)} = ||x|| + ||Ax||$, este espacio se denota por $[D(A)]$.*

(ii) *$D(A)$ no es necesariamente denso en $X$, por lo que $A$ no necesariamente genera un $C_0$-semigrupo. Denotaremos por $\overline{D(A)}$ a la clausura de $D(A)$.*

En este capítulo, supondremos que $k \in L^1_{loc}(0,\infty)$ y que es absolutamente Laplace transformable, esto es, existe

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s}|k(s)|ds,$$

además, supondremos que la transformada de Laplace de $k$, denotada por $\hat{k}$, se extiende analíticamente al sector $S_{\theta_0}$ de modo que satisface

$$|\lambda^\mu \hat{k}(\lambda)| \leq M_2, \quad \text{para} \quad \lambda \in S_{\theta_0}, \tag{1.4}$$

donde $\mu \in (0,1]$ y $M_2 > 0$, escribiremos también $\hat{k}$ para denotar a su extensión.

**Proposición 1.3.** *Supongamos que (1.2), (1.3) y (1.4) valen, entonces existe $r_0 > 0$ tal que para cada $\lambda \in S_{\theta_0} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r_0\}$, el operador $F(\lambda) = (\lambda^2 I - (\lambda\eta + \beta + \hat{k}(\lambda))A)^{-1}$ existe y pertenece a $\mathcal{L}(X)$. Además, $||F(\lambda)||_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{M_1}{|\lambda|^2}$ para $M_1 > 0$.*

***Demostración.*** Sea $\lambda \in S_{\theta_0}$. Consideremos la función escalar $a(\lambda) = (\lambda\eta + \beta + \hat{k}(\lambda))$. Sabemos que $(\lambda I - A)$ es invertible, luego $\eta\lambda(\dfrac{\lambda}{\eta}I - A) = \lambda^2 I - \eta\lambda A$ es invertible. Además por (1.3) se tiene

$$||(\lambda^2 I - \eta\lambda A)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_1}{|\lambda|^2}. \tag{1.5}$$

Notemos que

$$(\lambda^2 I - a(\lambda)A) = [I - (\beta A + \hat{k}(\lambda)A)\ (\lambda^2 I - \eta\lambda A)^{-1}]\ (\lambda^2 I - \eta\lambda A).$$

Como el operador $(\lambda^2 I - \eta\lambda A)$ es invertible, basta probar que el operador $[I - (\beta A + \hat{k}(\lambda)A)\ (\lambda^2 I - \eta\lambda A)^{-1}]$ es invertible. Para eso, observamos que

$$(\beta + \hat{k}(\lambda))A(\lambda^2 I - \eta\lambda A)^{-1} = -\frac{\beta}{\eta\lambda}I + \frac{\beta\lambda}{\eta}(\lambda^2 I - \eta\lambda A)^{-1} - \frac{\lambda\hat{k}(\lambda)}{\eta\lambda^2}I + \frac{\lambda\hat{k}(\lambda)}{\eta}(\lambda^2 I - \eta\lambda A)^{-1}.$$

De (1.4) y (1.5) se sigue que:

$$||(\beta + \hat{k}(\lambda))A(\lambda^2 I - \eta\lambda A)^{-1}|| \leq \frac{|\beta|}{\eta|\lambda|} + \frac{|\beta|M_1}{\eta|\lambda|} + \frac{M_2}{\eta|\lambda|^2} + \frac{M_2 M_1}{\eta|\lambda|^2}.$$

Por lo tanto, existe $r_0$ tal que para cada $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq r_0\} \cap S_{\theta_0}$

$$||(\beta + \hat{k}(\lambda))A(\lambda^2 I - \eta\lambda A)^{-1}|| < 1,$$

luego $[I - (\beta A + \hat{k}(\lambda)A)\ (\lambda^2 I - \eta\lambda A)^{-1}]$ es invertible para todo $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq r_0\} \cap S_{\theta_0}$ y

$$F(\lambda) = (\lambda^2 I - \eta\lambda A)^{-1}[I - (\beta A + \hat{k}(\lambda)A)\ (\lambda^2 I - \eta\lambda A)^{-1}]^{-1},$$

de donde obtenemos $||F(\lambda)||_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_1}{|\lambda|^2}$. ∎

Definimos el operador resolvente de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (1.1), esto es, cuando $f \equiv 0$, como la transformada inversa de Laplace de $F(\lambda)$.

**Definición 1.4.** *Para cada $t > 0$ definimos*

$$R(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} F(\lambda) d\lambda,$$

*aquí $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, con $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{\theta},\ \rho \geq r\}$, $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{-\theta},\ \rho \geq r\}$, $\gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{\theta},\ |\phi| \leq \theta\}$, para $r \geq r_0$, $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \theta_0]$, $\Gamma$ orientada en forma positiva.*

**Proposición 1.5.** *Supongamos que (1.2), (1.3) y (1.4) valen, entonces $R(t)$ está bien definida, además*

1. *$R(\cdot)$ es analítica en $(0, \infty)$ y toma valores en $\mathcal{L}(X, [D(A)])$.*
2. *Existe una constante $M_4 > 0$ tal que para cada $t > 0$*
$$||t^{-1}R(t)|| + ||AR(t)|| \leq M_4 e^{r_0 t}. \tag{1.6}$$
3. 
$$\lim_{t \to 0^+} R(t) = 0 \qquad en \quad \mathcal{L}(X). \tag{1.7}$$
4. *Sea $(g * h)(t) = \displaystyle\int_0^t g(t-s)h(s)ds$. Para cada $t > 0$ se tiene que*
$$||(k * AR)(t)|| \leq M_4 e^{r_0 t} \int_0^t |k(s)| ds. \tag{1.8}$$
5. *Para cada $x \in X$ y $t > 0$ tenemos que $R(t)x \in D(A)$ y $AR(\cdot)$ es continua en $(0, \infty)$ con valores en $\mathcal{L}(X)$.*
6. *Para cada $x \in X$ y $t > 0$ tenemos que $R'(t)x \in D(A)$ y $AR'(\cdot)$ es continua en $(0, \infty)$ con valores en $\mathcal{L}(X)$.*
7. *Existe $M_5 > 0$ tal que para cada $t > 0$*
$$||R'(t)|| + ||tAR'(t)|| + ||tR''(t)|| \leq M_5 e^{r_0 t}. \tag{1.9}$$
8. *Para cada $x \in X$ y $t > 0$ se tiene que*
$$R'(t)x - x = \eta AR(t)x + \beta \int_0^t AR(s)xds + \int_0^t (k * AR)(s)xds. \tag{1.10}$$

*9. Para todo $x \in \overline{D(A)}$.*

$$\lim_{t\to 0^+} R'(t)x = x. \tag{1.11}$$

*10. Para cada $x \in D(A)$ y $Ax \in \overline{D(A)}$ tenemos que*

$$\lim_{t\to 0^+} AR'(t)x = Ax. \tag{1.12}$$

*11. Para cada $x \in X$ y $t > 0$ tenemos que*

$$R''(t)x = \eta AR'(t)x + \beta AR(t)x + k * AR(t)x. \tag{1.13}$$

*12. Para cada $x \in \overline{D(A)}$ tenemos que*

$$\lim_{t\to 0^+} AR(t)x = 0. \tag{1.14}$$

*13. Para cada $x \in D(A)$ y $Ax \in \overline{D(A)}$ tenemos que*

$$\lim_{t\to 0^+} R''(t)x = \eta Ax. \tag{1.15}$$

***Demostración.*** Para la demostración ver [23, Proposición 1.3, Proposición 1.4]. ∎

**Observación 1.6.** *De la proposición anterior podemos notar que*

(i) *Para todo $x \in X$, la función $t \to R(t)x$ pertence a $C([0,\infty), X)$.*

(ii) *Para todo $x \in \overline{D(A)}$, la función $t \to R(t)x$ pertence a $C([0,\infty), [D(A)]) \cap C^1([0,\infty), X)$.*

(iii) *Para todo $x \in D(A)$, con $Ax \in \overline{D(A)}$ la aplicación $t \to R(t)x$ pertence a la intersección $C^1([0,\infty), [D(A)]) \cap C^2([0,\infty), X)$.*

Ahora probaremos existencia y unicidad de solución del problema homogéneo asociado a la ecuación (1.1). Para esto, utilizamos las propiedades mencionadas del operador resolvente, siempre que los valores iniciales sean suficientemente regulares. Veremos esto con precisión en la siguiente sección.

## 1.3 Existencia y Unicidad de Solución del Problema Homogéneo.

Asociado a la ecuación (1.1) consideremos el problema homogéneo

$$\begin{cases} u''(t) = \eta Au'(t) + \beta Au(t) \; + \displaystyle\int_0^t k(t-s)Au(s)\,ds\,, \quad t > 0 \\ \\ u(0) = x, \\ u'(0) = y. \end{cases} \tag{1.16}$$

Estamos interesados en estudiar existencia, unicidad y regularidad de solución del problema (1.16).

**Definición 1.7.** *Diremos que la función* $u : [0,\infty) \to X$ *es una solución estricta del problema (1.16) si* $u \in C^1([0,\infty),[D(A)]) \cap C^2([0,\infty),X)$ *y satisface el problema (1.16).*

**Definición 1.8.** *Diremos que la función* $u \in C([0,T],X)$, $T>0$, *es una solución fuerte del problema (1.16) si existe una sucesión* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^1([0,T],[D(A)]) \cap C^2([0,T],X)$ *tal que satisface*

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} ||u_n(t)-u(t)|| = 0 \ , \ u(0)=x, \\ \\ \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} ||u_n'(t)-u'(t)|| = 0 \ , \ u'(0)=y, \\ \\ u_n''(t) = \eta A u_n'(t) + \beta A u_n(t) \ + \ \displaystyle\int_0^t k(t-s)Au_n(s)ds \ , \quad n\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{1.17}$$

Las siguientes identidades serán de utilidad en la demostración del próximo teorema.

**Proposición 1.9.** *Sea* $u$ *solución estricta del problema (1.16) con* $u(0)=x$. *Entonces*

(i) $(AR*u')(t) = -AR(t)x + (AR'*u)(t)$.

(ii) $((1*AR)*u')(t) = (AR*u)(t) - (1*AR(t))x$.

(iii) $((1*k*AR)*u')(t) = (k*AR*u)(t) - 1*k*AR(t)x$.

***Demostración.*** Vamos a probar (i). Puesto que $u$ es una solución estricta del problema (1.16) se tiene que la función $g$ dada por $g(s) = R(t-s)u(s)$ es continuamente diferenciable en $[0,t]$ para cada $t \geq 0$. Además

$$g'(s) = -R'(t-s)u(s) + R(t-s)u'(s),$$

integrando de 0 a $t$ tenemos

$$-R(t)x = -\int_0^t R'(t-s)u(s)ds + \int_0^t R(t-s)u'(s)ds,$$

como $A$ es un operador cerrado se tiene que

$$-AR(t)x = -\int_0^t AR'(t-s)u(s)ds + \int_0^t AR(t-s)u'(s)ds,$$

y obtenemos (i). Para probar (ii) notemos que

$$\begin{aligned} (AR*u)(t) &= \int_0^t AR(t-s)(u(s)-x)ds + \int_0^t AR(t-s)xds \\ &= \int_0^t AR(t-s)[\int_0^s u'(\tau)d\tau]ds + \int_0^t AR(t-s)xds \\ &= AR*(1*u') + (1*AR)(t)x \\ &= ((1*AR)*u')(t) + (1*AR)(t)x. \end{aligned}$$

De aquí se sigue (ii). La demostración de (iii) es análoga. ■

En el siguiente teorema veremos que toda solución estricta y toda solución fuerte del problema (1.16) tiene una única fórmula de representación.

**Teorema 1.10.** *Si $x, y \in \overline{D(A)}$ y $u$ es una solución estricta del problema (1.16) entonces*

$$u(t) = R(t)y + R'(t)x - \eta AR(t)x, \quad t \in [0, \infty). \tag{1.18}$$

***Demostración.*** La demostración sigue las líneas de la prueba del Teorema 2.1 en [23]. Puesto que $u \in C^1([0,\infty), [D(A)]) \cap C^2([0,\infty), X)$, se tiene que para cada $t \geq 0$ la función $g : [0, t] \to X$ dada por $g(s) = R(t-s)u(s)$ es dos veces continuamente diferenciable y además

$$g''(s) = R''(t-s)u(s) - 2R'(t-s)u'(s) + R(t-s)u''(s).$$

De (1.13),(1.10) y problema (1.16) se sigue que

$$\begin{aligned}
&R''(t-s)u(s) - 2R'(t-s)u'(s) + R(t-s)u''(s) \\
&\qquad = \eta AR'(t-s)u(s) + \beta AR(t-s)u(s) \\
&\qquad +(k * AR)(t-s)u(s) - 2u'(s) - 2\eta AR(t-s)u'(s) \\
&\qquad -2\beta(1 * AR)(t-s)u'(s) - 2(1 * k * AR)(t-s)u'(s) \\
&\qquad +\eta AR(t-s)u'(s) + \beta AR(t-s)u(s) + R(t-s)(k * Au)(s).
\end{aligned}$$

Integrando la igualdad anterior de 0 a $t$, tenemos que

$$\begin{aligned}
-u(t) + R'(t)x - R(t)y &= \eta(AR' * u)(t) + \beta(AR * u)(t) \\
&+ ((k * AR) * u)(t) - 2u(t) + 2x \\
&- 2\eta AR * u'(t) - 2\beta((1 * AR) * u')(t) \\
&- 2((1 * k * AR) * u')(t) + \eta(AR * u')(t) \\
&+ \beta(AR * u)(t) + (R * (k * Au))(t).
\end{aligned}$$

Usando la Proposición 1.9 partes (i),(ii) y(iii) en la identidad anterior se tiene que

$$u(t) = R(t)y - R'(t)x + \eta AR(t)x + 2\beta(1 * AR)(t)x + 2(1 * k * AR)(t)x + 2x.$$

Finalmente, utilizando la Proposición 1.5 parte 8, obtenemos

$$u(t) = R(t)y + R'(t)x - \eta AR(t)x.$$

■

A continuación nos preocupamos de probar unicidad de la solución fuerte del problema (1.16).

**Teorema 1.11.** *Sean $x, y \in \overline{D(A)}$. Si $u$ es solución fuerte del problema (1.16) entonces*

$$u(t) = R(t)y + R'(t)x - \eta AR(t)x, \quad t \in [0,T]. \tag{1.19}$$

***Demostración.*** Sea $u$ una solución fuerte del problema (1.16). Sabemos que existe una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^1([0,T],[D(A)]) \cap C^2([0,T],X)$ que satisface (1.17).

Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = u_n(0)$, $y_n = u_n'(0)$. Del teorema anterior se sigue que

$$u_n(t) = R(t)y_n + R'(t)x_n - \eta AR(t)x_n, \quad t \in [0,T].$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ en la igualdad anterior, usando el hecho que $A$ es cerrado y la Proposición 1.5 partes 2 y 5 obtenemos (1.19). ■

A continuación veremos algunos resultados acerca de la existencia de la solución estricta y fuerte del problema (1.16).

**Teorema 1.12.** *Sean $x, y \in D(A)$ y $(\beta Ax + \eta Ay) \in \overline{D(A)}$. Entonces*

$$u(t) = R(t)y + R'(t)x - \eta AR(t)x, \quad t \in [0,\infty),$$

*es la única solución estricta del problema homogéneo (1.16).*

***Demostración.*** Puesto que $x \in D(A)$ e $y \in D(A)$, de las propiedades de $R$ y $R'$ se tiene que $u \in C((0,\infty),[D(A)])$. Más aún, de la Proposición 1.5 partes 3, 9 y 12 se sigue que $\lim_{t\to 0^+} u(t) = x$. Afirmamos que $u \in C([0,\infty),[D(A)])$. En efecto, notemos que

$$\begin{aligned} Au(t) - Ax &= AR(t)y + AR'(t)x - \eta AR(t)Ax - Ax \\ &= AR(t)y + R'(t)Ax - R'(t)\tfrac{\eta}{\beta}Ay + R'(t)\tfrac{\eta}{\beta}Ay \\ &- \eta AR(t)Ax - Ax. \end{aligned}$$

Aplicamos la Proposición 1.5 parte 8, a $(\frac{\eta}{\beta}Ay)$ y reemplazamos en la igualdad anterior obteniendo

$$\begin{aligned} Au(t) - Ax = \ & AR(t)y + \tfrac{1}{\beta}R'(t)[\beta Ax + \eta Ay] - \tfrac{\eta}{\beta}AR(t)[\beta Ax + \eta Ay] \\ & - \tfrac{1}{\beta}[\beta Ax + \eta Ay]. \end{aligned}$$

Por las igualdades (1.6),(1.8), (1.11) y (1.14) se tiene que $\lim_{t\to 0^+} Au(t) = Ax$, de esta manera $u \in C([0,\infty),[D(A)])$.

Como $u'(t) = R'(t)y + R''(t)x - \eta AR'(t)x$, para $t > 0$, de la igualdad (1.13) se sigue que

$$u'(t) = R'(t)y + \beta AR(t)x + (k * AR)(t)x. \tag{1.20}$$

Como $A$ es un operador cerrado y $x \in D(A)$, es claro que $(k*AR)(\cdot)x \in C((0,\infty),[D(A)])$. De las propiedades de $R$ y $R'$ se tiene que $\beta AR(\cdot)x \in C((0,\infty),[D(A)])$ y $R'(\cdot)y \in C((0,\infty),[D(A)])$. Por lo tanto $u \in C^1((0,\infty),[D(A)])$. De la Proposición 1.5 partes 9, 12 y 4 se sigue que $\lim_{t\to 0^+} u'(t) = y$.

Afirmamos que $u \in C^1([0,\infty),[D(A)])$. En efecto, dado que $Au'(t) = AR'(t)y + \beta AR(t)Ax + (k * AR(t))Ax$, de la Proposición 1.5 partes 10 y 12, se sigue que $\lim_{t\to 0^+} Au'(t) = Ay$, de donde $u \in C^1([0,\infty),[D(A)])$.

Finalmente, probaremos que $u \in C^2([0,\infty),X)$ y que satisface el problema (1.16). Es fácil ver que para $t > 0$, $u''(t) = R''(t)y + \beta AR'(t)x + (k * AR')(t)x$, usando (1.13) en la identidad anterior tenemos que

$$\begin{aligned} u''(t) &= R'(t)(\eta Ay + \beta Ax) + \beta AR(t)y + (k * AR)(t)x + (k * AR')(t)x \\ &= R'(t)(\eta Ay + \beta Ax) + \beta AR(t)y + (k * AR)(t)x + (k * AR')(t)x \\ &+ \eta\beta AR(t)Ax + \eta(k * AR)(t)Ax - \eta\beta AR(t)Ax - \eta(k * AR)(t)Ax. \end{aligned}$$

A partir de (1.20), se tiene que

$$u''(t) = \eta Au'(t) + \beta Au(t) + \int_0^t k(t-s)Au(s)ds,$$

y que $u \in C^2([0,\infty),X)$. La unicidad se obtiene del Teorema 1.10. ∎

**Teorema 1.13.** *Sean $x, y \in \overline{D(A)}$. Entonces la función*

$$u(t) = R(t)y + R'(t)x - \eta AR(t)x, \quad \textit{para } t \in [0,T],$$

*es la única solución fuerte del problema (1.16).*

***Demostración.*** Debido a las condiciones (1.2) y (1.3) sabemos para $x$ e $y$ en $\overline{D(A)}$, existen sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A^2)$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A^2)$ tales que $||x_n - x|| \to 0$, $||y_n - y|| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como $\beta Ax_n + \eta Ay_n \in D(A)$, del teorema anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$u_n(t) = R(t)y_n + R'(t)x_n - \eta AR(t)x_n, \quad t \in [0,T],$$

es solución estricta del problema (1.16). Además, de la Proposición 1.5 partes 2 y 7, se tiene que

$$\begin{aligned} &||u_n(t) - u(t)|| \le ||R(t)(y_n - y)|| + ||R'(t)(x_n - x)|| + \eta||AR(t)(x_n - x)|| \\ &\le ||R(t)||||(y_n - y)|| + ||R'(t)||||(x_n - x)|| + \eta||AR(t)||||(x_n - x)|| \\ &\le M_4Te^{r_0T}||(y_n - y)|| + M_5e^{r_0T}||(x_n - x)|| + \eta M_4e^{r_0T}||(x_n - x)||, \end{aligned}$$

de lo anterior, se obtiene que $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{t\in[0,T]}||u_n(t)-u(t)||=0$. Para cada $t\in[0,T]$, definimos

$$w(t)=R'(t)y+\beta AR(t)x+(k*AR)(t)x.$$

Sabemos que $u_n'(t)=R'(t)y_n+\beta AR(t)x_n+(k*AR)(t)x_n$ . Usando (1.8) obtenemos

$$\begin{aligned}||u_n'(t)-w(t)|| &\leq M_5Te^{r_0T}||(y_n-y)||+\beta M_4e^{r_0T}||(x_n-x)||\\ &+ M_4e^{r_0T}\int_0^T|k(s)|ds||(x_n-x)||.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{t\in[0,T]}||u_n'(t)-w(t)||=0$. Así $u$ es diferenciable en $[0,T]$ y $u'=w$. De lo anterior, se sigue que $u\in C([0,T],X)$. La unicidad se obtiene del Teorema 1.11. ■

## 1.4 Regularidad de la solución del problema homogéneo.

Con el objetivo de estudiar Hölder regularidad de la solución estricta del problema (1.16) en $[0,T]$, con $T>0$, se introduce el siguiente espacio intermedio entre $D(A)$ y $X$

$$D_A(\alpha,\infty)=\{x\in X:[x]_\alpha=\sup_{\lambda\in S_{\theta_0}}||\lambda^\alpha(\lambda(\lambda I-A)^{-1}x-x)||<\infty\} \tag{1.21}$$

para $\alpha\in(0,1)$. Con la norma $||x||_{D_A(\alpha,\infty)}=||x||+[x]_\alpha$, el conjunto $D_A(\alpha,\infty)$ es un espacio de Banach. Para más información de este espacio intermedio ver [24].

A continuación se presenta un resultado acerca de la $\alpha$-Hölder regularidad de la solución estricta del problema (1.16) en $[0,T]$ que será de utilidad para estudiar regularidad de solución de la ecuación no homogénea.

**Teorema 1.14.** *Sea $1<p<\infty$. Supongamos que $k\in L^p_{loc}(0,\infty)$. Sean $x,y\in D(A)$ con*

$$(\eta Ay+\beta Ax)\in D_A(\alpha,\infty),$$

*donde $\alpha=1-\frac{1}{p}$, entonces para $T>0$, la solución estricta $u$ del problema (1.16) pertenece a $C^{1,\alpha}([0,T],[D(A)])\cap C^{2,\alpha}([0,T],X)$, y $u''(t)\in D_A(\alpha,\infty)$ para cada $t\in[0,T]$.*

***Demostración.*** Puesto que $x,y\in D(A)$ y $D(A)\subseteq D_A(\alpha,\infty)\subseteq\overline{D(A)}$, del Teorema 1.12 se sigue que $u(t)=R(t)y+R'(t)x-\eta AR(t)x$ es la única solución estricta del problema (1.16). Para cada $t\in[0,T]$ definimos la función $v$ como $v(t)=u'(t)$. Por lo tanto, $v$ es la solución estricta del problema de primer orden

$$\begin{cases} v'(t)=\eta Av(t)+g(t)\ , & t\in[0,T],\\ v(0)=y, \end{cases} \tag{1.22}$$

donde $g(t) = \beta Au(t) \; + \; \int_0^t k(t-s)Au(s)\,ds.$

Sean $1 < p < \infty$ y $\alpha = 1 - \frac{1}{p}$. Afirmamos que $g \in C^{\alpha}([0,T],X)$. En efecto, probaremos primero que la función $w$ definida por

$$w(t) = \int_0^t k(s)Au(t-s)ds, \quad t \in [0,T],$$

es $\alpha$-Hölder continua en $[0,T]$. Notemos que $u \in C^1([0,T],[D(A)]) \cap C^2([0,T],X)$, por lo tanto existe $M > 0$ tal que

$$||Au(t)|| \leq M, \; t \in [0,T]. \tag{1.23}$$

Sea $h > 0$. Estimando la diferencia $w(t+h) - w(t)$, tenemos que

$$\begin{aligned} w(t+h) - w(t) &= \int_0^{t+h} k(s)Au(t+h-s)ds - \int_0^t k(s)Au(t-s)ds \\ &\quad + \int_0^t k(s)Au(t+h-s)ds - \int_0^t k(s)Au(t+h-s)ds \\ &= \underbrace{\int_t^{t+h} k(s)Au(t+h-s)ds}_{I_1} + \underbrace{\int_0^t k(s)[Au(t+h-s-Au(t-s))]ds}_{I_2}. \end{aligned}$$

Estimemos $I_1$. Utilizando (1.23) y la desigualdad de Hölder obtenemos

$$||I_1|| \leq M \int_t^{t+h} |k(s)|ds \leq M(\int_t^{t+h} |k(s)|^p ds)^{\frac{1}{p}} h^{\alpha} \leq M||k||_p h^{\alpha}.$$

Ahora estimamos $I_2$. Para eso, notemos que a partir de (1.23) y de la Proposición 1.5 partes 7,2 y 4 se puede obtener respectivamente

$$||Au(t+h) - Au(t)|| \leq 2M, \; t, t+h \in [0,T], \tag{1.24}$$

$$||Au(t+h) - Au(t)|| \leq C\frac{h}{t}, \; t, t+h \in (0,T]. \tag{1.25}$$

De (1.24) y (1.25) se sigue que:

$$||Au(t+h) - Au(t)|| \leq C_1 \mu(t,h), \; t, t+h \in [0,T], \tag{1.26}$$

donde $C_1 \geq \max(C, 2M)$. A partir de (1.26) y la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned} ||I_2|| \leq & \int_0^t |k(s)|||Au(t+h-s) - Au(t-s)||ds \\ \leq & \; C_1(\int_0^t |k(s)|^p ds)^{\frac{1}{p}} (\int_0^t \mu(t-s,h)^q ds)^{\frac{1}{q}} = C_1||k||_p(\int_0^t \mu(t-s,h)^q ds)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{1.27}$$

donde $q$ es el conjugado de $p$ y por lo tanto $q > 1$. Pero

$$\int_0^t \mu(t-s,h)^q ds = \int_0^t \mu(\tau,h)^q d\tau \leq \int_0^\infty \mu(\tau,h)^q d\tau.$$

Además, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mu(\tau,h)^q d\tau &= \int_0^h \mu(\tau,h)^q d\tau + \int_h^\infty \mu(\tau,h)^q d\tau \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^h \mu(\tau,h)^q d\tau + \lim_{b\to\infty} \int_h^b \mu(\tau,h)^q d\tau \\ &= h + \frac{h}{q-1} = ph.\end{aligned}$$

Por lo tanto $||I_2|| \leq C_2 h^{\frac{1}{q}}$, donde $\frac{1}{q} = \alpha$. Hemos probado que $w$ es localmente $\alpha$-Hölder continua en $[0,T]$, como $[0,T]$ es compacto entonces $w$ es $\alpha$-Hölder continua en $[0,T]$.

Ahora probaremos que el término $\beta Au(t)$ es Lipschitz continuo en $[0,T]$. En efecto, puesto que $u \in C^1([0,T],[D(A)])$ existe una constante $C_3 > 0$ tal que $||Au'(t)|| \leq C_3$ para $t \in [0,T]$. De aquí se sigue que $\beta Au(\cdot)$ es localmente Lipschitz continua en $[0,T]$, como $[0,T]$ es compacto se tiene que $\beta Au(\cdot)$ es Lipschitz continua en $[0,T]$.

Por lo tanto $g$ es $\alpha$-Hölder continua en $[0,T]$. Además, $y \in D(A)$ y $\eta Av(0) + g(0) = \eta Ay + \beta Ax \in D_A(\alpha,\infty)$. Debido a [24, Teorema 4.5] se tiene que $v \in C^\alpha([0,T],[D(A)]) \cap C^{\alpha,1}([0,T],X)$ y $v'(t) \in D_A(\alpha,\infty)$. De aquí, se sigue que $u \in C^{1,\alpha}([0,T],[D(A)]) \cap C^{2,\alpha}([0,T],X)$, y $u''(t) \in D_A(\alpha,\infty)$ para $t \in [0,T]$, $T > 0$. ■

**Observación 1.15.** *Notemos que si $x, y \in D(A)$ y la solución estricta del problema (1.16) pertenece a $C^{1,\alpha}([0,T],[D(A)]) \cap C^{2,\alpha}([0,T],X)$ entonces necesariamente $(\eta Ay + \beta Ax) \in D_A(\alpha,\infty)$. En efecto, en este caso, tenemos que $v = u'$ es la solución estricta del problema (1.34), y por lo tanto $\eta Ay + \beta Ax = \eta Av(0) + g(0) \in D_A(\alpha,\infty)$, ver [24].*

**Proposición 1.16.** *Sea $\alpha \in (0,1)$. Si $x \in D_A(\alpha,\infty)$ entonces las funciones $R'(\cdot)x$, $AR(\cdot)x$ son $\alpha$-Hölder continuas en $[0,T]$, $T > 0$.*

***Demostración.*** Ver [22, Proposicion 2.6]. ■

En relación a la regularidad de la solución fuerte del problema (1.16) tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 1.17.** *Sea $1 < p < \infty$. Supongamos que $k \in L^p_{loc}(0,\infty)$. Sean $x, y \in D_A(\alpha,\infty)$ con $\alpha = 1 - \frac{1}{p}$ entonces la solución fuerte $u$ del problema (1.16) pertenece a $C^{1,\alpha}([0,T],X)$.*

***Demostración.*** Como $D_A(\alpha,\infty) \subseteq \overline{D(A)}$ la única solución fuerte del problema (1.16) es

$$u(t) = R(t)y + R'(t)x - \eta AR(t)x, \quad t \in [0,T].$$

Derivando la igualdad anterior y usando la Proposición 1.5 parte 11, se tiene que

$$u'(t) = R'(t)y + \beta AR(t)x + k * AR(t)x, \quad t \in [0,T].$$

Sabemos que $x, y \in D_A(\alpha, \infty)$, por lo tanto de la Proposición 1.16 se sigue que $R'(\cdot)y$ y $\beta AR(\cdot)x$ son funciones $\alpha$-Hölder continuas en $[0,T]$. Como $k \in L^p_{loc}(0,\infty)$, se obtiene que $(k * AR)(\cdot)x$ es $\alpha$-Hölder continua en $[0,T]$. Así, concluimos que $u \in C^{1,\alpha}([0,T], X)$. ∎

## 1.5 La ecuación no homogénea.

En esta sección expondremos algunos resultados acerca de la existencia, unicidad y regularidad de solución de la ecuación no-homogénea (1.1) en el intervalo $[0,T]$. Para esto, veremos previamente algunos resultados de regularidad del término

$$(R * f)(t) = \int_0^t R(t-s)f(s)ds,$$

donde $R$ es el operador resolvente definido en la sección 1.2 y $f : [0,T] \to X$ es una función dada. En estos resultados, se advierte que al imponer ciertas condiciones en $f$ se obtiene $\alpha$-Hölder regularidad para $R * f$ en $[0,T]$, distinguiendo los casos en que $f(0) = 0$ y $f(0) \neq 0$.

### 1.5.1 Regularidad dél término $R * f$

El objetivo de está subsección es mostrar resultados de regularidad del término $R * f$ en los casos en que $f(0) = 0$ y $f(0) \neq 0$.

**Teorema 1.18.** *Si $\alpha \in (0,1)$ y $f \in C^\alpha([0,T], X)$ con $f(0) = 0$ entonces $R * f \in C^{1,\alpha}([0,T], [D(A)]) \cap C^{2,\alpha}([0,T], X)$ y satisface*

$$(R * f)''(t) = \int_0^t R''(t-s)(f(s) - f(t))ds + R'(t)f(t), \quad t \in [0,T].$$

***Demostración.*** Ver [22, Teorema 3.2]. ∎

Para el caso $f(0) \neq 0$ se tienen los siguientes resultados.

**Teorema 1.19.** *Sea $\alpha \in (0,1)$ y $f \in C^\alpha([0,T], X)$ con $f(0) \in \overline{D(A)}$, $f(0) \neq 0$, entonces la función $R * f \in C^1([0,T], [D(A)]) \cap C^2([0,T], X)$ y satisface*

$$(R * f)''(t) = \int_0^t R''(t-s)(f(s) - f(t))ds + R'(t)(f(t) - f(0)) + R'(t)f(0), \quad t \in [0,T].$$

*Además, $R * f \in C^{1,\alpha}([\epsilon, T], [D(A)]) \cap C^{2,\alpha}([\epsilon, T], X)$ para cada $\epsilon \in (0,T]$.*

***Demostración.*** Para cada $t \in [0,T]$ sea $g(t) = f(t) - f(0)$. Como $f \in C^\alpha([0,T],X)$ se tiene que $g \in C^\alpha([0,T],X)$. Además $g(0) = 0$. Por el teorema anterior se tiene que

$$(R * g)''(t) = \int_0^t R''(t-s)(g(s) - g(t))ds + R'(t)g(t), \quad t \in [0,T],$$

donde $R * g \in C^{1,\alpha}([0,T],[D(A)]) \cap C^{2,\alpha}([0,T],X)$. Como $f(0) \in \overline{D(A)}$ de la Proposición 1.5 partes 1, 9 y 12, se sigue que la función $t \to \int_0^t R(s)f(0)ds$ pertenece a $C^1([0,T],[D(A)]) \cap C^2([0,T],X)$ y es analítica en $[\epsilon,\infty)$ para cada $\epsilon > 0$. Notemos que

$$(R * f)(t) = (R * g)(t) + \int_0^t R(s)f(0)ds, \quad t \in [0,T].$$

Por lo tanto $R * f \in C^1([0,T],[D(A)]) \cap C^2([0,T],X)$ y $R * f \in C^{1,\alpha}([\epsilon,T],[D(A)]) \cap C^{2,\alpha}([\epsilon,T],X)$ para cada $\epsilon \in (0,T]$. Más aún

$$\begin{aligned}
(R * f)''(t) &= (R * g)''(t) + R'(t)f(0) \\
&= \int_0^t R''(t-s)(g(s) - g(t))ds + R'(t)g(t) + R'(t)f(0) \\
&= \int_0^t R''(t-s)(f(s) - f(t))ds + R'(t)(f(t) - f(0)) + R'(t)f(0), \quad t \in [0,T].
\end{aligned}$$

■

**Teorema 1.20.** *Sea $\alpha \in (0,1)$ y $f \in C^\alpha([0,T],X)$ con $f(0) \in D_A(\alpha,\infty)$, $f(0) \neq 0$, entonces la función $R * f$ pertenece a $C^{1,\alpha}([0,T],[D(A)]) \cap C^{2,\alpha}([0,T],X)$.*

***Demostración.*** Definimos $g(t) = f(t) - f(0)$, para cada $t \in [0,T]$. Del Teorema 1.18 se sigue que $R * g \in C^{1,\alpha}([0,T],[D(A)]) \cap C^{2,\alpha}([0,T],X)$. Puesto que $f(0) \in D_A(\alpha,\infty)$, de la Proposición 1.16 se sigue que la función $t \to \int_0^t R(s)f(0)ds$ pertenece a $C^{1,\alpha}([0,T],[D(A)]) \cap C^{2,\alpha}([0,T],X)$. Como

$$(R * f)(t) = (R * g)(t) + \int_0^t R(s)f(0)ds, \quad t \in [0,T],$$

se tiene que $R * f \in C^{1,\alpha}([0,T],[D(A)]) \cap C^{2,\alpha}([0,T],X)$.

■

### 1.5.2 Existencia, unicidad y regularidad de solución de la ecuación no homogénea.

Consideremos la ecuación no homogénea (1.1)

$$\begin{cases} u''(t) = \eta A u'(t) + \beta A u(t) \ + \displaystyle\int_0^t k(t-s) A u(s)\, ds \ + \ f(t) \ , \quad t \in [0,T], \\ \\ u(0) = x, \\ u'(0) = y, \end{cases} \tag{1.28}$$

donde $\eta$, $\beta$, $k$ y $A$ satisfacen las hipótesis establecidas en la sección 1.2 y $f : [0,T] \to X$ es una función dada.

Las siguientes definiciones de solución son las análogas a las definiciones 1.7 y 1.8 en el caso no homogéneo.

**Definición 1.21.** *Diremos que la función $u : [0,T] \to X$ es una solución estricta de la ecuación (1.28) si $u \in C^1([0,T],[D(A)]) \cap C^2([0,T],X)$ y satisface la ecuación (1.28).*

**Definición 1.22.** *Diremos que la función $u : [0,T] \to X$ es una solución fuerte de la ecuación (1.28) si $u \in C^1([0,T],X)$ y existe una sucesión $u_n \in C^1([0,T],[D(A)]) \cap C^2([0,T],X)$ tal que satisface:*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} u_n = u \quad en \ C^1([0,T],X), u(0) = x, u'(0) = y, \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n'' - \eta A u_n' - \beta A u_n - k * A u_n = f \quad en \ C([0,T],X). \end{cases} \tag{1.29}$$

El principal objetivo de esta sección es mostrar resultados de existencia, unicidad y regularidad de la solución de la ecuación (1.28). Probaremos primero unicidad de solución estricta y fuerte de la ecuación (1.28).

**Teorema 1.23.** *Supongamos que $f \in C([0,T],X)$, $x, y \in \overline{D(A)}$ y $u$ es solución estricta de la ecuación (1.28) entonces*

$$u(t) = R(t)y + R'(t)x - \eta A R(t)x + (R * f)(t), \ t \in [0,T]. \tag{1.30}$$

***Demostración.*** Como $u$ es una solución estricta de la ecuación (1.28) tenemos $u \in C^1([0,T],[D(A)]) \cap C^2([0,T],X)$ y satisface la ecuación (1.28). Así, para cada $t \geq 0$ la función $g : [0,t] \to X$ dada por $g(s) = R(t-s)u(s)$ es dos veces continuamente diferenciable y además

$$g''(s) = R''(t-s)u(s) - 2R'(t-s)u'(s) + R(t-s)u''(s).$$

De (1.13),(1.10) y problema (1.28) se sigue que

$R''(t-s)u(s) - 2R'(t-s)u'(s) + R(t-s)u''(s)$

$$= \eta AR'(t-s)u(s) + \beta AR(t-s)u(s) + (k * AR)(t-s)u(s)$$

$$-2u'(s) - 2\eta AR(t-s)u'(s) - 2\beta(1 * AR)(t-s)u'(s)$$

$$-2(1 * k * AR)(t-s)u'(s) + \eta AR(t-s)u'(s)$$

$$+\beta AR(t-s)u(s) + R(t-s)(k * Au)(s) + R(t-s)f(s).$$

Integrando la igualdad anterior desde 0 hasta $t$, con respecto a $s$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
-u(t) + R'(t)x - R(t)y &= \eta(AR' * u)(t) + \beta(AR * u)(t) \\
&+ ((k * AR) * u)(t) - 2u(t) + 2x \\
&- 2\eta AR * u'(t) - 2\beta((1 * AR) * u')(t) \\
&- 2((1 * k * AR) * u')(t) + \eta(AR * u')(t) \\
&+ \beta(AR * u)(t) + (R * (k * Au))(t) + (R * f)(t).
\end{aligned}$$

Sustituyendo (i),(ii) y (iii) de la Proposición 1.9 en la identidad anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
u(t) = \;& R(t)y - R'(t)x + \eta AR(t)x + 2\beta(1 * AR)(t)x \\
& +2(1 * k * AR)(t)x + 2x + (R * f)(t),
\end{aligned}$$

finalmente, utilizando la Proposición 1.5 parte 8, se sigue que

$$u(t) = R(t)y + R'(t)x - \eta AR(t)x + (R * f)(t), \; t \in [0,T].$$

■

**Teorema 1.24.** *Supongamos que $f \in C([0,T], X)$, $x, y \in \overline{D(A)}$ y $u$ es solución fuerte de la ecuación (1.28) entonces*

$$u(t) = R(t)y + R'(t)x - \eta AR(t)x + (R * f)(t), \; t \in [0,T]. \tag{1.31}$$

***Demostración.*** Sea $u$ una solución fuerte de la ecuación (1.28). Sabemos que existe una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C^1([0,T],[D(A)]) \cap C^2([0,T],X)$ tal que satisface (1.29). Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $x_n = u_n(0)$, $y_n = u_n'(0)$. Del teorema anterior se sigue que

$$u_n(t) = R(t)y_n + R'(t)x_n - \eta AR(t)x_n + (R * f)(t), \quad t \in [0,T].$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ en la igualdad anterior, usando que $A$ es un operador lineal cerrado y la Proposición 1.5 partes 2 y 5, obtenemos la expresión (1.31).

■

Ahora, nos preocuparemos de establecer condiciones bajo los cuales existe una única solución estricta de la ecuación (1.28).

**Teorema 1.25.** *Sea $\alpha \in (0,1)$. Sean $f \in C^{\alpha}([0,T],X)$ y $x, y \in D(A)$ tal que*

$$\eta A y + \beta A x + f(0) \in \overline{D(A)}.$$

*Entonces $u$ dada por la fórmula (1.31) es la única solución estricta de la ecuación no homogéna (1.28) y pertenece a $C^{1,\alpha}([\epsilon,T],D(A)) \cap C^{2,\alpha}([\epsilon,T],X)$ para cada $\epsilon \in (0,T]$.*

***Demostración.*** Consideremos los problemas

$$\begin{cases} w''(t) = \eta A w'(t) + \beta A w(t) + (k * Aw)(t) + f(t) - f(0) \\ w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \end{cases} \tag{1.32}$$

y

$$\begin{cases} z''(t) = \eta A z'(t) + \beta A z(t) + (k * Az)(t) + f(0) \\ z(0) = x \\ z'(0) = y \end{cases} \tag{1.33}$$

Del Teorema 1.19 se sigue que la función $w$ dada por $w(t) = \int_0^t R(t-s)(f(s) - f(0))ds$ es la única solución estricta del problema (1.32). Además $w \in C^{1,\alpha}([0,T],[D(A)]) \cap C^{2,\alpha}([0,T],X)$.

Consideremos la función $z$ dada por $z = R(t)y + R'(t)x - \eta A R(t)x + \int_0^t R(s)f(0)ds$. Procediendo de manera similar a la demostración del Teorema 1.12 se prueba que $z$ es la única solución estricta del problema (1.33). Así, se tiene que $u$ dada por la expresión (1.31) es la única solución estricta de la ecuación no homogénea (1.28) y pertenece a $C^{1,\alpha}([\epsilon,T],D(A)) \cap C^{2,\alpha}([\epsilon,T],X)$ para cada $\epsilon \in (0,T]$. ■

**Teorema 1.26.** *Sea $1 < p < \infty$. Supongamos $k \in L^p_{loc}(0,\infty)$ y que $\alpha = 1 - \frac{1}{p}$. Si $f \in C^{\alpha}([0,T],X)$, $x, y \in D(A)$ con*

$$\eta A y + \beta A x + f(0) \in D_A(\alpha,\infty)$$

*entonces única solución estricta $u$ de la ecuación no-homogénea (1.28) dada por (1.31) pertenece a $C^{1,\alpha}([0,T],[D(A)]) \cap C^{2,\alpha}([0,T],X)$ y $u''(t) \in D_A(\alpha,\infty)$, para cada $t \in [0,T]$.*

***Demostración.*** Puesto que $x, y \in D(A)$ y $D(A) \subseteq D_A(\alpha,\infty) \subseteq \overline{D(A)}$, del Teorema 1.12 se sigue que para $t \in [0,T]$ la expresión $u(t) = R(t)y + R'(t)x - \eta A R(t)x + (R * f)(t)$

es la única solución estricta de la ecuación (1.28). Para cada $t \in [0,T]$ definimos la función $v$ por $v(t) = u'(t)$. Por lo tanto, $v$ es solución estricta del problema de primer orden

$$\begin{cases} v'(t) = \eta A v(t) + h(t)\ , \quad t \in [0,T] \\ \\ v(0) = y, \end{cases} \tag{1.34}$$

donde $h(t) = \beta A u(t) + \int_0^t k(t-s)Au(s)ds + f(t)$. En la demostración del Teorema 1.14 se obtuvo que la función dada por $g(t) = \beta A u(t) + \int_0^t k(t-s)Au(s)ds$ pertenece a $C^{\alpha}([0,T],X)$. Como $f$ pertenece a $C^{\alpha}([0,T],X)$ entonces $h \in C^{\alpha}([0,T],X)$. Además, para $y \in D(A)$ se tiene $\eta A v(0) + g(0) = \eta A y + \beta A x + f(0) \in D_A(\alpha,\infty)$.

Usando [24, Teorema 4.5], obtenemos que $v \in C^{\alpha}([0,T],[D(A)]) \cap C^{\alpha,1}([0,T],X)$ y que $v'(t) \in D_A(\alpha,\infty)$. Se concluye que $u \in C^{1,\alpha}([0,T],[D(A)]) \cap C^{2,\alpha}([0,T],X)$, y también que $u''(t) \in D_A(\alpha,\infty)$ para cada $t \in [0,T]$, $T > 0$. ∎

**Observación 1.27.** *Notemos que la condición $\eta A y + \beta A x + f(0) \in D_A(\alpha,\infty)$ permite mejorar en algún sentido la regularidad de la solución estricta, vale decir, gracias a la condición anterior se concluye que la solución estricta $u$ de la ecuación (1.28) pertenece a $C^{1,\alpha}([0,T],D(A)) \cap C^{2,\alpha}([0,T],X)$.*

Veamos ahora un par de resultados que reflejan la misma idea anterior, esta vez con respecto a la solución fuerte de la ecuación no-homogénea (1.28).

**Teorema 1.28.** *Sea $\alpha \in (0,1)$. Si $f \in C([0,T],X)$ y $x, y \in D(A)$, entonces $u$ dada por la fórmula (1.31) es la única solución fuerte de la ecuación no homogéna (1.28) y pertenece a $C^{1,\alpha}([\epsilon,T],X)$, para cada $\epsilon \in (0,T]$.*

***Demostración.*** Ver [22, Teorema 4.3]. ∎

**Teorema 1.29.** *Sea $1 < p < \infty$. Supongamos $k \in L^p_{loc}(0,\infty)$ y que $\alpha = 1 - \frac{1}{p}$. Si $f \in C([0,T],X)$, $x, y \in D_A(\alpha,\infty)$ entonces la única solución fuerte $u$ de la ecuación no-homogénea (1.28) dada por la fórmula (1.31) pertenece a $C^{1,\alpha}([0,T],X)$.*

***Demostración.*** Se sigue del Teorema 1.17 y de [22, Teorema 3.1 ]. ∎

# Capítulo 2

# Resultados de Regularidad Maximal de una Ecuación de Segundo Orden con Retardo

## 2.1 Introducción.

En este capítulo expondremos algunos resultados de existencia, unicidad y regularidad de solución de la ecuación diferencial de segundo orden con retardo

$$u''(t) + Bu'(t) + Au(t) = Gu'_t + Fu_t + f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Aquí, $X$ es un espacio de Banach, $A : D(A) \subseteq X \to X$ y $B : D(B) \subseteq X \to X$ son operadores lineales cerrados, $G, F : C([-r, 0], X) \to X$ son operadores lineales acotados, $u_t, u'_t : [-r, 0] \to X$ son definidas por $u_t(\cdot) = u(t + \cdot)$, $u'_t(\cdot) = u'(t + \cdot)$ y la función dato $f \in C^\alpha(\mathbb{R}, X)$.

Como anticipamos en la introducción utilizaremos la técnica de multiplicadores de Fourier para obtener nuestros resultados. Supondremos que $X$ es un espacio $B$-convexo y que $A$ no genera necesariamente un $C_0$-semigrupo. Esta ecuación es estudiada por Poblete en [21].

En la sección 2.2, veremos resultados de Multiplicadores de Fourier para funciones Hölder continuas, los que son centrales para nuestro objetivo. En la sección 2.3 se define buen planteamiento de la ecuación (2.1) y daremos una caracterización de existencia y unicidad. En lo que sigue introduciremos algunas notaciones preliminares.

Sean $X, Y$ espacios de Banach, $\alpha \in (0, 1)$, el conjunto

$$\dot{C}^\alpha(\mathbb{R}, X) = \{f : \mathbb{R} \to X : f(0) = 0, ||f||_\alpha < +\infty\}.$$

es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_\alpha = \sup_{t\neq s,\ t,s\in\mathbb{R}} \frac{\|u(t)-u(s)\|}{|t-s|^\alpha} < +\infty$$

Definimos a $C^\alpha(\mathbb{R},X)$ como

$$C^\alpha(\mathbb{R},X) = \{f : \mathbb{R}\to X : ||f||_\alpha < +\infty\},$$

este conjunto es un espacio de Banach con la norma $||f||_{C^\alpha} = ||f||_\alpha + ||f(0)||$.

Denotamos por $C^{\alpha+1}(\mathbb{R},X)$ al espacio de Banach que consiste en todas las funciones $u\in C^1(\mathbb{R},X)$ tal que $u'\in C^\alpha(\mathbb{R},X)$ dotado de la norma

$$||u||_{C^{\alpha+1}} = ||u'||_{C^\alpha} + ||u(0)||,$$

de similar forma, definimos $C^{\alpha+2}(\mathbb{R},X)$ como el conjunto formado por las funciones $u\in C^2(\mathbb{R},X)$ talque $u''\in C^\alpha$ considerando la norma

$$||u||_{C^{\alpha+2}} = ||u''||_{C^\alpha} + ||u'(0)|| + ||u(0)||$$

es espacio de Banach.

**Observación 2.1.** *Podemos representar también a $\dot{C}^\alpha(\mathbb{R},X)$ como el espacio de Banach cociente $\tilde{C}^\alpha(\mathbb{R},X) = \{[f]\ : f\in C^\alpha(\mathbb{R},X)\}$ donde*

$$[f]\ = \{g\in C^\alpha(\mathbb{R},X) : f-g\equiv constante\},$$

*considerando la norma inducida.*

Sea $\mathcal{F}f$ la transformada de Fourier de $f$, es decir

$$\mathcal{F}f(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ist}f(t)dt,$$

para $s\in\mathbb{R}$ y $f\in L^1(\mathbb{R},X)$. Denotamos por $\hat{f}(\lambda)$ a la transformada de Carleman de $f$, esto es

$$\hat{f}(\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)dt, & Re(\lambda) > 0, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{\lambda t}f(-t)dt, & Re(\lambda) < 0, \end{cases}$$

donde $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R},X)$ es una función de decrecimiento subexponencial, es decir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{|\epsilon|t}||f(t)||dt < +\infty \ \text{ para cada } \ \epsilon > 0.$$

## 2.2 $\dot{C}^{\alpha}$-Multiplicadores de Fourier

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abieto. Denotamos por $C_c^{\infty}(\Omega)$ al espacio de todas las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en $\Omega$.

El siguiente lema es una herramienta importante para nuestros objetivos.

**Lema 2.2.** *Sea $f \in C^{\alpha}(\mathbb{R}, X)$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} f(s)(\mathcal{F}\phi)(s)ds = 0$$

*para todo $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ si y sólo si $f$ es constante.*

***Demostración.*** Se sigue de [1, Teorema 4.8.1, Teorema 4.8.2]. ∎

**Definición 2.3.** *Sea $M : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathcal{L}(X,Y)$ continua. Diremos que $M$ es un $\dot{C}^{\alpha}$-Multiplicador si existe una función $L : \dot{C}^{\alpha}(\mathbb{R}, X) \to \dot{C}^{\alpha}(\mathbb{R}, Y)$ tal que:*

$$\int_{\mathbb{R}} (Lf)(s)(\mathcal{F}\phi)(s)ds = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}\phi M)(s)f(s)ds, \tag{2.2}$$

*para toda $f \in C^{\alpha}(\mathbb{R}, X)$ y $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$.*

**Observación 2.4.** *Note que $\mathcal{F}(\phi M)(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ist}\phi(t)M(t)dt \in \mathcal{L}(X,Y)$ para cada $s \in \mathbb{R}$.*

**Observación 2.5.** *El operador $L$ está bien definido. En efecto, sean $f_1, f_2 \in \dot{C}^{\alpha}(\mathbb{R}, X)$. Si $f_1 = f_2$, de 2.2 tenemos:*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (L(f_1))(s)(\mathcal{F}\phi)(s)ds &= \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}\phi M)(s)f_1(s)ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}\phi M)(s)f_2(s)ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} (L(f_2))(s)(\mathcal{F}\phi)(s)ds.
\end{aligned}$$

*Del Lema 2.2 obtenemos que $Lf_1 - Lf_2 \equiv constante$, de aquí se sigue que $Lf_1 = Lf_2$. Por lo tanto $L$ está bien definida.*

**Definición 2.6.** *Diremos que un espacio de Banach $X$ es de tipo p-Fourier, con $1 \leq p \leq 2$, si la transformada de Fourier define un operador lineal acotado de $L^p(\mathbb{R}, X)$ en $L^q(\mathbb{R}, X)$, donde $q$ es el índice conjugado de $p$.*

**Definición 2.7.** *Diremos que un espacio de Banach $X$ es $B$-convexo si es de tipo p-Fourier para algún $p > 1$.*

El siguente resultado de multiplicadores de Fourier es fundamental para obtener resultados de existencia, unicidad y regularidad de solución de la ecuación (2.1) y su demostración se encuentra en [4].

**Teorema 2.8.** *Sean $X$ un espacio $B$-convexo e $Y$ un espacio de Banach. Supongamos que $M \in C^1(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \mathcal{L}(X,Y))$. Si*

$$\sup_{t\neq 0} ||M(t)|| + \sup_{t\neq 0} ||tM'(t)|| < \infty \tag{2.3}$$

*entonces $M$ es un $\dot{C}^{\alpha}$-multiplicador.*

## 2.3 Existencia, Unicidad y Regularidad Maximal

En lo que sigue, supondremos que $A$ y $B$ son operadores lineales cerrados con $D(A) \cap D(B) \neq \{0\}$. Al dominio de $A+B$ lo denotamos como $[D(A) \cap D(B)]$. Con la norma $||x||_{[D(A)\cap D(B)]} = ||x|| + ||Ax|| + ||Bx||$ y considerando que $A$ y $B$ son cerrados se tiene que $[D(A) \cap D(B)]$ es un espacio de Banach.

**Definición 2.9.** *Diremos que el par $(A, B)$ es coercivo si, para todo $t > 0$, se tiene que $A + tB$, con dominio $[D(A) \cap D(B)]$, es cerrado y existe una constante $M > 0$ talque*

$$||Ax|| + t||Bx|| \leq M||Ax + tBx||.$$

Para la ecuación (2.1) definimos el concepto de buen planteamiento o regularidad maximal.

**Definición 2.10.** *Diremos que la ecuación (2.1) es $C^{\alpha}$-bien planteada si para cada $f \in C^{\alpha}(\mathbb{R}, X)$ existe una única función $u \in C^{\alpha}(\mathbb{R}, [D(A)]) \cap C^{\alpha+1}(\mathbb{R}, [D(B)]) \cap C^{\alpha+2}(\mathbb{R}, X)$ que satisface la ecuación (2.1) casi en todas partes.*

**Definición 2.11.** *Sea $e_{\lambda}(t) := e^{i\lambda t}$ para $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos los operadores $\{F_{\lambda}\}, \{G_{\lambda}\} \subseteq \mathcal{L}(X)$ como $F_{\lambda}x = F(e_{\lambda}x)$, $G_{\lambda}x = G(e_{\lambda}x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in X$.*

**Lema 2.12.** *Sea $t \in \mathbb{R}$. Sean $F_t, G_t$ definidos como arriba. Entonces para cada $x \in X$ se tiene que*

$$F_t'x = F(e_t'x), \; G_t'x = G(e_t'x),$$

*donde $e_t'(s) = ise^{ist}$ con $s \in [-r, 0]$.*

***Demostración.*** Sea $x \in X$. Puesto que

$$||\frac{1}{h}(G_{t+h}x - G_tx) - G(e_t'x)|| \leq ||G|| \sup_{s\in[-r,0]} |\frac{1}{h}(e^{is(t+h)} - e^{ist}) - ise^{ist}|||x||,$$

cuando $h \to 0$ tenemos que $G_t'x = G(e_t'x)$. Análogo se obtiene $F_t'x = F(e_t'x)$. ∎

**Definición 2.13.** *El resolvente real de la ecuación (2.1) se define como*

$$\rho(\Delta) = \{s \in \mathbb{R} : -s^2 I + isB - isG_s - F_s + A \in \mathcal{L}([D(A) \cap D(B)], X) \ es\ invertible\}$$

El siguiente teorema es el principal resultado de este capítulo.

**Teorema 2.14.** *Supongamos que $X$ es $B$-convexo y que $(A, i\eta B)$ es coercivo para cada $\eta \in \mathbb{R}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

*(i) La ecuación (2.1) es $C^\alpha$-bien planteada.*

$$(ii)\quad \rho(\Delta) = \mathbb{R}, \quad \sup_{\eta \in \mathbb{R}} ||\eta^2(-\eta^2 I + i\eta B - i\eta G_\eta - F_\eta + A)^{-1}|| < \infty \quad y$$

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}} ||B\eta(-\eta^2 I + i\eta B - i\eta G_\eta - F_\eta + A)^{-1}|| < \infty.$$

***Demostración.*** $(i) \Rightarrow (ii)$. Sea $\eta \in \mathbb{R}$. Afirmamos que $-\eta^2 I + i\eta B - i\eta G_\eta - F_\eta + A$ es inyectivo. En efecto, sea $x \in D(A) \in D(B)$ y $u(t) = e^{i\eta t}x$. Tenemos que

$$F(u_t) = e^{i\eta t} F_\eta x, \quad G(u_t') = i\eta G_\eta x.$$

Si $(-\eta^2 I + i\eta B - i\eta G_\eta - F_\eta + A)x = 0$ entonces $u$ es la solución de la ecuación (2.1) para $f \equiv 0$, de la unicidad se obtiene que $u = 0$ y por lo tanto $x = 0$.

El operador $-\eta^2 I + i\eta B - i\eta G_\eta - F_\eta + A$ es sobreyectivo. En efecto, sea el operador acotado $L : C^\alpha(\mathbb{R}, X) \to C^{\alpha+2}(\mathbb{R}, X)$ definido por $L(f) = u$, donde $u$ es la única solución de la ecuación (2.1) para $f$ dada. Sea $y \in X$.

Consideremos la función $f$ definida por $f(t) = e^{i\eta t}y$ y su imagen $L(f) = u$. Sea $s \in \mathbb{R}$ fijo. Las funciones definidas en $t$, $u(t+s)$, $e^{i\eta s}u(t)$ satisfacen la ecuación (2.1) para $g(t) = e^{i\eta s}f(t)$, por lo tanto, de la unicidad se tiene

$$u(t+s) = e^{i\eta s}u(t),$$

para cada $s, t \in \mathbb{R}$. En particular para $t = 0$ se tiene $u(s) = e^{i\eta s}u(0)$. Sea $x = u(0)$, es claro que $x \in D(A) \cap D(B)$ y además

$$-\eta^2 u(t) + i\eta Bu(t) + Au(t) = i\eta e^{i\eta t}G_\eta x + e^{i\eta t}F_\eta x + e^{i\eta t}y.$$

Si $t = 0$ entonces $(-\eta^2 I + i\eta B - i\eta G_\eta - F_\eta + A)x = y$. Por lo tanto $(-\eta^2 I + i\eta B - i\eta G_\eta - F_\eta + A)$ es biyectivo.

Sabemos que $(i\eta B + A)$ es cerrado, por lo que $(-\eta^2 I + i\eta B - i\eta G_\eta - F_\eta + A)^{-1}$ es acotado. Como $||e^{i\eta t}x||_\alpha = K_\alpha|\eta^\alpha|||x||$, se tiene que para cada $\epsilon > 0$

$$\sup_{|\eta|>\epsilon} ||\eta^2(-\eta^2 I + i\eta B - i\eta G_\eta - F_\eta + A)^{-1}|| < ||L|| \sup_{|\eta|>\epsilon}(1 + \frac{1}{K_\alpha|\eta|^\alpha})$$

por continuidad se tiene que

$$\sup_{\eta\in\mathbb{R}} ||\eta^2(-\eta^2 I + i\eta B - i\eta G_\eta - F_\eta + A)^{-1}|| < \infty.$$

Sea $M(\eta) = (-\eta^2 + i\eta B + A - i\eta G_\eta - F_\eta)^{-1}$, $\eta \in \mathbb{R}$. De la identidad $M(\eta)(-\eta^2 + i\eta B + A - i\eta G_\eta M(\eta) + F_\eta M(\eta) = I$, se tiene

$$(i\eta B + A)M(\eta) = I + \eta^2 M(\eta) + i\eta G_\eta M(\eta) + F_\eta M(\eta).$$

Puesto que $F$ y $G$ son acotados, concluímos que

$$\sup_{\eta\in\mathbb{R}} ||(i\eta B + A)M(\eta)|| < \infty.$$

Además, el par $(A, i\eta B)$ es coercivo, por lo tanto, existe una constante $K > 0$ tal que

$$||\eta BM(\eta)|| + ||AM(\eta)|| \leq K||(i\eta B + A)M(\eta)x||,$$

para todo $x \in X$. Esto concluye la prueba de $(i) \Rightarrow (ii)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Para cada $t \in \mathbb{R}$ definimos $M(t) = -(C(t) - A)^{-1}$, donde

$$C(t) = t^2 I - itB + itG_t + F_t, \; t \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Sea $x \in [D(B)]$, tal que $||x||_{[D(B)]} = 1$. Fijemos $t \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ dado. Del Lema 2.12 existe $\delta > 0$ tal que $||W(t,h)|| < \frac{\epsilon}{2}$, para $|h| < \delta$, donde

$$W(t,h) = \frac{1}{h}[i(t+h)G_{t+h}x + F_{t+h}x - itG_t x - F_t x] - [iG_t x + itG'_t x + F'_t x].$$

Notemos que

$$||\frac{1}{h}(C(t+h)x - C(t)x) - (2tx - iBx + iG_t x + itG'_t x + F'_t x)||$$

$$\leq |\frac{1}{h}((t+h)^2 - t^2) - 2t|||x|| + |\frac{1}{h}((t+h) - t) - 1|||Bx|| + ||W(t,h)||$$

$$< \frac{\epsilon}{2}||x|| + \frac{\epsilon}{2}||Bx|| + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2}||x||_{[D(B)]} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon.$$

Por lo tanto $||\frac{1}{h}(C(t+h) - C(t)) - (2tI - iB + iG_t + itG'_t + F'_t)|| < \epsilon$, para $|h| < \delta$. De aquí tenemos que

$$C'(t) = 2tI - iB + iG_t + itG'_t + F'_t, \; t \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

De lo anterior y de la definición de $G'_t$ y $F'_t$ concluimos que

$$C \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}([D(B)], X)).$$

Afirmamos que $M \in C(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$. En efecto, observemos que $M$ es continua en $t = 0$ como función de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{L}(X)$. Por otra parte, si $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ y $x \in X$, tenemos que:

$$\begin{aligned} ||(M(t+h) - M(t))x|| &\leq ||-M(t+h)||||(C(t) - C(t+h))M(t)x|| \\ &\leq K\frac{1}{(t+h)^2}||(C(t) - C(t+h))M(t)x||. \end{aligned}$$

De esto y del hecho que $C \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}([D(B)], X))$ podemos concluir que $M \in C(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$. Más aún, sabemos que

$$\sup_{|t|>\epsilon} ||M(t)||_{\mathcal{L}(X)} < \infty,$$

puesto que $M \in C(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$, podemos concluir que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} ||M(t)||_{\mathcal{L}(X)} < \infty. \tag{2.6}$$

Afirmamos que $M \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$. En efecto, notemos que para cada $x \in X$

$$\frac{1}{h}(M(t+h) - M(t))x = -M(t+h)\,\frac{1}{h}\,(C(t) - C(t+h))M(t)x.$$

Tomando límite cuando $h \to 0$, de la continuidad de $M$ como función de $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(X)$ se sigue que $M'(t) = -M(t)C'(t)M(t)$, de donde podemos concluir que $M \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$.

Afirmamos que $M \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, [D(A)]))$. En efecto, notemos que para cada $x \in X$

$$||AM(t)x|| \leq ||t^2M(t)x|| + ||C(t)M(t)x|| + ||G_t tM(t)x|| + ||F_tM(t)x|| + ||x||.$$

De la desigualdad anterior y del hecho que $M \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$ podemos concluir que $M \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, [D(A)]))$.

El operador $M$ es un $C^\alpha$-multiplicador. En efecto, para $x \in X$

$$\begin{aligned} ||tM'(t)x|| \leq\ & ||2t^2M(t)M(t)x|| + ||M(t)C(t)M(t)x|| + ||tM(t)G_tM(t)x|| \\ +\ & ||t^2M(t)G_t'M(t)x|| + ||tM(t)F_t'M(t)x|| \end{aligned} \tag{2.7}$$

y

$$\begin{aligned} ||AtM'(t)x|| &= ||AM(t)C'(t)tM(t)x|| = ||(C(t)M(t) - I)C'(t)tM(t)x|| \\ &\leq ||C(t)M(t)C'(t)M(t)x|| + ||C'(t)tM(t)x||. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Como $G_t$, $G_t'$ y $F_t'$ son uniformemente acotados respecto a $t \in \mathbb{R}$, concluimos desde las hipótesis y de la desigualdad (2.7) que $\sup_{t\in\mathbb{R}} ||tM'(t)|| < \infty$.

Reemplazando $C(t)$ y $C'(t)$ por (2.4) y (2.5), respectivamente, en la desigualdad (2.8) y usando la hipótesis $(ii)$, obtenemos que $\sup_{t\in\mathbb{R}} ||AtM'(t)|| < \infty$. Por lo tanto

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} ||M(t)||_{\mathcal{L}(X,[D(A)])} + \sup_{t\in\mathbb{R}} ||tM'(t)||_{\mathcal{L}(X,[D(A)])} < \infty,$$

con $M \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, [D(A)]))$.
Análogamente, podemos probar que $\sup_{t\in\mathbb{R}} ||BtM'(t)|| = \sup_{t\in\mathbb{R}} ||BtM'(t)|| < \infty$ y por el Teorema 2.8 concluir que $M$ es un $C^\alpha$-multiplicador con $M \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, [D(A) \cap D(B)]))$.

Definimos $N(t) = (id \cdot M)(t)$, con $id(t) = it$. Por hipótesis $N \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, [D(A)]))$ y $\sup_{t\in\mathbb{R}} ||tN'(t)|| < \infty$.
Afirmamos que $N$ es un $C^\alpha$-multiplicador. En efecto, notemos que para cada $x \in X$

$$\begin{aligned} ||BtN'(t)|| \leq\ & ||BtM(t)x|| + 2||BtM(t)x||||t^2M(t)x|| \\ & + ||BtM(t)x||||BtM(t)x|| + 2||BtM(t)x||||G_t tM(t)x|| \\ & + ||BtM(t)x||||G_t' t^2 M(t)x|| + ||BtM(t)x||||F_t' tM(t)x||. \end{aligned}$$

Como $\sup_{t\in\mathbb{R}} ||BtM(t)||$ es finito, del Teorema 2.8 obtenemos que $N$ es un $C^\alpha$-multiplicador.

Definimos $P(t) = (id^2 \cdot M)(t)$, $H(t) = F_tM(t)$ y $J(t) = G_tN(t)$. Un argumento similar al anterior permite demostrar que $P, H, J \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X))$ son $C^\alpha$ multiplicadores.

Sea $f \in C^\alpha(\mathbb{R}, X)$. Puesto que $M, N, P, H, J$ son $C^\alpha$ multiplicadores, existen $\bar{u} \in C^\alpha(\mathbb{R}, [D(A) \cap D(B)])$, $v \in C^\alpha(\mathbb{R}, [D(A)])$, $w, h, k \in C^\alpha(\mathbb{R}, X)$ tales que

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{u}(s)(\mathcal{F}\phi)(s)ds = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\phi \cdot M)(s)f(s)ds, \tag{2.9}$$

$$\int_{\mathbb{R}} v(s)(\mathcal{F}\psi)(s)ds = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\psi \cdot N)(s)f(s)ds, \tag{2.10}$$

$$\int_{\mathbb{R}} w(s)(\mathcal{F}\varphi)(s)ds = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\varphi \cdot P)(s)f(s)ds, \tag{2.11}$$

$$\int_{\mathbb{R}} h(s)(\mathcal{F}\gamma)(s)ds = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\gamma \cdot F.M)(s)f(s)ds, \tag{2.12}$$

$$\int_{\mathbb{R}} k(s)(\mathcal{F}\eta)(s)ds = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\eta \cdot G.N)(s)f(s)ds, \tag{2.13}$$

para todo $\phi, \psi, \varphi, \gamma, \eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Notemos que para $x \in X$ y $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ se tiene

$$\mathcal{F}(\phi F.M)(s)x = \int_{\mathbb{R}} e^{-ist}\phi(t)F_tM(t)xdt = \int_{\mathbb{R}} e^{-ist}\phi(t)F(e_tM(t)x)dt \tag{2.14}$$

donde $\int_{\mathbb{R}} e^{-ist}\phi(t)e_t M(t)xdt \in C([-r,0],X)$. Además, para todo $\theta \in [-r,0]$ tenemos que

$$|| \int_{\mathbb{R}} e^{-ist}\phi(t)e_t(\theta)M(t)xdt||_X \leq \int_{\mathbb{R}} |\phi(t)|||M(t)x||_X dt.$$

Puesto que $F$ es acotado, podemos concluir que

$$\mathcal{F}(\phi \cdot F.M)(s)x = F(\mathcal{F}(\phi \cdot e.M)(s)x). \tag{2.15}$$

Observemos que para cada $\theta \in [-r,0]$ fijo tenemos que $e.\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Usando (2.9) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{u}_s(\mathcal{F}\phi)(s)ds = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(e.\phi \cdot M)(s)f(s).ds$$

Como la función $\theta \to \int_{\mathbb{R}} \bar{u}_s(\mathcal{F}\phi)(s)ds \in C([-r,0],X)$, de la continuidad de $F$, (2.9) y (2.15) se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\phi \cdot F.M)(s)f(s)ds = \int_{\mathbb{R}} F\mathcal{F}(\phi \cdot e.M)(s)f(s)ds = \int_{\mathbb{R}} F\bar{u}_s(\mathcal{F}\phi)(s)ds \tag{2.16}$$

para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Más aún, de (2.12) y (2.16) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} h(s)(\mathcal{F}\phi)(s)ds = \int_{\mathbb{R}} F\bar{u}_s(\mathcal{F}\phi)(s)ds$$

para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Concluimos que existe $x_1 \in X$ tal que $h(t) = F\bar{u}_t + x_1$, de donde se sigue que $F\bar{u}. \in C^\alpha(\mathbb{R},X)$.
Análogamente, de (2.10) concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}} v_s(\mathcal{F}\psi)(s)ds = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(e.\psi \cdot N)(s)ds.$$

Procediendo en forma similar a como se obtuvo (2.15) y (2.16), de la continuidad de $G$ se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\psi \cdot G.N)(s)f(s)ds = \int_{\mathbb{R}} G\mathcal{F}(\psi \cdot e.N)(s)f(s)ds = \int_{\mathbb{R}} Gv_s(\mathcal{F}\psi)(s)ds \tag{2.17}$$

para todo $\psi \in C_c^\infty$. De (2.13) se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}} k(s)(\mathcal{F}\psi)(s)ds = \int_{\mathbb{R}} Gv_s(F\psi)(s)ds$$

para todo $\psi \in C_c^\infty$. Por lo tanto, existe $x_2 \in X$ tal que $k(t) = Gv_t + x_2$, de donde se concluye que $Gv. \in C^\alpha(\mathbb{R},X)$.
Notemos que $\bar{u}, v \in C^\alpha(\mathbb{R},[D(B)])$. Tomamos $\phi = id \cdot \psi$ en (2.9), obteniendo de (2.10)

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{u}(s)\mathcal{F}(id \cdot \psi)(s)ds = \int_{\mathbb{R}} v(s)(\mathcal{F}\psi)(s)ds \tag{2.18}$$

luego, de [4, Lema 6.2] obtenemos que

$$\bar{u} \in C^{\alpha+1}(\mathbb{R}, [D(B)]) \text{ y } \bar{u} = v + y_1 \tag{2.19}$$

para algún $y_1 \in [D(B)]$.
Tomando $\psi = id \cdot \varphi$ en (2.10), de (2.11) se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}} v(s)\mathcal{F}(id \cdot \varphi)(s)ds = \int_{\mathbb{R}} w(s)(\mathcal{F}\varphi)(s)ds. \tag{2.20}$$

De [4, Lema 6.2] se tiene

$$v \in C^{\alpha+1}(\mathbb{R}, X) \text{ y } v' = w + y_1 \tag{2.21}$$

para algún $y_2 \in X$. De (2.19) y (2.21) obtenemos que $\bar{u} \in C^{\alpha+2}(\mathbb{R}, X)$ y $\bar{u}'' = v' = w + y_2$. Puesto que $(id^2I + idB - idG. - F. + A)M = I$ tenemos que

$$id^2M = I - idBM + idG.M + F.M - AM \tag{2.22}$$

Reemplazando (2.22) en (2.11) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} w(s)(\mathcal{F}\phi)(s)ds = & \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\phi)(s)f(s)ds - \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\phi BN)(s)f(s)ds + \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}\phi G.N)(s)f(s)ds \\ + & \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}\phi F.M)(s)f(s)ds - \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\phi AM)(s)ds \end{aligned} \tag{2.23}$$

para todo $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$.

Como $\bar{u} \in D(A)$, $v(t) \in D(B)$, $\mathcal{F}(\phi \cdot M)(s)x \in D(A)$ y $\mathcal{F}(\phi N)(s)x \in D(B)$ para todo $x \in X$, usando el hecho que $A$ y $B$ son cerrados, reemplazando en (2.23) las igualdades (2.9),(2.10),(2.16) y (2.17) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} w(s)(\mathcal{F}\phi)(s)ds = & \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\phi)(s)f(s)ds - \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}Bv(s)(\phi)(s)ds + \int_{\mathbb{R}} Gv_s(\mathcal{F}\phi)(s)ds \\ + & \int_{\mathbb{R}} F\bar{u}_s(\mathcal{F}\phi)(s)ds - \int_{\mathbb{R}} A\bar{u}_s(\mathcal{F}\phi)(s)ds \end{aligned} \tag{2.24}$$

para todo $\phi \in C_c^{\infty}$. Por el Lema 2.2 se tiene

$$w(t) = f(t) - Bv(t) + Gv_t + F\bar{u}_t + F\bar{u}_t - A\bar{u(t)} + y_3, \; t \in \mathbb{R}, \tag{2.25}$$

para algún $y_3 \in X$. Como $v \in C^{\alpha}(\mathbb{R}, [D(B)])$, se sigue que $Bv \in C^{\alpha}(\mathbb{R}, X)$. En particular, de (2.25) obtenemos $A\bar{u} \in C^{\alpha}(\mathbb{R}, X)$. Por lo tanto,

$$\bar{u}''(t) - y_2 = f(t) - B(\bar{u}'(t) - y_1) + G(\bar{u}_t{}' - y_1) + F\bar{u}_t - A\bar{u}(t) + y_3.$$

De donde

$$\bar{u}''(t) = f(t) - B\bar{u}'(t) + G\bar{u}_t' + F\bar{u}_t - A\bar{u}(t) + y$$

para $y = y_2 + y_3 + By_1 - Gy_1$.

Escribimos $x = (F - A)^{-1}y$. Por hipótesis $\rho(\Delta) = \mathbb{R}$, luego $x \in D(A) \cap D(B)$. Sea $u(t) = \bar{u}(t) + x$. Notemos que $u(t) \in C^{\alpha+2}(\mathbb{R}, X) \cap C^{\alpha+1}(\mathbb{R}, [D(B)]) \cap C^{\alpha}(\mathbb{R}, [D(A)])$ y $u$ satisface la ecuación (2.1). Hemos probado la existencia de solución de la ecuación (2.1). Ahora probaremos la unicidad. Supongamos que

$$u''(t) + Bu'(t) + Au(t) = Gu_t' + Fu_t, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.26}$$

con $u \in C^{\alpha+2}(\mathbb{R}, X) \cap C^{\alpha+1}(\mathbb{R}, [D(B)]) \cap C^{\alpha}(\mathbb{R}, [D(A)])$.

Afirmamos que $\hat{u}_.(\lambda), \hat{u}_.'(\lambda) \in C([-r, 0], X)$ para $Re(\lambda) \neq 0$. En efecto, si $Re(\lambda) > 0$ entonces

$$||e^{-\lambda t}u_t||_\infty = \sup_{\theta \in [-r,0]} ||e^{\lambda t}u(t+\theta)||_X \leq e^{-Re(\lambda)}(1 + (|t| + r)^\alpha).$$

Como $e^{-Re(\lambda)}(1+(|t|+r)^\alpha) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ por el teorema de convergencia dominada obtenemos que $\hat{u}_.'(\lambda) \in C([-r, 0], X)$ para $Re(\lambda) > 0$. Análogamente se sigue el resultado para $Re(\lambda) < 0$. De similar forma se obtiene la afirmación para $\hat{u}_.'(\lambda)$.

Para $Re(\lambda) \neq 0$, aplicando la transformada de Carleman obtenemos

$$\hat{u}_.(\lambda) = g\hat{u}(\lambda) + gh \text{ y } \hat{u}_.'(\lambda) = g\lambda\hat{u}_.(\lambda) + gh\lambda - u_o \tag{2.27}$$

donde $g(\theta) = e^{\lambda}\theta$, $u_0(\theta) = u(\theta)$ y $h(\theta) = \int_\theta^0 e^{-\lambda t}u(t)dt$, con $\theta \in [-r, 0]$. Notemos que $gh \in C([-r, 0], X)$. Puesto que $F$ y $G$ son operadores acotados, podemos obtener a partir de (2.27) que

$$\widehat{Fu_.}(\lambda) = F\hat{u}_.(\lambda) = Fg\hat{u} + Fgh \tag{2.28}$$

y

$$\widehat{Gu'_.}(\lambda) = G\hat{u}_.'(\lambda) = Gg\lambda\hat{u} + Fg\lambda h - Gu_0 \tag{2.29}$$

para $Re(\lambda) \neq 0$.
Puesto que $\hat{u}''(\lambda) = \lambda^2\hat{u}(\lambda) - \lambda u(0) - u'(0)$ y $\hat{u}'(\lambda) = \lambda\hat{u}(\lambda) - u(0)$ para $Re(\lambda) \neq 0$, tenemos que $\hat{u}(\lambda) \in D(A) \cap D(B)$ y

$$\hat{u}''(\lambda) + \widehat{Bu'}(\lambda) + \widehat{Au}(\lambda) = \widehat{Gu'_.}(\lambda) + \widehat{Fu_.}(\lambda) \text{ para } Re(\lambda) \neq 0.$$

Como $A$ y $B$ son operadores cerrados, a partir de (2.28) y (2.29) se sigue que

$$(\lambda^2 + \lambda B + \lambda Gg - Fg + A)\hat{u}(\lambda) = \lambda Ggh + Fgh - Gu_o + \lambda u(0) + Bu(0) - u'(0) \tag{2.30}$$

para todo $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$. Sabemos que $\rho(\Delta) = \mathbb{R}$, por lo que el espectro de Carleman de $u$ es vacío y por [1, Teorema 4.8.2] tenemos que $u \equiv 0$. De lo anterior se sigue que si existen funciones $u$ y $v$ tales que pertenecen a $C^{\alpha}(\mathbb{R},[D(A)]) \cap C^{\alpha+1}(\mathbb{R},[D(B)]) \cap C^{\alpha+2}(\mathbb{R},X)$ que satisfacen la ecuación (2.1) casi en todas partes, entonces $u - v$ satisface la ecuación (2.26), por lo tanto $u = v$. ∎

**Observación 2.15.** *Notemos que la condición de coercividad sobre el par $(A, i\eta B)$ solo se usó en la implicación $(i) \Rightarrow (ii)$.*

# Capítulo 3

# Solución Periódica de una Ecuación de Segundo Orden con Retardo

## 3.1 Introducción

En este capítulo, estamos interesados en probar existencia, unicidad y regularidad de solución periódica de la ecuación de segundo orden con retardo

$$u''(t) = Au(t) + Fu_t + Gu'_t + f(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{3.1}$$

Aquí $X$ es un espacio de Banach, $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operador lineal, cerrado, que no necesariamente genera un semigrupo, $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$ con $1 < p < \infty$. Para algún $N \in \mathbb{N}$, sea $r := 2\pi N$, los operadores de retardo $F$ y $G$ son acotados y pertenecen a $\mathcal{L}(L^p[-r, 0], X)$. Las funciones $u_t, u'_t : [-r, 0] \to X$ son definidas por $u_t(\cdot) = u(t + \cdot)$, $u'_t(\cdot) = u'(t + \cdot)$. Indicamos por $\mathbb{T}$ al grupo cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. El dato $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$.

En las sección 3.2 se presentan algunos preliminares que involucran nociones de R-acotamiento y espacios $UMD$. En la sección 3.3 se indican los teoremas relacionados con multiplicadores de Fourier en espacios $L^p$-periódicos, que son fundamentales para obtener nuestros resultados. Este trabajo fue desarrollado por el autor en forma independiente y paralela al trabajo de Bu, [8], y motivado por el trabajo en [20].

## 3.2 Familias R-acotadas y Espacios UMD

La noción de R-acotamiento es de gran importancia al momento de probar que una familia de operadores es multiplicador de Fourier, ver Teorema 3.11 .

Para cada $j \in \mathbb{N}$, denotaremos por $r_j$ a la $j$-ésima función de Rademacher en $[0, 1]$, esto es $r_j(t) = sgn(\sin(2^j \pi t))$. Para cada $x \in X$ escribimos $r_j x$ para denotar la función

$t \to r_j(t)x$. Usaremos la notación $L_p(a,b;X)$ para el espacio para todas las funciones que toman valores en $X$ e Bochner-Lebesgue integrables en $[a,b]$.

**Definición 3.1.** *Una familia $T \subset \mathcal{L}(X,Y)$ se dice R-acotada si existe una constante $c_q \geq 0$ tal que*

$$||\sum_{j=1}^{n} r_j T j x_j||_{L^q(0,1;Y)} \leq c_q || \sum_{j=1}^{n} r_j x_j||_{L^q(0,1;X)}, \tag{3.2}$$

*para todo $T_1, T_2, \cdots T_n \in T$, $x_1, x_1, \cdots, x_n \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, donde $1 \leq q < \infty$. Denotamos por $R_q(T)$ a la menor constante $c_q$ que satisface (3.2).*

**Teorema 3.2.** *Para cada $1 < p, q < \infty$ existe una constante finita $K_{p,q}$ tal que*

$$||\sum_{j=1}^{n} r_j x_j||_{L^q(0,1;Y)} \leq K_{p,q} || \sum_{j=1}^{n} r_j x_j||_{L^p(0,1;X)}, \tag{3.3}$$

*para todo $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ y $n \in \mathbb{N}$.*

La desigualdad (3.3) es conocida como la desigualdad de Khintchine-Kahane. Para la demostración del teorema ver [13].

**Observación 3.3.** *1. Por la desigualdad de Khintchine-Kahane, la noción de R-acotamiento es independiente de $q$ en el siguente sentido: $T \subset \mathcal{L}(X,Y)$ satisface la condición (3.2) para todo $q \in [1,\infty)$ o bien no satisface (3.2) para todo $q \in [1,\infty)$.*

*2. Es claro de la definición, que toda familia R-acotada es acotada. De hecho es uniformente acotada pues*

$$\sup_{S \in T} ||S||_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \inf_{p \in (0,\infty)} R_p T$$

*El reciproco en general no es cierto, salvo para espacios isomorfos a espacios de Hilbert, ver [2].*

En lo que sigue, se presentan algunas propiedades de familias R-acotadas, que utilizaremos en el desarrollo de la Sección 3.4. Para detalles de su demostración y más información al respecto, ver [10].

**Proposición 3.4.** (i) *Un subconjunto de un conjunto R-acotado es R-acotado.*

(ii) *Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{S}$ familias R-acotadas en $\mathcal{L}(X,Y)$. Entonces*

$$\{T + S : T \in \mathcal{T}, S \in \mathcal{S}\}$$

*es R-acotada en $\mathcal{L}(X,Y)$. Además $R_q(\mathcal{T} + \mathcal{S}) \leq R_q(\mathcal{T}) + R_q(\mathcal{S})$.*

(iii) *Sean $X, Y, Z$. Sean $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ familias R-acotadas en $\mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathcal{L}(Y,Z)$ respectivamente. Entonces*

$$\{ST : T \in \mathcal{T}, S \in \mathcal{S}\}$$

*es R-acotada en $\mathcal{L}(X,Z)$. Además $R_q(\mathcal{S}\mathcal{T}) \leq R_q(\mathcal{T})R_q(\mathcal{S})$.*

La definición de un espacio de Banach con "unconditional martingale difference property" o UMD fue introducida por D.L. Burkholder in [9].

**Definición 3.5.** *Un espacio de Banach $X$ se dice UMD si para cada $p \in [1,\infty)$ existe una constante $c_p$ tal que para cualquier sucesión $(f_n)_{n\geq 0} \subset L^p(\Omega,\Sigma,\mu;X)$ y cualquier elección de signos $(\epsilon_n)_{n\geq 0} \subset \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ y cualquier $N \in \mathbb{N}$ se satisface:*

$$||f_0 + \sum_{n=1}^{N} \epsilon_n(f_n - f_{n-1})||_{L^p(\Omega,\Sigma,\mu;X)} \leq c_p||f_N||_{L^p(\Omega,\Sigma,\mu;X)} \tag{3.4}$$

Los siguientes son ejemplos de espacios UMD, para la demostración vea [13] y [10].

**Ejemplo 3.6.** *Los espacios UMD incluyen, espacios de Hilbert, espacios de Sobolev $W_p^s(\Omega)$, $1 < p < \infty$, espacios de Lebesgue $L^p(\Omega,\mu)$, $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega,\mu;X)$, $1 < p < \infty$, siempre que $X$ sea UMD.*

**Ejemplo 3.7.** *Todo subespacio cerrado de un espacio UMD es un espacio UMD.*

**Ejemplo 3.8.** *Todo espacio UMD es reflexivo.*

**Ejemplo 3.9.** *Un espacio de Banach $X$ es un espacio UMD si y solo si su dual $X^*$ es un espacio UMD.*

## 3.3 Multiplicadores de Fourier y espacios $L^p$- periódicos

Denotamos por $\mathbb{T}$ el grupo cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Existe una clara identificación entre las funciones definidas en $\mathbb{T}$ y las funciones $2\pi$-periódicas en $\mathbb{R}$. Dado $1 \leq p < \infty$, denotamos por $L^p(\mathbb{T},X)$ al espacio de las funciones Bochner medibles, que toman valores en $X$ y que son $p$-integrables en $\mathbb{T}$.

Para una función $f \in L^1(\mathbb{T},X)$ y $k \in \mathbb{Z}$, denotamos por $\hat{f}(k)$ al $k$-ésimo coeficiente de Fourier de $f$ dado por

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t)dt\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sea $f_\tau := f(t+\tau)$, $\tau \in \mathbb{T}$, entonces se tiene que $\hat{f_\tau}(k) = e^{ikt}\hat{f}(k)$. Si $f \in L^p(\mathbb{T},X)$ entonces por el teorema de Féjer, se tiene

$$f = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)$$

en $L^p(\mathbb{T},X)$, donde

$$\sigma_n(f) := \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m} e_k\hat{f}(k),$$

con $e_k(t) := e^{ikt}$.
Definimos ahora el concepto de $L^p$-multiplicador.

**Definición 3.10.** *Sea $1 \leq p < \infty$. Diremos que la familia de operadores $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ es un $L^p$-multiplicador si para cada $f \in L^p(\mathbb{T},X)$ existe $g \in L^p(\mathbb{T},Y)$ tal que*

$$\hat{g}(k) = M_k \hat{f}(k)$$

*para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

El siguente teorema, probado en [2], tiene un papel fundamental en nuestros resultados.

**Teorema 3.11.** *Sean $X, Y$ espacios UMD. Sea $1 < p < \infty$. Sea $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$. Si $\{M_k : k \in \mathbb{Z}\}$ es R-acotado y $\{k(M_{k+1} - M_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es R-acotado, entonces $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es un $L^p$-multiplicador.*

## 3.4 Regularidad Maximal en $L^p(\mathbb{T}, X)$

Para definir la noción de solución fuerte de la ecuación (3.1) consideramos el conjunto

$$H^{1,p}(\mathbb{T},X) = \{u \in L^p(\mathbb{T},X) : \text{existe } v \in L^p(\mathbb{T},X), \hat{v}(k) = ik\hat{u}(k)\}$$

que con la norma $|||u||| := ||u||_p + ||u'||_p$ es un espacio de Banach.

Por [2, Lema 2.1] se tiene que para cada $u \in H^{1,p}(\mathbb{T},X)$ existe una única función $v \in H^{1,p}(\mathbb{T},X)$ tal que

$$u(t) = u(0) + \int_0^t v(s)ds, \quad c.t.p\ t \in [0, 2\pi)$$

y $u(0) = u(2\pi)$, escribimos $u' = v$. De la misma forma, definimos el espacio

$$H^{2,p}(\mathbb{T},X) = \{u \in H^{1,p}(\mathbb{T},X) : u' \in H^{1,p}(\mathbb{T},X)\}.$$

Es claro que $u \in H^{2,p}(\mathbb{T},X)$, si y sólo si, existe $v \in L^p(\mathbb{T},X)$ tal que $\hat{v}(k) = -k^2\hat{u}(k)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. En este caso $v = (u')' = u''$.

Ahora damos nuestra definición de solución fuerte de la ecuación (3.1).

**Definición 3.12.** *Diremos que una función $u$ es una solución fuerte de la ecuación (3.1) si $u \in L^p(\mathbb{T},[D(A)]) \cap H^{2,p}(\mathbb{T},X)$ y satisface (3.1) casi en todas partes, $t \in [0, 2\pi)$.*

En el espacio $L^p(\mathbb{T},[D(A)]) \cap H^{2,p}(\mathbb{T},X)$ consideramos la norma

$$|||u||| := ||u||_p + ||u'||_p + ||u''||_p + ||Au||.$$

La definición de los siguientes operadores nos será de utilidad en el tratamiento del retardo en la ecuación (3.1).

**Definición 3.13.** *Sea $e_\lambda(t) := e^{i\lambda t}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Defimos los operadores $\{F_\lambda\}, \{G_\lambda\} \subseteq \mathcal{L}(X)$ como $F_\lambda x = F(e_\lambda x)$, $G_\lambda x = G(e_\lambda x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in X$.*

Las siguientes proposiciones serán de utilidad para probar el resultado principal de esta sección.

**Proposición 3.14.** *Sea* $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{L}(X)$. *Si* $\{kM_k : k \in \mathbb{Z}\}$ *es R-acotado entonces* $\{M_k : k \in \mathbb{Z}\}$ *es R-acotado.*

***Demostración.*** La demostración es directa del principio de contracción de Kahane, ver [14, Corolario 3.12]. ∎

**Proposición 3.15.** $\{F_k : k \in \mathbb{Z}\}$ *y* $\{G_k : k \in \mathbb{Z}\}$ *son R-acotados.*

***Demostración.*** Para la prueba, ver [20, Proposición 3.2]. ∎

**Definición 3.16.** *Se define la resolvente real de la ecuación (3.1) como*

$$\begin{aligned}\rho(\Delta) &= \{s \in R : -s^2I - F_s - isG_s - A \in \mathcal{L}([D(A)], X) \text{ es invertible} \\ &\quad\;\; \text{y } (-s^2I - F_s - isG_s - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X, [D(A)])\}\end{aligned}$$

El siguiente Teorema es el resultado principal de la sección.

**Teorema 3.17.** *Sean* $X$ *un espacio UMD,* $1 < p < \infty$ *y* $A$ *un operador lineal cerrado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

*(i) Dada* $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$ *existe una única solución fuerte de la ecuación (3.1.)*

*(ii)* $\mathbb{Z} \subset \rho(\Delta)$ *y* $\{-k^2(-k^2I - F_k - ikG_k - A)^{-1} : k \in \mathbb{Z}\}$ *es R-acotado.*

***Demostración.*** $(i) \Rightarrow (ii)$. Sea $k \in \mathbb{Z}$ fijo. Probaremos que $(-k^2I - F_k - ikG_k - A)$ es inyectivo. Sea $x \in D(A)$ con $(-k^2I - F_k - ikG_k - A)x = 0$. Para $t \in [0, 2\pi]$, consideremos $u(t) = e^{ikt}x$. Un cálculo directo muestra que

$$-k^2e^{ikt}x - e^{ikt}Ax - e^{ikt}F_kx - e^{ikt}ikG_kx = 0,$$

por lo que $u$ es una solución fuerte de la ecuación (3.1), para $f \equiv 0$. De la unicidad se tiene que $u = 0$ y por lo tanto $x = 0$.

Probaremos que $(-k^2I - F_k - ikG_k - A)$ es sobreyectivo. En efecto, sean $y \in X$ y $f$ la función definida por $f(t) = e^{ikt}y$ con $t \in [0, 2\pi]$. Para tal elección de $f$, sea $u$ la única solución fuerte de la ecuación (3.1). Como A es cerrado y $u(t) \in D(A)$, de [2, Lema 3.1], se sigue que $\hat{u}(k) \in D(A)$ y $\widehat{Au(t)}(k) = A\hat{u}(k)$.

Puesto que $F$ y $G$ son operadores acotados, tomando transformada de Fourier en la ecuación (3.1) se tiene que

$$-k^2\hat{u}(k) = A\hat{u}(k) + F_k\hat{u}(k) + ikG_k\hat{u}(k) + y,$$

es decir, $(-k^2I - F_k - ikG_k - A)\hat{u}(k) = y$, por lo tanto, $(-k^2I - F_k - ikG_k - A)$ es una biyección. Por el teorema de la aplicacion abierta se sigue que $(-k^2I - F_k - ikG_k - A)^{-1} \in$

$\mathcal{L}(X, [D(A)])$, luego $\mathbb{Z} \subseteq \rho(\Delta)$.

Sea $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$ dado. Sabemos que existe una única función $u \in L^p(\mathbb{T}, [D(A)]) \cap H^{2,p}(\mathbb{T}, X)$, que es solución fuerte de la ecuación (3.1). Tomando transformada de Fourier en la ecuación (3.1) se tiene que

$$-k^2\hat{u}(k) = A\hat{u}(k) + F_k\hat{u}(k) + ikG_k\hat{u}(k) + \hat{f}(k),$$

de donde

$$\hat{u}(k) = (-k^2 I - F_k - ikG_k - A)^{-1}\hat{f}(k).$$

Como $u \in H^{2,p}(\mathbb{T}, X)$, existe $v \in L^p(\mathbb{T}, X)$ tal que $\hat{v}(k) = -k^2\hat{u}(k)$. Por lo tanto

$$\hat{v}(k) = -k^2(-k^2 I - F_k - ikG_k - A)^{-1}\hat{f}(k).$$

Concluimos que $-k^2(-k^2 I - F_k - ikG_k - A)^{-1}$ es un $L^p$-multiplicador. De [2, Proposición 1.11] se sigue que $\{-k^2(-k^2 I - F_k - ikG_k - A)^{-1} : k \in \mathbb{Z}\}$ es R-acotado. Esto concluye la prueba.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, definamos $M_k = -k^2(C_k - A)^{-1}$, con $C_k = -k^2 I - F_k - ikG_k$. Sea $N_k = (C_k - A)^{-1}$. Afirmamos que $(M_k)$ es un $L^p$-multiplicador. En efecto, notemos que:

$$\begin{aligned}
k[M_{k+1} - M_k] &= kN_{k+1}[-(k+1)^2 I + k^2(C_{k+1} - A)N_k] \\
&= kN_{k+1}[-(k+1)^2(C_k - A) + k^2(C_{k+1} - A)]N_k \\
&= kN_{k+1}[k^2(C_{k+1} - C_k) - (2k+1)C_k + (2k+1)A]N_k. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Además,

$$C_{k+1} - C_k = -(2k+1)I + (F_k - F_{k+1} + ik(G_k - G_{k+1}) - iG_{k+1}) \qquad (3.6)$$

y

$$AN_k = -k^2 N_k - F_k N_k - ikG_k N_k - I \qquad (3.7)$$

Reemplazando (3.6) y (3.7) en la igualdad (3.5) se tiene

$$\begin{aligned}
k[M_{k+1} - M_k] &= kN_{k+1}[-k^2(2k+1)N_k + k^2(F_k - F_{k+1})N_k \\
&+ k^2 ik(G_k - G_{k+1})N_k - k^2 iG_{k+1}N_k \\
&+ (2k+1)k^2 N_k - (2k+1)F_k N_k - (2k+1)ikG_k N_k \\
&- k^2(2k+1)N_k - (2k+1)F_k N_k - (2k+1)ikG_k N_k \\
&- (2k+1)N_k].
\end{aligned}$$

Desarrollando la identidad anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} k[M_{k+1} - M_k] &= -kN_{k+1}k^2(2k+1)N_k + kN_{k+1}k^2(F_k - F_{k+1})N_k \\ &+ kN_{k+1}k^2 ik(G_k - G_{k+1})N_k - kN_{k+1}k^2 iG_{k+1}N_k \\ &- 2kN_{k+1}(2k+1)F_kN_k - 2kN_{k+1}(2k+1)ikG_kN_k \\ &- kN_{k+1}(2k+1)N_k. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Probaremos que cada término de la identidad (3.8) define un conjunto de operadores R-acotado. Afirmamos que $\{-kN_{k+1}k^2(2k+1)N_k : k \in \mathbb{Z}\}$ es R-acotado. En efecto, note que

$$kN_{k+1} = (k+1)N_{k+1} - N_{k+1},$$

de Proposición 3.14 y de Proposición 3.4 partes 2 y 3, se sigue que

$$\{kN_{k+1} : k \in \mathbb{Z}\} \text{ es R-acotado.} \tag{3.9}$$

Análogamente, de la identidad:

$$k^2N_{k+1} = (k+1)^2N_{k+1} - 2kN_{k+1} - N_{k+1},$$

de la Proposición 3.14 y de Proposición 3.4 partes (ii) y (iii), se tiene

$$\{k^2N_{k+1} : k \in \mathbb{Z}\} \text{ es R-acotado.} \tag{3.10}$$

De la identidad

$$-kN_{k+1}k^2(2k+1)N_k = (2k^2N_{k+1} + kN_{k+1})M_k$$

y por Proposición 3.4 partes (ii) y (iii), concluimos que $\{-kN_{k+1}k^2(2k+1)N_k : k \in \mathbb{Z}\}$ es R-acotado.

Procedemos de similar forma para los restantes términos de la igualdad (3.8). Escribimos

$$kN_{k+1}k^2(F_k - F_{k+1})N_k = (-kN_{k+1})(F_k - F_{k+1})M_k$$

$$kN_{k+1}k^2 ik(G_k - G_{k+1})N_k = (-k^2N_{k+1})i(G_k - G_{k+1})M_k$$

$$kN_{k+1}k^2 iG_{k+1}N_k = (-kN_{k+1})iG_{k+1}M_k$$

$$-2kN_{k+1}(2k+1)F_kN_k = (-2kN_{k+1})F_k((2k+1)N_k)$$

$$-2kN_{k+1}(2k+1)ikG_kN_k = (2(2k+1)N_{k+1})iG_kM_k$$

$$-kN_{k+1}(2k+1)N_k = N_{k+1}(2M_k - kN_k),$$

y usando (3.9),(3.10), las Proposiciones 3.14, 3.15, y la Proposición 3.4 pates 2 y 3 se sigue que las familias $\{kN_{k+1}k^2(F_k - F_{k+1})N_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{kN_{k+1}k^2ik(G_k - G_{k+1})N_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{kN_{k+1}k^2iG_{k+1}N_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{kN_{k+1}(2k+1)F_kN_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{kN_{k+1}(2k+1)ikG_kN_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{kN_{k+1}(2k+1)ikG_kN_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ son R-acotadas.

Finalmente, como suma de familias R-acotadas es R-acotada, se concluye que $\{k(M_{k+1} - M_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es R-acotada. Del Teorema 3.11 se sigue que $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es un $L^p$-multiplicador.

Afirmamos que $(kN_k)$ es un $L^p$-multiplicador. En efecto, por la Proposición 3.14 se obtiene $\{kN_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es R-acotada. Además $k((k+1)N_{k+1} - kN_k) = k^2N_{k+1} + kN_{k+1} - k^2N_k$. Por lo tanto, desde la hipótesis, de (3.9), de (3.10) y de la Proposición 3.4 partes (ii) y (iii), se sigue que $\{k((k+1)N_{k+1} - kN_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es R-acotada. Por Teorema 3.11 obtenemos que $(kN_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es un $L^p$-multiplicador.

Sea $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$ dado. De [2, Lema 2.2], existe $u \in H^{1,p}(\mathbb{T}, X)$ tal que

$$\hat{u}(k) = N_k\hat{f}(k). \tag{3.11}$$

Como $u \in H^{1,p}(\mathbb{T}, X)$, existe $u' \in L^p(\mathbb{T}, X)$ tal que $\widehat{u'} = ik\hat{u}(k)$. Probaremos que $u' \in H^{1,p}(\mathbb{T}, X)$. En efecto, como $(M_k)$ es un $L^p$-multiplicador existe $m \in L^p(\mathbb{T}, X)$ con

$$\hat{m}(k) = -k^2N_k\hat{f}(k). \tag{3.12}$$

De (3.11) y (3.12) se sigue que $\hat{m}(k) = ik\hat{u}'(k)$. Por lo tanto $u' \in H^{1,p}(\mathbb{T}, X)$. De aqui se obtiene $u \in H^{2,p}(\mathbb{T}, X)$. De [2, lema 2.1] se tiene que $m = u''$, y de (3.11) y (3.12) se tiene la igualdad

$$-k^2\hat{u}(k) = \hat{u''}(k) = A\hat{u}(k) + F_k\hat{u}(k) + ikG_k\hat{u}(k) + \hat{f}(k). \tag{3.13}$$

A partir de (3.11) es claro que, para todo $k \in \mathbb{Z}$, $\hat{u}(k) \in D(A)$, usando [2, lema 3.1], se obtiene que $u(t) \in D(A)$.
Afirmamos que $Au \in L^p(\mathbb{T}, X)$. En efecto, de (3.11) se sigue que

$$A\hat{u}(k) = -k^2N_k\hat{f}(k) - F_k\hat{N}(k)\hat{f}(k) - iG_kN_k\hat{f}(k) - \hat{f}(k),$$

como $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$ y $(-k^2N_k)$ es un $L^p$-multiplicador basta ver que $(F_kN_k)$ y $(ikG_kN_k)$ son $L^p$-multiplicadores. La familia $\{F_kN_k : k \in \mathbb{Z}\}$ es R-acotada, pues $F_k$ y $N_k$ lo son, y la igualdad

$$k(F_{k+1}N_{k+1} - F_kN_k) = F_{k+1}(kN_{k+1}) - F_k(kN_{k+1})$$

muestra que $\{k(F_{k+1}N_{k+1} - F_kN_k : k \in \mathbb{Z}\}$ es R-acotada, acorde al Teorema 3.11 se sigue que $(F_kN_k)$ es un $L^p$-multiplicador.

De la misma forma, sabemos que $\{iG_k(kN_k)\}$ es una familia R-acotada, ya que $G_k$ y $kN_k$ lo son, además la identidad

$$k(i(k+1)G_{k+1}N_{k+1} - ikG_kN_k) = iG_{k+1}(k^2N_{k+1} + kN_{k+1}) - iG_k(k^2N_k)$$

prueba que $\{k(i(k+1)G_{k+1}N_{k+1} - ikG_kN_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es R-acotada. Del Teorema 3.11 se concluye que $(ikG_kN_k)$ es un $L^p$-multiplicador. Por lo tanto $Au \in L^p(\mathbb{T}, X)$.

Notemos que, del teorema de Fejer en $L^p([-r,0], X)$, se tiene que

$$u_t'(\theta) = u'(t+\theta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikt}e^{ik\theta}ik\hat{u}(k).$$

Por lo tanto en $L^p(\mathbb{T}, Y)$, con $Y = L^p([-r,0], X)$ , se tiene

$$u_t' = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikt}ike_k\hat{u}(k).$$

Como $G$ es un operador lineal y acotado obtenemos

$$Gu_t' = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikt}ikGe_k\hat{u}(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikt}ikG_k\hat{u}(k).$$

Análogamente,

$$Fu_t = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikt}Fe_k\hat{u}(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikt}F_k\hat{u}(k).$$

De lo anterior, de (3.13) y del Teorema de unicidad de coeficientes de Fourier se tiene que

$$u''(t) = Au(t) + Fu_t + Gu_t' + f(t) c.t.p. \quad t \in [0, 2\pi].$$

De esta forma $u \in L^p(\mathbb{T}, [D(A)]) \cap H^{2,p}(\mathbb{T}, X)$ y satisface la ecuación (3.1) c.t.p , es decir, $u$ es una solución fuerte de la ecuación (3.1). Para probar la unicidad, sean $u$ y $v$ son dos soluciones fuertes de la ecuación (3.1). Para $u$ y $v$, tomando transformada de Fourier en la ecuación (3.1), y luego restando, se tiene

$$-k^2(\hat{u}(k) - \hat{v}(k)) = A(\hat{u}(k) - \hat{v}(k)) + F_k() + ikG_k(\hat{u}(k) - \hat{v}(k)), \text{ para cada } k \in \mathbb{Z},$$

de donde $(-k^2I - A - F_k - ikG_k)(\hat{u}(k) - \hat{v}(k)) = 0$. Como $k \in \rho(\Delta)$ concluimos que $(\hat{u}(k) - \hat{v}(k)) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. De aquí $u(t) = v(t)$ c.t.p para $t \in [0, 2\pi]$. ■

# Bibliografía


[1] W. Arendt, C. Batty, M. Hieber, F. Neubrander. *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems.* Monographs in Mathematics, vol 96., Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2001.

[2] W. Arendt, S. Bu. *The operator-valued Marcinkiewicz multiplier theorem and maximal regularity.* Math. Z. **240** (2002), 311-343.

[3] W. Arendt, S. Bu. *Tools for maximal regularity.* Math. Proc. Cambridge Ph. Soc. 134 (2) (2003), 317-336.

[4] W. Arendt, C. Batty, S. Bu. *Fourier multipliers for Hölder continuous functions and maximal regularity,* Studia Math. **160** (2004), 23-51.

[5] A. Bátkai, E. Fašanga, R. Shvidkoy. *Hyperbolicity of delay equations via Fourier multipliers,* Acta Sci. Math. (Szeged) **69** (2003), 131-145.

[6] A. Bátkai, S. Piazzera. *Semigroups for Delay Equations,* Research Notes in Mathematics, vol 10, A.K. Peters, Ltd., Boston, Mass., 2005.

[7] S. Bu. *Hölder continuous solutions for second order integro-differential equations in Banach spaces.* Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. **31** (2011), no. 3, 765-777.

[8] S. Bu, Y. Fang. *Maximal regularity of second order delay equations in Banach spaces.* Sci. China Math. **53** (2010), no. 1, 51-62.

[9] D.L. Burkholder. *Martingales and Fourier analysis in Banach spaces. In Probability and Analisys. Lecture Notes in Math. 1206. Springer Verlag (1986),61-108.*

[10] R. Denk, M. Hieber, J. Prüss. *R-boundedness, Fourier Multipliers and Problems of Elliptic and Parabolic Type.* Mem. Amer. Math. Soc. **166** (788), 2003.

[11] M. Girardi, L. Weis. *Operator-valued Fourier multiplier theorems on and geometry of Banach spaces.* J. Funct. Anal. **204** (2) (2003), 320 - 354.

[12] M. Girardi, L. Weis. *Criteria for R-boundedness of operator families.* Evolution equations, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Dekker, New York, 234 (2003), 203-221.

[13] J. Hale. *Functional Differential Equations. Appl. Math. Sci., 3, Springer-Verlag 1971.*

[14] T. Hytönen. *R-boundedness and Multiplier Theorems.* Helsinki University of Technology Institute of Mathematics Research Reports. 2001.

[15] W. Hrusa, J. Nohel and M.Renardy. *Mathematical Problems in Viscoelasticity.* Longman, Harlow, 1988.

[16] Y. Latushkin, F. Räbiger. *Operator valued Fourier multipliers and stability of strongly continuous semigroups.* Integral Equations Operator Theory **51** (2005), no. 3, 375-394.

[17] V. Keyantuo, C. Lizama. *Fourier multipliers and integro-differential equations in Banach spaces.* J. London Math. Soc.**69** (3) (2004), 737-750.

[18] V. Keyantuo, C. Lizama. *Maximal regularity for a class of integro-differential equations with infinite delay in Banach spaces.* Studia Math. (1) **168** (2005), 25-50.

[19] V. Keyantuo, C. Lizama. *Hölder continuous solutions for integro-differential equations and maximal regularity.* J. Differential Equations, **230** (2006), 634-660.

[20] C. Lizama. *Fourier multipliers and periodic solutions of delay equations in Banach spaces.* J. Math. Anal. Appl., **324**(2)(2006),921-933.

[21] V. Poblete. *Maximal Regularity of Second Order Equations with Delay.* J. Differential Equations 246 (2009) 261-276.

[22] D. Sforza. *Maximal Regularity Results for a Second Order Integro-differential Equations.* J.Math.Anal.Appl **191** (1995), 203-228. Math. Nach. 186 (1997), 5-56.

[23] D. Sforza. *On a Class of Second Order Integro-differential Equations.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **86** (1991), 157-174.

[24] E. Sinestrari. *On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuos functions.* J.Math.Anal.Appl **107** (1985),16-66.

[25] L. Weis. *Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal Lp-regularity.* Math. Ann. 319 (2001), 735-758.

[26] J. Wu. *Theory and Applications of Partial Differential Equations.* Appl. Math. Sci. 119, Springer-Verlag, 1996.