

UCH - FC
MAG - M
T693
C. 1



Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad de Chile

Ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos del tipo generalizado con impulsos

TESIS
ENTREGADA A LA
UNIVERSIDAD DE CHILE
EN CUMPLIMIENTO PARCIAL DE LOS REQUISITOS
PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGISTER EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICAS

Por

Ricardo Felipe Torres Naranjo

Director de Tesis: Dr. Manuel Pinto Jimenez

Diciembre, 2015

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
INFORME DE APROBACION
TESIS DE MAGISTER

Se informa a la escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el candidato

Ricardo Felipe Torres Naranjo

Ha sido aprobada por la comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magister en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa Privada de Tesis rendido el día 4 de Diciembre de 2015.

Director de Tesis:

Dr. Manuel Pinto J.

Comisión de Evaluación de la tesis

Dr. Gonzalo Robledo V.

Dr. Álvaro Castañeda G.



The image shows three handwritten signatures in black ink, each written over a horizontal dotted line. The first signature is for Dr. Manuel Pinto J. To the right of these signatures is a circular stamp. The stamp contains the text 'FACULTAD DE CIENCIAS' at the top, 'BIBLIOTECA CENTRAL' in the middle, and 'U. DE CHILE' at the bottom, with small stars on either side of the bottom text.

Biografía



Nací en Osorno el 21 de agosto de 1983. Hijo de Nadia y Jovino, soy el segundo de cuatro hermanos. Me describo como una persona alegre, honesta, perseverante, curiosa, optimista y sencilla. Soy feliz con las cosas simples que me ofrece la vida.

Ingresé a la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile en marzo del año 2003. Después de mucho trabajo y esfuerzo, egresé como Licenciado en Matemáticas a comienzos del año 2008. En dicho momento, se me presentó la oportunidad de realizar docencia escolar, la cual tomé sin dudar. Ella me permitió costear estudios de Pedagogía los cuales realicé al año siguiente en la Universidad Andrés Bello, logrando el Título de Profesor de Educación Media con Mención en Matemáticas y el Grado de Licenciado en Educación. Después de 5 años ejerciendo como pedagogo retomé mis estudios matemáticos ingresando al programa de Magister.

Actualmente me desempeño como profesor adjunto del Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Austral de Chile, Valdivia.

Después de todos estos años puedo decir que estudiar Matemáticas ha sido, por lejos, una de las experiencias más enriquecedoras y desafiantes que he experimentado. Espero tener la oportunidad de seguir estudiando. Por lo pronto soy feliz aprendiendo y enseñando en las hermosas tierras del sur junto a mi amada Giovanna...

Agradecimientos

"Gracias a la vida, que me ha dado tanto..."

¡Me falta espacio para recordar y agradecer a tanta gente...!

Agradezco a Dios por haberme dado fuerza y luz cuando todo fue muy oscuro.

Agradezco a mis padres por su infinita entrega y amor. Sin ellos nada de esto sería posible.

Agradezco a mi hermosa Giovanna, por amarme y aguantarme. Te debo tanto tiempo...

Agradezco a mis hermanos: Cristian, Matías y María Francisca. Personas nobles y de buen corazón, quienes se merecen lo mejor.

Agradezco a Santiago y Cecilia, por su simpatía, sencillez, empuje e infinita disponibilidad. A ellos muchísimas gracias.

Agradezco a todos mis profesores. En especial a Gabriel Araya, Patricio González, Manuel Pinto, Gonzalo Robledo y Nicolás Yus; de quienes aprendí muchísimo durante todos estos años. Gracias por su infinita paciencia, disponibilidad y entrega. Siempre estarán en mi memoria y en mi corazón.

Agradezco a mis colegas del Instituto de Cs. Físicas y Matemáticas de la Universidad Austral, por su energía y acogida. En especial a Bastián Viscarra por la enorme ayuda prestada durante este último tiempo y por contagiarme de su entusiasmo. También agradezco a Luis Gutiérrez y a Eugenio Trucco por sus sabias palabras en momentos precisos.

Agradezco a mis compañeros de postgrado. En especial a Christopher, Boris, Camilo, Marco, William, Alan y Daniel. Fueron una gran compañía.

Por último, agradezco a los profesores Jozef Banás e István Györi, por su ayuda y buenos deseos. Les estaré eternamente agradecido.

Resumen

En el siguiente trabajo estudiaremos las llamadas "Ecuaciones Diferenciales Impulsivas con Argumento Constante a Trozos del tipo Generalizado" (IDEPCAG). Estas ecuaciones son de la forma

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), x(\gamma(t))), & t \neq t_i \\ \Delta x|_{t=t_i} &= Q_i(x(t_i^-)), & t = t_i \end{aligned} \quad (0.1)$$

donde $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión tal que $t_i < t_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N}$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty, \lim_{i \rightarrow -\infty} t_i = -\infty$. Para $t = t_i$, la solución de (0.1) satisface la ley de salto

$$\Delta x|_{t=t_i} = x(t_i) - x(t_i^-) = Q_i(x(t_i^-)),$$

donde se asume que el límite lateral izquierdo

$$x(t_i^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_i \\ t < t_i}} x(t)$$

existe $\forall t_i$ con $i \in \mathbb{N}$ y $x(t_i^+) = x(t_i)$ está definido por

$$x(t_i) = x(t_i^-) + Q_i(x(t_i^-)).$$

Para mayores detalles ver [5], [47] y [51].

En el capítulo I daremos los preliminares necesarios de la teoría de ecuaciones diferenciales impulsivas y estudiaremos las funciones constantes a trozos y su uso en aproximación de soluciones.

En el capítulo II sentaremos las bases de la teoría de ecuaciones diferenciales impulsivas con argumento constante a trozos del tipo generalizado. Estudiaremos condiciones de existencia y unicidad de soluciones mediante el uso de dos nuevas desigualdades del tipo Gronwall-Bellman, las cuales extienden las logradas en [18], [19] y [42] para ecuaciones del tipo DEPCAG. (ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos del tipo generalizado).

Más aún, deduciremos una fórmula de variación de parámetros asociada al sistema IDEPCAG

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t) + B(t)X(\gamma(t)) + F(t), & t \neq t_i \\ \Delta X|_{t=t_i} &= C_i X(t_i^-) + D_i, & t = t_i, \end{aligned} \quad (0.2)$$

donde $A(t), B(t)$ y $F(t)$ son funciones continuas a trozos localmente integrables y $\gamma(t)$ es una función constante a trozos del tipo generalizado tal que

$$\gamma(t) = \zeta_i, \quad \text{si } t \in I_i = [t_i, t_{i+1}), \quad \forall i \in \mathbb{N};$$

con $t_i < t_{i+1}, t_i \leq \zeta_i \leq t_{i+1}$ y $\lim_{i \rightarrow \pm\infty} t_i = \pm\infty$. Al utilizar una tal función $\gamma(t)$ se induce una división del intervalo

$$I_i = I_i^+ \cup I_i^- \quad \text{con } I_i^+ = [t_i, \zeta_i] \text{ y } I_i^- = [\zeta_i, t_{i+1}),$$

por ende, una división de la solución en una parte avanzada y otra retardada. A partir de la fórmula de variación de parámetros conseguida, la cual extiende a la conocida para el caso DEPCAG (ver [44] y [46]), obtendremos la solución T -periódica del sistema T -periódico IDEPCAG semilineal

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t) + g(t, x(t), x(\gamma(t))), & t \neq t_i \\ \Delta X|_{t=t_i} &= C_i X(t_i^-) + I_i(x(t_i)), & t = t_i. \end{aligned}$$

En el capítulo *III* expondremos resultados relativos a la convergencia de soluciones de sistemas impulsivos con argumento constante a trozos del tipo generalizado. Es decir, estudiaremos la existencia de un equilibrio asintótico para (0.2) basados fuertemente en hipótesis de integrabilidad sobre sus coeficientes, extendiendo así los resultados obtenidos en [30] y [42] para ecuaciones diferenciales impulsivas.

En el capítulo *IV* estableceremos condiciones para producir aproximaciones de soluciones de ecuaciones impulsivas por medio de soluciones *IDEPCAG* utilizando un argumento constante a trozos que aproxime a la identidad. Es decir, aproximaremos el sistema semilineal impulsivo

$$\begin{aligned} y'_i(t) &= -a_i(t)y_i(t) + H_i(t, y(t)), & t \neq t_k \\ \Delta y_i &= -q_{i,k}y_i(t_k^-) + I_{i,k}(y_i(t_k^-)) & t = t_k, \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

donde $i = 1, 2, \dots, m$, y $k \in \mathbb{N}$, mediante el sistema *IDEPCAG*

$$\begin{aligned} z'_i(t) &= -a_i(t)z_i(t) + H_i(t, z(\gamma(t))), & t \neq \gamma(t_k) \\ \Delta z_i|_{t=\gamma(t_k)} &= -q_{i,k}z_i(\gamma(t_k)^-) + I_{i,k}(z_i(\gamma(t_k)^-)) & t = \gamma(t_k), \\ z(\zeta_0) &= z_0 & \zeta_0 = \gamma(t_0) \end{aligned}$$

con $i = 1, 2, \dots, m$, $k \in \mathbb{N}$, donde

$$H_i(t, y(t)) = \sum_{j=1}^m b_{ij}(t)f_j(y_j(t)) + c_i(t),$$

tal que $q_{i,k} \neq 1$, $a_i(t)$, $q_{i,k} > 0 \forall t \in \mathbb{R}^+$, $\forall i \in [1, m]$, $\forall k \in [1, m]$ y

$$\gamma(t) = \left\lceil \frac{t}{\delta} \right\rceil \delta, \quad k \in \mathbb{N}, \delta > 0.$$

Demostraremos que al considerar esta función escalonada (la cual converge uniformemente a la identidad cuando $\delta \rightarrow 0$) obtendremos

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |y(t) - z(t)| \rightarrow 0 \text{ cuando } \delta \rightarrow 0$$

y

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |y(t_r) - z(\zeta_r)| \rightarrow 0 \text{ cuando } \delta \rightarrow 0$$

para $t \in [t_0, \infty)$. Los resultados obtenidos en este capítulo son completamente nuevos y extienden, en el caso acotado, a los realizados en [29] para ecuaciones del tipo *DEPCAG*.

Finalmente, en el capítulo *V* mostraremos una simulación computacional de aproximación de un sistema impulsivo del tipo *CNN* (*Cellular Neural Networks*) por medio de un sistema del tipo *IDEPCAG*. La aproximación conseguida mostrará la veracidad de los resultados obtenidos.

Abstract

In the following work, we will study the so called "*Impulsive Differential Equations with Piecewise Constant Argument of Generalized type*" (in short *IDEPCAG*)

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), x(\gamma(t))), & t \neq t_i \\ \Delta x|_{t=t_i} &= Q_i(x(t_i^-)), & t = t_i \end{aligned} \quad (0.3)$$

where $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ is a sequence such that $t_i < t_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N}$ and $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty, \lim_{i \rightarrow -\infty} t_i = -\infty$. For $t = t_i$, a solution of (0.3) satisfies the jump condition

$$\Delta x|_{t=t_i} = x(t_i) - x(t_i^-) = Q_i(x(t_i^-)),$$

where it is assumed that the lateral limit to the left

$$x(t_i^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_i \\ t < t_i}} x(t).$$

exists $\forall t_i$ with $i \in \mathbb{N}_0$ and $x(t_i^+) = x(t_i)$ is defined by

$$x(t_i) = x(t_i^-) + Q_i(x(t_i^-)).$$

(See [5], [47] y [51]).

In chapter *I*, we will introduce functions with piecewise constant argument and its uses in obtaining approximation of solutions.

In chapter *II*, we will establish the basis of the theory of Impulsive Differential Equations with Piecewise Constant Argument of Generalized type. We will study existence and uniqueness of solutions, by using two new extensions of Gronwall-Bellman type inequalities for *IDEPCAG* case. (See [18], [19] and [42]).

We will get a variation of parameters formula associated to *IDEPCAG* system

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t) + B(t)X(\gamma(t)) + F(t), & t \neq t_i \\ \Delta X|_{t=t_i} &= C_i X(t_i^-) + D_i, & t = t_i \end{aligned} \quad (0.4)$$

where $A(t), B(t)$ and $F(t)$ are piecewise continuous functions locally integrables and $\gamma(t)$ is a piecewise constant function of generalized type such that

$$\gamma(t) = \zeta_i, \quad \text{if } t \in I_i = [t_i, t_{i+1}), \quad \forall i \in \mathbb{N};$$

where $t_i < t_{i+1}, t_i \leq \zeta_i \leq t_{i+1}$ and $\lim_{i \rightarrow \pm\infty} t_i = \pm\infty$. When using such $\gamma(t)$ function, it induces a division of the interval

$$I_i = I_i^+ \cup I_i^- \text{ where } I_i^+ = [t_i, \zeta_i] \text{ and } I_i^- = [\zeta_i, t_{i+1}),$$

thus, it splits the solution into a retarded and an advanced part. By getting the variation of constants formula for the *IDEPCAG*, which is an extension of *DEPCAG* case studied in [44] and [46], we obtain the corresponding solution of *IDEPCAG* T -periodic semilinear system

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t) + g(t, x(t), x(\gamma(t))), & t \neq t_i \\ \Delta X|_{t=t_i} &= C_i X(t_i^-) + I_i(x(t_i)), & t = t_i \end{aligned}$$

In chapter III we study convergence of solutions, i.e, existence of an asymptotic equilibrium for (0.4) strongly based on certain integrability conditions of its coefficients. These results are an extension for the IDEPCAG case (See [30] and [42]).

In chapter IV, we will establish conditions to get approximations of the solutions of an IDE by means of IDEPCAG approximating solutions, using a suitable piecewise constant argument that approximates to the identity function. In other words, we will approximate the impulsive semilinear differential system

$$\begin{aligned} y_i'(t) &= -a_i(t)y_i(t) + H_i(t, y(t)), & t \neq t_k \\ \Delta y_i &= -q_{i,k}y_i(t_k^-) + I_{i,k}(y_i(t_k^-)) & t = t_k, \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

where $i = 1, 2, \dots, m$, and $k \in \mathbb{N}$, by means of the IDEPCAG system

$$\begin{aligned} z_i'(t) &= -a_i(t)z_i(t) + H_i(t, z(\gamma(t))), & t \neq \gamma(t_k) \\ \Delta z_i|_{t=\gamma(t_k)} &= -q_{i,k}z_i(\gamma(t_k)^-) + I_{i,k}(z_i(\gamma(t_k)^-)) & t = \gamma(t_k), \\ z(\zeta_0) &= z_0 & \zeta_0 = \gamma(t_0) \end{aligned}$$

with $i = 1, 2, \dots, m$, $k \in \mathbb{N}$, where

$$H_i(t, y(t)) = \sum_{j=1}^m b_{ij}(t)f_j(y_j(t)) + c_i(t),$$

are such that $q_{i,k} \neq 1$, $a_i(t), q_{i,k} > 0 \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall i \in [1, m], \forall k \in [1, m]$ and

$$\gamma(t) = \left\lceil \frac{t}{\delta} \right\rceil \delta, \quad \delta > 0.$$

We will prove that, when considering such step function (which converges uniformly to the identity function when δ tends to 0),

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |y(t) - z(t)| \rightarrow 0 \text{ when } \delta \rightarrow 0$$

and

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |y(t_r) - z(\zeta_r)| \rightarrow 0 \text{ when } \delta \rightarrow 0$$

for $t \in [t_0, \infty)$. These results, in the bounded IDEPCAG case, are new. (See [29]).

Finally, in chapter V we will show some applications of the results previously obtained by means of a computer simulation of Cellular Neural Networks systems.

Índice de contenidos

Resumen	v
Abstract	vii
Índice de figuras	1
Introducción	2
I Preliminares	3
1 Ecuaciones diferenciales impulsivas	3
1.1 Un ejemplo: el caso lineal homogéneo con coeficientes constantes	3
1.1.1 Observaciones:	5
1.2 Estabilidad	5
1.3 Ejemplos de sistemas estables	6
1.4 Periodicidad	7
2 Sistemas impulsivos lineales	8
2.1 Sistema impulsivo lineal homogéneo	8
2.1.1 Matriz fundamental de (2.1)	8
2.2 Sistema impulsivo lineal no homogéneo	10
2.2.1 Fórmula de variación de parámetros	10
3 Funciones constantes a trozos y aproximaciones a la identidad	11
3.1 Funciones constantes a trozos	11
3.2 Aproximaciones a la identidad	13
II Existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales impulsivas con argumento constante a trozos del tipo generalizado	16
4 Ecuaciones diferenciales impulsivas con argumento constante a trozos	16
4.1 Introducción: Ecuaciones Diferenciales con Argumento Constante a Trozos del Tipo Generalizado	16
4.2 Soluciones de ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos del tipo generalizado con impulsos	17
5 Desigualdades del tipo Gronwall-Bellman para IDEPCAG	18
5.1 Primera desigualdad impulsiva de Gronwall-Pinto	18
5.2 Segunda desigualdad impulsiva de Gronwall-Pinto	22
5.3 Casos particulares: Avance y retardo totales	25

6	Existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales impulsivas con argumento constante a trozos del tipo generalizado	25
6.1	Ecuación integral asociada a (6.1)	26
6.2	Existencia y unicidad de soluciones de (6.1)	28
7	Fórmula de variación de parámetros de una ecuación con argumento constante a trozos del tipo generalizado con impulsos	29
7.1	Un poco de historia	29
7.2	Fórmula de variación de parámetros de un sistema impulsivo con argumento constante a trozos del tipo generalizado.	30
7.2.1	Matriz fundamental de (7.4)	31
7.2.2	Fórmula de variación de parámetros	33
8	Sistemas periódicos impulsivos con argumento constante a trozos del tipo generalizado	38
8.1	Índice contador de impulsos $i(t, s)$	38
8.2	Solución periódica de un sistema impulsivo semilineal con argumento constante a trozos del tipo generalizado.	42
III	Soluciones convergentes de sistemas impulsivos con argumento constante a trozos del tipo generalizado	53
8.3	Introducción	53
8.4	Equilibrio asintótico de un sistema IDEPCAG	53
9	Equilibrio asintótico para el sistema lineal no homogéneo con argumento constante a trozos del tipo generalizado con impulsos (9.1)	57
9.1	Equilibrio asintótico para (9.1)	57
9.1.1	Un ejemplo: Caso Bereketoglu	62
IV	Aproximación de sistemas impulsivos por medio de sistemas impulsivos con argumento constante a trozos del tipo generalizado	65
10	Aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales	65
11	Aproximación uniforme de un sistema impulsivo semilineal por medio de un sistema impulsivo con argumento constante a trozos del tipo generalizado	68
11.1	Resultados auxiliares	68
11.1.1	Cotas de expresiones relacionadas con la matriz fundamental	69
11.2	Aproximación de soluciones del sistema impulsivo con argumento constante a trozos del tipo generalizado (11.1)	73
12	Diferencia $y_i(t) - z_i(t)$	77
12.1	Estimación (11.17)	77
12.2	Estimación (11.18)	77
12.3	Estimación (11.19)	78
12.4	Estimación final $ y_i(t) - z_i(t) $	79
13	Diferencia $y_i(t_{i(t)}) - z_i(\zeta_{i(t)})$	79
13.1	Estimación (13.1)	79
13.2	Estimación (13.2)	80
13.3	Estimación (13.3)	81

13.4 Estimación final $\left y_i(t_{i(t)}) - z_i(\zeta_{i(t)}) \right $	82
V Simulaciones computacionales de sistemas CNN	84
Bibliografía	91

Índice de figuras

N° Figura	Contenido	N° Página
1	Solución de una ecuación diferencial impulsiva.	3
2	Solución de (1.4) con $\alpha = 0$.	5
3	Solución de (1.4) con $a = 1$ y $\alpha = 0$.	5
4	Solución de (1.4) con $a = \alpha = -1$.	5
5	Solución de (1.8)	7
6	Solución de (1.8) con $a = 0,5$ y $\alpha = 0,3$.	7
7	Solución periódica de (1.9).	7
8	Función $\gamma(t) = [t]$.	11
9	Avance y retardo con respecto a la identidad.	12
10	Convergencia a la identidad.	13
11	Solución DEPCAG.	17
12	Solución IDEPCAG.	18
13	Solución real discreta x_1 de (13.9).	84
14	Solución real discreta x_2 de (13.9).	84
15	Solución real x_1 de (13.9).	85
16	Solución real x_2 de (13.9).	85
17	Solución real de sistema (13.9).	85
18	Comparación aproximante vs solución real discretos de x_1 con $\delta = 1$.	87
19	Comparación aproximante vs solución real discretos de x_1 con $\delta = 0,1$.	87
20	Comparación aproximante vs solución real de x_1 con $\delta = 1$.	87
21	Comparación aproximante vs solución real de x_1 con $\delta = 0,1$.	87
22	Comparación aproximante vs solución real discretos de x_2 con $\delta = 1$.	88
23	Comparación aproximante vs solución real discretos de x_2 con $\delta = 0,1$.	88
24	Comparación aproximante vs solución real de x_2 con $\delta = 1$.	88
25	Comparación aproximante vs solución real de x_2 con $\delta = 0,1$.	88
26	Comparación solución aproximante vs solución real con $\delta = 1$.	89
27	Comparación solución aproximante vs solución real con $\delta = 0,1$.	89

Introducción

En [40], *A.D. Myshkis* observó que no existía teoría para ecuaciones diferenciales con argumentos retardados $h(t)$ consistentes de funciones constantes a trozos del tipo

$$x'(t) = f(t, x(t), x(h(t))).$$

Estas ecuaciones son las llamadas "*Ecuaciones Diferenciales con Argumento Constante a Trozos*" (*DEPCA*).

El estudio sistemático de problemas relacionados con argumento constante a trozos se inició a comienzos de los 80's. Desde entonces, las ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos han atraído gran interés de muchos investigadores de los más variados campos. Ver [28]. Motivados por [40], en [14] *S. Busenberg* y *K.L. Cooke* fueron los primeros en introducir un modelo matemático que involucraba argumento constante a trozos a fin de investigar enfermedades de transmisión vertical, para el cual utilizaron métodos de reducción a ecuaciones discretas.

Las ecuaciones del tipo *DEPCA* fueron estudiadas en [23], por *K.L. Cooke* y *J. Wiener* en los casos lineales retardados usando $\gamma(t) = [t]$, $\gamma(t) = [t - n]$ y $\gamma(t) = t - n[t]$ y luego, en [27], utilizando una parte entera del tipo alternado $\gamma(t) = 2 \left[\frac{t+1}{2} \right]$; en [48] por *K.L. Cooke* y *S.M. Shah* para el caso avanzado $\gamma(t) = [t + n]$ y en [53] por *K.L. Cooke* y *A.R. Aftabizadeh* para el caso alternado (avance y retardo) usando $\gamma(t) = m \left[(t + k) / m \right]$, donde $[\cdot]$ denota a la función parte entera y $k, m, n \in \mathbb{Z}^+$, $0 < k < m$.

Cabe destacar que las soluciones de este tipo de ecuaciones son continuas, a pesar de que $\gamma(t)$ no lo sea. En los extremos de los intervalos de constancia, estas ecuaciones generan una ley recursiva la cual da origen a una ecuación discreta, por lo que corresponden al tipo híbridas ya que combinan tanto propiedades de ecuaciones discretas como de continuas. (Ver [5] y [51]). Al considerar en los extremos una condición de salto, se da origen a las llamadas "*Ecuaciones Diferenciales Impulsivas con Argumento Constante a Trozos del tipo Generalizado*" (*IDEPCAG*)

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), x(\gamma(t))), & t \neq t_i \\ \Delta x|_{t=t_i} &= Q_i(x(t_i^-)), & t = t_i \end{aligned} \quad (0.5)$$

donde $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión tal que $t_i < t_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N}$ y $\lim_{|i| \rightarrow \pm \infty} t_i = \infty$. Para $t = t_i$, la solución de (0.5) satisface la ley de salto

$$\Delta x|_{t=t_i} = x(t_i) - x(t_i^-) = Q_i(x(t_i^-)),$$

donde se asume que el límite lateral izquierdo

$$x(t_i^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_i \\ t < t_i}} x(t).$$

existe $\forall t_i$ con $i \in \mathbb{N}$ y $x(t_i^+) = x(t_i)$ está definido por

$$x(t_i) = x(t_i^-) + Q_i(x(t_i^-)).$$

(Ver [4], [5], [9], [10], [12], [47], [51] y [52]).

Capítulo I

Preliminares

1 Ecuaciones diferenciales impulsivas

Sean $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que asumiremos continua y $Q : \mathcal{A} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde \mathcal{A} es un conjunto de índices, $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sucesión de instantes de impulsos fijos tales que $t_i < t_{i+1}$ con $t_i \in \mathbb{R}$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$, $\lim_{i \rightarrow -\infty} t_i = -\infty$. Diremos que una función x es llamada solución de la ecuación diferencial impulsiva

$$\begin{aligned}x'(t) &= f(t, x(t)), & t \neq t_i \\ \Delta x|_{t=t_i} &= Q_i(x(t_i^-)), & t = t_i \\ x(\tau) &= x_0, & \tau \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

si ella es una función continua a trozos con discontinuidades de primera especie en los puntos $t = t_i$ y diferenciable $\forall t \neq t_i$. Para $t = t_i$, la solución satisface la ley de salto

$$\Delta x|_{t=t_i} = x(t_i) - x(t_i^-) = Q_i(x(t_i^-)),$$

donde asumiremos que el límite lateral izquierdo

$$x(t_i^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_i \\ t < t_i}} x(t),$$

existe $\forall t_i$ con $i \in \mathbb{N}_0$ y $x(t_i^+) = x(t_i)$ está definido por

$$x(t_i) = x(t_i^-) + Q_i(x(t_i^-)).$$

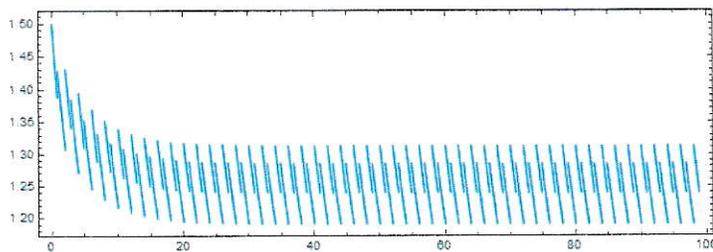


Fig. 1: Forma de la la solución de una ecuación diferencial impulsiva.

1.1 Un ejemplo: el caso lineal homogéneo con coeficientes constantes

Analizaremos las soluciones del sistema

$$\begin{aligned}x'(t) &= ax(t), & t \neq t_k \\ x(t_k) &= \alpha x(t_k^-) & t = t_k, \quad k \in \mathbb{N} \\ x(t_0) &= x_0.\end{aligned} \tag{1.1}$$

Para $t \in [t_n, t_{n+1})$ con $x(t_n) = x_n$, tenemos que la solución de (1.1) es

$$x(t) = e^{a(t-t_n)} x_n, \quad (1.2)$$

en dicho intervalo. A fin de analizar lo que sucede cuando $t \in [t_{n+1}, t_{n+2})$, debemos obtener una condición inicial en este intervalo. Ella vendrá dada por por la ley de impulso de (1.1), a saber

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x(t_{n+1}) \\ &= \alpha x(t_{n+1}^-) \\ &= \alpha e^{a(t_{n+1}-t_n)} x_n, \end{aligned}$$

por lo que queda así definida una solución discreta del sistema impulsivo lineal homogéneo

$$x_{n+1} = \alpha e^{a(t_{n+1}-t_n)} x_n.$$

La expresión anterior define una ecuación en diferencias finitas, cuya solución puede deducirse de la siguiente manera:

$$x_1 = \alpha e^{a(t_1-t_0)} x_0,$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \alpha e^{a(t_2-t_1)} x_1 \\ &= \alpha e^{a(t_2-t_1)} \alpha e^{a(t_1-t_0)} x_0 \\ &= \alpha^2 e^{a(t_2-t_0)} x_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \alpha e^{a(t_3-t_2)} x_2 \\ &= \alpha e^{a(t_3-t_2)} \alpha^2 e^{a(t_2-t_0)} x_0 \\ &= \alpha^3 e^{a(t_3-t_0)} x_0. \end{aligned}$$

Así, inductivamente conseguimos la solución para esta ecuación discreta. A saber

$$x_n = \alpha^n e^{a(t_n-t_0)} x_0. \quad (1.3)$$

Es importante recalcar que la ecuación en diferencias es parte del sistema impulsivo. El sistema en cuestión tiene, por ende, una parte discreta y otra ordinaria. Es por esto que los sistemas impulsivos forman parte de los llamados "sistemas híbridos". Entonces, al reemplazar (1.3) en (1.2) se obtiene

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{a(t-t_n)} x_n \\ &= e^{a(t-t_n)} \alpha^n e^{a(t_n-t_0)} x_0 \\ &= e^{a(t-t_0)} \alpha^n x_0, \end{aligned}$$

y asumiendo que t_0 no corresponde a un instante de impulso, se tiene

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} \alpha^{i(t_0, t)} x_0, \quad (1.4)$$

donde $i(t_0, t)$ representa a la cantidad de instantes de impulsos en el intervalo $[t_0, t)$.

1.1.1 Observaciones:

De (1.4) podemos concluir lo siguiente:

1. La solución se obtiene "multiplicando las matrices fundamentales" de la solución, tanto de la parte ordinaria del sistema $e^{a(t-t_n)}$ como de la discreta $\alpha^n e^{a(t_n-t_0)}$.
2. Obviamente $\alpha \neq 1$ a fin de que exista fenómeno impulsivo. Si no, el salto sería nulo en cuyo caso se hablaría de un sistema completamente ordinario.
3. Si $\alpha = 0$, $x_0 = 10$ y $t_0 < t_1$ con t_1 instante de impulso, entonces se tiene que $x(t) = 0$ para todo $t \geq t_1$. Luego, la solución es

$$x(t) = \begin{cases} e^{a(t-t_0)}x_0 & \text{si } t_0 \leq t < t_1. \\ 0 & \text{si } t_1 < t. \end{cases}$$

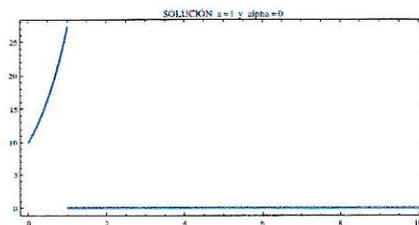


Fig. 2: Solución de (1.4) con $\alpha = 0$.

4. Si $\alpha < 0$, entonces obtendremos soluciones oscilantes.

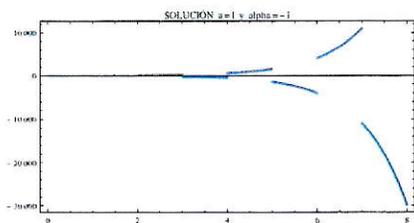


Fig. 3: Solución de (1.4) con $a = 1$ y $\alpha = -1$.

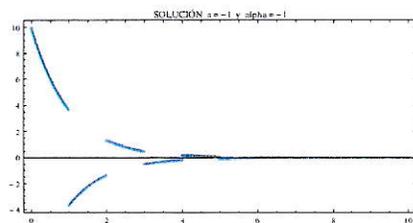


Fig. 4: Solución de (1.4) con $a = \alpha = -1$.

5. El índice contador de impulsos $i(t_0, t)$ juega un papel preponderante en el comportamiento de la solución. Es decir, la "distribución de los instantes de impulso" también es un factor a considerar.

A raíz de los ejemplos anteriormente expuestos, naturalmente se da origen a la pregunta: ¿Puede ser "derrotada" la exponencial por la potencia discreta?

1.2 Estabilidad

La última de las observaciones anteriores nos motiva a analizar el comportamiento de la solución para t muy grande con $\alpha \neq 0$ y $a \neq 0$. A continuación obtendremos una condición que permite asegurar que la solución del sistema impulsivo homogéneo tienda a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

Reescribamos (1.4) de la forma

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} e^{i(t_0,t) \ln(\alpha)} x_0. \quad (1.5)$$

Ahora, para todo $t \in \mathbb{R}^+$, existe $i(t) \in \mathbb{N}$ es tal que $t \in I_{i(t)} = [t_{i(t)}, t_{i(t)+1})$, con $t_{i(t)}$ instante de impulso, Si asumimos que los instantes de impulso. Luego, si se asume que los instantes de impulso tienen la siguiente distribución

$$\underline{\theta} \leq t_{k+1} - t_k \leq \bar{\theta},$$

entonces

$$\begin{aligned} \underline{\theta} &\leq t - t_{i(t)} \\ 2\underline{\theta} &\leq t - t_{i(t)-1} = t - t_{i(t)} + t_{i(t)} - t_{i(t)-1} \\ 3\underline{\theta} &\leq t - t_{i(t)-2} = t - t_{i(t)-1} + t_{i(t)-1} - t_{i(t)-2}. \end{aligned}$$

Con lo anterior, inductivamente se obtiene

$$(n+1)\underline{\theta} \leq t - t_{i(t)-n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

es decir

$$i(t_0, t)\underline{\theta} \leq t - t_0.$$

Así, acabamos de estimar

$$i(t_0, t) \leq \left\lceil \frac{t - t_0}{\underline{\theta}} \right\rceil. \quad (1.6)$$

Luego, aplicando (1.6) en (1.5) se obtiene

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq e^{a(t-t_0) + \left\lceil \frac{t-t_0}{\underline{\theta}} \right\rceil \ln(\alpha)} |x_0| \\ &\leq e^{(t-t_0)\left(a + \frac{1}{\underline{\theta}} \ln(\alpha)\right)} |x_0|. \end{aligned}$$

Es decir, si

$$a + \frac{1}{\underline{\theta}} \ln(\alpha) < 0, \quad (1.7)$$

las soluciones convergerán a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

Esta construcción nos muestra que, a pesar de que pudiese ocurrir $a \geq 1$, es posible que debido al efecto impulsivo, las soluciones del sistema puedan ser acotadas. Más aún, tender a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. Lo anteriormente expuesto refleja un hecho muy particular, por lo que a nivel de estabilidad los sistemas impulsivos difieren del tratamiento ordinario (Ver [41]).

1.3 Ejemplos de sistemas estables

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t), & t &\neq t_k \\ x(t_k) &= (0.3)x(t_k^-) & t &= t_k \\ x(0) &= 1000 \\ t_k &= k, & \forall k &\geq 1, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Comprobamos que

$$\begin{aligned} 1 &\leq t_{k+1} - t_k \implies \underline{\theta} = 1 \\ a &= 1, \quad \alpha = 0.3, \end{aligned}$$

y

$$1 + \ln(0.3) = -1.203972804... < 0,$$

por lo que sus soluciones, según la condición anterior, debieran tender a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. Así lo podemos observar en la siguiente gráfica.

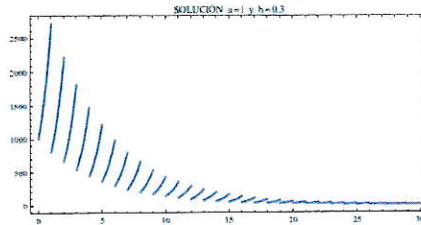


Fig. 5: Solución de (1.8).

Otro ejemplo similar a (1.8), en donde se describe una situación más esperable con $\alpha = 0,3$ y $a = 0,5$; es el siguiente

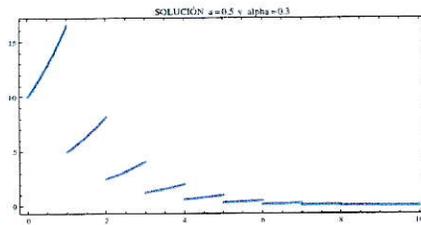


Fig. 6: Solución de (1.8) con $\alpha = 0,3$ y $a = 0,5$.

1.4 Periodicidad

En el siguiente ejemplo, los impulsos generan una solución periódica impulsiva, a pesar de que el sistema ordinario no sea periódico ni acotado

$$\begin{aligned}
 p'(t) &= 1, & t &\neq t_k \\
 p(t_k) &= p(t_k^-) - 1, & t &= t_k \\
 p(0) &= 0 \\
 t_k &= k, & \forall k &\geq 1, k \in \mathbb{N}
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

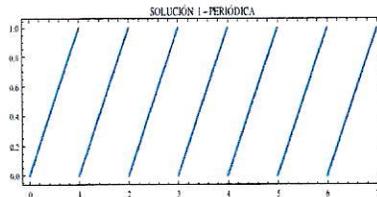


Fig. 7: Solución periódica de (1.9).

2 Sistemas impulsivos lineales

A fin de describir los sistemas impulsivos, durante el resto de este trabajo usaremos la siguiente notación para el producto y la suma:

$$\prod_{r=j}^k A_r = \begin{cases} A_j \cdot A_{j+1} \cdots A_k & \text{si } j \leq k \\ 1 & \text{si } j > k \end{cases},$$

$$\sum_{r=j}^k A_r = \begin{cases} A_j + A_{j+1} + \cdots + A_k & \text{si } j \leq k \\ 0 & \text{si } j > k \end{cases}.$$

2.1 Sistema impulsivo lineal homogéneo

En esta sección, estudiaremos las soluciones del sistema lineal impulsivo

$$\begin{aligned} x' &= A(t)x, & t &\neq t_i \\ x(t_i) &= (I + B_i)x(t_i^-) & t &= t_i \\ x(\tau) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

con $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sucesión de instantes de impulsos fijos tales que $t_i < t_{i+1}$ con $t_i \in \mathbb{R}$ junto con $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$ y $\lim_{i \rightarrow -\infty} t_i = -\infty$, donde $A(t)$ es una matriz de $n \times n$ continua a trozos con discontinuidades de primera especie en $t = t_i$, B_i matrices constantes. Además, si consideramos $J \subset [t_0, \infty)$ intervalo, denotaremos por $\mathcal{PC}(J, \mathbb{R}^n)$ al conjunto de todas las funciones continuas por la izquierda $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, con discontinuidades de primera especie en los puntos $t = t_i$, es decir, tales que

$$x(t_i^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_i \\ t < t_i}} x(t), \quad \text{existe } \forall i \in \mathbb{N}_0,$$

y a $\mathcal{PC}^1(J, \mathbb{R}^n)$ el espacio de las funciones tales que $\varphi, \varphi' \in \mathcal{PC}(J, \mathbb{R}^n)$, donde la derivada en los puntos t_i se asumirá como la derivada lateral izquierda.

En lo que sigue, estudiaremos solo los sistemas para los cuales se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Todo intervalo compacto $[a, b]$ contiene sólo un número finito de puntos de $(t_i)_{i=1}^{\infty}$.
2. Las matrices $(I + B_i)$ son invertibles $\forall i \in \mathbb{N}$.

2.1.1 Matriz fundamental de (2.1)

A continuación deduciremos la matriz fundamental del sistema (2.1). Si analizamos el caso $t \in [t_{i(t)}, t_{i(t)+1})$ tenemos

$$x(t) = \Phi(t, t_{i(t)})x_{i(t)} \quad (2.2)$$

como solución en dicho intervalo. Ahora vemos que por la existencia del límite lateral izquierdo se tiene

$$x(t_{i(t)+1}^-) = \Phi(t_{i(t)+1}, t_{i(t)})x_{i(t)}.$$

Luego, debido a la condición impulsiva, se consigue

$$\begin{aligned} x(t_{i(t)+1}) &= (I + B_{i(t)+1})x(t_{i(t)+1}^-) \\ &= (I + B_{i(t)+1})\Phi(t_{i(t)+1}, t_{i(t)})x_{i(t)}. \end{aligned}$$

Lo anterior define una ecuación en diferencias finitas, cuya solución es

$$x(t_{i(t)}) = \left[\prod_{j=i(\tau)+1}^{i(t)} (I + B_j) \Phi(t_j, t_{j-1}) \right] (I + B_{i(\tau)+1}) \Phi(t_{i(\tau)+1}, \tau)x_0. \quad (2.3)$$

Al reemplazar (2.3) en (2.2) se obtiene la solución de (2.1) para $t \in [t_0, t_{i(t)+1}]$. A saber

$$x(t) = \Phi(t, t_{i(t)}) \left[\prod_{j=i(\tau)+1}^{i(t)} (I + B_j) \Phi(t_j, t_{j-1}) \right] (I + B_{i(\tau)+1}) \Phi(t_{i(\tau)+1}, \tau) x_0,$$

por lo que finalmente la matriz fundamental del sistema impulsivo lineal homogéneo corresponde a

$$\Psi(t, \tau) = \Phi(t, t_{i(t)}) \left[\prod_{j=i(\tau)+1}^{i(t)} (I + B_j) \Phi(t_j, t_{j-1}) \right] (I + B_{i(\tau)+1}) \Phi(t_{i(\tau)+1}, \tau) x_0. \quad (2.4)$$

Luego, toda solución del sistema (2.1) se puede escribir de la forma

$$x(t, \tau, x_0) = \Psi(t, \tau) x_0 \quad (2.5)$$

Es importante notar que para el caso autónomo $A(t) = A$, $B_i = B$; si las matrices B_i y A conmutan tenemos que la solución (2.5) se escribe de la forma

$$x(t, \tau, x_0) = e^{A(t-\tau)} (I + B)^{i(t,\tau)} x_0 \quad (2.6)$$

donde $i(t, \tau)$ corresponde al número de puntos t_i pertenecientes al intervalo $[\tau, t)$. Para el caso B_i y A no conmutativos, se tiene que la solución viene dada por la expresión

$$x(t, \tau, x_0) = \left(\prod_{j=i(\tau)+2}^{i(t)} (I + B_j) e^{A(t_j - t_{j-1})} \right) (I + B_{i(\tau)+1}) e^{A(t_{i(\tau)+1} - \tau)} x_0. \quad (2.7)$$

De esta manera, se puede apreciar que cuando $t \rightarrow \infty$ el comportamiento de las soluciones del sistema (2.1) para el caso $A(t) = A$ y $B_i = B$ depende de los valores propios de las matrices A y B y de las propiedades de la sucesión $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. En particular, si los instantes t_i son equidistantes, es decir, forman una progresión aritmética

$$t_{i+1} = t_i + \theta, \quad i \in \mathbb{N}_0$$

notemos que por un proceso inductivo obtenemos

$$t_i = \tau + i\theta, \quad i \in \mathbb{N}_0. \quad (2.8)$$

Ahora bien, si la matriz compleja $I + B$ es no singular, entonces $\ln(I + B)$ existe. Luego, de (2.6) y (2.8) se tiene

$$\begin{aligned} x(t, \tau, x_0) &= e^{A(t-\tau) + \ln(I+B)i(t,\tau)} x_0 \\ &= e^{A(t-\tau) + \ln(I+B)\left[\frac{t-\tau}{\theta}\right]} x_0 \\ &= e^{A(t-\tau) + \ln(I+B)\left(\frac{t-\tau}{\theta} - \left\{\frac{t-\tau}{\theta}\right\}\right)} x_0 \\ &= e^{-\ln(I+B)\left\{\frac{t-\tau}{\theta}\right\}} e^{(A + \frac{1}{\theta} \ln(I+B))(t-\tau)} x_0. \end{aligned}$$

Ahora bien, de (2.7) vemos que

$$\begin{aligned} x(t, t_0, x_0) &= \left(e^{\ln(I+B)} e^{A\theta} \right)^{\left[\frac{t-t_0}{\theta}\right]} x_0 \\ &= \left(e^{\ln(I+B) + A\theta} \right)^{\left(\frac{t-t_0}{\theta} - \left\{\frac{t-t_0}{\theta}\right\}\right)} x_0 \\ &= e^{-\left\{\frac{t-t_0}{\theta}\right\}(\ln(I+B) + A\theta)} e^{(A + \frac{1}{\theta} \ln(I+B))(t-t_0)} x_0 \end{aligned}$$

con $\frac{t-\tau}{\theta} = \left\{\frac{t-\tau}{\theta}\right\} + \left[\frac{t-\tau}{\theta}\right]$, donde $\{\cdot\}$ y $[\cdot]$ corresponden a la parte fraccionaria y entera respectivamente. Por ende, la estabilidad en ambos casos depende de la matriz $A + \frac{1}{\theta} \ln(I + B)$, pudiéndose afirmar que si las partes reales de todos los valores propios de esta matriz son negativos, entonces todas las soluciones de (2.1) convergerán a cero cuando $t \rightarrow \infty$. A raíz de lo anterior, podemos apreciar el importante papel que cumplen los instantes de impulso y su distribución en el comportamiento de la solución.

2.2 Sistema impulsivo lineal no homogéneo

Ahora, analizaremos el sistema impulsivo lineal homogéneo asociado a (2.1). A saber

$$\begin{aligned} x' &= A(t)x + f(t), & t &\neq t_i \\ x(t_i) &= (I + B_i)x(t_i^-) + h_i, & t &= t_i \end{aligned} \quad (2.9)$$

con $f(t) \in PC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, y $h_i \in \mathbb{R}^{n \times 1} \forall i \in \mathbb{N}$.

2.2.1 Fórmula de variación de parámetros

Nuestro objetivo será conseguir una fórmula de variación de parámetros para el sistema (2.9). Sea $t \in [t_{i(t)}, t_{i(t)+1})$, dado que el sistema (2.9) es del tipo ordinario, por lo que al aplicar la fórmula de variación de parámetros en dicho intervalo conseguimos

$$x(t) = \Phi(t, t_{i(t)})x_{i(t)} + \int_{t_{i(t)}}^t \Phi(t, s)f(s)ds. \quad (2.10)$$

Luego, se tiene

$$x(t_{i(t)+1}^-) = \Phi(t_{i(t)+1}, t_{i(t)})x_{i(t)} + \int_{t_{i(t)}}^{t_{i(t)+1}} \Phi(t_{i(t)+1}, s)f(s)ds,$$

por lo que aplicando la condición impulsiva se tiene

$$\begin{aligned} x(t_{i(t)+1}) &= (I + B_{i(t)+1})x(t_{i(t)+1}^-) + h_{i(t)+1} \\ &= (I + B_{i(t)+1}) \left[\Phi(t_{i(t)+1}, t_{i(t)})x_{i(t)} + \int_{t_{i(t)}}^{t_{i(t)+1}} \Phi(t_{i(t)+1}, s)f(s)ds \right] + h_{i(t)+1} \\ &= (I + B_{i(t)+1})\Phi(t_{i(t)+1}, t_{i(t)})x_{i(t)} + \int_{t_{i(t)}}^{t_{i(t)+1}} (I + B_{i(t)+1})\Phi(t_{i(t)+1}, s)f(s)ds + h_{i(t)+1}. \end{aligned}$$

Lo anterior nuevamente define una ecuación en diferencias finitas, cuya solución es

$$\begin{aligned} x(t_{i(t)}) &= \left(\prod_{k=i(\tau)+2}^{i(t)} (I + B_k) \Phi(t_k, t_{k-1}) \right) (I + B_{i(\tau)+1}) \Phi(t_{i(\tau)+1}, \tau)x_0 \\ &+ \left(\prod_{k=i(\tau)+2}^{i(t)} (I + B_k) \Phi(t_k, t_{k-1}) \right) \left(\int_{\tau}^{t_{i(\tau)+1}} (I + B_{i(\tau)+1}) \Phi(t_{i(\tau)+1}, s)f(s)ds \right) \\ &+ \sum_{r=i(\tau)+2}^{i(t)} \left(\prod_{k=r+1}^{i(t)} (I + B_k) \Phi(t_k, t_{k-1}) \right) \left(\int_{t_{r-1}}^{t_r} (I + B_r) \Phi(t_r, s)f(s)ds \right) \\ &+ \left(\prod_{k=i(\tau)+2}^{i(t)} (I + B_k) \Phi(t_k, t_{k-1}) \right) h_{i(\tau)+1} \\ &+ \sum_{r=i(\tau)+2}^{i(t)} \left(\prod_{k=r+1}^{i(t)} (I + B_k) \Phi(t_k, t_{k-1}) \right) h_r, \end{aligned}$$

la que en términos de la matriz fundamental (2.4) se reescribe como

$$x(t_{i(t)}) = \Psi(t_{i(t)}, \tau)x_0 + \int_{\tau}^{t_{i(t)}} \Psi(t_{i(t)}, s)f(s)ds + \sum_{\tau \leq t_r \leq t_{i(t)}} \Psi(t_{i(t)}, t_r)h_r. \quad (2.11)$$

Es importante recalcar que la expresión anterior define una solución discreta del sistema (2.9). Ahora, al aplicar (2.11) en (2.10), se obtiene

$$x(t) = \Phi(t, t_{i(t)}) \left[\Psi(t_{i(t)}, \tau)x_0 + \int_{\tau}^{t_{i(t)}} \Psi(t_{i(t)}, s)f(s)ds + \sum_{\tau \leq t_r \leq t_{i(t)}} \Psi(t_{i(t)}, t_r)h_r \right] + \int_{t_{i(t)}}^t \Phi(t, s)f(s)ds$$

con

$$\Psi(t_{i(t)}, \tau) = \left[\prod_{j=i(\tau)+2}^{i(t)} (I + B_j) \Phi(t_j, t_{j-1}) \right] (I + B_{(\tau)+1}) \Phi(t_{(\tau)+1}, \tau).$$

Entonces, por (2.4), se tiene

$$\Psi(t, \tau) = \Phi(t, t_{i(t)}) \left[\prod_{j=i(\tau)+2}^{i(t)} (I + B_j) \Phi(t_j, t_{j-1}) \right] (I + B_{(\tau)+1}) \Phi(t_{(\tau)+1}, \tau),$$

por lo que finalmente se consigue una fórmula de variación de parámetros para (2.9). A saber

$$x(t) = \Psi(t, \tau)x_0 + \int_{\tau}^t \Psi(t, s)f(s)ds + \sum_{\tau \leq t_r < t} \Psi(t, t_r)h_r, \quad (2.12)$$

con Ψ matriz fundamental del sistema lineal impulsivo homogéneo (2.1).

3 Funciones constantes a trozos y aproximaciones a la identidad

3.1 Funciones constantes a trozos

Una función parte entera o argumento constante a trozos $\gamma(t)$ es una función continua a trozos y localmente constante. El ejemplo más simple que podemos considerar corresponde a $\gamma(t) = [t]$, la cual tiene intervalos de constancia

$$[t] = n \Leftrightarrow n \leq t < n + 1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Es decir, $\gamma(t) = [t]$ es constante en todos los intervalos de la forma $[n, n + 1)$ con $n \in \mathbb{Z}$ y posee discontinuidades en $t = n$.

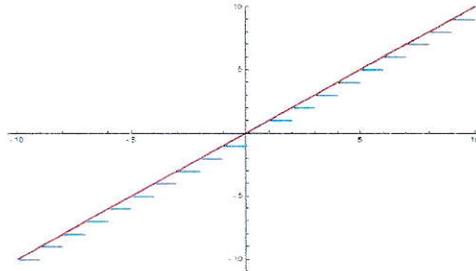


Fig. 8: $\gamma(t) = [t]$.

Cuando una tal función $\gamma(t)$ es empleada como argumento desviado en alguna ecuación diferencial, ella induce una división en dos partes de la solución: una de avance y otra de retardo con respecto a la identidad.

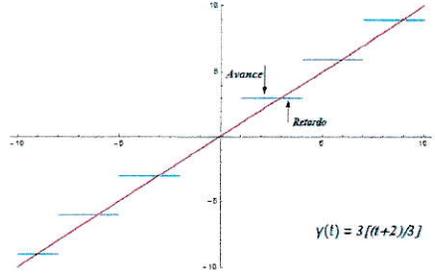


Fig. 9: Avance y retardo con respecto a la identidad.

En lo que sigue analizaremos algunos casos de funciones constantes a trozos que serán útiles en el futuro.

Sea $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sucesión tal que $t_i < t_{i+1} \forall i \in \mathbb{Z}$ con $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$ y $\lim_{i \rightarrow -\infty} t_i = -\infty$. Entonces:

1. $\gamma_1(t) = \frac{[mt]}{m}$ con $m \in \mathbb{R}, m \neq 0$:

Esta función constante a trozos representa un retardo total. Sus intervalos de constancia son de la forma $I_n = \left[\frac{n}{m}, \frac{n}{m} + \frac{1}{m}\right)$, ya que si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$[mt] = n \implies \frac{n}{m} \leq t < \frac{n}{m} + \frac{1}{m}$$

por lo tanto

$$\gamma(t) = \frac{[mt]}{m} \Leftrightarrow \frac{n}{m} \leq t < \frac{n}{m} + \frac{1}{m}.$$

Cabe destacar que el largo de los intervalos de constancia es $\frac{1}{m}$, por lo que se tiene que su largo tiende a cero cuando $m \rightarrow \infty$.

2. $\gamma_2(t) = \delta \left[\frac{t+k}{\delta}\right]$ con $\delta, k \in \mathbb{R}$ y $0 < k < \delta$:

Esta función es un caso muy general de función constante a trozos. A la luz del caso anterior, podemos analizar sus intervalos de constancia

$$\begin{aligned} \left[\frac{t+k}{\delta}\right] = n &\implies n \leq \frac{t+k}{\delta} < n+1 \\ &\implies n\delta - k \leq t < (n+1)\delta - k \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\gamma_2(t) = n\delta \Leftrightarrow n\delta - k \leq t < (n+1)\delta - k$$

En este caso, podemos observar un subintervalo de avance y otro de retardo. Es decir

$$\begin{aligned} \gamma_2(t) &\geq t \Leftrightarrow n\delta \geq t \text{ si } t \in [n\delta - k, n\delta] \\ \gamma_2(t) &\leq t \Leftrightarrow n\delta \leq t \text{ si } t \in [n\delta, n\delta + (n+1)\delta - k), \end{aligned}$$

por lo que el intervalo avanzado corresponde a $I_n^+ = [n\delta - k, n\delta]$ y el de retardo a $I_n^- = [n\delta, (n+1)\delta - k)$.

Es importante notar que si $k = 0$, entonces $\gamma_2(t) = \delta \left[\frac{t}{\delta}\right] = \gamma_1(t)$ con $\delta = \frac{1}{m}$. En esta situación, γ_2 representa un retardo total cuyo intervalo de constancia corresponde a $I_n^- = [n\delta, (n+1)\delta)$ con $\gamma_2(t) = n\delta$ si $t \in I_n^-$.

3. $\gamma_3(t) = t_i$ si $t \in [t_i, t_{i+1})$:

En este caso, γ_3 representa un retardo total con respecto a la identidad. Esta función es útil al momento de considerar un efecto del pasado al modelar situaciones del presente.

4. $\gamma_4(t) = t_{i+1}$ si $t \in [t_i, t_{i+1})$:

γ_4 representa un avance total con respecto a la identidad. Esta función es útil al momento de introducir un efecto anticipatorio del estado presente con datos del futuro. Ella es aplicable, por ejemplo, en áreas tales como economía.

Los ejemplos anteriores pueden ser descritos mediante la definición de una *función constante a trozos generalizada*:

Definición 1 Sean $(\zeta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sucesiones tales que $t_i \leq \zeta_i \leq t_{i+1}$. Entonces definimos la *función constante a trozos generalizada* dada por

$$\gamma(t) = \zeta_i \text{ si } t \in [t_i, t_{i+1}), \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Así, para los ejemplos anteriormente dados, tenemos

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) = \frac{[mt]}{m} &\implies \zeta_i = t_i = \frac{i}{m}. \\ \gamma_2(t) = \delta \left[\frac{t+k}{\delta} \right] &\implies \zeta_i = i\delta \text{ y } t_i = i\delta - k, \quad 0 < k < \delta. \\ \gamma_3(t) = t_i &\implies \zeta_i = t_i. \\ \gamma_4(t) = t_{i+1} &\implies \zeta_i = t_{i+1}. \end{aligned}$$

3.2 Aproximaciones a la identidad

Uno de los usos de una tal función $\gamma(t)$ es de producir aproximaciones de soluciones de ecuaciones diferenciales al utilizar una función constante a trozos que aproxime a la identidad, generando así soluciones aproximantes.

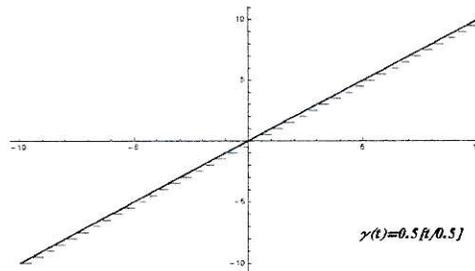


Fig. 10: Convergencia a la identidad

La gráfica anterior dice relación a un caso muy especial de función constante a trozos: si consideramos $\gamma(t) = \left[\frac{t}{\delta} \right] \delta$, con $\delta > 0$ pequeño, obtenemos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left| \left[\frac{t}{\delta} \right] \delta - t \right| = 0.$$

Lo anterior, implica una aproximación uniforme de la identidad, y por ende, un aproximante apropiado.

Teorema 3.1 Sean $[\cdot]$ la función parte entera, $\delta \in \mathbb{R}$ con $\delta > 0$ y $m \in \mathbb{N}$. Entonces se tiene

$$\left[\frac{t}{\delta} \right] \delta \rightrightarrows t, \quad \text{cuando } \delta \rightarrow 0 \iff \frac{[mt]}{m} \rightrightarrows t, \quad \text{cuando } m \rightarrow \infty.$$

en donde " \rightrightarrows " representa a la convergencia uniforme.



Demostración: Si

$$[mt] = n$$

entonces

$$\frac{n}{m} \leq t < \frac{n}{m} + \frac{1}{m}.$$

Luego, si $t \in \left[\frac{n}{m}, \frac{n}{m} + \frac{1}{m}\right)$ entonces $\frac{[mt]}{m} = \frac{n}{m}$. Por lo que

$$\begin{aligned} \left| \frac{[mt]}{m} - t \right| &= \left| \frac{n}{m} - t \right| \\ &< \left| \frac{n}{m} - \left(\frac{n}{m} + \frac{1}{m} \right) \right| \end{aligned}$$

es decir

$$\left| \frac{[mt]}{m} - t \right| < \frac{1}{m}. \quad (3.1)$$

De la expresión anterior se deduce que cuando m es lo suficientemente grande, entonces

$$\frac{[mt]}{m} \Rightarrow t, \quad \text{cuando } m \rightarrow \infty.$$

Para el caso $\gamma(t) = \left[\frac{t}{\delta}\right] \delta$, basta tomar $\delta = \frac{1}{m}$ y se tiene el resultado análogo. ■

A continuación mencionaremos algunas observaciones elementales, pero muy importantes, en relación a $\gamma(t) = \left[\frac{t}{\delta}\right] \delta$ las cuales serán útiles en el futuro:

Observación 1 Si $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de números reales tal que $t_{r+1} > t_r \forall r \in \mathbb{Z}$, con $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$ y $\lim_{i \rightarrow -\infty} t_i = -\infty$. Si

$$\delta \leq t_{r+1} - t_r, \quad \forall r \in \mathbb{Z},$$

entonces

$$\delta \leq \gamma(t_{r+1}) - \gamma(t_r), \quad \forall r \in \mathbb{Z}.$$

En efecto, si

$$\delta \leq t_{r+1} - t_r, \quad \forall r \in \mathbb{Z},$$

ello implica

$$t_r + \delta \leq t_{r+1}, \quad \forall r \in \mathbb{Z}.$$

Luego, como la función $\gamma(t) = \left[\frac{t}{\delta}\right] \delta$ es no-decreciente, se tiene

$$\gamma(t_r + \delta) \leq \gamma(t_{r+1}), \quad \forall r \in \mathbb{Z}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \gamma(t_r + \delta) &= \left[\frac{t_r + \delta}{\delta} \right] \delta \\ &= \left[\frac{t_r}{\delta} + 1 \right] \delta \\ &= \left[\frac{t_r}{\delta} \right] \delta + \delta \\ &= \gamma(t_r) + \delta, \end{aligned}$$

por lo que se tiene

$$\delta \leq \gamma(t_{r+1}) - \gamma(t_r), \quad \forall r \in \mathbb{Z}.$$

Ahora, si

$$t_{r+1} - t_r = \delta,$$

como consecuencia de lo anterior se tiene

$$\gamma(t_{r+1}) - \gamma(t_r) = \delta, \quad \forall r \in \mathbb{Z}.$$

Observación 2 Sea $\gamma(t) = \left[\frac{t}{\delta}\right] \delta$ con $\delta > 0$. Entonces

$$0 \leq t - \gamma(t) < \delta, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En efecto, por definición de parte entera se tiene

$$\frac{t}{\delta} - 1 < \left[\frac{t}{\delta}\right] \leq \frac{t}{\delta},$$

lo que implica

$$-t \leq -\left[\frac{t}{\delta}\right] \delta < -t + \delta.$$

Luego

$$0 \leq t - \gamma(t) < \delta, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Observación 3 Si

$$\gamma(t_{r+1}) - \gamma(t_r) = \delta, \quad \forall r \in \mathbb{Z}, \quad (3.2)$$

entonces se tiene

$$\left. \begin{array}{l} t_r \in I_{(n-1)\delta} = [(n-1)\delta, n\delta), \\ t_{r+1} \in I_{n\delta} = [n\delta, (n+1)\delta), \end{array} \right\} \text{algún } n \in \mathbb{Z}.$$

En efecto, de (3.2) se tiene

$$\begin{aligned} \left[\frac{t_{r+1}}{\delta}\right] \delta &= \left[\frac{t_r}{\delta}\right] \delta + \delta \\ &= \left[\frac{t_r + \delta}{\delta}\right] \delta. \end{aligned}$$

Luego, si

$$\left[\frac{t_{r+1}}{\delta}\right] = n, \text{ algún } n \in \mathbb{Z},$$

se tiene

$$n\delta \leq t_{r+1} < (n+1)\delta.$$

Análogamente al considerar

$$\left[\frac{t_r + \delta}{\delta}\right] = n,$$

se tiene

$$(n-1)\delta \leq t_r < n\delta.$$

Es decir,

$$t_r \in I_{(n-1)\delta} \text{ y } t_{r+1} \in I_{n\delta}.$$

Capítulo II

Existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales impulsivas con argumento constante a trozos del tipo generalizado

Este capítulo es introductorio y pretende dar las bases para el estudio de las ecuaciones diferenciales impulsivas con argumento constante a trozos del tipo generalizado, que en adelante llamaremos *IDEPCAG*.

Primero, construiremos la matriz fundamental del sistema lineal impulsivo homogéneo IDEPCAG, con lo que deduciremos la fórmula de variación de parámetros correspondiente. Luego, mostraremos dos desigualdades del tipo Gronwall-Bellman que nos serán de gran utilidad para demostrar resultados de unicidad y estabilidad. A continuación construiremos la fórmula de variación de parámetros para el caso semilineal con argumento constante a trozos, para finalmente demostrar existencia y unicidad de soluciones al considerar condiciones del tipo Lipschitz.

4 Ecuaciones diferenciales impulsivas con argumento constante a trozos

En esta sección, se definirá lo que se entenderá por solución de una ecuación impulsiva con argumento constante a trozos del tipo generalizado, ayudados de la definición de solución de una ecuación con argumento constante a trozos del tipo generalizado (DEPCAG) (Ver [17] – [19]).

4.1 Introducción: Ecuaciones Diferenciales con Argumento Constante a Trozos del Tipo Generalizado

En [4], M.U.Akhmet consideró la ecuación

$$x'(t) = f(t, x(t), x(\gamma(t)))$$

en donde $\gamma(t)$ es un *argumento constante a trozos generalizado*.

Es decir, dadas $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ y $(\zeta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tales que $t_i < t_{i+1} \forall i \in \mathbb{Z}$ con $\lim_{|i| \rightarrow \infty} t_i = \infty$ y

$$t_i \leq \zeta_i \leq t_{i+1},$$

se tiene que $\forall t \exists i(t) \in \mathbb{Z}$ tal que si $t \in I_i = [t_i, t_{i+1})$, entonces

$$\gamma(t) = \zeta_i.$$

Estas ecuaciones son llamadas *Ecuaciones Diferenciales con Argumento Constante a Trozos del Tipo Generalizado (DEPCAG)*.

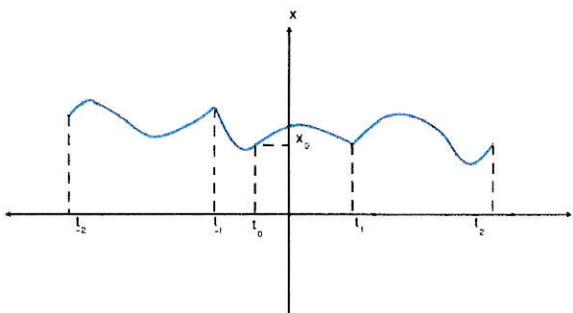


Fig. 11: Solución DEPCAG

Algunas propiedades de las soluciones DEPCAG son las siguientes:

- Estas ecuaciones tienen *soluciones continuas*, a pesar de que $\gamma(t)$ no lo es.
- En los extremos de los intervalos de constancia, estas ecuaciones generan una ley recursiva la cual da origen a una *ecuación discreta*.
- Corresponden al tipo *híbridas* ya que combinan tanto propiedades de ecuaciones discretas como de continuas.

4.2 Soluciones de ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos del tipo generalizado con impulsos

En una DEPCAG, al no considerar la continuidad en los extremos de los intervalos $I_i = [t_i, t_{i+1})$; o dicho de otra manera, al considerar una condición de salto en dichos puntos, se da origen a las *Ecuaciones Diferenciales con Argumento Constante a Trozos del tipo Generalizado con Impulsos (IDEPCAG)*

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), x(\gamma(t))), & t \neq t_i \\ \Delta x|_{t=t_i} &= Q_i(x(t_i^-)), & t = t_i \end{aligned} \quad (4.1)$$

Definición 2 Una función $x(t)$ es solución del sistema IDEPCAG (4.1) si:

- Ella es una función continua a trozos con discontinuidades de primera especie en los puntos $t = t_i$ y diferenciable $\forall t \neq t_i$, es decir $x(t) \in PC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.
- En cada intervalo de forma $I_i = [t_i, t_{i+1})$ satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$x'(t) = f(t, x(t), x(\zeta_i)).$$

- Para $t = t_i$, la solución de (4.1) satisface la *ley discreta de salto*

$$\Delta x|_{t=t_i} = x(t_i) - x(t_i^-) = Q_i(x(t_i^-)),$$

donde asumiremos que el límite lateral izquierdo

$$x(t_i^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_i \\ t < t_i}} x(t)$$

existe $\forall t_i$ con $i \in \mathbb{N}$ y $x(t_i^+) = x(t_i)$ está definido por

$$x(t_i) = x(t_i^-) + Q_i(x(t_i^-)).$$

Así, las soluciones de una IDEPCAG son de la forma

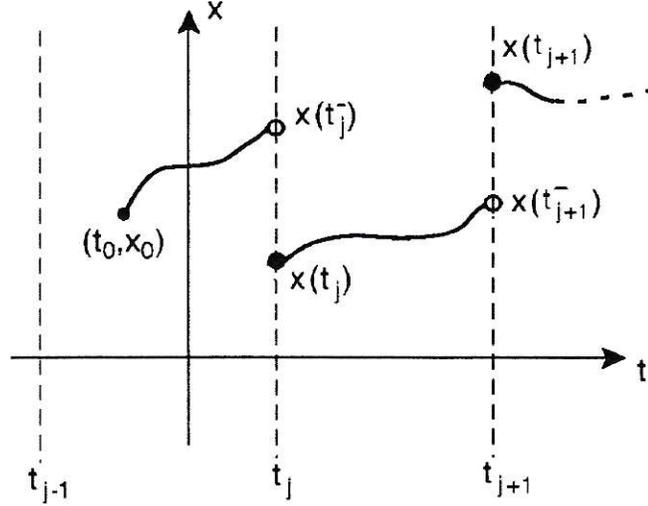


Fig. 12: Solución IDEPCAG.

5 Desigualdades del tipo Gronwall-Bellman para IDEPCAG

En esta sección enunciaremos y demostraremos dos nuevas desigualdades del tipo Gronwall-Bellman que serán de gran interés, pues ellas nos permitirán dar con resultados relativos a existencia, unicidad, acotación y estabilidad de soluciones IDEPCAG. Ambas desigualdades extienden a las logradas en [18], [19] y [42] para ecuaciones del tipo *DEPCAG*.

5.1 Primera desigualdad impulsiva de Gronwall-Pinto

Lema 5.1 Sea I intervalo. Sean $u, \eta_1, \eta_2 : I \rightarrow [0, \infty)$ tales que u, η_1, η_2 son funciones continuas; η_1, η_2 funciones localmente integrables y $\eta : \{t_i\} \rightarrow [0, \infty)$. Sea, además, α una constante no negativa y $\gamma(t)$ una función constante a trozos tal que $\gamma(t) = \zeta_i$, para todo $t \in I_i = [t_i, t_{i+1})$ con $t_i \leq \zeta_i < t_{i+1} \forall i \in \mathbb{N}$. Asumamos que $\forall t \geq \tau$ se cumplen

$$u(t) \leq \alpha + \int_{\tau}^t [\eta_1(s)u(s) + \eta_2(s)u(\gamma(s))] ds + \sum_{\tau \leq t_i < t} \eta(t_i)u(t_i^-) \quad (5.1)$$

y

$$\vartheta_i = \int_{t_i}^{\zeta_i} (\eta_2(s)e^{\int_s^{\zeta_i} \eta_1(r) dr}) ds \leq \vartheta := \sup_{i \in \mathbb{N}} \vartheta_i < 1. \quad (5.2)$$

Entonces, para $t \geq \tau$, se tiene

$$\begin{aligned}
u(t) \leq u(t) &\leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^{i(t)} (1 + \eta(t_k)) \right) \\
&\cdot \exp \left(\frac{1}{1-\vartheta} \sum_{k=i(\tau)+1}^{i(t)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta_2(s) \exp \left(\int_{t_{k-1}}^{\zeta_{k-1}} \eta_1(r) dr \right) ds \right. \\
&\left. + \frac{1}{1-\vartheta} \int_{t_{i(t)}}^t \eta_2(s) \exp \left(\int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_1(r) dr \right) ds + \int_{\tau}^t \eta_1(s) ds \right) u(\tau).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Demostración: A fin de demostrar (5.3), llamaremos al miembro derecho de (5.1) como $v(t)$. Luego tenemos que $u(\tau) \leq v(\tau)$ y luego, por definición tenemos que $u(t) \leq v(t)$, $\forall t \geq \tau$. Como todos los integrandos de (5.1) son positivos, se tiene que v es creciente. Ahora, al derivar $v(t)$ obtenemos

$$v'(t) = \eta_1(t)u(t) + \eta_2(t)u(\gamma(t)).$$

Luego, se tiene

$$v'(t) \leq \eta_1(t)v(t) + \eta_2(t)v(\gamma(t)), \tag{5.4}$$

$$v(t_i) \leq (1 + \eta(t_i))v(t_i^-), \tag{5.5}$$

por lo que multiplicando por el factor $\exp\left(-\int_{\tau}^t \eta_1(s) ds\right)$ la expresión anterior se tiene

$$(v'(t) - \eta_1(t)v(t)) \exp\left(-\int_{\tau}^t \eta_1(s) ds\right) \leq \eta_2(t)v(\gamma(t)) \exp\left(-\int_{\tau}^t \eta_1(s) ds\right). \tag{5.6}$$

Ahora, integrando (5.6) entre t y r con $t, r \in I_i = [t_{i(t)}, t_{i(t)+1})$ se tiene

$$\int_{\tau}^t (v'(s) - \eta_1(s)v(s)) \exp\left(-\int_{\tau}^s \eta_1(r) dr\right) ds \leq \int_{\tau}^t \eta_2(s)v(\gamma(s)) \exp\left(-\int_{\tau}^s \eta_1(r) dr\right) ds. \tag{5.7}$$

Luego, observando que

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau}^t \left[v'(s) \exp\left(-\int_{\tau}^s \eta_1(r) dr\right) + \exp\left(-\int_{\tau}^s \eta_1(r) dr\right) (-\eta_1(s))v(s) \right] ds \\
&= v(t) \exp\left(-\int_{\tau}^t \eta_1(r) dr\right) - v(\tau),
\end{aligned}$$

(5.7) se reescribe como

$$v(t) \exp\left(-\int_{\tau}^t \eta_1(r) dr\right) - v(\tau) \leq \int_{\tau}^t \eta_2(s)v(\gamma(s)) \exp\left(-\int_{\tau}^s \eta_1(r) dr\right) ds. \tag{5.8}$$

Ahora, al evaluar en $t = \zeta_{i(t)}$ y $\tau = t_{i(t)}$, se tiene que para $t \in [t_{i(t)}, \zeta_{i(t)}]$ (5.8) resulta

$$\begin{aligned} v(\zeta_{i(t)}) \exp\left(-\int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_1(\tau) d\tau\right) - v(t_{i(t)}) &\leq \int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_2(s) v(\gamma(s)) \exp\left(-\int_{t_{i(t)}}^s \eta_1(\tau) d\tau\right) ds \\ &= v(\zeta_{i(t)}) \int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_2(s) \exp\left(-\int_{t_{i(t)}}^s \eta_1(\tau) d\tau\right) ds, \end{aligned}$$

obteniéndose

$$v(\zeta_{i(t)}) \left(\exp\left(-\int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_1(\tau) d\tau\right) - \int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_2(s) \exp\left(-\int_{t_{i(t)}}^s \eta_1(\tau) d\tau\right) ds \right) \leq v(t_{i(t)}).$$

Al multiplicar la última expresión por $\exp\left(\int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_1(\tau) d\tau\right)$, se tiene

$$v(\zeta_{i(t)}) \left(1 - \int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_2(s) \exp\left(\int_s^{\zeta_{i(t)}} \eta_1(\tau) d\tau\right) ds \right) \leq v(t_{i(t)}) \exp\left(\int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_1(\tau) d\tau\right).$$

Luego, por hipótesis, $(1 - \int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_2(s) \exp(\int_s^{\zeta_{i(t)}} \eta_1(\tau) d\tau) ds)$ es positivo, por lo que se tiene

$$v(\zeta_{i(t)}) \leq v(t_{i(t)}) \left(\frac{\exp\left(\int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_1(\tau) d\tau\right)}{1 - \int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_2(s) \exp\left(\int_s^{\zeta_{i(t)}} \eta_1(\tau) d\tau\right) ds} \right).$$

Es decir,

$$v(\zeta_{i(t)}) \leq v(t_{i(t)}) \frac{1}{1 - \vartheta} \exp\left(\int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_1(\tau) d\tau\right). \quad (5.9)$$

Ahora, al aplicar (5.9) en (5.8) para $t \in I_{i(t)}$ con $\tau = t_{i(t)}$, y considerando que $v(t_{i(t)}) \leq v(s)$ si $s \in I_{i(t)}$, se obtiene

$$v(t) \exp\left(-\int_{t_{i(t)}}^t \eta_1(\tau) d\tau\right) - v(t_{i(t)}) \leq \frac{1}{1 - \vartheta} \int_{t_{i(t)}}^t \eta_2(s) \exp\left(\int_{t_{i(t)}}^s \eta_1(\tau) d\tau\right) v(s) \exp\left(-\int_{t_{i(t)}}^s \eta_1(\tau) d\tau\right) ds.$$

Es decir

$$v(t) \exp\left(-\int_{t_{i(t)}}^t \eta_1(\tau) d\tau\right) \leq v(t_{i(t)}) + \frac{1}{1 - \vartheta} \int_{t_{i(t)}}^t \eta_2(s) \exp\left(\int_{t_{i(t)}}^s \eta_1(\tau) d\tau\right) v(s) \exp\left(-\int_{t_{i(t)}}^s \eta_1(\tau) d\tau\right) ds. \quad (5.10)$$

Nombrando a

$$h(t) = v(t) \exp\left(-\int_{t_{i(t)}}^t \eta_1(\tau) d\tau\right), \quad (5.11)$$

la expresión (5.10) puede reescribirse como

$$h(t) \leq h(t_{i(t)}) + \frac{1}{1-\vartheta} \int_{t_{i(t)}}^t \eta_2(s) \exp\left(\int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_1(r) dr\right) h(s) ds. \quad (5.12)$$

Luego, al aplicar la desigualdad de Gronwall-Bellman clásica a (5.12) se obtiene

$$h(t) \leq h(t_{i(t)}) \exp\left(\frac{1}{1-\vartheta} \int_{t_{i(t)}}^t \eta_2(s) \exp\left(\int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_1(r) dr\right) ds\right),$$

la que, por (5.11), corresponde a

$$v(t) \exp\left(-\int_{t_{i(t)}}^t \eta_1(r) dr\right) \leq v(t_{i(t)}) \exp\left(\frac{1}{1-\vartheta} \int_{t_{i(t)}}^t \eta_2(s) \exp\left(\int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_1(r) dr\right) ds\right).$$

O sea

$$v(t) \leq v(t_{i(t)}) \exp\left(\int_{t_{i(t)}}^t \eta_1(s) ds + \frac{1}{1-\vartheta} \int_{t_{i(t)}}^t \eta_2(s) \exp\left(\int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_1(r) dr\right) ds\right). \quad (5.13)$$

Luego, cuando $t \rightarrow t_{i(t)+1}^-$, se tiene

$$v(t_{i(t)+1}^-) \leq v(t_{i(t)}) \exp\left(\int_{t_{i(t)}}^{t_{i(t)+1}} \eta_1(s) ds + \frac{1}{1-\vartheta} \int_{t_{i(t)}}^{t_{i(t)+1}} \eta_2(s) \exp\left(\int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_1(r) dr\right) ds\right) \quad (5.14)$$

y debido al efecto impulsivo (5.5), tenemos que

$$v(t_{i(t)+1}) \leq (1 + \eta(t_{i(t)+1})) v(t_{i(t)+1}^-).$$

Como η es positiva, al multiplicar (5.14) por el factor $(1 + \eta(t_{i(t)}))$ se obtiene

$$v(t_{i(t)+1}) \leq (1 + \eta(t_{i(t)+1})) v(t_{i(t)}) \exp\left(\int_{t_{i(t)}}^{t_{i(t)+1}} \eta_1(s) ds + \frac{1}{1-\vartheta} \int_{t_{i(t)}}^{t_{i(t)+1}} \eta_2(s) \exp\left(\int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_1(r) dr\right) ds\right), \quad (5.15)$$

resultado una inecuación en diferencias finitas cuya solución es

$$v(t_{i(t)}) \leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^{i(t)} (1 + \eta(t_k)) \exp\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta_1(s) ds + \frac{1}{1-\vartheta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta_2(s) \exp\left(\int_{t_{k-1}}^{\zeta_{k-1}} \eta_1(r) dr\right) ds\right) \right) v(\tau). \quad (5.16)$$

Es importante notar en este punto notar que como $u(t) \leq v(t) \forall t \geq \tau$ y $u(\tau) = v(\tau)$, entonces se tiene

$$u(t_{i(t)}) \leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^{i(t)} (1 + \eta(t_k)) \exp\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta_1(s) ds + \frac{1}{1-\vartheta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta_2(s) \exp\left(\int_{t_{k-1}}^{\zeta_{k-1}} \eta_1(r) dr\right) ds\right) \right) u(\tau). \quad (5.17)$$

La expresión anterior corresponde a una desigualdad del tipo Gronwall-Bellman para el caso discreto.

Ahora, al aplicar (5.16) en (5.13) se obtiene

$$v(t) \leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^{i(t)} (1 + \eta(t_k)) \exp \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta_1(s) ds + \frac{1}{1-\vartheta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta_2(s) \exp \left(\int_{t_{k-1}}^{\zeta_{k-1}} \eta_1(r) dr \right) ds \right) \right) \cdot \exp \left(\int_{t_{i(t)}}^t \eta_1(s) ds + \frac{1}{1-\vartheta} \int_{t_{i(t)}}^t \eta_2(s) \exp \left(\int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_1(r) dr \right) ds \right) v(\tau), \quad (5.18)$$

y, nuevamente debido a que $u(t) \leq v(t)$ con $\forall t \geq \tau$ y $u(\tau) = v(\tau)$, finalmente se consigue

$$u(t) \leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^{i(t)} (1 + \eta(t_k)) \right) \cdot \exp \left(\frac{1}{1-\vartheta} \sum_{k=i(\tau)+1}^{i(t)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta_2(s) \exp \left(\int_{t_{k-1}}^{\zeta_{k-1}} \eta_1(r) dr \right) ds + \frac{1}{1-\vartheta} \int_{t_{i(t)}}^t \eta_2(s) \exp \left(\int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_1(r) dr \right) ds + \int_{\tau}^t \eta_1(s) ds \right) u(\tau). \quad (5.19)$$

Así, queda demostrado (5.3). ■

5.2 Segunda desigualdad impulsiva de Gronwall-Pinto

De la misma manera, a continuación enunciaremos y demostraremos una segunda desigualdad del tipo Gronwall que usaremos en el resto del presente trabajo.

Lema 5.2 *Sea I intervalo. Sean $u, \eta_1, \eta_2 : I \rightarrow [0, \infty)$ tales que u, η_1, η_2 son funciones continuas; η_1, η_2 funciones localmente integrables y $\eta : \{t_i\} \rightarrow [0, \infty)$. Sea, además, α una constante no negativa y $\gamma(t)$ una función constante a trozos tal que $\gamma(t) = \zeta_i$, para todo $t \in I_i = [t_i, t_{i+1})$ con $t_i \leq \zeta_i \leq t_{i+1} \forall i \in \mathbb{N}$. Asumamos que $\forall t \geq \tau$ se cumple*

$$u(t) \leq \alpha + \int_{\tau}^t (\eta_1(s)u(s) + \eta_2(s)u(\gamma(s))) ds + \sum_{\tau \leq t_i < t} \eta(t_i)u(t_i^-)$$

y

$$\widehat{\vartheta}_i = \int_{t_i}^{\zeta_i} (\eta_1(s) + \eta_2(s)) ds \leq \widehat{\vartheta} := \sup_{i \in \mathbb{N}} \widehat{\vartheta}_i < 1. \quad (5.20)$$

Entonces, para $t \geq \tau$, se tiene

$$u(t) \leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^{i(t)} (1 + \eta(t_k)) \right) \exp \left(\int_{\tau}^t \left(\eta_1(s) + \frac{\eta_2(s)}{1-\widehat{\vartheta}} \right) ds \right) u(\tau) \quad (5.21)$$

Demostración: A fin de demostrar (5.21), nuevamente llamaremos al miembro derecho de (5.1) como $v(t)$. Al igual que para el caso anterior, se tiene que $u(\tau) \leq v(\tau)$ y luego $u(t) \leq v(t)$, $\forall t \geq \tau$, además del hecho que v sea creciente. Ahora, al derivar $v(t)$ obtenemos

$$v'(t) = \eta_1(t)u(t) + \eta_2(t)u(\gamma(t)).$$

Luego, dado que $u(t) \leq v(t)$ se tiene

$$v'(t) \leq \eta_1(t)v(t) + \eta_2(t)v(\gamma(t)).$$

Integrando la expresión anterior entre τ y t se obtiene

$$v(t) - v(\tau) \leq \int_{\tau}^t \eta_1(s)v(s) + \eta_2(s)v(\gamma(s))ds, \quad (5.22)$$

por lo que al considerar $\tau = t_{i(t)}$ y $t = \zeta_{i(t)}$ en (5.22) y, gracias al hecho de que $v(t)$ es creciente, se tiene

$$\begin{aligned} v(\zeta_{i(t)}) - v(t_{i(t)}) &\leq \int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} \eta_1(s)v(s) + \eta_2(s)v(\gamma(s))ds \\ &\leq v(\zeta_{i(t)}) \int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} (\eta_1(s) + \eta_2(s)) ds. \end{aligned}$$

Luego, dado que $\widehat{\vartheta} < 1$, se obtiene

$$v(\zeta_{i(t)}) \leq \frac{1}{1 - \widehat{\vartheta}} v(t_{i(t)}). \quad (5.23)$$

Ahora, al aplicar (5.23) en (5.22) para $\tau = t_{i(t)}$ y $t \in I_{i(t)}$, y considerando que $v(t)$ es creciente, es decir, $v(t_{i(t)}) \leq v(s)$ si $t_{i(t)} < s$, se consigue

$$\begin{aligned} v(t) - v(t_{i(t)}) &\leq \int_{t_{i(t)}}^t \eta_1(s)v(s) + \frac{1}{1 - \widehat{\vartheta}} \eta_2(s)v(t_{i(t)})ds \\ &\leq \int_{t_{i(t)}}^t \left(\eta_1(s) + \frac{1}{1 - \widehat{\vartheta}} \eta_2(s) \right) v(s)ds, \end{aligned}$$

es decir

$$v(t) \leq v(t_{i(t)}) + \int_{t_{i(t)}}^t \left(\eta_1(s) + \frac{1}{1 - \widehat{\vartheta}} \eta_2(s) \right) v(s)ds. \quad (5.24)$$

A continuación, al aplicar el lema de Bellman-Gronwall clásico a la desigualdad anterior, se logra

$$v(t) \leq v(t_{i(t)}) \exp \left(\int_{t_{i(t)}}^t \eta_1(s) + \frac{1}{1 - \widehat{\vartheta}} \eta_2(s) ds \right). \quad (5.25)$$

Luego, evaluando la expresión anterior para $t = t_{i(t)+1}^-$, se obtiene

$$v(t_{i(t)+1}^-) \leq v(t_{i(t)}) \exp \left(\int_{t_{i(t)}}^{t_{i(t)+1}} \eta_1(s) + \frac{1}{1-\vartheta} \eta_2(s) ds \right),$$

por lo que al considerar (5.5) se tiene que

$$\begin{aligned} v(t_{i(t)+1}) &\leq (1 + \eta(t_{i(t)+1})) v(t_{i(t)+1}^-) \\ &\leq (1 + \eta(t_{i(t)+1})) v(t_{i(t)}) \exp \left(\int_{t_{i(t)}}^{t_{i(t)+1}} \eta_1(s) + \frac{1}{1-\vartheta} \eta_2(s) ds \right), \end{aligned} \quad (5.26)$$

lo que define una inecuación en diferencias finitas, cuya solución es

$$\nu(t_{i(t)}) \leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^{i(t)} (1 + \eta(t_k)) \exp \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta_1(s) + \frac{1}{1-\vartheta} \eta_2(s) ds \right) \right) \nu(\tau). \quad (5.27)$$

Luego, como $u(t) \leq \nu(t) \forall t \geq \tau$ y $u(\tau) = \nu(\tau)$ se tiene

$$u(t_{i(t)}) \leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^{i(t)} (1 + \eta(t_k)) \exp \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta_1(s) + \frac{1}{1-\vartheta} \eta_2(s) ds \right) \right) u(\tau), \quad (5.28)$$

la cual representa una desigualdad del tipo Gronwall discreta. Ahora, al reemplazar (5.27) en (5.25) se obtiene

$$\begin{aligned} v(t) &\leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^{i(t)} (1 + \eta(t_k)) \exp \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta_1(s) + \frac{1}{1-\vartheta} \eta_2(s) ds \right) \right) \\ &\cdot \exp \left(\int_{t_{i(t)}}^t \eta_1(s) + \frac{1}{1-\vartheta} \eta_2(s) ds \right) \nu(\tau). \end{aligned}$$

Como $u(t) \leq \nu(t) \forall t \geq \tau$ y $u(\tau) = \nu(\tau)$, se tiene

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^{i(t)} (1 + \eta(t_k)) \exp \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta_1(s) + \frac{1}{1-\vartheta} \eta_2(s) ds \right) \right) \\ &\cdot \exp \left(\int_{t_{i(t)}}^t \eta_1(s) + \frac{1}{1-\vartheta} \eta_2(s) ds \right) u(\tau), \end{aligned}$$

es decir,

$$u(t) \leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^{i(t)} (1 + \eta(t_k)) \right) \exp \left(\int_{\tau}^t \left(\eta_1(s) + \frac{1}{1-\vartheta} \eta_2(s) \right) ds \right) u(\tau), \quad (5.29)$$

con lo que se obtiene el resultado deseado. ■

5.3 Casos particulares: Avance y retardo totales

Es importante recalcar dos casos interesantes: $\gamma(t) = t_{i(t)}$ y $\gamma(t) = t_{i(t)+1}$, correspondientes a retardo total y avance total respectivamente. Para el caso de retardo total se tiene que $\nu = 0 = \widehat{\vartheta}$, por lo que (5.19) y (5.29), adquieren la forma

$$u(t) \leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^{i(t)} (1 + \eta(t_k)) \right) \exp \left(\int_{\tau}^t \eta_1(s) + \eta_2(s) ds \right) u(\tau). \quad (5.30)$$

Para el caso totalmente avanzado se tiene que (5.19) corresponde a

$$\begin{aligned} u(t) \leq & \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^{i(t)} (1 + \eta(t_k)) \right) \\ & \cdot \exp \left(\frac{1}{1 - \widehat{\vartheta}} \sum_{k=i(\tau)+1}^{i(t)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta_2(s) \exp \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta_1(r) dr \right) ds \right. \\ & \left. + \frac{1}{1 - \widehat{\vartheta}} \int_{t_{i(t)}}^t \eta_2(s) \exp \left(\int_{t_{i(t)}}^{t_{i(t)+1}} \eta_1(\tau) d\tau \right) ds + \int_{\tau}^t \eta_1(s) ds \right) u(\tau), \end{aligned} \quad (5.31)$$

mientras que (5.29) corresponde a

$$u(t) \leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^{i(t)} (1 + \eta(t_k)) \right) \exp \left(\int_{\tau}^t \eta_1(s) + \frac{1}{1 - \widehat{\vartheta}} \eta_2(s) ds \right) u(\tau),$$

donde

$$\widehat{\vartheta}_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\eta_1(s) + \eta_2(s)) ds \leq \widehat{\vartheta} := \sup_{i \in \mathbb{N}} \widehat{\vartheta}_i < 1.$$

6 Existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales impulsivas con argumento constante a trozos del tipo generalizado

En lo que sigue estudiaremos el problema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales impulsivas con argumento constante a trozos. Consideraremos el siguiente sistema IDEPCAG

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), x(\gamma(t))), & t \neq t_i \\ x(t_i) - x(t_i^-) &= Q_i(x(t_i^-)), & t = t_i, \\ x(\tau) &= x_0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde $f \in C([\tau, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, con I intervalo de la forma $I_i = [t_i, t_{i+1})$, $Q_i \in C(\{t_i\}, \mathbb{R}^n)$ y $(\tau, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Además, sean $\eta_1, \eta_2 : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ funciones localmente integrables y $\omega_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \mathbb{Z}$; tales que

$$\|f(t, x_1, \widetilde{x}_1) - f(t, x_2, \widetilde{x}_2)\| \leq \eta_1(t) \|x_1 - x_2\| + \eta_2(t) \|\widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2\|, \quad (6.2)$$

$$\|Q_i(x_1(t_i^-)) - Q_i(x_2(t_i^-))\| \leq \omega_i \|x_1(t_i^-) - x_2(t_i^-)\|. \quad (6.3)$$

con

$$\bar{\nu} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\eta_1(s) + \eta_2(s)) ds \right) < 1. \quad (6.4)$$

6.1 Ecuación integral asociada a (6.1)

En esta sección explicitaremos una ecuación integral que satisface (6.1)

Teorema 6.1 *Una función $x(t) = x(t, \tau, x_0)$, donde τ es un número real fijo, es solución de (6.1) en \mathbb{R}^+ si y sólo si ella es solución, sobre \mathbb{R}^+ , de la siguiente ecuación integral:*

$$x(t) = x_0 + \int_{\tau}^t f(s, x(s), x(\gamma(s))) ds + \sum_{k=1}^{i(t)} Q_k(x(t_k^-)).$$

Demostración: Primero, consideraremos el intervalo $[\tau, t_1)$. Allí el sistema anterior es del tipo ordinario, a saber

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), x(\zeta_0)) \\ x(\tau) &= x_0, \end{aligned}$$

por lo que su solución satisface

$$x(t) = x_0 + \int_{\tau}^t f(s, x(s), x(\zeta_0)) ds.$$

Luego, como el límite lateral por la izquierda existe, se tiene

$$x(t_1^-) = x_0 + \int_{\tau}^{t_1} f(s, x(s), x(\zeta_0)) ds,$$

por lo que al considerar la condición impulsiva se tiene

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x(t_1^-) + Q_1(x(t_1^-)) \\ &= x_0 + \int_{\tau}^{t_1} f(s, x(s), x(\zeta_0)) ds + Q_1(x(t_1^-)). \end{aligned}$$

Así, para el siguiente intervalo $[t_1, t_2)$ se consigue

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_1) + \int_{t_1}^t f(s, x(s), x(\zeta_1)) ds \\ &= x_0 + \int_{\tau}^{t_1} f(s, x(s), x(\zeta_0)) ds + Q_1(x(t_1^-)) + \int_{t_1}^t f(s, x(s), x(\zeta_1)) ds. \end{aligned}$$

Nuevamente, como el límite lateral por la izquierda existe, se obtiene

$$\begin{aligned} x(t_2^-) &= x_0 + \int_{\tau}^{t_1} f(s, x(s), x(\zeta_0)) ds \\ &\quad + Q_1(x(t_1^-)) + \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s), x(\zeta_1)) ds. \end{aligned}$$

Ahora, al aplicar la condición impulsiva, se tiene que

$$\begin{aligned} x(t_2) &= x(t_2^-) + Q_2(x(t_2^-)) \\ &= x_0 + \int_{\tau}^{t_1} f(s, x(s), x(\zeta_0)) ds + \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s), x(\zeta_1)) ds \\ &\quad + Q_1(x(t_1^-)) + Q_2(x(t_2^-)). \end{aligned}$$

En consecuencia, la solución para el intervalo $[t_2, t_3]$ viene dada de la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_{i(\tau)+2}) + \int_{t_{i(\tau)+1}}^{t_{i(\tau)+2}} f(s, x(s), x(\zeta_{i(\tau)+1})) ds \\ &= x_0 + \int_{\tau}^{t_1} f(s, x(s), x(\zeta_0)) ds + \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s), x(\zeta_1)) ds \\ &\quad + Q_1(x(t_1^-)) + Q_2(x(t_2^-)) \\ &\quad + \int_{t_2}^t f(s, x(s), x(\zeta_2)) ds. \end{aligned}$$

Así, al proseguir inductivamente, la solución viene dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_{i(t)}) + \int_{t_{i(t)}}^t f(s, x(s), x(\zeta_{i(s)})) ds \tag{6.5} \\ &= x_0 + \int_{\tau}^{t_1} f(s, x(s), x(\zeta_0)) ds + \sum_{k=1}^{i(t)-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, x(s), x(\zeta_k)) ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^{i(t)} Q_k(x(t_k^-)) + \int_{t_{i(t)}}^t f(s, x(s), x(\zeta_{i(t)})) ds. \end{aligned}$$

Luego, notando que

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^t f(s, x(s), x(\gamma(t))) ds &= \int_{\tau}^{t_1} f(s, x(s), x(\zeta_0)) ds + \sum_{k=1}^{i(t)-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, x(s), x(\zeta_k)) ds \\ &\quad + \int_{t_{i(t)}}^t f(s, x(s), x(\zeta_{i(t)})) ds, \end{aligned}$$

la expresión (6.5) es equivalente a

$$x(t) = x_0 + \int_{\tau}^t f(s, x(s), x(\gamma(s))) ds + \sum_{k=1}^{i(t)} Q_k(x(t_k^-)).$$

Inversamente, se comprueba que si $x(t)$ es solución de la ecuación integral anterior, al derivar se tiene

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), x(\gamma(t))) \\ x(t_i) - x(t_i^-) &= Q_i(x(t_i^-)). \end{aligned}$$

por lo que queda demostrado el teorema. ■

6.2 Existencia y unicidad de soluciones de (6.1)

En esta sección daremos condiciones que aseguran unicidad y existencia de soluciones de (6.1) para algún instante inicial arbitrario ξ .

Lema 6.2 Sean (6.2) y (6.4) satisfechas. Entonces, para cualquier $y_0 \in \mathbb{R}^m$, $y \xi \in I_i = [t_i, t_{i+1})$, $i \in \mathbb{N}$, existe una única solución $y(t) = y(t, \xi, y_0)$ de (6.1) en $t_i \leq t < t_{i+1}$, tal que $y(\xi) = y_0$.

Demostración: Sean $y_1(t)$ e $y_2(t)$ dos soluciones de

$$y(t) = y(\xi) + \int_{\xi}^t f(s, y(s), y(\gamma(s))) ds \quad (6.6)$$

tales que $y_1(\xi) = y_2(\xi)$. Luego, para $[t_i, t_{i+1}]$ se tiene

$$\|y_2(t) - y_1(t)\| \leq \int_{\xi}^t (\eta_1(s) \|y_2(s) - y_1(s)\| + \eta_2(s) \|y_2(\zeta_i) - y_1(\zeta_i)\|) ds.$$

Con el fin de usar el Lema 5.2, se define $u(t) = \|y_2(t) - y_1(t)\|$, obteniéndose así

$$u(t) \leq \int_{\xi}^t (\eta_1(s)u(s) + \eta_2(s)u(\gamma(s))) ds.$$

Luego, al aplicar el lema antes mencionado, se tiene

$$u(t) \leq u(\xi) \exp \left(\int_{\xi}^t \left(\eta_1(s) + \frac{\eta_2(s)}{1-\theta} \right) ds \right).$$

Finalmente, como $u(\xi) = 0$, se tiene que $u(t) \equiv 0$. Es decir, $y_2(t) = y_1(t)$ para $t \in I_i = [t_i, t_{i+1})$. ■

Lema 6.3 Sean (6.2) y (6.4) satisfechas. Entonces, para cada $y_0 \in \mathbb{R}^m$, $y \xi \in I_i = [t_i, t_{i+1})$, $i \in \mathbb{N}$, existe una solución $y(t) = y(t, \xi, y_0)$ de (6.1) en $t_i \leq t < t_{i+1}$, tal que $y(\xi) = y_0$.

Demostración: Es suficiente probar que (6.1) tiene una única solución $y(t)$ en $[t_i, t_{i+1}]$. Construyamos la siguiente sucesión $y_n(t)$, $n \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y_0, \\ y_{n+1}(t) &= y_0 + \int_{\xi}^t f(s, y_n(s), y_n(\gamma(s))) ds. \end{aligned}$$

Podemos observar que

$$\begin{aligned} \|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| &\leq \int_{\xi}^t \|f(s, y_n(s), y_n(\gamma(s))) - f(s, y_{n-1}(s), y_{n-1}(\gamma(s)))\| ds \\ &\leq \|y_n - y_{n-1}\|_{\infty} \int_{\xi}^t (\eta_1(s) + \eta_2(s)) ds, \end{aligned}$$

por lo que se tiene

$$\|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| \leq \rho \|y_n - y_{n-1}\|_\infty, \quad n \geq 1$$

con

$$\rho = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\eta_1(s) + \eta_2(s)) ds \right) < 1.$$

Luego, prosiguiendo inductivamente conseguimos

$$\|y_{n+1} - y_n\|_\infty = \sup_{t \in I_i} \|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| \leq \rho^{n+1} \|y_0\|,$$

por lo que, dado (6.4), la sucesión y_n define una contracción; por ende es de Cauchy y es convergente. Además su límite satisface (6.6) sobre $[t_i, t_{i+1}]$. Así, la existencia y unicidad de solución sobre $I_i = [t_i, t_{i+1}]$ está probada. ■

A continuación, enunciaremos un teorema que permitirá construir una única solución de (6.1) sobre \mathbb{R}^+ . Usando la condición impulsiva, las soluciones sobre los intervalos de la forma $[t_k, t_{k+1}]$ con $k \in \mathbb{N}$ pueden ser extendidas a una solución sobre el intervalo $[t_0, t]$ de manera inductiva.

Teorema 6.4 Sean (6.2), (6.3) y (6.4) satisfechas. Entonces, para $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m$, existe una única solución $y(t) = y(t, t_0, y_0)$, $t \geq t_0$, de (6.1), tal que $y(t_0) = y_0$.

Demostración: Sea $t_0 \in \mathbb{R}^+$ fijo. Existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $t_0 \in [t_{r-1}, t_r]$. Por el Lema 6.2 con $\xi = t_0$ obtenemos una única solución $y(t, t_0, y_0)$ sobre $[\xi, t_r]$. Luego, aplicando la condición impulsiva obtenemos de manera única

$$y(t_r, t_0, y_0) = Q_r(y(t_r^-, t_0, y_0)).$$

Ahora, sobre el intervalo $[t_r, t_{r+1}]$ la solución satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$y'(t) = f(t, y(t), y(\zeta_r)).$$

El sistema tiene una única solución $y(t, t_r, y(t_r, t_0, y_0))$. Por definición de la solución de (6.1), $y(t, t_0, y_0) = y(t, t_r, y(t_r, t_0, y_0))$ sobre $[t_r, t_{r+1}]$. Por ende, prosiguiendo recursivamente obtenemos una solución en $[t_0, t]$, lo que demuestra la unicidad en este intervalo. ■

7 Fórmula de variación de parámetros de una ecuación con argumento constante a trozos del tipo generalizado con impulsos

7.1 Un poco de historia

En [23], K. L. Cooke y J. Wiener fueron los primeros en obtener una fórmula de variación de parámetros para un sistema DEPCA escalar usando funciones parte entera retardadas $\gamma(t) = [t]$, $\gamma(t) = [t-1]$, $\gamma(t) = [t-n]$ y $\gamma(t) = t - n[t]$. En [48], K.L. Cooke y S.M. Shah estudiaron el caso avanzado $\gamma(t) = [t+n]$. En [27], K. L. Cooke y J. Wiener estudiaron una parte entera del tipo alternado $\gamma(t) = 2 \left[\frac{t+1}{2} \right]$. Finalmente, en [53], K. L. Cooke y A.R. Aftabizadeh consideraron la parte entera alternada $\gamma(t) = m \left[\frac{t+k}{m} \right]$ con $0 < k < m$, donde $[\cdot]$ denota a la función parte entera y $k, m, n \in \mathbb{Z}^+$. En los trabajos anteriores se consideraron las DEPCA's

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bx([t]) + Cx([t-1]), \\ y'(t) &= Ay(t) + By([t]) + Cy([t+1]), \\ z'(t) &= Az(t) + Bz(2[(t+1)/2]), \\ w'(t) &= Aw(t) + Bw(m[(t+k)/m]) \end{aligned}$$

respectivamente.

Sin embargo, en [38], **N. Jayasree** y **S. G. Deo** fueron los primeros en considerar un análisis tanto en el intervalo avanzado como en el retardado y explicitarlo en una fórmula de variación de parámetros. Posteriormente, en [44], **M. Pinto** consiguió deducir una fórmula de variación de parámetros para los sistemas *DEPCAG*. Vale decir, con un argumento constante a trozos del tipo generalizado

$$\begin{aligned}x'(t) &= A(t)x(t) + B(t)x(\gamma(t)) + F(t), \\z'(t) &= A(t)z(t) + B(t)z(\gamma(t)) + G(t, z(t), z(\gamma(t))).\end{aligned}$$

En lo que sigue deduciremos la fórmula de variación de parámetros asociada al sistema lineal no homogéneo **IDEPCAG**

$$\begin{aligned}X'(t) &= A(t)X(t) + B(t)X(\gamma(t)) + F(t), & t \neq t_i \\ \Delta X|_{t=t_i} &= C_i X(t_i^-) + D_i, & t = t_i\end{aligned}\tag{7.1}$$

donde $A(t)$, $B(t)$ y $F(t)$ funciones continuas a trozos localmente integrables y $\gamma(t)$ es una función parte entera del tipo generalizado, teniendo en consideración los intervalos tanto de avance como de retardo que ella define.

De gran importancia en la deducción de nuestra fórmula de variación de parámetros de (7.1) serán los sistemas

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad t \in I_i = [t_i, t_{i+1})\tag{7.2}$$

y el sistema lineal homogéneo **IDEPCAG**

$$\begin{aligned}Z'(t) &= A(t)Z(t) + B(t)Z(\gamma(t)), & t \neq t_i \\ \Delta Z|_{t=t_i} &= C_i Z(t_i^-), & t = t_i.\end{aligned}\tag{7.3}$$

7.2 Fórmula de variación de parámetros de un sistema impulsivo con argumento constante a trozos del tipo generalizado.

Estableceremos una fórmula de variación de parámetros para la **IDEPCAG** (7.1). A fin de determinar dicha fórmula, analizaremos el sistema lineal **IDEPCAG**

$$\begin{aligned}z'(t) &= A(t)z(t) + B(t)z(\gamma(t)), & t \neq t_i \\ z(t_i) &= (I + C_i)z(t_i^-), & t = t_i\end{aligned}\tag{7.4}$$

con $A, B, C_i, D_i \in \mathbb{C}^{p \times p}$, A y B localmente integrables. Sean

$$\begin{aligned}\rho_{i+}(A) &= e^{\int_{t_i}^{t_i^+} \|A(u)\| du}, & \rho_{i-}(A) &= e^{\int_{t_i^-}^{t_i} \|A(u)\| du}, \\ \rho_i(A) &= \rho_{i+}(A) \cdot \rho_{i-}(A), & \rho(A) &= \sup_{i \in \mathbb{Z}} \rho_i(A) < \infty,\end{aligned}$$

y sea

$$J(t, t_i) = I + \int_{t_i}^t \Phi(t_i, s)B(s)ds.\tag{7.5}$$

Necesitaremos del hecho que (7.5) sea invertible (Ver [44] y [46]). Para ello exigiremos la condición necesaria para la convergencia de la serie de Von Neumann:

$$\nu(B) = \sup_{i \in \mathbb{Z}} \nu_{i\pm}(B) = \rho_{\pm}(A) \ln \rho_{\pm}(B) < 1,\tag{7.6}$$

con lo que (7.5) inmediatamente es invertible. Es decir, $J^{-1}(t, t_i)$ existe $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. Más aún, observamos que

$$\begin{aligned} \|J^{-1}(t, t_i)\| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} [\nu(B)]^k \\ &= \frac{1}{1 - \nu(B)} \\ &< \infty \end{aligned} \quad (7.7)$$

y

$$\begin{aligned} \|J(t, t_i)\| &\leq 1 + \nu(B) \\ &< \infty \end{aligned} \quad (7.8)$$

7.2.1 Matriz fundamental de (7.4)

En lo que sigue usaremos la siguientes notaciones para el producto

$$\overleftarrow{\prod}_{k=j}^{j+p} T_k = T_{j+p} \cdot T_{j+p-1} \cdot \dots \cdot T_j.$$

Veamos lo que ocurre con el sistema (7.4) si $t, \tau \in [t_i, t_{i+1}]$ con algún $i \in \mathbb{Z}$. El sistema en este intervalo es del tipo ordinario, por lo que se tiene por solución

$$w(t) = \Phi(t, \tau)w(\tau) + \int_{\tau}^t \Phi(t, s)B(s)w(\zeta_i)ds. \quad (7.9)$$

Al evaluar la expresión anterior para $t = \zeta_i$ se consigue

$$w(\zeta_i) = \Phi(\zeta_i, \tau)w(\tau) + \int_{\tau}^{\zeta_i} \Phi(\zeta_i, s)B(s)w(\zeta_i)ds, \quad (7.10)$$

con lo que se tiene

$$\begin{aligned} \left(I + \int_{\zeta_i}^{\tau} \Phi(\zeta_i, s)B(s)ds \right) w(\zeta_i) &= \Phi(\zeta_i, \tau)w(\tau) \\ J(\tau, \zeta_i)w(\zeta_i) &= \Phi(\zeta_i, \tau)w(\tau). \end{aligned}$$

En consecuencia, se logra

$$w(\zeta_i) = J^{-1}(\tau, \zeta_i)\Phi(\zeta_i, \tau)w(\tau). \quad (7.11)$$

Luego, como

$$E(t, \tau) = \Phi(t, \tau)J(t, \tau),$$

ello implica

$$E^{-1}(t, \tau) = J^{-1}(t, \tau)\Phi(\tau, t). \quad (7.12)$$

Entonces, (7.11) al usar (7.12) resulta

$$w(\zeta_i) = E^{-1}(\tau, \zeta_i)w(\tau). \quad (7.13)$$

Ahora, de la ecuación (7.9) con $\tau = \zeta_i$ obtenemos

$$\begin{aligned} w(t) &= \Phi(t, \zeta_i)w(\zeta_i) + \int_{\zeta_i}^t \Phi(t, s)B(s)w(\zeta_i)ds \\ &= \Phi(t, \zeta_i) \left(I + \int_{\zeta_i}^t \Phi(\zeta_i, s)B(s)ds \right) w(\zeta_i). \end{aligned}$$

Es decir,

$$w(t) = E(t, \zeta_i)w(\zeta_i). \quad (7.14)$$

Luego, por (7.13), la ecuación (7.14) se expresa como

$$w(t) = E(t, \zeta_i)E^{-1}(\tau, \zeta_i)w(\tau), \quad (7.15)$$

y denominando a

$$W(t, \tau) = E(t, \zeta_i)E^{-1}(\tau, \zeta_i), \quad \text{si } t, \tau \in [t_i, t_{i+1}), \quad (7.16)$$

se tiene que

$$w(t) = W(t, \tau)w(\tau) \quad (7.17)$$

es la única solución del sistema (7.4) en $I_i = [t_i, t_{i+1})$, donde

$$W(t, s) = E(t, \zeta_i)E^{-1}(s, \zeta_i), \quad \text{para } t, s \in I_i. \quad (7.18)$$

Obsérvese que $W(t, \tau)$ es invertible, ya que es producto de invertibles.

A fin de determinar con mayor precisión la expresión (7.17), vemos que si $\tau \in I_{i-1}$, entonces

$$w(t_i^-) = W(t_i, \tau)w(\tau)$$

por ende, debido a la condición impulsiva de (7.4), se tiene

$$\begin{aligned} w(t_i) &= (I + C_i)w(t_i^-) \\ &= (I + C_i)W(t_i, \tau)w(\tau). \end{aligned}$$

Para $\tau = t_{i-1}$ tenemos

$$w(t_i) = (I + C_i)W(t_i, t_{i-1})w(t_{i-1}), \quad (7.19)$$

Por lo que para $t \in I_i$ y $\tau \in I_{i-2}$ por (7.15) y (7.19) se tiene

$$\begin{aligned} w(t) &= E(t, \zeta_i)E^{-1}(t_i, \zeta_i)w(t_i) \\ &= E(t, \zeta_i)E^{-1}(t_i, \zeta_i)(I + C_i)E(t_i, \zeta_{i-1})E^{-1}(t_{i-1}, \zeta_{i-1})w(t_{i-1}) \\ &= E(t, \zeta_i)E^{-1}(t_i, \zeta_i)(I + C_i)E(t_i, \zeta_{i-1})E^{-1}(t_{i-1}, \zeta_{i-1})(I + C_{i-1})E(t_{i-1}, \zeta_{i-2})E^{-1}(\tau, \zeta_{i-2})w(\tau) \\ &= W(t, t_i)(I + C_i)W(t_i, t_{i-1})(I + C_{i-1})W(t_{i-1}, \tau)w(\tau). \end{aligned} \quad (7.20)$$

Así, para $t \in I_i = [t_i, t_{i+1})$, podemos escribir la expresión anterior como

$$w(t) = W(t, \tau)w(\tau) \quad (7.21)$$

Luego, al evaluar $t = t_{i+1}$ se obtiene

$$w(t_{i+1}^-) = W(t_{i+1}, \tau)w(\tau).$$

Por lo que, debido al efecto impulsivo se consigue

$$w(t_{i+1}) = (I + C_{i+1})W(t_{i+1}, \tau)w(\tau).$$

Si consideramos en la expresión anterior $\tau = t_i$, entonces se define una ecuación en diferencias finitas cuya solución es

$$w(t_{i(t)}) = \left(\leftarrow \prod_{j=i(\tau)+2}^{i(t)} (I + C_j) W(t_j, t_{j-1}) \right) w(t_{i(\tau)+1}). \quad (7.22)$$

Ahora, teniendo en cuenta (7.19), al aplicar (7.22) en (7.21) se obtiene

$$\begin{aligned} w(t) &= W(t, t_{i(t)}) \left(\leftarrow \prod_{j=i(\tau)+2}^{i(t)} (I + C_j) W(t_j, t_{j-1}) \right) (I + C_{i(\tau)+1}) W(t_{i(\tau)+1}, \tau) w(\tau) \\ &= W(t, \tau) w(\tau), \quad \text{para } t \in I_i \text{ y } \tau \in I_{i(\tau)}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

donde la matriz fundamental W está dada por

$$W(t, \tau) = W(t, t_{i(t)}) \left(\leftarrow \prod_{j=i(\tau)+2}^{i(t)} (I + C_j) W(t_j, t_{j-1}) \right) (I + C_{i(\tau)+1}) W(t_{i(\tau)+1}, \tau), \quad (7.24)$$

para $t \in I_{i(t)}$ y $\tau \in I_{i(\tau)}$.

La expresión (7.24) corresponde a la matriz fundamental del sistema lineal (7.4).

Cabe destacar que la expresión (7.24) considera, como caso particular, a la matriz fundamental del sistema impulsivo (2.1). A saber, si $B(t) = 0$, se tiene

$$W(t, s) = \Psi(t, s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R},$$

recuperándose así la expresión obtenida en (2.4). Además, (7.24) corresponde a una extensión del caso DEPCAG estudiado por M. Pinto en [44], donde $C_j = 0$.

7.2.2 Fórmula de variación de parámetros

Ahora analizaremos la solución del sistema

$$\begin{aligned} y'(t) &= A(t)y(t) + B(t)y(\gamma(t)) + f(t), & t \neq t_i \\ y(t_i) &= \tilde{C}_i y(t_i^-) + D_i, & t = t_i \\ y(t_0) &= y(\tau) \end{aligned} \quad (7.25)$$

Supongamos que f es localmente integrable en $I_i = [t_i, t_{i+1})$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. Sabemos que si $\tau, t \in I_i$, entonces

$$y(t) = \Phi(t, \tau)y(\tau) + \int_{\tau}^t \Phi(t, s)B(s)y(\zeta_i)ds + \int_{\tau}^t \Phi(t, s)f(s)ds.$$

Luego, si $\tau = \zeta_i$, se tiene

$$\begin{aligned} y(t) &= \Phi(t, \zeta_i)y(\zeta_i) + \int_{\zeta_i}^t \Phi(t, s)B(s)y(\zeta_i)ds + \int_{\zeta_i}^t \Phi(t, s)f(s)ds \\ &= \Phi(t, \zeta_i) \left(I + \int_{\zeta_i}^t \Phi(\zeta_i, s)B(s)ds \right) y(\zeta_i) + \int_{\zeta_i}^t \Phi(t, s)f(s)ds \\ &= \Phi(t, \zeta_i)J(t, \zeta_i)y(\zeta_i) + \int_{\zeta_i}^t \Phi(t, s)f(s)ds, \end{aligned}$$

por lo que podemos escribir

$$y(t) = E(t, \zeta_i)y(\zeta_i) + \int_{\zeta_i}^t \Phi(t, s)f(s)ds. \quad (7.26)$$

Ahora, si en (7.26) reemplazamos $t = \tau$, se tiene

$$y(\tau) = E(\tau, \zeta_i)y(\zeta_i) + \int_{\zeta_i}^{\tau} \Phi(\tau, s)f(s)ds,$$

lo que implica

$$y(\zeta_i) = E^{-1}(\tau, \zeta_i) \left(y(\tau) + \int_{\tau}^{\zeta_i} \Phi(\tau, s)f(s)ds \right). \quad (7.27)$$

Luego, aplicando (7.27) en (7.26) obtenemos

$$y(t) = E(t, \zeta_i)E^{-1}(\tau, \zeta_i) \left(y(\tau) + \int_{\tau}^{\zeta_i} \Phi(\tau, s)f(s)ds \right) + \int_{\zeta_i}^t \Phi(t, s)f(s)ds,$$

i.e.

$$y(t) = W(t, \tau)y(\tau) + \int_{\tau}^{\zeta_i} W(t, \tau)\Phi(\tau, s)f(s)ds + \int_{\zeta_i}^t \Phi(t, s)f(s)ds, \quad \tau, t \in I_i. \quad (7.28)$$

Así, al tomar el límite lateral en la expresión anterior, se obtiene

$$y(t_{i+1}^-) = W(t_{i+1}, \tau) \left(y(\tau) + \int_{\tau}^{\zeta_i} \Phi(\tau, s)f(s)ds \right) + \int_{\zeta_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, s)f(s)ds. \quad (7.29)$$

Ahora, por consecuencia de la condición impulsiva, se tiene

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) &= (I + C_{i+1})y(t_{i+1}^-) + D_{i+1} \\ &= (I + C_{i+1})W(t_{i+1}, \tau) \left(y(\tau) + \int_{\tau}^{\zeta_i} \Phi(\tau, s)f(s)ds \right) \\ &\quad + \int_{\zeta_i}^{t_{i+1}} (I + C_{i+1})\Phi(t_{i+1}, s)f(s)ds + D_{i+1}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Luego, la ecuación (7.30) puede reescribirse de la forma

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) &= (I + C_{i+1})W(t_{i+1}, \tau)y(\tau) + \int_{\tau}^{\zeta_i} (I + C_{i+1})W(t_{i+1}, \tau)\Phi(\tau, s)f(s)ds \\ &\quad + \int_{\zeta_i}^{t_{i+1}} (I + C_{i+1})\Phi(t_{i+1}, s)f(s)ds + D_{i+1}, \end{aligned}$$

por lo que al consider $\tau = t_i$ conseguimos

$$\begin{aligned}
 y(t_{i+1}) &= (I + C_{i+1}) W(t_{i+1}, t_i) y(t_i) + \int_{t_i}^{\zeta_i} (I + C_{i+1}) W(t_{i+1}, t_i) \Phi(t_i, s) f(s) ds \\
 &+ \int_{\zeta_i}^{t_{i+1}} (I + C_{i+1}) \Phi(t_{i+1}, s) f(s) ds + D_{i+1}.
 \end{aligned}$$

La expresión anterior define una ecuación en diferencias finitas, cuya solución es

$$\begin{aligned}
 y(t_{i(t)}) &= \left[\prod_{k=i(\tau)+2}^{i(t)} (I + C_k) W(t_k, t_{k-1}) \right] (I + C_{i(\tau)+1}) W(t_{i(\tau)+1}, \tau) y(\tau) \quad (7.31) \\
 &+ \int_{\tau}^{\zeta_{i(\tau)}} W(t_{i(\tau)+1}, \tau) \Phi(\tau, s) f(s) ds \\
 &+ \sum_{r=i(\tau)+2}^{i(t)} \left[\prod_{k=r}^{i(t)} (I + C_k) W(t_k, t_{k-1}) \right] \int_{t_{r-1}}^{\zeta_{r-1}} \Phi(t_{r-1}, s) f(s) ds \\
 &+ \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} \left[\prod_{k=r+1}^{i(t)} (I + C_k) W(t_k, t_{k-1}) \right] \int_{\zeta_{r-1}}^{t_r} (I + C_r) \Phi(t_r, s) f(s) ds \\
 &+ \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} \left[\prod_{k=r+1}^{i(t)} (I + C_k) W(t_k, t_{k-1}) \right] D_r.
 \end{aligned}$$

Cabe destacar que lo que se acaba de obtener es una solución discreta de (7.25).

Ahora, al reemplazar (7.31) en (7.28), se obtiene

$$\begin{aligned}
y(t) &= W(t, t_{i(t)}) \left[\prod_{k=i(\tau)+2}^{i(t)} (I + C_k) W(t_k, t_{k-1}) \right] (I + C_{i(\tau)+1}) W(t_{i(\tau)+1}, \tau) y(\tau) \quad (7.32) \\
&+ \int_{\tau}^{\zeta_{i(\tau)}} W(t, \tau) \Phi(\tau, s) f(s) ds \\
&+ W(t, t_{i(t)}) \sum_{r=i(\tau)+2}^{i(t)} \left[\prod_{k=r}^{i(t)} (I + C_k) W(t_k, t_{k-1}) \right] \int_{t_{r-1}}^{\zeta_{r-1}} \Phi(t_{r-1}, s) f(s) ds \\
&+ \int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} W(t, t_{i(t)}) \Phi(t_{i(t)}, s) f(s) ds \\
&+ W(t, t_{i(t)}) \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} \left[\prod_{k=r+1}^{i(t)} (I + C_k) W(t_k, t_{k-1}) \right] \int_{\zeta_{r-1}}^{t_r} (I + C_r) \Phi(t_r, s) f(s) ds \\
&+ \int_{\zeta_{i(t)}}^t \Phi(t, s) f(s) ds \\
&+ W(t, t_{i(t)}) \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} \left[\prod_{k=r+1}^{i(t)} (I + C_k) W(t_k, t_{k-1}) \right] D_r,
\end{aligned}$$

para $t \in [\tau, t_{i(t)+1})$. Al reescribir en términos de (7.24), se obtiene la fórmula de variación de parámetros buscada. A saber

$$\begin{aligned}
y(t) &= W(t, \tau) y(\tau) \\
&+ \int_{\tau}^{\zeta_{i(\tau)}} W(t, t_{i(\tau)+1}) (I + C_{i(\tau)+1}) W(t_{i(\tau)+1}, \tau) \Phi(\tau, s) f(s) ds \\
&+ \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)-1} \int_{t_r}^{\zeta_r} W(t, t_r) \Phi(t_r, s) f(s) ds + \int_{t_{i(t)}}^{\zeta_{i(t)}} W(t, t_{i(t)}) \Phi(t_{i(t)}, s) f(s) ds \\
&+ \sum_{r=i(\tau)}^{i(t)-1} W(t, t_{r+1}) \int_{\zeta_r}^{t_{r+1}} (I + C_{r+1}) \Phi(t_{r+1}, s) f(s) ds + \int_{\zeta_{i(t)}}^t \Phi(t, s) f(s) ds \\
&+ \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} W(t, t_r) D_r,
\end{aligned}$$

o de forma equivalente

$$\begin{aligned}
y(t) &= W(t, \tau)y(\tau) \\
&+ \int_{\tau}^{\zeta_{i(\tau)}} W(t, \tau) \Phi(\tau, s) f(s) ds + \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} \int_{t_r}^{\zeta_r} W(t, t_r) \Phi(t_r, s) f(s) ds \\
&+ \sum_{r=i(\tau)}^{i(t)-1} \int_{\zeta_r}^{t_{r+1}} W(t, t_{r+1}) (I + C_{r+1}) \Phi(t_{r+1}, s) f(s) ds + \int_{\zeta_{i(t)}}^t \Phi(t, s) f(s) ds \\
&+ \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} W(t, t_r) D_r,
\end{aligned} \tag{7.33}$$

donde W viene dada por (7.24).
Así, reescribiendo (7.33) con

$$\widetilde{W}(t, s) = \begin{cases} W_+(t, s), & \text{si } t_r \leq s \leq \gamma(s) \\ W_-(t, s), & \text{si } \gamma(s) < s \leq t_{r+1} \end{cases} \tag{7.34}$$

donde

$$W_+(t, s) = \begin{cases} W(t, t_r) \Phi(t_r, s) & \text{si } t_r \leq s \leq \gamma(s), s < t \\ W(t, t_{i(t)}) \Phi(t_{i(t)}, s) & \text{si } t \leq s \leq \gamma(s) \end{cases} \tag{7.35}$$

y

$$W_-(t, s) = \begin{cases} W(t, t_{r+1}) (I + C_{r+1}) \Phi(t_{r+1}, s) & \text{si } \gamma(s) \leq s < t_{r+1}, t > s \\ \Phi(t, s) & \text{si } \gamma(t) < s \leq t < t_{r+1} \end{cases} \tag{7.36}$$

conseguimos

$$\begin{aligned}
\int_{\tau}^t W_+(t, s) f(s) ds &= \int_{\tau}^{\zeta_{i(\tau)}} W(t, \tau) \Phi(\tau, s) f(s) ds + \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} \int_{t_r}^{\zeta_r} W(t, t_r) \Phi(t_r, s) f(s) ds \\
\int_{\tau}^t W_-(t, s) f(s) ds &= \sum_{r=i(\tau)}^{i(t)-1} \int_{\zeta_r}^{t_{r+1}} W(t, t_{r+1}) (I + C_{r+1}) \Phi(t_{r+1}, s) f(s) ds + \int_{\zeta_{i(t)}}^t \Phi(t, s) f(s) ds,
\end{aligned}$$

por lo que se tiene

$$\widetilde{W}(t, s) = W_+(t, s) + W_-(t, s).$$

Así, (7.33) se reescribe como

$$y(t) = W(t, \tau)y(\tau) + \int_{\tau}^t \widetilde{W}(t, s) f(s) ds + \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} W(t, t_r) D_r. \tag{7.37}$$

La forma de la solución obtenida es bastante especial y difiere completamente de lo tradicional. En ella notamos que no se preserva la estructura de variación de parámetros que uno podría suponer, ya que la matriz de Cauchy se descompone en una parte de avance y otra de retardo. Además, da cuenta de un importante hecho: todas las soluciones son obtenidas a partir de una solución del sistema lineal homogéneo IDEPCAG (7.4) más una solución particular del sistema lineal no homogéneo IDEPCAG (7.1)

$$y_p(t) = \int_{\tau}^t \widetilde{W}(t, s) f(s) ds + \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} W(t, t_r) D_r.$$

Cabe destacar que la expresión (7.37) considera, como caso particular, a la solución del sistema impulsivo lineal no homogéneo (2.9). A saber, si $B(t) = 0$, se tiene

$$\widetilde{W}(t, \tau) = W(t, \tau) = \Psi(t, \tau), \quad \forall t, s \in \mathbb{R},$$

recuperándose así la expresión obtenida en (2.4). Además, (7.37) extiende, para el caso IDEPCAG, lo realizado en [44] para el ecuaciones del tipo DEPCAG, en donde se considera el caso particular $D_r = C_r = 0$.

8 Sistemas periódicos impulsivos con argumento constante a trozos del tipo generalizado

En esta sección estudiaremos la existencia y unicidad de soluciones periódicas del sistema semilineal IDEPCAG

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t) + g(t, X(t), X(\gamma(t))), & t \neq t_i \\ \Delta X|_{t=t_i} &= C_i X(t_i^-) + I_i(x(t_i^-)), & t = t_i \end{aligned}$$

con condiciones de periodicidad sobre todas sus componentes. (Ver [1], [2], [4] – [8], [11], [43] y [47]).

A continuación enunciaremos una serie de lemas que serán fundamentales en el proceso de búsqueda de tal tipo de soluciones.

8.1 Índice contador de impulsos $i(t, s)$

Como vimos en el primer capítulo, es de suma importancia el índice contador de instantes de impulso $i(t, s)$. A saber, la cantidad de elementos de $(t_i)_{i=1}^{\infty}$ presentes en el intervalo $[s, t)$:

$$i(t, s) = \# \left\{ (t_i)_{i=1}^{\infty} \cap [s, t) \right\}. \quad (8.1)$$

También, recordamos el hecho que para todo $t \in \mathbb{R}$, existe $i(t) \in \mathbb{N}$ tal que $t \in I_{i(t)} = [t_{i(t)}, t_{i(t)+1})$. Entonces se tiene el siguiente resultado auxiliar:

Lema 8.1 *Sea*

$$t_{i+p} = t_i + T \quad \text{con } p \in \mathbb{N} \text{ fijo y } i \in \mathbb{N}_0$$

y sea $i(t) \in \mathbb{N}$ tal que $t \in I_{i(t)} = [t_{i(t)}, t_{i(t)+1})$. Entonces se tiene

$$i(t + T) = i(t) + p.$$

Demostración: Si $t \in I_{i(t)}$, entonces

$$\begin{aligned} \implies & t_{i(t)} \leq t < t_{i(t)+1} \\ \implies & t_{i(t)} + T \leq t + T < t_{i(t)+1} + T \\ \implies & t_{i(t)+p} \leq t + T < t_{i(t)+p+1} \\ \implies & t + T \in I_{i(t)+p} = [t_{i(t)+p}, t_{i(t)+p+1}) \\ \implies & i(t + T) = i(t) + p, \end{aligned}$$

por lo que se tiene lo buscado. ■

Observación 4 *Llamaremos a la propiedad*

$$t_{i+p} = t_i + T, \quad \text{con } p \in \mathbb{N} \text{ fijo y } i \in \mathbb{N}_0$$

la (T, p) -propiedad.



Algunos ejemplos que satisfacen la (T, p) -propiedad son los siguientes:

$$\begin{aligned} t_i = \zeta_i = i + \frac{1}{3}(-1)^{i+1}, & \quad \text{con } i \in \mathbb{Z}, \text{ satisface una } (2, 2)\text{-propiedad.} \\ t_i = i\delta - k, \zeta_i = i\delta & \quad \text{con } i \in \mathbb{Z}, k, \delta \in \mathbb{R}^+, 0 \leq k < \delta, \text{ satisface una } (\delta, 1)\text{-propiedad.} \end{aligned} \quad (8.2)$$

Es importante notar que ejemplos de sucesiones que satisfagan la (T, p) -propiedad pueden ser rescatados de argumentos constantes a trozos. Por ejemplo, el último caso se obtiene analizando $\gamma(t) = \delta \lceil \frac{t+k}{\delta} \rceil$ con $0 \leq k < \delta$.

Gracias a la (T, p) -propiedad, podemos obtener el siguiente resultado:

Lema 8.2 Si $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ y $(\zeta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ satisfacen la (T, p) -propiedad, con

$$\begin{aligned} t_i &\leq \zeta_i < t_{i+1}, \quad \forall i \in \mathbb{N}_0 \\ \zeta_i &= \gamma(t) \quad \text{si } t \in I_i, \end{aligned}$$

entonces

$$\gamma(t+T) = \gamma(t) + T.$$

Demostración: Sea $t \in I_i$. Entonces se tiene que

$$\gamma(t+T) = \zeta_{i(t+T)} = \zeta_{i(t)+p}$$

y

$$\gamma(t) + T = \zeta_{i(t)} + T.$$

Luego, como $(\zeta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ satisface la (T, p) -propiedad se tiene

$$\gamma(t+T) = \gamma(t) + T.$$

por lo que obtenemos el resultado deseado. ■

Algunos ejemplos de esta propiedad son los siguientes:

Ejemplo 1 Sea $\gamma(t) = \delta \lceil \frac{t}{\delta} \rceil$. Entonces se tiene $t_i = i\delta - k$, $\zeta_i = i\delta$. si $t \in I_i$, con $i \in \mathbb{Z}$ y $\delta > 0$. Por ende ζ_i satisface una $(\delta, 1)$ -propiedad

$$\begin{aligned} \gamma(t+T) &= (i+1)\delta \\ &= i\delta + \delta \\ &= \gamma(t) + T. \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Sea $\gamma(t) = [t+1]$. Entonces se tiene $t_i = i-1$ y $\zeta_i = i$, si $t \in I_i$ con $i \in \mathbb{Z}$. Por ende ζ_i satisface una $(1, 1)$ -propiedad. Entonces

$$\begin{aligned} \gamma(t+T) &= (i+1) \\ &= i+1 \\ &= \gamma(t) + T. \end{aligned}$$

Ejemplo 3 Sea $\gamma(t) = 2 \lceil \frac{t+1}{2} \rceil$. Entonces se tiene $t_i = 2i-1$ y $\zeta_i = 2i$, si $t \in I_i$ con $i \in \mathbb{Z}$. Por ende ζ_i satisface una $(2, 1)$ -propiedad, por lo que

$$\begin{aligned} \gamma(t+T) &= 2(i+1) \\ &= 2i+2 \\ &= \gamma(t) + T. \end{aligned}$$

Observación 5 Un hecho notable a destacar gracias es el siguiente: si $x(t)$ es una función T -periódica y si $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ y $(\zeta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ satisfacen la (T, p) -propiedad, al componer $x(t)$ con una función $\gamma(t)$, se obtiene una función T -periódica. A saber

$$\begin{aligned} x(\gamma(t+T)) &= x(\gamma(t) + T) \\ &= x(\gamma(t)) \end{aligned}$$

Esto se logra aún sabiendo que $\gamma(t)$ no es una función T -periódica.

Definición 3 La cantidad de instantes de impulso $i(t, s)$ viene dada por la expresión

$$i(t, s) = \begin{cases} i(t) - i(s) & \text{si } s \notin (t_i)_{i \in \mathbb{Z}} \\ i(t) - i(s) + 1 & \text{si } s \in (t_i)_{i \in \mathbb{Z}} \end{cases}$$

A consecuencia de la definición anterior, se tiene el siguiente resultado relativo al índice contador de impulsos $i(t, s)$:

Lema 8.3 Sea

$$t_{i+p} = t_i + T, \quad \text{con } p \in \mathbb{N} \text{ fijo, } \forall i \in \mathbb{N}_0.$$

Entonces

$$i(t+T, s) = \begin{cases} i(t) - i(s) + p + 1 & \text{si } s \in (t_i)_{i \in \mathbb{Z}}, \\ i(t) - i(s) + p & \text{si } s \notin (t_i)_{i \in \mathbb{Z}}. \end{cases}$$

Demostración: Para el caso $s \in (t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, por el Lema 8.1 se tiene

$$\begin{aligned} i(t+T, s) &= i(t+T) - i(s) + 1 \\ &= i(t) - i(s) + p + 1. \end{aligned}$$

Finalmente, para el caso $s \notin (t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, se tiene

$$\begin{aligned} i(t+T, s) &= i(t+T) - i(s) \\ &= i(t) - i(s) + p, \end{aligned}$$

con lo que obtenemos lo deseado. ■

A modo de ejemplo, estimaremos la cantidad de instantes de impulso con algunos de los casos de (T, p) -sucesiones exhibidos en (8.2).

Ejemplo 4 Sea $s = 1$ y $t_i = i + \frac{(-1)^{i+1}}{3}$. Por (8.2) sabemos que para esta sucesión $T = p = 2$. Entonces, si $t = 5, 4$, se tiene $i(t) = 5$ e $i(s) = 0$ por lo que

$$\begin{aligned} i(5, 4+2; 1) &= 5 - 0 + 2 \\ &= 7. \end{aligned}$$

Ahora, todos los elementos de la sucesión en cuestión que pertenecen a $[1; 7, 4)$ son

$$A_{t_i} = \# \left\{ (t_i)_{i \in \mathbb{Z}} \cap [1; 7, 4) \right\} = \# \left\{ \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}, \frac{16}{3}, \frac{17}{3}, \frac{22}{3} \right\} = 7.$$

Ejemplo 5 Sea $s = 5$, $t = 30$ y $t_i = 2i - 1$. Por (8.2) sabemos que ella satisface una $(2, 1)$ -propiedad ($T = 2$, $p = 1$). Notamos que $t_3 = s = 5$ lo que implica $i(s) = 3$. Teniendo en cuenta que $i(t) = 15$, se tiene

$$\begin{aligned} i(30 + 2, 5) &= 15 - 3 + 1 + 1 \\ &= 14. \end{aligned}$$

Vemos que

$$\begin{aligned} A_{t_i} &= \# \left\{ (t_i)_{i \in \mathbb{Z}} \cap [5; 32] \right\} \\ &= \# \{5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31\} \\ &= 14. \end{aligned}$$

Ejemplo 6 Sea $s = 1$, $t = 8, 2$ y $t_i = i$, con $i \in \mathbb{Z}$. Ella satisface una $(1, 1)$ -propiedad. Vemos que $i(s) = 1$, $i(t) = 8$, por lo que se tiene

$$\begin{aligned} i(8, 2 + 1; 1) &= 8 - 1 + 1 + 1 \\ &= 9. \end{aligned}$$

Vemos que

$$\begin{aligned} A_{t_i} &= \# \left\{ (t_i)_{i \in \mathbb{Z}} \cap [1; 9, 2] \right\} \\ &= \# \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\ &= 9. \end{aligned}$$

Ayudados de los lemas anteriores, demostraremos uno de nuestros resultados principales:

Teorema 8.4 Sea

$$t_{i+p} = t_i + T \quad \text{con } p \in \mathbb{N} \text{ fijo, } i \in \mathbb{N}_0,$$

y sea $i(t) \in \mathbb{N}$ tal que $t \in I_{i(t)} = [t_{i(t)}, t_{i(t)+1})$. Entonces

$$i(t + T, s + T) = i(t, s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \text{ con } t \geq s \text{ y } T \in \mathbb{R} \text{ fijo.} \quad (8.3)$$

Demostración: Dividiremos la demostración en dos casos: $s \notin (t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ y $s \in (t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Para el primer caso se tiene

$$\begin{aligned} i(t + T, s + T) &= i(t + T) - i(s + T) \\ &= i(t) + p - i(s) - p \\ &= i(t) - i(s) \\ &= i(t, s). \end{aligned}$$

Para el segundo caso vemos que si $s \in (t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, entonces existe $i(t) \in \mathbb{N}$ tal que $s \in I_{i(t)}$ por lo que $s_{i(t)} + T = s_{i(t)+p} \in (t_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} i(t + T, s + T) &= i(t + T) - i(s + T) + 1 \\ &= i(t) + p - (i(s) + p) + 1 \\ &= i(t) - i(s) + 1 \\ &= i(t, s), \end{aligned}$$

por lo que queda demostrado el teorema. ■

Observación 6 A la propiedad (8.3) la llamaremos *bi-periodicidad del índice contador de impulsos*.

8.2 Solución periódica de un sistema impulsivo semilineal con argumento constante a trozos del tipo generalizado.

A continuación, analizaremos la existencia y unicidad de soluciones T -periódicas para el sistema semilineal T -periódico IDEPCAG

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t) + g(t, X(t), X(\gamma(t))), & t \neq t_i \\ \Delta X|_{t=t_i} &= C_i X(t_i^-) + I_i(x(t_i^-)), & t = t_i \end{aligned} \quad (8.4)$$

y

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t), & t \neq t_i \\ \Delta X|_{t=t_i} &= C_i X(t_i^-), & t = t_i \end{aligned} \quad (8.5)$$

con

$$\det(I + C_i) \neq 0, \forall i \in \mathbb{N}, \quad (8.6)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} A(t) &= A(t+T), \\ g(t+T, x_1, x_2) &= g(t, x_1, x_2), \\ I_{i+p}(x) &= I_i(x), \\ C_{i+p} &= C_i \end{aligned} \right\} \text{ con } T \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N} \text{ fijos, } \forall t \in \mathbb{R}, \quad (8.7)$$

son tales que

$$\|g(t, x_1, x_2) - g(t, y_1, y_2)\| \leq \eta_1(t) \|x_1(t) - y_1(t)\| + \eta_2(t) \|x_2(t) - y_2(t)\| \quad (8.8)$$

$$\|I_i(x) - I_i(y)\| \leq \eta_i \|x(t) - y(t)\| \quad (8.9)$$

con $\eta_1(t), \eta_2(t) : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ funciones localmente integrables y $\eta_i : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ sumable. Además, $(t_i)_{i=1}^{\infty}$ es tal que

$$\begin{aligned} t_{i+p} &= t_i + T & \text{con } p \in \mathbb{N}, T \in \mathbb{R} \text{ fijos, } i \in \mathbb{N}_0. \\ \gamma(t+T) &= \gamma(t) + T & \text{con } T \in \mathbb{R} \text{ fijo, } i \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Indagaremos acerca de cuándo este sistema tiene una única solución T -periódica.

Observación 7 *El sistema (8.4) puede considerarse como el sistema (7.37), en donde reemplazamos $B(t) = 0$, D_i por $I_i(x)$ y $f(t)$ por $g(t, x(t), x(\gamma(t)))$. Por ende, su solución se representa de la forma*

$$x(t) = W(t, \tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t W(t, s)g(s, x(s), x(\gamma(s)))ds + \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} W(t, t_r)I_r(x(t_r^-)).$$

Es decir,

$$W(t, s) = \widetilde{W}(t, s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+.$$

Los resultados de esta sección se basan fuertemente en la invertibilidad de la matriz

$$I - W(t_0 + T, t_0),$$

en cuyo caso se habla de **Caso no-crítico**.

Lema 8.5 (Caso no crítico) $(I - W(t_0 + T, t_0))$ es invertible si y sólo si el sistema T -periódico (8.5) tiene a la solución nula como su única solución T -periódica.

Demostración: \implies (Por contrapositivo). Si suponemos que el sistema T -periódico (8.5) tiene soluciones periódicas no triviales, entonces se tiene que existe $x(t_0) \neq 0$ tal que

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x(t_0 + T) = W(t_0 + T, t_0)x(t_0) \\ \implies W(t_0 + T, t_0)x(t_0) &= x(t_0), \end{aligned}$$

con $W(t, t_0)x(t_0)$ una solución general del sistema (8.5). (Si fuera el caso de $x(t_0) = 0$, ello implicaría que la única solución del sistema (8.5) es la solución nula). Entonces se tiene

$$(I - W(t_0 + T, t_0))x(t_0) = 0 \quad x(t_0) \neq 0$$

y, en consecuencia, $x(t_0) \in \ker((I - W(t_0 + T, t_0)))$ por lo que la matriz $(I - W(t_0 + T, t_0))$ no es invertible.

\Leftarrow Supongamos que el sistema T -periódico (8.5) tiene a la solución nula como única solución T -periódica. Entonces:

$$W(t_0 + T, t_0)x(t_0) = x(t_0)$$

sólo se cumple para $x(t_0) = 0$, por lo que se tiene

$$\begin{aligned} x(t_0) - W(t_0 + T, t_0)x(t_0) &= 0 \\ \implies (I - W(t_0 + T, t_0))x(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

lo que nos dice que $\ker((I - W(t_0 + T, t_0))) = \{0\}$, por lo que la matriz $(I - W(t_0 + T, t_0))$ es invertible. ■

Lema 8.6 Sean f_1, f_2 funciones tales que:

- (i) f_1, f_2 son continuas por la izquierda en un intervalo I ;
- (ii) f_1, f_2 son continuas, excepto, posiblemente en los puntos $(t_i)_{i=1}^{\infty} \cap I$, en donde se tiene una discontinuidad de primera especie;
- (iii) f_1', f_2' cumplen (i - ii), donde la derivada en los puntos $(t_i)_{i=1}^{\infty} \cap I$ es asumida como la derivada lateral por la izquierda;
- (iv) $f_1(t_0) = f_2(t_0)$ para algún $t_0 \in I$;
- (v) $f_1'(t) = f_2'(t)$ para todo $t \in I$;
- (vi) $f_1(t_i) - f_1(t_i^-) = f_2(t_i) - f_2(t_i^-)$ para todo $t_i \in (t_i)_{i=1}^{\infty}$.

Entonces $f_1(t) = f_2(t)$ para todo $t \in I$.

Lema 8.7 (Criterio de Poincaré) Sean las condiciones dadas por (8.7) satisfechas. Una solución $\phi(t)$ de (8.4) es una solución T -periódica si y sólo si

$$\phi(t) = \phi(t + T), \text{ para } t \in \mathbb{R}.$$

Demostración: La necesidad es obvia por ser ϕ una solución T -periódica. Sea $\phi(t) = \phi(t + T)$. Para la suficiencia mostraremos que $\tilde{\phi}(t) = \phi(t + T)$ es solución de (8.4). A saber, para $t \neq t_i$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\phi}(t) &= \frac{d}{dt}\phi(t + T) \\ &= A(t + T)\phi(t + T) + F(t + T, \phi(t + T), \phi(\gamma(t + T))) \\ &= A(t + T)\phi(t + T) + F(t + T, \phi(t + T), \phi(\gamma(t) + T)) \\ &= A(t)\tilde{\phi}(t) + F\left(t, \tilde{\phi}(t), \tilde{\phi}(\gamma(t))\right) \end{aligned}$$

y para $t = t_i$

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}(t_i) &= \phi(t_i + T) \\
&= \phi(t_{i+p}) \\
&= (I + C_{i+p}) \phi(t_{i+p}^-) + I_{i+p} (\phi(t_{i+p}^-)) \\
&= (I + C_i) \phi(t_i^- + T) + I_i (\phi(t_i^- + T)) \\
&= (I + C_i) \tilde{\phi}(t_i^-) + I_i (\tilde{\phi}(t_i^-)).
\end{aligned}$$

por lo que se comprueba que $\tilde{\phi}(t)$ es también solución de (8.4), con iguales condiciones iniciales. Entonces, por Lema 8.6, se tiene

$$\phi(t + T) = \phi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Es decir, se tiene una solución T -periódica de (8.4). ■

A fin de encontrar una forma explícita de la solución T -periódica, necesitaremos de los siguientes lemas:

Lema 8.8 Sea $W(t)$ la matriz fundamental de (8.5) tal que $W(t_0) = I$. Entonces se tiene

$$W(t + T) = W(t) W(t_0 + T), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (8.11)$$

$$W(t_0 + T) (I - W(t_0 + T))^{-1} W^{-1}(t_0 + T) = (I - W(t_0 + T))^{-1}, \quad (8.12)$$

$$(W^{-1}(t_0 + T) - I)^{-1} + I = (I - W(t_0 + T))^{-1}. \quad (8.13)$$

y

$$W(t + T, s + T) = W(t, s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}. \quad (8.14)$$

Demostración: Para (8.11) mostraremos que $Y(t) = W(t + T)$ es matriz fundamental de (8.5). A saber, para $t \neq t_i$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} Y(t) &= \frac{d}{dt} W(t + T) \\
&= A(t + T) W(t + T) + B(t + T) W(\gamma(t + T)) \\
&= A(t + T) W(t + T) + B(t + T) W(\gamma(t) + T) \\
&= A(t) Y(t) + B(t) Y(\gamma(t)),
\end{aligned}$$

y para $t = t_i$

$$\begin{aligned}
Y(t_i) &= W(t_i + T) = W(t_{i+p}) \\
&= (I + C_{i+p}) W(t_{i+p}^-) \\
&= (I + C_i) W(t_i^- + T) \\
&= (I + C_i) Y(t_i^-).
\end{aligned}$$

Luego, si W_1 y W_2 son dos matrices fundamentales de (8.5), existe matriz invertible H tal que

$$W_1(t) = W_2(t) \cdot H,$$

por lo que si $W(t + T)$ y $W(t)$ son matrices fundamentales de (8.5) se tiene

$$W(t + T) = W(t) H.$$

Luego, tomando aquella matriz fundamental tal que $W(t_0) = I$, se tiene

$$\begin{aligned} W(t_0 + T) &= W(t_0)H \\ \Rightarrow H &= W(t_0 + T) \end{aligned}$$

con lo que se tiene el resultado buscado.

Para (8.12) se tiene

$$\begin{aligned} I &= I \\ I &= (I - W(t_0 + T))^{-1} (I - W(t_0 + T)) \\ I &= (I - W(t_0 + T))^{-1} W(t_0 + T) (W(t_0 + T)^{-1} - I) \\ (W(t_0 + T)^{-1} - I)^{-1} &= (I - W(t_0 + T))^{-1} W(t_0 + T) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} I &= I \\ I &= (I - W(t_0 + T)) (I - W(t_0 + T))^{-1} \\ I &= W(t_0 + T) (W(t_0 + T)^{-1} - I) (I - W(t_0 + T))^{-1} \\ (I - W(t_0 + T)) &= W(t_0 + T) (W(t_0 + T)^{-1} - I) \\ (W(t_0 + T)^{-1} - I)^{-1} &= W(t_0 + T) (I - W(t_0 + T))^{-1}. \end{aligned}$$

Así,

$$W(t_0 + T) (I - W(t_0 + T))^{-1} = (I - W(t_0 + T))^{-1} W(t_0 + T),$$

o bien

$$W(t_0 + T) (I - W(t_0 + T))^{-1} W^{-1}(t_0 + T) = (I - W(t_0 + T))^{-1}.$$

Ahora, para (8.13) se prosigue de forma análoga, a saber

$$\begin{aligned} I &= I \\ I &= I - W(t_0 + T) + W(t_0 + T) \\ I &= W(t_0 + T) (W(t_0 + T)^{-1} - I) + W(t_0 + T) \\ (W(t_0 + T)^{-1} - I)^{-1} &= W(t_0 + T) + W(t_0 + T) (W(t_0 + T)^{-1} - I)^{-1} \\ (W(t_0 + T)^{-1} - I)^{-1} &= W(t_0 + T) \left(I + (W(t_0 + T)^{-1} - I)^{-1} \right) \end{aligned}$$

lo que implica, aplicando (8.12)

$$\begin{aligned} I + (W(t_0 + T)^{-1} - I)^{-1} &= (W(t_0 + T)^{-1} - I)^{-1} W^{-1}(t_0 + T) \\ I + (W(t_0 + T)^{-1} - I)^{-1} &= (I - W(t_0 + T))^{-1} W(t_0 + T) W^{-1}(t_0 + T) \\ I + (W(t_0 + T)^{-1} - I)^{-1} &= (I - W(t_0 + T))^{-1}. \end{aligned}$$

Luego, para (8.14) aprovechando la propiedad (8.11), vemos que

$$\begin{aligned} W(t + T) &= W(t)W(t_0 + T) \\ \Rightarrow W(t + T)W^{-1}(t_0 + T) &= W(t) \\ \Rightarrow W(t + T)W^{-1}(t_0 + T)W^{-1}(s)W(s) &= W(t) \\ \Rightarrow W(t + T)W^{-1}(t_0 + T)W^{-1}(s) &= W(t)W^{-1}(s) \\ \Rightarrow W(t + T)W^{-1}(s + T) &= W(t)W^{-1}(s), \end{aligned}$$

por lo que

$$W(t+T, s+T) = W(t, s).$$

Así, queda demostrado el lema. ■

A continuación enunciaremos y demostraremos uno de los resultados más importantes de esta sección:

Teorema 8.9 Sean los sistemas (8.4) y su sistema T -periódico lineal homogéneo asociado (8.5) con las hipótesis dadas por (8.6), (8.7) y (8.10). Si el sistema T -periódico (8.5) no tiene soluciones T -periódicas más que la trivial, entonces la solución T -periódica del sistema (8.4) viene dada por

$$x(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} G(t, s)g(s, x(s), x(\gamma(s))) ds + \sum_{i=1}^p G(t, t_i)I_i(x(t_i^-)), \quad (8.15)$$

con

$$G(t, s) = \begin{cases} W(t)PW^{-1}(s) & , \quad t_0 \leq t < s \leq t_0 + T \\ W(t)(I+P)W^{-1}(s) & , \quad t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + T, \end{cases} \quad (8.16)$$

donde la matriz P viene dada por

$$P = (I - W(t_0 + T, t_0))^{-1}W(t_0 + T).$$

La función $G(t, s)$ es la llamada función de Green del sistema T -periódico (8.4).

Demostración: Usando la fórmula de variación de parámetros, la solución de (8.4) se escribe de la forma

$$x(t) = W(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t W(t, s)g(s, x(s), x(\gamma(s))) ds + \sum_{t_i < t} W(t, t_i)I_i(x(t_i^-)), \quad \text{algún } x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (8.17)$$

Luego, como la solución buscada debe ser T -periódica, por el Lema 8.7 ella debe satisfacer

$$\begin{aligned} x(t_0 + T) &= x(t_0) \\ &= x_0, \end{aligned}$$

lo que implica

$$x(t_0 + T) = W(t_0 + T, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_0+T} W(t_0 + T, s)g(s, x(s), x(\gamma(s))) ds + \sum_{i=1}^p W(t_0 + T, t_i)I_i(x(t_i^-)).$$

De la expresión anterior se concluye

$$x_0 = W(t_0 + T, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_0+T} W(t_0 + T, s)g(s, x(s), x(\gamma(s))) ds + \sum_{i=1}^p W(t_0 + T, t_i)I_i(x(t_i^-)).$$

Ahora, por el Lema 8.5 se tiene

$$x_0 = (I - W(t_0 + T, t_0))^{-1} \left(\int_{t_0}^{t_0+T} W(t_0 + T, s)g(s, x(s), x(\gamma(s))) ds + \sum_{i=1}^p W(t_0 + T, t_i)I_i(x(t_i^-)) \right), \quad (8.18)$$

por lo que al reemplazar (8.18) en (8.17) la solución T -periódica de (8.4) viene dada por

$$\begin{aligned}
 x(t) = & W(t, t_0)(I - W(t_0 + T, t_0))^{-1} \left(\int_{t_0}^{t_0+T} W(t_0 + T, s)g(s, x(s), x(\gamma(s))) ds \right. \\
 & \left. + \sum_{i=1}^p W(t_0 + T, t_i)I_i(x(t_i^-)) \right) \\
 & + \int_{t_0}^t W(t, s)g(s, x(s), x(\gamma(s))) ds + \sum_{t_i < t} W(t, t_i)I_i(x(t_i^-)).
 \end{aligned} \quad (8.19)$$

Al aplicar en (8.19) los lemas (8.11 – 8.13), ésta puede reescribirse de la forma

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \int_{t_0}^t (W(t, t_0)(I - W(t_0 + T, t_0))^{-1}W(t_0 + T)W^{-1}(s) + W(t)W^{-1}(s)) g(s, x(s), x(\gamma(s))) ds \\
 & + \sum_{t_0 \leq t_i < t} (W(t, t_0)(I - W(t_0 + T, t_0))^{-1}W(t_0 + T)W^{-1}(t_i) + W(t)W^{-1}(t_i)) I_i(x(t_i^-)) \\
 & + \int_t^{t_0+T} W(t, t_0)(I - W(t_0 + T, t_0))^{-1}W(t_0 + T)W^{-1}(s)g(s, x(s), x(\gamma(s))) ds \\
 & + \sum_{t \leq t_i < t_0+T} W(t, t_0)(I - W(t_0 + T, t_0))^{-1}W(t_0 + T)W^{-1}(t_i)I_i(x(t_i^-)) \\
 = & \int_{t_0}^t (W(t)(I - W(t_0 + T, t_0))^{-1}W(T)W^{-1}(s) + W(t)W^{-1}(s)) g(s, x(s), x(\gamma(s))) ds \\
 & + \sum_{t_0 \leq t_i < t} (W(t)(I - W(t_0 + T, t_0))^{-1}W(T)W^{-1}(t_i) + W(t)W^{-1}(t_i)) I_i(x(t_i^-)) \\
 & + \int_t^{t_0+T} W(t)(I - W(t_0 + T, t_0))^{-1}W(T)W^{-1}(s)g(s, x(s), x(\gamma(s))) ds \\
 & + \sum_{t \leq t_i < t_0+T} W(t)(I - W(t_0 + T, t_0))^{-1}W(T)W^{-1}(t_i)I_i(x(t_i^-))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^t W(t) ((I - W(t_0 + T, t_0))^{-1} W(T) + I) W^{-1}(s) g(s, x(s), x(\gamma(s))) ds \\
&\quad + \sum_{t_0 \leq t_i < t} W(t) ((I - W(t_0 + T, t_0))^{-1} W(T) + I) W^{-1}(t_i) I_i(x(t_i^-)) \\
&\quad + \int_t^{t_0+T} W(t) (I - W(t_0 + T, t_0))^{-1} W(T) W^{-1}(s) g(s, x(s), x(\gamma(s))) ds \\
&\quad + \sum_{t \leq t_i < t_0+T} W(t) (I - W(t_0 + T, t_0))^{-1} W(T) W^{-1}(t_i) I_i(x(t_i^-)) \\
&= \int_{t_0}^t W(t) (I + P) W^{-1}(s) g(s, x(s), x(\gamma(s))) ds + \sum_{t_0 \leq t_i < t} W(t) (I + P) W^{-1}(t_i) I_i(x(t_i^-)) \\
&\quad + \int_t^{t_0+T} W(t) P W^{-1}(s) g(s, x(s), x(\gamma(s))) ds + \sum_{t \leq t_i < t_0+T} W(t) P W^{-1}(t_i) I_i(x(t_i^-)),
\end{aligned}$$

por lo que aplicando la definición de $G(t, s)$ descrita en (8.16) se obtiene el resultado deseado. ■

A continuación, a fin de comprobar que la solución (8.15) sea T -periódica, necesitaremos del siguiente lema:

Lema 8.10 *Sea la función de Green $G(t, s)$ del sistema (8.4) descrita en (8.16). Entonces se tiene*

$$\begin{aligned}
G(t + T, s + T) &= G(t, s) & t \neq t_i, & \forall s, t \in \mathbb{R}, \\
G(t + T, t_i + T) &= G(t, t_i) & t = t_i, & \forall t, t_i \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

A esta propiedad la llamaremos bi-periodicidad de la función de Green.

Demostración: La demostración la haremos por casos.

Caso 1

Si

$$G(t, s) = W(t) P W^{-1}(s),$$

en virtud de (8.12), (8.13) y $W(t_0) = I$, se tiene

$$\begin{aligned}
G(t + T, s + T) &= W(t + T) P W^{-1}(s + T) \\
&= W(t) W(t_0 + T) (I - W(t_0 + T))^{-1} W^{-1}(t_0 + T) W^{-1}(s) \\
&= W(t) (I - W(t_0 + T))^{-1} W^{-1}(s) \\
&= G(t, s).
\end{aligned}$$

Para la parte discreta, se prosigue análogamente. A saber

$$\begin{aligned}
G(t + T, t_{i+p}) &= W(t + T) P W^{-1}(t_{i+p}) \\
&= W(t) W(t_0 + T) (I - W(t_0 + T))^{-1} W^{-1}(t_i + T) W^{-1}(t_i) \\
&= W(t) (I - W(t_0 + T))^{-1} W(t_0 + T) W^{-1}(t_0 + T) W^{-1}(t_i) \\
&= W(t) (I - W(t_0 + T))^{-1} W^{-1}(t_i) \\
&= G(t, t_i),
\end{aligned}$$

por lo que se tiene la bi-periodicidad para este caso.

Caso 2

Si

$$G(t, s) = W(t)(I + P)W^{-1}(s),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} G(t + T, s + T) &= W(t + T) [I + P] W^{-1}(s + T) \\ &= W(t)W(t_0 + T) [I + P] W^{-1}(t_0 + T)W^{-1}(s) \\ &= [W(t)W(t_0 + T) + W(t)W(t_0 + T)P] W^{-1}(t_0 + T)W^{-1}(s) \\ &= W(t)W(t_0 + T)W^{-1}(t_0 + T)W^{-1}(s) + W(t)W(t_0 + T)PW^{-1}(t_0 + T)W^{-1}(s) \\ &= W(t)W^{-1}(s) + W(t)PW^{-1}(s) \\ &= W(t) [I + P] W^{-1}(s) \\ &= G(t, s). \end{aligned}$$

Por último, análogamente para la parte discreta, se tiene

$$\begin{aligned} G(t + T, t_{i+p}) &= W(t + T) [I + P] W^{-1}(t_{i+p}) \\ &= W(t)W(t_0 + T) [I + P] W^{-1}(t_0 + T)W^{-1}(t_i) \\ &= [W(t)W(t_0 + T) + W(t)W(t_0 + T)P] W^{-1}(t_0 + T)W^{-1}(t_i) \\ &= W(t)W(t_0 + T)W^{-1}(t_0 + T)W^{-1}(t_i) + W(t)W(t_0 + T)PW^{-1}(t_0 + T)W^{-1}(t_i) \\ &= W(t)W^{-1}(t_i) + W(t)PW^{-1}(t_i) \\ &= W(t) [I + P] W^{-1}(t_i) \\ &= G(t, t_i). \end{aligned}$$

Así, el lema queda demostrado. ■

Ahora tenemos todo lo necesario para demostrar el resultado principal de esta sección: la T -periodicidad de la solución de (8.4) dada por (8.15).

Teorema 8.11 Sean (8.6), (8.7) y (8.10) satisfechas. Entonces la solución de (8.4) escrita en términos de la función de Green (8.16) dada por (8.15) es T -periódica. Es decir

$$x(t + T) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demostración: Por (8.14), podemos considerar cualquier intervalo de largo T , por lo que se tiene

$$\begin{aligned}
x(t+T) &= \int_{t_0+T}^{t_0+2T} G(t+T, s)g(s, x(s), x(\gamma(s))) ds + \sum_{i=p+1}^{2p} G(t+T, t_i)I_i(x(t_i^-)) \\
&= \int_{t_0}^{t_0+T} G(t+T, s+T)g(s+T, x(s+T), x(\gamma(s+T))) ds + \sum_{i=1}^p G(t+T, t_{i+p})I_{i+p}(x(t_{i+p}^-)) \\
&= \int_{t_0}^{t_0+T} G(t+T, s+T)g(s+T, x(s+T), x(\gamma(s+T))) ds + \sum_{i=1}^p G(t+T, t_{i+p})I_{i+p}(x(t_{i+p}^-)) \\
&= \int_{t_0}^{t_0+T} G(t, s)g(s+T, x(s+T), x(\gamma(s+T))) ds + \sum_{i=1}^p G(t, t_i)I_{i+p}(x(t_{i+p}^-)) \\
&= \int_{t_0}^{t_0+T} G(t, s)g(s, x(s), x(\gamma(s))) ds + \sum_{i=1}^p G(t, t_i)I_i(x(t_i^-)) \\
&= x(t).
\end{aligned}$$

Además, como la función de Green es bi-periódica, ella es acotada. Entonces se tiene

$$\sup_{t, s \in [t_0, t_0+T]} \|G(t, s)\| \leq C_G.$$

Ello implica

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &\leq C_G \left(\int_{t_0}^{t_0+T} \|g(s, x(s), x(\gamma(s)))\| ds + \sum_{i=1}^p \|I_i(x(t_i^-))\| \right) \\
&\leq C_G \cdot (T \|g\|_\infty + p \max_{i \in \{1, 2, \dots, p\}} \|I_i\|_\infty) \\
\|x(t)\| &\leq C_G \cdot (T + p) \cdot \max\{\|g\|_\infty, \max_{i \in \{1, 2, \dots, p\}} \|I_i\|_\infty\},
\end{aligned}$$

por lo que el teorema queda demostrado. ■

A continuación demostraremos que la solución de (8.4) es única y está dada por (8.15).

Teorema 8.12 Sean (8.6 – 8.10) satisfechas. Si $g(s, 0, 0)$ es localmente integrable,

$$\int_{t_0}^{t_0+T} (\eta_1(s) + \eta_2(s)) ds + \sum_{i=1}^p \eta_i < \frac{1}{C_G} \quad (8.20)$$

y

$$C_G \left(\int_{t_0}^{t_0+T} (\eta_1(s) + \eta_2(s)) ds + \sum_{i=1}^p \eta_i + \int_{t_0}^{t_0+T} \|g(s, 0, 0)\| ds + \sum_{i=1}^p \|I_i(0)\| \right) < 1, \quad (8.21)$$

entonces la solución de (8.4) escrita en términos de la función de Green (8.16) dada por (8.15) es la única solución T -periódica del sistema (8.15).

Demostración: Sea $\mathcal{PC}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ el conjunto de funciones T -periódicas $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuas a trozos y con discontinuidades en los puntos $(t_i)_{i=1}^{\infty}$ para las cuales

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_i \\ t < t_i}} x(t) \text{ existe.}$$

En el conjunto $\mathcal{PC}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ se introduce la norma

$$\|x\|_{\infty} = \sup \{|x(t)| : t \in [0, T]\}.$$

Con esta norma $\mathcal{PC}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach. (Ver [11]). Sea

$$\mathcal{B}_{[0,r]} = \{x \in \mathcal{PC}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid \|x\|_{\infty} \leq r\}.$$

Definamos el operador $\mathcal{P} : \mathcal{PC}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{PC}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ dado por

$$\mathcal{P}(x)(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} G(t,s)g(s, x(s), x(\gamma(s))) ds + \sum_{i=1}^p G(t, t_i)I_i(x(t_i^-)).$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}(x)(t) - \mathcal{P}(y)(t)\| &= \int_{t_0}^{t_0+T} \|G(t,s)\| \|g(s, x(s), x(\gamma(s))) - g(s, y(s), y(\gamma(s)))\| ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^p \|G(t, t_i)\| \|I_i(x(t_i^-)) - I_i(y(t_i^-))\| \\ &\leq C_G \left(\int_{t_0}^{t_0+T} (\eta_1(s) + \eta_2(s)) ds + \sum_{i=1}^p \eta_i \right) \|x - y\|_{\infty} \\ &< \|x - y\|_{\infty}, \end{aligned}$$

por lo que se tiene \mathcal{P} es una contracción. Ahora, debemos comprobar que $\mathcal{B}_{[0,r]}$ sea invariante bajo la acción del operador \mathcal{P} . A saber

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}(x)(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t_0+T} \|G(t,s)\| \|g(s, x(s), x(\gamma(s)))\| ds + \sum_{i=1}^p \|G(t, t_i)\| \|I_i(x(t_i^-))\| \\ &\leq C_G \left(\int_{t_0}^{t_0+T} \|g(s, x(s), x(\gamma(s))) - g(s, 0, 0) + g(s, 0, 0)\| ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^p \|I_i(x(t_i^-)) - I_i(0) + I_i(0)\| \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_G \left(\int_{t_0}^{t_0+T} (\eta_1(s) \|x(s)\| + \eta_2(s) \|x(\gamma(s))\|) ds + \sum_{i=1}^p \eta_i \|x(t_i^-)\| \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_0}^{t_0+T} \|g(s, 0, 0)\| ds + \sum_{i=1}^p \|I_i(0)\| \right) \\
&\leq C_G \left(\int_{t_0}^{t_0+T} (\eta_1(s) + \eta_2(s)) ds + \sum_{i=1}^p \eta_i + \int_{t_0}^{t_0+T} \|g(s, 0, 0)\| ds \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^p \|I_i(0)\| \right) \|x\|_\infty \\
&\leq \|x\|_\infty \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Luego, por el Teorema de contracción de Banach, el operador \mathcal{P} tiene un único punto fijo en $\mathcal{B}_{[0,r]}$. Por ende, la ecuación integral

$$x(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} G(t, s)g(s, x(s), x(\gamma(s))) ds + \sum_{i=1}^p G(t, t_i)I_i(x(t_i^-))$$

posee una única solución T -periódica. Es decir, (8.4) tiene una única solución T -periódica. ■

Capítulo III

Soluciones convergentes de sistemas impulsivos con argumento constante a trozos del tipo generalizado

8.3 Introducción

En [26], motivados por el estudio de enfermedades de transmisión vertical tales como la Gonorrea, *K.L. Cooke* y *J.A. Yorke* analizan el sistema

$$x'(t) = g(x(t)) - g(x(t - L)), \quad (8.22)$$

donde $x(t)$ representa al número de individuos de una población en el instante t , $g(x(t))$ representa al número de nacimientos y, suponiendo que el período de vida de cada individuo es L , tenemos que $g(x(t - L))$ representa a mortalidad en el instante t , con lo que la expresión $g(x(t)) - g(x(t - L))$ representa a la tasa de cambio de la población de una especie en el instante t . Los autores analizan los casos en los cuales g es una función del tipo Lipschitz global, y deducen la convergencia

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = k,$$

determinando así la existencia de un equilibrio para la población de la especie representada en (8.22), el que es independiente de la condición inicial del sistema en cuestión, lo que equivale a decir que las soluciones son convergentes.

Lo anteriormente expuesto muestra la enorme importancia de considerar sistemas que puedan estabilizarse para t muy grandes. Muchos son los casos de modelos de transmisión de enfermedades en los cuales es necesario establecer condiciones para conseguir una estabilización de la población infectada o la de extinción de la población de alguna plaga.

Es en este sentido que los sistemas impulsivos otorgan excelentes modelos de vacunación de poblaciones o de combate contra plagas. (Ver [50] y [58])

Motivados por este tipo de modelos, a continuación demostraremos la existencia de un equilibrio asintótico para la IDEPCAG

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), x(\gamma(t))), & t \neq t_i \\ \Delta x(t_i) &= Q_i(x(t_i^-)), & t = t_i, \end{aligned}$$

bajo ciertas condiciones de integrabilidad de sus coeficientes.

8.4 Equilibrio asintótico de un sistema IDEPCAG

En esta sección estudiaremos el problema de la existencia de un equilibrio asintótico para la clase IDEPCAG a tiempos fijos. Los resultados serán una extensión a ecuaciones del tipo IDEPCAG del trabajo realizado en [30] por *P. González* y *M. Pinto* (Ver [42] para caso DEPCAG).

Sea

$$B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq r\}, \quad \text{donde } |\cdot| \text{ es cualquier norma en } \mathbb{R}^n.$$

Definición 4 [30] Diremos que la ecuación diferencial impulsiva con argumento constante a trozos del tipo

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), x(\gamma(t))), & t \neq t_i \\ \Delta x(t_i) &= Q_i(x(t_i^-)), & t = t_i \\ x(\tau) &= x_0 \end{aligned} \quad (8.23)$$

definida sobre $[\tau, \infty)$ tiene un **equilibrio asintótico** si:

i) Existe un número real positivo $r > 0$ tal que para cada $a \geq \tau$, la ecuación (8.23) con condiciones iniciales $x(a) = x_0$ tiene una solución $x(t)$ definida sobre $[a, \infty)$ y que satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \xi, \quad (8.24)$$

para algún $\xi \in \mathbb{R}^n$.

ii) Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ existe $a \in I$ y una solución de $x(t)$ de (8.23) definida sobre $[a, \infty)$ y satisfaciendo (8.24).

A fin de establecer resultados necesitaremos de las siguientes hipótesis:

H_1 a) Existen funciones integrables $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ sobre I tales que para todo $(t, x(t), x(\gamma(t))) \in I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\|f(t, x(t), x(\gamma(t)))\| \leq \lambda_1(t) \|x(t)\| + \lambda_2(t) \|x(\gamma(t))\|,$$

donde

$$\widehat{\vartheta}_i = \int_{t_i}^{\zeta_i} (\lambda_1(s) + \lambda_2(s)) ds \leq \widehat{\vartheta} := \sup_{i \in \mathbb{N}} \widehat{\vartheta}_i < 1.$$

b) Existe una sucesión sumable de números reales no negativos $(\mu_i)_{i=1}^{\infty}$ tales que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\|Q_i(x(t_i^-))\| \leq \mu_i \|x(t_i^-)\|, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

H_2 a) La función $f(t, 0, 0)$ es integrable sobre I , y existen funciones integrables $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ sobre I tales que para todo $(t, x(t), x(\gamma(t))), (t, y(t), y(\gamma(t))) \in I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\begin{aligned} &\|f(t, x(t), x(\gamma(t))) - f(t, y(t), y(\gamma(t)))\| \\ &\leq \lambda_1(t) \|x(t) - y(t)\| + \lambda_2(t) \|x(\gamma(t)) - y(\gamma(t))\| \end{aligned}$$

donde

$$\widehat{\vartheta}_i = \int_{t_i}^{\zeta_i} (\lambda_1(s) + \lambda_2(s)) ds \leq \widehat{\vartheta} := \sup_{i \in \mathbb{N}} \widehat{\vartheta}_i < 1.$$

b) Existe una sucesión sumable de números reales no negativos $(\widetilde{\mu}_i)_{i=1}^{\infty}$ tales que para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\|Q_i(x(t_i^-)) - Q_i(y(t_i^-))\| \leq \widetilde{\mu}_i \|x(t_i^-) - y(t_i^-)\|, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Para la clase de ecuaciones (8.23) probaremos que poseen un equilibrio asintótico global. Esto es, el equilibrio asintótico es válido para cualquier $r > 0$. Basaremos nuestros resultados en el uso de la desigualdad Gronwall-Pinto 5.21 y en la integrabilidad de coeficientes que definen a la ecuación a estudiar.

Teorema 8.13 Si $[H_1]$ es satisfecha, entonces toda solución de (8.23) con condición inicial $x(\tau) = x_0$ con $\tau \geq t_0$ satisface (8.24) para algún $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Demostración: Si $x(t)$ es solución de (8.23) con condición inicial $x(\tau) = x_0$ con $\tau \geq t_0$, definida sobre un subintervalo finito $J \subset [\tau, \infty)$, entonces $x(t)$ por 6.1 satisface $\forall t \in J$

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|x_0\| + \int_{\tau}^t \|f(s, x(s), x(\gamma(s)))\| ds + \sum_{\tau \leq t_i < t} \|Q_i(x(t_i^-))\| \\ &\leq \|x_0\| + \int_{\tau}^t (\lambda_1(s) \|x(s)\| + \lambda_2(s) \|x(\gamma(s))\|) ds + \sum_{\tau \leq t_i < t} \mu_i \|x(t_i^-)\|. \end{aligned}$$

Luego, por el Lema 5.2, se tiene

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| \left(\prod_{\tau \leq t_i < t} (1 + \mu_i) \right) \exp \left(\int_{\tau}^t \left(\lambda_1(s) + \frac{\lambda_2(s)}{1 - \vartheta} \right) ds \right)$$

y, en consecuencia a la integrabilidad de los coeficientes, la solución de (8.23) es acotada, por lo que puede ser continuada más allá de $\sup J$.

Ahora, debido nuevamente a la integrabilidad de los coeficientes se tiene que si $t, s > N$ con N suficientemente grande, entonces

$$\begin{aligned} \|x(t) - x(s)\| &\leq \int_s^t \|f(u, x(u), x(\gamma(u)))\| du + \sum_{t_i(s) \leq t_i < t} \|Q_i(x(t_i^-))\| \\ &\leq \int_s^t (\lambda_1(u) \|x(u)\| + \lambda_2(u) \|x(\gamma(u))\|) ds + \sum_{t_i(s) \leq t_i < t} \mu_i \|x(t_i^-)\| \\ &\leq L \left(\int_s^t (\lambda_1(u) + \lambda_2(u)) ds + \sum_{t_i(s) \leq t_i < t} \mu_i \right) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego, por el criterio de Cauchy, $x(t)$ es convergente a algún $\xi \in \mathbb{R}^n$. De esta forma se obtiene la condición *i*) de la definición de equilibrio asintótico. ■

A fin de conseguir la condición *ii*) de la definición de equilibrio asintótico utilizaremos el Teorema de Punto Fijo de Banach y la hipótesis $[H_2]$, lo que se resume en el siguiente teorema:

Teorema 8.14 Asumamos que las condiciones dadas por $[H_2]$ se cumplen. Entonces para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ existe $a \geq \tau$ y una solución $x(t)$ de (8.23) definida sobre $[a, \infty)$ que satisface (8.24).

Demostración: Usando la hipótesis $[H_2]$, es decir, por la integrabilidad de los coeficientes; podemos escoger un número real suficientemente grande $a \geq \tau$ tal que

$$\kappa = \int_a^{\infty} (\lambda_1(s) + \lambda_2(s)) ds + \sum_{a \leq t_i} \mu_i < 1.$$

Sea \mathcal{B} el espacio de Banach de las funciones acotadas definidas sobre $[a, \infty)$ con valores en \mathbb{R}^n . Utilizaremos la norma natural en este espacio, a saber

$$\|f\| = \{\sup |f(t)| : t \in [a, \infty)\}.$$

Tomemos el operador $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ definido por

$$(Tx)(t) = \xi - \int_t^\infty f(s, x(s), x(\gamma(s))) ds - \sum_{t \leq t_i} Q_i(x(t_i^-)).$$

Fácilmente se comprueba que $T(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$, ya que

$$\begin{aligned} \|(Tx)(t)\| &\leq \|\xi\| + \int_t^\infty \|f(s, x(s), x(\gamma(s))) - f(s, 0, 0)\| ds + \int_t^\infty \|f(s, 0, 0)\| ds \\ &\quad + \sum_{t \leq t_i} \|Q_i(x(t_i^-)) - Q_i(0)\| + \sum_{t \leq t_i} \|Q_i(0)\| \\ &\leq \|\xi\| + \int_a^\infty (\lambda_1(s) + \lambda_2(s)) \|x(s)\| ds + \sum_{a \leq t_i} \mu_i \|x(t_i^-)\| + \int_a^\infty \|f(s, 0, 0)\| ds. \end{aligned}$$

Así, gracias a la integrabilidad pedida de los coeficientes y de $\|f(t, 0, 0)\|$, se tiene lo buscado. Debemos mostrar ahora que el operador T es una contracción. A saber

$$\begin{aligned} \|(Tx)(t) - (Ty)(t)\| &= \int_t^\infty \|f(s, x(s), x(\gamma(s))) - f(s, y(s), y(\gamma(s)))\| ds \\ &\quad + \sum_{t \leq t_i} \|Q_i(x(t_i^-)) - Q_i(y(t_i^-))\| \\ &\leq \int_t^\infty \lambda_1(s) \|x(s) - y(s)\| + \lambda_2(s) \|x(\gamma(s)) - y(\gamma(s))\| ds \\ &\quad + \sum_{t < t_i} \mu_i \|x(t_i^-) - y(t_i^-)\| \\ &\leq \|x - y\|_\infty \left(\int_t^\infty (\lambda_1(s) + \lambda_2(s)) ds + \sum_{t < t_i} \mu_i \right) \\ &< \kappa \|x - y\|_\infty. \end{aligned}$$

Por ende, existe un único punto fijo para este operador en \mathcal{B} . Es decir, se satisface

$$x(t) = \xi - \int_t^\infty f(s, x(s), x(\gamma(s))) ds - \sum_{t \leq t_i} Q_i(x(t_i^-)), \quad \forall t \geq a,$$

por lo que definiendo

$$\xi' = \xi - \int_a^\infty f(s, x(s), x(\gamma(s))) ds + \sum_{a < t_i} Q_i(x(t_i^-)),$$

tenemos que $x(t)$ satisface (8.23). A saber

$$x(t) = \xi' + \int_a^t f(s, x(s), x(\gamma(s))) ds + \sum_{a < t_i < t} Q_i(x(t_i^-)), \quad \forall t \geq a,$$

satisfaciendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \xi, \quad \text{con } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

De esta forma se obtiene la condición *ii)* de la definición de equilibrio asintótico. ■

Es importante notar que el resultado anterior es válido tomando cualquier $r > 0$ tal que $\|x\|_\infty \leq r$. Como consecuencia de los teoremas 8.13 y 8.14 tenemos:

Corolario 8.15 *Sean las condiciones $[H_1]$ y $[H_2]$ satisfechas. Entonces existe un equilibrio asintótico global, es decir, para cualquier $a \geq \tau$ lo suficientemente grande, todas las soluciones del sistema IDEPCAG*

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), x(\gamma(t))), & t \neq t_i \\ \Delta x(t_i) &= Q_i(x(t_i^-)), & t = t_i, \\ x(a) &= x_0 \end{aligned}$$

convergerán a

$$\xi \in \mathbb{R}^n.$$

9 Equilibrio asintótico para el sistema lineal no homogéneo con argumento constante a trozos del tipo generalizado con impulsos (9.1)

En lo que sigue analizaremos el comportamiento de las soluciones de la IDEPCAG

$$\begin{aligned} y'(t) &= A(t)y(t) + B(t)y(\gamma(t)) + f(t), & t \neq t_i \\ y(t_i) &= \tilde{C}_i y(t_i^-) + D_i, & t = t_i \end{aligned} \quad (9.1)$$

en donde $\gamma(t)$ es una función constante a trozos y

$$y(t_i^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_i \\ t < t_i}} y(t),$$

existe $\forall t_i$ con $i \in \mathbb{N}$, donde $y(t_i^+) = y(t_i)$; con el fin de concluir que bajo ciertas condiciones de integrabilidad de los coeficientes, las soluciones de (9.1) son convergentes mediante el estudio de la matriz fundamental asociada y de la correspondiente fórmula de variación de parámetros para $t \in [0, \infty)$ en el caso avanzado. Es decir, $\gamma(t) = t_{i+1}$ si $t \in [t_i, t_{i+1})$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. Analizaremos también el caso $\gamma(t) = t_i$, si $t \in [t_i, t_{i+1})$, $\forall i \in \mathbb{Z}$.

Además, asumiremos las siguientes integrabilidades:

$$A, B, f \in L^1([0, \infty)); \quad C_i, D_i \in l^1(\mathbb{N}) \quad (9.2)$$

9.1 Equilibrio asintótico para (9.1)

En lo que sigue consideramos la ecuación (9.1). Se tiene

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t A(s)y(s)ds + \int_{t_0}^t B(s)y(\gamma(s))ds + \int_{t_0}^t f(s)ds \\ &+ \sum_{t_0 \leq t_i < t} C_i y(t_i) + \sum_{t_0 \leq t_i < t} D_i. \end{aligned}$$

A continuación, como corolario del Teorema 8.13, se tiene lo siguiente:

Corolario 9.1 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ existe.

Demostración: Debido a (9.2), se tiene que por el criterio de Cauchy $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ existe, por lo que se tiene la condición *i*) de Equilibrio asintótico. ■

En lo que sigue explicitaremos el valor de $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$, a fin de poder obtener la condición *ii*) de equilibrio asintótico. Recordando (7.33)

$$\begin{aligned}
 y(t) = & \underbrace{W(t, \tau)y(\tau)}_{F_1(t)} + \underbrace{\int_{\tau}^{\zeta_{i(\tau)}} W(t, \tau) \Phi(\tau, s) f(s) ds}_{F_2(t)} \\
 & + \underbrace{\sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} W(t, t_r) \int_{t_r}^{\zeta_r} \Phi(t_r, s) f(s) ds}_{F_3(t)} + \underbrace{\sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} W(t, t_r) \int_{\zeta_{r-1}}^{t_r} (I + C_r) \Phi(t_r, s) f(s) ds}_{F_4(t)} \\
 & + \underbrace{\int_{\zeta_{i(t)}}^t \Phi(t, s) f(s) ds}_{F_5(t)} + \underbrace{\sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} W(t, t_r) D_r}_{F_6(t)}
 \end{aligned} \tag{9.3}$$

donde

$$\begin{aligned}
 W(t, \tau) &= W(t, t_{i(t)}) \left(- \prod_{j=i(\tau)+2}^{i(t)} (I + C_j) W(t_j, t_{j-1}) \right) (I + C_{i(\tau)+1}) W(t_{i(\tau)+1}, \tau), \\
 &\text{para } t \in I_{i(t)} \text{ y } \tau \in I_{i(\tau)}.
 \end{aligned}$$

con

$$W(t_{i+1}, t_i) = E(t_{i+1}, \zeta_i) E^{-1}(t_i, \zeta_i), \quad \text{para } t_i \leq \zeta_i \leq t_{i+1} \text{ con } i \in \mathbb{Z}^+.$$

A fin de obtener algún resultado para la expresión anterior, debemos analizar cada una de sus componentes.

Con el objetivo de estimar una cota para $W(t, \tau)$ vemos que $\Phi(t, s)$ cumple

$$\|\Phi(t, s)\| \leq e^{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|A(u)\| du} < \infty, \quad \text{si } t, s \in [t_i, t_{i+1}]. \tag{9.4}$$

Además, se tiene que tanto $E(t_{i+1}, t_i)$ como $E^{-1}(t_{i+1}, t_i)$ son acotadas por (7.7), (7.8) y (9.4), lo

cual nos permite obtener una estimación para $\|W(t, \tau)\|$. A saber

$$\begin{aligned}
\|W(t, \tau)\| &\leq \|W(t, t_{i(t)})\| \left[\prod_{j=i(\tau)+2}^{i(t)} \|W(t_j, t_{j-1})\| \right] \\
&\quad \cdot \|W(t_{i(\tau)+1}, \tau)\| \left[\prod_{j=i(\tau)+1}^{i(t)} \|(I + C_j)\| \right] \\
&\leq \left[\prod_{j=i(\tau)+2}^{i(t)} \|E(t_j, \zeta_{j-1})\| \right] \left[\prod_{j=i(\tau)+2}^{i(t)} \|E^{-1}(t_{j-1}, \zeta_{j-1})\| \right] \\
&\quad \cdot \|E(t_{i(\tau)+1}, \zeta_{i(\tau)})\| \|E^{-1}(\tau, \zeta_{i(\tau)})\| \left[\prod_{j=i(\tau)+1}^{i(t)} \|(I + C_j)\| \right].
\end{aligned} \tag{9.5}$$

Luego, recordando que

$$\|J(t_i, t_{i-1})\| \leq 1 + e^{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|A(u)\| du} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|B(s)\| ds, \quad \|\Phi(t_i, t_{i-1})\| \leq e^{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|A(u)\| du},$$

notamos

$$\begin{aligned}
\|E(t_i, t_{i-1})\| &\leq e^{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|A(u)\| du} \left\{ 1 + e^{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|A(u)\| du} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|B(s)\| ds \right\}, \\
\|E^{-1}(t_i, t_{i-1})\| &\leq \frac{e^{-\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|A(u)\| du}}{1 - e^{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|A(u)\| ds} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|B(s)\| ds},
\end{aligned}$$

por lo que es fácil ver que

$$\prod \|E(t_j, \zeta_{j-1})\| \leq e^{\int_{\tau}^{\infty} \|A(u)\| du} \prod \left(1 + e^{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|A(u)\| du} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|B(s)\| ds \right)$$

y

$$\prod \|E^{-1}(t_{j-1}, \zeta_{j-1})\| \leq \prod \left(e^{-\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|A(u)\| du} \left(1 - e^{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|A(u)\| du} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|B(s)\| ds \right)^{-1} \right).$$

Luego, debido a que $A(t), B(t) \in L^1$, $(C_j) \in l^1(\mathbb{N})$ y (7.6), se tiene que estos últimos productos son convergentes, por lo que $W(t, \tau)$ es acotada.

A continuación mostraremos que cada componente de (9.3) es convergente a fin de mostrar la forma del equilibrio asintótico.

Lema 9.2 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{F}_k(t)$ existe, con $k = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

Demostración: Para ver que $F_1(t)$ es convergente, observamos que como W es matriz fundamental de (7.4), por la integrabilidad de los coeficientes y la acotación de W se tiene

$$W'(t) = A(t)W(t) + B(t)W(\gamma(t)) \in L^1,$$

lo que implica

$$W(t) - W(t_0) = \int_{t_0}^t W'(u) du \text{ converge cuando } t \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, se concluye

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = W(\infty) \text{ existe.} \quad (9.6)$$

Así, $\lim_{t \rightarrow \infty} F_1(t)$ existe.

Con $F_2(t)$, $F_3(t)$ y $F_4(t)$ se procede similarmente. Reescribimos $F_3(t)$ como

$$\begin{aligned} F_3(t) &= W(t) \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} (W)^{-1}(t_r) \int_{t_r}^{\zeta_r} \Phi(t_r, s) f(s) ds \\ &= W(t) \tilde{F}_3(i(t)) \end{aligned}$$

Luego, la convergencia depende tanto de $W(t)$ como de $\tilde{F}_3(i(t))$. A continuación, dado que $W^{-1}(t)$ es acotada, por ser $W(t)$ y $A(t) \in L^1$, vemos que

$$\begin{aligned} &\left\| \tilde{F}_3(i(t)) - \tilde{F}_3(i(t')) \right\| \\ &= \left\| \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} (W)^{-1}(t_r) \int_{t_r}^{\zeta_r} \Phi(t_r, s) f(s) ds - \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t')} (W)^{-1}(t_r) \int_{t_r}^{\zeta_r} \Phi(t_r, s) f(s) ds \right\| \\ &\leq K \int_{t_{i(t')}}^{t_{i(t)}} \|f(s)\| ds \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

cuando $i(t)$ e $i(t')$ con $i(t) > i(t')$ son lo suficientemente grandes. Debido a que $f \in L^1$ se concluye que $\tilde{F}_3(i(t))$ es de Cauchy y su límite existe.

Luego, por (9.6) tenemos que

$$\|W(t) - W(t')\| \text{ es arbitrariamente pequeño para } t \text{ y } t' \text{ suficientemente grandes,}$$

por lo que se consigue

$$\begin{aligned} \|F_3(t) - F_3(t')\| &\leq \|W\| \left\| \tilde{F}_3(i(t)) - \tilde{F}_3(i(t')) \right\| \\ &\quad + \|W(t) - W(t')\| \left\| \tilde{F}_3 \right\| \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

cuando $t, t' > T$ con T suficientemente grande. Entonces $F_3(t)$ es una sucesión de Cauchy, y $\lim_{t \rightarrow \infty} F_3(t)$ existe.

Para $F_2(t)$ se sigue de la misma forma que para $F_3(t)$, por lo que también se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} F_3(t)$ existe. Ahora, prosiguiendo con $F_4(t)$ vemos que

$$\begin{aligned} F_6(i(t)) &= W(t) \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} W^{-1}(t_r) \int_{\zeta_{r-1}}^{t_r} (I + C_r) \Phi(t_r, s) f(s) ds \\ &= W(t) \tilde{F}_4(i(t)). \end{aligned}$$

Luego, nuevamente la convergencia depende tanto de $W(t)$ como de $\tilde{F}_4(i(t))$. A continuación, dado que W^{-1} es acotada por ser W , (C_i) y $A \in L^1$, vemos que

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{F}_4(i(t)) - \tilde{F}_4(i(t')) \right\| \\ = & \left\| \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} (W)^{-1}(t_r) \int_{\zeta_{r-1}}^{t_r} (I + C_r) \Phi(t_r, s) f(s) ds - \sum_{r=i(\tau')+1}^{i(t')} (W)^{-1}(t_r) \int_{\zeta_{r-1}}^{t_r} (I + C_r) \Phi(t_r, s) f(s) ds \right\| \\ \leq & K \int_{t_{i(t')}}^{t_{i(t)}} \|f(s)\| ds \\ < & \epsilon \end{aligned}$$

cuando $i(t)$ e $i(t')$ con $i(t) > i(t')$ son lo suficientemente grandes. Debido a que $f \in L^1$ se concluye que $\tilde{F}_4(i(t))$ es de Cauchy, por lo que su límite existe.

Luego, por (9.6) se consigue

$$\begin{aligned} \|F_4(t) - F_4(t')\| & \leq \|W\| \left\| \tilde{F}_4(i(t)) - \tilde{F}_4(i(t')) \right\| \\ & \quad + \|W(t) - W(t')\| \left\| \tilde{F}_4 \right\| \\ & < \epsilon, \end{aligned}$$

cuando $t, t' > T$ con T suficientemente grande. Entonces $F_4(t)$ es una sucesión de Cauchy y $\lim_{t \rightarrow \infty} F_4(t)$ existe.

Finalmente, con $F_6(t)$ se tiene

$$\begin{aligned} F_6(t) & = W(t) \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} (W)^{-1}(t_r) D_r \\ & = W(t) \tilde{F}_6(i(t)) \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{F}_6(i(t)) - \tilde{F}_6(i(t')) \right\| & = \left\| \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} (W)^{-1}(t_r) D_r - \sum_{r=i(\tau')+1}^{i(t')} (W)^{-1}(t_r) D_r \right\| \\ & \leq K' \sum_{r=i(t')+1}^{i(t)} \|D_r\| \\ & < \epsilon, \end{aligned}$$

cuando $i(t)$ e $i(t')$ con $i(t) > i(t')$ son lo suficientemente grandes. Debido a que $(D_i) \in l^1(\mathbb{N})$, se concluye que $\tilde{F}_6(i(t))$ es de Cauchy y su límite existe. Al igual que en las estimaciones anteriores se tiene

$$\begin{aligned} \|F_6(t) - F_6(t')\| & \leq \|W\| \left\| \tilde{F}_6(i(t)) - \tilde{F}_6(i(t')) \right\| \\ & \quad + \|W(t) - W(t')\| \left\| \tilde{F}_6 \right\| \\ & < \epsilon, \end{aligned}$$

cuando $t, t' > T$ con T suficientemente grande. Entonces $F_6(t)$ es una sucesión de Cauchy, y $\lim_{t \rightarrow \infty} F_6(t)$ existe, por lo que el lema queda demostrado. ■

Lema 9.3 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{F}_5(t) = 0$

Demostración: Dado que $t \in [t_{i(t)}, t_{i(t)+1})$, puesto que $f \in L^1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|F_5(t)\| &= \left\| \int_{t_{i(t)}}^t \Phi(t, s) f(s) ds \right\| \\ &\leq K_1 \int_{t_{i(t)}}^t \|f(s)\| ds \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

por lo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_5(t) = 0.$$

En consecuencia, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= W(\infty, \tau) y_0 + \int_{\tau}^{\zeta_{i(\tau)}} W(\infty, \tau) \Phi(\tau, s) f(s) ds + \sum_{r=i(\tau)+1}^{\infty} \int_{t_r}^{\zeta_r} W(\infty, t_r) \Phi(t_r, s) f(s) ds \\ &+ \sum_{r=i(\tau)+1}^{\infty} W(\infty, t_r) \int_{\zeta_{r-1}}^{t_r} (I + C_r) \Phi(t_r, s) f(s) ds + \sum_{r=i(\tau)+1}^{\infty} W(\infty, t_r) D_r \quad (9.7) \\ &= \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Luego, por el Teorema 8.14, se tiene que para $a > \tau \in \mathbb{R}$ suficientemente grande se cumple

$$\xi' = \xi - \int_a^{\infty} A(s) y(s) ds - \int_a^{\infty} B(s) y(\gamma(s)) ds - \int_a^{\infty} f(s) ds - \sum_{a \geq t_i} C_i y(t_i) - \sum_{a \geq t_i} D_i$$

tenemos que $y(t)$ satisface (8.23), a saber

$$y(t) = \xi' + \int_a^t A(s) y(s) ds + \int_a^t B(s) y(\gamma(s)) ds + \int_a^t f(s) ds + \sum_{a \geq t_i} C_i y(t_i) + \sum_{a \geq t_i} D_i \quad \forall t \geq a,$$

con lo que construimos $y(t)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \xi, \quad \text{con } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

por lo que se obtiene lo deseado. ■

9.1.1 Un ejemplo: Caso Bereketoglu

En [13], **H. Bereketoglu** y **G. Oztepe** estudiaron la versión escalar de un caso particular de (9.1). A saber, el caso con coeficientes integrables $B(t) = -A(t)$ con $C_i = 0$, $D : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $D_i = D(i)$, y $\gamma(t) = [t + 1]$, con $t_i = i$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Consideremos el sistema lineal no homogéneo IDEPCAG

$$\begin{aligned} z'(t) &= A(t) [z(t) - z(\gamma(t))] + f(t), & t \neq i \\ z(t_i) &= z(t_i^-) + D_i, & t = i. \\ z(\tau) &= z_0 \end{aligned} \quad (9.8)$$



Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental del sistema ordinario

$$x'(t) = A(t)x(t). \quad (9.9)$$

Entonces, se sabe que $\Phi^{-1}(t)$ es matriz fundamental del sistema adjunto de (9.9). A saber

$$(\Phi^{-1})'(t) = -\Phi^{-1}(t)A(t),$$

por lo que para este caso se tiene

$$\begin{aligned} J(t, i) &= I - \int_i^t \Phi(i, s)A(s)ds \\ &= I + \Phi(i) \int_i^t -\Phi^{-1}(s)A(s)ds \\ &= I + \Phi(i) [\Phi^{-1}(t) - \Phi^{-1}(i)] \\ &= \Phi(i, t) \\ &= \Phi^{-1}(t, i), \end{aligned}$$

además de

$$\begin{aligned} E(t, t_i) &= \Phi(t, t_i)J(t, t_i) \\ &= \Phi(t, t_i)\Phi^{-1}(t, t_i) \\ &= I. \end{aligned}$$

Así, si $t, t' \in I_i$, se obtiene

$$\begin{aligned} W(t, t') &= E^{-1}(t, \gamma(t'))E(t', \gamma(t')) \\ &= E^{-1}(t, i+1)E(t', i+1) \\ &= I. \end{aligned}$$

Luego, de (7.32) se obtiene

$$z(t) = z_0 + \int_{\tau}^{t_{i(\tau)+1}} \Phi(\tau, s)f(s)ds + \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} \int_{\tau}^{r+1} \Phi(r, s)f(s)ds + \int_{i(t)+1}^t \Phi(t, s)f(s)ds + \sum_{r=i(\tau)+1}^{i(t)} D_r.$$

Ahora, a fin de establecer la existencia de un equilibrio asintótico para (9.8), tenemos que debido a (9.7) y al Teorema 8.13, se cumple la condición *i*) de la definición de equilibrio asintótico y su límite corresponde a

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) &= z_0 + \int_{\tau}^{t_{i(\tau)+1}} \Phi(\tau, s)f(s)ds + \sum_{r=i(\tau)+1}^{\infty} \int_{\tau}^{r+1} \Phi(r, s)f(s)ds + \sum_{r=i(\tau)+1}^{\infty} D_r \\ &= \xi_z \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Además, por Teorema 8.14, si para $a > \tau$ suficientemente grande definimos

$$\xi'_z = \xi_z - \int_a^{\infty} A(s)(z(s) + z(\gamma(s)))ds - \int_a^{\infty} f(s)ds - \sum_{a \geq t_i} D_i,$$

se tiene que

$$z(t) = \xi'_z + \int_a^t A(s)(z(s) + z(\gamma(s))) ds + \int_a^t f(s) ds + \sum_{a \leq t_i < t} D_i.$$

La expresión anterior resulta ser solución de (9.8) y es tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \xi_z,$$

por lo que la ecuación (9.8) posee un equilibrio asintótico.

Capítulo IV

Aproximación uniforme de sistemas impulsivos por medio de sistemas impulsivos con argumento constante a trozos del tipo generalizado

10 Aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales

Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y D un dominio en el (t, x) -plano. Suponga que f es una función a valores reales tal que $f \in \mathcal{C}(D)$. Se tienen dos problemas, muy interesantes, que son los siguientes :

Problema 1: Encontrar una función diferenciable φ definida sobre I tal que

$$(t, \varphi(t)) \in D, \quad t \in I \quad (10.1)$$

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \quad t \in I. \quad (10.2)$$

Este problema es llamado una *ecuación diferencial ordinaria de primer orden*, y lo denotaremos por

$$x' = f(t, x). \quad (10.3)$$

Si tal intervalo I y tal función φ existen, entonces φ es llamada *una solución de la ecuación diferencial* (10.3) sobre I .

Claramente si φ es solución de (10.3) sobre I , entonces $\varphi \in \mathcal{C}^1$ sobre I , en vista de (10.2). Geométricamente hablando, (10.3) indica la pendiente $f(t, x)$ en cada punto de D . Una solución φ sobre I es una función cuyo gráfico tiene pendiente $f(t, \varphi(t))$, $\forall t \in I$.

Problema 2 (Problema de Cauchy): Encontrar un intervalo I conteniendo a τ y una solución φ de (10.3) sobre I que satisfaga

$$\varphi(\tau) = \xi. \quad (10.4)$$

Este problema se denota por

$$x' = f(t, x), \quad (10.5)$$

$$x(\tau) = \xi.$$

Supongamos que existe φ solución sobre un intervalo I . Entonces integrando (10.2) conseguimos la siguiente ecuación integral

$$\varphi(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad t \in I. \quad (10.6)$$

Ahora, supongamos que $\varphi \in \mathcal{C}$ es una función que satisface (10.6) sobre I . Entonces claramente tenemos que $\varphi(\tau) = \xi$, y derivando (10.6) se sigue que φ es solución de (10.2) sobre I . En otras palabras, existe una correspondencia entre las soluciones de (10.2) sobre I satisfaciendo $\varphi(\tau) = \xi$ y las funciones continuas φ satisfaciendo (10.6) sobre I .

La mayoría de las veces es casi imposible encontrar explícitamente φ tal que satisfaga (10.3), por lo que este problema nos motiva a preguntarnos si es posible, de alguna manera, conseguir buenos aproximantes de la solución φ suponiendo que ésta exista. Una idea genial puede encontrarse en las primeras páginas de [22], la cual dice relación con las "quebradas de Euler". Mostraremos por construcción que existe una "aproximación" a la solución de (10.3) en un sentido que explicaremos a continuación.

Sea f una función continua a valores reales sobre un dominio D en el plano (t, x) . Una ϵ -aproximación de (10.3) sobre un intervalo I es una función φ continua sobre este mismo intervalo la cual satisface

- i) $(t, \varphi(t)) \in D, \quad t \in I$.
- ii) $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$, excepto posiblemente por un conjunto finito de puntos S en I , donde φ' puede tener discontinuidades de primera especie.
- iii) $|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \leq \epsilon, \quad t \in I - S$.

Cualquier función φ que satisfaga (ii) sobre I se dirá que tiene una *derivada continua a trozos* sobre I , y será denotada por $\varphi \in \mathcal{PC}^1(I)$. Si f es continua en el rectángulo

$$R = \{(t, x) / |t - \tau| \leq a; |x - \xi| \leq b\}$$

alrededor de (τ, ξ) , entonces también es acotada. Sean

$$M = \sup_{(t, x) \in R} |f(t, x)|$$

y

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

el resultado principal de existencia que dice relación con aproximaciones sólo con hipótesis de continuidad es el siguiente:

Teorema 10.1 *Sea $f \in \mathcal{C}(R)$. Dado $\epsilon > 0$, existe una ϵ -aproximación φ de la solución de (10.3) sobre $|t - \tau| \leq \alpha$ tal que $\varphi(\tau) = \xi$.*

Demostración: Sea $\epsilon > 0$. Una ϵ -aproximación será construída sobre el intervalo $[\tau, \tau + \alpha]$; una construcción similar será definida para $[\tau - \alpha, \tau]$. Esta solución aproximante consistirá de un camino poligonal partiendo de (τ, ξ) , el cual se conforma de un número finito de segmentos de recta unidos por sus extremos.

Dado que $f \in \mathcal{C}(R)$, ella es uniformemente continua en R , y por tanto, para el ϵ considerado, existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$|f(t, x) - f(\tilde{t}, \tilde{x})| \leq \epsilon \tag{10.7}$$

si tanto $(t, x), (\tilde{t}, \tilde{x}) \in R$, como $|t - \tilde{t}| \leq \delta_\epsilon$ y $|x - \tilde{x}| \leq \delta_\epsilon$.

Ahora, dividamos el intervalo $[\tau, \tau + \alpha]$ en n partes

$$\tau = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \tau + \alpha$$

de modo que

$$\max |t_k - t_{k-1}| \leq \min \left(\delta_\epsilon, \frac{\delta_\epsilon}{M} \right). \tag{10.8}$$

Ahora, desde (τ, ξ) construyamos un segmento de línea recta con pendiente $f(\tau, \xi)$ a partir de la derecha de τ hasta que se intersecte la recta $t = t_1$ en algún punto (t_1, x_1) . Este segmento debe estar dentro de la región T delimitada por las semirectas que parten de (τ, ξ) y que tienen pendiente M y $-M$, y la línea $t = \tau + \alpha$. Esto se deduce inmediatamente de la definición de α y del hecho que $|f(t, x)| \leq M$. En particular, el segmento construido corta a la recta $t = t_1$ en T . Desde el punto (t_1, x_1) construyamos a la derecha de t_1 un segmento de línea recta con pendiente $f(t_1, x_1)$ hasta intersectar la recta $t = t_2$ en (t_2, x_2) . Continuando la construcción, en un número finito de pasos el camino poligonal resultante encontrará a la recta $t = \tau + \alpha$ y éste pertenecerá a la región T . Este camino será la solución φ ϵ -aproximante para (10.5) sobre I .

El camino poligonal obtenido lo podemos escribir de la forma

$$\begin{aligned}\varphi(\tau) &= \xi, \\ \varphi(t) &= \varphi(t_{k-1}) + f(t_{k-1}, \varphi(t_{k-1}))(t - t_{k-1}), \\ t_{k-1} &\leq t \leq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}\tag{10.9}$$

Por construcción de φ , es claro que $\varphi \in \mathcal{PC}^1([\tau, \tau + \alpha])$ ya que

$$|\varphi(t) - \varphi(\tilde{t})| \leq M |t - \tilde{t}|, \quad t, \tilde{t} \in [\tau, \tau + \alpha].\tag{10.10}$$

Si $t \in (t_{k-1}, t_k)$, entonces (10.10) junto con (10.8) implican que

$$|\varphi(t) - \varphi(t_{k-1})| \leq M |t - t_{k-1}| \leq M \min\left(\delta_\epsilon, \frac{\delta_\epsilon}{M}\right) < \delta_\epsilon.$$

Pero, de (10.9) y (10.7), se tiene que

$$|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| = |f(t_{k-1}, \varphi(t_{k-1})) - f(t, \varphi(t))| \leq \epsilon$$

lo que demuestra que (10.9) es una ϵ -aproximación de la solución de (10.5). ■

Con el mismo espíritu del párrafo anterior, veremos lo que ocurre con la DEPCAG

$$\begin{aligned}x' &= f\left(\left[\frac{t}{h}\right]h, x\left(\left[\frac{t}{h}\right]h\right)\right), \quad t \in [nh, (n+1)h), \\ x_0 &= x(nh), \quad \text{con } n \in \mathbb{Z} \text{ y } h \in \mathbb{R}^+ \text{ fijo.}\end{aligned}\tag{10.11}$$

Notamos que

$$\begin{aligned}\left[\frac{t}{h}\right] &= n \Leftrightarrow n \leq \frac{t}{h} < n+1 \\ &\Rightarrow nh \leq t < (n+1)h\end{aligned}$$

por lo que al llamar a $t_n = nh$, e integrando (10.11) se obtiene

$$\begin{aligned}x(t) &= x(t_n) + \int_{t_n}^t f(t_n, x(t_n)) ds \\ &= x(t_n) + f(t_n, x(t_n))(t - t_n)\end{aligned}\tag{10.12}$$

y al considerar $t \rightarrow t_{n+1}$ obtenemos

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h \cdot f(t_n, x(t_n)).\tag{10.13}$$

Es decir, el sistema DEPCAG (10.11) puede considerarse como un aproximante de la ecuación (10.5) para $x^0 = \tau$ y h muy pequeño. Es importante notar que el uso de la parte entera $\gamma(t) =$

$[\frac{t}{h}]$ h con $h > 0$, recupera el método de Euler de aproximación de ecuaciones diferenciales ordinarias para la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}x' &= f(t, x(t)), \\x(\tau) &= x_0.\end{aligned}$$

(Ver [24], [25], [28], [29], [34], [35] y [49]). El caso anteriormente expuesto será la idea que motivará la siguiente sección, en la cual aproximaremos un sistema IDE por medio de uno IDEPCAG mediante el uso de este mismo argumento constante a trozos.

11 Aproximación uniforme de un sistema impulsivo semilineal por medio de un sistema impulsivo con argumento constante a trozos del tipo generalizado

En lo que sigue se hará una aproximación de la solución acotada del sistema semilineal impulsivo

$$\begin{aligned}y_i'(t) &= -a_i(t)y_i(t) + H_i(t, y(t)), & t \neq t_k \\ \Delta y_i &= -q_{i,k}y_i(t_k^-) + I_{i,k}(y_i(t_k^-)) & t = t_k, \\ y(\tau) &= y_0,\end{aligned}\tag{11.1}$$

mediante una ecuación diferencial impulsiva con argumento constante a trozos

$$\begin{aligned}z_i'(t) &= -a_i(t)z_i(t) + H_i(t, z(\gamma(t))), & t \neq \gamma(t_k) \\ \Delta z_i|_{t=\gamma(t_k)} &= -q_{i,k}z_i(\gamma(t_k)^-) + I_{i,k}(z_i(\gamma(t_k)^-)) & t = \gamma(t_k), \\ z(\zeta_0) &= z_0 & \zeta_0 = \gamma(\tau),\end{aligned}\tag{11.2}$$

donde $i = 1, 2, \dots, m$, y $k \in \mathbb{N}$, para las cuales

$$H_i(t, y(t)) = \sum_{j=1}^m b_{ij}(t)f_j(y_j(t)) + c_i(t),$$

con $q_{i,k} > 0$, $q_{i,k} \neq 1$, $a_i(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\forall i \in [1, m]$, $\forall k \in [1, m]$. Además

$$\underline{\theta} \leq t_{r+1} - t_r, \quad r \in \mathbb{N},\tag{11.3}$$

donde

$$\underline{\theta} = \inf_{r \in \mathbb{Z}} (t_{r+1} - t_r),$$

y

$$\gamma(t) = \left[\frac{t}{\delta} \right] \delta, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Se demostrará que al considerar esta función escalonada, la cual converge uniformemente a la identidad cuando $\delta \rightarrow 0$, entonces se tendrá

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|y(t) - z(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } \delta \rightarrow 0$$

El principal resultado de este capítulo será que mediante el uso de $\gamma(t) = \delta [\frac{t}{\delta}]$ y de hipótesis de estabilidad, podremos aproximar (11.1) mediante (11.2) en el semieje $[\tau, \infty)$.

11.1 Resultados auxiliares

A continuación mostraremos una serie de resultados que serán útiles a fin de lograr una aproximación de soluciones.

11.1.1 Cotas de expresiones relacionadas con la matriz fundamental

ε -Cota exponencial

Lema 11.1 Si $0 < \varepsilon < 1$, entonces se tiene

$$\exp(\varepsilon) \leq 1 + 2\varepsilon.$$

Demostración: De la serie de $\exp(x)$ vemos que

$$\begin{aligned}\exp(\varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \\ &= 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{2 \cdot 3} + \frac{\varepsilon^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \\ &= 1 + \varepsilon + \varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2 \cdot 3} + \frac{\varepsilon^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right) \\ &\leq 1 + \varepsilon + \varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2 \cdot 2} + \frac{\varepsilon^3}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \dots \right) \\ &= 1 + \varepsilon + \varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{2}} \right) \right) \\ &= 1 + \varepsilon + \left(\frac{\varepsilon^2}{2 - \varepsilon} \right).\end{aligned}$$

Luego, como $0 < \varepsilon < 1$, se tiene

$$\begin{aligned}\Rightarrow & 0 < \varepsilon^2 < \varepsilon \\ \Rightarrow & \varepsilon^2 < \varepsilon \\ \Rightarrow & \varepsilon^2 < 2\varepsilon - \varepsilon^2 \\ \Rightarrow & \left(\frac{\varepsilon^2}{2 - \varepsilon} \right) < \varepsilon,\end{aligned}$$

entonces se tiene $\exp(\varepsilon) \leq 1 + 2\varepsilon$. ■

Lema 11.2 si $t_r \leq s < t \leq t_{r+1}$, entonces se tiene

$$\|I - \Phi(t, s)\| \leq e^{\int_s^t \|A(u)\| du} - 1$$

y

$$\|I - \Phi^{-1}(t, s)\| \leq e^{\int_s^t \|A(r)\| dr} - 1$$

Demostración: Considerando que $t_r \leq s < t \leq t_{r+1}$, si $\Phi(t)$ es matriz fundamental del sistema lineal asociado, entonces $\Phi^{-1}(t)$ es matriz fundamental del sistema lineal adjunto correspondiente, por lo que

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(t) - \Phi^{-1}(s) &= - \int_{t_r}^t \Phi^{-1}(u) A(u) du + \int_{t_r}^s \Phi^{-1}(u) A(u) du. \\ &= \int_s^t -\Phi^{-1}(u) A(u) du.\end{aligned}$$

Tenemos que, multiplicando por la derecha por $\Phi(t)$ a la expresión anterior, se obtiene

$$I - \Phi(t, s) = \int_s^t -\Phi(t, u)A(u)du \quad (11.4)$$

es decir

$$\Phi(t, s) = I + \int_s^t \Phi(t, u)A(u)du$$

y por el lema clásico de Gronwall-Bellman concluimos que

$$\|\Phi(t, s)\| \leq e^{\int_s^t \|A(u)\| du}.$$

Ahora, aplicando esta última expresión en (11.4) se tiene

$$\begin{aligned} \|I - \Phi(t, s)\| &\leq \int_s^t \|\Phi(t, u)\| \|A(u)\| du \\ &\leq \int_s^t -e^{-\int_u^t \|A(r)\| dr} \|A(u)\| du \\ &= e^{\int_s^t \|A(r)\| dr} - 1. \end{aligned}$$

Nuevamente, considerando que para $t_r \leq s < t \leq t_{r+1}$ estimamos

$$\Phi(t) - \Phi(s) = \int_s^t A(u)\Phi(u)du$$

y multiplicando por la derecha por $\Phi^{-1}(t)$ obtenemos

$$I - \Phi(s)\Phi^{-1}(t) = \int_s^t A(u)\Phi(u)\Phi^{-1}(t)du$$

es decir

$$I - \Phi^{-1}(t, s) = \int_s^t A(u)\Phi(u, t)du.$$

Aplicando nuevamente la desigualdad de Gronwall-Bellman clásica a

$$\|\Phi^{-1}(t, s)\| \leq 1 + \int_s^t \|A(u)\| \|\Phi^{-1}(t, u)\| du \quad (11.5)$$

obtenemos

$$\|\Phi^{-1}(t, s)\| \leq e^{\int_s^t \|A(u)\| du}.$$

Luego, aplicando la expresión anterior a (11.5) se obtiene

$$\begin{aligned} \|I - \Phi^{-1}(t, s)\| &\leq \int_s^t \|A(u)\| e^{\int_u^t \|A(r)\| dr} du \\ &= e^{\int_s^t \|A(r)\| dr} - 1, \end{aligned}$$

obteniéndose así lo deseado. ■

Corolario 11.3 Si

$$t - s < \delta$$

es tal que para δ suficientemente pequeño

$$2 \|A\|_\infty \delta < 1,$$

entonces

$$\|I - \Phi(t, s)\| < 2 \|A\|_\infty \delta$$

y

$$\|I - \Phi^{-1}(t, s)\| < 2 \|A\|_\infty \delta.$$

Demostración: Si consideramos $t - s < \delta$, por Lema 11.2 y Lema 11.1, se tiene

$$\begin{aligned} \|I - \Phi(t, s)\| &\leq e^{\int_s^t \|A(u)\| du} - 1 \\ &\leq \left(1 + 2 \int_s^t \|A(u)\| du\right) - 1 \\ &\leq 2 \|A\|_\infty \delta. \end{aligned} \tag{11.6}$$

Análogamente se procede con $\|I - \Phi^{-1}(t, s)\|$. ■

Variación de parámetros A fin de concluir resultados de aproximación es que necesitaremos del siguiente lema:

Lema 11.4 La solución de (11.1) para $t \in [t_0, t_{i(t)+1})$ se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} y_i(t) &= e^{-\int_{t_0}^t a_i(u) du} \left(\prod_{j=1}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) \right) y_{i,0} \\ &+ \sum_{r=1}^{i(t)} \left(\prod_{j=r}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) \right) \int_{t_{r-1}}^{t_r} e^{-\int_s^t a_i(u) du} H_i(s, y(s)) ds \\ &+ \sum_{r=1}^{i(t)} \left(\prod_{j=r+1}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) \right) e^{-\int_{t_r}^t a_i(u) du} I_{i,r}(y_i(t_r^-)) \\ &+ \int_{t_{i(t)}}^t e^{-\int_s^t a_i(u) du} H_i(s, y(s)) ds. \end{aligned} \tag{11.7}$$

Para $t \in [t_0, t_{i(t)}]$ es posible hallar una solución discreta para (11.1) de la forma

$$\begin{aligned} y_i(t_{i(t)}) &= e^{-\int_{t_0}^{t_{i(t)}} a_i(u) du} \left(\prod_{j=1}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) \right) y_i^0 \\ &+ \sum_{r=1}^{i(t)} \left(\prod_{j=r}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) \right) \int_{t_{r-1}}^{t_r} e^{-\int_s^{t_{i(t)}} a_i(u) du} H_i(s, y(s)) ds \\ &+ \sum_{r=1}^{i(t)} \left(\prod_{j=r+1}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) \right) e^{-\int_{t_r}^{t_{i(t)}} a_i(u) du} I_{i,r}(y_i(t_r^-)). \end{aligned}$$

Demostración: Para $t \in [t_{i(t)}, t_{i(t)+1})$ tenemos que la solución de (11.1), vía variación de parámetros, se puede escribir como

$$y_i(t) = e^{-\int_{t_{i(t)}}^t a_i(u) du} y_i(t_{i(t)}) + \int_{t_{i(t)}}^t e^{-\int_s^t a_i(u) du} H_i(s, y(s)) ds. \quad (11.8)$$

Ahora, al tomar el límite lateral por la izquierda cuando $t \rightarrow t_{i(t)+1}$, se obtiene

$$y_i(t_{i(t)+1}^-) = e^{-\int_{t_{i(t)}}^{t_{i(t)+1}} a_i(u) du} y_i(t_{i(t)}) + \int_{t_{i(t)}}^{t_{i(t)+1}} e^{-\int_s^{t_{i(t)+1}} a_i(u) du} H_i(s, y(s)) ds. \quad (11.9)$$

Luego, por la ley impulsiva de (11.1) obtenemos

$$y_i(t_{i(t)+1}) = (1 - q_{i,i(t)+1}) y_i(t_{i(t)+1}^-) + I_{i,i(t)+1}(y_i(t_{i(t)+1}^-)). \quad (11.10)$$

Así, al aplicar (11.9) en (11.10) se obtiene

$$y_i(t_{i(t)+1}) = (1 - q_{i,i(t)+1}) \left(e^{-\int_{t_{i(t)}}^{t_{i(t)+1}} a_i(u) du} y_i(t_{i(t)}) + \int_{t_{i(t)}}^{t_{i(t)+1}} e^{-\int_s^{t_{i(t)+1}} a_i(u) du} H_i(s, y(s)) ds \right) + I_{i,i(t)+1}(y_i(t_{i(t)+1}^-)),$$

lo que es equivalente a

$$y_i(t_{i(t)+1}) = (1 - q_{i,i(t)+1}) e^{-\int_{t_{i(t)}}^{t_{i(t)+1}} a_i(u) du} y_i(t_{i(t)}) + \int_{t_{i(t)}}^{t_{i(t)+1}} (1 - q_{i,i(t)+1}) e^{-\int_s^{t_{i(t)+1}} a_i(u) du} H_i(s, y(s)) ds + I_{i,i(t)+1}(y_i(t_{i(t)+1}^-)).$$

La expresión anterior define una ecuación en diferencias finitas. Al resolverla obtenemos

$$y_i(t_{i(t)}) = \left(\prod_{j=1}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) e^{-\int_{t_{j-1}}^{t_j} a_i(u) du} \right) y_i^0 + \sum_{r=1}^{i(t)} \left[\left(\prod_{j=r}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) e^{-\int_{t_{j-1}}^{t_j} a_i(u) du} \right) \int_{t_{r-1}}^{t_r} e^{-\int_s^{t_{i(t)}} a_i(u) du} H_i(s, y(s)) ds \right] + \sum_{r=1}^{i(t)} \left[\left(\prod_{j=r+1}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) e^{-\int_{t_{j-1}}^{t_j} a_i(u) du} \right) I_{i,r}(y_i(t_r^-)) \right]. \quad (11.11)$$

Luego, al reemplazar (11.11) en (11.8) se tiene que la solución para $t \in [t_0, t_{i(t)+1})$ se escribe como

$$\begin{aligned}
y_i(t) &= e^{-\int_{t_0}^t a_i(u) du} \left(\prod_{j=1}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) \right) y_i^0 \\
&+ \sum_{r=1}^{i(t)} \left(\prod_{j=r}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) \right) \int_{t_{r-1}}^{t_r} e^{-\int_s^t a_i(u) du} H_i(s, y(s)) ds \\
&+ \sum_{r=1}^{i(t)} \left(\prod_{j=r+1}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) \right) e^{-\int_{t_r}^t a_i(u) du} I_{i,r}(y_i(t_r^-)) \\
&+ \int_{t_{i(t)}}^t e^{-\int_s^t a_i(u) du} H_i(s, y(s)) ds
\end{aligned}$$

lo que demuestra el lema. ■

11.2 Aproximación de soluciones del sistema impulsivo con argumento constante a trozos del tipo generalizado (11.1)

En lo que sigue necesitaremos de las siguientes hipótesis:

(H1) $f_j \in C(\mathbb{R}^m)$, para la cual existe una constante de Lipschitz L_j tal que para todo $u, v \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, 2, \dots, m$

$$|f_j(u) - f_j(v)| \leq L_j |u - v|,$$

donde $L_j : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función continua y acotada.

(H2) $I_{i,k}$ son funciones Lipschitz: existen $\{l_{i,k}\} \in \mathbb{R}^+$ tales que para todo $u, v \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \dots, m$; $k \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$|I_{i,k}(u) - I_{i,k}(v)| \leq l_{i,k} |u - v|.$$

(H3) Existe $\sigma > 0$ tal que

$$\int_s^t a_i(u) du + \sum_{s \leq t_k < t} \ln(1 + q_{i,k}) \geq \sigma(t - s), \quad \forall i \in [1, m].$$

Además, adoptaremos la siguiente notación:

$$b_i(s) = \sum_{j=1}^m |b_{ij}(s)| L_j \quad b(s) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |b_{ij}(s)| L_j \quad \tilde{l}_k = \sum_{i=1}^m l_{i,k}.$$

A continuación daremos un lema que nos será útil en el resto de la sección:

Lema 11.5 (Lipschitzianidad local) Si a_i, b_{ij}, c_i y $H_i(t, \cdot)$ son funciones acotadas $\forall i, j \in [1, m]$, y

$$\begin{aligned}
M_y &= \|a\|_\infty \|y\|_\infty + \|H\|_\infty, \\
M_z &= \|a\|_\infty \|z\|_\infty + \|H\|_\infty,
\end{aligned}$$

existen, entonces para $t_n \leq t, s < t_{n+1}$ con $n \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$|y_i(t) - y_i(s)| \leq M_y |t - s| \quad (11.12)$$

y para $\gamma(t_n) \leq t, s < \gamma(t_{n+1})$ con $n \in \mathbb{Z}$ se obtiene

$$|z_i(t) - z_i(s)| \leq M_z |t - s|. \quad (11.13)$$

Demostración: Para t, s tales que $t_n \leq t, s < t_{n+1}$, se tiene

$$\begin{aligned} y_i(t) - y_i(s) &= \int_s^t y_i'(u) du \\ &= \int_s^t (-a_i(u)y_i(u) + H_i(u, y(u))) du. \end{aligned}$$

Luego, debido al hecho de que $H_i(t, y(t))$ está compuesta de funciones acotadas, se tiene

$$\begin{aligned} |y_i(t) - y_i(s)| &\leq \int_s^t |y_i'(u)| du \\ &\leq \int_s^t (\|a\|_\infty \|y\|_\infty + \|H\|_\infty) du \\ &\leq M_y |t - s|. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Análogamente con $z(t)$, sabemos que si $M_z = (\|a\|_\infty \|z\|_\infty + \|H\|_\infty)$, entonces para t, s tales que $\gamma(t_n) \leq t, s < \gamma(t_{n+1})$ se tiene

$$\begin{aligned} |z_i(t) - z_i(s)| &\leq \int_s^t |z_i'(u)| du \\ &\leq \int_s^t (\|a\|_\infty \|z\|_\infty + \|H\|_\infty) du \\ &\leq M_z |t - s|, \end{aligned} \quad (11.15)$$

por lo que el lema queda demostrado. ■

Lema 11.6 Si $t \in I_{r-1} = [t_{r-1}, t_r)$, entonces

$$|y_i(t_r^-) - z_i(\zeta_r^-)| \leq |y_i - z_i|_\infty + \delta M_z.$$

Demostración: Observamos que si $t \in [t_{r-1}, t_r)$, entonces, dado $\delta > 0$, es posible considerar

$$|t - \zeta_r| < \delta.$$

Ahora, gracias al Lema 11.5, para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, se tiene

$$\begin{aligned} &|y_i(t_r^-) - z_i(\zeta_r^-)| \\ &\leq \lim_{\substack{t \rightarrow t_r \\ t < t_r}} (|y_i(t) - z_i(t)| + |z_i(t) - z_i(\gamma(t))|) \\ &\leq |y_i(t) - z_i(t)| + M_z |t - \gamma(t)| \\ &\leq |y_i - z_i|_\infty + \delta M_z. \end{aligned}$$

Es decir

$$|y_i(t_r^-) - z_i(\zeta_r^-)| \leq |y_i - z_i|_\infty + \delta M_z, \quad (11.16)$$

por lo que el lema queda demostrado. ■

El próximo teorema es el resultado más importante de este capítulo:

Teorema 11.7 *Consideremos las ecuaciones diferenciales impulsivas (11.1) y (11.2) para las cuales se satisfacen las hipótesis (H1) – (H3). Si*

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_{t_0}^t e^{-\sigma(t-s)} b(s) ds \\ \tilde{\Lambda} &= \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \sum_{r=1}^{i(t)} e^{-\sigma(t-t_r)} \tilde{l}_r \end{aligned}$$

satisfacen

$$\Lambda + \tilde{\Lambda} < 1$$

entonces existen constantes $K_1, K_2, K_3 \geq 0$

$$\begin{aligned} K_1 &= 2 \|a\|_\infty (\|y\|_\infty \tilde{\Lambda} + |z_i^0|) + \|H\|_\infty + M_z (\Lambda + \tilde{\Lambda}), \\ K_2 &= 2 (\|a\|_\infty (|z_i^0| + \|z\|_\infty \Lambda) + (\|H\|_\infty + 2\sigma \|z\|_\infty \tilde{\Lambda})) + M_z (\Lambda + \tilde{\Lambda}), \\ K_3 &= K_1 \left(\frac{\Lambda + \tilde{\Lambda}}{1 - (\Lambda + \tilde{\Lambda})} \right) + K_2, \end{aligned}$$

donde a_i, b_{ij}, c_i y $H(t, \cdot)$ son funciones acotadas $\forall i, j \in [1, m]$, y

$$\begin{aligned} M_y &= (\|a\|_\infty \|y\|_\infty + \|H\|_\infty) \\ M_z &= (\|a\|_\infty \|z\|_\infty + \|H\|_\infty) \end{aligned}$$

tales que

$$\sup_{r \in \mathbb{Z}} |y_i(t_r) - z_i(\zeta_r)| \leq \frac{1}{1 - (\Lambda + \tilde{\Lambda})} (|y_i^0 - z_i^0| + \delta K_3)$$

y

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |y_i(t) - z_i(t)| \leq \frac{1}{1 - (\Lambda + \tilde{\Lambda})} (|y_i^0 - z_i^0| + \delta K_1),$$

$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall i \in [1, m]$.

Demostración: Para $t \in [t_0, t_{i(t+1)})$, usando (2.12) obtenemos

$$\begin{aligned}
& |y_i(t) - z_i(t)| = \\
& \left| e^{-\int_{t_0}^t a_i(u) du} \left(\prod_{j=1}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) \right) y_i^0 + \sum_{r=1}^{i(t)} \left(\prod_{j=r}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) \right) \int_{t_{r-1}}^{t_r} e^{-\int_s^t a_i(u) du} H_i(s, y(s)) ds \right. \\
& + \sum_{r=1}^{i(t)} \left(\prod_{j=r+1}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) \right) e^{-\int_{t_r}^t a_i(u) du} I_{i,r}(y_i(t_r^-)) + \int_{t_{i(t)}}^t e^{-\int_s^t a_i(u) du} H_i(s, y(s)) ds \\
& - e^{-\int_{\zeta_0}^t a_i(u) du} \left(\prod_{j=1}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) \right) z_i^0 - \sum_{r=1}^{i(t)} \left(\prod_{j=r}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) \right) \int_{\zeta_{r-1}}^{\zeta_r} e^{-\int_s^t a_i(u) du} H_i(s, z(\gamma(s))) ds \\
& \left. - \sum_{r=1}^{i(t)} \left(\prod_{j=r+1}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) \right) e^{-\int_{\zeta_r}^t a_i(u) du} I_{i,r}(z_i(\zeta_r^-)) - \int_{\zeta_{i(t)}}^t e^{-\int_s^t a_i(u) du} H_i(s, z(\gamma(s))) ds \right|.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
& |y_i(t) - z_i(t)| \\
& = \left| \left(\prod_{j=1}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) \right) \left(e^{-\int_{t_0}^t a_i(u) du} y_i^0 - e^{-\int_{\zeta_0}^t a_i(u) du} z_i^0 \right) + \sum_{r=1}^{i(t)} \left(\prod_{j=r}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) \right) \right. \\
& \cdot \left[\int_{t_{r-1}}^{t_r} e^{-\int_s^t a_i(u) du} H_i(s, y(s)) ds - \int_{\zeta_{r-1}}^{\zeta_r} e^{-\int_s^t a_i(u) du} H_i(s, z(\gamma(s))) ds \right] \\
& + \int_{t_{i(t)}}^t e^{-\int_s^t a_i(u) du} H_i(s, y(s)) ds - \int_{\zeta_{i(t)}}^t e^{-\int_s^t a_i(u) du} H_i(s, z(\gamma(s))) ds \\
& + \sum_{r=0}^{i(t)} \left(\prod_{j=r+1}^{i(t)} (1 - q_{i,j}) \right) \\
& \cdot \left[e^{-\int_{t_r}^t a_i(u) du} I_{i,r}(y_i(t_r^-)) - e^{-\int_{\zeta_r}^t a_i(u) du} I_{i,r}(z_i(\zeta_r^-)) \right] \Big|.
\end{aligned}$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned}
& |y_i(t) - z_i(t)| \\
& \leq |\phi_i(t, t_0) y_i^0 - \phi_i(t, \zeta_0) z_i^0| \tag{11.17}
\end{aligned}$$

$$+ \left| \int_{t_0}^t \phi_i(t, s) H_i(s, y(s)) ds - \int_{\zeta_0}^t \phi_i(t, s) H_i(s, z(\gamma(s))) ds \right| \tag{11.18}$$

$$+ \sum_{r=1}^{i(t)} |\phi_i(t, t_r) I_{i,r}(y_i(t_r^-)) - \phi_i(t, \zeta_r) I_{i,r}(z_i(\zeta_r^-))|. \tag{11.19}$$

■
A continuación estimaremos (11.17) – (11.19).

12 Diferencia $|y_i(t) - z_i(t)|$

12.1 Estimación (11.17)

Al estimar la diferencia, vemos que

$$\begin{aligned}
 & |\phi_i(t, t_0)y_i^0 - \phi_i(t, \zeta_0)z_i^0| \\
 &= |\phi_i(t, t_0)y_i^0 - \phi_i(t, t_0)\phi_i(t_0, \zeta_0)z_i^0| \\
 &\leq |\phi_i(t, t_0)| |y_i^0 - \phi_i(t_0, \zeta_0)z_i^0| \\
 &= |\phi_i(t, t_0)| |y_i^0 - z_i^0 + z_i^0 - \phi_i(t_0, \zeta_0)z_i^0| \\
 &\leq |\phi_i(t, t_0)| [|y_i^0 - z_i^0| + |z_i^0| |1 - \phi_i(t_0, \zeta_0)|] \tag{12.1}
 \end{aligned}$$

Luego, por (11.2) y mediante el uso de los lemas 11.2 y 11.1, finalmente conseguimos una mejor estimación para la expresión (12.1). A saber

$$\begin{aligned}
 |\phi_i(t, t_0)y_i^0 - \phi_i(t, \zeta_0)z_i^0| &\leq e^{-\sigma(t-t_0)} [|y_i^0 - z_i^0| + 2\|a\|_\infty \delta |z_i^0|] \\
 &\leq |y_i^0 - z_i^0| + 2\delta \|a\|_\infty |z_i^0|, \tag{12.2}
 \end{aligned}$$

cuando δ es lo suficientemente pequeño.

12.2 Estimación (11.18)

Para (11.18) se tiene que si se considera la estimación

$$1 - e^{-x} < x \quad \text{si } x > -1,$$

entonces se tiene

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{t_0}^t \phi_i(t, s) H_i(s, y(s)) ds - \int_{\zeta_0}^t \phi_i(t, s) H_i(s, z(\gamma(s))) ds \right| \\
 &\leq \left| \int_{\zeta_0}^{t_0} \phi_i(t, s) H_i(s, z(\gamma(s))) ds + \int_{t_0}^t \phi_i(t, s) (H_i(s, y(s)) - H_i(s, z(\gamma(s)))) ds \right| \\
 &\leq \int_{\zeta_0}^{t_0} e^{-\sigma(t-s)} |H_i(s, z(\gamma(s)))| ds + \int_{t_0}^t e^{-\sigma(t-s)} |H_i(s, z(\gamma(s))) - H_i(s, y(s))| ds \\
 &\leq \|H\|_\infty |t_0 - \zeta_0| \\
 &\quad + \int_{t_0}^t e^{-\sigma(t-s)} |H_i(s, z(\gamma(s))) - H_i(s, y(s)) + H_i(s, z(s)) - H_i(s, z(\gamma(s)))| ds \\
 &\leq \|H\|_\infty |t_0 - \zeta_0| + \int_{t_0}^t e^{-\sigma(t-s)} b(s) |y(s) - z(s)| ds + \int_{t_0}^t e^{-\sigma(t-s)} b(s) M_z |s - \gamma(s)| ds \\
 &\leq \|H\|_\infty \delta + \sup_{t \in \mathbb{R}} |y_i(t) - z_i(t)| \Lambda + M_z \delta \Lambda,
 \end{aligned}$$

por lo que se consigue

$$\left| \int_{z_0}^t \phi_i(t, s) H_i(s, y(s)) ds - \int_{\zeta_0}^t \phi_i(t, s) H_i(s, z(\gamma(s))) ds \right| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |y_i(t) - z_i(t)| \Lambda + \delta (\|H\|_\infty + M_z \Lambda). \quad (12.3)$$

12.3 Estimación (11.19)

Para (11.19) tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{i(t)} |\phi_i(t, t_r) I_{i,r}(y_i(t_r^-)) - \phi_i(t, \zeta_r) I_{i,r}(z_i(\zeta_r^-))| \\ &= \sum_{r=1}^{i(t)} |\phi_i(t, t_r) I_{i,r}(y_i(t_r^-)) - \phi_i(t, \zeta_r) I_{i,r}(y_i(t_r^-)) \\ & \quad + \phi_i(t, \zeta_r) I_{i,r}(y_i(t_r^-)) - \phi_i(t, \zeta_r) I_{i,r}(z_i(\zeta_r^-))| \\ &\leq \sum_{r=1}^{i(t)} |\phi_i(t, t_r)| |1 - \phi_i(t_r, \zeta_r)| |I_{i,r}(y_i(t_r^-))| \\ & \quad + \sum_{r=1}^{i(t)} |\phi_i(t, \zeta_r)| |I_{i,r}(y_i(t_r^-)) - I_{i,r}(z_i(\zeta_r^-))|. \end{aligned}$$

Así, aplicando (11.6) y el Lema 11.6, se tiene que

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{i(t)} |\phi_i(t, t_r) I_{i,r}(y_i(t_r^-)) - \phi_i(t, \zeta_r) I_{i,r}(z_i(\zeta_r^-))| \\ &\leq 2 \|a\|_\infty \delta \sum_{r=1}^{i(t)} e^{-\sigma(t-t_r)} |I_{i,r}(y_i(t_r^-))| + \sum_{r=1}^{i(t)} e^{-\sigma(t-\zeta_r)} \tilde{l}_r |y_i(t_r^-) - z_i(\zeta_r^-)| \\ &\leq 2 \|a\|_\infty \delta \|y\|_\infty \tilde{\Lambda} + \sum_{r=1}^{i(t)} e^{-\sigma(t-\zeta_r)} \tilde{l}_r |y_i(t_r^-) - z_i(\zeta_r^-)| \\ &\leq 2 \|a\|_\infty \delta \|y\|_\infty \tilde{\Lambda} + \sum_{r=1}^{i(t)} e^{-\sigma(t-\zeta_r)} \tilde{l}_r \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |y_i(t) - z_i(t)| + \delta M_z \right) \\ &\leq 2\delta \|a\|_\infty \|y\|_\infty \tilde{\Lambda} + \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |y_i(t) - z_i(t)| + \delta M_z \right) \tilde{\Lambda}. \end{aligned}$$

Finalmente se consigue

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{i(t)} |\phi_i(t, t_r) I_{i,r}(y_i(t_r^-)) - \phi_i(t, \zeta_r) I_{i,r}(z_i(\zeta_r^-))| \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |y_i(t) - z_i(t)| \tilde{\Lambda} + \delta \left(2 \|a\|_\infty \|y\|_\infty \tilde{\Lambda} + M_z \tilde{\Lambda} \right). \end{aligned} \quad (12.4)$$

12.4 Estimación final $|y_i(t) - z_i(t)|$

A fin de estimar $|y_i(t) - z_i(t)|$, aplicamos (12.2) – (12.4) en (11.17) – (11.19) conseguimos

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in \mathbb{R}} |y_i(t) - z_i(t)| \\ & \leq |y_i^0 - z_i^0| + \delta (2 \|a\|_\infty |z_i^0|) \\ & \quad + \sup_{t \in \mathbb{R}} |y_i(t) - z_i(t)| \Lambda + \delta (\|H\|_\infty + M_z \Lambda) \\ & \quad + \sup_{t \in \mathbb{R}} |y_i(t) - z_i(t)| \tilde{\Lambda} + \delta (2 \|a\|_\infty \|y\|_\infty \tilde{\Lambda} + M_z \tilde{\Lambda}). \end{aligned}$$

Así, si definimos

$$K_1 = 2 \|a\|_\infty (\|y\|_\infty \tilde{\Lambda} + |z_i^0|) + \|H\|_\infty + M_z (\Lambda + \tilde{\Lambda}),$$

se obtiene

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |y_i(t) - z_i(t)| \leq \frac{1}{1 - (\Lambda + \tilde{\Lambda})} (|y_i^0 - z_i^0| + \delta K_1). \quad (12.5)$$

Ahora veremos si se cumple una aproximación discreta. Es decir, comprobaremos que la diferencia $|y(t_{i(t)}) - z(\zeta_{i(t)})|$ sea pequeña cuando δ sea pequeño.

13 Diferencia $|y_i(t_{i(t)}) - z_i(\zeta_{i(t)})|$

Debido al Lema 11.4, se tiene

$$\begin{aligned} & |y_i(t_{i(t)}) - z_i(\zeta_{i(t)})| \\ & \leq \left| \phi_i(t_{i(t)}, t_0) y_i^0 - \phi_i(\zeta_{i(t)}, \zeta_0) z_i^0 \right| \end{aligned} \quad (13.1)$$

$$+ \left| \sum_{r=1}^{i(t)} \left(\int_{t_{r-1}}^{t_r} \phi_i(t_{i(t)}, s) H_i(s, y(s)) ds - \int_{\zeta_{r-1}}^{\zeta_r} \phi_i(\zeta_{i(t)}, s) H_i(s, z(\gamma(s))) ds \right) \right| \quad (13.2)$$

$$+ \left| \sum_{r=1}^{i(t)} \left(\phi_i(t_{i(t)}, t_r) I_{i,r}(y_i(t_r^-)) - \phi_i(\zeta_{i(t)}, \zeta_r) I_{i,r}(z_i(\zeta_r^-)) \right) \right|. \quad (13.3)$$

Nuevamente, estimaremos (13.1) – (13.3).

13.1 Estimación (13.1)

Al tratar con (13.1) se obtiene

$$\begin{aligned} & \left| \phi_i(t_{i(t)}, t_0) y_i^0 - \phi_i(\zeta_{i(t)}, \zeta_0) z_i^0 \right| \\ & = \left| \phi_i(t_{i(t)}, t_0) \right| |y_i^0 - z_i^0| + \left| \phi_i(t_{i(t)}, t_0) - \phi_i(\zeta_{i(t)}, \zeta_0) \right| |z_i^0| \\ & \leq |y_i^0 - z_i^0| + \left| \phi_i(t_{i(t)}, t_0) - \phi_i(\zeta_{i(t)}, \zeta_0) \right| |z_i^0| \\ & \leq |y_i^0 - z_i^0| + \left| \phi_i(t_{i(t)}, \zeta_{i(t)}) \phi_i(\zeta_{i(t)}, t_0) - \phi_i(\zeta_{i(t)}, t_0) \phi_i(t_0, \zeta_0) \right| |z_i^0| \\ & \leq |y_i^0 - z_i^0| + \left| \phi_i(t_{i(t)}, \zeta_{i(t)}) - \phi_i(t_0, \zeta_0) \right| \left| \phi_i(\zeta_{i(t)}, t_0) \right| |z_i^0| \\ & \leq |y_i^0 - z_i^0| + \left| \phi_i(t_{i(t)}, \zeta_{i(t)}) - \phi_i(t_0, \zeta_0) \right| |z_i^0| \\ & \leq |y_i^0 - z_i^0| + |1 - \phi_i(t_0, \zeta_0)| |z_i^0|, \end{aligned}$$

Así, se logra

$$\left| \phi_i(t_{i(t)}, t_0) y_i^0 - \phi_i(\zeta_{i(t)}, \zeta_0) z_i^0 \right| \leq |y_i^0 - z_i^0| + 2 \|a\|_\infty |z_i^0| \delta. \quad (13.4)$$

13.2 Estimación (13.2)

Al calcular (13.2) se consigue

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_0}^{t_{i(t)}} \phi_i(t_{i(t)}, s) H_i(s, y(s)) ds - \int_{\zeta_0}^{\zeta_{i(t)}} \phi_i(\zeta_{i(t)}, s) H_i(s, z(\gamma(s))) ds \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^{t_{i(t)}} \phi_i(t_{i(t)}, s) H_i(s, y(s)) ds - \int_{\zeta_0}^{t_0} \phi_i(\zeta_{i(t)}, s) H_i(s, z(\gamma(s))) ds \right. \\ & \quad \left. - \int_{t_0}^{\zeta_{i(t)}} \phi_i(\zeta_{i(t)}, s) H_i(s, z(\gamma(s))) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{\zeta_0}^{t_0} \phi_i(\zeta_{i(t)}, s) H_i(s, z(\gamma(s))) ds \right| + \left| \int_{\zeta_{i(t)}}^{t_{i(t)}} \phi_i(t_{i(t)}, s) H_i(s, y(s)) ds \right| \\ & \quad + \left| \int_{t_0}^{\zeta_{i(t)}} \phi_i(t_{i(t)}, s) H_i(s, y(s)) - \phi_i(\zeta_{i(t)}, s) H_i(s, z(\gamma(s))) ds \right| \\ &\leq \|H\|_\infty |t_0 - \zeta_0| + \|H\|_\infty |t_{i(t)} - \zeta_{i(t)}| \\ & \quad + \int_{t_0}^{\zeta_{i(t)}} |\phi_i(t_{i(t)}, s) H_i(s, y(s)) - \phi_i(\zeta_{i(t)}, s) H_i(s, z(\gamma(s))) \\ & \quad + \phi_i(\zeta_{i(t)}, s) H_i(s, z(s)) - \phi_i(\zeta_{i(t)}, s) H_i(s, z(s)) \\ & \quad + \phi_i(t_{i(t)}, s) H_i(s, z(s)) - \phi_i(t_{i(t)}, s) H_i(s, z(s))| ds \\ &\leq \|H\|_\infty |t_0 - \zeta_0| + \|H\|_\infty |t_{i(t)} - \zeta_{i(t)}| \\ & \quad + \int_{t_0}^{\zeta_{i(t)}} |\phi_i(t_{i(t)}, s)| b(s) |y(s) - z(s)| ds \\ & \quad + \int_{t_0}^{\zeta_{i(t)}} |\phi_i(t_{i(t)}, \zeta_{i(t)}) - 1| |\phi_i(\zeta_{i(t)}, s)| |H_i(s, z(s))| ds \\ & \quad + \int_{t_0}^{\zeta_{i(t)}} |\phi_i(\zeta_{i(t)}, s)| |H_i(s, z(\gamma(s))) - H_i(s, z(s))| ds \\ &\leq 2 \|H\|_\infty \delta + \sup_{t \in \mathbb{R}} |y_i(t) - z_i(t)| \Lambda + 2 \|a\|_\infty \delta \|z\|_\infty \Lambda + \delta M_z \Lambda. \end{aligned}$$

Así, finalmente se consigue

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta_0}^{\zeta_i(t)} \left| \phi_i(t_i(t), s) H_i(s, y(s)) - \phi_i(\zeta_i(t), s) H_i(s, z(\gamma(s))) \right| ds \\ & \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |y_i(t) - z_i(t)| \Lambda + \delta (2 \|a\|_\infty \|z\|_\infty \Lambda + 2 \|H\|_\infty + M_z \Lambda). \end{aligned} \quad (13.5)$$

13.3 Estimación (13.3)

Debido al hecho de que si $r \leq i(t)$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} & \left| \phi_i(t_i(t), t_r) - \phi_i(\zeta_i(t), \zeta_r) \right| \\ & = \left| \phi_i(t_i(t), t_r) + \phi_i(\zeta_i(t), t_r) - \phi_i(\zeta_i(t), t_r) - \phi_i(\zeta_i(t), \zeta_r) \right| \\ & \leq \left| \phi_i(t_i(t), t_r) - \phi_i(\zeta_i(t), t_r) \right| + \left| \phi_i(\zeta_i(t), t_r) - \phi_i(\zeta_i(t), \zeta_r) \right| \\ & \leq \left| \phi_i(t_i(t), \zeta_i(t)) - 1 \right| \left| \phi_i(\zeta_i(t), t_r) \right| + \left| \phi_i(\zeta_i(t), t_r) \right| \left| 1 - \phi_i(t_r, \zeta_r) \right| \\ & \leq 4 \|a\|_\infty \delta \left| \phi_i(\zeta_i(t), t_r) \right|, \end{aligned}$$

por lo que al estimar (13.3) conseguimos

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{r=1}^{i(t)} \left(\phi_i(t_i(t), t_r) I_{i,r}(y_i(t_r^-)) - \phi_i(\zeta_i(t), \zeta_r) I_{i,r}(z_i(\zeta_r^-)) \right) \right| \\ & = \left| \sum_{r=1}^{i(t)} \phi_i(t_i(t), t_r) I_{i,r}(y_i(t_r^-)) - \sum_{r=1}^{i(t)} \phi_i(\zeta_i(t), \zeta_r) I_{i,r}(z_i(\zeta_r^-)) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{r=1}^{i(t)} \phi_i(t_i(t), t_r) I_{i,r}(z_i(\zeta_r^-)) - \sum_{r=1}^{i(t)} \phi_i(t_i(t), t_r) I_{i,r}(z_i(\zeta_r^-)) \right| \\ & = \left| \sum_{r=1}^{i(t)} \phi_i(t_i(t), t_r) (I_{i,r}(y_i(t_r^-)) - I_{i,r}(z_i(\zeta_r^-))) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{r=1}^{i(t)} \left(\phi_i(t_i(t), t_r) - \phi_i(\zeta_i(t), \zeta_r) \right) I_{i,r}(z_i(\zeta_r^-)) \right| \\ & \leq \sum_{r=1}^{i(t)} e^{-\sigma(t_i(t)-t_r)} \tilde{l}_{i,r} |y_i(t_r^-) - z_i(\zeta_r^-)| + 4\sigma\delta \sum_{r=1}^{i(t)} e^{-\sigma(\zeta_i(t)-t_r)} |I_{i,r}(z_i(\zeta_r^-))|. \end{aligned}$$

Así, se logra

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{r=1}^{i(t)} \left(\phi_i(t_i(t), t_r) I_{i,r}(y_i(t_r^-)) - \phi_i(\zeta_i(t), \zeta_r) I_{i,r}(z_i(\zeta_r^-)) \right) \right| \\ & \leq \sup_{r \in \mathbb{Z}} |y_i(t_r^-) - z_i(\zeta_r^-)| \tilde{\Lambda} + 4\sigma\delta \|z\|_\infty \tilde{\Lambda}. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Luego, al aplicar el Lema 11.6 en (13.6), finalmente se consigue

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{r=1}^{i(t)} \left(\phi_i(t_{i(t)}, t_r) I_{i,r}(y_i(t_r^-)) - \phi_i(\zeta_{i(t)}, \zeta_r) I_{i,r}(z_i(\zeta_r^-)) \right) \right| \\ & \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |y_i(t) - z_i(t)| \tilde{\Lambda} + \delta \left(M_z \tilde{\Lambda} + 4\sigma \|z\|_{\infty} \tilde{\Lambda} \right). \end{aligned} \quad (13.7)$$

13.4 Estimación final $|y_i(t_{i(t)}) - z_i(\zeta_{i(t)})|$

Por (13.4)– (13.7) en (13.1) – (13.3) se tiene

$$\begin{aligned} & \sup_{r \in \mathbb{Z}} |y_i(t_r) - z_i(\zeta_r)| \\ & \leq |y_i^0 - z_i^0| + 2\delta \|a\|_{\infty} |z_i^0| \\ & \quad + \sup_{t \in \mathbb{R}} |y_i(t) - z_i(t)| \Lambda + \delta (2 \|a\|_{\infty} \|z\|_{\infty} \Lambda + 2 \|H\|_{\infty} + M_z \Lambda) \\ & \quad + \sup_{t \in \mathbb{R}} |y_i(t) - z_i(t)| \tilde{\Lambda} + \delta \left(M_z \tilde{\Lambda} + 4\sigma \|z\|_{\infty} \tilde{\Lambda} \right). \end{aligned}$$

Luego, al definir

$$K_2 = 2 \left(\|a\|_{\infty} (|z_i^0| + \|z\|_{\infty} \Lambda) + (\|H\|_{\infty} + 2\sigma \|z\|_{\infty} \tilde{\Lambda}) \right) + M_z (\Lambda + \tilde{\Lambda})$$

se obtiene

$$\begin{aligned} & \sup_{r \in \mathbb{Z}} |y_i(t_r) - z_i(\zeta_r)| \\ & \leq |y_i^0 - z_i^0| + \sup_{t \in \mathbb{R}} |y_i(t) - z_i(t)| (\Lambda + \tilde{\Lambda}) + \delta K_2. \end{aligned}$$

Ahora, al reemplazar (12.5) en esta última, se obtiene

$$\begin{aligned} & \sup_{r \in \mathbb{Z}} |y_i(t_r) - z_i(\zeta_r)| \\ & \leq \left(\frac{1}{1 - (\Lambda + \tilde{\Lambda})} \right) |y_i^0 - z_i^0| + \delta \left(K_1 \left(\frac{\Lambda + \tilde{\Lambda}}{1 - (\Lambda + \tilde{\Lambda})} \right) + K_2 \right). \end{aligned}$$

Así, definiendo

$$K_3 = K_1 \left(\frac{\Lambda + \tilde{\Lambda}}{1 - (\Lambda + \tilde{\Lambda})} \right) + K_2,$$

finalmente se consigue

$$\sup_{r \in \mathbb{Z}} |y_i(t_r) - z_i(\zeta_r)| \leq \frac{1}{1 - (\Lambda + \tilde{\Lambda})} |y_i^0 - z_i^0| + \delta K_3 \quad (13.8)$$

por lo que queda demostrado el teorema. ■

Como corolario del teorema anterior, se obtiene la siguiente estimación del error de la aproximación realizada:

Corolario 13.1

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |y_i(t) - z_i(t)| = |y_i^0 - z_i^0| \left(\frac{1}{1 - (\Lambda + \tilde{\Lambda})} \right), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

y

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{r \in \mathbb{Z}} |y_i(t_r) - z_i(\zeta_r)| = |y_i^0 - z_i^0| \left(\frac{1}{1 - (\Lambda + \tilde{\Lambda})} \right), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Demostración: Inmediata de (13.8) y de (12.5) respectivamente. Se puede apreciar que si la condición inicial de los aproximantes mantiene una cercanía con la condición inicial del sistema real, se tiene sensibilidad de las condiciones iniciales. Es decir, obtenemos estabilidad. ■

Finalmente, se logra el resultado principal de este capítulo:

Corolario 13.2 Si consideramos $z_i^0 = y_i(\gamma(\tau))$, entonces $|y_i^0 - z_i^0| < \delta$; por lo que

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} (\sup_{r \in \mathbb{Z}} |y_i(t_r) - z_i(\zeta_r)|) &= 0 \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} (\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |y_i(t) - z_i(t)|) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Demostración: La demostración es inmediata del corolario anterior. La aproximación obtenida durante este capítulo es uniforme. ■

Capítulo V

Simulaciones computacionales de sistemas CNN

Un *Autómata Celular* se define como un modelo discreto consistente de una grilla de circuitos o células, las cuales pueden tener sólo un número finito de estados (como "prendido" y "apagado"). El estado cambia bajo un régimen de paso discreto, de acuerdo a alguna regla fija (función matemática) que determina el nuevo estado de cada una de las células en términos del estado presente y del estado de sus células vecinas. Este concepto fue originalmente descubierto e introducido por *Stanislaw Ulam* y *John Von Neumann* en los años 40.

Una *Red Neuronal Celular* o CNN (sigla en inglés de "*Cellular Neural Network*") es un circuito analógico no-lineal el cual procesa señales en tiempo real, es decir, es la versión a tiempo continuo de un autómata celular. Está compuesta de múltiples circuitos clones, también llamados "neuronas" o "células", dispuestos en arreglos rectangulares. Cada célula posee un estado de entrada (*input*) y uno de salida (*output*) y, al igual que en un autómata celular, ellas interactúan directamente sólo con las células que se encuentran dentro de algún radio o vecindad. El concepto de CNN fue introducido en 1988 por *Leon Chua* y *Lin Yang* en dos artículos, ([20] y [21]). En ellos, los autores sentaron las bases matemáticas que regían el comportamiento de tales arreglos celulares. Chua y Yang usaron este modelo matemático para demostrar, mediante un arreglo adecuado, que si las señales de entrada eran estáticas, las unidades de procesamiento convergerían, lo que sugiere que ellas pueden ser usadas para ejecutar calculos complejos y útiles. Una de las primeras y más importantes aplicaciones de las CNN's corresponde al procesamiento de imágenes y reconocimiento óptico de patrones OCR. (Sigla en inglés de "*Optical Character Recognition*"), el cual es aún una de sus principales aplicaciones.

La dinámica que rige estos modelos ha sido ampliamente estudiada (Ver [3], [8], [15], [16], [31]–[33], [36], [37], [39], [45], [55], [56] y [57]).

A la luz de las conclusiones del capítulo anterior, el uso de un argumento constante a trozos que aproxime a la identidad, junto con algunas hipótesis de estabilidad, aseguran que la aproximación de un sistema impulsivo mediante un sistema IDEPCAG sea teóricamente efectiva. En este capítulo, mostraremos una simulación computacional referida a la aproximación de un sistema impulsivo del tipo CNN.

$$\begin{aligned} X'(t) &= -A(t)X(t) + B(t)F(X(t)) + C(t), & t \neq t_k \\ X(t_k) &= (I - Q_k)X(t_k^-) + I_k(X(t_k^-)), & t = t_k \\ X(\tau) &= X_0, \end{aligned}$$

por medio del sistema IDEPCAG

$$\begin{aligned} Y'(t) &= -A(t)Y(t) + B(t)F(Y(\gamma(t))) + C(t), & t \neq \gamma(t_k) \\ Y(\gamma(t_k)) &= (I - Q_k)Y\left(\left(\gamma(t_k)^-\right)\right) + I_k\left(Y\left(\gamma(t_k)^-\right)\right), & t = \gamma(t_k) \\ Y(\gamma(\tau)) &= Y_0. \end{aligned}$$

Se considerarán todos los coeficientes acotados. La simulación fue realizada usando el programa *MATLAB R2015a*.

Ejemplo. Sea el sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = -a_1(t)x_1(t) + b_{11}(t)f_1(x_1(t)) + b_{12}(t)f_2(x_2(t)) + c_1(t), & t \neq t_k \\ x_2'(t) = -a_2(t)x_2(t) + b_{21}(t)f_1(x_1(t)) + b_{22}(t)f_2(x_2(t)) + c_2(t), & t \neq t_k \\ x_1(t_i) = (1 - q_{1,i})x_1(t_i^-) + I_{1,i}(x_1(t_i^-)), & t = t_k \\ x_2(t_i) = (1 - q_{2,i})x_2(t_i^-) + I_{2,i}(x_2(t_i^-)), & t = t_k \\ x_1(\tau) = x_1^0, \\ x_2(\tau) = x_2^0. \end{cases} \quad (13.9)$$

donde

$$\begin{aligned} a_1(t) &= 2 + \sin(\sqrt{3}t), & a_2(t) &= 4 + \cos(t); \\ b_{11}(t) &= 0.5 \sin(t), & b_{21}(t) &= 0.3 \sin(\sqrt{2}t) + 0.2 \sin(t); \\ b_{12}(t) &= 0.3 \cos(t), & b_{22}(t) &= \sin(t); \\ c_1(t) &= 2 \sin(\sqrt{2}t), & c_2(t) &= \cos(\sqrt{3}t); \\ q_{1,i} &= 0.4, \forall i \in \mathbb{Z}^+, & q_{2,i} &= 0.4, \forall i \in \mathbb{Z}^+; \\ f_1(x) &= \tanh(x), & f_2(x) &= \tanh(x); \\ I_{1,i}(x) &= \frac{1}{10} \tanh(x), \forall i \in \mathbb{Z}^+; & I_{2,i}(x) &= \frac{1}{10} \tanh(x), \forall i \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned} \quad (13.10)$$

Además, consideraremos $\tau = 0$, $t_i = i$, $\forall i \in \mathbb{Z}^+$, con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1, 1; \\ x_2(0) &= 2, 2; \end{aligned}$$

cuyas soluciones se muestran a continuación:

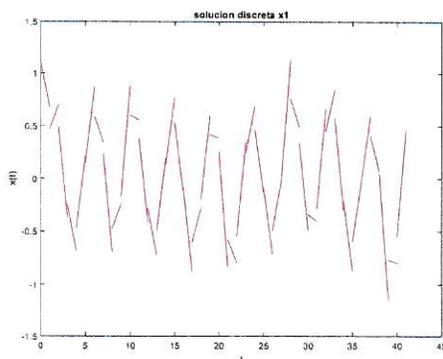


Fig. 13: Solución real discreta x_1 de (13.9).

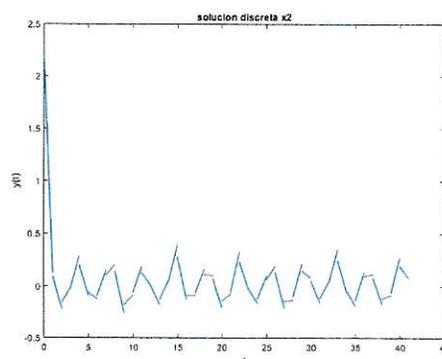


Fig. 14: Solución real discreta x_2 de (13.9).

Análogamente, se muestran las soluciones a tiempo continuo de (13.9) :

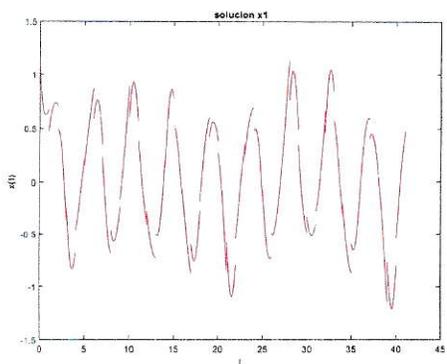


Fig. 15: Solución x_1 de (13.9)

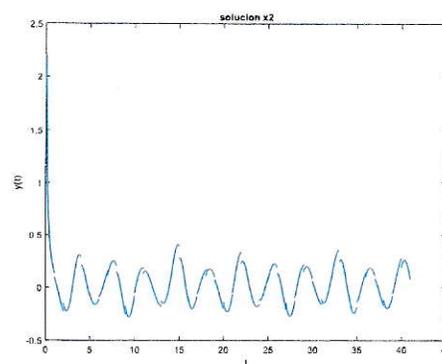


Fig. 16: Solución x_2 de (13.9)

Así, la solución real del sistema (13.9) se ilustra en la siguiente figura:

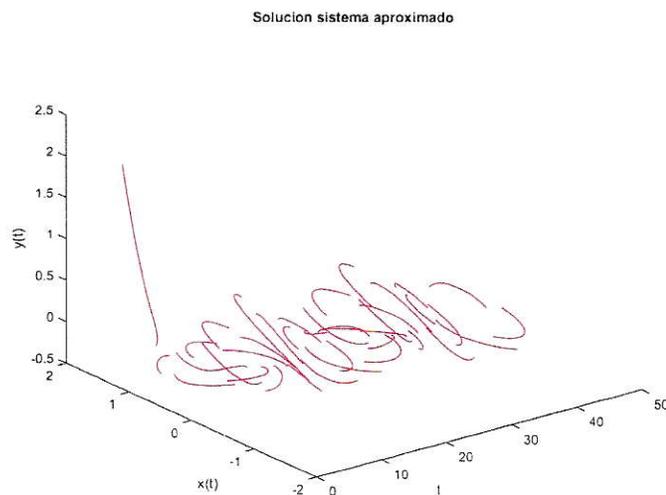


Fig. 17: Solución real del sistema (13.9).

En lo que sigue, aproximaremos el sistema impulsivo CNN (13.9) mediante el sistema IDEPCAG

$$\begin{cases} y_1'(t) = -a_1(t)y_1(t) + b_{11}(t)f_1(y_1(\gamma(t))) + b_{12}(t)f_2(y_2(\gamma(t))) + c_1(t), & t \neq \gamma(t_i) \\ y_2'(t) = -a_2(t)y_2(t) + b_{21}(t)f_1(y_1(\gamma(t))) + b_{22}(t)f_2(y_2(\gamma(t))) + c_2(t), & t \neq \gamma(t_i) \\ y_1(\gamma(t_i)) = (1 - q_{1,i})y_1(\gamma(t_i)^-) + I_{1,i}(y_1(\gamma(t_i)^-)), & t = \gamma(t_i) \\ y_2(\gamma(t_i)) = (1 - q_{2,i})y_2(\gamma(t_i)^-) + I_{2,i}(y_2(\gamma(t_i)^-)), & t = \gamma(t_i) \end{cases} \quad (13.11)$$

con

$$\begin{aligned}y_1(0) &= x_1(\gamma(0)) = 1, 1; \\y_1(0) &= x_2(\gamma(0)) = 2, 2;\end{aligned}$$

utilizando la parte entera

$$\gamma(t) = \left[\frac{t}{\delta} \right] \delta.$$

donde todos los coeficientes son los dados en (13.10).

Con el fin de estimar los parámetros necesarios para ilustrar la aproximación del capítulo precedente, es que utilizaremos la siguientes cantidades

$$b_\infty = \max_{1 \leq i \leq 2} \sum_{j=1}^2 \|b_{ij}(t)\|_\infty L_i.$$

Observamos que

$$b_\infty \leq b_1,$$

donde

$$b_1 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \|b_{ij}(t)\|_\infty L_i.$$

Ahora bien, como la función $\tanh(x)$ es Lipschitz, con constante de Lipschitz 1, se observa que $L_i = 1$ y $l_i = \frac{1}{10}$. Entonces, se tiene

$$\tilde{l}_k = \sum_{i=1}^2 l_{i,k} = 0, 2$$

y

$$\begin{aligned}b_\infty &= \max_{1 \leq i \leq 2} \sum_{j=1}^2 \|b_{ij}(t)\|_\infty L_i \\&= \max_{1 \leq j \leq 2} \{0, 8; 1, 5\} \\&= 1, 5.\end{aligned}$$

Ahora, gracias a que

$$\begin{aligned}\ln(1 - q_i)_{i=\{1,2\}} &= \ln 0, 6 \\&= 0, 47;\end{aligned}$$

es posible considerar $\sigma = 2, 47$. Por lo tanto

$$\Lambda = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} \cdot (1, 5) ds = 0.60728;$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda} &= (0, 2) \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \sum_{r=1}^{i(t)} e^{-\sigma(t-r)} \\&= (0, 2) \sup_{t \in \mathbb{R}^+} e^{-\sigma t} \sum_{r=1}^{i(t)} e^{\sigma r} \\&\leq (0, 2) \frac{e^\sigma}{e^\sigma - 1} \\&= 0, 218480.\end{aligned}$$

Es decir, se tiene

$$\Lambda + \tilde{\Lambda} < 1.$$

A continuación se muestran las aproximaciones obtenidas del sistema discreto asociado a (13.9), por medio del análogo discreto de (13.11). A saber

$$\begin{aligned} y_i((n+1)\delta) &= (1 - q_{i,(n+1)\delta}) e^{-\int_{n\delta}^{(n+1)\delta} a_i(u) du} y_i(n\delta) \\ &+ \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} (1 - q_{i,(n+1)\delta}) e^{-\int_s^{(n+1)\delta} a_i(u) du} \left(\sum_{j=1}^2 b_{ij}(s) f_j(y_j(n\delta)) + c_i(s) \right) ds \\ &+ I_{i,(n+1)\delta}(y_i((n+1)\delta^-), \text{ con } i = 1, 2 \text{ y } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

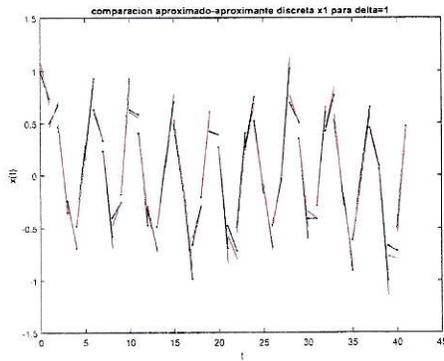


Fig. 18: Comparación aproximante vs solución real discretos de $x_1(t)$ con $\delta = 1$.

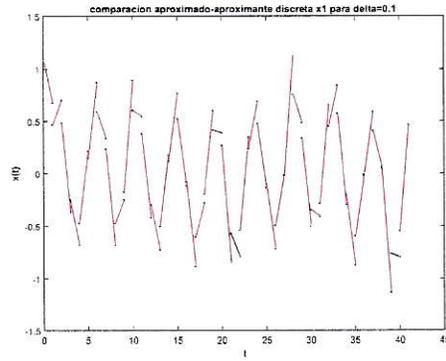


Fig. 19: Comparación aproximante vs solución real discretos de $x_1(t)$ con $\delta = 0,1$.

En las gráficas anteriores se observa la diferencia en la precisión de la aproximación de una de las componentes de la solución discreta real lograda al considerar δ más pequeño. De la misma manera se aprecia la mejora en la aproximación al considerar δ cada vez más pequeño para el caso a tiempo continuo:

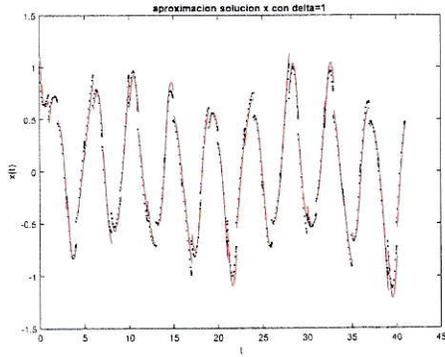


Fig. 20: Comparación aproximante vs solución real de $x_1(t)$ con $\delta = 1$.

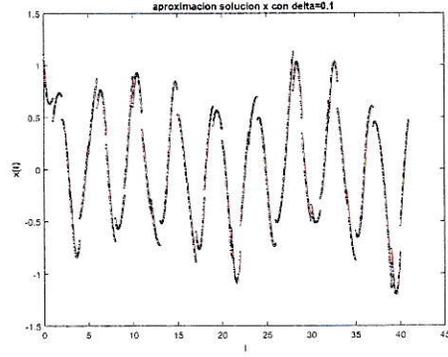


Fig. 21: Comparación aproximante vs solución real de $x_1(t)$ con $\delta = 0,1$.

Se repite el proceso para la componente $x_2(t)$ del sistema en cuestión. A saber, para la aproximación de la solución discreta

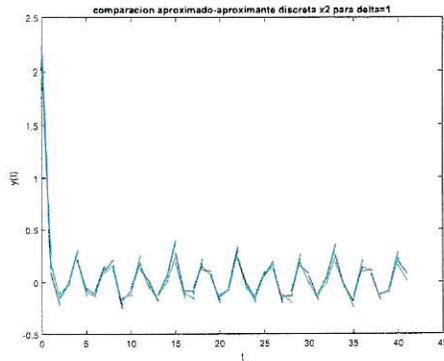


Fig. 22: Comparación aproximante vs solución real discretos de $x_2(t)$ con $\delta = 1$.

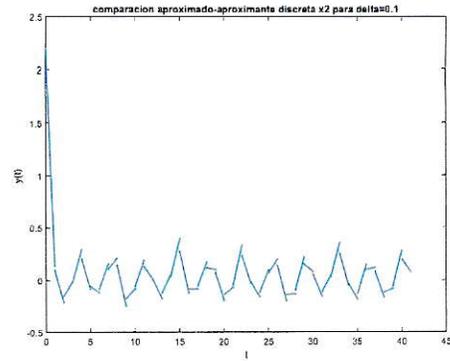


Fig. 23: Comparación aproximante vs solución real discretos de $x_2(t)$ con $\delta = 0, 1$.

y para la solución a tiempo continuo

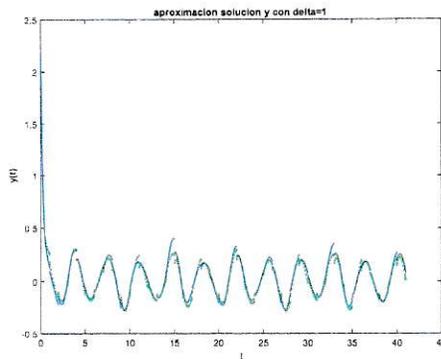


Fig. 24: Comparación aproximante vs solución real de $x_2(t)$ con $\delta = 1$.

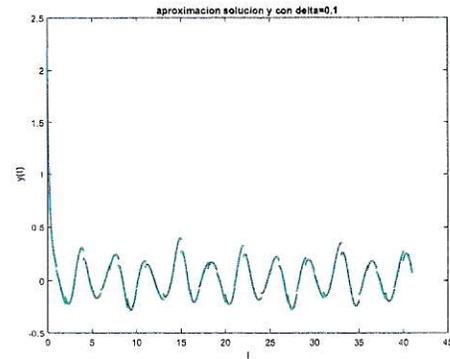


Fig. 25: Comparación aproximante vs solución real de $x_2(t)$ con $\delta = 0, 1$.

En la siguiente figura se aprecia el error cometido al aproximar la solución real del sistema usando $\delta = 1$:

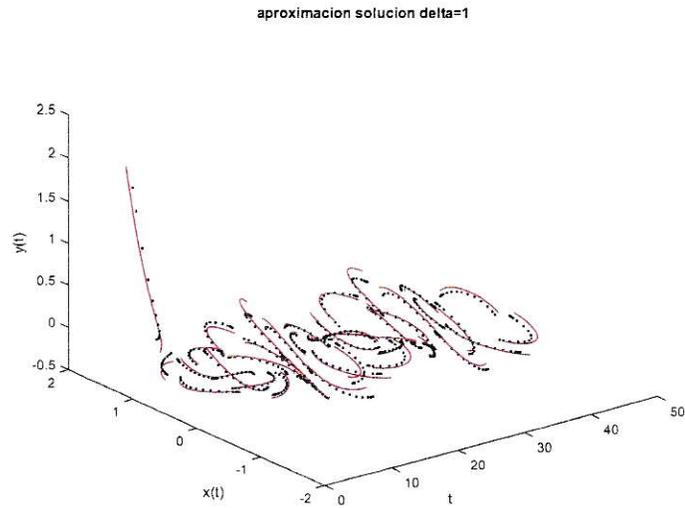


Fig. 26: Comparación solución aproximante vs solución real con $\delta = 1$.

La gráfica anterior se ve contrastada por la buena aproximación a la solución real del sistema conseguida al considerar un δ más pequeño, a saber $\delta = 0,1$:

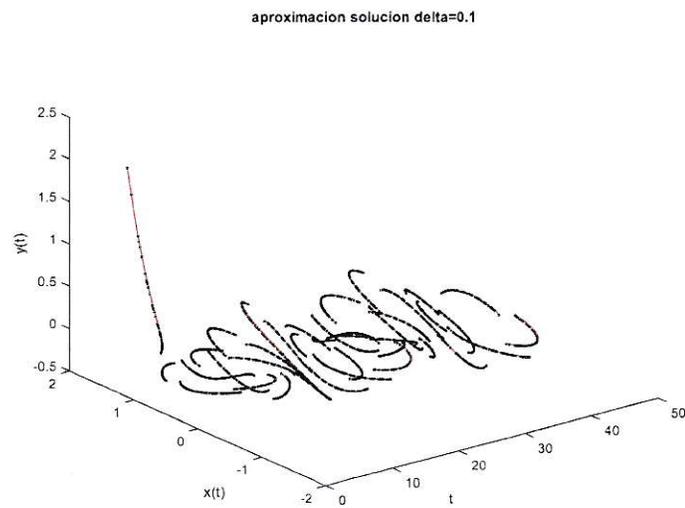


Fig. 27: Comparación solución aproximante vs solución real con $\delta = 0,1$.

En consecuencia, las gráficas anteriores comprueban nuestros resultados teóricos.

Bibliografía

- [1] A.R.Aftabizadeh, J.Wiener. *Oscillatory and periodic solutions of an equation alternately of retarded and advanced type*. Appl. Anal., 23: 219–231 (1986).
- [2] A.R.Aftabizadeh, J.Wiener, J.M.Xu. *Oscillatory and periodic solutions of delay differential equations with piecewise constant argument*. Proc. Amer. Math. Soc., 99: 673–679 (1987).
- [3] H. Akça, R. Alassar, V. Covachev, Z. Covacheva, E. Al-Zahrani. *Continuous-time additive Hopfield-type neural networks with impulses*. J. Math. Anal. Appl., 290 (2004), pp. 436–451.
- [4] M.U. Akhmet, *Nonlinear Hybrid Continuous/Discrete-Time Models*. Atlantis Press, Amsterdam-Paris (2011).
- [5] M.U. Akhmet, *Principles of Discontinuous Dynamical Systems*. Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London. (2010).
- [6] M.U.Akhmet, C. Buyukadali, T. Ergenc. *Periodic solutions of the hybrid system with small parameter*. Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 2:532-543. (2008).
- [7] M.U.Akhmet, C. Buyukadali. *On periodic solutions of differential equations with piecewise constant argument*. Comput. Math. Appl. 56:2034-2042. (2008).
- [8] M.U. Akhmet, E.Yilmaz. *Impulsive Hopfield-type neural network system with piecewise constant argument*. Nonlinear Analysis: Real World Applications. 11:2584-2593. (2010).
- [9] D.D. Bainov, P.S. Simeonov, *Impulsive Differential Equations: Asymptotic Properties of the Solutions*. World Scientific Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences Vol. 28 (1995).
- [10] D.D. Bainov, Simeonov, P.S. *Systems with Impulse Effect Stability theory and applications*. Ellis Horwood, John Wiley, New York (1989).
- [11] D.D. Bainov, Simeonov, P.S. *Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications*. Pitmann Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics Vol(66). Longman Scientific & Technical, U.K. (1993).
- [12] D.D.Bainov, V.Lakshmikantham, P.S.Simeonov. *Theory of Impulsive Differential Equations*. World Scientific. Series in Modern Applied Mathematics Vol. 6 (1989).
- [13] H.Bereketoglu, G.Oztepe. *Convergence in an impulsive advanced differential equations with piecewise constant argument*. Bulletin of Mathematical Analysis and Applications. Vol 4 Issue 3, 57-70 .(2012).
- [14] S. Busenberg, K.L, Cooke. *Models of vertically transmitted diseases with sequential-continuous dynamics*, Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences, Academic Press, New York, 179–187. (1982).
- [15] Z. Huang, Y. Xia. *Existence and exponential stability of almost periodic solution for shunting inhibitory cellular neural networks with impulses*. Chaos, Solitons and Fractals 34, 1599-1607. (2007).

-
- [16] J.Cao. *Global exponential stability and periodic solutions of delayed cellular neural networks*, Journal of Computer and Systems Sciences 60,38-46(2000).
- [17] K. Chiu. *Estudio Cualitativo de las Soluciones de Ecuaciones Diferenciales con Argumento Constante por Trozos*. Tesis de Doctorado. Facultad de Ciencias. Universidad de Chile. (2009).
- [18] K. Chiu, M. Pinto. *Periodic solutions of differential equations with a general piecewise constant argument and applications*. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 46:1-19. (2010).
- [19] K. Chiu, M. Pinto, J Jeng. *Existence and global convergence of periodic solutions in recurrent neural network models with a general piecewise alternately advanced and retarded argument*, Acta Applicandae Mathematicae,V.133(1). 133-152, (2014).
- [20] L.O.Chua, L.Yang. *Cellular neural networks: applications*. IEEE Trans. Circuits Syst.(35):1273-1290,(1988).
- [21] L.O.Chua, L.Yang. *Cellular neural networks: theory*. IEEE Trans. Circuits Syst.(35):1257-1272,(1988).
- [22] E.A.Coddington, N.Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations* McGraw-Hill Publishing Co. (1987).
- [23] K L.Cooke, J.Wiener. *Retarded differential equations with piecewise constant delays* Journal of Mathematical Analysis and Applications 99,265-297(1984).
- [24] K.L.Cooke, J.Wiener. *A survey of differential equations with piecewise continuous argument*. Lectures Notes un Mathematics, Berlin, Springer-Verlag 1475;1-15 (1991).
- [25] K.L.Cooke, I.Györi. *Numerical approximation of the solutions of delay differential equations on an infinite interval using piecewise constant arguments*. Computer & Mathematics with applications, 28(1-3):81-92. (1994).
- [26] K.L.Cooke, J.A.Yorke. *Some equations modelling growth processes and gonorrhoea epidemics*. Math. Biosciences16, 75-101 (1973).
- [27] K.L.Cooke, J.Wiener. *An equation alternately of retarded and advanced type*. Proceedings of the American Mathematical Society.99(4);726-732 Abril. (1987).
- [28] L. Dai. *Nonlinear Dynamics of Piecewise Constant Systems and Implementation of Piecewise Constant Arguments*, World Scientific Press Publishing Co, (2008).
- [29] L. González. *Aproximación de Soluciones Casi Periódicas de Ecuaciones Diferenciales Mediante Argumento Constante a Trozos*. Tesis de Magister. Facultad de Ciencias. Universidad de Chile. (2013).
- [30] P. González, M.Pinto. *Asymptotic behavior of impulsive differential equations*. Rocky Mountain J. of Math, 26(1), pp.165-173. Winter (1996).
- [31] K. Gopalsamy. *Stability of artificial neural networks with impulses*. Appl. Math. Comput., 154 (2004), pp. 783–813.
- [32] Z.H. Guan, G. Chen. *On delayed impulsive Hopfield neural networks*. Neural Netw., 12 (1999), pp. 273–280.
- [33] Z.H. Guan, J. Lam, G. Chen. *On impulsive autoassociative neural networks*. Neural Netw., 13 (2000), pp. 63–69.
- [34] I.Györi. *On approximation of the solutions of delay differential equations by using piecewise constant arguments*.Internat. J. Math. Sci. 14(1). pp. 111-126. (1991).

-
- [35] I.Györi. *On numerical approximation using differential equations with piecewise-constant arguments*. Periodica Mathematica Hungarica, (56)-1, pp 55-69 (2008).
- [36] J.J.Hopfield. *Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities*. Proc.Nat.Acad.Sci. U.S.A. 79 (1982).
- [37] Z.Huang, X.Wang, Y.Xia. *The existence and exponential attractivity of k -almost periodic sequences solution of discrete-time neural networks*. Nonlinear Dyn, 50:13-26 (2007).
- [38] K.N.Jayasree, S.G.Deo. *Variation of parameters formula for the equation of Cooke and Wiener*. Proceedings of the American Mathematical Society. 112(1), (1991).
- [39] J.P. Keener, F.C. Hoppensteadt, J. Rinzel. *Integrate-and-fire models of nerve membrane response to oscillatory input*. SIAM J. Appl. Math., 41 (3) (1981), pp. 503–517.
- [40] A.D.Myshkis. *On certain problems in the theory of differential equations with deviating arguments*. Mat.Nauk, 32: 173–202 (1977).
- [41] R.Naulín, C.Tapia. *Estabilidad de sistemas lineales impulsivos*. Revista Colombiana de Matemáticas.(29) pp.103-111. (1995).
- [42] M.Pinto. *Asymptotic equivalence of nonlinear and quasilinear differential equations with piecewise constant argument*. Math. Comp. Model., 49: 1750–1758 (2009).
- [43] M.Pinto. *Dichotomy and existence of periodic solutions of Quasilinear functional differential equations*. Nonlinear Anal. TMA, 72:1227-1234. (2010).
- [44] M.Pinto. *Cauchy and Green matrices type and stability in alternately advanced and delayed differential systems*. J. Difference of Eqs. Appl., 17(2): 235–254 (2011).
- [45] M.Pinto, G. Robledo. *Existence and stability of almost periodic solutions in impulsive neural network models*. Applied Mathematics and Computation, 217(8):4167-4177, (2010).
- [46] M.Pinto, G. Robledo. *Controlability and observability for a linear time varying system with piecewise constant delay*. Acta Appl. Math. 136:193-216, (2015).
- [47] A.M. Samoilenko, N.A. Perestyuk. *Impulsive Differential Equations*. World Scientific, Singapore (1995).
- [48] S.M. Shah, J.Wiener. *Advanced differential equations with piecewise constant argument deviations*. Internat. J. Math. & Math. Sci. 6-4, (1983), 671-703.
- [49] T. Veloz, M. Pinto. *Existence, computability and stability for solutions of the diffusion equation with general piecewise constant argument*. J. Math. Anal. Appl. 426(1): 330–339. (2014).
- [50] X. Wang, X. Song. *Mathematical models for the control of a pest population by infected pest*. Computers and Mathematics with Applications 56: 266-278. (2008).
- [51] J. Wiener. *Generalized Solutions of Functional Differential Equations*. World Scientific, Singapore (1993).
- [52] J.Wiener, V.Lakshmikantham. *Differential equations with piecewise constant arguments and impulsive equations*. Nonlinear Stud. 7:60-69. (2000).
- [53] J.Wiener, A.R.Aftabizadeh. *Differential equations alternately of retarded and advanced type*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 129(1), pp.243-255. (1988).
- [54] J.Wiener, K.L. Cooke. *Retarded differential equations with piecewise constant delays*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 99, pp. 265-297. (1984).

-
- [55] D. Xu, Z. Yang. *Impulsive delay differential inequality and stability of neural networks*. J. Math. Anal. Appl., 305 (2005), pp. 107–120.
- [56] Y. Yang, J. Cao. *Stability and periodicity in delayed cellular neural networks with impulsive effects*. Nonlinear Anal.: RWA, 8 (2007), pp. 362–374.
- [57] Y. Zhang, J. Sun. *Stability of impulsive neural networks with time delays*. Phys. Lett. A, 348 (2005), pp. 44–50.
- [58] Y. Zhou, H. Liu. *Stability of periodic solutions for a SIS model with pulse vaccination*. Mathematical and Computer Modelling 38:299-308. (2003).