Régulos en Spread Desarguesianos y de Hall

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias

por

Nicolás Adán Abarzúa Cisternas

Septiembre, 2008

Director de Tesis Dr. Rolando Pomareda

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el candidato

Nicolás Adán Abarzúa Cisternas

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magister en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 1 de Septiembre de 2008.

Director de Tesis:

Dr. Rolando Pomareda ....

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Antonio Behn ....

Dr. Eduardo Friedman ....

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas aquellas personas que estuvieron presentes en el desarrollo de esta primera etapa y a aquellas que lo siguen estando.

Agradezco especialmente a mi familia por su paciencia y comprensión.

A mi profesor guía, Rolando Pomareda por su apoyo académico, por sus sabios consejos y preocupación.

A todos los profesores que participaron de mi formación academica, desde la etapa escolar hasta el día de hoy. En especial a la profesora Luisa Aburto.

A mis amigos.

Al departamento de matemáticas y a la escuela de postgrado por su apoyo económico.

Resumen

En esta tesis consideramos spreads contenido en un espacio vectorial de dimensión 4, en particular spreads Desarguesianos y de Hall. En spreads Desarguesinos contamos el número régulos que contiene y en los de Hall encontramos tres componentes tales que el (único) régulo que ellos definen no siempre está contenido en el spread.

Abstract

In this thesis work we consider spreads contained in a 4-dimensional vector space, in particular Desarguesian and Hall spreads. In Desarguesians spreads we count the number of reguli they contain and in the Hall ones we are able to find three components such that the (unique) regulus they define is not always contained in the spread.

Índice general

Introducción

En el espacio euclídeo tridimensional, la ecuación de segundo grado más general posible es

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10} = 0$$

con a_i en $\mathbb{R}$ para todo $i \in \{1, \ldots, 10\}$ y a_i con $i \in \{1, \ldots, 6\}$ no todos nulos para que la ecuación sea efectivamente de grado dos. La gráfica de esta ecuación es llamada **superficie cuádrica.**

Una **superficie reglada** es una superficie S con la propiedad que para todo punto P en S existe una recta que pasa por P y está completamente contenida en S.

Por ejemplo el hiperboloide de una hoja de ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

es una superficie reglada. En efecto, si P es un punto arbitrario, digamos $P = (x_1, y_1, z_1)$ entonces la recta de ecuación

$$x = \frac{x_1 - y_1z_1}{z_1^2 + 1} + \left(\frac{y_1 + x_1z_1}{z_1^2 + 1}\right)t, y = \frac{y_1 + x_1z_1}{z_1^2 + 1} - \left(\frac{x_1 - y_1z_1}{z_1^2 + 1}\right)t, z = t, \ t \in \mathbb{R}$$

pasa por P y está contenida en la superficie. El paraboloide hiperbólico de ecuación

$$z = y^2 - x^2$$

es también una superficie reglada. De hecho, si $P_0 = (x_0, y_0, y_0^2 - x_0^2)$ es un punto de la superficie entonces la recta

$$x = x_0 + t, \quad y = y_0 + t, \quad z = (y_0^2 - x_0^2) + 2(y_0 - x_0)t, \quad t \in \mathbb{R}$$

pasa por el punto P_0 y está contenida completamente en la superficie.

No son superficies regladas por ejemplo los elipsoides de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

los hiperboloides de dos hojas con ecuación

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

y los paraboloides elípticos

$$z = ax^2 + by^2.$$

Tanto el hiperboloide de una hoja como el paraboloide hiperbólico son **superficies doblemente regladas**, esto quiere decir que existen dos familias de rectas que cubren completamente la superficie.
En el caso del hiperboloide de una hoja, otra familia de rectas que cubre la superficie es

$$x = x_0 + y_0 t, \quad y = y_0 + x_0 t, \quad z = -t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

y para el paraboloide hiperbólico, la otra familia de rectas que también lo cubre es

$$x = x_0 + t, \quad y = y_0 - t, \quad z = (y_0^2 - x_0^2) - 2(y_0 + x_0)t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esta situación se observa también en el caso de superficies definidas en espacios finitos, como mostramos a continuación.
Sea F un cuerpo finito y V un espacio vectorial de dimensión cuatro sobre F. Consideremos en V los subespacios vectoriales l_a, l_∞, L_a y L_∞, donde

$$\begin{aligned} l_a &= \{(x, y, ax, ay) : x, y \in F\}, \quad l_\infty = \{(0, 0, x, y) : x, y \in F\} \\ L_a &= \{(x, ax, y, ay) : x, y \in F\}, \quad L_\infty = \{(0, x, 0, y) : x, y \in F\}. \end{aligned}$$

Sea $S = \{(x, y, z, w) \in V : xw - yz = 0\}$ entonces para cada a en F, los puntos (x, y, ax, ay) y (x, ax, y, ay) con x e y en F pertenecen a S. También los puntos $(0, 0, x, y)$ y $(0, x, 0, y)$ pertenecen a S con x e y en F.
El teorema 1.1 muestra que el conjunto de puntos $\{v \in V : v \in l_a \vee v \in l_\infty\}$ es igual al conjunto $\{v \in V : v \in L_a \vee v \in L_\infty\}$, es decir

$$(\bigcup_{a\in F} l_a) \cup l_\infty = (\bigcup_{a \in F} L_a) \cup L_\infty.$$

Sea (x_0, y_0, z_0, w_0) en S entonces se tiene $x_0 w_0 - y_0 z_0 = 0$.
Supongamos que x_0 es diferente de cero entonces $w_0 = y_0 z_0 x_0^{-1}$, por tanto $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (x_0, y_0, z_0, y_0 z_0 x_0^{-1})$. Así se tiene que

$$\begin{aligned} (x_0, y_0, z_0, y_0 z_0 x_0^{-1}) &= x_0(1, y_0 x_0^{-1}, 0, 0) + z_0(0, 0, 1, y_0 x_0^{-1}) \\ (x_0, y_0, z_0, y_0 z_0 x_0^{-1}) &= x_0(1, 0, z_0 x_0^{-1}, 0) + y_0(0, 1, 0, z_0 x_0^{-1}). \end{aligned}$$

Luego si x_0 es distinto de cero se tiene que (x_0, y_0, z_0, w_0) pertenece a l_a ó L_b con $a = z_0 x_0^{-1}$ y $b = y_0 x_0^{-1}$.
Si $x_0 = 0$ entonces se tiene que $y_0 z_0 = 0$, por lo tanto $y_0 = 0$ ó $z_0 = 0$. Notamos que $y_0 = 0$ implica que

$$(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0, 0, z_0, w_0) = z_0(0, 0, 1, 0) + w_0(0, 0, 0, 1)$$

y $z_0 = 0$ implica que

$$(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0, y_0, 0, w_0) = y_0(0, 1, 0, 0) + w_0(0, 0, 0, 1)$$

Luego (x_0, y_0, z_0, w_0) pertenece a l_∞ o L_∞ si $x_0 = 0$.
Por tanto

$$(\bigcup_{a\in F} l_a) \cup l_\infty = S = (\bigcup_{a\in F} L_a) \cup L_\infty.$$

Consideremos el espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ de dimensión tres. En $\mathbb{P}(V)$ recordamos que los puntos son los subespacios vectoriales de dimensión uno de V, las rectas son los subespacios vectoriales de dimensión dos y los planos son los subespacios vectoriales de dimensión tres de V. Luego S mirada en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ es una superficie reglada cubierta por la familia de rectas

$$\{l_a : a \in F\} \cup \{l_\infty\}.$$

También S es cubierta por la familia de rectas

$$\{L_a : a \in F\} \cup \{L_\infty\},$$

por tanto S es una superficie doblemente reglada.
Estas familias de subespacios de dimensión dos son llamadas **régulos** (definición 1.1) y es el objeto de estudio en esta tesis. Mostraremos que en V siempre existen régulos. Describiremos y daremos demostraciones detalladas de algunos resultados principales en la teoría régulos.
Otras familias de subespacios de dimensión dos que estudiaremos en esta tesis son las llamadas **spreads** (definición 2.1) y probaremos que en V existen spreads.
Dado un **spread Desarguesiano** (definición 2.1), mostraremos cuántos régulos contiene (teorema 2.1). Este resultado puede ser visto en [3] (página 247) y la demostración de él en esta tesis está realizada usando los resultados del capítulo 1.
Dado un **spread de Hall** (definición 3.2) y tres de sus componentes, probaremos que no siempre el régulo que los contiene esta contenido en él y determinaremos formas de escoger régulos en él.

Para el desarrollo de todo lo anterior utilizaremos como herramienta fundamental conceptos básicos de álgebra lineal.
La importancia que tienen los régulos en el desarrollo de la geometría finita puede observarse desde la construcción misma del primer ejemplo de plano proyectivo no desarguesino finito en el año 1906 hecha por Veblen y Young [6]. La caracterización de los planos de traslación finitos hecha por André en el año 1954 [1] y [3] (capítulo 1, sección 1) y posterior construcción de spreads en los espacios vectoriales de dimensión par, por medio de sustitución de conjunto de componentes, en particular de uno o más régulos, por sus régulos opuestos muestra la incidencia de los régulos en el desarrollo de la geometría finita.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Sobre Régulos

F denotará un cuerpo finito, esto es $|F| = q$ donde $q = p^n$ con p primo y n en $\mathbb{N}$.
V denotará un espacio vectorial sobre F de dimensión cuatro, por lo tanto V es isomorfo al espacio de cuádruples F^4 y en adelante V se representa por F^4.

Definición 1.1. *Un **régulo** en V es una colección R de $q+1$ subespacios vectoriales de V de dimensión dos que cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Para todo W_1 y W_2 en R distintos, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.*

2. *Si W es un subespacio vectorial de V de dimensión dos que intersecta no trivialmente a cualquier trío de subespacios en R entonces W intersecta a todo subespacio en R.*

Diremos que los subespacios en R son las componentes del régulo R.

Ejemplo 1.1. *Si $F = \mathbb{F}_2$, cuerpo con dos elementos entonces el conjunto $R_1 = \{W_1, W_2, W_3\}$, donde*

$$\begin{aligned} W_1 &= \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle \\ W_2 &= \langle (1,0,1,0), (0,1,0,1) \rangle \\ W_3 &= \langle (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle \end{aligned}$$

es un régulo en V.
El conjunto de subespacios de V, $R_2 = \{U_1, U_2, U_3\}$ es también un régulo en

el espacio vectorial V, donde

$$\begin{aligned} U_1 &= \langle (1,0,0,0),(0,0,1,0)\rangle \\ U_2 &= \langle (1,1,0,0),(0,0,1,1)\rangle \\ U_3 &= \langle (0,1,0,0),(0,0,0,1)\rangle. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2. *Si $F = \mathbb{F}_3$, cuerpo con tres elementos entonces la colección $R_1 = \{W_1, W_2, W_3, W_4\}$, donde*

$$\begin{aligned} W_1 &= \langle (1,0,0,0),(0,1,0,0)\rangle \\ W_2 &= \langle (1,0,1,0),(0,1,0,1)\rangle \\ W_3 &= \langle (1,0,2,0),(0,1,0,2)\rangle \\ W_4 &= \langle (0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle \end{aligned}$$

es un régulo en V. La colección $R_2 = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}$, donde

$$\begin{aligned} U_1 &= \langle (1,0,0,0),(0,0,1,0)\rangle \\ U_2 &= \langle (1,1,0,0),(0,0,1,1)\rangle \\ U_3 &= \langle (1,2,0,0),(0,0,1,2)\rangle \\ U_4 &= \langle (0,1,0,0),(0,0,0,1)\rangle \end{aligned}$$

es también un régulo en V.

La siguiente proposición muestra que siempre se puede construir un régulo en V.

Proposición 1.1. *El conjunto de subespacios de V, $R_0 = \{l_a : a \in F\} \cup \{l_\infty\}$, donde $l_a = \langle (1,0,a,0),(0,1,0,a)\rangle$ y $l_\infty = \langle (0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle$ es un régulo en V.*

Demostración. Es claro que R_0 es una colección de $q+1$ subespacios de V de dimensión dos.
Sean l_a y l_b en R_0 con a y b en F distintos y sea v en $l_a \cap l_b$ entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ y β_2 en F tal que

$$\alpha_1(1,0,a,0) + \beta_1(0,1,0,a) = v = \alpha_2(1,0,b,0) + \beta_2(0,1,0,b),$$

entonces

$$(\alpha_1, \beta_1, a\alpha_1, a\beta_1) = (\alpha_2, \beta_2, b\alpha_2, b\beta_2),$$

lo que equivale a decir que

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 \\ \beta_1 &= \beta_2 \\ a\alpha_1 &= b\alpha_2 \\ a\beta_1 &= b\beta_2. \end{aligned}$$

Notamos que $a\alpha_1 = b\alpha_2$ implica que $(a-b)\alpha_1 = 0$. Como a y b son distintos se tiene que $\alpha_1 = 0$ y por tanto $\alpha_2 = 0$. Análogamente $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Luego $v = 0$.
Sea ahora v en $l_a \cap l_\infty$, entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ y β_2 en F tales que

$$\alpha_1(1,0,a,0) + \beta_1(0,1,0,a) = v = \alpha_2(0,0,1,0) + \beta_2(0,0,0,1).$$

Entonces

$$(\alpha_1, \beta_1, a\alpha_1, a\beta_1) = (0,0,\alpha_2,\beta_2)$$

es decir

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \beta_1 &= 0 \\ a\alpha_1 &= \alpha_2 \\ a\beta_1 &= \beta_2. \end{aligned}$$

Como $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, para cualquier valor de a, $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ entonces $v = 0$.
De esta forma R_0 cumple la condición 1 de la definición 1.1.
Probaremos ahora la condición 2, esto es, dado un subespacio W de dimensión dos de V que intersecta no trivialmente a cualquier trío de subespacios en R_0, entonces W intersecta a todo subespacio en R_0.
Supongamos primero el caso en que W intersecta no trivialmente a los subespacios l_0, l_∞ y l_1. Como la intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial, las intersecciones de W con l_0, l_∞ y l_1 son subespacios vectoriales de V, en particular subespacios de W de dimensión uno. Luego

$$W \cap l_0 = \langle w_0 \rangle, \qquad W \cap l_\infty = \langle w_\infty \rangle, \qquad W \cap l_1 = \langle w_1 \rangle,$$

con w_0, w_∞ y w_1 vectores no nulos.
Como w_0 está en l_0, $w_0 = \alpha_0(1,0,0,0) + \beta_0(0,1,0,0)$, con α_0 y β_0 en F y (α_0, β_0) distinto de $(0,0)$.
Análogamente existen α_∞ y β_∞ en F tal que $w_\infty = \alpha_\infty(0,0,1,0) + \beta_\infty(0,0,0,1)$, con $(\alpha_\infty, \beta_\infty)$ diferente de $(0,0)$.
Es claro que $\{w_0, w_\infty\} \subset W$ es un conjunto linealmente independiente y como $dim_F W = 2$ se tiene que $\{w_0, w_\infty\}$ es una base para W. En particular se tiene que $W = \langle w_0, w_\infty \rangle$.
Luego existen $\alpha_1, \beta_1, \gamma$ y δ en F tales que

$$\alpha_1(1,0,1,0) + \beta_1(0,1,0,1) = w_1 = \gamma w_0 + \delta w_\infty$$

con (α_1, β_1) distinto de $(0,0)$.
Notar que si $\gamma = 0$ entonces se tiene que

$$w_1 = \delta w_\infty = \delta(0,0,\alpha_\infty,\beta_\infty) = \delta\alpha_\infty(0,0,1,0) + \delta\beta_\infty(0,0,0,1),$$

entonces w_1 pertenece a l_∞, lo que no puede ser puesto que $l_1 \cap l_\infty = \{0\}$.
Análogamente si $\delta = 0$. Por tanto γ y δ son no nulos.
Como $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_1, \beta_1) = (\gamma\alpha_0, \gamma\beta_0, \delta\alpha_\infty, \delta\beta_\infty)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \gamma\alpha_0\\ \beta_1 &= \gamma\beta_0\\ \alpha_1 &= \delta\alpha_\infty\\ \beta_1 &= \delta\beta_\infty,\end{aligned}$$

entonces $\alpha_0 = \delta\gamma^{-1}\alpha_\infty$ y $\beta_0 = \delta\gamma^{-1}\beta_\infty$. Luego $w_0 = (\delta\gamma^{-1}\alpha_\infty, \delta\gamma^{-1}\beta_\infty, 0, 0)$.
Sean $\alpha = \alpha_\infty$ y $\beta = \beta_\infty$ entonces $w_0 = (\delta\gamma^{-1}\alpha, \delta\gamma^{-1}\beta, 0, 0), w_\infty = (0, 0, \alpha, \beta)$ y $w_1 = (\delta\alpha, \delta\beta, \delta\alpha, \delta\beta)$.
Luego si W intersecta no trivialmente a los subespacios l_0, l_∞ y l_1, entonces se tiene que $W = \langle(\alpha, \beta, 0, 0), (0, 0, \alpha, \beta)\rangle$ para α y β en F fijos, ambos no nulos, y las respectivas intersecciones son

$$W \cap l_0 = \langle(\alpha, \beta, 0, 0)\rangle, \quad W \cap l_\infty = \langle(0, 0, \alpha, \beta)\rangle, \quad W \cap l_1 = \langle(\alpha, \beta, \alpha, \beta)\rangle \quad .$$

Sea l_a en R_0 con a diferente de $0, 1$ y ∞ entonces $w_a = (\alpha, \beta, a\alpha, a\beta)$ pertenece a $W \cap l_a$. En efecto, basta ver que

$$w_0 + aw_\infty = w_a = \alpha(1, 0, a, 0) + \beta(0, 1, 0, a).$$

Por tanto hemos demostrado que si W intersecta no trivialmente a l_0, l_∞ y l_1, entonces W intersecta no trivialmente a todo subespacio en R_0.
Ahora supongamos que W intersecta no trivialmente a tres subespacios cualesquiera que llamaremos l_a, l_b y l_c, con a, b y c todos distintos.
Consideremos la función $f : V \longrightarrow V$ definida por

$$f(x, y, z, t) = \left(\frac{bx - z}{b - c}, \frac{by - t}{b - c}, \frac{z - ax}{c - a}, \frac{t - ay}{c - a}\right),$$

entonces f es lineal y biyectiva.
Notemos que $f(l_a) = l_0, f(l_b) = l_\infty$ y $f(l_c) = l_1$, más aún f envía todo subespacio de la colección R_0 en algún otro subespacio de R_0, a saber, si l_d pertenece a R_0 con d diferente de a, b y c, entonces $f(l_d) = l_e$, donde $e = (d - a)(b - c)[(c - a)(b - d)]^{-1}$. De esta forma $f(R_0) = R_0$.
Como W intersecta no trivialmente a l_a, l_b y l_c entonces $W' = f(W)$ es un subespacio de V de dimensión dos que intersecta no trivialmente a l_0, l_∞ y l_1, puesto que f es lineal y biyectiva. Luego por el caso anterior, W intersecta a toda componente de R_0 entonces $W = f^{-1}(W')$ intersecta a todo l_d en la colección R_0.
Por tanto $R_0 = \{l_a : a \in F\} \cup \{l_\infty\}$ es un régulo en V. $\square$

Observación 1.1. *Sea a en F, entonces el espacio $l_a = \langle (1,0,a,0),(0,1,0,a)\rangle$ puede ser presentado de la siguiente manera*

$$\begin{aligned} l_a &= \{x(1,0,a,0)+y(0,1,0,a) : x,y \in F\} \\ &= \{(x,y,ax,ay) : x,y \in F\} \\ &= \left\{ \left(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) : \overrightarrow{X} = (x,y) \in F^2 \right\}. \end{aligned}$$

A continuación probaremos que l_0, l_∞ y l_1 pertenecen a un único régulo, a saber R_0.

Lema 1.1. *Sean l_0, l_∞, l_1 en R_0. Si existen $U_1, U_2, ..., U_{q-2}$ subespacios de V de dimensión dos tal que $\{U_i : 1 \leq i \leq q-2\} \cup \{l_0, l_\infty, l_1\}$ forman un régulo en V entonces para cada $i = 1,2,...,q-2$ existe $a \in F$, con $a \neq 0,1,\infty$ tal que $U_i = l_a$.*

Demostración. Sea U_j en $\{U_i : 1 \leq i \leq q-2\}$ entonces $U_j = \langle v_1, v_2\rangle$, con $\{v_1, v_2\}$ base de U_j. Probaremos que U_j se puede exhibir como

$$U_j = \{(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}M) : \overrightarrow{X} = (x,y) \in F^2\},$$

donde $M \in GL(2,F)$.
Escribamos $v_1 = (a_1,a_2,a_3,a_4)$ y $v_2 = (b_1,b_2,b_3,b_4)$, entonces el conjunto $\{(a_1,a_2),(b_1,b_2)\}$ es linealmente independiente.
En efecto, supongamos lo contrario entonces se tendría que $(a_1,a_2) = \lambda(b_1,b_2)$, para algún λ en F, luego el vector $v_1 - \lambda v_2$ es no nulo, puesto que $\{v_1, v_2\}$ es base, estaría en $U_j \cap l_\infty = \{0\}$ lo que es una contradicción.
Luego la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

es invertible.
Por tanto existe operaciones elementales $E_1, ..., E_n$, mediantes las cuales la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

es transformada en la matriz identidad.
Usando las operaciones $E_1, ..., E_n$ podemos cambiar la base $\{v_1, v_2\}$ en la base $\{v_1', v_2'\}$, donde $v_1' = (1,0,a_3',a_4')$ y $v_2' = (0,1,b_3',b_4')$.
Notar que el conjunto $\{(a_3',a_4'),(b_3',b_4')\}$ es linealmente independiente, de hecho supongamos que $(a_3',a_4') = \eta(b_3',b_4')$ para algún η en F entonces el vector

no nulo $v_1' - \eta v_2'$ estaría en $U_j \cap l_0$, lo que no puede ser. Por tanto U_j puede ser presentado por

$$\begin{aligned} U_j &= \langle (1,0,a_3',a_4'), (0,1,b_3',b_4') \rangle \\ &= \{x(1,0,a_3',a_4') + y(0,1,b_3',b_4') : x,y \in F\} \\ &= \{(x,y,a_3'x + b_3'y, a_4'x + b_4'y) : x,y \in F\} \\ &= \left\{ \left(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X} \begin{pmatrix} a_3' & a_4' \\ b_3' & b_4' \end{pmatrix} \right) : \overrightarrow{X} = (x,y) \in F^2 \right\}. \end{aligned}$$

Para simplificar notación, escribamos

$$U_j = \left\{ \left(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) : \overrightarrow{X} = (x,y) \in F^2, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Ahora mostraremos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es una matriz escalar, es decir una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

para algún t en F no nulo.
Sea $T = \langle (0,1,0,0), (0,0,0,1) \rangle$, entonces se tiene que

$$dim_F(T \cap l_0) = dim_F(T \cap l_\infty) = dim_F(T \cap l_1) = 1.$$

Como $\{U_i : 1 \leq i \leq q-2\} \cup \{l_0, l_\infty, l_1\}$ es un régulo y T intersecta no trivialmente a las componentes l_0, l_∞ y l_1 entonces $dim_F(T \cap U_j) = 1$, es decir $T \cap U_j = \langle w \rangle$, con w no nulo.
Luego existen escalares t_1, t_2, k_1, k_2 en F tales que

$$t_1(1,0,a,b) + t_2(0,1,c,d) = w = k_1(0,1,0,0) + k_2(0,0,0,1),$$

es decir

$$\begin{aligned} t_1 &= 0 \\ t_2 &= k_1 \\ at_1 + ct_2 &= 0 \\ bt_1 + dt_2 &= k_2. \end{aligned}$$

Como $t_1 = 0$ entonces $ct_2 = 0$. Si $t_2 = 0$ se tiene que $w = 0$ lo que no puede ser. Por tanto $t_2 \neq 0$ y $c = 0$. Asi $U_j = \langle (1,0,a,b), (0,1,0,d) \rangle$.

Sea $T' = \langle (1,0,0,0),(0,0,1,0)\rangle$ entonces T' intersecta no trivialmente a l_0, l_∞ y l_1, luego $T' \cap U_j = \langle w' \rangle$, con w no nulo. Por tanto existen t_1, t_2, k_1, k_2 en F tales que

$$t_1(1,0,a,b) + t_2(0,1,0,d) = w' = k_1(1,0,0,0) + k_2(0,0,1,0),$$

es decir

$$\begin{aligned} t_1 &= k_1 \\ t_2 &= 0 \\ at_1 &= k_2 \\ bt_1 + dt_2 &= 0. \end{aligned}$$

Como $t_2 = 0$ se tiene que $bt_1 = 0$. Si $b \neq 0$ entonces $t_1 = 0$ y por tanto $w' = 0$ lo que no puede ser. Luego $b = 0$ y por tanto $U_j = \langle (1,0,a,0),(0,1,0,d)\rangle$. Sea ahora $T'' = \langle (1,1,0,0),(0,0,1,1)\rangle$. entonces $dim_F(T'' \cap U_j) = 1$. Luego $T'' \cap U_j = \langle w'' \rangle$ con w'' no nulo. Por tanto existen escalares t_1, t_2, k_1, k_2 en F tales que

$$t_1(1,0,a,0) + t_2(0,1,0,d) = w'' = k_1(1,1,0,0) + k_2(0,0,1,1),$$

lo que equivale a decir que

$$\begin{aligned} t_1 &= k_1 \\ t_2 &= k_1 \\ at_1 &= k_2 \\ dt_2 &= k_2. \end{aligned}$$

Entonces $t_1 = t_2$ y así $(a-d)t_1 = 0$. Si $t_1 = 0$ se tiene $t_2 = 0$, luego $w'' = 0$ lo que no puede ser. Luego $a = d$ y por tanto

$$U_j = \left\{ \left(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) : \overrightarrow{X} = (x,y) \in F^2 \right\} = l_a.$$

□

Lema 1.2. *Sean W_1, W_2 y W_3 tres subespacios vectoriales de V de dimensión dos tal que $W_1 \cap W_2 = \{0\}, W_1 \cap W_3 = \{0\}$ y $W_2 \cap W_3 = \{0\}$, entonces existe un único régulo que contiene a W_1, W_2 y W_3. Esto es, existen únicos $q-2$ subespacios de V de dimensión dos con intersección trivial entre sí y con W_1, W_2 y W_3 tal que ellos forman un régulo en V.*

Demostración. Sean $W_1 = \langle u_1, u_2\rangle, W_2 = \langle u_3, u_4\rangle$ y $W_3 = \langle u_5, u_6\rangle$. Sabemos que $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es base de V, luego se tiene que

$$\begin{aligned} u_5 &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 \\ u_6 &= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \beta_4 u_4. \end{aligned}$$

Probaremos que $\{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2\}$ es un conjunto linealmente independiente.
Primero observar que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ o bien $\beta_1 = \beta_2 = 0$ no puede ser puesto que $W_2 \cap W_3 = \{0\}$, luego (α_1, α_2) y (β_1, β_2) son diferentes de $(0, 0)$. Por tanto $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ y $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$ son vectores no nulos.
Supongamos que $\{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2\}$ es un conjunto linealmente dependiente, entonces tendríamos que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = u$ y $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 = \lambda u$, con λ no nulo. Luego reemplazando en u_5 y u_6 se tiene que

$$\begin{aligned} u_5 &= u + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 \\ u_6 &= \lambda u + \beta_3 u_3 + \beta_4 u_4, \end{aligned}$$

entonces $u_5 - \lambda^{-1} u_6$ es no nulo y ademas pertenece a $W_2 \cap W_3$, lo que no puede ser. Por tanto el conjunto $\{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2\}$ es linealmente independiente y así es una base para W_1.
De manera análoga se prueba que el conjunto $\{\alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4, \beta_3 u_3 + \beta_4 u_4\}$ es una base para W_2.
Sean $w_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, $w_2 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$, $w_3 = \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4$ y $w_4 = \beta_3 u_3 + \beta_4 u_4$, entonces el conjunto de vectores $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ es una base de V y $\{w_1, w_2\}$ es base de W_1, $\{w_3, w_4\}$ es base de W_2 y $\{w_1 + w_3, w_2 + w_4\}$ es base de W_3.
Sea v en V, entonces se tiene que existen únicos escalares x, y, z y t en F tales que

$$v = xw_1 + yw_2 + zw_3 + tw_4.$$

Luego, expresando vía isomorfismo el vector v, se tiene que

$$v = (x, y, z, t)$$

y por lo tanto obtenemos las siguientes presentaciones para los subespacios vectoriales W_1, W_2 y W_3.

$$\begin{aligned} W_1 &= \langle w_1, w_2\rangle \\ &= \{xw_1 + yw_2 + 0w_3 + 0w_4 : x, y \in F\} \\ &\cong \{(x, y, 0, 0) : x, y \in F\} \\ &= \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0)\rangle \\ &= l_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_2 &= \langle w_3, w_4 \rangle \\
&= \{0w_1 + 0w_2 + xw_3 + yw_4 : x, y \in F\} \\
&\cong \{(0,0,x,y) : x, y \in F\} \\
&= \langle (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle \\
&= l_\infty,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_3 &= \langle w_1 + w_3, w_2 + w_4 \rangle \\
&= \{xw_1 + yw_2 + xw_3 + yw_4 : x, y \in F\} \\
&\cong \{(x,y,x,y) : x, y \in F\} \\
&= \langle (1,0,1,0), (0,1,0,1) \rangle \\
&= l_1.
\end{aligned}$$

Luego los $q-2$ subespacios vectoriales de V de dimensión dos buscados son

$$W_a = \langle w_1 + aw_3, w_2 + aw_4 \rangle$$

con a en F y diferente de $0, 1$ y ∞. La unicidad de los $q-2$ subespacios encontrados viene dada por el Lema 1.1 y es claro que esta colección junto con W_1, W_2 y W_3 forman un régulo en V. $\square$

Proposición 1.2. *Sea $f : V \longrightarrow V$ una función lineal y biyectiva. Sea $R = \{W_1, W_2, \ldots, W_{q+1}\}$ un régulo en el espacio vectorial V. Entonces la colección $f(R) = \{f(W_1), f(W_2), \ldots, f(W_{q+1})\}$ es un régulo en V.*

Demostración. Como f es lineal biyectiva y la dimensión de cada componente W_i es dos, se tiene que $dim_F f(W_i) = 2$ para todo $i = 1, \ldots, q+1$. Por la inyectividad de f, si $f(W_i) = f(W_j)$ entonces $W_i = W_j$.
Luego $f(R)$ es una colección de $q+1$ subespacios de dimensión dos.
Sean $f(W_i)$ y $f(W_j)$ en $f(R)$ y sea v en $f(W_i) \cap f(W_j)$, entonces existen w_i en W_i y w_j en W_j tales que $f(w_i) = v$ y $f(w_j) = v$. Por lo tanto $f(w_i) = f(w_j)$ lo que implica $w_i = w_j$, puesto que f es inyectiva. Luego w_j pertenece a W_i y w_i pertenece a W_j. Como $W_i \cap W_j = \{0\}$ se tiene que $w_i = 0 = w_j$. Luego $v = 0$ y $f(W_i) \cap f(W_j) = \{0\}$.
Sea W' un subespacio de V de dimensión dos que intersecta no trivialmente a $f(W_i), f(W_j)$ y $f(W_t)$, entonces $W = f^{-1}(W')$ es un subespacio de V de dimensión dos que intersecta no trivialmente a W_i, W_j y W_t. Como R es un régulo, W intersecta a toda componente de R y por tanto W' intersecta a todo subespacio de $f(R)$.
Luego $f(R)$ es un régulo en V. $\square$

Proposición 1.3. *Sean R_1 y R_2 dos régulos en el espacio vectorial V. Entonces existe $f : V \longrightarrow V$ lineal biyectiva tal que $f(R_1) = R_2$.*

Demostración. Sean a y b en F distintos entonces $V = l_a \oplus l_b$. Luego se tiene que $B = \{(1,0,a,0),(0,1,0,a),(1,0,b,0),(0,1,0,b)\}$ es una base para V.
Sean $W_1 = \langle w_1, w_2\rangle, W_2 = \langle w_3, w_4\rangle$ y $W_3 = \langle w_5, w_6\rangle$ tres componentes arbitrarias del régulo R_1 y consideremos el conjunto de vectores de V,

$$B' = \{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2, \alpha_3 w_1 + \alpha_4 w_2, \alpha_5 w_3 + \alpha_6 w_4, \alpha_7 w_3 + \alpha_8 w_4\},$$

donde $\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3$ y $\alpha_5\alpha_8 - \alpha_6\alpha_7$ son distintos de cero.
Entonces existe $f_1 : V \longrightarrow V$ lineal tal que

$$\begin{aligned} f_1(1,0,a,0) &= \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \\ f_1(0,1,0,a) &= \alpha_3 w_1 + \alpha_4 w_2 \\ f_1(1,0,b,0) &= \alpha_5 w_3 + \alpha_6 w_4 \\ f_1(0,1,0,b) &= \alpha_7 w_3 + \alpha_8 w_4. \end{aligned}$$

Como $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ es base de V, se tiene que B' es también base de V, luego f_1 es biyectiva. Además se tiene que $f_1(l_a) = W_1$ y $f_1(l_b) = W_2$.
Sea c en F, con c diferente de a y b.
Vamos a determinar los valores de los escalares α_i en F con $i \in \{1,\ldots,8\}$ tales que $f_1(l_c) = W_3$.
Notemos que

$$(1,0,c,0) = \left(1 - \frac{c-a}{b-a}\right)(1,0,a,0) + 0(0,1,0,a) + \frac{c-a}{b-a}(1,0,b,0) + 0(0,1,0,b)$$

y

$$(0,1,0,c) = 0(1,0,a,0) + \left(1 - \frac{c-a}{b-a}\right)(0,1,0,a) + 0(1,0,b,0) + \frac{c-a}{b-a}(0,1,0,b).$$

Entonces

$$f_1(1,0,c,0) = \left(1 - \frac{c-a}{b-a}\right)\alpha_1 w_1 + \left(1 - \frac{c-a}{b-a}\right)\alpha_2 w_2 + \frac{c-a}{b-a}\alpha_5 w_3 + \frac{c-a}{b-a}\alpha_6 w_4$$

y

$$f_1(0,1,0,c) = \left(1 - \frac{c-a}{b-a}\right)\alpha_3 w_1 + \left(1 - \frac{c-a}{b-a}\right)\alpha_4 w_2 + \frac{c-a}{b-a}\alpha_7 w_3 + \frac{c-a}{b-a}\alpha_8 w_4.$$

Se quiere que $f_1(l_c) = W_3$, entonces

$$f_1(1,0,c,0) = \delta_1 w_5 + \delta_2 w_6, \qquad f_1(0,1,0,c) = \delta_3 w_5 + \delta_4 w_6,$$

con $\delta_1\delta_4 - \delta_2\delta_3$ distinto de cero. Por otro lado, existen β_i y γ_i en F con $i \in \{1,2,3,4\}$ tales que

$$w_5 = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3 + \beta_4 w_4, \qquad w_6 = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \gamma_3 w_3 + \gamma_4 w_4.$$

Observar que los pares $(\beta_1, \beta_2), (\beta_3, \beta_4), (\gamma_1, \gamma_2)$ y (γ_3, γ_4) son todos distintos de $(0,0)$. Luego se tiene

$$f_1(1,0,c,0) = \delta_1 \left(\sum_{i=1}^{4} \beta_i w_i\right) + \delta_2 \left(\sum_{i=1}^{4} \gamma_i w_i\right) = \sum_{i=1}^{4} (\delta_1\beta_i + \delta_2\gamma_i) w_i$$

$$f_1(0,1,0,c) = \delta_3 \left(\sum_{i=1}^{4} \beta_i w_i\right) + \delta_4 \left(\sum_{i=1}^{4} \gamma_i w_i\right) = \sum_{i=1}^{4} (\delta_3\beta_i + \delta_4\gamma_i) w_i.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{c-a}{b-a}\right)\alpha_1 &= \delta_1\beta_1 + \delta_2\gamma_1 \\
\left(1 - \frac{c-a}{b-a}\right)\alpha_2 &= \delta_1\beta_2 + \delta_2\gamma_2 \\
\frac{c-a}{b-a}\alpha_5 &= \delta_1\beta_3 + \delta_2\gamma_3 \\
\frac{c-a}{b-a}\alpha_6 &= \delta_1\beta_4 + \delta_2\gamma_4
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{c-a}{b-a}\right)\alpha_3 &= \delta_3\beta_1 + \delta_4\gamma_1 \\
\left(1 - \frac{c-a}{b-a}\right)\alpha_4 &= \delta_3\beta_2 + \delta_4\gamma_2 \\
\frac{c-a}{b-a}\alpha_7 &= \delta_3\beta_3 + \delta_4\gamma_3 \\
\frac{c-a}{b-a}\alpha_8 &= \delta_3\beta_4 + \beta_4\gamma_4.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{\delta_1\beta_1 + \delta_2\gamma_1}{(b-a)(b-c)^{-1}}, & \alpha_2 &= \frac{\delta_1\beta_2 + \delta_2\gamma_2}{(b-a)(b-c)^{-1}} \\
\alpha_3 &= \frac{\delta_3\beta_1 + \delta_4\gamma_1}{(b-a)(b-c)^{-1}}, & \alpha_4 &= \frac{\delta_3\beta_2 + \delta_4\gamma_2}{(b-a)(b-c)^{-1}} \\
\alpha_5 &= \frac{\delta_1\beta_3 + \delta_2\gamma_3}{(c-a)(b-a)^{-1}}, & \alpha_6 &= \frac{\delta_1\beta_4 + \delta_2\gamma_4}{(c-a)(b-a)^{-1}} \\
\alpha_7 &= \frac{\delta_3\beta_3 + \delta_4\gamma_3}{(c-a)(b-a)^{-1}}, & \alpha_8 &= \frac{\delta_3\beta_4 + \delta_4\gamma_4}{(c-a)(b-a)^{-1}}
\end{aligned}$$

Notemos que el conjunto $\{(\beta_1, \beta_2), (\gamma_1, \gamma_2)\}$ es un conjunto linealmente independiente en F^2. En efecto, supongamos que $(\beta_1, \beta_2) = \lambda(\gamma_1, \gamma_2)$, para algún λ en F no nulo entonces $w_5 = \lambda\gamma_1 w_1 + \lambda\gamma_2 w_2 + \beta_3 w_3 + \beta_4 w_4$, luego $w_5 - \lambda w_6 = (\beta_3 - \lambda\gamma_3)w_3 + (\beta_4 - \lambda\gamma_4)w_4$ es diferente de cero y pertenece a $W_2 \cap W_3$, lo que no puede ser puesto que $W_2 \cap W_3 = \{0\}$.
Por tanto $\{(\beta_1, \beta_2), (\gamma_1, \gamma_2)\}$ es un conjunto linealmente independiente en F^2.
Análogamente el conjunto $\{(\beta_3, \beta_4), (\gamma_3, \gamma_4)\}$ es linealmente independiente en F^2.
Luego $\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1$ y $\beta_3\gamma_4 - \beta_4\gamma_3$ son diferentes de cero y por lo tanto $\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3$ y $\alpha_5\alpha_8 - \alpha_6\alpha_7$ son distintos de cero.
Así la función f_1 es lineal y biyectiva. Por la proposición 1.2 se tiene que $f_1(R_0)$ es un régulo que contiene a las componentes W_1, W_2 y W_3 del régulo R_1 y por lema 1.2, $f_1(R_0) = R_1$, es decir toda componente del régulo R_0 es enviada a una única componente del régulo R_1.
Similarmente existe $f_2 : V \longrightarrow V$ lineal y biyectiva tal que $f_2(R_0) = R_2$.
Definamos $f = f_2 \circ f_1^{-1}$ entonces f es lineal, biyectiva y $f(R_1) = R_2$. □

Dado un régulo R en V, la cantidad de vectores no nulos de V que están distribuidos en cada componente del régulo R es $(q+1)(q^2-1)$. Existe una única familia de subespacios de V de dimensión dos que cubre el mismo conjunto de vectores. Esta colección de espacios forma un régulo en V y es distinta de la familia R.
El siguiente teorema demuestra la exitencia de dicho régulo.

Teorema 1.1. *Dado un régulo R en V, existe un único régulo R' en V distinto de R que cubre el mismo conjunto de vectores en V.*

Demostración. Haremos dos casos. En el primer caso probaremos el teorema para el régulo canónico R_0 y en el segundo caso probaremos el teorema para un régulo cualquiera.
Caso 1: Consideremos el régulo canónico $R_0 = \{l_a : a \in F\} \cup \{l_\infty\}$.
Sea $(0,0,1,\beta)$ en l_∞ y encontremos $(a,b,0,0)$ en l_0 con $(a,b,0,0)$ no nulo tal que el subespacio $\langle(0,0,1,\beta),(a,b,0,0)\rangle$ intersecte no trivialmente a l_1.
Sea v en $l_1 \cap \langle(0,0,1,\beta),(a,b,0,0)\rangle$ no nulo, entonces existen $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ y β_2 en F tal que

$$\alpha_1(1,0,1,0) + \beta_1(0,1,0,1) = v = \alpha_2(0,0,1,\beta) + \beta_2(a,b,0,0).$$

Notar que si $\alpha_2 = 0$, entonces $v = \beta_2(a,b,0,0)$ pertenece a l_0, luego v está en $l_0 \cap l_1$, lo que no puede ser puesto que $l_0 \cap l_1 = \{0\}$. Análogamente, β_2 es distinto de cero.

Luego, resolviendo el sistema

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \beta_2 a\\ \beta_1 &= \beta_2 b\\ \alpha_1 &= \alpha_2\\ \beta_1 &= \beta_2,\end{aligned}$$

se tiene que $a = \alpha_1\beta_2^{-1}$ y $b = (\alpha_1\beta_2^{-1})\beta$. Sea $\lambda = \alpha_1\beta_2^{-1}$, entonces $a = \lambda$ y $b = \lambda\beta$. Luego el vector $(\lambda, \lambda\beta, 0, 0)$ pertenece a l_0.
Como λ es distinto de cero se tiene que $\lambda^{-1}(\lambda, \lambda\beta, 0, 0) = (1, \beta, 0, 0)$ está en l_0.
Sea $L_\beta = \langle(1, \beta, 0, 0), (0, 0, 1, \beta)\rangle$, entonces $(1, \beta, 1, \beta)$ pertenece a $L_\beta \cap l_1$. En efecto basta ver que

$$(1, \beta, 1, \beta) = (1, \beta, 0, 0) + (0, 0, 1, \beta) \in L_\beta$$

y

$$(1, \beta, 1, \beta) = (1, 0, 1, 0) + \beta(0, 1, 0, 1) \in l_1.$$

Como R_0 es un régulo y L_β es un subespacio de V de dimensión dos que intersecta no trivialmente a tres de sus componentes, a saber l_0, l_1 y l_∞, L_β, intersecta a toda componente de R_0.
Sean β_1 y β_2 en F distintos y consideremos los subespacios de V

$$L_{\beta_1} = \langle(1, \beta_1, 0, 0), (0, 0, 1, \beta_1)\rangle, \qquad L_{\beta_2} = \langle(1, \beta_2, 0, 0), (0, 0, 1, \beta_2)\rangle,$$

entonces $L_{\beta_1} \cap L_{\beta_2} = \{0\}$. En efecto sea v en $L_{\beta_1} \cap L_{\beta_2}$, entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1$ y γ_2 en F tal que

$$\alpha_1(1, \beta_1, 0, 0) + \gamma_1(0, 0, 1, \beta_1) = v = \alpha_2(1, \beta_2, 0, 0) + \gamma_2(0, 0, 1, \beta_2),$$

por lo que

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_2\\ \alpha_1\beta_1 &= \alpha_2\beta_2\\ \gamma_1 &= \gamma_2\\ \gamma_1\beta_1 &= \gamma_2\beta_2.\end{aligned}$$

De la primera y segunda ecuación se tiene que $\alpha_1\beta_1 = \alpha_1\beta_2$, lo que implica que $\alpha_1 = 0$ o $\beta_1 - \beta_2 = 0$. Como β_1 y β_2 son distintos, se tiene que $\alpha_1 = 0$.
Por tanto $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
Análogamente $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Luego $L_{\beta_1} \cap L_{\beta_2} = \{0\}$.

Ahora sea $(0,0,0,1)$ en l_∞ y busquemos un vector $(a,b,0,0)$ en l_0 no nulo tal que $\langle(0,0,0,1),(a,b,0,0)\rangle$ intersecte no trivialmente a l_1.
Sea v en $\langle(0,0,0,1),(a,b,0,0)\rangle \cap l_1$ no nulo entonces

$$\alpha_1(1,0,1,0)+\beta_1(0,1,0,1)=v=\alpha_2(0,0,0,1)+\beta_2(a,b,0,0)$$

con $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ y β_2 en F.
Como α_2 y β_2 son distintos de cero, se tiene que $a=0$ y $b=\alpha_2\beta_2^{-1}$. Denotemos por $\lambda=\alpha_2\beta_2^{-1}$ entonces el vector $(0,\lambda,0,0)$ está en l_0 y como λ es diferente de cero, se tiene que $(0,1,0,0)$ pertenece a l_0.
Sea $L_\infty=\langle(0,1,0,0),(0,0,0,1)\rangle$, entonces $L_\infty\cap l_1$ es distinta de $\{0\}$. De hecho, $(0,1,0,1)$ pertenece a $L_\infty\cap l_1$.
Notar que $L_\infty\cap L_\beta=\{0\}$ para todo $\beta\in F$. En efecto, sea v en $L_\infty\cap L_\beta$, entonces existen escalares $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2$ y β_2 en F tales que

$$\alpha_1(0,1,0,0)+\beta_1(0,0,0,1)=v=\alpha_2(1,\beta,0,0)+\beta_2(0,0,1,\beta),$$

entonces

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= 0\\ \alpha_2\beta &= \alpha_1\\ \beta_2 &= 0\\ \beta_2\beta &= \beta_1.\end{aligned}$$

Notamos que independiente del valor de β, $\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=0$. Por tanto $v=0$.
Luego la colección $R_0'=\{L_\beta:\beta\in F\}\cup\{L_\infty\}$, donde $L_\beta=\langle(1,\beta,0,0),(0,0,1,\beta)\rangle$ y $L_\infty=\langle(0,1,0,0),(0,0,0,1)\rangle$ es una colección de $q+1$ subespacios de V de dimensión dos cuya intersección de cualesquiera dos de ellos es trivial.
Ahora probemos la segunda condición de régulo.
Sea W un subespacio de V de dimensión dos que intersecta no trivialmente a los subespacios L_0,L_∞ y L_1, mostraremos que W intersecta a todo subespacio L_β de la colección R_0'.
En efecto, sabemos que

$$W\cap L_0=\langle w_0\rangle,\qquad W\cap L_\infty=\langle w\rangle,\qquad W\cap L_1=\langle w_1\rangle,$$

con w_0,w y w_1 todos diferentes de cero.
Luego existen α_0,α,γ_0 y γ en F tales que

$$\begin{aligned}w_0 &= \alpha_0(1,0,0,0)+\gamma_0(0,0,1,0)=(\alpha_0,0,\gamma_0,0)\\ w &= \alpha(0,1,0,0)+\gamma(0,0,0,1)=(0,\alpha,0,\gamma).\end{aligned}$$

Observamos que $\{w_0, w\}$ es un conjunto linealmente independiente, de hecho si $tw_0 + sw = 0$ entonces

$$\begin{aligned} \alpha_0 t &= 0 \\ \alpha s &= 0 \\ \gamma_0 t &= 0 \\ \gamma s &= 0 \end{aligned}$$

Si t es diferente de cero entonces $\alpha_0 = \alpha = 0$, lo que no puede ser puesto que w_0 es no nulo. Análogamente si s es distinto de cero. Luego $t = s = 0$ y por tanto $W = \langle w_0, w\rangle$.
De esta forma existen δ, ϵ en F tales que $w_1 = \delta w_0 + \epsilon w$. Notar que δ y ϵ son no nulos.
Por otro lado, existen α_1, γ_1 en F tales que $w_1 = \alpha_1(1,1,0,0) + \gamma_1(0,0,1,1)$, con α_1 ó γ_1 distinto de cero. Entonces

$$(\delta\alpha_0, \epsilon\alpha, \delta\gamma_0, \epsilon\gamma) = (\alpha_1, \alpha_1, \gamma_1, \gamma_1),$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \delta\alpha_0 &= \alpha_1 \\ \epsilon\alpha &= \alpha_1 \\ \delta\gamma_0 &= \gamma_1 \\ \epsilon\gamma &= \gamma_1. \end{aligned}$$

Del sistema se tiene que $\alpha_0 = \delta^{-1}\epsilon\alpha$ y $\gamma_0 = \delta^{-1}\epsilon\gamma$, entonces

$$\begin{aligned} w_0 &= (\alpha_0, 0, \gamma_0, 0) = (\delta^{-1}\epsilon\alpha, 0, \delta^{-1}\epsilon\gamma, 0) \\ w &= (0, \alpha, 0, \gamma) \\ w_1 &= (\alpha_1, \alpha_1, \gamma_1, \gamma_1) = (\epsilon\alpha, \epsilon\alpha, \epsilon\gamma, \epsilon\gamma). \end{aligned}$$

Sea $w_\beta = (\epsilon\alpha, \epsilon\alpha\beta, \epsilon\gamma, \epsilon\gamma\beta)$, entonces w_β pertenece a $W \cap L_\beta$.
En efecto basta ver que

$$\begin{aligned} w_\beta &= \epsilon\alpha(1, \beta, 0, 0) + \epsilon\gamma(0, 0, 1, \beta) \\ w_\beta &= \delta w_0 + \epsilon\beta w. \end{aligned}$$

Por tanto W intersecta no trivialmente a todo subespacio de R_0'.
Caso 2: Sea R un régulo arbitrario en V. Sabemos que existe $f : V \longrightarrow V$ lineal y biyectiva tal que $f(R_0) = R$.
Por el caso 1, existe un único régulo R_0' que cubre el mismo conjunto de vectores que cubre R_0. Luego $R' = f(R_0')$ es un régulo en V que cubre el mismo conjunto de vectores que cubre R. $\square$

1.2. Sobre Spreads

Definición 1.2. *Una colección S de subespacios de V de dimensión dos es llamada un spread si cumple las siguientes condiciones:*

1. *Para todo W_1 y W_2 en S distintos, $V = W_1 \oplus W_2$.*

2. *Todo v en V pertenece a un subespacio de la colección S.*

Diremos que los subespacios en S son las componentes del spread S. Notar que la condición 1 y 2 implica que todo v en V no nulo pertenece a una única componente de S.

Observación 1.2. *Un spread S en V contiene $q^2 + 1$ subespacios de dimensión dos.*
En efecto, sea n el número de componentes de un spread S en V.
Cada subespacio de dimensión dos de V contiene exactamente $q^2 - 1$ vectores no nulos y como todo verctor no nulo pertenece a una única componente del spread S, se tiene que

$$n(q^2 - 1) = q^4 - 1$$

Por tanto $n = q^2 + 1$.

Ejemplo 1.3. *Si $F = \mathbb{F}_2$, la colección de subespacios de V de dimensión dos*

$$S = \{\langle (1, a, 0, b), (0, 1, b, a + b) \rangle : a, b \in F\} \cup \{l_\infty\}$$

es un spread en V.

Ejemplo 1.4. *Si $F = \mathbb{F}_3$, el conjunto de subespacios de dimensión dos de V*

$$S = \{\langle (1, 0, a, b), (0, 1, b, a + 2b) \rangle : a, b \in F\} \cup \{l_\infty\}$$

es un spread en V.

La siguiente proposición es una generalización de los ejemplos anteriores.

Proposición 1.4. *Sea $p(x) = x^2 + \alpha x - \beta$ en $F[x]$ un polinomio irreducible sobre F. La matriz*

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ \beta b & a + \alpha b \end{pmatrix}$$

con a y b en F define el siguiente subespacio de V de dimensión dos

$$\begin{aligned} l_{a,b} &= \left\{ \left(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X} M_{a,b} \right) : \overrightarrow{X} = (x, y) \in F^2 \right\} \\ &= \{(x, y, ax + \beta by, bx + (a + \alpha b)y) : x, y \in F\} \\ &= \langle (1, 0, a, b), (0, 1, \beta b, a + \alpha b) \rangle. \end{aligned}$$

Entonces $D_0 = \{l_{a,b} : a, b \in F\} \cup \{l_\infty\}$ es un spread en V.

Demostración. Primero probaremos la condición 1.
Sea v en $l_{a,b} \cap l_{c,d}$, con $l_{a,b}$ y $l_{c,d}$ en $D_0 - \{l_\infty\}$ distintos. Entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ y β_2 en F tales que

$$\alpha_1(1,0,a,b) + \beta_1(0,1,\beta b, a+\alpha b) = v = \alpha_2(1,0,c,d) + \beta_2(0,1,\beta d, c+\alpha d),$$

entonces

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 \\ \beta_1 &= \beta_2 \\ \alpha_1 a + \beta_1 \beta b &= \alpha_2 c + \beta_2 \beta d \\ \alpha_1 b + \beta_1 a + \beta_1 \alpha b &= \alpha_2 d + \beta_2 c + \beta_2 \alpha d, \end{aligned}$$

lo que equivale a

$$\begin{aligned} (a-c)\alpha_1 + \beta(b-d)\beta_1 &= 0 \\ (b-d)\alpha_1 + ((a-c) + \alpha(b-d))\beta_1 &= 0 \end{aligned}$$

Así obtenemos un sistema homogéneo de ecuaciones en variables α_1 y β_1 con matriz asociada al sistema igual a

$$\begin{pmatrix} (a-c) & \beta(b-d) \\ (b-d) & (a-c)+\alpha(b-d) \end{pmatrix}$$

con determinante distinto de cero, puesto que $p(x) = x^2 + \alpha x - \beta$ es irreducible en F. Luego $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ y por tanto $l_{a,b} \cap l_{c,d} = \{0\}$.
Sea v en $l_{a,b} \cap l_\infty$, entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ y β_2 en F tales que

$$\alpha_1(1,0,a,b) + \beta_1(0,1,\beta b, a+\alpha b) = v = \alpha_2(0,0,1,0) + \beta_2(0,0,0,1),$$

es decir

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \beta_1 &= 0 \\ \alpha_1 a + \beta_1 \beta b &= \alpha_2 \\ \alpha_1 b + \beta_1 a + \beta_1 \alpha b &= \beta_2, \end{aligned}$$

entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ y por tanto $l_{a,b} \cap l_\infty = \{0\}$.
Ahora notamos que como la dimensión de cada subespacio en D_0 es dos y para todo par de subespacios en D_0, W_1 y W_2 distintos, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, entonces $V = W_1 \oplus W_2$.
Por tanto D_0 verifica la condición 1.

Para probar la condición 2, notamos que cada subespacio de D_0 contiene exactamente q^2 vectores, luego cada W en D_0 contiene $q^2 - 1$ vectores no nulos, por tanto el número de vectores no nulos en

$$\bigcup_{W \in D_0} W$$

es $(q^2+1)(q^2-1) = q^4 - 1$. Es decir, que todo vector no nulo está en algún subespacio de D_0. Esto último demuestra la condición 2.
Luego D_0 es un spread en el espacio vectorial V. $\square$

La proposición que sigue muestra que las matrices $M_{a,b}$ con a y b en F, forman un cuerpo. Este resultado será utilizado en el siguiente capítulo.

Proposición 1.5. *El conjunto de matrices $K = \{M_{a,b} : a, b \in F\}$ es un cuerpo de matrices con la suma y multiplicación usual de matrices.*

Demostración. Primero notemos que la suma y la multiplicación son operaciones cerradas en K, en efecto basta ver que $M_{a,b} + M_{c,d} = M_{a+c,b+d}$ y $M_{a,b} \cdot M_{c,d} = M_{ac+\beta bd, ad+bc+\alpha bd}$.
Como $M_2(F)$ es un anillo con la suma y la multiplicación y $K \subset M_2(F)$, se tiene que $(K, +)$ es asociativo y conmutativo y $(K, \cdot)$ es asociativo, además se tiene la distributividad del producto con respecto a la suma.
El neutro aditivo es $M_{0,0}$ y el inverso aditivo de $M_{a,b}$ es $M_{-a,-b}$. Por tanto $(K, +)$ es un grupo abeliano.
El neutro multiplicativo es $M_{1,0}$ y si $M_{a,b}$ es distinto de cero entonces $M_{a,b}$ es invertible, puesto que su determinante es distinto de cero, de lo contrario el polinomio $p(x) = x^2 + \alpha x - \beta$ seria reducible. De hecho si $M_{a,b}$ distinto de cero, su inverso multiplicativo es $M_{a',b'}$, donde $a' = (a+\alpha b)(a^2+\alpha ab-\beta b^2)^{-1}$ y $b' = -b(a^2+\alpha ab - \beta b^2)^{-1}$.
Sean $M_{a,b}$ y $M_{c,d}$ en K entonces se tiene que $M_{a,b} \cdot M_{c,d} = M_{c,d} \cdot M_{a,b}$. Por tanto la multiplicación definida en K es conmutativa, es decir $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano.
Luego K es un cuerpo de matrices. $\square$

Es decir, $f : V \longrightarrow V$, definida por la matriz por bloques anterior, es una función lineal tal que $f(l_0) = l_{a,b}$, $f(l_\infty) = l_{c,d}$ y $f(l_1) = l_{e,f}$.
Como la imagen de f contiene a $l_{a,b}$ y $l_{c,d}$ y éstos generan V, se tiene que f es sobreyectiva, entonces $dim_F Im(f) = 4$ y por tanto $dim_F ker(f) = 0$ es decir, f es inyectiva.
Luego f es biyectiva, $f(R_0)$ es un régulo y es el único que contiene a $l_{a,b}, l_{c,d}$ y $l_{e,f}$, por lo tanto $R = R_0$.
Sea l_t en R_0 tal que t es distinto de $0, 1$ y ∞, entonces

$$l_t = \{(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}M_{t,0}) : \overrightarrow{X} \in F^2\} = \{(\overrightarrow{X}, t\overrightarrow{X}) : \overrightarrow{X} \in F^2\}.$$

Luego

$$(\overrightarrow{X}, t\overrightarrow{X}) \begin{pmatrix} I & M_{a,b} \\ C & CM_{c,d} \end{pmatrix} = (\overrightarrow{X}(I + tC), \overrightarrow{X}(M_{a,b} + tCM_{c,d})).$$

Si $I + tC = 0$, entonces

$$f(l_t) = \{(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{X}(M_{a,b} + tCM_{c,d})) : \overrightarrow{X} \in F^2\},$$

donde $M_{a,b} + tCM_{c,d} = M_{h,k}$ es distinto de cero. De hecho si $M_{h,k} = 0$ entonces $f(l_t) = \{0\}$, lo que no puede ser puesto que f es lineal y biyectiva. Por tanto $M_{h,k}$ es invertible y $f(l_t) = l_\infty$.
Si $I + tC \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(l_t) &= \{(\overrightarrow{X}(I + tC), \overrightarrow{X}(M_{a,b} + tCM_{c,d})) : \overrightarrow{X} \in F^2\} \\ &= \{(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}(I + tC)^{-1}(M_{a,b} + tCM_{c,d})) : \overrightarrow{X} \in F^2\} \\ &= \{(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}M_{h,k}) : \overrightarrow{X} \in F^2\}, \end{aligned}$$

donde $M_{h,k} = (I + tC)^{-1}(M_{a,b} + tCM_{c,d})$ es una matriz no nula en el cuerpo K.
De esta forma hemos probado que $f(l_t)$ está en D_0 para cualquier t distinto de $0, 1$ y ∞, es decir $R = f(R_0) \subset D_0$.
Consideremos ahora el trío $l_\infty, l_{a,b}$ y $l_{c,d}$ en D_0 con (a, b) diferente de (c, d).
Sea $f : V \longrightarrow V$ definida por

$$f = \begin{pmatrix} M_{c,d} - M_{a,b} & -M_{a,b} \\ 0 & M_{1,0} \end{pmatrix},$$

entonces f es lineal, $f(l_\infty) = l_\infty, f(l_{a,b}) = l_0$ y $f(l_{c,d}) = l_1$. Por tanto f es biyectiva con

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} (M_{c,d} - M_{a,b})^{-1} & M_{a,b}(M_{c,d} - M_{a,b})^{-1} \\ 0 & M_{1,0} \end{pmatrix}.$$

Luego $f^{-1}(R_0)$ es un régulo y es el único que contiene a $l_\infty, l_{a,b}$ y $l_{c,d}$.
Sea l_t en R_0 con t diferente de $0, 1$ y ∞ entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}(l_t) &= \{(\overrightarrow{X}(M_{c,d} - M_{a,b})^{-1}, \overrightarrow{X}(M_{a,b}(M_{c,d} - M_{a,b})^{-1} + tM_{0,1})) : \overrightarrow{X} \in F^2\} \\ &= \{(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}(M_{c,d} - M_{a,b})(M_{a,b}(M_{c,d} - M_{a,b})^{-1} + tM_{0,1})) : \overrightarrow{X} \in F^2\} \\ &= \{(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}M_{h,k}) : \overrightarrow{X} \in F^2\}, \end{aligned}$$

donde $M_{h,k} = (M_{c,d} - M_{a,b})(M_{a,b}(M_{c,d} - M_{a,b})^{-1} + tM_{0,1})$ es una matriz en el cuerpo K, es decir $f^{-1}(l_t)$ está en D_0 para todo t distinto de $0, 1$ y ∞. Por tanto el régulo $f^{-1}(R_0)$ que contiene $l_\infty, l_{a,b}$ y $l_{c,d}$ está contenido en D_0.
Luego hemos demostrado que el régulo que contiene a cualquier trío de componentes en D_0 está contenido en D_0. Por tanto D_0 es un spread Desarguesiano. □

Observación 2.1. *$R_0 = \{l_a : a \in F\} \cup \{l_\infty\}$ es un subconjunto de D_0, es decir R_0 es un régulo en el spread Desarguesiano D_0.*

Dado un spread Desarguesiano D, una pregunta natural es ¿cuántos régulos contiene D?. Usando el lema 1.2 podemos dar respuesta a esta pregunta con el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Sea D un spread Desarguesiano en V, entonces D contiene exactamente $q(q^2+1)$ régulos.*

Demostración. Sean W_1, W_2 y W_3 tres componentes del spread D entonces existe un único regulo R en V que los contiene por Lema 1.2. Como D es un spread Desarguesiano, R está contenido en D.
Notar que el régulo que contiene a W_1, W_2 y W_3 es el mismo que contiene a W_2, W_3 y W_1 o a W_3, W_1 y W_2.
Luego el número de régulos en D es

$$\frac{\binom{q^2+1}{3}}{\binom{q+1}{3}} = q(q^2+1).$$

□

Capítulo 3

Régulos en Spreads de Hall

3.1. Definiciones y Ejemplos

Definición 3.1. *El régulo obtenido en el teorema 1.1 es llamado* ***régulo opuesto****.*

Definición 3.2. *Sea S un spread Desarguesiano en el espacio vectorial V y R un régulo contenido en S. Llamaremos* ***spread de Hall*** *a la colección de subespacios de dimensión dos de V*

$$H = (S - R) \cup R',$$

donde R' es el régulo opuesto a R.

Proposición 3.1. *El spread de Hall $H_0 = \{l_{a,b} : a, b \in F, b \neq 0\} \cup R_0'$, donde R_0' es el régulo opuesto al régulo canonico R_0 no es un spread Desarguesiano.*

Demostración. Consideremos las componentes $l_{0,1}, L_0$ y L_∞ en H_0, probaremos que el régulo que determinan dichas componentes no está contenido en H_0.
Recordemos que

$$\begin{array}{rcl} L_0 &=& \langle (1,0,0,0), (0,0,1,0) \rangle \\ L_\infty &=& \langle (0,1,0,0), (0,0,0,1) \rangle \\ l_{0,1} &=& \langle (1,0,0,1), (0,1,\beta,\alpha) \rangle. \end{array}$$

En R_0 sean l_0, l_∞ y l_1, entonces el siguiente conjunto es una base para V,

$$B_1 = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}.$$

Luego existe $f : V \longrightarrow V$ lineal tal que

$$\begin{aligned} f(1,0,0,0) &= (1,0,0,0) \\ f(0,1,0,0) &= (0,0,\beta,0) \\ f(0,0,1,0) &= (0,0,0,1) \\ f(0,0,0,1) &= (0,1,0,\alpha), \end{aligned}$$

entonces se tiene que $f(l_0) = L_0$ y $f(l_\infty) = L_\infty$. Además $f(l_1) = l_{0,1}$, de hecho como

$$\begin{aligned} (1,0,1,0) &= 1(1,0,0,0) + 0(0,1,0,0) + 1(0,0,1,0) + 0(0,0,0,1) \\ (0,1,0,1) &= 0(1,0,0,0) + 1(0,1,0,0) + 0(0,0,1,0) + 1(0,0,0,1), \end{aligned}$$

entonces $f(1,0,1,0) = (1,0,0,1)$ y $f(0,1,0,1) = (0,1,\alpha,\beta)$.
Como β es distinto de cero, $\{(1,0,0,0),(0,0,\beta,0),(0,0,0,1),(0,1,0,\alpha)\}$ es linealmente independiente, entonces es una base para V y por tanto f envía base en base, luego f es biyectiva.
Por tanto $f(R_0)$ es un régulo que contiene a L_0, L_∞, y $l_{0,1}$. Más aún, es el único que contiene a estas tres componentes entonces

$$f(R_0) = \{L_0, L_\infty, l_{0,1}\} \cup \{f(l_a) : a \in F, a \neq 0,1\}$$

Sea (x,y,z,w) en V arbitrario, entonces $f(x,y,z,w) = (x,w,\beta y, z+\alpha w)$. Luego si a distinto de 0 y 1, entonces

$$\begin{aligned} f(l_a) &= \langle f(1,0,a,0), f(0,1,0,a)\rangle \\ &= \langle (1,0,0,a),(0,a,\beta,\alpha a)\rangle \\ &= \langle (1,0,0,a),(0,1,\beta a^{-1},\alpha)\rangle \\ &= \{x(1,0,0,a) + y(0,1,\beta a^{-1},\alpha) : x,y \in F\} \\ &= \{(x,y,y\beta a^{-1}, xa + y\alpha) : x,y \in F\} \\ &= \left\{ \left(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X} \begin{pmatrix} 0 & a \\ \beta a^{-1} & \alpha \end{pmatrix} \right) : \overrightarrow{X} = (x,y) \in F^2 \right\} \end{aligned}$$

es decir el espacio $f(l_a)$ no pertenece a H_0, puesto que la matriz que lo determina no pertenece al cuerpo de matrices K. Luego el régulo que contiene a las componentes L_0, L_∞ y $l_{0,1}$ no está contenido en H_0.

$\square$

Dado un spread de Hall H, el lema 1.2 muestra que dado tres componentes en H, existe un único régulo que los contiene. Nos interesa ver cuándo dicho régulo está contenido en H.

La proposición 3.1 nos indica que si $H_0 = (S_0 - R_0) \cup R_0'$, escogiendo dos componentes en R_0' y una componente en $S_0 - R_0$, entonces el régulo que contiene a estas tres componentes no está contenido en H_0.
Claramente si escogemos tres componentes en el régulo opuesto que define a H, el régulo que los contiene es justamente el régulo opuesto y por tanto está contenido en H.
En el siguiente ejemplo veremos qué puede ocurre si escogemos dos componentes en $S_0 - R_0$ y una componente en R_0'.

Ejemplo 3.1. *Vimos que el régulo que contiene a L_0, L_∞ y $l_{0,1}$ no está contenido en H_0. Ahora veamos qué ocurre si tomamos dos componentes en $\{l_{a,b} : a, b \in F, b \neq 0\}$ y una componente en R_0'.*
Sean

$$\begin{aligned} l_{0,1} &= \langle (1,0,0,1), (0,1,\beta,\alpha) \rangle \\ l_{1,1} &= \langle (1,0,1,1), (0,1,\beta,1+\alpha) \rangle \\ L_\infty &= \langle (0,1,0,0), (0,0,0,1) \rangle. \end{aligned}$$

Notamos que $B_1 = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ es una base para V.
Sea $f : V \longrightarrow V$ lineal definida en la base B_1 por

$$\begin{aligned} f(1,0,0,0) &= (\beta, 1+\alpha, \beta+\alpha\beta, \alpha^2+\alpha+\beta) \\ f(0,1,0,0) &= (0,-1,-\beta,-\alpha) \\ f(0,0,1,0) &= (-\beta,-\alpha,-\beta-\alpha\beta,-\alpha^2-\alpha-\beta) \\ f(0,0,0,1) &= (0,1,\beta,1+\alpha), \end{aligned}$$

entonces $f(l_0) = l_{0,1}$, $f(l_\infty) = l_{1,1}$ y $f(l_1) = L_\infty$.
Como f es biyectiva, puesto que la imagen de f contiene a $l_{0,1}$ y $l_{1,1}$ y éstos generan V, $f(R_0)$ es el régulo que contiene a $l_{0,1}, l_{1,1}$ y L_∞.
Escribiendo la matriz de f en base canónica, se tiene

$$f = \begin{pmatrix} \beta & 1+\alpha & \beta+\alpha\beta & \alpha^2+\alpha+\beta \\ 0 & -1 & -\beta & -\alpha \\ -\beta & -\alpha & -\beta-\alpha\beta & -\alpha^2-\alpha-\beta \\ 0 & 1 & \beta & 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

Sea $l_a = \langle (1,0,a,0), (0,1,0,a) \rangle$ en R_0 con a distinto de $0, 1$ y ∞, entonces se tiene

$$\begin{aligned} f(1,0,a,0) &= (1,0,a,0) \begin{pmatrix} \beta & 1+\alpha & \beta+\alpha\beta & \alpha^2+\alpha+\beta \\ 0 & -1 & -\beta & -\alpha \\ -\beta & -\alpha & -\beta-\alpha\beta & -\alpha^2-\alpha-\beta \\ 0 & 1 & \beta & 1+\alpha \end{pmatrix} \\ &= (\beta(1-a), 1+\alpha(1-a), \beta(1+\alpha)(1-a), (\alpha^2+\alpha+\beta)(1-a)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0,1,0,a) &= (0,1,0,a)\begin{pmatrix} \beta & 1+\alpha & \beta+\alpha\beta & \alpha^2+\alpha+\beta \\ 0 & -1 & -\beta & -\alpha \\ -\beta & -\alpha & -\beta-\alpha\beta & -\alpha^2-\alpha-\beta \\ 0 & 1 & \beta & 1+\alpha \end{pmatrix} \\ &= (0, a-1, \beta(a-1), \alpha(a-1)+a). \end{aligned}$$

Luego $f(l_a)$ es un subespacio vectorial de V de dimensión dos generado por los vectores

$$v_1 = (\beta(1-a), 1+\alpha(1-a), \beta(1+\alpha)(1-a), (\alpha^2+\alpha+\beta)(1-a))$$

$$v_2 = (0, a-1, \beta(a-1), \alpha(a-1)+a).$$

El conjunto $\{v_1, v_2\}$ es base de $f(l_a)$. Como a es distinto de 1 y β es distinto de 0, se tiene que $\{(\beta(1-a))^{-1}v_1, (a-1)^{-1}v_2\}$ es también base de $f(l_a)$. Denotemos por $v_1' = (\beta(1-a))^{-1}v_1$ y $v_2' = (a-1)^{-1}v_2$ entonces el conjunto de vectores $\{v_1' - ((1+\alpha(1-a))\beta(1-a))^{-1}v_2', v_2'\}$ es una base para $f(l_a)$. Por tanto $f(l_a)$ es el subespacio que esta generado por los vectores

$$(1, 0, a(a-1)^{-1}, 1-a(\beta(1-a)(a-1)^{-1})$$

$$(0, 1, \beta, a(a-1)^{-1}+\alpha).$$

Notemos que

$$f(l_a) = \{(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}M : \overrightarrow{X} = (x,y) \in F^2\},$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} a(a-1)^{-1} & \beta \\ 1-a(\beta(1-a)(a-1))^{-1} & a(a-1)^{-1}+\alpha \end{pmatrix}.$$

Esto último muestra que $f(l_a)$ no pertenece a H_0, puesto que la matriz M no es una matriz en el cuerpo K. Por tanto el régulo que contiene a $l_{0,1}, l_{1,1}$ y L_∞ no está contenido en el spread H_0.

En el siguiente ejemplo consideremos $F = \mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ y $p(x) = x^2 + 1$, polinomio irreducible sobre $\mathbb{F}_3[x]$. Por tanto se tiene el cuerpo de matrices

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} : a, b \in F \right\}.$$

Ejemplo 3.2. *Sabemos que existe $f : V \longrightarrow V$ lineal y biyectiva definida por la matriz*

$$\begin{pmatrix} M_{1,0} & M_{0,1} \\ C & CM_{1,1} \end{pmatrix},$$

donde $C = (M_{b,d} - M_{0,1})(M_{1,1} - M_{b,d})^{-1}$ *es una matriz en el cuerpo* K *y tal que* $f(l_0) = l_{0,1}, f(l_\infty) = l_{1,1}$ *y* $f(l_1) = l_{b,d}$. *Notemos que*

$$f(l_2) = \{(\overrightarrow{X}(M_{1,0} + 2C), \overrightarrow{X}(M_{0,1} + 2CM_{1,1})) : \overrightarrow{X} \in \mathbb{F}_3^2\}.$$

Si d *es distinto de* 1, *entonces* $M_{1,0}+2C$ *es diferente de* 0 *y por tanto* $M_{1,0}+2C$ *es invertible, luego se tiene*

$$f(l_2) = \{(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}(M_{1,0} + 2C)^{-1}(M_{0,1} + 2CM_{1,1})) : \overrightarrow{X} \in \mathbb{F}_3^2\}.$$

Como d *es no nulo consideramos* $d = 2$.
Sabemos que $(M_{1,0} + 2C)^{-1}(M_{0,1} + 2CM_{1,1})$ *está en* K, *veamos si es una matriz escalar.*
Notar que

$$\begin{aligned} (M_{1,0} + 2C)^{-1} &= (M_{1,0} + 2M_{b,1}M_{1-b,2}^{-1})^{-1} \\ (M_{0,1} + 2CM_{1,1}) &= (M_{0,1} + 2M_{b,1}M_{1-b,2}^{-1}M_{1,1}), \end{aligned}$$

entonces

$$(M_{1,0} + 2C)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2(b(b-1)+2}{(1-b)^2+1} + 1 & \frac{2}{(1-b)^2+1} \\ \frac{1}{(1-b)^2+1} & \frac{2(b(1-b)+2)}{(1-b)^2+1} + 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$(M_{0,1} + 2CM_{1,1}) = \begin{pmatrix} \frac{2(b(b-1)+1}{(1-b)^2+1} & \frac{2b(1-b)}{(1-b)^2} + 1 \\ \frac{b(1-b)}{(1-b)^2+1} + 2 & \frac{2(b(1-b)+1)}{(1-b)^2+1} \end{pmatrix}.$$

Como b *está en* $\mathbb{F}_3$ *se tiene que*

1. *Si* $b = 0$ *entonces*

   $$(A + 2C)^{-1}(B + 2D) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Luego

   $$f(l_2) = \{(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}M_{1,2}) : \overrightarrow{X} \in \mathbb{F}_3^2\}$$

   Es decir, $f(l_2) = l_{1,2}$ *y por tanto*

   $$f(R_0) = \{l_{0,1}, l_{0,2}, l_{1,2}, l_{1,1}\}.$$

2. *Si* $b = 1$, *entonces*

   $$(A + 2C)^{-1}(B + 2D) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$f(l_2) = \{(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}M_{0,2}) : \overrightarrow{X} \in \mathbb{F}_3^2\}.$$

Es decir, $f(l_2) = l_{0,2}$ *y por tanto*

$$f(R_0) = \{l_{0,1}, l_{1,2}, l_{0,2}, l_{1,1}\}.$$

3. *Si* $b = 2$, *entonces*

$$(A + 2C)^{-1}(B + 2D) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$f(l_2) = \{(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}M_{2,0}) : \overrightarrow{X} \in \mathbb{F}_3^2\}.$$

Es decir, $f(l_2) = l_{2,0}$ *y por tanto*

$$f(R_0) = \{l_{0,1}, l_{2,2}, l_{2,0}, l_{1,1}\}.$$

Por lo tanto sólo si $b = 0$ *ó* $b = 1$ *se tiene que el régulo que contiene a las componentes* $l_{0,1}, l_{1,1}$ *y* $l_{b,2}$ *está contenido en el spread de Hall*

Esto último sugiere que escogiendo adecuadamente un trío de componentes en $S_0 - R_0$, el régulo que los contiene puede estar contenido en H_0.

Bibliografía

[1] André, J. *Über nicht-Desarguesche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe.* Math. Z. 60, 156-186, 1954.

[2] Biliotti, M., Jha,V. and Johnson, N. *Foundations of translation planes.* Marcel Dekker, Inc. New York-Basel, 2001.

[3] Hoffman, K. y Kunze, R. *Álgebra lineal.* Prentice/Hall, 1973.

[4] Lüneburg, H. *Translation planes.* Springer-Verlag, New York Inc, 1980.

[5] Pomareda, R. *Note on exterior lines to two disjoint reguli.* Bol. Soc. Bras. Mat ,Vol. 20, No. 2, 79-85, 1990.

[6] Veblen, O. *Projective geometry.* Vol 1, Ginn, Boston, 1910.

[7] Veblen, O. and Wedderburn, J. H. M. *Non-Desarguesian and non-Pascalian geometries.* Trans. Amer. Math. Soc. 8, 379-388, 1907.