El Método de la Transformada de Pólya en el Estudio de Ecuaciones en Infinitas Derivadas

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias Matemáticas
Facultad de Ciencias

por

Ignacio Eduardo Olea Carrera

Septiembre, 2014

Director de Tesis: **Dr. Humberto Prado**

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Ignacio Eduardo Olea Carrera

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Físicas, en el examen de Defensa de Tesis rendido en Santiago durante Septiembre del 2014.

Director de Tesis

Dr. Humberto Prado

Dr. Manuel Pinto

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Yves Martin

Dr. Enrique Reyes

"We can forgive a man for making a useful thing as long as he does not admire it. The only excuse for making a useless thing is that one admires it intensely."

Oscar Wilde

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría agradecer a Arturo Godoy, profesor que me motivó hacia la ciencia estando en la prepa. A los que me ayudaron durante todos estos años en la Universidad de Chile. A Las Gradas y a Calama, aunque ya no existan, por los buenos momentos de distención. Al Rolo y a los emprendedores de Sta. Julia. A la Vicky y a la Norma. Al profesor Nelson Zamorano. Al BUyia, por todas las alegrías y hermosos momentos, incluyendo el inolvidable 5 a 0. A mi tutor, el profesor Humberto Prado, por toda la ayuda y tiempo dedicado durante estos meses. A mi familia por todo el cariño y apoyo.
Quisiera agradecer también a todos los compañeros de lucha, a los que creen que desde la Universidad se deben gestar cambios sociales, a quienes se asumen como privilegiados y creen que eso deberia cambiar y les importa más la moral que la ley. Pero por sobre todos, quiero agradecer a la persona más importante en mi vida, mi madre, por todos los años de paciencia, compresión y apoyo incondicional. Sin ti esto no sería posible. Aquí tienes el fruto de mis ausencias.

Mi permanencia en este Magister fue gracias a una beca Conicyt, pero no tengo palabras de agradecimiento para ellos.

Índice

RESUMEN

En esta tesis se estudia la ecuación $\phi\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) = g(x)$ cuando ϕ es una función entera cuya serie de potencias define al operador $\phi\left(\frac{d}{dx}\right)$ y f y g son funciones enteras de tipo exponencial. Mediante el uso de distribuciones y de la transformada de Pólya (una extensión de las transformadas de Laplace y Fourier) veremos que si ϕ se representa por la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y f es de tipo exponencial, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{df(x)}{dx}$ converge y de manera uniforme en conjuntos compactos. Luego, usando la transformada de Borel, veremos que siempre podemos encontrar de manera explícita una solución de tipo exponencial para la ecuación anterior y en particular caracterizamos las soluciones de la ecuación homogénea. A continuación aplicamos la teoría desarrollada para el estudio de ecuaciones diferenciales con retardo y ecuaciones de convolución, que aparecen al escoger ciertas funciones enteras particulares. Comparamos el método desarrollado en la tesis con la interpretación del operador $\phi\left(\frac{d}{dx}\right)$ vía teorema espectral y finalmente estudiamos problemas con valores iniciales. Se muestra que este último problema esta intimamente relacionado con los ceros de la función ϕ. Cuando estos son finitos, es necesaria una cantidad finita de condiciones iniciales para f y sus derivadas para que el problema tenga solución única. Cuando los ceros son infinitos, se ve que el problema se torna mas complicado y se estudia, mediante ejemplos, otros espacios de funciones donde podemos buscar soluciones.

Introducción

El propósito de la presente tesis es el estudio de ecuaciones diferenciales en infinitas derivadas. Esta clase de ecuaciones aparecen en distintos modelos que provienen de aplicaciones en física y están definidas por la serie de potencias de alguna función ϕ actuando sobre el operador d/dx

$$\phi\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^n f(x)}{dx^n} = g(x)\,,$$

donde los números a_n definen a ϕ. El estudio de este problema comienza hace más de un siglo. En 1917, J. F. Ritt demostró que para ciertas funciones enteras ϕ y cualquier función f holomorfa en un dominio D, la serie de al medio en la ecuación anterior converge en D y de manera uniforme en conjuntos compactos [21] . Luego de esto, existen varios trabajos en el tema donde se proponen distintos métodos para abordarlo. En particular, a mediados de los años 30, R. D. Carmichael [5] utiliza un método muy similar al que usaremos, basado en la transformada de Borel, pero la teoría al respecto estaba poco desarrollada y no se explota la claridad y simplicidad de éste. El tema adquirió importancia en física teórica luego que ecuaciones en infinitas derivadas aparecieran en el contexto de cosmología y teoría de cuerdas [1, 3, 18]. Muchas veces el estudio de estas ecuaciones fue informal e importantes propiedades de las soluciones como su unicidad o analiticidad fueron supuestos.

En el desarrollo de este trabajo consideraremos el caso en que la función ϕ es entera y f y g pertenecen a Exp, la rectrición a la recta real de las funciones enteras de tipo exponencial. La razones de este último requerimiento son varias. Por un lado, es obvio que para que la serie que aparece en medio de la ecuación tenga sentido, f debe ser una función infinitamente diferenciable, aunque, como veremos en la sección 2.2, tal ecuación puede tener sentido en espacios mucho menos restringidos. Por otro, mediante el uso de la transformada de Borel, veremos Exp presenta muchas ventajas al momento de buscar soluciones y mostrarlas explícitamente. También veremos que tomando límites de soluciones en Exp podemos recuperar soluciones en espacios más amplios.

Comenzaremos revisando los tópicos básicos que se utilizarán a lo largo de la tesis. El primero de estos será la teoría de funciones enteras y funciones de tipo exponencial, pues veremos que existen varias ventajas al interpretar a $\phi(\frac{d}{dx})$ como un operador que va de Exp en Exp. Estudiaremos también la transformada de Borel y su relación con la transformada de Laplace. Finalmente definiremos una función $\mathcal{P}$, cuyo argumento son distribuciones de soporte compacto y que nos permitirá expresar de manera sencilla el significado de $\phi\left(\frac{d}{dx}\right)$ así como sus soluciones. Con estas herramientas pasaremos de lleno a resolver el problema central. En la sección 2.1.1 definiremos el operador $\phi(\frac{d}{dx})$ mediante la serie de potencias de f y veremos que siempre converge cuando ϕ es una función entera y actua sobre una función de tipo exponencial. En la sección 2.1.2 veremos que la ecuación señalada al comienzo siempre tiene una solución de tipo exponencial y en la sección 2.1.3 estudiaremos las soluciones cuando g es la función cero. En la sección 2.2 estudiaremos las ecuaciones que surgen al escoger algunos ejemplos concretos de funciones enteras. Veremos que tanto ecuaciones diferenciales con retardo y ecuaciones de convolución se pueden estudiar y resolver con los métodos presentados en esta tesis. En la sección 2.3

se comparan los resultados obtenidos con otra interpretación del símbolo $\phi(\frac{d}{dx})$ via transformada de Fourier y finalmente en 2.4 se estudia la ecuación el caso con condiciones iniciales para f y sus derivadas. Veremos que cuando ϕ tiene un número finito de ceros, se requieren finitas condiciones iniciales para que la solución sea única. Cuando ϕ tiene infinitos ceros el problema se torna más complejo y lo estudiaremos buscando límites de soluciones clásicas en otros espacios de funciones. Se incluye un apéndice sobre teoría de distribuciones, centrado en aquellos resultados que se usan a lo largo de la tesis.

Capítulo 1

Preliminares

Primero, revisaremos algunos tópicos clásicos que son necesarios para definir el operador $\phi(\frac{d}{dx})$ y resolver ecuaciones en las que aparece. Recordando que toda función entera se representa mediante una serie de potencias que converge en todo el plano complejo daremos sentido a la expresion $\phi(d/dx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f^{(n)}(x)$. Revisaremos también el concepto de función de tipo exponencial y para esta clase de funciones introduciremos la transformada de Borel, que resulta ser una continuación analítica de la transformada de Laplace.

1.1. Funciones Enteras

1.1.1. Definiciones y Ejemplos

Definición 1.1.1. Una función entera es una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa en todo el plano complejo.

Observación. Ya que una función holomorfa es infinitamente diferenciable, la serie de potencias de una función entera converge en cualquier punto del plano complejo $\mathbb{C}$ y de manera uniforme sobre conjuntos compactos.

Los polinomios son el ejemplo más simple de funciones enteras. También lo es la función exponencial, que suele definirse por su serie de potencias y ésta converge en todo el plano. La suma de funciones enteras es una funcion entera, por lo tanto las funciones trigonométricas e hiperbólicas también son funciones enteras. El logaritmo natural y la raíz cuadrada no son funciones enteras.

Definición 1.1.2. Una función entera se denomina de tipo exponencial si existen constantes reales C y τ mayores o iguales que 0 tales que

$$|f(z)| \leq Ce^{\tau|z|}$$

para todo z en $\mathbb{C}$. Al ínfimo de los τ que cumplen la condición anterior lo llamamos el tipo exponencial de f. Al conjunto de funciones de tipo exponencial lo llamamos $Exp(\mathbb{C})$ y denotaremos $Exp(\mathbb{R})$ a su restricción a la recta real, es decir, $Exp(\mathbb{R}) = \{f|_{\mathbb{R}} \mid f \in Exp(\mathbb{C}\}$. En caso de no haber ambigüedad llamaremos Exp a cualquiera de estos dos conjuntos.

Definición 1.1.3. Sea f una función entera y para todo $r > 0$ sea $M(r) = \sup\{|f(z)| \, : \, |z| = r\}$. El orden de f se define como

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log(\log M(r))}{\log r}, \tag{1.1.1}$$

y para funciones con orden mayor que cero, se define el tipo de f como

$$\sigma = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r^\rho} \tag{1.1.2}$$

Ejemplo 1.1.4. Consideremos la función $f(x) = e^{az}$, de modo que $M(r) = e^{ar}$. Luego el orden de f es

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log ar}{\log r} = \limsup_{r\to\infty} \left(\frac{\log a}{\log r} + 1\right) = 1,$$

y su tipo:

$$\sigma = \limsup_{r\to\infty} \frac{ar}{r} = a\,.$$

Similarmente, si $g(z) = e^{az^2}$, entonces $M(r) = e^{ar^2}$ y el orden y el tipo son

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log ar^2}{\log r} = \limsup_{r\to\infty} \left(\frac{\log a}{\log r} + 2\right) = 2,$$

$$\sigma = \limsup_{r\to\infty} \frac{ar^2}{r^2} = a.$$

Los conceptos vistos anteriormente estan intrínsicamente relacionados, tal como se expresa en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.1. *Sea f una función entera de tipo exponencial τ. Entonces $\rho \leq 1$. Más aún, si $\rho = 1$ entonces $\tau = \sigma$.*

Demostración. Existe $C > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $|f(z)| \leq Ce^{(\tau+\varepsilon)|z|}$, luego $M(r) \leq Ce^{(\tau+\varepsilon)r}$. Por la monotonía del logaritmo:

$$\begin{aligned}
\rho &\leq \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log Ce^{(\tau+\varepsilon)r}}{\log r} \\
&= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\left(\log C + (\tau+\varepsilon)r\right)}{\log r} \\
&\leq \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log C + \log(\tau+\varepsilon)r}{\log r} \\
&= \limsup_{r\to\infty} \frac{(\log\log C + \log(\tau+\varepsilon)) + \log r}{\log r} = 1\,,
\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

donde hemos usado la concavidad del logaritmo. De manera similar

$$\begin{aligned}
\sigma &\leq \limsup_{r\to\infty} \frac{\log Ce^{(\tau+\varepsilon)r}}{r^\rho} \\
&= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log C + (\tau+\varepsilon)r}{r^\rho}\,,
\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

y esta última es igual a $\tau + \varepsilon$ si $\rho = 1$. Como ε es arbitrario, concluímos que $\sigma \leq \tau$ Por otro lado, como τ es el ínfimo de lós números tales que existe $C > 0$ tal que $|f(z)|$ es menor a $Ce^{\tau|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que $|f(z)| \geq Ce^{(\tau-\varepsilon)|z|}$ si $|z| \geq R$. Luego si $\rho = 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma &\geq \limsup_{r\to\infty} \frac{\log Ce^{(\tau-\varepsilon)r}}{r^{\rho}} \\ &= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log C + (\tau-\varepsilon)r}{r^{\rho}} = \tau - \varepsilon\,. \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Como ε es arbritrario y el lado izquierdo de la ecuación anterior no depende de él, se concluye que $\sigma \geq \tau$. Esto y el resultado anterior demuestran que $\sigma = \tau$. □

El siguiente teorema establece una relación entre el tipo exponencial de una función entera y los coeficientes de su serie de Taylor. La demostración puede encontrarse en [2] (teorema 2.2.10).

Teorema 1.1.5. *Si $f = \sum a_n z^n$ es una función entera de orden ρ tal que $0 < \rho < \infty$ y sea $\nu = \limsup_{n\to\infty} n|a_n|^{\frac{\rho}{n}}$. Si $0 < \nu < \infty$, entonces f es de tipo σ si y solo si*

$$\nu = e\tau\rho\,. \tag{1.1.6}$$

A continuación veremos un resultado que será útil en la próxima sección cuando definamos y estudiemos la transformada de Borel. Previamente recordemos la aproximación de Stirling, como aparece en [2], sección 1.6.

Teorema 1.1.6 (Formula de Stirling). *Se cumple que*

$$n! \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}\,, \tag{1.1.7}$$

donde $f(x) \sim g(x)$ significa que $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$.

Teorema 1.1.7. *Sea $f(z) = \sum a_n z^n$ una función entera de tipo exponencial τ. Entonces la serie de potencias $g(\zeta) = \sum n! a_n \zeta^n$ tiene radio de convergencia finito dado por $R = \tau^{-1}$.*

Demostración. Recordemos que el radio de convergencia de una serie viene dado por $R = (\limsup |a_n|^{1/n})^{-1}$. Supongamos f es de tipo exponencial. Entonces para el radio de convergencia de g tenemos:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\limsup |n! a_n|^{1/n}} \\ &= \frac{1}{\limsup |(n/e)^n a_n|^{1/n}} \\ &= \frac{e}{\limsup n |a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\tau}, \end{aligned}$$

donde usamos el teorema 1.1.5, la ecuación 1.1.7 y el factor $\sqrt{2\pi n}$ se cancela debido a que $\lim (2\pi n)^{1/2n} = 1$. □

1.1.2. Las Transformadas de Borel y Laplace

Definición 1.1.8. Para una función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ entera de tipo exponencial, se define su transformada de Borel mediante la serie de potencias

$$\mathcal{B}(f)(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{\zeta^{n+1}}. \tag{1.1.8}$$

De la definición es inmediato que la transformada de Borel es lineal. Además, por el teorema 1.1.7, $\mathcal{B}f$ converge en el complemento del disco $|z| \leq \tau$ con τ el tipo exponencial de f.

Ejemplo 1.1.9. Calculemos la transformada de Borel de la función exponencial $f(z) = e^z$.

$$(Be^z)(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta^{k+1}} = \frac{1}{\zeta - 1}, \tag{1.1.9}$$

donde la última igualdad se cumple si $|\zeta| > 1$ ya que la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge para $|x| < 1$. Más generalmente se cumple que

$$\mathcal{B}(e^{az})(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\zeta^{n+1}} = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\zeta^n} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - a/\zeta} = \frac{1}{\zeta - a}, \tag{1.1.10}$$

cuando $|a/\zeta| < 1$. Usando la linealidad de la transformada de Borel, es fácil calcular

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\cos z)(\zeta) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta - i} + \frac{1}{\zeta + i}\right) = \frac{\zeta}{\zeta^2 + 1} \\
\mathcal{B}(\sin z)(\zeta) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta - i} - \frac{1}{\zeta + i}\right) = \frac{1}{\zeta^2 + 1} \\
\mathcal{B}(\cosh z)(\zeta) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta - 1} + \frac{1}{\zeta + 1}\right) = \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} \\
\mathcal{B}(\sinh z)(\zeta) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta - 1} - \frac{1}{\zeta + 1}\right) = \frac{1}{\zeta^2 - 1}.
\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

Definición 1.1.10. Sea f una función entera de tipo exponencial. Definimos el diagrama conjugado de f, S_f, como la intersección de todos los convexos compactos fuera de los cuales $\mathcal{B}(f)$ es holomorfa, es decir, el convexo más pequeño fuera del cual $\mathcal{B}(f)$ es regular.

Ejemplo 1.1.11. Consideremos la función exponencial $f(z) = e^z$. Su transformada de Borel es $\mathcal{B}f(\zeta) = \frac{1}{\zeta - 1}$ que es regular en todo el plano complejo menos en $\zeta = 1$, luego su diagrama conjugado es la intersección de todos los convexos compactos que contienen a este punto, es decir $S_f = \{1\}$. Ahora tomemos $g(z) = \cosh z$. Entonces $\mathcal{B}g$ es regular en todo el plano menos en $\zeta = \pm 1$ y su diagrama conjugado es $S_g = \{\zeta = \xi + i\eta : -1 \leq \xi \leq 1, \eta = 0\}$.

El siguiente teorema nos permite representar una función entera de tipo exponencial mediante su trasformada de Borel, aún más, corresponde a una fórmula de inversión para esta clase funciones.

Teorema 1.1.12 (Representación de Pólya). *Sea f una función entera de tipo exponencial y D su diagrama conjugado. Para cualquier contorno C suave a pedazos que contenga a D en su interior, se tiene:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (\mathcal{B}f)(\zeta) e^{z\zeta} d\zeta \,. \tag{1.1.12}$$

Para demostrar este teorema, vamos a aplicar el siguiente resultado, conocido como teorema de Merten, que nos dice una condición suficiente para evalauar el producto de dos series infinitas como el límite de su producto de Cauchy.

Teorema 1.1.13 (Merten). *Sean $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ y $b = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ series convergentes de números complejos. Si al menos una de ellas converge absolutamente, entonces $ab = c$ donde $c = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ y*

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \,. \tag{1.1.13}$$

Demostración. Sean $a^n = \sum_{i=0}^{n} a_i$, $b^n = \sum_{i=0}^{n} b_i$ y $c^n = \sum_{i=0}^{n} c_i$. Si a cada punto (m,n) en el primer cuadrante de $\mathbb{Z}^2$ lo identificamos con el número $a_m b_n$, entonces c_i corresponde a la suma de los términos en la diagonal que comienza en $(i,0)$ y termina en $(0,i)$. Si reordenamos la serie de manera de ir sumando verticalmente, vemos que $c^n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b^i$, luego $c^n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(b^i - b) + a^n b$. Sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que los $\{a_i\}$ convergen absolutamente, es decir, $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| = a' < \infty$. Como $b^n \to b$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ se tiene

$$|b - b^n| \leq \frac{\varepsilon}{3(a'+1)} \,. \tag{1.1.14}$$

Por otro lado, como los $\{a_i\}$ son convergentes, $\text{lím}_{i\to\infty} a_i = 0$, luego existe $M \in \mathbb{N}$ talque si $n > M$

$$|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{3N(\sup_{i\in\{0,1,\ldots,N-1\}}|b^i - b| + 1)}, \tag{1.1.15}$$

y como convergen a a, existe $L \in \mathbb{N}$ tal que para $n > L$

$$|a - a^n| \leq \frac{\varepsilon}{3(|b| + 1)}. \tag{1.1.16}$$

Finalmente, para cada $n > \text{Max}\{M + N, L\}$ se cumple

$$\begin{aligned}
|c^n - ab| &= \left|\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(b^i - b) + a^n b - ab\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(b^i - b) + b(a^n - a)\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} |a_{n-i}(b^i - b)| + |b(a^n - a)| \\
&\leq \sum_{i=0}^{N-1} |a_{n-i}||b^i - b| + \sum_{i=N}^{n} |a_{n-i}||b^i - b| + |b||a^n - a| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned} \tag{1.1.17}$$

donde el primer término de la penúltima línea es menor que $\varepsilon/3$ por 1.1.15, el segundo por 1.1.14 y el tercero por 1.1.16, lo que concluye la demostración. □

Demostración (Teorema de Representación de Pólya). Como la serie de la función exponencial converge absolutamente, podemos aplicar el teorema de Merten

$$\begin{aligned}\int_C (\mathcal{B}f)(\zeta)e^{z\zeta}d\zeta &= \int_C \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n n!}{\zeta^{n+1}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n\zeta^n}{n!}\right)d\zeta \\ &= \int_C \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k k!}{\zeta^{k+1}}\frac{z^{n-k}\zeta^{n-k}}{(n-k)!}d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_C a_k\frac{k!}{(n-k)!}z^{n-k}\zeta^{n-2k-1}\,d\zeta\,,\end{aligned} \tag{1.1.18}$$

donde la integral conmuta con la serie infinita por la convergencia uniforme de la serie en conjuntos compactos. Pero $\int_C \zeta^l d\zeta$ es igual a $2\pi i$ si $l = -1$ y cero en cualquier otro caso, luego los únicos términos cuya integral no es cero son aquellos en que $n = 2k$, luego $k!/(n-k)! = k!/k! = 1$, $z^{n-k} = z^k$, finalmente obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C (\mathcal{B}f)(\zeta)e^{z\zeta}d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\zeta^k = f(z)\,. \tag{1.1.19}$$

□

Notemos que, por la analiticidad de f, cualquier círculo con radio mayor que el tipo exponencial de f sirve como camino.

Definición 1.1.14. Sea $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función real y s un número complejo. Se define la transformada de Laplace de f como

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt\,, \tag{1.1.20}$$

cuando la integral existe.

Observación. Si f es una función continua de tipo exponencial τ, entonces su transformada de Laplace existe para todo s tal que $\mathrm{Re}\,(s) > \tau$, pues

$$\begin{aligned}
\int_0^b |e^{-st} f(t)| dt &\le C \int_0^b e^{-(\mathrm{Re}\, s - \tau)t} dt \\
&= -C \left. \frac{e^{-(\mathrm{Re}\,(s)-\tau)t}}{\mathrm{Re}\,(s) - \tau} \right|_0^b \\
&= \frac{C}{\mathrm{Re}\,(s) - \tau} - C frac e^{-(\mathrm{Re}\,(s)-\tau)b} \mathrm{Re}\,(s) - \tau \xrightarrow[b \to \infty]{} \frac{C}{\mathrm{Re}\,(s) - \tau},
\end{aligned} \tag{1.1.21}$$

siempre que $\mathrm{Re}\,(s) > \tau$.

Los siguientes ejemplos serán de utilidad en las próximas secciones.

Ejemplo 1.1.15. Es fácil ver que todo polinomio es de tipo exponencial 0. Luego, para $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ e integrando por partes resulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &= \int_0^\infty t e^{-st} dt \\
&= \left. \frac{-te^{-st}}{s} \right|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt \\
&= \frac{1}{s} \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^\infty = \frac{1}{s^2}.
\end{aligned} \tag{1.1.22}$$

Luego, integrando por partes n veces, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t^n) &= \int_0^\infty t^n e^{-st} dt \\
&= \left. \frac{-t^n e^{-st}}{s} \right|_0^\infty + \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt \\
&= \frac{n}{s} \mathcal{L}(t^{n-1}) = \frac{n!}{s^{n+1}}.
\end{aligned} \tag{1.1.23}$$

El siguiente teorema indica bajo qué condiciones podemos calcular las transformada de Laplace de una función analítica a partir de su serie de Taylor. Esta observación establece un nexo entre las transformadas de Laplace y de Borel.

Teorema 1.1.16. *Sea* $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, *con* $t \geq 0$ *y supongamos que existen constantes* N, K *y* α *mayores que cero tales que para* $n \geq N$ *se satisface*

$$|a_n| \leq \frac{K\alpha^n}{n!}.$$

Entonces

$$\mathcal{L}(f)(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{L}(t^n)(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{s^{n+1}}, \qquad \operatorname{Re} s > \alpha. \tag{1.1.24}$$

Demostración. Primero notemos que

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{L}(f(t)) - \sum_{n=0}^{N} a_n \mathcal{L}(t^n) \right| &= \left| \mathcal{L}\left(f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^n \right) \right| \\ &\leq \mathcal{L}_x \left(\left| f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^n \right| \right), \end{aligned} \tag{1.1.25}$$

donde $\mathcal{L}_x(h(t)) = \int_0^\infty e^{-xt} h(t)dt$ con x real. Si podemos hacer tender este último término a cero cuando N tiende a infinito, el teorema quedará demostrado. Sean N, K y τ como en la hipótesis. Entonces, para $M \geq N$

$$\begin{aligned} \left| f(t) - \sum_{n=0}^{M} a_n t^n \right| &= \left| \sum_{n=M+1}^{\infty} a_n t^n \right| \\ &\leq K \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{(\tau t)^n}{n!} \\ &= K \left(e^{\tau t} - \sum_{n=0}^{M} \frac{(\tau t)^n}{n!} \right). \end{aligned} \tag{1.1.26}$$

Como e^{-xt} es una función positiva, $g \leq h$ implica $\mathcal{L}_x(g) \leq \mathcal{L}_x(h)$, cuando las transformadas existen. Luego se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_x\left(\left|f(t)-\sum_{n=0}^{M}a_nt^n\right|\right) &\leq K\mathcal{L}_x\left(e^{\tau t}-\sum_{n=0}^{M}\frac{(\tau t)^n}{n!}\right)\\ &= K\left(\frac{1}{x-\tau}-\sum_{n=0}^{M}\left(\frac{\tau^n}{x^{n+1}}\right)\right)\\ &= K\left(\frac{1}{x-\tau}-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{M}\left(\frac{\tau}{x}\right)^n\right)\xrightarrow[M\to\infty]{}0\end{aligned} \tag{1.1.27}$$

si $x > \tau$ pues $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = (1-z)^{-1}$ si $|z| < 1$.

□

Observemos que si $f(z) = \sum a_n z^n$ es una función entera de tipo exponencial τ, entonces por la proposición 1.1.1 se tiene $0 \leq \rho \leq 1$. Si el orden es mayor que cero, por el teorema 1.1.5 se tiene que $e\tau\rho = \limsup n|a_n|^{\rho/n}$. Como $\rho \leq 1$ entonces para toda $C > 1$ existe N tal que si $n \geq N$ entonces $n|a_n|^{1/n} \leq Ce\tau$. Además, como $n! \leq n^n$ resulta que

$$|a_n| \leq \frac{(Ce\tau)^n}{n^n} \leq \frac{K\tau^n}{n!}. \tag{1.1.28}$$

Si ρ es igual a cero, entonces $M(r)$ (recordar definición de ρ y σ) crece más lento que e^r, luego los coeficientes de su serie de potencias se pueden acotar igual que en el caso anterior. Esta observación demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1.1.17. *Toda función de tipo exponencial cumple la condición del teorema 1.1.16 y por lo tanto su transformada de Laplace coincide con su transformada de Borel en la región abierta* $\mathrm{Re}\,(s) > \tau$, *es decir, la transformada de Borel es la continuación analítica de la transformada de Laplace al complemento del diagrama conjugado de la función.*

1.1.3. La Función $\mathcal{P}$

A partir de ahora comenzaremos a trabajar con distribuciones y en particular con distribuciones de soporte compacto. Al conjunto de estas lo llamaremos $\mathcal{D}'_0$ (el origen de la notación así como definiciones y algunas propiedades de estas pueden consultarse en el apéndice). Además, para trabajar con distribuciones en el plano complejo, haremos la identificación $(x, y) \leftrightarrow \zeta = x+iy$ y procedemos como en el plano $\mathbb{R}^2$. La siguiente definición desempeña un rol fundamental en la teoría desarrollada en las siguientes secciones.

Definición 1.1.18. Llamaremos Transformada de Pólya $\mathcal{P} : \mathcal{D}'_0(\mathbb{C}) \to \text{Exp}$ a la función que a cada distribución d con soporte compacto le aplica la función $e^{z\zeta}$, es decir, $\mathcal{P}(d)(z) =< d, e^{z\zeta} >$ donde la distribución actua sobre la variable ζ.

El siguiente teorema indica que la imagen de $\mathcal{P}$ que aparece en la definición es correcta y además que esta función es sobreyectiva.

Teorema 1.1.19. *Sea d una distribución con soporte compacto contenido en $\{\zeta : |\zeta| < R\}$. Entonces $\mathcal{P}(d) \in Exp$ con tipo exponencial $\tau \leq R$. Recíprocamente, si f es de tipo exponencial τ, para todo $R > \tau$ existe una medida μ_f con soporte en $\{\zeta : |\zeta| = R\}$ tal que $f = \mathcal{P}(\mu_f)$.*

Demostración. Supongamos primero que $d = \mu$ es una medida con soporte compacto contenido en $\{\zeta : |\zeta| < R\}$. Entonces μ es de variación finita (ver [6]) y se cumple

$$|\mathcal{P}(\mu)(z)| = \left| \int_{\mathbb{C}} e^{z\zeta} d\mu(\zeta) \right| \leq \int_{|\zeta \leq R|} |e^{z\zeta}| d|\mu|(\zeta) \leq e^{zR} ||\mu|| , \tag{1.1.29}$$

donde $||\mu||$ es la variación total de μ. Ahora, sea d una distribución arbitraria de soporte compacto. Como $\operatorname{supp} d$ es un cerrado contenido en la bola cerrada de radio

R, que llamaremos $B(R)$, existe $R_1 < R$ tal que $\operatorname{supp} d \subset B(R_1) \subset B(R)$ donde las contenciones son estrictas. Sea χ infinitamente diferenciable y con soporte compacto tal que vale 1 en $\operatorname{supp} d$ y cero fuera de $B(R)$. Notemos que para cualquier multindice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$

$$|\partial^\alpha \chi(\zeta) e^{z\zeta}| = |e^{z\zeta} \partial^\alpha \chi(\zeta) + \chi(\zeta) \partial^\alpha e^{z\zeta}| = |\partial^\alpha \chi(\zeta) + i^{\alpha_2} z^{|\alpha|} \chi(\zeta)||e^{z\zeta}|\,.$$

Además, como $\chi \leq 1$ y sus derivadas son continuas (por lo tanto estan acotadas en compactos) existe $C > 0$

$$|\partial^\alpha \chi(\zeta) e^{z\zeta}| \leq C(1 + |z|^{n_1+n_2}) e^{|z|R_1} \qquad \text{si} \quad |\zeta| \leq R\,. \tag{1.1.30}$$

Luego, por la definición de una distribución (ver apéndice), existe una constante C' mayor que cero tal que

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(d)(z)| &= | < d, \chi(\zeta) e^{z\zeta} > | \\ &\leq C' \sum_{n_1+n_2 \leq N} \sup_{|\zeta| \leq R_1} |\partial_\xi^{n_1} \partial_\eta^{n_2} \chi(\zeta) e^{z\zeta}| \\ &\leq C''(1 + z^N) e^{|z|R_1} \leq C e^{|z|R}\,, \end{aligned} \tag{1.1.31}$$

donde N es el orden de la distribución, la constante C'' es el producto de C' por las constantes que aparecen por la desigualdad 1.1.30 y la última desigualdad es debido a que $R_1 < R$. Esto muestra que la imagen de $\mathcal{P}$ está contenida en Exp. Para probar el recíproco, sea f es una función de tipo exponencial $\tau < R$ y definamos para $E \subset \mathbb{C}$ medible

$$\mu_{f,R}(E) = \int_{\{\theta:\, \zeta = Re^{i\theta} \in E\}} Re^{i\theta}\, \mathcal{B}(f)(Re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}\,, \tag{1.1.32}$$

con soporte en el círculo de radio R. Luego, por el teorema 1.1.12 se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mu_{f,R})(z) &= \int_0^{2\pi} e^{zRe^{i\theta}} Re^{i\theta}\, \mathcal{B}(f)(Re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_C e^{z\zeta}\, \mathcal{B}(f)(\zeta)\frac{d\zeta}{2\pi i} = f(z)\,, \end{aligned} \tag{1.1.33}$$

donde C es el círculo de radio R.

□

Corolario 1.1.20. Sea d una distribución con soporte compacto contenido en $\{\zeta : |\zeta| < R\}$. Luego existe una medida μ con soporte en $\{\zeta : |\zeta| = R\}$ tal que $\mathcal{P}(d) = \mathcal{P}(\mu)$.

Demostración. Por 1.1.19, $\mathcal{P}d$ es una función entera de tipo exponencial con $\tau < R$. Luego, por la segunda parte del teorema 1.1.19, existe una medida μ con soporte en el círculo de radio R tal que $\mathcal{P}(d) = \mathcal{P}(\mu)$. □

Transformadas de Laplace y Fourier

Sea $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ una función con soporte compacto. Definimos la distribución $u(-\xi)\delta_0(\eta)$ mediante

$$< u(-\xi)\delta_0(\eta), f(\xi,\eta) >= \int u(-\xi)f(\xi,0)d\xi.$$

Luego tenemos que:

$$\mathcal{P}(u(-\xi)\delta_0(\eta))(z) = \int_{-\infty}^{\infty} u(-\xi)e^{z(\xi+i0)}d\xi\,, \tag{1.1.34}$$

y haciendo el cambio de variable $y = -\xi$

$$\mathcal{P}(u(-\xi)\delta_0(\eta)(z) = -\int_{\infty}^{-\infty} u(y)e^{-zy}dy = \int_0^{\infty} u(y)e^{zy}dy = \mathcal{L}(u)(z)\,,$$

e identificamos esta distribución con la medida de soporte compacto μ definida por:

$$\mu(E) = \int_{E\cap\mathbb{R}} u(\eta)d\eta\,.$$

Ahora consideremos $u:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ con soporte compacto y consideremos la distribución $u(-\eta)\delta_0(\xi)$:

$$< u(-\eta)\delta_0(\xi), f(\xi+i\eta) >= \int u(-\eta)f(0,\eta)d\eta\,.$$

Luego

$$\mathcal{P}(u(-\eta)\delta_0(\xi))(z) = \int_{-\infty}^{\infty} u(-\eta)e^{i\eta z}d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} u(y)e^{-iyz}dy = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(u)(z)\,, \quad (1.1.35)$$

donde $\mathcal{F}$ denota a la transformada de Fourier, que definimos como

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(k)e^{-ikx}dx\,. \quad (1.1.36)$$

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales de Orden Infinito

2.1. Cálculo con Operador $\phi\left(\frac{d}{dx}\right)$

El objetivo de este capítulo es el estudio de la ecuación

$$\phi\left(\frac{d}{dx}\right)f(x) = g(x)\,. \tag{2.1.1}$$

Para esto, primero definiremos el operador $\phi(\frac{d}{dx})$ cuando ϕ es una función entera y actúa sobre funciones enteras de tipo exponencial. Usando la teoría desarrollada en el capítulo 2, veremos que podemos definirlo de forma natural mediante la serie de potencias que representa a ϕ. Luego resolveremos la ecuación 2.1.1 y veremos que siempre tiene al menos una solución en Exp y que podemos encontrarla explícitamente. Finalmente, estudiaremos la ecuación homogenea $\phi(\frac{d}{dx})f = 0$.

2.1.1. El Operador $\phi(\frac{d}{dx})$.

Debido a que ϕ es una función entera, se representa por una serie de potencias $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Luego resulta natural definir

$$\phi\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{d^n}{dx^n}f(x)\,. \tag{2.1.2}$$

El siguiente teorema dice que cuando f es una función entera de tipo exponencial, la serie del lado derecho de la ecuación anterior converge. Además, proporciona una manera explícita de calcularla usando la teoría desarrollada anteriormente.

Teorema 2.1.1. *Sea $\phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ una función entera, f una función entera de tipo exponencial y d una distribución con soporte compacto tal que $f=\mathcal{P}(d)$. Entonces la serie infinita $\sum_{n=0}^{\infty}a_nd^nf/dx^n$ existe, converge uniformemente en compactos y*

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}a_n\frac{d^nf}{dx^n}=\mathcal{P}(\phi d)\,. \tag{2.1.3}$$

Demostración. Supongamos primero que $d=\mu$ es una medida con soporte compacto. Luego

$$\frac{df}{dz}=\frac{d}{dz}\int_{\mathbb{C}}e^{z\zeta}d\mu=\int_{\mathbb{C}}\zeta e^{z\zeta}d\mu=\mathcal{P}(\zeta\mu)\,, \tag{2.1.4}$$

donde la derivada pasa dentro de la integral al ser μ de soporte compacto. Repitiendo lo anterior concluimos que para todo n numero natural

$$\frac{d^nf}{dx^n}=\mathcal{P}(\zeta^n\mu)\,. \tag{2.1.5}$$

Luego se cumple

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n f}{dz^n} &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n}{dz^n}\int_{\mathbb{C}} e^{z\zeta}d\mu(\zeta) \\
&= \lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{C}}\sum_{n=0}^{N} a_n\zeta^n e^{z\zeta}d\mu(\zeta) \qquad (2.1.6)\\
&= \int_{\mathbb{C}}\phi(\zeta)e^{z\zeta}d\mu(\zeta) = \mathcal{P}(\phi\mu)\,,
\end{aligned}$$

donde el límite pasa dentro de la integral por ser μ con soporte compacto y a que la serie converge uniformemente en compactos. En el caso más general, cuando d es una distribución con soporte compacto, podemos hacerlo recordando que d es continua con la topología de espacio LF (ver apendice). Sea χ infinitamente diferenciable con soporte compacto y igual a 1 en el soporte de d. Consideremos la sucesión

$$\varphi_n(z) = \chi(\zeta)\frac{e^{\zeta(z+1/n)} - e^{\zeta z}}{1/n} = \chi(\zeta)e^{\zeta z}\frac{e^{\zeta/n}-1}{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \chi(\zeta)\zeta e^{z\zeta} = \varphi(z)\,,$$

y sea K =supp χ. Entonces supp $\varphi_n \subset K$, supp $\varphi \subset K$ y para toda m natural

$$\frac{d^m\varphi_n}{dz^m} = \zeta^m\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \zeta^m\chi(\zeta)\zeta e^{z\zeta} = \frac{d^m}{dz^m}\chi(\zeta)\zeta e^{z\zeta}\,,$$

y la convergencia es uniforme en K. Luego, por continuidad de d

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}f(z) &= \frac{d}{dz}\mathcal{P}(d) = \frac{d}{dz} < d, e^{z\zeta} > \\
&= \lim_{n\to\infty} < d, \varphi_n > = < d, \lim \varphi_n > = < d, \chi(\zeta)\zeta e^{z\zeta} > = \mathcal{P}(\zeta d)\,.
\end{aligned}$$

Repitiendo, concluimos que 2.1.5 es válido para este caso más general. Por último vemos que se cumple que

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n\frac{d^n f}{dz^n}-\mathcal{P}(\phi d) &= \lim_{N\to\infty}\mathcal{P}\left(\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\zeta^n-\phi\right)d\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\left\langle d,\chi(\zeta)\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\zeta^n-\phi\right)e^{z\zeta}\right\rangle\\ &=< d,0>=0\,,\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

donde el límite puede pasar adentro dentro de la distribución igual que antes por la continuidad de d.

□

En virtud del teorema anterior, la siguiente definición es natural.

Definición 2.1.2. Si $\phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es una función entera y $f\in Exp$, entonces definimos

$$\phi\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{d^n f(x)}{dx^n}\,. \tag{2.1.8}$$

Proposición 2.1.1. *Sean ϕ y f como en la definición anterior. Si d es una distribución con soporte compacto tal que $\mathcal{P}(d)=f$, entonces*

$$\phi\left(\frac{d}{dx}\right)f=\mathcal{P}(\phi d)\,. \tag{2.1.9}$$

Demostración. Por el teorema 2.1.1 y la definición anterior, la demostración es inmediata. □

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1.3. Consideremos la función entera $\phi(z)=\exp yz$ y estudiemos al operador $\exp(y\,d/dx)$ actuando sobre una función u de tipo exponencial. Sea μ una medida con $u(x)=\mathcal{P}(\mu)(x)$, entonces

$$\exp\left(y\frac{d}{dx}\right)u(x) = \mathcal{P}(e^{y\zeta}\mu) = \int_{\mathbb{C}} e^{\zeta(x+y)}d\mu(\zeta) = u(x+y)\,. \tag{2.1.10}$$

Este resultado es importante en mecánica cuántica, pues muestra como el operador momentum está relacionado con las traslaciones. Con este resultado es fácil ver que

$$\begin{aligned}
\cos\left(y\frac{d}{dx}\right)u(x) &= \frac{u(x+iy)+u(x-iy)}{2}\\
\sin\left(y\frac{d}{dx}\right)u(x) &= \frac{u(x+iy)-u(x-iy)}{2i}\\
\cosh\left(y\frac{d}{dx}\right)u(x) &= \frac{u(x+y)+u(x-y)}{2}\\
\sinh\left(y\frac{d}{dx}\right)u(x) &= \frac{u(x+y)-u(x-y)}{2}\,.
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

En el siguiente ejemplo veremos un caso particular en que la serie que representa a $\phi\left(\frac{d}{dx}\right)f$ no converge si f es una función infinítamente diferenciable con soporte compacto, lo cual nuevamente muestra las ventajas de trabajar en *Exp*

Ejemplo 2.1.4. Sea f una función infinítamente diferenciable con soporte compacto. Consideremos la función entera $\phi(z) = e^{z^2}$. Sean a_f y b_f los extremos izquierdo y derecho del soporte de f, es decir, $[a_f, b_f]$ es el conjunto más pequeño que contiene al soporte de f. Vamos a utilizar el teorema 1 que aparece en [9] que nos dice que para funciones cuadrado integrables con soporte compacto podemos encontrar los extremos del soporte mediante las fórmulas

$$a_f = -\operatorname*{lím\,sup}_{y\to\infty}\frac{\log|\mathcal{F}(f)(-iy)|}{y} \tag{2.1.12}$$

$$b_f = \operatorname*{lím\,sup}_{y\to\infty}\frac{\log|\mathcal{F}(f)(iy)|}{y}\,, \tag{2.1.13}$$

donde $\mathcal{F}$ es la transformada de Fourier definida por la ecuación 1.1.36. Veamos como actua el operador $\phi\left(\frac{d}{dx}\right)$ sobre f. Llamemos $f_K = \sum_{n=0}^{K} \frac{\partial_z^{2n} f}{n!}$ y supongamos que la serie anterior converge en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (el espacio de funciones integrables en cualquier conjunto compacto) a una función que llamaremos g. Como el soporte de cada f_K esta contenido en el soporte de f, se tiene que

$$a_f \leq a_g \leq b_g \leq b_f \,.$$

Como integramos sobre un intervalo compacto, podemos usar el teorema de convergencia dominada para ver que

$$\lim_{K\to\infty} \mathcal{F}(f_K)(z) = \lim_{K\to\infty} \int_{a_f}^{b_f} f_K(x) e^{izx} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \int_{a_f}^{b_f} g(x) e^{izx} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \mathcal{F}(g)(z) \,. \tag{2.1.14}$$

Por otro lado, usando la propiedad de la transformada de Fourier de la derivada de una función [17], obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f_K)(z) &= \sum_{n=0}^{K} \frac{1}{n!} \int_{a_f}^{b_f} \frac{d^{2n} f(x)}{dx^{2n}} e^{izx} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-2n}}{n!} \int_{a_f}^{b_f} f(x) e^{izx} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \,. \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Juntando los dos resultados anteriores vemos que

$$\mathcal{F}(g)(z) = e^{-z^2} \mathcal{F}(f)(z) \,. \tag{2.1.16}$$

Finalmente, aplicando la fórmula 2.1.13 llegamos a

$$
\begin{aligned}
b_f \geq b_g &= \limsup_{y\to\infty} \frac{\log|\mathcal{F}(g)(iy)|}{y} \\
&= \limsup_{y\to\infty} \frac{\log|e^{y^2}\mathcal{F}(f)(iy)|}{y} \\
&= \limsup_{y\to\infty} \left\{ y + \frac{\log|\mathcal{F}(f)(iy)|}{y} \right\} = \infty + b_f = \infty\,,
\end{aligned} \tag{2.1.17}
$$

que claramente es una contradicción pues b_f es finito, por lo que nuestra suposición sobre la convergencia de $\{f_K\}_K$ es falsa.

2.1.2. La Ecuación $\phi(\frac{d}{dx})f = g$

Con la teoría desarrollada hasta el momento, es fácil ver que la ecuación $\phi(\frac{d}{dx})f = g$ con ϕ entera y g de tipo exponencial siempre tiene al menos una solución de tipo exponencial.

Teorema 2.1.5. *Sea ϕ una función entera y $g \in Exp$, y d_g una distribución de soporte compacto tal que $g = \mathcal{P}(d_g)$ y $supp\, d_g \cap \mathcal{Z}(\phi) = \emptyset$, donde $\mathcal{Z}(\phi)$ son los ceros de la función ϕ (tal distribución existe por el teorema 1.1.19). Entonces la ecuación*

$$
\phi\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) = g(x)\,, \tag{2.1.18}
$$

tiene solución en Exp dada por

$$
f = \mathcal{P}\left(\frac{d_g}{\phi}\right)\,. \tag{2.1.19}
$$

Demostración. Primero, por 1.1.19 podemos escojer d_g como una medida con soporte en un círculo de radio $R \notin |\mathcal{Z}(\phi)|$, el conjunto de los modulos de los ceros de ϕ (pues los ceros de una función analítica son discretos). Ahora, definamos $f = \mathcal{P}(d_g/\phi) = \mathcal{P}(d_f)$, con $d_f = d_g/\phi$. Luego, por el teorema 2.1.1

$$\phi\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) = \mathcal{P}(\phi d_f) = \mathcal{P}\left(\phi \frac{d_g}{\phi}\right) = \mathcal{P}(d_g) = g(x)\,, \tag{2.1.20}$$

debido a que la multiplicación de distribuciones es asociativa (ver en el apéndice la proposición A.1.1).

□

Observación. Notemos que por 1.1.33 podemos evaluar f explícitamente en términos de la transformada de Borel de ϕ

$$f(x) = \int_{|\zeta|=R} e^{x\zeta} \frac{\mathcal{B}(g)(\zeta)}{\phi(\zeta)} \frac{d\zeta}{2\pi i}. \tag{2.1.21}$$

2.1.3. La Ecuación Homogénea.

Como $\phi(\frac{d}{dx}) : Exp \to Exp$ es un operador lineal entre espacios vectoriales, es interesante conocer su núcleo o soluciones de la ecuación homogénea

$$\phi\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) = 0\,. \tag{2.1.22}$$

Primero describiremos una familia de soluciones para esta ecuación.

Teorema 2.1.6. *Sea ϕ una función entera, $\mathcal{Z}(\phi)$ el conjunto de sus ceros y m_ζ la multiplicidad del cero $\zeta \in \mathcal{Z}(\phi)$. Entonces cualquier suma finita de la forma*

$$f(x) = \sum_{\zeta\in\mathcal{Z}(\phi)} p_\zeta(x) e^{\zeta x}\,, \tag{2.1.23}$$

donde p_ζ es un polinomio de grado estrictamente menor a m_ζ, es solución de la ecuación homogénea 2.1.22

Demostración. Sea f como en 2.1.23. Entonces $f = \mathcal{P}(d)$ donde d es la distribución $d = \sum_{\zeta\in\mathcal{Z}(\phi)} p_\zeta(-\partial)\delta_\zeta$ (ver apéndice para la derivada de una distribución). Luego por la ecuación 2.1.3 se cumple que

$$\phi\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) = \mathcal{P}(\phi d) = \sum_{\zeta\in\mathcal{Z}(\phi)} < \delta_\zeta, p_\zeta(\partial)\phi(\zeta)e^{\zeta x} >= 0, \tag{2.1.24}$$

ya que $\phi(\zeta) = 0$ por hipótesis. $\square$

El teorema 2.1.6 nos dice que entre más ceros tenga ϕ, la ecuación 2.1.22 admite más soluciones. A continuación probaremos que cualquier solución de la ecuación homogénea es de la forma dada por 2.1.23. Para esto, primero vamos a probar el siguiente lema. Sea $R > 0$, $B_R = \{\zeta : |\zeta| < R\}$ y $A(B_R)$ el espacio de funciones analíticas en B_R y continuas en $|\zeta| = R$ con la norma del supremo. Sea $E_z \in A(B_R)$ la función definida por $E_z(\zeta) = e^{z\zeta}$. Dada una función entera ϕ, sea

$$\mathcal{M}_{\phi,R} = \overline{\operatorname{Span}\{E_z\phi \,:\, z \in \mathbb{C}\}}\,,$$

donde la clausura se toma en $A(B_R)$.

Lema 2.1.7. *Sea ϕ una función entera, $\mathcal{Z}(\phi)$ el conjunto de sus ceros, $|\mathcal{Z}(\phi)|$ sus respectivos módulos y $R \notin |\mathcal{Z}(\phi)|$. Sea $\{\zeta_k\}_{k=1}^K$ una enumeración de $\mathcal{Z}(\phi) \cap B_R$ y sea m_k la multiplicidad correspondiente al cero ζ_k. Entonces*

$$\mathcal{M}_{\phi,R} = \{\psi \in A(B_R) \,:\, \psi \textit{ es cero en } \zeta_k \textit{ con multiplicidad} \geq m_k,\ k = 1, ..., K\}\,.$$

Demostración. Sea $\psi \in \mathcal{M}_{\phi,R}$, luego $\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \phi E_{z_n}$. Para probar que $\mathcal{M}_{\phi,R}$ está contenido en el conjunto a la derecha en el lema, basta ver que la función dada por $\psi(\zeta)/(\zeta - \zeta_k)^{m_k-1}$ vale cero evaluada en ζ_k para todo $\psi \in \mathcal{M}_{\phi,R}$ y toda $k = 1, \ldots, K$. Como el funcional evaluación $\varphi \to \varphi(\zeta_0)$ es continuo para toda $\zeta_0 \in B_R$, entonces

$$\left.\frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-\zeta_k)^{m_k-1}}\right|_{\zeta_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{\alpha_n \phi E_{z_n}}{(\zeta-\zeta_k)^{m_k-1}}\right|_{\zeta_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{z_n\zeta_k} \left.\frac{\phi(\zeta_k)}{(\zeta-\zeta_k)^{m_k-1}}\right|_{\zeta_k} = 0\,, \tag{2.1.25}$$

pues ζ_k es cero de ϕ con multiplicidad m_k. Esto es válido para $k = 1, \ldots, K$, luego ψ es cero en todos los ζ_k con multiplicad al menos m_k. Para ver la contención recíproca, sea $\psi \in A(B_R)$ que sea cero en ζ_k, $k = 1, ...K$ con multiplicad $\geq m_k$. Luego $\psi/\phi \in A(B_R)$. Como los polinomios son densos en $A(B_R)$ (ya que la serie de Taylor de una función analítica converge uniformemente sobre compactos), entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un polinomio p tal que $||\psi/\phi - p|| < \varepsilon$. Sea $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de polinomios tales que $p_k \to_{k\to\infty} \psi/\phi$. Entonces

$$||\phi p_k - \psi|| = ||\phi(p_k - \psi/\phi)|| \leq ||\phi|| ||p_k - \psi/\phi|| \to_{k\to\infty} 0\,,$$

luego $\psi \in \overline{\phi\mathrm{Pol}}$. También se tiene que $\mathrm{Pol} \subset \overline{\mathrm{Span}\{E_z \,:\, z \in \mathbb{C}\}}$. Para ver esto, notemos que el lado derecho contiene a la función constante 1, pues $E_0(z) = 1$. También contiene a la función identidad, pues podemos tomar $(E_z(\zeta) - 1)/z \in \mathrm{Span}\{E_z \,:\, z \in \mathbb{C}\}$ y tomando el límite $z \to 0$ obtenemos ζ. Por último, notamos que el producto de una combinación lineal de funciones de la forma $e^{z_k\zeta}$, $z_k \in \mathbb{C}$, seguirá siendo una combinación lineal de las mismas funciones, por lo tanto es un álgebra. Finalmente

$$\psi \subset \overline{\phi\mathrm{Pol}} \subset \overline{\mathrm{Span}\{E_z\phi \,:\, z \in \mathbb{C}\}}$$

□

Teorema 2.1.8. *Sea $f \in Exp$, con tipo exponencial τ. Supongamos que f es solución de la ecuación homogénea $\phi(\frac{d}{dx})f(x) = 0$. Sea $\mathcal{Z}(\phi) = \{\zeta_k\}_{k=0}^{\infty}$ una enumeración de los ceros de ϕ y m_k sus respectivas multiplicidades. Entonces existen polinomios p_k con grado menor a m_k tales que la solución f se representa como*

$$f(x) = \sum_{|\zeta_k| \leq \tau} p_k(x) e^{x\zeta_k} \tag{2.1.26}$$

Demostración. Sea f solución de la ecuación 2.1.22 de tipo exponencial τ. Como los ceros de una función analítica son discretos, podemos encontrar $R > \tau$ tal que no hayan ceros en el conjunto $\{\zeta \in \mathbb{C} : \tau < |\zeta| \leq R\}$. Por el teorema 1.1.19 existe una medida μ con soporte en el círculo de radio R tal que $f = \mathcal{P}(\mu)$. Consideremos el espacio cuociente $A(B_R)/\mathcal{M}_{\phi,R}$. Recordemos que una función analítica tiene un cero en ζ con multiplicidad n si y solo si sus derivadas de orden menor que n evaluadas en ζ son cero (la enésima derivada en ζ es la primera distinta de cero). Luego, la clase de equivalencia $[\psi] \in A(B_R)/\mathcal{M}_{\phi,R}$ queda completamente determinada por los valores

$$\left\{ \left.\frac{d^j\psi}{d\zeta^j}\right|_{\zeta_k} : k = 1, ...K \,,\, 0 \leq j < m_k \right\}, \tag{2.1.27}$$

o, equivalentemente, estos valores son las coordenadas de $[\psi]$ en cierta base. Por lo tanto $A(B_R)/\mathcal{M}_{\phi,R}$ tiene dimensión finita. Sea l un elemento de el dual de $A(B_R)/\mathcal{M}_{\phi,R}$. Su acción queda completamente determinada por cómo actúa sobre la base. Luego existen polinomios p_k con grado menor a m_k tales que:

$$l[\psi] = \sum_{k=1}^{K} p_k\left(\frac{d}{d\zeta}\right)\psi\bigg|_{\zeta_k},$$

donde los coeficientes de p_k vienen dados por la acción de l en los elementos de la base que acompañan a las coordenadas $\psi^{(j)}(\zeta_k)$. Dado un espacio vectorial V, un subespacio W y un funcional $f \in V^*$, podemos definir $\tilde{l} \in (V/W)^*$ como $<\tilde{l}, [v]> = < l, v >$, pero sólo estará bien definido si $l(W) = 0$. En particular, μ define un funcional lineal en $A(B_R)$ mediante $\psi \to \int \psi d\mu$. Por el teorema 2.1.1, $\mathcal{P}(\phi\mu) = 0$, luego el funcional definido por μ aniquila a $\mathcal{M}_{\phi,R}$, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
f(x) &=< \mu, e^{\zeta x} > \\
&=< \tilde{\mu}, [e^{\zeta x}] >= \int e^{\zeta x} d\mu = \sum_{k=1}^{K} p_k \left(\frac{d}{d\zeta}\right) e^{\zeta x} \,|_{\zeta_k} = \sum_{k=1}^{K} p_k(x) e^{x\zeta_k}
\end{aligned} \tag{2.1.28}
$$

□

Corolario 2.1.9. El operador $\phi(\frac{d}{dx})$ es invertible en Exp si y solo si ϕ no tiene ceros. En tal caso, el operador inverso viene dado por

$$
\left(\phi\left(\frac{d}{dx}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{\phi}\left(\frac{d}{dx}\right). \tag{2.1.29}
$$

Demostración. Por el teorema 2.1.5, es claro que el operador $\phi(\frac{d}{dx})$ es sobreyectivo. Si ϕ no tiene ceros, el teorema 2.1.8 nos dice que la única solución a la ecuación homogénea es cero, luego el núcleo $\phi(\frac{d}{dx})$ es cero y por lo tanto es inyectivo y el operador es invertible. Recíprocamente, si $\phi(\frac{d}{dx})$ es invertible entonces es inyectivo, luego su núcleo es nulo. Entonces, aplicando una vez más el teorema 2.1.6, se deduce que ϕ no puede tener ceros. Finalmente notemos que si $f = \mathcal{P}(d) \in Exp$, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\phi}\left(\frac{d}{dx}\right)\left(\phi\left(\frac{d}{dx}\right)f\right) &= \frac{1}{\phi}\left(\frac{d}{dx}\right)\mathcal{P}(\phi d) = \mathcal{P}\left(\frac{\phi d}{\phi}\right) = \mathcal{P}(d) = f \\
\phi\left(\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{1}{\phi}\left(\frac{d}{dx}\right)f\right) &= \phi\left(\frac{d}{dx}\right)\mathcal{P}\left(\frac{d}{\phi}\right) = \mathcal{P}\left(\frac{\phi d}{\phi}\right) = \mathcal{P}(d) = f.
\end{aligned}
$$

□

El siguiente corolario muestra como se relacionan las diferentes soluciones de la ecuación 2.1.1

Corolario 2.1.10. Sean $f_1 = \mathcal{P}(d_1)$ y $f_2 = \mathcal{P}(d_2)$ soluciones de la ecuación $\phi(\frac{d}{dx})f = g$, donde d_1 y d_2 son distribuciones con soporte compacto. Sea $R = \sup\{|z| : z \in \operatorname{supp} d_1 \cup \operatorname{supp} d_2\}$. Luego $f_1 - f_2$ viene dado por 2.1.26 con $\tau = R$.

Demostración. Como f_1 y f_2 son soluciones de 2.1.5, $f_1 - f_2$ es solución de la ecuación homogénea $\phi(\frac{d}{dx})f(x) = 0$. Además, por el teorema 1.1.19 el tipo exponencial de $f_1 - f_2$ es menor o igual que $R = \sup\{|z| \, : \, z \in \operatorname{supp} d_1 \cup \operatorname{supp} d_2\}$. □

2.2. Aplicaciones

En esta secciones estudiaremos algunas aplicaciones de la teoría desarrollada anteriormente. Veremos que para ciertas funciones ϕ, la ecuación 2.1.1 describe a algunas familias de ecuaciones que aparecen en otros contextos, como son las ecuaciones diferenciales con retardo y las ecuaciones de convolución.

2.2.1. Ecuaciones Diferenciales con Retardo

Recordemos de la demostración del teorema 2.1.1 que $\mathcal{P}(\zeta d_f) = \frac{d}{dz}\mathcal{P}(d_f) = f'(z)$ y más en general

$$\frac{d^n}{dz^n} f = \mathcal{P}(\zeta^n d_f) \,. \tag{2.2.1}$$

Luego, si consideramos funciones de la forma $\phi(\zeta) = \sum_{i=1}^{n} p_i(\zeta) e^{\zeta z_i}$ con p_i polinomios y $z_i \in \mathbb{C}$, observando el ejemplo 2.1.3 vemos que la ecuación resultante es

$$\phi\left(\frac{d}{dx}\right) f = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{d}{dx}\right) f(x + z_i) \,. \tag{2.2.2}$$

A este tipo de ecuaciones se le conoce como ecuaciones diferenciales con retardo [14]. El término retardo está asociado a sus aplicaciones en física, donde el argumento es el tiempo y las derivadas de la funcón estan dadas en terminos de la función en un tiempo previo (como sucede, por ejemplo, en electrodinámica, ver [16]). Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.2.1. Consideremos la función entera $\phi(z) = 2z\cosh z = z(e^z + e^{-z})$ y estudiemos la ecuación

$$\phi\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) = f'(x+1) + f'(x-1) = g(x),$$

para algunas funciones g. El teorema 2.1.5 nos indica que la función

$$f = \mathcal{P}\left(\frac{d_g}{2z\cosh z}\right) \tag{2.2.3}$$

es solución de la ecuación. Consideremos el caso en que $g(x) = e^x = \mathcal{P}(\delta_1)$. Entonces la solución correspondiente es

$$f(x) = \int_{\mathbb{C}} \frac{e^{zx}}{2z\cosh z}\delta(z-1)dz\,. = \frac{e^x}{2\cosh 1}\,. \tag{2.2.4}$$

En efecto

$$f'(x+1) + f'(x-1) = \frac{e^{x+1} + e^{x-1}}{2\cosh 1} = e^x\frac{e^1 + e^{-1}}{2\cosh 1} = e^x\,. \tag{2.2.5}$$

Si ahora tomamos $g(x) = cos(x) = \mathcal{P}\left(\frac{\delta_i + \delta_{-i}}{2}\right)(x)$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) =& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{C}} \frac{e^{zx}}{2z\cosh z}(\delta(z-i) + \delta(z+i))dz \\ =& \frac{e^{ix}}{4i\cosh i} - \frac{e^{-ix}}{4i\cosh i} = \frac{\sin x}{2\cos 1}\,. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Veamos si es cierto:

$$\begin{aligned} f'(x+1) + f'(x-1) =& \frac{\cos(x+1)}{2\cos 1} + \frac{\cos(x-1)}{2\cos 1} \\ =& \frac{\cos x\cos 1 - \sin x\sin 1 + \cos x\cos 1 + \sin x\sin 1}{2\cos 1} \\ =& \frac{2\cos x\cos 1}{2\cos 1} = \cos x\,, \end{aligned}$$

que es el resultado que esperábamos.

Ahora veamos otro ejemplo que servirá para reconsiderar los espacios en los que es posible encontrar soluciones de la ecuación 2.1.1.

Ejemplo 2.2.2. Sea $\phi(z) = e^z - 1$. Entonces la ecuación homogenea $\phi\left(\frac{d}{dx}\right) = 0$ corresponde a

$$f(x+1) - f(x) = 0\,. \tag{2.2.7}$$

Notemos que cualquier función con periodo 1 satisface 2.2.7, aunque el formalismo desarrollado sólo se aplique para funciones enteras de tipo exponencial y el límite del lado derecho en 2.1.3 sólo tenga sentido para funciones infinítamente diferenciables. Los ceros de ϕ son $\{2\pi ik\}_{k\in\mathbb{C}}$. Por el teorema 2.1.8, cualquier solución en Exp sera de la forma

$$f(x) = \sum_{k\leq\tau/2\pi} c_k e^{2\pi ikx}\,, \qquad c_k \in \mathbb{C}\,, \tag{2.2.8}$$

con τ el tipo exponencial de f. Es claro que cualquier función de esta forma será de período uno. Si consideramos funciones como en 2.2.8 pero con series infinitas, entonces podemos obtener cualquier función en $L^2_{loc}(\mathbb{R})$ de periodo 1 mediante su transformada de Fourier.

Retomaremos éste tipo de ecuaciones cuando estudiemos problemas con valores iniciales.

2.2.2. Ecuaciones de convolución

El segundo caso particular que estudiaremos está relacionado con ecuaciones de convolución. Sea $u \in L^1(\mathbb{R})$ con soporte compacto y definamos

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zx} u(x) dx \qquad z \in \mathbb{C}\,. \tag{2.2.9}$$

Como u tiene soporte compacto, la integral existe para cualquier z en el plano complejo. Por otro lado:

$$\begin{aligned} |\phi(z) - \phi(\zeta)|^2 &= \left| \int_{\mathbb{R}} u(x)(e^{xz} - e^{x\zeta}) dx \right|^2 \\ &\leq ||u||^2 \int_{\mathbb{R}} |e^{xz} - e^{x\zeta}|^2 dx \\ &\leq C||u||^2 \operatorname*{Max}_{x \in \operatorname{supp} u} |e^{xz} - e^{x\zeta}|^2\,, \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

donde C es la medida de Lebesgue del soporte de u. Notemos que este último término puede hacerse arbitráriamente pequeño cuando $|z - \zeta|$ disminuye por la continuidad de la función exponencial, por lo que ϕ es continua en todo $\mathbb{C}$ Por último, para cualquier camino cerrado γ en el plano complejo

$$\begin{aligned} \int_\gamma \phi(z) dz &= \int_\gamma \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-zx} dx\, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x) \left(\int_\gamma e^{-xz} dz \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x) \cdot 0\, dx = 0\,, \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

donde el soporte compacto de u hace que la función sea integrable y podamos usar el teorema de Fubini y la integral entre paréntesis de la segunda línea es cero por el teorema de Cauchy. Como γ es arbitrario, por el teorema de Morera ϕ es holomorfa en todo el plano complejo, luego es entera. Ademas

$$|\phi(z)| \leq \int |u(x) e^{zx}| dx \leq ||u|| e^{x_0 |z|}\,,$$

con $x_0 = \operatorname{Max}\{|x| : x \in \operatorname{Supp} u\}$. En resumen tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1. *Sea u integrable con soporte compacto. Entonces $\phi(z) = \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-zx}dx$ es una función entera de tipo exponencial.*

Recordemos que la convolución de dos funciones se define como $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)f(x)dx$. Ahora consideremos ϕ como en 2.2.9 y veamos cómo actua sobre el operador diferencial $\frac{d}{dx}$. Por el teorema 2.1.1, para cualquier función entera f de tipo exponencial tenemos

$$\begin{aligned}
\phi\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) &= \mathcal{P}(\phi d_f) \\
&= \int_{\mathbb{C}} e^{zx}\phi(z)d\mu_f(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} e^{zx}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-zy}u(y)dy\right) d\mu_f(z) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{C}} e^{z(x-y)}u(y)d\mu_f(z)dy\,.
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

donde podemos usar el teorema de Fubini por el soporte compacto de u y $d\mu_f$. Pero $d\mu_f$ es tal que $\int_{\mathbb{C}} e^{z(x-y)}d\mu_f(z) = f(x-y)$, por lo que concluímos que

$$\phi\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)u(y)dy = (u * f)(x) \tag{2.2.13}$$

Ejemplo 2.2.3. Consideremos $u = \chi_{[-1,0]}$ la función característica del intervalo $[0,1]$. Entonces si definimos ϕ como en 2.2.9, esta será de la forma

$$\phi(z) = \int e^{-zx}u(x)dx = \int_{-1}^{0} e^{-zx}dx = -\frac{e^{-zx}}{z}\bigg|_{-1}^{0} = \frac{e^{z}-1}{z}.$$

Entonces se tiene que los ceros de ϕ son de la forma $2\pi ik$ con k entero distinto de cero. Por el teorema 2.1.8, las soluciones de $u * f = 0$ son de la forma $\sum_{k\leq N} c_k e^{2\pi ik}$ donde N depende del tipo exponencial de f y c_k son constantes. Haciendo el cálculo explícito vemos que en efecto

$$\begin{aligned} u * f &= \int_{-1}^{0} f(x-y)dy \\ &= \sum_{k=1}^{N} c_k \int_{-1}^{0} e^{2\pi i k(x-y)} dy = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{2\pi i k x} \int_{-1}^{0} e^{-2\pi i k y} dy = 0 . \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Ejemplo 2.2.4. Sea $f \in Exp$ y $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Notemos que si f y g son funciones integrables, diferenciables y con derivada integrable, entonces se tiene que $f' * g = (f * g)'$. Una manera de demostrar esto es notar que

$$\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}(f * g)\right)(t) = it\mathcal{F}(f * g)(t) = it\mathcal{F}(f)(t)\mathcal{F}(g)(t)$$
$$\mathcal{F}\left(\frac{df}{dx} * g\right)(t) = \mathcal{F}\left(\frac{df}{dx}\right)(t)\mathcal{F}(g)(t) = it\mathcal{F}(f)(t)\mathcal{F}(g)(t) .$$

Luego, por la inyectividad de la transformada de Fourier, ambas son iguales. En caso de que u tenga soporte compacto y $f \in Exp$, podemos tomar una sucesión f_n de funciones infinítamente diferenciables con soporte compacto tales que $f_n \to f$ en la norma de $L^2(\mathbb{R})$. Entonces se tiene que $u' * f_n = (u * f_n)'$. Como el soporte de u es compacto, se cumple que por el teorema de convergencia dominada. Luego

$$\lim_{n\to\infty} \int u(y)' f_n(x-y) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} \int u(y) f_n(x-y) dy$$

Lo que implica que

$$\int u'(y) f(x-y) dy = \frac{d}{dx} \int u(y) f(x-y) dy .$$

Ahora usaremos lo anterior para estudiar la ecuación

$$f = u'' * f + g , \tag{2.2.15}$$

con u con soporte compacto y $g \in Exp$. Notemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dx^2} * f &= \frac{d^2}{dx^2} u * f \\
&= \frac{d^2}{dx^2} \int_{\mathbb{R}} u(y) f(x-y) dy \\
&= \frac{d^2}{dx^2} \int_{\mathbb{R}} u(y) \int_{\mathbb{C}} e^{\zeta(x-y)} d\mu_f(\zeta) \\
&= \frac{d^2}{dx^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\zeta x} \int_{\mathbb{R}} u(y) e^{-\zeta y} dy \mu_f(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \zeta^2 e^{\zeta x} \int_{\mathbb{R}} u(y) e^{-\zeta y} dy \, d\mu_f(\zeta) = \mathcal{P}(\phi \mu_f) \, ,
\end{aligned}
\tag{2.2.16}
$$

con $\phi(z) = z^2 \int_{\mathbb{R}} u(y) e^{-zy} dy$ (que ya vimos que es una función entera) y donde el teorema de Fubini y el paso de la derivada dentro de la integral se justifican por el soporte compacto de la función u y la medida μ. Ahora definimos $\psi = 1 - \phi$ y la ecuación 2.2.15 es equivalente a $\psi(d/dx) f = g$. Consideremos el caso en que $g(x) = 2\cos x$. Entonces por el teorema 2.1.5 se tiene

$$
\begin{aligned}
f &= \mathcal{P}\left(\frac{\delta(z-i) + \delta(z+i)}{1 - \phi(z)} \right) \\
&= \int_{\mathbb{C}} e^{zx} \frac{\delta(z-i) + \delta(z+i)}{1 - z^2 \int u(y) e^{-zy} dy} dz \\
&= \frac{e^{ix}}{1 + \int u(y) e^{-iy} dy} + \frac{e^{-ix}}{1 + \int u(y) e^{+iy} dy} \\
&= \frac{e^{ix}}{1 + \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(u)} + \frac{e^{-ix}}{1 + \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}(u)} .
\end{aligned}
\tag{2.2.17}
$$

Los términos en los denominadores nunca son cero pues la transformada (inversa) de Fourier de una función con integrable con soporte compacto nunca es constante.

2.3. Interpretación de $\phi\left(\frac{d}{dx}\right)$ vía teorema espectral

Otra manera de abordar el problema es considerar el operador adjunto no acotado $P : D(P) \to L^2(\mathbb{R})$, $P = i\frac{d}{dx}$ con $D(P)$ el espacio de Schwartz y utilizar el teorema espectral. La proyección que diagonaliza el operador es la transformada de Fourier (ver [19], pag. 229), luego para $\psi \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ es natural definir

$$\psi\left(-i\frac{d}{dx}\right) f(x) := \mathcal{F}^{-1}\left(\psi\mathcal{F}(f)\right)(x)\,. \tag{2.3.1}$$

El siguiente teorema es el recíproco de la proposición 2.2.1 y corresponde al teorema 19.3 en [23].

Teorema 2.3.1 (Paley-Wiener). *Sea f una función entera de tipo exponencial τ cuya restricción a $\mathbb{R}$ esta en $L^2(\mathbb{R})$. Entonces existe $F \in L^2(-\tau,\tau)$ tal que:*

$$f(z) = \int_{-\tau}^{\tau} F(t)e^{itz}dt\,.$$

El teorema anterior señala que una función entera de tipo exponencial e integrable es la transformada inversa de Fourier de una función integrable con soporte compacto. Luego, si f es una función entera de tipo exponencial se tiene que $\mathcal{F}^{-1}(f)$ tiene soporte compacto y por lo tanto podemos aplicar la ecuación 1.1.35 y el teorema de inversión de la transformada de Fourier

$$\begin{aligned} f(x) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f))(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{P}\left(\delta_0(\xi)\mathcal{F}^{-1}(f)(-\eta)\right)(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{P}\left(\delta_0(\xi)\mathcal{F}(f)(\eta)\right)(x). \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Luego, por el teorema 2.1.5 y definiendo $\phi(z) = \psi(-iz)$

$$
\begin{aligned}
\phi\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) &= \mathcal{P}\left(\phi(\zeta)\delta_0(\xi)\mathcal{F}(f)(\eta)\right)(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\langle \delta_0(\xi)\mathcal{F}(f)(\eta), e^{\zeta x}\phi(\zeta)\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{i\eta x}\phi(i\eta)\mathcal{F}(f)(\eta)d\eta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{i\eta x}\psi(\eta)\mathcal{F}(f)(\eta)d\eta = \mathcal{F}^{-1}(\psi\mathcal{F}(f)).
\end{aligned} \tag{2.3.3}
$$

Por lo tanto, la interpretación del simbolo $\phi(d/dx)$ dada por la ecuación 2.3.1 coincide con el desarrollado en las secciones anteriores para funciones enteras acotadas. La solución de la ecuación $\mathcal{F}^{-1}(\psi\mathcal{F}(f))(x) = g(x)$ la podemos encontrar inviertiendo la transformada de Fourier

$$
f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(g)}{\psi}\right)(x). \tag{2.3.4}
$$

La dificultad de este método radica en cómo integrar 2.3.4 cuando ψ tiene ceros en el eje real, dificultad que se evita en 2.1.19 por la flexibilidad que existe para escoger la medida d_g, de manera que el camino de integración no pase por ningún cero.

Ejemplo 2.3.2. Veremos un caso sencillo en que la dificultad mencionada en el párrafo anterior no aparece. Volvamos a estudiar el ejemplo 2.2.1 con el nuevo método. El símbolo utilizado en ese ejemplo es $\phi(z) = 2z\cosh z$, luego la función correspondiente será $\psi(x) = 2ix\cos x$. Si utilizamos $g(x) = \cos x$ su transformada de Fourier es $\sqrt{2\pi}(\delta_1 + \delta_{-1})/2$, luego por 2.3.4 tenemos:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int \frac{\delta(k-1)+\delta(k-1)}{4ik\cos k} e^{ikx} dk \\
&= \frac{e^{ix}}{4i\cos 1} - \frac{e^{-ix}}{4i\cos 1} = \frac{\sin x}{2\cos 1},
\end{aligned} \tag{2.3.5}
$$

misma solución que teníamos antes.

Ejemplo 2.3.3. Consideremos el problema de resolver la ecuación del calor en $\mathbb{R}$ con condición inicial

$$\begin{cases} \partial_t f(x,t) - \partial_x^2 f(x,t) = 0, \quad t > 0 \\ f(x,0) = g(x) \end{cases}. \tag{2.3.6}$$

Intuitivamente, si pensamos en el operador ∂_x^2 como un número, la ecuación 2.3.6 se vuelve una ecuación diferencial ordinaria de primer orden cuya solución es

$$f(x,t) = e^{t\partial_x^2} g(x)\,. \tag{2.3.7}$$

Luego la solución viene dada por 2.3.1

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-tk^2} \mathcal{F}(g)(k) e^{ikx} dk\,. \tag{2.3.8}$$

Si g es tal que vale el teorema de convolución, entonces

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}(e^{-tk^2}) * g = \frac{e^{-x^2/4t}}{2\sqrt{\pi t}} * g \tag{2.3.9}$$

Ahora sea $g = H$ es la función escalón de Heaviside, podemos pensarla como una distribución en $\mathcal{S}'$, el dual del espacio de Schwartz (notemos que $e^{-tk^2} \in \mathcal{S}$), luego el teorema de convolución puede aplicarse [19] y la solución es:

$$f(x,t) = \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} * H(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-(x-y)^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} dy = \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} \frac{e^{u^2}}{\sqrt{\pi}} du. \tag{2.3.10}$$

Notemos que $e^{x^2/4t}/\sqrt{4\pi t}$ corresponde al núcleo de la ecuación del calor. Además, la solución corresponde con la intuición física pues tiende a $1/2$ cuando t tiende a infinito. Si intentamos interpretar la ecuación 2.3.7 con $g = H$ como hemos hecho en las otras secciones, es decir, como en el teorema 2.1.1 nos encontramos en un problema, pues la solución 2.3.10 es única pero

$$\frac{e^{x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} * H \neq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} H(x)\,, \tag{2.3.11}$$

pues el lado derecho es igual a H más una distribución con soporte en cero, por lo que vale cero en todo el semi eje negativo y no puede converger a $1/2$. El problema radica en que el método que estamos usando solo funciona para funciones enteras de tipo exponencial. En tal caso, notemos que:

$$e^{tz^2} = \int e^{-zx} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} dx\,. \tag{2.3.12}$$

Luego, por el cálculo 2.2.12 (que sigue siendo válido para $u \in \mathcal{S}$ pues el rápido decaimiento de u asegura la integrabilidad), vemos que

$$f(x,t) = e^{t\partial_x^2} g(x) = e^{-x^2/4t}\sqrt{4\pi t} * g, \tag{2.3.13}$$

por lo que ambos métodos coinciden en este caso.

2.4. Problemas con valores iniciales

Consideremos ahora problemas con valores iniciales. Como veremos a continuación, este problema esta íntimamente relacionado con los ceros de la función entera que consideremos como símbolo. Para comenzar, supongamos que ϕ tiene N ceros, contados incluyendo su multiplicidad, y estudiemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \phi\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) = g(x), & g \in Exp \\ \frac{d^{n-1} f(0)}{dx^{n-1}} = c_n & n = 1, \ldots, N \end{cases} \tag{2.4.1}$$

Comencemos viendo algunos ejemplos.

Ejemplo 2.4.1. Supongamos que ϕ tiene sólo un cero de multiplicidad 1 al que llamaremos ζ. Por el teorema 2.1.5 sabemos que existe al menos una solución (de tipo exponencial) a la primera parte del sistema 2.4.1, a la que llamaremos h. Por el teorema 2.1.6, para cualquier número complejo a la función $ae^{\zeta x}$ es solución de la ecuación homogenea, por lo que la función $f(x) = h(x) + ae^{\zeta x}$ también es solución de la primera parte del sistema. Escogiendo $a = c_1 - h(0)$, entonces f soluciona el sistema 2.4.1. Supongamos que f^* también soluciona el sistema. Luego $f - f^*$ es solución de la ecuación homogenea, luego por el teorema 2.1.8 se tiene que

$$f(x) - f^*(x) = Ce^{\zeta x},$$

para alguna constante C. Evaluando en cero se tiene que $C = c_1 - c_1 = 0$, por lo que la solución f es única.

Ahora supongamos que el cero ζ tiene multiplicidad 2, de tal manera que la función $(a + bx)e^{\zeta x}$ es solución de la ecuación homogenea para a y b números complejos. Repitiendo el proceso anterior y manteniendo la notación, vemos que escogiendo $a = c_1 - h(0)$ y $b = c_2 - \zeta(c_1 - h(0)) - h'(0)$, la función f soluciona el sistema. Nuevamente, suponiendo que existe otra solución f^*, entonces

$$f(x) - f^*(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\zeta x},$$

con C_1 y C_2 constantes. La condición $f(0) = f^*(0) = c_1$ implica que $C_1 = 0$, mientras que $f'(0) = f^{*\prime}(0) = c_2$ implica que C_2 es cero, por lo que la solución es única.

Finalmente, supongamos que tenemos un solo cero de multiplicidad K. Entonces tenemos la solución

$$f(x) = h(x) + p(x)e^{\zeta x},$$

donde p(x) es un polinomio de grado estrictamente menor a K. Las derivadas de f

son

$$f^{(n)}(x) = h^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n} e^{\zeta x} \binom{n}{j} p^{(n-j)}(x)\zeta^j.$$

Si $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, entonces, para $k \leq n$ se tiene

$$p^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(k+j)!}{j!} a_{k+j} x^j.$$

Juntando todo esto, vemos que

$$f^{(n)}(0) = h^{(n)}(0) + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i! a_i \zeta^{n-1} = c_{n+1} \qquad n = 0, \ldots, K-1.$$

Éste sistema es fácil de resolver pues para $n = 0$ solo aparece a_0 y podemos despejarla fácilmente. Para $n = 1$ aparecen a_0 (que ya conocemos) y a_1, luego tambien la podemos despejar, como en el caso anterior en que supusimos un cero de multiplicidad 2. Continuando vemos que podemos encontrar cada a_j en términos de a_i con $i < j$, por lo que la solución siempre existe. El mismo argumento que usamos en el caso anterior muestra que la solución es única.

Ejemplo 2.4.2. Supongamos que ϕ es una función entera con dos ceros, ζ_1 y ζ_2, cada uno con multiplicidad 1. Repitiendo el proceso visto en el ejemplo anterior, vemos que la función $f(x) = h(x) + a_1 e^{\zeta_1 x} + a_2 e^{\zeta_2 x}$ es una solución de la primera parte del sistema 2.4.1 para cualesquiera números complejos a_1 y a_2, siempre que h tambien sea solución. Imponiendo las condiciones iniciales, vemos que las constantes a_1 y a_2 deben satisfacer la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - h(0) \\ c_2 - h'(0) \end{pmatrix}. \tag{2.4.2}$$

Sea A la matriz cuadrada que aparece en la ecuación anterior. Se tiene que $\det(A) = \zeta_2 - \zeta_1$ y este siempre es distinto de cero (ya que por hipótesis los ceros son distintos entre si), luego el sistema siempre tiene solución y ésta es única.

Ahora supongamos que ϕ tiene tres ceros, todos con multiplicidad uno. Procediendo igual que antes, llegamos a las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_1^2 & \zeta_2^2 & \zeta_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - h(0) \\ c_2 - h'(0) \\ c_3 - h''(0) \end{pmatrix}. \tag{2.4.3}$$

El determinante de la matriz es

$$\begin{aligned} \det A &= \zeta_2\zeta_3^2 - \zeta_2^2\zeta_3 - (\zeta_1\zeta_3^2 - \zeta_1^2\zeta_3) + \zeta_1\zeta_2^2 - \zeta_1^2\zeta_2 \\ &= (\zeta_3 - \zeta_2)(\zeta_3 - \zeta_1)(\zeta_2 - \zeta_1) \neq 0 \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

pues estamos suponiendo que todos los ceros son diferentes. Luego la solución existe y es única.

Si ahora suponemos que existen n ceros $\{\zeta_i\}_{i=1}^n$, cada uno con multiplicad 1, y procedemos igual que en los casos anteriores, llegamos al siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_n \\ \zeta_1^2 & \zeta_2^2 & \dots & \zeta_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^{n-1} & \zeta_2^{n-1} & \dots & \zeta_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - h(0) \\ c_2 - h'(0) \\ c_3 - h''(0) \\ \vdots \\ c_n - h^{(n-1)}(0) \end{pmatrix}. \tag{2.4.5}$$

La matriz cuadrada que aparece en la ecuación anterior se conoce como matriz de Vandermonde, y su determinante es (ver [13])

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_n \\ \zeta_1^2 & \zeta_2^2 & \dots & \zeta_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^{n-1} & \zeta_2^{n-1} & \dots & \zeta_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n} (\zeta_j - \zeta_i). \tag{2.4.6}$$

De aquí es claro que si todos los ceros son diferentes, el determinante será distinto de cero, por lo tanto el sistema nuevamente tiene solución y ésta es única.

El caso más general es una combinación de los dos ejemplos anteriores. Es claro que si el número de ceros de ϕ contados incluyendo su multiplicidad es N, entonces a una solución cualquiera de la primera parte del sistema 2.4.1 se le pueden añadir soluciones de la ecuación homogenea con N constantes arbitrarias, pero no es evidente que estas constantes se puedan elegir de manera que el sistema siempre tenga solución y esta sea única, como en los ejemplos anteriores. Usando un enfoque distinto, basado en la transformada de Laplace, en [12] se prueba que el sistema 2.4.1 siempre tiene solución y que esta es única.

Ahora pasaremos a estudiar el caso en que ϕ es una función entera con infinitos ceros. Es de esperarse, a raíz de los ejemplos anteriores, que sean necesarias infinitas condiciones iniciales para que el sistema 2.4.1 tenga solución única, lo cual implica conocer $f^{(n)}(0)$ para todo n natural. Sin embargo, al estar trabajando con funciones analíticas, esto es lo mismo que conocer la solución de antemano ya que f esta completamente determinada por su serie de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{2.4.7}$$

Otra opción es considerar sistemas de la forma

$$\begin{cases} \phi\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) = g(x), \quad g \in Exp \\ f|_I = F \end{cases} \tag{2.4.8}$$

con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Sin embargo, este problema es nuevamente redundante, pues si f es entera podemos conocer su serie de Taylor conociendo a f en cualquier intervalo. Luego, para estudiar problemas con valor inicial para simbolos con infinitos ceros debemos buscar soluciones fuera de Exp. Ya vimos en el ejemplo 2.2.2 que si $\phi(z) = e^z - 1$, entonces las soluciones a la ecuación homogénea $\phi(\frac{d}{dx})f(x) = 0$ serán todas las funciones en Exp cuya restricción a la recta real tenga periodo 1, aunque la ecuación 2.2.7 tenga sentido en muchos otros espacios de funciones. Además, vimos que si admitimos como solución sumas infinitas en 2.2.8 podíamos obtener funciones con período 1 en $L^2_{loc}(\mathbb{R})$. En el siguiente ejemplo veremos que aceptando soluciones en la clausura en L^2 de las soluciones obtenidas con el teorema 2.1.26, entonces para todo intervalo I el sistema 2.4.8, con $g = 0$, siempre tiene solución pero esta nunca es única.

Ejemplo 2.4.3. Para cada m número natural, consideremos $r_m \in \mathbb{R}$ tal que $m < r_m < 2m$ y $r_m/r_{m'} \notin \mathbb{Q}$ para cada par $m \neq m'$. Consideremos los conjuntos

$$Z_m = \{r_m n \,:\, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$$

y

$$Z = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} Z_m .$$

Entonces para todo $k > 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{\zeta \in iZ} \frac{1}{|\zeta|^k} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}} \frac{1}{|ir_m n|^k} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|r_m|^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{|n|^k} \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|m|^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{|n|^k} .
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Luego, por la ecuación 9.2 y la proposición 9.4 del capitulo VII de [24], la función

$$\phi(z) = \prod_{\zeta \in iZ} \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) e^{z/\zeta} \tag{2.4.10}$$

es una función entera de tipo exponencial con ceros de multiplicidad 1 en cada $\zeta \in iZ$ y solamente allí. Luego, por el teorema 2.1.26 las soluciones de la ecuación $\phi(\frac{d}{dx})f(x) = 0$ son el conjunto dado por

$$\operatorname{Span} \bigcup_{z \in Z} \{e^{izx}\}, \tag{2.4.11}$$

es decir, todas las combinaciones lineales finitas de elementos de la forma e^{izx} con $z \in Z$. Sin embargo, vamos a suponer tiene sentido tomar límites justo como en el ejemplo 2.2.2. Entonces veremos que para cualquier intervalo I y $F \in L^2(I)$ el problema 2.4.8, con $g = 0$, siempre tiene solución, pero para ningún intervalo tal solución es única. Vamos a probar que el conjunto $\{e^{izx}\}_{z \in Z}$ es denso en $L^2(I)$ para todo intervalo I. Para esto utilizaremos un resultado clásico de Levinson sobre la completitud de este tipo de conjuntos, de la forma en que se encuentra en [20], teorema 8.

Teorema 2.4.4. *El conjunto $\{e^{i\lambda_n x}\}$ es denso en $L^p(I)$, con I un intervalo de largo $2\pi D$ si*

$$\limsup_{r \to \infty} \left\{ \int_1^r \frac{\Lambda(t) - 2Dt}{t} dt + \frac{\log r}{q} \right\} > -\infty, \tag{2.4.12}$$

donde $\Lambda(t)$ es la cardinalidad del conjunto de los λ_n tales que $|\lambda_n| < t$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Continuando con el ejemplo, vamos a mostrar que para toda $C > 0$ existe $R > 0$ tal que, si $r > R$, se tiene que

$$\int_1^r \frac{\Lambda_Z(t)}{t} dt \geq Cr, \tag{2.4.13}$$

donde Λ_Z cuenta elementos en Z, lo que demuestra 2.4.12. Para esto, notemos primero que si $|nr_m| < r$ entonces $|n| < r/r_m$, luego

$$\Lambda_{Z_m}(r) \geq \frac{2r}{r_m} - 2\,. \tag{2.4.14}$$

Luego, como $r_m > 1$ para toda m se tiene que, para $r > r_m$

$$\int_1^r \frac{\Lambda_{Z_m}(t)}{t}dt = \int_{r_m}^r \frac{\Lambda_{Z_m}(t)}{t}dt \geq \int_{r_m}^r \left(\frac{2}{r_m} - \frac{2}{t}\right) dt = 2\left(\frac{r}{r_m} - \log\left(\frac{r}{r_m}\right)\right). \tag{2.4.15}$$

Como $\log x \leq x/e$ para toda $x > 0$ podemos concluir que

$$\int_1^r \frac{\Lambda_{Z_m}(t)}{t}dt \geq 2\left(\frac{r}{r_m} - 1 - \frac{r}{er_m}\right) = \left(2 - \frac{2}{e}\right)\frac{r}{r_m} - 2 \geq \left(2 - \frac{2}{e}\right)\frac{r}{m} - 2\,. \tag{2.4.16}$$

Por otro lado, notemos que

$$\Lambda_Z(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Lambda_{Z_m}(t)\,. \tag{2.4.17}$$

Como $m < r_m$, para todo t la serie anterior tiene una cantidad finita de términos. Luego conmuta con la integral y tenemos

$$\int_1^r \frac{\Lambda_Z(t)}{t}dt = \int_1^r \frac{\sum_{m=1}^{\infty}\Lambda_{Z_m}(t)}{t}dt = \sum_{m=1}^{\infty}\int_1^r \frac{\Lambda_{Z_m}(t)}{t}dt\,, \tag{2.4.18}$$

por lo que para todo $M \in \mathbb{N}$ y $r > r_M$ se cumple que

$$\int_1^r \frac{\Lambda_Z(t)}{t}dt \geq \sum_{m=1}^{M}\int_1^r \frac{\Lambda_{Z_m}(t)}{t}dt \geq (1 - e^{-1})\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m} - 2M\,. \tag{2.4.19}$$

Como la serie armonica diverge, 2.4.13 queda demostrada. Luego siempre encontraremos soluciones al sistema 2.4.8 con $g = 0$. Tomando un intervalo J más grande, las soluciones de la ecuación homogenea siguen siendo densas en $L^2(J)$, por lo que podemos extender F a J de varias maneras y todas seguiran siendo solución, lo que demuestra que hay infinitas soluciones.

Definición 2.4.5. Sea ϕ una función entera y Z sus ceros distintos de cero. El exponente de convergencia de los ceros de ϕ es el ínfimo de los $\kappa > 0$ tales que $\sum_{z\in Z} |z|^{-\kappa} < \infty$.

El ejemplo anterior nos dice que, restrigiendonos a cualquier intervalo finito I, cualquier función en $L^2(I)$ esta tan cerca como queramos de una solución de la ecuación $\phi(\frac{d}{dx})f(x) = 0$ en Exp. Esto se debe al crecimiento de la función Λ_Z, por lo que podemos ver una relación entre la densidad de las soluciones y la cantidad de ceros de las función. La función ϕ usada en el ejemplo tiene exponente de convergencia 1, pero veremos que el fenómeno se repite para funciones con exponente de convergencia mayor. Para ello utilizaremos el lema 2.5.7 de [2].

Lema 2.4.6. *Sea $\alpha > 0$, ϕ una función entera, Z el conjunto de sus ceros (sin pérdida de generalidad, supondremos que $0 \notin Z$) y Λ la función que cuenta sus ceros. Entonces la serie*

$$\sum_{\zeta\in Z} \frac{1}{|\zeta|^\alpha} \tag{2.4.20}$$

diverge si y solo si la integral

$$\int_0^\infty \frac{\Lambda(t)}{t^{\alpha+1}} dt \tag{2.4.21}$$

diverge.

Teorema 2.4.7. *Sea ϕ una función entera cuyo exponente de convergencia es estrictamente mayor que 1 y cuyas raíces son imaginarias. Entonces las soluciones de* *la ecuación $\phi(\frac{d}{dx})f = 0$ en Exp son densas en $L^2(I)$ para cualquier intervalo acotado I.*

Demostración. Sin perdida de generalidad, supongamos que cero no es una raíz de ϕ. Las soluciones de la ecuación homogenea son combinaciones lineales de funciones de la forma $e^{\zeta x}$, con $\zeta \in Z$. Luego basta probar que $\limsup_{r\to\infty} r^{-1}\int_0^r t^{-1}\Lambda(t)dt = \infty$ y por el teorema de Levinson obtendremos el resultado. Supongamos que éste último límite es falso. Entonces existe $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{r}\int_0^r \frac{\Lambda(t)}{t}dt \leq C. \tag{2.4.22}$$

Además, como Λ es una función monótonamente creciente, se cumple que

$$\Lambda(t) = \Lambda(t)\log e = \Lambda(t)\int_t^{et}\frac{dx}{x} \leq \int_t^{et}\frac{\Lambda(x)}{x}dx \leq Cet. \tag{2.4.23}$$

Sin embargo, como el exponente de convergencia de ϕ es mayor que 1, el lema 2.4.6 nos dice que para todo $k > 1$ se tiene que

$$\int_0^\infty \frac{\Lambda(t)}{t^{k+1}}dt = \infty\,. \tag{2.4.24}$$

Notemos que como ζ no es cero de ϕ, Λ es cero en un intervalo que comienza en cero, por lo que la divergencia es en el infinito. Esto nos lleva a una contradicción, pues por otro lado tenemos

$$\int_1^\infty \frac{Cet}{t^{k+1}}dt = Ce\int_1^\infty t^{-k}dt = \frac{Ce}{k-1}, \tag{2.4.25}$$

para $k > 1$. □

Para finalizar veamos un ejemplo de un sistema como el mencionado en 2.4.8.

Ejemplo 2.4.8. Consideremos la función entera $\phi(z) = ze^{-z} + 1$. Luego la ecuación 2.1.1 se reduce a

$$f'(x-1) + f(x) = g(x)\,, \tag{2.4.26}$$

una ecuación diferencial con retardo como las estudiadas en la sección 2.2.1. Los ceros de ϕ están dados por las distintas ramas de la función multievaluada W de Lambert, que se define como la inversa de la función $f(W) = We^W$ (ver [7]). Entonces los ceros de ϕ son $\zeta_k = -W_k(1)$, con k entero y W_k las distintas ramas de la función. Como se explica en [14], para que la ecuación anterior tenga solución única para $x > 0$ en $C^1([0,\infty])$, debe especificarse una condición inicial (continua) para f en $[-1,0]$. Los ceros de ϕ son infinitos, lo que calza con lo anterior debido a que un conjunto finito de condiciones para f y sus derivadas en cero no impondrán unicidad a la solución. Las soluciones en Exp estan dadas por

$$f(x) = \mathcal{P}\left(\frac{d_g}{\phi}\right) + \sum_{\zeta_k \in \mathcal{Z}(\phi)} c_k e^{\zeta_k x}\,, \tag{2.4.27}$$

donde la serie es finita y corresponde a las soluciones de la ecuación homogénea.

Apéndice A

A.1. Teoría de Distribuciones

A.1.1. Espacios Vectoriales Topológicos

Revisaremos algunas topologías que se les puede dar a algunos espacios vectoriales no normados, que generalizan los conceptos de espacios de Hilbert y de Banach. Para mas detalles consultar [25]

Definición A.1.1. Un espacio de Fréchet es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ equipado con una topología generada por una familia numerable de seminormas $\{||\cdot||_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que separan puntos, es decir, si se cumple que $||v||_i = 0$ para todo i en $\mathbb{N}$, entonces $v = 0$, y que es completo con la siguiente distancia inducida por las seminormas:

$$d(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-k}||x-y||_k}{1+||x-y||_k}. \tag{A.1.1}$$

Notemos que cualquier espacio de Banach es un espacio de Fréchet, pues una norma es una seminorma que separa puntos.

Ejemplo A.1.2. El conjunto de funciones enteras es un espacio de Fréchet con la familia de seminormas

$$||f||_n = \sup\{|f(z)| \; : \; |z| < n\} \qquad n \in \mathbb{N}\,. \tag{A.1.2}$$

La topología de un espacio de Fréchet es más complicada que la de uno de Banach. Por ejemplo, el teorema de la función inversa no es válido en general para espacios de Fréchet. Sin embargo, otros resultados como el teorema de Hahn-Banach o el de la función abierta siguen siendo válidos [25].

Definición A.1.3. Diremos que un espacio vectorial V es un espacio LF si V puede obtener como el límite inductivo de una cantidad contable de espacios de Fréchet, es decir, existe una secuencia $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de espacios de Fréchet tales que, para toda n, $V_n \subset V_{n+1}$, $V = \cup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ y la topología inducidad por V_{n+1} en V_n es idéntica a la topología de V_n. La topología de V queda definida al fijar que un conjunto convexo U es una vecindad de cero si y solo si $U \cap V_n$ es vecindad de cero para todo n.

A.1.2. Distribuciones

Ahora haremos una breve introduccón al tema de las distribuciones, centrándonos en aquellos tópicos que se utilizaron a lo largo de la tesis. En lo que sigue, α denotara un multi-índice, es decir, una $n-$ tupla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y se define

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \qquad \partial^\alpha \phi = \frac{\partial^{|\alpha|}\phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}. \tag{A.1.3}$$

Las distribuciones son funcionales lineales en el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto $C_0^\infty(\Omega)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto, que cumplen cierta condición de continuidad. Siguiendo a Hörmander, indicaremos cúal es ésta condición y más adelante indicaremos qué topología en $C_0^\infty(\Omega)$ convierte al espacio de distribuciones en el dual topológico de éste. Los detalles pueden encontrarse en [15]

Definición A.1.4. Sea $\Omega \subset R^n$ abierto. Una distribución d es un funciónal lineal del espacio de funciones infinitamente diferenciables en Ω con soporte compacto contenido en Ω tal que para todo $K \subset \Omega$ compacto existen constantes C y k tales que

$$< d, \varphi >:= d(\varphi) \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \qquad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{A.1.4}$$

Si k puede escojerse independientemente de K, diremos que d tiene orden finito y el orden de d sera el menor de tales k.

Revisemos algunos ejemplos.

Ejemplo A.1.5. Sea μ una medida en Ω. Entonces $\varphi \to \int \varphi d\mu$ define un funcional lineal en $C_0^\infty(\Omega)$. Ademas, para todo $K \subset \Omega$ compacto

$$| < \mu, \varphi > | = \left| \int_K \varphi \, d\mu \right| \leq \mu(K) \sup_{x \in K} |\varphi(x)|, \qquad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{A.1.5}$$

por lo que toda medida en Ω define una distribución de orden cero. De la misma manera, si f es una función localmente integrable, es decir, integrable sobre cualquier conjunto compacto, entonces define una distribución de orden cero, que tambien llamaremos f, mediante

$$< f, \varphi >= \int f\varphi. \tag{A.1.6}$$

Notemos que si $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, $\sup_{x \in K} |\partial^\alpha f|$, con α recorriendo todos los multi-índices, define una familia de seminormas en $C_0^\infty(K)$ que separa puntos y en la que la convergencia implica que f y todas sus derivadas parciales convergen uniformemente. Como una sucesión de funciones infinítamente diferenciables converge uniformemente a una función infinítamente diferenciable, este espacio es completo, luego es un espacio de Fréchet. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, existe una sucesión de compactos K_n con $K_n \subset K_{n+1}$ y $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Luego podemos formar una sucesión $\{C_0^\infty(K_n)\}$ de espacios de Fréchet tales que $C_0^\infty(\Omega) = \cup_n C_0^\infty(K_n)$ y que cumplen todas las condiciones de la definición A.1.3. Luego el espacio de funciones infinitamente diferenciable con soporte compacto contenido en un abierto Ω es un espacio LF. El espacio de distribuciones es el dual topológico de este espacio con la topología señalada anteriormente. La ecuación A.1.5 asegura la continuidad, luego para cualquier distribución d se cumple que para toda sucesión $\{\varphi_n\}$ que converge a φ en $C_0^\infty(\Omega)$, es decir, existe K compacto con supp φ_n, supp $\varphi \subset K$ y $\partial^\alpha \varphi_n \to \partial^\alpha \varphi$ uniformemente en K para todo multindice α, se tiene $< d, \varphi_n > \to < d, \varphi >$ en $\mathbb{C}$. Llamaremos $\mathcal{D}(\Omega)$ al conjunto de funciones infinítamente diferenciables con esta topología y $\mathcal{D}'(\Omega)$ a su dual topológico (es decir, las distribuciones). A continuación introduciremos algunas operaciones que se pueden realizar con distribuciones.

Definición A.1.6. Sea f una función infinitamente diferenciable y d una distribución. Definimos la distribución fd mediante $< fd, \varphi >=< d, f\varphi >$

Proposición A.1.1. *La multiplicación de funciones por distribuciones es asociativa.*

Demostración. Sean f y g funciones infinitamente diferenciables y d una distribución. Entonces

$$< (fg)d, \varphi >=< d, (fg)\varphi >=< d, g(f\varphi) >=< gd, f\varphi >=< f(gd), \varphi > .$$

□

A continuación veremos como diferenciar una distribución.

Definición A.1.7. Sea d una distribución. Se define su derivada d' mediante la formula:

$$\left\langle \frac{\partial d}{\partial x_i}, \phi \right\rangle = -\left\langle d, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle. \tag{A.1.7}$$

Una consecuencia inmediata de esta definición es que toda distribución es infinitamente diferenciable.

Soporte de una distribución

La definición de soporte de una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ puede extenderse para distribuciones. Para ello introduciremos la siguiente notación.

Definición A.1.8. Sea $X \subset \Omega$ un abierto y $d \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribución. Definimos la restricción de d a X como la distribución $d_X \in \mathcal{D}'(X)$ definida por $d_X(\phi) = d(\phi)$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(X)$.

También necesitaremos el siguiente resultado que puede encontrarse en [15], teorema 2.2.1.

Teorema A.1.9. *Sea $d \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribución que cumple que cada $x \in \Omega$ tiene una vencidad tal que la restricción de d a esa vecindad es cero. Entonces $d = 0$.*

Luego resulta natural extender la definición de soporte como sigue.

Definición A.1.10. Sea $d \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Definimos el soporte de d, $\operatorname{supp} d$ como el conjunto de puntos en Ω que no tienen una vecindad abierta en la que la restricción de d sea cero.

Por definición, el complemento de $\operatorname{supp} d$ es el conjunto de puntos con una vecindad en la que la restrición de d se anula, luego por el teorema A.1.9 se cumple que

$d_{\Omega \setminus \operatorname{supp} d}$ es cero. Llamaremos $\mathcal{D}'_0(\Omega)$ al conjunto de distribuciones en Ω con soporte compacto. Notemos que si $d \in \mathcal{D}'_0(\Omega)$ y $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, podemos definir $d(\phi) = d(\chi\phi)$ donde χ una función infinitamente diferenciable con soporte compacto que vale 1 en $\operatorname{supp} \phi$.

Ejemplo A.1.11. Regresemos al ejemplo A.1.5. Sea f una función localmente integrable. Entonces su distribución asociada tiene soporte igual al soporte de f. En particular, si f tiene soporte compacto, su distribución asociada tiene soporte compacto.

Ejemplo A.1.12. Consideremos la distribución delta de Dirac definida como $< \delta, \phi >= \phi(0)$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Luego el soporte de δ es $\{0\}$.

Referencias

[1] N. Barnaby, T. Biswas and J.M. Cline, p-adic inflation. J. High Energy Physics, 2007, no. 04, Paper 056, 35 pp.

[2] R.P. Boas, Entire Functions. Academic Press, New York 1954.

[3] G. Calcagni, M. Montobbio and G. Nardelli, Route to nonlocal cosmology. Physics Review D 76 (2007), 126001

[4] M. Carlsson, H.Prado, E.G. Reyes, On Differential equations with infinitely many derivatives. Por aparecer en J. Differential Equations.

[5] R.D. Carmichael, Linear Differential Equations of Infinite Order. Bulletin AMS 42 (1936), 193–218.

[6] D.L. Cohn, Measure Theory. Birkhäuser, 1980.

[7] Corless, R.; Gonnet, G.; Hare, D.; Jeffrey, D.; Knuth, Donald (1996). .On the Lambert W function". Advances in Computational Mathematics (Berlin, New York: Springer-Verlag)

[8] H.T. Davis, The Theory of Linear Operators. The Princia Press, Indiana (1936).

[9] S. B. Damelin and A. J. Devaney, Local Paley-Wiener theorems for functions analytic on unit spheres. Inverse Problems 23 (2007), no. 2, 463–474.

[10] P. Górka, H. Prado and E.G. Reyes, Nonlinear equations with infinitely many derivatives. Complex Analysis and Operator Theory, 5 (2011), 313–323.

[11] P. Górka, H. Prado and E.G. Reyes, On a general class of nonlocal equations. Annales Henri Poincare 14, (2013)947-966.

[12] P. Górka, H. Prado and E.G. Reyes, The initial value problem for ordinary equations with infinitely many derivatives. Class. Quantum Gravit., 29, 065017 (2012)

[13] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products. 14.31, Elsevier, 2007.

[14] J. Hale, Introduction to Functional Differential Equations. Springer-Verlag, New York.

[15] L. Hörmander, The analysis of linear partial differential operators I. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[16] J.D. Jackson, Classical Electrodynamics. 2nd, Ed. (J. Wiley & Sons).

[17] Kammler, David (2000), A First Course in Fourier Analysis, Prentice Hall,

[18] N. Moeller and B. Zwiebach, Dynamics with infinitely many time derivatives and rolling tachyons. J. High Energy Physics 2002, no. 10, Paper 34, 38 pp.

[19] M. Reed and B. Simon, Methods of Mathematical Physics. Volume I. Academis Press, 1975.

[20] R. M. Redheffer and R. M Young, Completeness and basis properties of complex exponentials. Trans. Amer. Math. Soc. 277, 93–111 (1983).

[21] J.F. Ritt, On a general class of linear homogeneous equations of infinite order with constant coefficients. Transactions American Mathematical Society 3 (1917), 27–49.

[22] L. A. Rubel, Entire and Meromorphic Functions. Springer-Verlag, New York, 1996.

[23] W. Rudin, Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, 1974.

[24] Saks, Stanisław, and Zygmund, Antoni. Analytic functions. Warszawa-Wrocław: Instytut Matematyczny Polskiej Akademi Nauk, 1952.

[25] F. Treves, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. Academic Press 1967.