UNIVERSIDAD DE CHILE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

ECUACIONES PARA SUPERFICIES DE RIEMANN CORRESPONDIENTES A CUBRIMIENTOS CÍCLICOS PRIMOS

por

Jaime Eduardo Pinto Doveris

Tesis para la obtención del grado de

Magíster en Ciencias Matemáticas

Directora de Tesis: Dra. Anita Rojas R.

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACION

TESIS DE MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato.

JAIME EDUARDO PINTO DOVERIS

Ha sido aprobada por la comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Matemáticas, el día 22 de Diciembre de 2011.

Director de Tesis:

Dr. Anita M. Rojas ....

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Luís Arenas-Carmona ....

Dra. Rubí E. Rodríguez ....

Agradecimientos

En lo personal, estoy muy agradecido de mucha gente que me ha acompañado y/o enseñado en mi vida como estudiante de Postgrado en Matemáticas. Siento que ha sido una gran experiencia haber sido parte del Magíster en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Chile. Esta experiencia me ha dado una gran motivación a seguir en este mundo de las Matemáticas, un mundo que pocos podemos comprender, incluso llegando al punto de amar esta ciencia y dedicarse a ella durante toda la vida.

En primer lugar, debo agradecer a mi familia por el gran apoyo que me han dado durante estos años como estudiante universitario, tanto en el Pregrado como en el Magíster, siempre deseando que tenga éxito en mis estudios. Mi padre siempre deseó que yo llegara más lejos que él en los estudios y siente un gran orgullo de que yo le haya cumplido ese deseo, lo cual me alegra bastante.

Además, agradezco a mis compañeros que han sido una gran compañía en mi vida, tanto en los estudios como en las relaciones personales. Siempre es importante encontrar alguien con quién compartir en la ardua pero hermosa vida del estudiante.

También quiero agradecer a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, CONICYT, por haberme otorgado la Beca para Estudios de Magíster en Chile en 2009. Gracias a esta beca, he podido realizar mi carrera en el Magíster en Ciencias Matemáticas sin ningún problema a nivel económico.

Finalmente, agradezco a todos los profesores que me brindaron sus conocimientos, enseñándome la belleza de las Matemáticas. En particular, deseo agradecer a mi Directora de Tesis, la profesora Anita Rojas. Ella ha sido un gran apoyo en esta tesis, mostrando paciencia, amabilidad y disposición conmigo, además de facilitarme todo el conocimiento necesario para salir adelante en este trabajo. Trabajar con Anita ha sido un gran placer, así como internarme en el mundo de la Geometría Compleja.

Índice general

Resumen

Uno de los problemas del estudio de Superficies de Riemann Compactas es el de buscar ecuaciones que las definan como curvas planas. Esta tesis estudia un método para encontrar ese tipo de ecuaciones para Superficies de Riemann Compactas de género mayor o igual a 2 que tengan acción de un grupo cíclico de tal forma que la superficie cociente sea isomorfa a la esfera de Riemann. Además, se desarrollan ejemplos concretos en los cuales se aplica dicho método.

Abstract

One of the problems in the study of Riemann Surfaces is to find equations that define them as affine plane curves. This thesis studies a method to find these equations for Compact Riemann Surfaces of genus greater or equal than two, having an action of a cyclic group such that the quotient surface is isomorphic to the Riemann Sphere. Several examples where the method is applied are developed.

Introducción

Una Superficie de Riemann X es una variedad compleja de dimensión 1 con un sistema de cartas compatibles. Existen varios ejemplos de estas superficies. Uno de los más comunes es el de las curvas planas afines suaves, que corresponden al lugar de ceros de un polinomio en dos variables con coeficientes en $\mathbb{C}$. Otro ejemplo son las curvas proyectivas suaves, es decir, clases de equivalencia de ceros de polinomios homogéneos en tres variables. Aparte de tener esa estructura compleja, las superficies de Riemann se pueden ver también como variedades reales diferenciables orientables de dimensión 2. Por ello, cuando la superficie es compacta, se sabe que, o bien, es homeomorfa (como espacio topológico) a una esfera, o bien, a una suma conexa de toros, por lo que se puede hablar del *género* de una superficie de Riemann compacta. Además, el grupo de automorfismos de una superficie de Riemann, cuando ésta tiene género g mayor o igual a 2, tiene orden finito, acotado por $84(g-1)$ según el Teorema de Hurwitz (ver en [**1**], Teorema IV.1.3).

Un problema actual en la Teoría de Superficies de Riemann Compactas es el de cómo expresarlas mediante ecuaciones explícitas, y específicamente como una curva plana afín. Es oportuno observar que en caso de que ésta tenga singularidades, su normalización corresponderá a la superficie original.

Esta tesis se basa en un artículo de Aaron Wootton que estudia el caso en el que la superficie en cuestión es de género mayor o igual a 2 y tiene un grupo de automorfismos cíclico de orden primo tal que la superficie cociente respectiva es isomorfa a $\widehat{\mathbb{C}}$. En dicho trabajo, se especifica para tal tipo de superficies, un método para encontrar una ecuación que defina a la superficie como una curva plana afín. El estudio en dicho trabajo requiere no sólo de la teoría de Variable Compleja que es necesaria para el tema de las superficies de Riemann, sino que también requiere Teoría de Grupos, especialmente al estudiar los grupos de automorfismos de las superficies y las superficies cocientes que originan dichos grupos, proceso necesario para finalmente encontrar una ecuación que la describa.

El interés de este trabajo de tésis es estudiar el trabajo de Wootton, explicarlo y aplicarlo para encontrar ecuaciones planas para diferentes superficies. En particular, en la sección de Aplicaciónes, desarrollamos una ecuación para la curva de Bring, que de hecho corrige la ecuación encontrada por Wootton en su artículo, la cual no corresponde a tal curva. Finalmente, y en búsqueda de una generalización, hacemos algunas consideraciones con respecto al caso de grupos cíclicos de orden no primo.

Esta tesis se divide en tres capítulos. En el primero, daremos conceptos básicos que usaremos para trabajar los siguientes capítulos, como el concepto de curvas planas afines, superficies hiperelípticas y el Teorema de Uniformización. En el Capítulo 2, expondremos el trabajo de Wootton mostrando los teoremas más importantes y útiles para el método de encontrar ecuaciones. En el Capítulo 3 mostraremos ejemplos concretos de superficies de Riemann a las cuales se puede aplicar dicho método, y obtener así ecuaciones planas para ellas. Finalmente, hacemos consideraciones para el caso no primo, mostrando una curva para la cual es posible encontrar una ecuación plana de la misma forma que en el caso primo.

Capítulo 1: Conceptos Básicos

El problema planteado en esta tesis es el de encontrar ecuaciones que definan a algunas superficies de Riemann dada ciertas condiciones especiales sobre su grupo de automorfismos. Aquí presentamos en esta introducción una motivación a este problema, que consiste en estudiar superficies definidas por cierto tipo de ecuaciones y explicamos cómo inspiran el problema anterioremente mencionado.

Recordemos que una Superficie de Riemann X es un espacio topológico conexo, Hausdorff, segundo contable y con una colección de homeomorfismos

$$A = \{\phi_i : U_i \to V_i, i \in I\},$$

con $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos en X y $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos en $\mathbb{C}$ tales que

$$\bigcup_{i\in I} U_i = X,$$

y si $i, j \in I$, o bién $U_i \cap U_j$ es vacío, ó bien

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$$

es holomorfa como función de variable compleja. La colección A se llama *Atlas complejo*.

1. Curvas Planas Afines Suaves

Primero recordamos la definición de una *curva plana afín suave*:

DEFINICIÓN 1.1. Sea $X \subseteq \mathbb{C}^2$ el lugar de ceros de un polinomio $f \in \mathbb{C}[x, y]$. Si f tiene ambas derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ nulas en un punto $p \in X$ decimos que X es *singular* en p. En caso contrario, decimos que f es *no singular* en p. En caso que f es no singular en todos los puntos de X decimos que f es *no singular* y que X es una *curva plana afín suave*.

El nombre de *curva plana afín suave* se debe a que si X es el lugar de ceros de un polinomio no singular en todos los puntos de X, entonces por el Teorema de la Función Implícita, X es localmente el gráfico de una función holomorfa $h : A \to \mathbb{C}$ con $A \subseteq \mathbb{C}$.

Se puede dotar de un atlas complejo a una curva plana afín suave X, usando el Teorema de la Función Implícita. Para ver la demostracion de eso, consultar en [**2**] (pág 11). Sin embargo, dependiendo del polinomio que defina a X, tal curva puede ser conexa o no. Por ejemplo, si X es definida por el polinomio $f(x,y) = (x+y)(x+y-1)$ entonces X es compuesto de dos rectas complejas que no se intersectan, luego no es conexo. Sin embargo, existe un caso en que una curva plana afín suave es conexa:

TEOREMA 1.1. *Sea X una curva plana afín suave definida por un polinomio $f \in \mathbb{C}[x,y]$ que es irreducible. Entonces X es conexo.*

Con esto, si X es curva plana afín suave definida por un polinomio irreducible, entonces X es superficie de Riemann.

Un caso especial de curvas planas afines suaves es el siguiente:

EJEMPLO 1.1. Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio en una variable no constante que no es cuadrado perfecto. Entonces $f \in \mathbb{C}[x,y]$ definido por $f(x,y) = y^2 - p(x)$ es irreducible. Además si p no tiene raíces múltiples, entonces f es no singular y su lugar de ceros X es una superficie de Riemann.

Demostración: Primero, debemos demostrar que f es irreducible. Para ello, usaremos el Lema de Gauss, demostrando que $f(x,y)$ que es irreducible en $\mathbb{C}(x)[y]$, pues es primitivo en x. Consideremos los cuerpos $K = \mathbb{C}(x)$ y $L = K(r)$ donde r es una raiz cuadrada de p. Es claro que la extensión $L|K$ es Galois de grado 2 y $Gal(L|K)$ es cíclico de orden 2, pues q no es cuadrado perfecto. Además $-r$ también es raiz cuadrada de q. Luego f es irreducible.

Ahora, hay que probar que si p no tiene raíces multiples, entonces f es no singular. Para ello calculemos las derivadas parciales de f y las igualamos a cero:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p'(x) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y = 0.$$

Las únicos posibles puntos que cumplen con esta igualdad son de la forma $(0, \chi)$ donde χ es una raíz de $p'(x)$. Pero como las raíces de $p(x)$ son distintas, es decir, de multiplicidad 1, se tendrá que $p'(x)$ es no nula en tales raíces. Luego una raíz de $p'(x)$ no es raíz de $p(x)$ y viceversa. Así, para una raiz χ de $p'(x)$, $f(0, \chi) = p(\chi) \neq 0$ y luego tales $(0, \chi)$ no pertenecen a X. Luego f es no singular.

Concluyendo, entonces si p no es cuadrado perfecto en $\mathbb{C}[x]$ y no tiene raíces múltiples, entonces el polinomio f es irreducible y no singular, y su lugar de ceros es una superficie de Riemann. Q.E.D.

Esto también es válido en el caso de que la curva plana afín sea definida por el polinomio $f(x, y) = y^n - q(x)$, con n mayor a 2 y $q \in \mathbb{C}[x]$ sin raíces múltiples, que no sea potencia d-ésima de otro polinomio para cualquier d divisor de n.

2. Aplicaciones Holomorfas Entre Superficies de Riemann

Para el estudio objetivo de este trabajo, necesitamos estudiar ciertas funciones de interés entre superficies de Riemann. Como las superficies de Riemann tienen coordenadas locales en $\mathbb{C}$, se puede definir el concepto de holomorficidad de una aplicación entre dos superficies. Para ello definimos lo siguiente:

DEFINICIÓN 2.1. Sean X e Y dos superficies de Riemann y $F : X \to Y$ una aplicación continua entre X e Y. Decimos que F es *holomorfa* en $x \in X$ si existen cartas $\phi_1 : U_1 \to V_1$ con $x \in U_1$ y $\phi_2 : U_2 \to V_2$ con $F(x) \in U_2$ tales que $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(x)$. Si $W \subseteq X$ es abierto, entonces decimos que F es *holomorfa* en W si es holomorfa en todo punto de W. En particular si $W = X$ decimos que F es una *aplicación holomorfa*.

OBSERVACIÓN 2.1. Si F es holomorfa en X y $x \in X$, entonces existen cartas $\phi_1 : U_1 \to V_1$ con $x \in U_1$ y $\phi_2 : U_2 \to V_2$ con $F(x) \in U_2$ tales que $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa *al menos* en $\phi_1(x)$. Sea $x_0 \in U_1$ distinto de x y $\psi_1 : U_1' \to V_1'$ con $x_0 \in U_1'$ y $\psi_2 : U_2' \to V_2'$ con

$F(x) \in U_2'$ cartas tales que $\psi_2 \circ F \circ \psi_1^{-1}$ es holomorfa en $\psi_1(x_0)$. Es claro que $U_1 \cap U_1'$ es no vacio, pues x_0 está en $U_1 \cap U_1'$ y por ende $U_2 \cap U_2'$, que contiene a $F(U_1 \cap U_1')$, es no vacio. Luego, $\psi_1 \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(x_0)$, $\psi_1 \circ \phi_1^{-1}(\phi_1(x_0)) = \psi_1(x_0)$ y $\phi_2 \circ \psi_2^{-1}$ es holomorfa en $\psi_2 \circ F \circ \psi_1^{-1}(\psi_1(x_0))$. Finalmente observando que

$$\phi_2 \circ \psi_2^{-1} \circ \psi_2 \circ F \circ \psi_1^{-1} \circ \psi_1 \circ \phi_1^{-1} = \phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1},$$

se concluye que $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(x_0)$. Como x_0 es arbitrario, entonces $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en todo U_1

Con la Observación 2.1, uno puede demostrar lo siguiente:

LEMA 2.1. *Sea $F : X \to Y$ una aplicación entre superficies de Riemann y $x \in X$. Entonces F es holomorfa en x si y sólo si para cualquier par de cartas $\phi_1 : U_1 \to V_1$ con $x \in U_1$ y $\phi_2 : U_2 \to V_2$ con $F(x) \in U_2$ se cumple que $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(x)$.*

Algunas propiedades de las aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann se incluyen en el siguiente lema:

LEMA 2.2. *Sean $F : X \to Y$ y $G : Y \to Z$ aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann. Entonces $G \circ F$ es holomorfa.*

Demostración: Para demostrar que $G \circ F$ es holomorfa, sea $x \in X$. Sean $\phi_1 : U_1 \to V_1$ con $x \in U_1$ y $\phi_2 : U_2 \to V_2$ con $F(x) \in U_2$ cartas en X e Y rspectivamente tales que $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(x)$. Sea además $\phi_3 : U_3 \to V_3$ una carta en Z con $G \circ F(x) \in U_3$ tal que $\phi_3 \circ G \circ \phi_2^{-1}$ es holomorfa en $\phi_2(F(x))$. Al igual que antes, podemos suponer que $F(U_1) \subset U_2$ y $G(U_2) \subset U_3$. Entonces

$$\phi_3 \circ G \circ F \circ \phi_1^{-1} = \phi_3 \circ G \circ \phi_2^{-1} \circ \phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}.$$

Como $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(x)$ y $\phi_3 \circ G \circ \phi_2^{-1}$ es holomorfa en $\phi_2(F(x))$, entonces $\phi_3 \circ G \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(x)$. Luego $G \circ F$ es holomorfa en x. Como x es arbitrario, entonces $G \circ F$ es holomorfa en X. Q.E.D.

Recordemos que en Topología, dos espacios topológicos son *el mismo* si existe un homeomorfismo entre ellos; en Algebra lineal, dos espacios vectoriales son *el mismo* si existe un isomorfismo entre ellos;

lo mismo en teoría de grupos, anillos, etc. Aquí vamos a definir un concepto análogo para superficies de Riemann:

DEFINICIÓN 2.2. Sean X, Y superficies de Riemann y F una aplicación de X en Y. Diremos que F es un *isomorfismo* de superficies de Riemann si F es aplicación holomorfa, biyectiva y con inversa F^{-1} holomorfa. Si existe un isomorfismo entre dos superficies de Riemann X e Y, diremos que X e Y son *isomorfas*. En el caso que $X = Y$ decimos que F es un *automorfismo* de X.

Se puede demostrar que si X es una superficie de Riemann, entonces el conjunto de todos los automorfismos de X, es un grupo con la composición. A tal grupo lo denotamos $Aut(X)$.

Aquí entregamos algunas proposiciones sobre aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann.

PROPOSICIÓN 2.1. *Sea $F : X \to Y$ una aplicación holomorfa no cosntante entre superficies de Riemann. Entonces F es abierta.*

Demostración: Sea U abierto en X. Debemos demostrar que $F(U)$ es abierto en Y. Para cada $x \in U$, sean $\phi_x : U_x \to V_x$ con $x \in U_x$ y $\psi_x : \hat{U}_x \to \hat{V}_x$ con $F(x) \in \hat{U}_x$ cartas en X e Y respectivamente tales que $\psi_x \circ F \circ \phi_x^{-1}$ es holomorfa en $\phi_x(x)$. Al igual que en el Lema 2.2, podemos suponer que $F(U_x) \subseteq \hat{U}_x$. Cada $U_x \cap U$ es abierto y como ϕ_x^{-1} es homeomorfismo, entonces $\phi_x^{-1}(U_x \cap U)$ es abierto en $\mathbb{C}$. Por Observación 2.1, como $\psi_x \circ F \circ \phi_x^{-1}$ es holomorfa en $\phi_x(U_x)$, es abierta ahí. De esta manera $\psi_x \circ F \circ \phi_x^{-1}(\phi_x(U \cap U_x)) = \psi_x \circ F(U \cap U_x)$ es abierto en $\mathbb{C}$ y como ψ_x^{-1} es homeomorfismo, entonces $F(U \cap U_x)$ es abierto en Y. Y como $\bigcup_{x \in U} F(U \cap U_x) = F(U)$ entonces $F(U)$ es abierto en Y. Q.E.D.

PROPOSICIÓN 2.2. *Sean X e Y superficies de Riemann, con X compacta y F una aplicación holomorfa no constante entre X e Y. Entonces F es sobre e Y es compacta.*

Demostración: Por Proposición 2.1 F es aplicación abierta. Además X es abierto en X. Luego $F(X)$ es abierto en Y. Por otra parte X es compacto y por Definición 2.1, F es continua. Luego $F(X)$ es compacto. Como Y es Hausdorff, entonces $F(X)$ es cerrado en Y. Además Y es conexo, por ser superficie de Riemann, por lo tanto, como $F(X)$ es abierto y cerrado en Y a la vez, $Y = F(X)$. Por lo tanto F es sobre e Y es compacto. Q.E.D.

PROPOSICIÓN 2.3. *Sean X e Y superficies de Riemann y $F : X \to Y$ una aplicación holomorfa no constante entre ambas superficies. Entonces para cada $y \in Y$, $F^{-1}(y)$ es un subconjunto discreto de X. En particular si X es compacto, entonces $F^{-1}(y)$ es finito y no vacío.*

Demostración: Sea $y \in F(X)$ y $x \in F^{-1}(y)$. Como F es holomorfa, considere $\phi : U \to V$ carta centrada en x y sea $\psi : \hat{U} \to \hat{V}$ carta centrada en y de modo que $g = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$ sea holomorfa en 0. Como las cartas son centradas, $g(0) = 0$. Además, por Observación 2.1, g es holomorfa en $\phi(U)$. Como los ceros de una función holomorfa no constante forman un conjunto discreto, se puede ver que en alguna vecindad de x, x es la única preimagen de y bajo g. Esto prueba que $F^{-1}(y)$ es discreto.

En el caso particular en que X es compacto, por Proposición 2.2, Y es compacto y F es sobre, luego $F^{-1}(y)$ es no vacío para cada $y \in Y$ y es compacto (esto pues F es continua, y es cerrado, luego $F^{-1}(y)$ es cerrado en X compacto). Como es discreto, para cada $x \in F^{-1}(y)$ existe un abierto U_x tal que $U_x \cap F^{-1}(y) = x$. La colección $\{U_x\}_{x \in F^{-1}(y)}$ es un cubrimiento abierto de $F^{-1}(y)$. Como $F^{-1}(y)$ es compacto, existe un subcubrimiento finito $\{U_{x_i}\}_{i=1}^{n}$. Como cada U_x sólo contiene a x entonces $F^{-1}(y)$ es finito. Q.E.D.

La siguiente proposición nos da una forma de como representar localmente una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann:

PROPOSICIÓN 2.4. *Sea $F : X \to Y$ una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann y sea $x \in X$. Entonces existe un único entero positivo $m_{F,x}$ que satisface la siguiente propiedad: para toda carta $\phi_2 : U_2 \to V_2$ en Y centrada en $F(x)$, existe una carta $\phi_1 : U_1 \to V_1$ en X centrada en x tal que $\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = z^{m_{F,x}}$*

Demostración: ver [**2**], pág. 44-45.

Con esto, hacemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.3. Sean F, x y $m_{F,x}$ como en la proposición anterior. Entonces definimos la *multiplicidad* de F en x como el número $m_{F,x}$.

Por la Proposición 2.4, se ve que $m_{F,x} \geq 1$.

Otra definición importante es la siguiente:

DEFINICIÓN 2.4. Sea $F : X \to Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann y sean $x \in X$, $y \in Y$. Si $m_{F,x} \geq 2$ entonces decimos que x es un *punto de ramificación* de F. Si y es imagen de un punto de ramificación de F entonces decimos que y es un *punto rama*.

Se puede demostrar que en una aplicación holomorfa $F : X \to Y$ entre superficies de Riemann tal que la Y es compacta, los puntos de ramificación F forman un subconjunto discreto de X. Para ello, veanse los detalles en [**2**], pág. 45. Como consecuencia de esto, los puntos rama de una aplicación holomorfa forman un subconjunto discreto del espacio de llegada. Además, si X es compacta, entonces los puntos de ramificación de F forman un conjunto finito.

La siguiente proposición sólo tiene sentido en aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann compactas:

PROPOSICIÓN 2.5. *Sea $F : X \to Y$ un aplicación holomorfa entre superficies de Riemann compactas. Para cada $y \in Y$ sea*

$$d_{F,y} = \sum_{x \in F^{-1}(y)} m_{f,x}.$$

Entonces $d_{F,y}$ es constante, independiente de y.

Demostración: ver [**2**], pág. 47-48.

DEFINICIÓN 2.5. Bajo las hipótesis de la proposición anterior, llamaremos al número $d_{F,y}$ el *grado* de F. En adelante lo denotamos $deg(F)$.

A continuación hay un teorema que relaciona los géneros de dos superficies de Riemann compactas dada una aplicación holomorfa no constante entre ambas. Este teorema se conoce como la *fórmula de Riemann-Hurwitz*:

TEOREMA 2.1. *Sea $F : X \to Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. Sean $g(X)$ y $g(Y)$ los géneros de X e Y respectivamente. Entonces*

$$2g(X) - 2 = deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{x \in X}(m_{F,x} - 1).$$

Demostración: ver [**2**], pág. 52-53.

3. Superficies de Riemann Hiperelípticas

Ya hemos hablado sobre curvas planas afines suaves definidas por ecuaciones de la forma $y^2 = q(x)$ con $q \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio irreducible sin raíces múltiples. Estas superficies de Riemann no son compactas. Sin embargo, mediante el proceso de pegado de superficies de Riemann via isomorfismos, se puede compactificar una curva definida por una ecuación de la forma ya mencionada. Describiremos brevemente este proceso, ver [**2**] para más detalles.

Sea $h \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio irreducible sin raíces múltiples de grado $2g + 1 + \epsilon$, donde ϵ es 0 ó 1. Sea X la curva plana afin suave definida por la ecuación $y^2 = h(x)$. Sea $U = \{(x, y) \in X | x \neq 0\}$. U es abierto en X.

Sea $k(z) = z^{2g+2}h(1/z)$. Observamos que k es un polinomio sin raíces múltiples pues h lo es. Sea Y la curva plana afin suave definida por la ecuación $w^2 = k(z)$. Sea $V = \{(z, w) \in Y | z \neq 0\}$. V es abierto en Y.

Como U y V son abiertos en X e Y respectivamente, se les puede dotar de una estructura de superficies de Riemann a ambos subconjuntos. Más aún, el siguiente lema afirma que U y V son isomorfos.

LEMA 3.1. *La función $\phi : U \to V$ definida por*

$$\phi(x, y) = (1/x, y/x^{g+1}).$$

es un isomorfismo entre U y V.

Demostración: Primero demostraremos que ϕ está bien definida, es decir que $\phi(x, y) = (z, w) \in V$ para cualquier (x, y) en U. Esto se ve por:

$$w^2 = y^2/x^{2(g+1)} = (h(x))/x^{2(g+1)} = (h(1/z))z^{2(g+1)} = k(z),$$

con lo que ϕ está bien definida.

Ahora, veamos que ϕ es biyectiva. Sean $(x, y), (t, u)$ en U tales que $\phi(x, y) = \phi(t, u)$. Entonces

$$(1/x, y/x^{g+1}) = (1/t, u/t^{g+1}).$$

De la comparación entre las primeras coordenadas se ve que $x = t$ y usando esto se ve por las segundas coordenadas que $y = u$. Luego ϕ es inyectiva. Observando además que para cada $(z, w) \in V$, $(z, w) = \phi(1/z, wz^{g+1})$ se ve que ϕ es epiyectiva, al notar que $(1/z, wz^{g+1}) \in U$, pues:

$$(wz^{g+1})^2 = w^2 z^{2(g+1)} = h(1/z).$$

Por lo tanto, ϕ es biyectiva.

Para ver que ϕ es isomorfismo entre U y V, recordemos que las cartas de las curvas planas afines suaves son proyecciones locales de tales curvas en $\mathbb{C}$ mediante las coordenadas de los puntos (x, y). Sea $p = (x, y)$ un punto de U. Si $h'(x) \neq 0$ entonces existe una función g holomorfa tal que en una vecindad A de p, U es el gráfico de $g(x) = y$, y la carta correspondiente es la proyección local $\pi_1(x, y) = x$. Observando que en $\pi_1(A)$ se tiene $\phi \circ \pi_1^{-1}(x) = (1/x, g(x)/x^{g+1})$, sea la carta en V que se use, la composicion deseada dará una función holomorfa en $\pi_1(A)$. Si $h'(x) = 0$ entonces $y \neq 0$ y existe una función j holomorfa tal que en una vecindad B de p U es el gráfico de $x = j(y)$ y la carta correspondiente es la proyección local $\pi_2(x, y) = y$. El procedimiento es análogo al caso tratado. Con esto se comprueba que ϕ es holomorfa. Q.E.D.

Este lema se usa en **[2]** para demostrar la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 3.1. *Sea $Z = X \amalg Y/\phi$ el pegado de X e Y via ϕ. Entonces Z es una superficie de Riemann compacta de género g.*

Demostración: ver **[2]**, pág. 60-61.

DEFINICIÓN 3.1. La superficie Z construida como en el lema anterior se llama *superficie hiperelíptica*.

El siguiente hecho se desprende de las ecuaciones que definen los conjuntos X e Y que dan origen a las superficies hiperelípticas.

LEMA 3.2. *Toda superficie hiperelíptica Z tiene un automorfismo de orden 2.*

Demostración: Sea $f : Z \to Z$ dada por $f(x, y) = (x, -y)$. Está bien definida y es claramente biyectiva. Usando las cartas de proyecciones locales, se verifica que f es holomorfa. Finalmente, observamos que

$$f \circ f(x, y) = f(x, -y) = (x, y).$$

En conclusión, f es holomorfa y de orden 2. Q.E.D.

DEFINICIÓN 3.2. El automorfismo f del lema anterior se llama *involución hiperelíptica.*

El siguiente hecho requiere de estudio de funciones meromorfas de superficies de Riemann en $\mathbb{C}$ y monodromía (ver [**2**]).

PROPOSICIÓN 3.2. *Una superficie de Riemann compacta X es isomorfa a una superficie hiperelíptica si y sólo si existe una aplicación holomorfa $F : X \to \widehat{\mathbb{C}}$ de grado 2.*

DEFINICIÓN 3.3. Si X es una superficie de Riemann isomorfa a una superficie hiperelíptica Y, entonces diremos que X es *hiperelíptica*

4. Teoremas de Uniformización y Grupos Fuchsianos

Aquí se hablará sobre una forma de describir en general cualquier superficie de Riemann. Para ello se necesita, entre otras cosas, teoría de grupos para estudiar los grupos de automorfismos de superficies de Riemann y las superficies de Riemann cocientes. El teorema más importante de esta sección es el teorema de Uniformización que nos da una forma de describir una superficie de Riemann dada. Otros elementos que se necesitan son: la teoría de funciones harmónicas en superficies de Riemann y una descripción de los grupos fundamentales de las superficies involucradas. No se darán todos los detalles aquí pero sí se expondrán los principales resultados que se necesitarán para este trabajo. También mencionaremos resultados sobre los grupos Fuchsianos, que son grupos de gran importancia para los siguientes capítulos de este trabajo, pues ayudan a describir las superficies de Riemann cíclicas p-gonales, que son el centro de estudio de esta tesis.

Antes de esto, recordemos que en [**2**] (Sección 3, Capítulo III) se expone el tema de las acciones de grupos sobre superficies de Riemann. Más aún, dada una superficie X y un grupo G actuando en ella con ciertas condiciones, se explica cómo dotar al espacio cociente X/G de una estructura de superficie de Riemann. Primero partimos con las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN 4.1. Sea X una superficie de Riemann. Sea $Aut(X)$ el grupo de automorfismos de X. Una *acción holomorfa* de un grupo G en X es un homomorfismo de grupos

$$\mathcal{A} : G \to Aut(X).$$

Decimos también que G *actúa de forma holomorfa* en X. Si $Ker(\mathcal{A})$ es trivial, entonces decimos que G *actúa de forma efectiva en* X

DEFINICIÓN 4.2. Sea G un grupo que actúa de forma holomorfa en una superficie de Riemann X. El estabilizador de un punto $x \in X$ en G se define como

$$Stab_G(x) = \{g \in G / \mathcal{A}(g)(x) = x\}.$$

Considerando la notación de esta definición, se puede ver que $Stab_G(x)$ es un subgrupo de G.

La siguiente definición es crucial para el desarrollo de la teoría de superficies de Riemann cocientes:

DEFINICIÓN 4.3. Sea G un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C})$. Entonces G es un grupo de automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$, la esfera de Riemann. Decimos que G *actúa de forma propiamente discontinua* en $x \in \widehat{\mathbb{C}}$, si $Stab_G(x)$ es finito y existe una vecindad U de x tal que $g(U) = U$ para todo $g \in Stab_G(x)$ y $g(U) \cap U = \emptyset$ si $g \in G \backslash Stab_G(x)$.

Llamamos $\Omega(G)$ al conjunto de todos los $x \in \widehat{\mathbb{C}}$ en los cuales G actúa de forma propiamente discontinua.

Ahora, mencionaremos los teoremas de uniformización de superficies de Riemann. Primero, el Teorema de Uniformización de superficies de Riemann simplemente conexas:

TEOREMA 4.1. *Sea X una superficie de Riemann simplemente conexa. Entonces X es isomorfa a una de las siguientes superficies:*

(i) $\mathbb{C}$.

(ii) $\widehat{\mathbb{C}}$, *la esfera de Riemann.*

(iii) $\mathbb{H} := \{x \in \mathbb{C} | Im(x) > 0\}$.

Una demostración de este teorema se puede ver en [**1**] en la sección IV.4.

Ahora, vamos a ver el teorema de uniformización general para todas las superficies de Riemann. Primero partamos con la siguiente definición:

DEFINICIÓN 4.4. Un grupo G de transformaciones de Moebius se llama *grupo Kleiniano* si $\Omega(G)$ es no vacío. Si además existe un semiplano abierto o disco abierto en $\Omega(G)$ que es invariante bajo la acción de G entonces se dice que G es un *grupo Fuchsiano.*

Se puede demostrar que un grupo Kleiniano es a lo más numerable (Ver [**1**]).

Ahora daremos el teorema de uniformización general de superficies de Riemann. Para su demostración vease [**1**], sección IV.5.6:

TEOREMA 4.2. *Toda superficie de Riemann X es isomorfa a un cociente M/G donde M es una superficie de Riemann simplemente conexa y G un subgrupo de $PSL(2,\mathbb{C})$ que actúa de forma propiamente discontinua, libre de puntos fijos y preservando M. Más aún G es isomorfo al grupo fundamental de X.*

Sean X, M y G como en el Teorema 4.3, y supongamos que X es compacta y $M = \mathbb{H}$. Entonces G es un grupo fuchsiano. Por otra parte como X es compacta, tiene un cierto género $l > 1$, y como espacio topológico es homeomorfa a una suma conexa de l toros topológicos. Finalmente, observando que el grupo fundamental de una suma conexa de l toros es un grupo no abeliano dado por la siguiente presentación:

$$H = \left\{ a_1, ..., a_l, b_1, ..., b_l | \prod_{i=1}^{l} [a_i, b_i] = 1 \right\}.$$

concluimos que G tiene la misma presentación.

DEFINICIÓN 4.5. Sea Γ un grupo fuchsiano tal que $X = \mathbb{H}/\Gamma$ es compacta. Sea π_Γ la aplicación cociente. Sea g el género de X. La *signatura* de Γ se define como la tupla $(g; m_1, ..., m_r)$ donde r es el número de puntos rama de π_Γ y los m_i representan los índices de ramificación de los puntos rama (Def. 2.4).

La signatura de un grupo fuchsiano Γ da información sobre su representación:

TEOREMA 4.3. *Sea Γ un grupo Fuchsiano que actúa en $\mathbb{H}$ tal que $\mathbb{H}/\Gamma$ es compacta. Sea $(g; m_1, ..., m_r)$ su signatura. Entonces existe un conjunto $\{a_1, ..., a_g, b_1, ..., b_g, c_1, ..., c_r\}$ de elementos de Γ tal que:*

(i) $\Gamma = \langle a_1, ..., a_g, b_1, ..., b_g, c_1, ..., c_r \rangle$.

(ii) *Los generadores cumplen las siguientes relaciones:*

$$c_1^{m_1}, ..., c_r^{m_r}, (\prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i])(\prod_{j=1}^{r} c_j).$$

(iii) *Cada elemento de orden finito yace en un único conjugado de $\langle c_i \rangle$ para algún i.*

(iv) *Cada elemento de orden finito tiene un punto fijo en $\mathbb{H}$. Los elementos de orden infinito no tienen puntos fijos.*

DEFINICIÓN 4.6. A los elementos de un conjunto de generadores de un grupo fuchsiano Γ que cumplan las hipótesis y conclusiones del teorema anterior les llamaremos *generadores canónicos de* Γ.

Demostración del Teorema 4.4: Ver [**5**], págs. 38-39.

Este teorema implica que un grupo fuchsiano Γ como en el teorema no es abeliano a menos de que $g = 1$, $r = 0$ ó $g = 0$, $r = 1$. Además, en [**1**], se expone que las únicas superficies de Riemann compactas con grupos fundamentales abelianos son las que tienen género menor a 2, y que son isomorfas a cocientes de $\mathbb{C}$ o $\widehat{\mathbb{C}}$. Por lo tanto si el género de una superficie de Riemann X es mayor o igual a 2, entonces X es isomorfa a un cociente de la forma $\mathbb{H}/\Gamma$ donde Γ es un grupo fuchsiano no abeliano.

Ahora, si X es una superficie de Riemann con un grupo finito G actuando de forma holomorfa y efectiva en ella, se puede dar una estructura de superficie de Riemann al espacio cociente X/G:

TEOREMA 4.4. *Sea G un grupo finito actuando de forma holomorfa y efectiva en una superficie de Riemann X. Entonces X/G se puede dotar de una estructura de superficie de Riemann. Además, la aplicación cociente $\pi : X \to X/G$ es holomorfa de grado $|G|$ y $m_{\pi,x} = |Stab_G(x)|$ para todo $x \in X$.*

Demostración: Ver [**2**], capítulo 3, sección 3.

Capítulo 2: Superficies cíclicas n-gonales

5. Ecuaciones para superficies cíclicas p-gonales con p primo

Un problema abierto en la teoría de Superficies de Riemann Compactas es encontrar una ecuación que defina a una superficie X dado un grupo de uniformización $\Lambda \leq PSL(2, \mathbb{R})$. En general, si el género de X es mayor o igual a 2, no es del todo claro como se puede abordar este problema. Sin embargo, si X admite automorfismos, se puede usar la teoría de Galois para encontrar ecuaciones que la definan. En este capítulo estudiaremos el trabajo de A. Wooton en **[3]** el cual considera el caso en que X admite un grupo C_p de automorfismos cíclico de orden primo p tal que el espacio cuociente X/C_p tiene género cero. Esto es una generalización de superficies hiperelípticas, en las cuales $p = 2$.

DEFINICIÓN 5.1. Si X admite un grupo C_p de automorfismos cíclico de orden primo p tal que el espacio cuociente X/C_p tiene género cero, llamaremos a X una *superficie p-gonal* y a C_p un grupo p-gonal para X.

Como ya vimos en el capítulo anterior, toda superficie de Riemann compacta X de género mayor o igual a 2 puede ser obtenida como un cociente de la forma $\mathbb{H}/\Lambda$ donde Λ es un grupo Fuchsiano libre de torsión llamado un *grupo de superficie* para X. La siguiente proposición describe cómo deben ser los grupos de automorfismos de una superficie de Riemann de esta forma:

PROPOSICIÓN 5.1. *Sea $X = \mathbb{H}/\Lambda$ una superfice de Riemann compacta de género mayor o igual a 2. Entonces un grupo finito G de automorfismos de X debe ser isomorfo a un cociente de la forma Γ/Λ para algún grupo Fuchsiano Γ que contiene a Λ como subgrupo normal.*

Demostración: Ver **[6]**, pág. 252.

PROPOSICIÓN 5.2. *Considérese la notación de la Proposición 5.1. Entonces se tiene que $\mathbb{H}/\Gamma$ se identifica con X/G y que la aplicación* *cociente $\pi_G : X \to X/G$ ramifica sobre los mismos puntos que $\pi_\Gamma : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Gamma$ con los mismos índices de ramificación, lo cual es equivalente a que el siguiente diagrama conmuta*

(1)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{H} \arrow[d, "\pi_\Lambda"] \arrow[dr, "\pi_\Gamma"] & \\ X = \mathbb{H}/\Lambda \arrow[r, "\pi_G"] & X/G = \mathbb{H}/\Gamma \end{tikzcd}$$

Demostración: Observamos primero que si tenemos dos superficies de Riemann X, Y isomorfas, con f el respectivo isomorfismo y G es un grupo de automorfismos de X, entonces existe un grupo H de automorfismos de Y que es isomorfo a G (pues si ambas superficies son isomorfas, entonces sus grupos de automorfismos son isomorfos). De hecho, un isomorfismo entre $Aut(X)$ y $Aut(Y)$ es ϕ dado por

$$\phi(g) = f \circ g \circ f^{-1}.$$

Ahora demostraremos que $X/G \cong Y/H$. Sea $\widehat{f} : X/G \to Y/H$ dada por $\widehat{f}([x]) = [f(x)]$, donde $x \to [x]$ representa la clase de x en X ó Y módulo G o H según corresponda. Primero, esta función está bien definida, pues si $x, x' \in X$ pertenecen a la misma órbita bajo G, entonces existe $g' \in G$ tal que $g'(x) = x'$. Buscamos $h \in H$ tal que $h(f(x)) = f(x')$. Sea $h = \phi(g')$. Entonces

$$h(f(x)) = f(g'(f^{-1}(f(x)))) = f(g'(x)) = f(x').$$

Además, como f tiene inversa, se puede definir $\widehat{f^{-1}}$ de la misma manera y se verifica que $\widehat{f} \circ \widehat{f^{-1}} = Id_{Y/H}$ y $\widehat{f^{-1}} \circ \widehat{f} = Id_{X/G}$. Luego, $\widehat{f}$ es invertible. Para verificar que $\widehat{f}$ es isomorfismo de superficies de Riemann, se observa que si π_G es la proyección cociente de X en X/G y π_H es la proyección cociente de Y en Y/H entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

(2)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_G"] & Y \arrow[d, "\pi_H"] \\ X/G \arrow[r, "\widehat{f}"] & Y/H \end{tikzcd}$$

con eso la holomorficidad de $\widehat{f}$ se deriva de las otras aplicaciones involucradas.

Por otra parte, demostraremos que si X es superficie de Riemann y N, M son grupos de automorfismos de X tales que $N \lhd M$, entonces $X/M \cong (X/N)/(M/N)$.

Antes, observamos que la acción de M/N sobre X/N se define de la siguiente forma: sea $P : M \to M/N$ la aplicación cociente, sea $c \in M/N$ y sea $a \in P^{-1}(c)$. Sea $[x]_N$ la clase de $x \in X$ en X/N. Entonces se define la acción de M/N sobre X/N como:

$$c([x]_N) = [a(x)]_N.$$

Veamos que esta acción está bien definida. Sea $c \in M/N$ y sean a y b en $P^{-1}(c)$. Como $ab^{-1} \in N$, entonces $a(x)$ y $b(x)$ estén en la misma órbita bajo N. Por lo tanto, $[a(x)]_N = [a(x)]_N$. Ahora, es claro que si $a \in N$, entonces $[a(x)]_N = [x]_N$. Finalmente, si c y d están es N y $a \in P^{-1}(c)$, $b \in P^{-1}(d)$, se verifica que:

$$cd([x]_N) = [ab(x)]_N = [a(b(x))]_N = c([b(x)]_N) = c(d([x]_N)).$$

Concluimos que la acción está bien definida.

Para demostrar que $X/M \cong (X/N)/(M/N)$, sea

$$\psi : X/M \to (X/N)/(M/N),$$

dada por $\psi([x]) = [[x]]$, donde $[x]$ y $[[x]]$ denotan las clases de x en cada superficie respectiva. Para ver que está bien definida, supongamos que x y x' están en la misma clase en X/M. Entonces existe $g \in M$ tal que $g(x) = x'$. Sea $\overline{g}$ la clase de g en M/N. Sea la clase $[x]_N$ de x en X/N. Entonces $\overline{g}[x]_N = [g(x)]_N = [x']$. Luego $[[x]] = [[x']]$.

Para ver que es inyectiva, supongamos que $\psi([x]) = \psi([x'])$. Entonces existe $\overline{g} \in M/N$ tal que $\overline{g}[x]_N = [g(x)]_N = [x']_N$. Luego, existe $h \in N$ tal que $h(g(x)) = x$. Como N está contenido en M, entonces $h \circ g \in M$, y así $[x] = [x']$ en X/M. Por definición, ψ es automáticamente sobre.

Para ver que es holomorfa, sean $\pi : X/N \to (X/N)/(M/N)$, la proyección (que es holomorfa) y $f' : X/N \to X/M$ definida por $f'([x]_N) = [x]$ en X/M. Esta función es sobre y es holomorfa, pues si π_N, π_M son las proyecciones de X en X/N y X/M, se cumple que $f' \circ \pi_N = \pi_M$ y es claro que $\psi \circ f' = \pi$. Luego ψ es holomorfa. Por claridad resumimos lo anterior en el siguiente diagrama conmutativo:

(3)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\pi_N"] \arrow[dd, "\pi_M"] & \\
& X/N \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dd, "\pi"'] \\
X/M \arrow[dr, "\psi"] & \\
& (X/N)/(M/N)
\end{tikzcd}$$

Aplicando lo anterior a la situación del teorema, se tiene que

$$X/G \cong (\mathbb{H}/\Lambda)/(\Gamma/\Lambda) \cong \mathbb{H}/\Gamma.$$

Finalmente, como $\pi_\Gamma = \pi_G \circ \pi_\Lambda$, los puntos rama de π_G son los mismos que los de π_Γ y los índices de ramificación son los mismos dado que Λ no tiene torsión. Q.E.D.

Si Γ es un grupo fuchsiano y Λ es un subgrupo normal de Γ, entonces existe una relación entre los géneros de ambos grupos.

PROPOSICIÓN 5.3. *Sea Γ un grupo fuchsiano con signatura $(g_\Gamma; m_1, m_2, ..., m_r)$ (ver Definición 4.5) y Λ un subgrupo normal de Γ de índice finito N tal que cada $c_i\Lambda \in \Gamma/\Lambda$ con $i = 1, ..., r$ tiene orden t_i. Entonces el genero g_Λ de la superficie cociente $\mathbb{H}/\Lambda$ está dado por:*

$$g_\Lambda - 1 = N(g_\Gamma - 1) + \frac{N}{2}\sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{t_i}\right).$$

Demostración: es una inmediata consecuencia del teorema de Riemann Hurwitz (ver 2.1).

Si X es una superficie p-gonal con grupo p-gonal C_p, entonces X/C_p es isomorfa a $\widehat{\mathbb{C}}$. La idea es estudiar los grupos G que actúan en X, contengan a C_p como subgrupo normal, y que $K = G/C_p$ actúe en X/C_p como grupo isomorfo a un grupo de automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$. Tales grupos G deben admitir una sucesión exacta del tipo siguiente (no necesariamente única):

$$1 \to C_p \to G \to K \to 1.$$

El grupo K actúa en X/C_p que tiene género cero, luego K es un subgrupo finito de $PSL(2,\mathbb{R})$. Los grupos finitos que actúan en $\widehat{\mathbb{C}}$ son conocidos y los anotamos en la siguiente tabla con su respectivo dato de ramificación (que es un vector con largo el número de puntos rama de la aplicación cociente respectiva, y entradas los índices de ramificación de los puntos rama):

Tabla 1

Grupo	Dato de Ramificación
C_k	$(k,k), k \geq 2$
D_k	$(2,2,k), k \geq 2$
A_4	(2,3,3)
S_4	(2,3,4)
A_5	(2,3,5)

Observación 5.1. Dos grupos finitos isomorfos de automorfismos de la esfera, son conjugados dentro del grupo de automorfismos de ella (ver Teorema A.1 de [**3**] o Teorema IV.9.12 de [**1**]).

Definición 5.2. Si X es p-gonal, consideraremos $G = N_{Aut(X)}(C_p)$ y lo llamamos el *supergrupo normal de* C_p. Llamamos $K = G/C_p$ como el *grupo de esfera* de X.

Usando la notación de la definición anterior, sea Λ el grupo de superficie para X (de modo que $X = \mathbb{H}/\Lambda$) y sean Γ y Γ_p grupos fuchsianos tales que $\Gamma/\Lambda = G$ y $\Gamma_p/\Lambda = C_p$. Sean $\varrho : \Gamma \to G$ y $\chi : \Gamma \to K$ los epimorfismos canónicos con núcleos Λ y Γ_p respectivamente. Luego $X/C_p = \mathbb{H}/\Gamma_p$ y $X/G = \mathbb{H}/\Gamma$. Esto se resume en el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{H} \arrow[dr, "\pi_\Lambda"] \arrow[ddd, "\pi_\Gamma"] & \\
& X = \mathbb{H}/\Lambda \arrow[d, "\pi_{C_p}"'] \\
& X/C_p = \mathbb{H}/\Gamma_p \cong \widehat{\mathbb{C}} \arrow[dl, "\pi_K"] \\
X/G = \mathbb{H}/\Gamma \cong \widehat{\mathbb{C}} &
\end{tikzcd}
\tag{4}
$$

PROPOSICIÓN 5.4. *Si X es p-gonal, entonces la signatura de Γ_p es de la forma $(0; \underbrace{p, ..., p}_{r\ veces})$ para algún $r > 2$.*

Demostración: Como C_p es un grupo de orden primo p, entonces los estabilizadores $Stab_{C_p}(x)$ de cada punto $x \in X$ deben ser de órden 1 o p, y como $m_{\pi_{C_p},x} = |Stab_{C_p}(x)|$ entonces las multiplicidades de los puntos de X son 1 ó p. Por Proposición 5.2, se tiene que π_{Γ_p} ramifica sobre los mismos puntos rama de π_{C_p} con los mismos índices de ramificación. Además por la fórmula de la Proposición 5.3, usando que Γ/Λ tiene orden p, se tiene que

$$g_\Lambda - 1 = p(g_{\Gamma_p} - 1) + \frac{p}{2}\sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{t_i}\right).$$

Pero $g_{\Gamma_p} = 0$ pues $\mathbb{H}/\Gamma_p \cong X/C_p$ (por Proposición 5.2) y X/C_p tiene género cero, y los t_i son iguales a p, pues existe un generador de orden p en Γ_p/Λ. Luego la fórmula anterior queda:

$$g_\Lambda - 1 = -p + \frac{p}{2}\sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{t_i}\right)$$

$$\Rightarrow g_\Lambda = 1 - p + \frac{p}{2}\sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Como $g_\Lambda \geq 2$,se tiene que

$$1 - p + \frac{p}{2}\sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \geq 2$$

$$\Rightarrow r(p-1) \geq 2(1+p)$$

$$\Rightarrow r \geq \frac{2(1+p)}{(p-1)} > 2.$$

Luego, la signatura de Γ_p es de la forma deseada. Q.E.D.

Para encontrar la signatura de Γ hay que fijarse en el grupo G y su dato de ramificación:

PROPOSICIÓN 5.5. (i) *Si $K \neq C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y su dato de ramificación es $(2, u, v)$ entonces la signatura de Γ es*

$(0; 2a, bu, cv, \underbrace{p, ..., p}_{s \text{ veces}})$ *donde* a, b *y* c *son 1 o* p *dependiendo si los puntos rama de* π_{C_p} *coinciden con los puntos de ramificación de la aplicación cociente* $\pi_K : X/C_p \to \mathbb{H}/\Gamma$. *En este caso la signatura de* Γ_p *es* $(0; \underbrace{p, ..., p}_{R \text{ veces}})$ *donde:*

$$R = s|K| + \frac{(a-1)|K|}{2(p-1)} + \frac{(b-1)|K|}{(p-1)u} + \frac{(c-1)|K|}{(p-1)v}.$$

(ii) *Si* $K = C_n$ *para algún* n *entero mayor o igual a 2, entonces la signatura de* Γ *es* $(0; an, bn, \underbrace{p, ..., p}_{s \text{ veces}})$ *donde* a *y* b *son 1 o* p *dependiendo si los puntos rama de* π_{C_p} *coinciden con los puntos de ramificación de la aplicación cociente* $\pi_K : X/C_p \to \mathbb{H}/\Gamma$. *En este caso la signatura de* Γ_p *es* $(0; \underbrace{p, ..., p}_{R \text{ veces}})$ *donde:*

$$R = sn + \frac{(a-1)}{(p-1)} + \frac{(b-1)}{(p-1)}.$$

Demostración: Para encontrar la signatura de Γ, considere las aplicaciones cocientes $\pi_\Gamma : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Gamma$, $\pi_\Lambda : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Lambda$. La última aplicación es no ramificada pues Λ no tiene torsión. Además, por el Diagrama (2) es claro que $\pi_\Gamma = \pi_K \circ \pi_{C_p} \circ \pi_\Lambda$. Si α es un punto rama de π_Γ entonces debe ser un punto rama de π_K o bien, ser imagen de un punto rama de π_{C_p} o ambos. Si ocurre lo primero y no lo segundo entonces el orden de ramificación de π_Γ en α es t, u o v en el caso $K \neq C_n$ o n en el caso $K = C_n$. Si no ocurre lo primero y ocurre lo segundo, entonces el orden de ramificación de π_Γ en α es p. Si ocurren ambos entonces el orden de ramificación es mp donde m varía segun los casos $K \neq C_n$ o $K = C_n$.

Para calcular la signatura de Γ_p, estudiaremos los puntos rama de π_{C_p} bajo la acción de K. Supondremos que $K = C_n$ con $n > 1$. Entonces K tiene dato de ramificación (n, n) y la signatura de Γ es $(0; an, bn, p, ..., p)$ donde p se repite s veces.

Sea α un punto rama de π_{C_p}. Por lo anterior $Stab_K(\alpha)$ tiene orden 1 ó n. En el primer caso, entonces α no es un punto de ramificación de π_K, luego cae en uno de los puntos rama de π_Γ con indice de ramificación p. Se puede ver que para cada punto rama de π_Γ con indice de ramificación p hay n puntos rama de π_{C_p} en su preimágen. Para ver esto, como α es un punto de esa forma, entonces la órbita Θ formada por ese punto bajo la acción de K es de cardinalidad n, dado que su estabilizador es trivial (y por ello también los estabilizadores de los otros elementos de la orbita). Así, llamando π_G la proyección de X en X/G se tiene que $\pi_G = \pi_K \circ \pi_{C_p}$ y

$$deg(\pi_K \circ \pi_{C_p}) = \sum_{x \in \pi_K^{-1}(\pi_K(\alpha))} m_{\pi_{C_p},x} m_{\pi_K, \pi_{C_p(x)}}$$

$$np = \sum_{x \in \Theta} m_{\pi_{C_p},x}.$$

Como son n puntos de la órbita y α es punto rama de π_{C_p}, entonces los demás también los son. Luego, hay n puntos rama de π_{C_p} en la misma órbita. Entonces el número de puntos rama de π_P que está en este caso es sn

Ahora, si $Stab_K(\alpha)$ es de orden n, entonces ese punto es el único punto de su órbita bajo K. Como hay dos puntos rama de π_K, entonces eso aporta a lo más dos puntos rama de π_{C_p}. Ese número de puntos rama en esta situación es $(a-1)/(p-1) + (b-1)/(p-1)$, pues si a es p, entonces hay un punto rama de π_{C_p} que es punto de ramificación de π_K y 1 en caso de que no, y lo mismo con b.

Finalmente, usando la Proposición 5.4 se tiene que la signatura de Γ_p es de la forma $(0; p, ..., p)$ donde p se repite R veces, y con lo hecho anteriormente, se llega a que

$$R = sn + \frac{a-1}{p-1} + \frac{b-1}{p-1}.$$

El caso $K \neq C_n$ es análogo. Q.E.D.

OBSERVACIÓN 5.2. Denotemos por x a π_{C_p}, la aplicación cociente de una superficie p-gonal X con grupo p-gonal C_p. Sea Λ el grupo de superficie de X y sean Γ y Γ_p como antes. Sea además $\mathbb{C}(x)$ el subcuerpo de $\mathcal{M}(X)$ (el cuerpo de aplicaciones holomorfas de X en $\widehat{\mathbb{C}}$) generado por x y las funciones constantes. Según lo explicado en [**3**], si $\Phi(x,y)$ es un polinomio irreducible en $\mathbb{C}(x)$ y su cuerpo de descomposición es $\mathcal{M}(X)$ entonces X es isomorfa a la curva plana afín definida por la ecuación $\Phi(x,y) = 0$. Para ver esto, véase la sección 10.9 de [**7**]. Más aún, como X es un cubrimiento cíclico de $\widehat{\mathbb{C}}$ mediante π_{C_p}, la extensión de cuerpos $\mathcal{M}(X)|\mathbb{C}(x)$ es cíclica. Así por teoría de Kummer, para el caso que estamos estudiando, se puede demostrar que existe $y \in \mathcal{M}(X)$ y un polinomio q con coeficientes en $\mathbb{C}$, y con factores lineales de multiplicidad menor a p tal que el cuerpo de descomposición de $y^p = q(x)$ es $\mathcal{M}(X)$.

El objetivo es obtener una ecuación más detallada que defina a la superficie. Antes de esto, hacemos una observación:

OBSERVACIÓN 5.3. Sea a un punto rama de π_{C_p}, y sea $x \in \pi_{C_p}^{-1}(a)$. Sea $\varrho : \Gamma_p \to C_p$ el homomorfismo canónico (i.e. $Ker(\varrho) = \Lambda$, el grupo de superficie de X), y c un generador canónico (Def. 4.6) de Γ_p con imagen f bajo ϱ. Como a es punto rama de π_{C_p}, se tiene que $f(x) = x$. Si ϕ es un isomorfismo entre X y $\mathbb{H}/\Lambda$ y α es una preimagen de $\phi(x)$ bajo π_Λ, entonces $c(\alpha) = \alpha$.

Con esta observación, se puede hacer la siguiente definición:

DEFINICIÓN 5.3. Sea a un punto rama de π_{C_p}. Entonces es la imagen del punto fijo α de algún generador canónico c de Γ_p. Llamamos a a el punto rama de π_{C_p} correspondiente a c.

Con esto, se puede formular el teorema:

TEOREMA 5.1. *Sean $c_1, ..., c_r$ generadores canónicos de Γ_p. Sea b un generador de C_p tal que, como elemento de $Gal(\mathbb{C}(x,y)/\mathbb{C}(x))$, $b \cdot y = e^{2\pi i/p}y$. Para cada c_i, sea a_i su punto rama correspondiente. Sea $\varrho : \Gamma_p \to C_p$ el homomorfismo canónico y para cada $1 \leq j \leq r$, sea n_j el número entero positivo mayor a cero y menor a p, tal que $h_{\Gamma_p}(c_j) = b^{n_j}$. Entonces X es isomorfa a la superficie definida por la ecuación*

$$y^p = \prod_{j=1}^{r} (x - a_j)^{n_j},$$

siempre que ninguno de los a_i sea igual a ∞. Si para cierto $1 \leq i \leq r$, $a_i = \infty$ entonces X es isomorfa a la superficie definida por la ecuación

$$y^p = \prod_{j=1}^{i-1} (x - a_j)^{n_j} \prod_{j=i+1}^{r} (x - a_j)^{n_j}.$$

Demostración: ver **[16]**.

OBSERVACIÓN 5.4. La ecuación para una superficie p-gonal no necesariamente es única. Depende de la elección de los puntos rama de π_{C_p}, la cual puede hacerse de muchas formas posibles, dado que hay infinitas identificaciones de X/C_p con la esfera de Riemann (componiendo un isomorfismo particular con cualquier transformación de Moebius). Esto hace que se pueda elegir cualquier representación de K (una vez determinado K de acuerdo a la Tabla 1) para encontrar los puntos rama de π_{C_p}.

Más aún, ver Teorema 5.4 de [**3**], dos curvas definidas por $y^p = q(x)$ e $y^p = r(x)$ son isomorfas si y sólo si $r(x) = (q_M(x))^k$ con k coprimo a p, M una transformación de Moebius y q_M el polinomio obtenido por aplicar M a los ceros de $q(x)$.

Lo anterior, unido a que todos los grupos de transformaciones de Moebius isomorfos a K son conjugados entre sí (ver Observación 5.1), determina que las (posiblemente distintas) ecuaciones encontradas con el método aquí presentado corresponden a la misma superficie $p-$gonal.

En [**3**], se explica que mediante el estudio de los grupos fuchsianos involucrados y el estudio de la acción de K en los puntos rama de π_{C_p}, se puede hacer más explícita tal ecuación. A continuación explicaremos estos métodos.

Consideremos el grupo K como antes, actuando en X/C_p. X/C_p es isomorfo a la esfera de Riemann, por lo tanto K corresponde (es isomorfo) a uno de los grupos finitos de la Tabla 1. El conjunto de los puntos rama de π_{C_p}, mediante la acción de K, se descompone en K-órbitas. Cada K-órbita de un punto rama w es el conjunto $\{k(w), k \subset S_w\}$, donde S_w es un conjunto de representantes de las clases laterales de $Stab_K(w)$ en K. Esto implica la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 5.6. *Sea X una superficie cíclica p-gonal, C_p un grupo p-gonal para X, G su supergrupo normal p-gonal, $\pi_{C_p} : X \to X/C_p$ la aplicación cociente, $K = G/C_p$ y $\{\widehat{a}_1, ..., \widehat{a}_{r'}\}$ un conjunto de representantes de las K-órbitas de los puntos rama de π_{C_p}. Entonces existen enteros $n_{i,k}$ $1 \leq i \leq r'$, $k \in S_{a_i}$ tales que X es isomorfa a la superficie definida por la ecuación:*

$$y^p = \prod_{i=1}^{r'} \prod_{k \in S_{\widehat{a}_i}} (x - k(\widehat{a}_i))^{n_{i,k}}.$$

Esto da una forma de cómo encontrar explícitamente los factores lineales en la ecuación, pero no da información sobre los exponentes de dichos factores lineales. Ese problema se estudia usando el supergrupo normal de X.

Suponemos por ahora, las condiciones de la Proposición 5.6. Entonces, para cada a_i, sea c_i el generador canónico correspondiente a a_i. Sea $\chi : \Gamma \to K$ el epimorfismo canónico con $Ker(\chi) = \Gamma_p$.

El siguiente lema nos da una forma de cómo representar los generadores canónicos de Γ_p:

LEMA 5.1. *Sea $\{\widehat{a}_1, ..., \widehat{a}_{r'}\}$ un conjunto de representantes de las K-órbitas que forman los puntos rama de π_{C_p}, y para cada $1 \leq i \leq r'$, sea c_i su generador canónico correpondiente. Entonces cualquier conjunto de generadores canónicos para Γ_p es de la forma $\gamma_{i,j} c_i \gamma_{i,j}^{-1}$ $(1 \leq i \leq r'$, $1 \leq j \leq |K|/|Stab_K(a_i)|)$ donde los $\gamma_{i,j}$ tienen la propiedad de que $\chi(\gamma_{i,j}) \in S_{a_i}$.*

Demostración: Ver [**3**], pág. 114.

DEFINICIÓN 5.4. Un conjunto de generadores canónicos $\{c_1, ..., c_{r'}\}$ (no necesariamente de la misma cardinalidad que el conjunto de los puntos rama) de π_{C_p} con la propiedad de que todo otro generador canónico es de la forma $\gamma_{i,j} c_i \gamma_{i,j}^{-1}$ descrita anteriormente, se denomina un *Γ-conjunto de generadores canónicos.*

Otro lema importante es el siguiente, que relaciona generadores canónicos de Γ_p con los elementos de K:

LEMA 5.2. *Sea $k \in K$. Entonces el generador canónico correspondiente a $k(\widehat{a}_i)$ es $\gamma_{i,j} c_i \gamma_{i,j}^{-1}$ donde $\chi(\gamma_{i,j}) = k$*

Ahora bien, supongamos que $\mathcal{A} : K \to Aut(C_p)$ denota la aplicación de la acción de K en C_p. Como $Aut(C_p)$ es cíclico, existe $k_0 \in K$ tal que $\mathcal{A}(k_0)$ genera la imagen de $\mathcal{A}(K)$ en $Aut(C_p)$. Para tal k_0, sea N entero tal que $\mathcal{A}(k_0)(b) = b^N$, donde b es el generador de C_p como en el Teorema 5.1. Con esto se obtiene el siguiente resultado:

LEMA 5.3. *Supongamos que $\varrho(c_i) = b^{n_i}$ para $1 \leq i \leq r'$. Entonces $\varrho(\gamma_{i,j} c_i \gamma_{i,j}^{-1}) = \mathcal{A}(\chi(\gamma_{i,j}))(b^{n_i})$. En particular, si k_0 y N son como antes y $\chi(\gamma_{i,j}) \in k_0^T Ker(\mathcal{A})$ entonces $\varrho(\gamma_{i,j} c_i \gamma_{i,j}^{-1}) = b^{n_i N^T}$ donde $n_i N^T$ es considerado módulo p.*

Gracias a esto se puede escribir con más detalle la ecuación para la superficie X.

TEOREMA 5.2. *Sea X una superficie cíclica p-gonal, C_p su grupo p-gonal, G el respectivo supergrupo normal, y K el grupo de esfera (Def. 5.2). Sea Λ el grupo de superficie de X y Γ y Γ_p grupos fuchsianos tales que $\Gamma/\Lambda = G$ y $\Gamma_p/\Lambda = C_p$. Suponemos también las condiciones dadas en la Proposición 5.6 y en los Lemas 5.1, 5.2 y 5.3. Entonces X es isomorfa a la superficie definida por la ecuación:*

$$y^p = \prod_{i=1}^{r'} \prod_{j=0}^{r_i} \prod_{g \in k_0^j Ker(\mathcal{A}) \cap S_{\widehat{a}_i}} (x - g(\widehat{a}_i))^{N^j \widehat{n}_i},$$

donde los $\widehat{a}_i$ son representantes de las K-órbitas de puntos rama de π_K, c_i son los generadores canónicos correspondientes a cada $\widehat{a}_i$, b es el generador de C_p del Teorema 5.1, $r_i = [K : Stab_K(\widehat{a}_i)]$, los $\widehat{n}_i$ son números entre 1 y $p-1$ tales que $\varrho(c_i) = b^{\widehat{n}_i}$, k_0 es tal que $\mathcal{A}(k_0)$ genera $\mathcal{A}(K)$ en C_p, N es tal que $\mathcal{A}(k_0)(b) = b^N$ y para cada i se considera $\widehat{n}_i N^j$ módulo p para todo j.

Para demostrar esto, simplemente observamos que para cada $\widehat{a}_i$,

$$S_{a_i} = \bigcup_{j=0}^{r_i} (k_0^j Ker(\mathcal{A}) \cap S_{\widehat{a}_j}),$$

y que para cada elemento $g \in k_0^j Ker(\mathcal{A}) \cap S_{\widehat{a}_j}$, el factor lineal $x - g(\widehat{a}_j)$ tiene exponente lineal congruente a $n_i N^j$ por Lema 5.3.

Dada la cantidad de cálculos involucrados, no incluimos en este punto aplicaciones de este teorema. Dejamos el siguiente capítulo para ello.

6. Estudio de superficies n-gonales y grupos fuchsianos.

Aquí estudiaremos el trabajo de S. A. Broughton y A. Wootton en [**4**] sobre superficies de Riemann que contiene resultados de las superficies cíclicas n-gonales, n no necesariamente primo. En tal trabajo, Broughton y Wootton estudian los grupos de automorfismos involucrados, usando de nuevo supergrupos normales de los grupos cíclicos de interés y levantamiento de tales grupos a grupos fuchsianos que actúan en $\mathbb{H}$. Estos resultados pueden ser utilizados de manera efectiva para encontrar ecuaciones, según el método presentado en la sección 5.

Comenzamos con la siguiente definición:

DEFINICIÓN 6.1. Una superficie de Riemann X de género $g \geq 2$ se dice *cíclica n-gonal* si existe un grupo cíclico de automorfismos de orden n que denotamos C_n tal que el espacio cociente X/C_n tenga género 0. En ese caso, la aplicación cociente $\pi_{C_n} : X \to X/C_n$ se conoce como *aplicación cíclica n-gonal* y llamamos a C_n el *grupo cíclico n-gonal.*

En lo que sigue, suponemos X una superficie cíclica n-gonal para algún n entero positivo, y C_n el respectivo grupo cíclico n-gonal. Sea g el género de X. Sea $G = N_{Aut(X)}(C_n)$ de modo que $C_n \trianglelefteq G \leq Aut(X)$. El método de trabajo en [**4**] consiste en levantar esta tripleta de grupos a una tripleta de grupos fuchsianos $\Gamma_{C_n} \trianglelefteq \Gamma_G \leq \Gamma_{Aut(X)}$ tal que $\Gamma_G/\Gamma_{C_n} \cong G/C_n$ y usar teoría de grupos para implementar una clasificación. La forma general de cómo hacerlo es:

(i) Especificar una restricción en los triples $\Gamma_{C_n} \trianglelefteq \Gamma_G \leq \Gamma_{Aut(X)}$ imponiendo restricciones de tipo geométrico, aritmético, o de teoría de grupos.
(ii) Calcular las signaturas de los grupos fuchsianos involucrados.
(iii) Determinar las inclusiones $\Gamma_G \leq \Gamma_{Aut(X)}$
(iv) Determinar la sucesión exacta $\Gamma_{C_n} \to \Gamma_G \to G/C_n$
(v) Usar los pares $\Gamma_G \leq \Gamma_{Aut(X)}$ y $\Gamma_{C_n} \trianglelefteq \Gamma_G$ para calcular $C_n \trianglelefteq G \leq Aut(X)$ (haciendo cociente con el grupo de superficie de X) o demostrar que esa extensión de $C_n \trianglelefteq G \leq Aut(X)$ a $\Gamma_{C_n} \trianglelefteq \Gamma_G \leq \Gamma_{Aut(X)}$ no existe.

Para efectos de este trabajo, relacionando esto con lo visto en la sección anterior, sólo estudiaremos las relaciones entre G, C, Γ_{C_n}, Γ_G y el grupo de superficie de la superficie en cuestión, que llamaremos Λ.

En adelante, llamamos $C = C_n$ para algún n fijo.

Dados Γ_C y Γ_G dos grupos fuchsianos tales que $\Gamma_C \triangleleft \Gamma_G$, $[\Gamma_G : \Gamma_C]$ es finito, y $\mathbb{H}/\Gamma_C$ y $\mathbb{H}/\Gamma_G$ sean superficies de Riemann compactas de género cero, sea $K = \Gamma_G/\Gamma_C$. Según [**4**], K es un grupo que actúa en $\widehat{\mathbb{C}}$ y las imágenes de los generadores de orden finito bajo el homomorfismo canónico $f_{G,C} : \Gamma_G \to K$ satisfacen las mismas relaciones que dichos generadores. Dependiendo de qué grupo sea K (de acuerdo a la lista de la Tabla 1) la signatura $S(\Gamma_G)$ será de alguna de las siguientes formas:

(i) Si K es cíclico de orden t entonces la signatura de Γ_G es de la forma

$$S(\Gamma_G) = (0; tm_1, tm_2, m_3..., m_r).$$

(ii) Si K no es cíclico, entonces su dato de ramificación es (a, b, c), según lo visto en la Tabla 1 y entonces la signatura de Γ_G es de la forma:

$$S(\Gamma_G) = (0; am_1, bm_2, cm_3, m_4..., m_r).$$

Con los $m_i's$ números enteros positivos.

Para demostrar lo anterior, considere las proyecciones $\pi_{\Gamma_G} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Gamma_G$ y $\pi_{\Gamma_C} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Gamma_C$. Por la Proposición 5.2, $\mathbb{H}/\Gamma_G \cong (\mathbb{H}/\Gamma_C)/K$, luego la proyección $\pi_K : \mathbb{H}/\Gamma_C \to \mathbb{H}/\Gamma_G$ está bien definida.

Si K es cíclico de orden t, entonces de acuerdo a la Tabla 1, π_K tiene dos puntos de ramificación de multiplicidad t. Además, es claro que $\pi_{\Gamma_G} = \pi_K \circ \pi_{\Gamma_C}$ (ver el diagrama conmutativo (5) de a continuación). Por lo tanto en la signatura de Γ_G, habrán dos valores que serán múltiplos de t. El caso en que K no es cíclico es análogo.

(5)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H} \arrow[rr, "\pi_{\Gamma_C}"] \arrow[d, "\pi_{\Gamma_G}"'] & & \mathbb{H}/\Gamma_C \arrow[dll, "\pi_K"] \\
\mathbb{H}/\Gamma_G \cong (\mathbb{H}/\Gamma_C)/K & &
\end{tikzcd}$$

Ahora para encontrar la signatura de Γ_C, usamos la siguiente definición:

Definición 6.2. Sea $\eta : \Gamma \to G$ un homomorfismo de grupos tal que $Ker(\eta) = \Lambda$ es un grupo sin torsión y $(0; m_1, ..., m_r)$ la signatura de Γ. Para cada $i = 1, ..., r$, sea γ_i un generador canónico de Γ de orden m_i. Sea $g_i = \eta(\gamma_i)$. Para cada i el orden de g_i es igual al de γ_i, $\prod_{i=1}^{r} g_i = 1$ y $G = \langle g_1, ..., g_r \rangle$. Llamamos entonces a $(0; m_1, ..., m_r)$ la *signatura* de la acción de G en $X = \mathbb{H}/\Lambda$ y llamamos al vector $(g_1, ..., g_r)$ un $(m_1, ..., m_r)$-*vector generador* de G.

El hecho de que el $m_i = |\gamma_i| = |g_i|$ se debe a que si $n_i = |g_i| < m_i$ entonces $\gamma_i^{n_i} \in Ker(\eta)$. Como $\gamma_i^{n_i} \neq 1$ entonces sería un elemento sin torsión, lo que no puede pasar, luego $|g_i| = m_i$.

Se puede ver que en el caso de K como antes, si su dato de ramificación es $(a_1, ..., a_e)$ con e igual a 2 o 3, según los casos de la Tabla 1, entonces la signatura de K es $(0; a_1, ..., a_e)$.

PROPOSICIÓN 6.1. *Suponga que $(x_1, ..., x_e)$ (con $1 \leq e < r$) es un $(a_1, ..., a_e)$-vector generador de K, con respecto a algún grupo fuchsiano Δ. Sea $\{y_1, ..., y_r\}$ un conjunto de generadores canónicos de Γ_G tales que si $1 \leq i \leq e$, el orden de y_i es múltiplo de a_i. Entonces se puede definir $f_{G,C} : \Gamma_G \to K$ como:*

$$f_{G,C}(y_i) = x_i, 1 \leq i \leq e$$
$$f_{G,C}(y_i) = 1, e+1 \leq i \leq r.$$

Entonces $Ker(f_{G,C}) = \Gamma_C$ es único.

El otro punto importante que se estudia en este trabajo, es la sucesión exacta

$$\Lambda \to \Gamma_C \to C,$$

Suponiendo $f_{G,C}$ el epimorfismo definido antes y $\Gamma_C \hookrightarrow \Gamma_G \to K$ la sucesión exacta respectiva, buscamos ahora cuando $f_{G,C}$ surge del normalizador de una acción cíclica n-gonal, es decir, que exista un grupo cíclico C de automorfismos de $\mathbb{H}/\Lambda$, con normalizador $\widetilde{K}$ tal que $\widetilde{K}/C \cong K$. Se necesita un epimorfismo $\phi : \Gamma_C \to C$ donde C es un grupo cíclico tal que $Ker(\phi) = \Lambda$ sea libre de torsión. Para que tal epimorfismo exista, se deben cumplir ciertas condiciones específicas: Sea ahora $\xi_1, ..., \xi_s$ un conjunto de generadores canónicos para Γ_C, tal que para cada $1 \leq i \leq s$, el orden de ξ_i sea igual a l_i (l_i están dadas por la signatura de Γ_C). Para cada $1 \leq i \leq s$ definimos $z_i = \phi(\xi_i)$. Así, $(z_1, ..., z_s)$ es un $(l_1, ..., l_s)$-vector generador de la acción de C. Para que tal vector exista y Π sea libre de torsión, se debe tener, entre otros, que:

(i)
$$\prod_{j=1}^{s} z_j = 1.$$

(ii) Para cada $1 \leq i \leq s$
$$|z_i| = |\xi_i|.$$

(iii)
$$|C| = mcm(|\xi_1|, ..., |\xi_s|).$$

Supongamos ahora que C cumple con todas las condiciones anteriores. Entonces el conjunto:

$$A_C = \{(w_1, ..., w_r)/|w_i| = |\xi_i|, \prod_{j=1}^{s} w_j = 1\},$$

es no vacío. Con esto se pueden enumerar los epimorfismos $\phi : \Gamma_C \to C$ dado que $\phi \to (\phi(\xi_1), ..., \phi(\xi_s))$ es una correspondencia 1-1.

Ahora necesitamos determinar cuándo el homomorfismo ϕ se extiende a un epimorfismo $\psi : \Gamma_G \to \widetilde{K}$ tal que:

(i) $\widetilde{K}$ es un grupo que contiene a C satisfaciendo $C \lhd \widetilde{K}$ y $\widetilde{K}/C \cong K$.
(ii) $\psi\mid_{\Gamma_C} = \phi$.

El grupo $\widetilde{K}$ será igual a G cuando se identifica con un subgrupo de $Aut(X)$. Para demostrar que tales dos condiciones se cumplen, basta demostrar que Λ es normal en Γ_G, pues dados Γ_G y Λ, este último sin torsión tales que $\Lambda \lhd \Gamma_G$, entonces definimos $\widetilde{K} = \Gamma_G/\Lambda$, y de esta manera se cumplen (i) y (ii).

Para hacer esto: Sea $x \in \Gamma_G$, definimos $\phi_x : \Gamma_C \to C$ como

$$\phi_x(\gamma) = \phi(x\gamma x^{-1}).$$

$Ker(\phi_x) = x^{-1}\Lambda x$ y Λ es normal en Γ_G, si y sólo si $Ker(\phi_x) = \Lambda = Ker(\phi)$. Esto pasa si y sólo si existe $w_x \in Aut(C)$ tal que

$$\phi_x(\gamma) = \phi(x\gamma x^{-1}) = w_x(\phi(\gamma)).$$

Entonces, para x, y en Γ_G y γ en Γ_C, se verifica que $w_{xy}(\phi(\gamma)) = w_x(w_y(\phi(\gamma)))$. Luego $w_{xy} = w_x \circ w_y$, y así, $x \to w_x$ es un homomorfismo de Γ_G en $Aut(C)$. Como C es abeliano entonces $w_x = Id_C$ si $x \in \Gamma_C$ y $x \to w_x$ induce una función $K \to Aut(C)$ dada por $k \mapsto w_k$, $k \in K$.

Esta función $K \to Aut(C)$ representa la aplicación de la acción de K en C vista antes ($\mathcal{A}$ del Lema 5.3). Es así donde esta sección es útil para el método desarrollado en la sección 5. Veamos:

En caso de no conocer bien el normalizador G de un grupo n-gonal C de una superficie n-gonal X, usando la Proposición 5.1, se sabe que el grupo de automorfismos de X es ismomorfo a un cociente de grupos fuchsianos de la forma Γ/Λ, donde Λ es un grupo de superficie para X, y del mismo modo C es isomorfo a un cociente Γ_p/Λ. Si se pudieran conocer bien Γ y Γ_p, suponiendo que $\Gamma_p \subset \Gamma$, y calculamos el normalizador Θ de Γ_p en Γ, entonces aplicamos lo aquí expuesto para encontrar G. Conocer G es fundamental para encontrar una ecuación para X.

Capítulo 3: Ejemplos y Aplicaciones

Este capítulo está dedicado a aplicar lo visto en los capítulos anteriores, mostrando ejemplos de superficies de Riemann n-gonales. Primero partiremos con superficies específicas y demostraremos que son n-gonales para algún n. Después aplicaremos lo visto en el Capítulo 2, para encontrar ecuaciones planas para estos ejemplos.

Como se pudo apreciar en el capítulo anterior, el desarrollar este método envuelve varios cálculos y la determinación de diferentes objetos (morfismos, puntos fijos, órbitas, entre otros).

Con el objetivo de recopilar los diferentes objetos involucrados en el desarrollo del método, repetimos el diagrama conmutativo 4 el cual describe las superficies y cubrientes involucrados e incluimos una tabla que los resume (además entrega dónde fue definido o usado el objeto en cuestión).

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H} \arrow[rr, "\pi_\Lambda"] \arrow[ddd, "\pi_\Gamma"] & & X = \mathbb{H}/\Lambda \arrow[d, "\pi_{C_p}"'] \\
& & X/C_p = \mathbb{H}/\Gamma_p \cong (\mathbb{H}/\Lambda)/(\Gamma_p/\Lambda) \cong \widehat{\mathbb{C}} \arrow[lldd, "\pi_K"] \\
& & \\
X/G = \mathbb{H}/\Gamma \cong (\mathbb{H}/\Gamma_p)/(\Gamma/\Gamma_p) \cong \widehat{\mathbb{C}} & &
\end{tikzcd}$$

X	Superficie $p-$gonal	Le buscamos ecuación plana
C_p	Grupo cíclico de orden p	actúa en X
G	Normalizador de C_p en $Aut(X)$	Def. 5.2
K	Grupo de esfera	$K = G/C_p$
Λ	Grupo de la Superficie X	i.e. $X = \mathbb{H}/\Lambda$
ϱ	$1 \to \Lambda \to \Gamma \xrightarrow{\varrho} G \to 1$	Definición 5.2
χ	$1 \to \Gamma_p \to \Gamma \xrightarrow{\chi} K \to 1$	Definición 5.2
$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} : K \to Aut(C_p)$	Lema 5.3
k_0	Generador de $\mathcal{A}(K) \leq Aut(C_p)$	Lema 5.2
b	Generador de C_p tq. $b \cdot y = e^{2\pi i/p}y$	Teo. 5.1
N	tq. $\mathcal{A}(k_0)(b) = b^N$	Lema 5.2
r	cantidad de puntos rama de π_{C_p}	
r'	numero de $K-$órbitas de los puntos rama	Teorema 5.2
$\widehat{a}_i$	representante de $K-$órbita	Por acción de K en X/C_p
c_i	Generador canónico de Γ_p correspondiente a $\widehat{a}_i$	Def. 5.3, Obs. 5.3
n_i	tq. $\varrho(c_i) = b^{n_i}$	Teorema 5.2
S_w	Conjunto de representantes de clases laterales de $Stb_K w$ en K	Prop. 5.6

7. Ejemplos de superficies n-gonales.

Los siguientes ejemplos pretenden ilustrar la teoría superficies n-gonales. Los dos primeros son simples y se incluyen para explicar las ideas involucradas

EJEMPLO 7.1. *Una superficie hiperelíptica.* Sea X la superficie hiperelíptica dada por la ecuación $y^2 = x^6 - 1$. Se ve de inmediato que el género de la superficie es 2. Sea C_2 el grupo de automorfismos generado por el automorfismo f de la Definición 3.2. f tiene orden 2, luego la aplicación cociente $F : X \to X/C_2$ tiene grado 2. Por otra parte, es claro que los puntos de ramificación de F son 6 y son de la forma $(\lambda, 0)$ donde λ es una raíz sexta de la unidad, y cada uno de ellos tiene multiplicidad 2. Con estos datos, si aplicamos la fórmula de Riemann-Hurwitz se tiene que:

$$2(g(X) - 1) = deg(F)(2g(X/C_2) - 2) + \sum_{x \in X}(m_{F,x} - 1)$$

$$\Rightarrow 2(2-1) = 4(g(X/C_2) - 1) + 6$$

$$\Rightarrow 2 = 4g(X/C_2) + 2.$$

Con lo que se llega a que $g(X/C_p) = 0$. Por lo tanto, X es una superficie 2-gonal.

Esto es un caso más especial del siguiente hecho que puede demostrarse de la misma forma que el ejemplo anterior:

EJEMPLO 7.2. Toda superficie hiperelíptica es una superficie 2-gonal.

La conversa de esta afirmación es cierta: si X es 2-gonal y C su grupo 2-gonal, entonces la proyección $\pi_C : X \to X/C$ es de grado 2 y como X/C es de género cero, es isomorfa a $\widehat{\mathbb{C}}$, luego, por la Proposición 3.2, X es hiperelíptica.

Antes del siguiente ejemplo, mencionaremos el siguiente lema que será útil en lo que sigue:

LEMA 7.1. *Sea G un grupo actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann X y sea $H_p \leq G$ el estabilizador de un punto p en G. Si H_p es finito, entonces es un subgrupo cíclico de G.*

Demostración: Ver [**2**], página 76.

EJEMPLO 7.3. *Curva de Fermat.* Sea X la superficie proyectiva en $\mathbb{CP}^2$ definida como el lugar de ceros del polinomio homogéneo

$$P(x, y, z) = x^n + y^n + z^n,$$

con n mayor o igual a 4. Esta superficie es conocida como la *curva de Fermat de grado n*. Claramente el polinomio no tiene singularidades, luego X es una superficie de Riemann compacta. Se puede demostrar que el género de X es $(n-1)(n-2)/2$. Supongamos que n es primo y mayor o igual a 5. Entonces el género de X es mayor a 2. Sea $f : X \to X$ definida por $f[x : y : z] = [ax : y : z]$ donde a es una raíz n-ésima primitiva de la unidad. Esta función está bien definida y es un automorfismo de orden n. Sea G el grupo generado por f y $F : X \to X/G$ la aplicación cociente.

Supongamos que $[t : u : v]$ es un punto de ramificación de F, entonces $f[t : u : v] = [at : u : v] = [t : u : v]$. Entonces $at = ct$, $u = cu$, $v = cv$ para algún c distinto de cero. Afirmamos que $c = 1$. De lo contario, $u = v = 0$ y usando la ecuación que define a X, se ve que $t = 0$. Luego $c = 1$ y eso implica que $at = t$. Como a no es cero ni 1, entonces $t = 0$. Esto implica que u y v no pueden ser cero. Como tal punto está en X, se tiene que $u^n + v^n = 0$ lo que implica que $u/v = w$ es una raíz n-ésima de -1. Hay n de tales raíces, luego hay n puntos de ramificación, cada uno con multiplicidad n. Aplicando esto a la fórmula de Riemann Hurwitz se tiene que

$$\begin{aligned}(n-1)(n-2)-2 &= n(2g(X/G)-2)+n(n-1)\\ \Rightarrow n(n-3) &= n(2g(X/G)-2+n-1)\\ \Rightarrow n-3 &= 2g(X/G)-3+n.\end{aligned}$$

De donde se desprende que $g(X/G) = 0$. Entonces X es n-gonal.

Ahora, para $n \geq 4$, no primo, también se cumple que X es n-gonal. Supongamos que $d > 1$ divide a n. Consideramos f, G y F definidas como antes y sea $[x : y : z]$ un punto de ramificación de F cuyo estabilizador H tiene orden d. Por el Lema 7.1, H es cíclico, y como el único subrgupo de G de orden d es es el generado por $f^{n/d}$ entonces $H =< f^{n/d} >$. De esta manera

$$f^{n/d}([x : y : z]) = [a^{n/d}x : y : z] = [x : y : z].$$

Usando un argumento parecido al anterior para el caso primo, se ve que $x = 0$ y luego $[x : y : z]$ es de la misma forma anterior. Pero observando que

$$f([0 : y : z]) = [0 : y : z].$$

se tiene que $f \in H$ lo que implica que $d = n$. Como hay n puntos de la forma requerida, entonces al aplicar la fórmula de Riemann-Hurwitz se tiene el mismo resultado de antes. Luego X es n-gonal.

EJEMPLO 7.4. *Cuártica de Klein.* Sea X la curva proyectiva en $\mathbb{CP}^2$ definida como el lugar de ceros del polinomio

$$P(x, y, z) = xy^3 + yz^3 + zx^3.$$

.

Se puede demostrar que este polinomio es irreducible y es no singular. Con esto, X es una superficie de Riemann compacta. Se puede demostrar que su género es 3.

Sea a una raíz séptima primitiva de la unidad y $f : X \to X$ definida por $f([x : y : z]) = [x : a^2y : a^{-1}z]$. Veamos que f está bien definida: observamos que:

$$\begin{aligned} x(a^2y)^3 + a^2y(a^{-1}z)^3 + a^{-1}zx^3 &= a^6xy^3 + a^{-1}yz^3 + a^{-1}zx^3 \\ &= a^{-1}(xy^3 + yz^3 + zx^3). \end{aligned}$$

Luego, si $[x : y : z]$ está en X, también su imagen bajo f, así, f está bien definida.

Se verifica fácilmente que f es biyectiva: supongamos que

$$[x : a^2y : a^{-1}z] = [t : a^2u : a^{-1}v].$$

Entonces existe $b \in \mathbb{C}^*$ tal que

$$(x, a^2y, a^{-1}z) = b(t, a^2u, a^{-1}v).$$

De lo que se desprende que $(x, y, z) = b(t, u, v)$ y con ello, $[x : y : z] = [t : u : v]$. Luego f es inyectiva. Es epiyectiva, pues $[x : y : z] = f([x : a^{-2}y : az])$.

Para ver que f es holomorfa, sea $p = [x : y : z] \in X$. Supongamos que x es no cero. Entonces las cartas locales ϕ y ψ en p son respectivamente mandar $[t : u : v]$ a u/t o a v/t según si las derivadas de P en y o z son no nulas. De todas formas, en cada caso, vemos que $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ manda z en a^2z, $\psi \circ f \circ \psi^{-1}$ manda z en $a^{-1}z$, $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ manda z en $a^{-1}h(z)$ donde h es la función holomorfa del teorema de la función implicita en la curva afin dada por $P(1, y, z) = 0$, y análogo con $\phi \circ f \circ \psi^{-1}$. En cualquier caso, se ve que f es holomorfa.

Finalmente, se observa que

$$f^7([x : y : z]) = [x : a^{14}y : a^{-7}z] = [x : y : z].$$

Luego, f es un automorfismo de orden 7.

Sea G el grupo generado por f y $F : X \to X/G$ la aplicación cociente. Demostraremos que X es una superficie 7-gonal.

Calculemos los puntos de ramificación de F. Esos puntos son los puntos $[x : y : z]$ tales que $f([x : y : z]) = [x : a^2y : a^{-1}z] = [x : y : z]$. Luego existe c número complejo distinto de cero tal que $(x, y, z) = c(x, a^2y, a^{-1}z)$. De la primera coordenada se desprende que $x(c-1) = 0$.

Si x es cero, entonces por la ecuación de P se tiene que $yz^3 = 0$, luego $y = 0$ ó $z = 0$, pero no ambos. Si $c = 1$, entonces se desprende que $y = z = 0$. Luego, los puntos de ramificación de F son 3: $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$ y $[0 : 0 : 1]$, cada uno con multiplicidad 7.

Por otra parte, $deg(F) = |G| = 7$. Aplicando esto y los datos anteriores en la fórmula de Riemann-Hurwitz se tiene que:

$$2 \cdot 3 - 2 = 7(2g(X/G) - 2) + 3 \cdot 6$$
$$\rightarrow 4 = 14g(X/G) - 14 + 18 = 14g(X/G) + 4.$$

De lo que se desprende que el género de X/G es cero. Luego, X es una superficie 7-gonal.

EJEMPLO 7.5. Sea X la intersección en $\mathbb{CP}^3$ de los lugares de ceros de los polinomios homogéneos

$$P(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2$$
$$Q(x, y, z, t) = t^3 - xyz.$$

En [**9**], se establece que X es una superficie de Riemann de género 4. Su grupo de automorfismos, según el mismo artículo, es isomorfo al subgrupo de $GL(4, \mathbb{C})$ generado por las matrices A, B, C, donde:

$$A = \begin{bmatrix} w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w^2 \end{bmatrix},$$

con w una raiz cúbica primitiva de la unidad,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Con ayuda del programa GAP, se puede ver que A y C tienen orden 3, B tiene orden 4 y que el orden de $Aut(X)$ es 72. Por otra parte, se puede ver que A conmuta con B y con C, luego, si C_3 es el grupo generado por A, entonces su normalizador es todo $Aut(X)$. La representación de A como automorfismo de X se ve como multiplicar A con un "vector"que se elige como representante de algun elemento de X, es decir, que

$$A([x:y:z:t]) = [x':y':z':t'],$$

donde

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w^2t \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $A([x:y:z:t]) = [x:y:z:wt]$.

Sea π_{C_3} la proyección de X en X/C_3. Probaremos que X es 3-gonal.

Calculemos la ramificación de $F = \pi_{C_3}$. Sea $[x:y:z:t]$ un punto de ramificación de F, por lo que es un punto fijo bajo A. Es decir, existe c complejo no cero tal que $(x,y,z,t) = c(x,y,z,wt)$. Si $c = w^{-1}$ entonces $x = y = z = 0$ y entonces por la ecuación dada por $Q = 0$ se ve que $t = 0$. Luego $c = 1$ y con ello, $t = 0$. Por la ecuación de Q se ve que al menos una de las otras tres coordenadas es nula, pero si dos lo fueran, entonces la tercera también lo sería. Supongamos que sólo $z = 0$. Entonces por la ecuación $P = 0$ se ve que $x^2 + y^2 = 0$, luego, suponiendo que $x = 1$, se tiene que $y = \pm i$. Con esto se tiene que $[1:\pm i:0:0]$ son puntos de ramificación de F. Si $y = 0$, por un razonamiento análogo se llega a los puntos $[1:0:\pm i:0]$ y si $x = 0$, se llega a los puntos $[0:1:\pm i:0]$. Luego, hay 6 puntos de ramificación, cada uno con multiplicidad 3. Como $deg(F) = 3$ y el género de X es 4, si g es el género de X/C_3, aplicando la fórmula de Riemann-Hurwitz se tiene que:

$$6 = 6g - 6 + 12 = 6g + 6$$

De aquí se desprende que $g = 0$, luego, X es 3-gonal.

Ejemplo 7.6. *Curva de Bring.* Sea X la curva proyectiva en $\mathbb{CP}^4$ correspondiente a la intersección de los lugares de ceros de tres polinomios P_i con $i = 1, 2, 3$ definidos como:

$$P_i(x,y,z,t,u) = x^i + y^i + z^i + t^i + u^i.$$

En **[15]** se señala que es una superficie de Riemann de género 4. Además, en **[10]**, se señala que su grupo de automorfismos es isomorfo a S_5, el cual actúa como permutaciones de las coordenadas homogéneas.

Sea $f : X \to X$ definida como

$$f([x : y : z : t : u]) = [y : z : t : u : x].$$

Es claro que f es biyectiva, y como es una permutación de las coordenadas homogéneas, deja invariantes los polinomios P_i, luego es un automorfismo. Además, su orden es 5.

Sea C_5 el grupo generado por f y sea $F = \pi_{C_5}$. Análogamente a los ejemplos anteriores, demostraremos que X es 5-gonal.

Sea $[x : y : z : t : u]$ un punto de ramificación de F. Entonces existe c número complejo no nulo tal que $(y, z, t, u, x) = c(x, y, z, t, u)$. De esto, se ve que si alguna de las coordenadas es nula, las otras también, luego ninguna coordenada es nula. Podemos suponer que $x = 1$, luego $y = c$, $z = c^2$, $t = c^3$, $u = c^4$, y como son puntos de X, en particular pertenecen al lugar de ceros de P_1, luego se tiene que cumplir que

$$1 + c + c^2 + c^3 + c^4 = 0.$$

Por lo tanto, c es una raíz quinta primitiva de la unidad. Con esto, se ve que también está en el lugar de ceros de P_2 y P_3, luego es un punto en X. Como hay cuatro raíces quintas primitivas de la unidad, entonces hay cuatro puntos de la forma $[1 : c : c^2 : c^3 : c^4]$ con c raiz quinta primitiva de la unidad. Luego, hay 4 puntos de ramificación con multiplicidad 5.

Como además $deg(F) = 5$ y el género de X es 4, llamando g al género de X/C_5 y aplicando Riemann-Hurwitz se tiene que

$$2 \cdot 4 - 2 = 5(2g - 2) + 4(5 - 1)$$

$$\Rightarrow 6 = 10g + 6$$

De lo que se desprende que $g = 0$. Por lo tanto X es 5-gonal.

8. Aplicaciones del método para encontrar ecuaciones.

Ahora, aplicaremos lo visto en el Capítulo 2 para buscar ecuaciones que representen superfcies n-gonales, usando ejemplos mostrados en la sección 7. De acuerdo a lo estudiado antes, se establece que los pasos para encontrar la ecuación para una superficie p-gonal son los siguientes:

(i) Encontrar el normalizador G del grupo cíclico p-gonal C_p en $Aut(X)$ y el grupo $K = G/C_p$.
(ii) Encontrar las signaturas de Γ y Γ_p.
(iii) Encontrar una identificación de X/C_p con la esfera de Riemann de modo que el grupo K sea un grupo de automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$ y usar los puntos de alguna órbita bajo K como los puntos rama de π_{C_p}.
(iv) Estudiar la acción de K en C_p.
(v) Aplicar los Lemas 5.1, 5.2 y 5.3.

El paso i es importante, pues ayuda a definir cuál es el grupo K, el cual, mediante la proposición 5.5, permite el paso ii. El paso iii es el que define los factores lineales del polinomio q que da lugar a la ecucación $y^p = q(x)$. El paso iv es importante para encontrar los exponentes de los factores lineales de q. Finalmente, se junta lo anterior de los primeros cuatro pasos para dar lugar al paso v, mediante el cual se obtiene la ecuación para X.

EJEMPLO 8.1. Sea X la curva de Fermat de grado p primo mayor a 5. Según lo visto en [**8**], $Aut(X)$, el grupo de automorfismos de X es isomorfo a un producto semidirecto de S_3 con $C_p \times C_p$. $C_p \times C_p$ actúa como el conjunto de los automorfismos de la forma

$$f_{i,k}[x : y : z] = [a^i x : a^k y : z],$$

donde a es una raiz p-ésima primitiva de la unidad. S_3 actúa como el conjunto de las permutaciones de las coordenadas homogéneas de cada punto de X. Sea $g = f_{1,0}$. Como ya vimos, si $C_p =< g >$ entonces X/C_p tiene género cero, luego X es p-gonal. Como primer paso, busquemos $G = N_{Aut(X)}(C_p)$. Consideremos Λ, Γ_p y Γ como en el capítulo 2. C_p está contenido en $C_p \times C_p$, que es abeliano. Luego G contiene a $C_p \times C_p$ y por ello, tiene orden mayor o igual a p^2. Ahora, hay que ver si los elementos de S_3 están en G. Sea $h : X \to X$ definida por

$$h([x:y:z]) = [y:z:x]$$

Este automorfismo corresponde una permutación de las coordenadas homogéneas y por tanto pertenece a S_3. Observando que

$$\begin{aligned} h\circ g\circ h^{-1}([x:y:z]) &= h\circ g([z:x:y]) = h([az:x:y]) = [x:y:az] \\ &= [a^{p-1}x : a^{p-1}y : z] = f_{p-1,p-1}([x:y:z]), \end{aligned}$$

se tiene que h no pertenece a G. Sin embargo, si definimos $h' : X \to X$ como $h'([x:y:z]) = [x:z:y]$, se ve que

$$h'\circ g\circ h'^{-1}([x:y:z]) = h'\circ g([x:z:y])$$

$$= h([ax:z:y]) = [ax:y:z] = g([x:y:z]).$$

Se ve que h' está en G, conmuta con g y claramente es una involución. Se concluye que G es el grupo de orden $2p^2$ generado por h' y los elementos de $C_p \times C_p$. Luego $K = G/C_p$ tiene orden $2p$. Sólo hay dos posibilidades: que K sea isomorfo a C_{2p} o a D_p. Pero observamos que

$$\begin{aligned} h'\circ f_{0,1}\circ h'^{-1}([x:y:z]) &= h'\circ f_{i,k}([x:z:y]) = h'([x:az:y]) = [x:y:az] \\ &= [a^{p-1}x : a^{p-1}y : z] = f_{p-1,p-1}([x:y:z]). \end{aligned}$$

Concluimos que G no es abeliano.

Denote la clase en K de un elemento $z \in G$ arbitrario como $\overline{z}$. Sea $g' = f_{0,1}$. Como $f_{i,k} = f_{0,k}\circ f_{i,0}$, se tiene que $\overline{f_{i,k}} = \overline{g'^k}$. Por lo anterior,

$$h'\circ g' = g'^{-1}\circ g^{-1}\circ h = g'^{-1}\circ h\circ g^{-1}.$$

Es así que en K se satisface $\overline{h'\circ g'} = \overline{g'^{-1}\circ h}$.

K es generado por la clase de g' y la clase de h', pues en G todo elemento es de la forma

$$h\circ f_{i,k} = h\circ f_{0,k}\circ f_{i,0} = h\circ g'^k\circ g^i.$$

En conclusión, K es isomorfo a D_p, pues sus elementos son de la forma $\overline{h\circ g'^i}$.

Ahora, el segundo paso es encontrar las signaturas de Γ y Γ_p. Para encontrar la signatura de Γ, calculamos la ramificación de

$$\pi_K : X/C_p \to X/G.$$

Como K es isomorfo a D_p, por la Proposición 5.5, la signatura de Γ debe ser de la forma $(0; 2t, 2u, pv, p, ..., p)$. Por la estructura de D_p, sabemos que los subgrupos de orden 2 son conjugados entre sí. Por lo tanto, basta analizar los puntos fijos (si es que existen) de $\overline{h'}$ y $\overline{g'}$.

Sea $\alpha \in X/C_p$ un punto fijo de $\overline{h'}$. Sea $[x : y : z] \in \pi_{C_p}^{-1}(\{\alpha\})$. Existe l entero entre 0 y $p-1$ tal que

$$h'([x : y : z]) = [x : z : y] = [a^l x : y : z] = g^l([x : y : z]).$$

Entonces, existe c número complejo distinto de cero tal que

$$(x, z, y) = c(a^l x, y, z).$$

De aquí obtenemos que $c^2 z = z$. Si z es cero, entonces x e y también (por la igualdad anterior y por la ecuación de X). Luego $c^2 = 1$.

Si $c = -1$, entonces $z = -y$ como a es una raiz p-ésima de la unidad, $x = 0$. Claramente $z = -y$ cumple con la ecuación de X, y así, tenemos el punto $[0 : 1 : -1]$ en $\pi_{C_p}^{-1}(\{\alpha\})$.

Si $c = 1$ entonces $z = y$ y $a^l x = x$. Si $x = 0$, por la ecuación de X se llega a que $y = 0$. Luego x no es cero y esto hace que $l = 0$.

Por la ecuación de X se tiene que $x^p = -2y^p$, luego $x = wy$ donde $w^p = -2$ y así tenemos el punto $[w : 1 : 1]$ en $\pi_{C_p}^{-1}(\{\alpha\})$.

Claramente, en este último caso para todo w raiz de $x^p = -2$, $[w : 1 : 1] \in \pi_{C_p}^{-1}(\{\alpha\})$, y como son p puntos de esa forma, $\pi_{C_p}^{-1}(\{\alpha\})$ consiste de tales puntos.

La clase de $[0 : 1 : -1]$ en X/C_p es distinta de la clase de $[w : 1 : 1]$. Más aún, ambas clases son distintas en X/G (pues uno de ellos tiene coordenada cero). Observamos que $[0 : 1 : -1]$ es punto fijo de g, pero que $[w : 1 : 1]$ no. Como $g'([0 : 1, -1]) = [0 : a : 1]$, $[0 : 1, -1]$ no es punto fijo de g' y tampoco $[w : 1 : 1]$ para ningún w raiz de $x^p = -2$, y ambos puntos son fijos bajo h'.

Ahora, sea $\beta \in X/C_p$ un punto fijo de $\overline{g'}$ y $[t : u : v] \in \pi_{C_p}^{-1}(\{\beta\})$. Entonces existe k entero entre 0 y $p-1$ tal que

$$g'([t:u:v]) = [t:au:v] = [a^k t:u:v] = g^k([t:u:v]).$$

Luego, existe b no cero en $\mathbb{C}$ tal que $(t, au, v) = b(a^k t, u, v)$. Se saca de aquí que $bv = v$. Si $b \neq 1$ entonces $v = 0$, y por la ecuación de X se tiene que t y u son no nulos. Se saca de ahí que $1 = ba^k$ y $a = b$. Luego $k = p-1$. Y se tiene que $t^p + u^p = 0$, luego $[t:u:v] = [\lambda : -1 : 0]$ con λ una raiz p-ésima de la unidad. Si $b = 1$ entonces $u = 0$ y $k = 0$, luego $t^p + v^p = 0$ y $[t:u:v] = [\lambda : 0 : -1]$, con λ igual que en el caso anterior. Claramente ambos tipos de puntos dan clases distintas en X/C_p pero dan la misma clase en X/G pues $h'([\lambda : -1 : 0]) = [\lambda : 0 : -1]$.

Las dos clases de elementos fijos por $\overline{h'}$ en X/C_p dan imágenes distintas por π_K, y los elementos fijos por $\overline{g'}$ dan la misma imagen por tal proyección. Esto es coherente con el hecho de que el dato de ramificación de D_p es $(2,2,p)$. Además, una de las clases de elementos fijos por $\overline{h'}$ es un punto rama de la proyección $\pi_{C_p} : X \to X/C_p$ mientras que el resto de los puntos rama de esa aplicación no son puntos de ramificación de π_K. Sin embargo, tales puntos eran de la forma $[0 : w : 1]$ con w una raiz p-ésima de -1 y esos puntos pertenecen a la misma clase en X/G, pues dados dos puntos de esa forma, existe un k entero entre 0 y $p-1$ tal que uno es mandado al otro via g'^k (dado que multiplicar una raiz p-ésima de -1 por una raiz p-ésima de la unidad da una raiz p-ésima de -1), luego, todos pertenecen a la misma clase en X/G. Por lo tanto, la signatura de Γ es $(0; 2, p, 2p)$.

Usando la notación de la Proposición 5.5, se ve que $s = 0$, $b = c = 1$ y $a = p$, luego la signatura de Γ_p es de la forma $(0; p, ..., p)$ donde p se repite r veces con

$$r = \frac{(a-1)|K|}{(p-1)2} = p.$$

Ahora buscamos una identificación de X/C_p con $\widehat{\mathbb{C}}$ adecuada. Por Observación 5.4, la elección de tal identificación es arbitraria, salvo isomorfismo con K. En [**3**], página 120, hay una tabla (la cual incluimos en un apéndice) donde especifica representaciones de automorfismos de la esfera de Riemann. Para el caso que estamos estudiando, $K \cong D_p$ y D_p, de acuerdo a la tabla, al verlo como grupo de automorfismos de la esfera de Riemann, es conjugado al grupo generado por σ, donde $\sigma(z) = \xi z$ con ξ una raíz p-ésima primitiva de la unidad, y por τ donde $\tau(z) = 1/z$. Podemos hacer la identificación de $\overline{h'}$ con τ y de $\overline{g'}$ con

σ. Observemos ahora que los únicos puntos fijos bajo σ son 0 y ∞, y los puntos fijos bajo τ son 1 y -1. Para cada z fijo, por $\tau \circ \sigma^l$ con $1 \leq l \leq p-1$, se tiene que $1/(\xi^l z) = z$, luego $\xi^{-l} = z^2$, y por ello, $z = \pm\zeta$ con $\zeta^2 = \xi^{-l}$.

Ahora, veamos la acción de K en C_p. Consideremos como en el Capítulo 2, $\mathcal{A} : K \to Aut(C_p)$, b un generador canónico de C_p según el Teorema 5.2 y N el número tal que $\mathcal{A}(k_0)(b) = b^N$, con k_0 como en dicho teorema. Entonces $b = g^k$ con k entre 1 y $p-1$. Dado que la acción de K en C_p es por conjugación, es decir, que $\mathcal{A}(\overline{x})(b) = xbx^{-1}$, se tiene que $N = 1$, pues h' y g' conmutan con g, por lo que el núcleo de la acción es todo K.

Para obtener una ecuación de la forma $y^p = q(x)$ para X, primero encontraremos los factores lineales de q. Haciendo la identificación de K con D_p, estudiaremos las órbitas de D_p en $\widehat{\mathbb{C}}$ (ver Observación 5.3). De la tabla antes mencionada (Tabla 3 del Apéndice) se obtiene que hay 3 órbitas de largo menor a $|K| = 2p$. Estas son, $\{0, \infty\}$, $\{\xi^k | k : 0, ..., p-1\}$ y $\{\zeta^{2k-1} | \zeta^2 = \xi, k = 0, .., , p-1\}$. Como son puntos fijos de elementos de D_p, estos constituirán los términos libres de los factores lineales de q.

Ahora, sean ϱ y χ como en el Capítulo 2 (o ver Tabla resumen al inicio de este capítulo). Aplicaremos ahora el paso final. Como hay p puntos rama de π_{C_p}, la proyección canónica de X en X/C_p, debemos elegir una órbita de elementos de cardinalidad p para escribir la ecuación de X. Recordamos del Teorema 5.2, que los puntos rama se dividen en órbitas bajo K.

Usaremos la órbita con representante ξ y calcularemos las imágenes del generador canónico c_ξ correspondiente a ξ bajo ϱ. Por el Lema 5.3, como $N = 1$, todos los generadores canónicos llegan bajo ϱ a la misma imagen, luego, podemos suponer que esa imágen es $b = g^k$. Los demás generadores canónicos de Γ_p son conjugados de c_i (por Lema 5.1), y estos son generadores canónicos correspondientes a los demás elementos de la órbita de ξ, por Lema 5.2. Por lo tanto, los términos lineales correspondientes a los $(x - \xi^k)$ tienen exponente 1.

Con esto, agrupamos los datos en la siguiente Tabla:

Datos	Valores
Número de puntos rama de π_{C_p}	p
Puntos Rama de π_{C_p}	ξ^i, $i = 0, ..., p-1$
n_1, el exponente de $x - \xi$	1
N	1
$n_1 N^i$	1

De esta manera, por el Teorema 5.2, la ecuación para X es de la forma:

$$y^p = \prod_{i=0}^{p-1}(x - \xi^i) = x^p - 1.$$

OBSERVACIÓN 8.1. Si hacemos el trabajo con la órbita de ζ, se llega a una conclusión similar y la ecuación es dada por

$$y^p = \prod_{i=0}^{p-1}(x - \zeta^i) = x^p + 1.$$

En ambos casos es coherente con el hecho de que X es representado proyectivamente por la ecuación $x^p + y^p + z^p = 0$, es decir, el resultado anterior era esperado pero lo desarrollamos en detalles para exhibir el método.

EJEMPLO 8.2. Sea X la cuártica de Klein del Ejemplo 7.4 y sea f como en ese ejemplo. Es sabido que el grupo de automorfismos X es isomorfo a $PSL(2,7)$. Este grupo es de orden 168, número que es divisible por 7 y que ninguna potencia superior de 7 lo divide, luego si llamamos C_7 al grupo generado por f, entonces es un 7-subgrupo de Sylow de $Aut(X)$. Con ayuda de [**12**], se establece que $PSL(2,7)$ tiene dos generadores de orden 7, y ambos tienen normalizador de orden 21. Esto es coherente con el hecho de que dos subgrupos de Sylow del mismo orden son conjugados y sus normalizadores también son conjugados. Con esto, vemos que si G es el normalizador de C_7, entonces $K = G/C_7$ tiene orden 3. Entonces la tarea es encontrar un automorfismo de orden 3 en $Aut(X)$ que normalice C_7.

Sea $g : X \to X$ dada por $g([x : y : z]) = [y : z : x]$. Es claro que g está bien definida y es biyectiva. Veamos que es holomorfa. Sea $\alpha = [x : y : z] \in X$. Supongamos, sin perder generalidad que x es distinto de cero. Sea ϕ la carta local que envía la vecindad de α en y/x

(o z/x según sea el caso) y sea φ la carta local que envía la vecindad de $g(\alpha)$ a y/x o z/x según sea el caso, entonces $\varphi g \phi$ envía z en z la cual es holomorfa. Observamos que g tiene orden 3, y que

$$g \circ f \circ g^{-1}([x:y:z]) = g \circ f([z:x:y]) = g([z:a^2x:a^{-1}y])$$

$$= [a^2x : a^{-1}y : z] = [x : a^4y : a^{-2}z] = f^2([x:y:z]),$$

con lo que $g \in G$. Podemos suponer entonces que g y f generan G y que la clase de g genera K.

Considerando que X es 7-gonal, buscaremos una ecuación de la forma $y^7 = q(x)$ para X. Repitiendo los pasos del ejemplo anterior, tenemos Γ el grupo fuchsiano tal que $X/G = \mathbb{H}/\Gamma$ y Γ_7 el grupo fuchsiano tal que $X/C_7 = \mathbb{H}/\Gamma_7$. Buscaremos la signatura de Γ. Lo haremos de nuevo estudiando la ramificación de π_K.

Sea α un punto de ramificación de esa proyección y sea $[x:y:z] \in \pi_{C_7}^{-1}(\{\alpha\})$. Entonces α es un punto fijo bajo la clase de g, lo que implica que existe k entero entre 0 y 6 tal que

$$g([x:y:z]) = f^k([x:y:z]).$$

Es decir,

$$[y:z:x] = [x:a^{2k}y:a^{-k}z],$$

luego existe c distinto de cero en $\mathbb{C}$ tal que

$$(y,z,x) = c(x, a^{2k}y, a^{-k}z).$$

Concluimos que x, y, z son no nulos. Sin perder generalidad, suponemos $x = 1$. Deducimos de la primera y segunda coordenadas que $y = c$ y $z = c^2a^{2k}$. Además, de la tercera coordenada, obtenemos $c^3 = a^{-k} = a^{6k}$, luego, $c = wa^{2k}$ con w una raiz cúbica de la unidad. Luego $z = w^2a^{6k} = w^2a^{-k}$ y aplicando esto en la ecuación de X se tiene que

$$1 \cdot w^3a^{6k} + wa^{2k}w^6a^{-3k} + w^2a^{-k} = 0$$
$$\Rightarrow a^{-k}(1 + w + w^2) = 0.$$

Como a no es cero, w es una raíz cúbica primitiva de la unidad, y $[x : y : z] = [1 : wa^{2k} : w^2a^{-k}]$. Hay dos puntos de ramificación de π_K (uno por cada valor de w) con multiplicidad 3, pues no se puede enviar wa^k en w^2a^l mediante una ponderación por potencia de a.

Por otra parte, como son puntos fijos por la clase de g en K, sus imágenes bajo π_K son clases distintas en X/G. Esto es coherente con el hecho de que el dato de ramificación de C_3 (ver Tabla 1) al verlo como grupo de automorfismos sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, es (3,3), de acuerdo a la Tabla 1. Observando que los puntos de ramificación de π_K, no son imágenes de los puntos de ramificación de $\pi_{C_7} = F$ calculados en el Ejemplo 7.4, se tiene que la signatura de Γ es $(0; 3, 3, 7)$. Usando la notación de la Proposición 5.5, se tiene que $a = b = s = 1$, y con ello, $R = 3$, luego Γ_7 tiene como signatura $(0; 7, 7, 7)$, lo que es coherente con el hecho que hay 3 puntos rama de π_{C_7}.

Ahora, identificamos X/C_7 con $\widehat{\mathbb{C}}$ de modo que los puntos rama de π_{C_7} sean números complejos conocidos. Para ello, sea M la transformación de Moebius definida por

$$z \to \frac{z+1}{-3z-2}$$

Se puede ver que M tiene orden 3, pues su matriz asociada es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

A es una matriz de determinante 1, pues

$$1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-3) = -2 + 3 = 1.$$

Y el orden es 3 pues

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

Vamos a considerar K como el grupo generado por M, y los puntos rama de π_{C_p} los elegiremos como la órbita de 0 bajo K. Podemos hacer una elección así, por Observación 5.4. 0 no es punto fijo por M pues $M(0) = -1/2$. Además se puede ver que $M(-1/2) = (-1/2 + 1)/(3/2 - 2) = (1/2)/(-1/2) = -1$ y claramente $M(-1) = 0$. Luego $\{0, -1/2, -1\}$ será el conjunto de puntos que usaremos para la ecuación de X.

Sea ahora c el generador canónico de Γ_7 correspondiente a 0. Sean $\varrho : \Gamma \to G$, $\chi : \Gamma \to K$ los homomorfismos del Capítulo 2 y $\mathcal{A}$ la aplicación de la acción de K en C_7. Sea d una preimagen de M bajo χ. Entonces d tiene orden mayor o igual a 3. Del mismo modo que en el caso anterior, se ve que $\{c, dcd^{-1}, d^2cd^{-2}\}$ es un conjunto de generadores canónicos de Γ_7, cada uno correspondiente a 0, -1/2 y -1 respectivamente (por lema 5.2).

Ahora, al identificar M con la clase de g en K, y haciendo $b = f^k$ el generador canónico de C_7, observamos que

$$\mathcal{A}(M)(b) = gbg^{-1} = gf^kg^{-1} = f^{2k} = b^2,$$

luego $N = 2$. Supongamos que $\varrho(c) = b$. Entonces $\widehat{n}_1 = 0$. Anotamos entonces todos los datos en la siguiente Tabla:

Datos	Valores
Número de puntos rama de π_{C_7}	3
Puntos rama de π_{C_7}	0,-1/2,-1
N	2
n_i, $1 \leq i \leq 3$	1

Aplicando el lema 5.3, se tiene que $\varrho(d^icd^{-i}) = b^{2^i}$ para $i = 1, 2$. Luego, el exponente del factor $(x + 1/2)$ es 2 y el de $(x + 1)$ es 4. Así, la ecuación para X es

$$y^7 = x(x + 1/2)^2(x + 1)^4.$$

Observación 8.2. La clausura proyectiva de la curva dada por la ecuación

$$y^7 = x(x + 1/2)^2(x + 1)^4$$

es la curva Y en $\mathbb{CP}^2$ dada por la ecuación:

$$y^7 = x(x + z/2)^2(x + z)^4.$$

Con ayuda de [**14**], es posible determinar un isomorfismo concreto $\psi : P \to Y$ entre las dos expresiones algebraicas para la curva de Klein (recordamos que $P = x^3y + y^3z + z^3x$):

$$\psi([x : y : z]) = [-(2x + z)(x + z)^2 : 4^{1/7}(x + z)(2x + z)y : 4^{3/7}y^3].$$

Observamos que ψ ayuda a trasladar los automorfismos de una expresión algebraica a la otra, según en cuál sea más fácil la descripción.

EJEMPLO 8.3. Sea X la curva del Ejemplo 7.5 y considérese toda la notación usada en dicho ejemplo. Sea G el normalizador de C_3 entonces $G = Aut(X)$ y tiene orden 72, luego $K = G/C_3$ tiene orden 24. G no es abeliano, pues se puede ver (con ayuda de [**13**]) que B y C no conmutan. Por tanto, K no puede ser cíclico, y, según la Tabla 1, sólo puede ser un dihedral o S_4.

Usando el Teorema de Sylow, como $24 = 8{\cdot}3$, el número de $3-$subgrupos de Sylow no puede ser 8, pues no es congruente a 1 módulo 3. Luego, tiene que ser 4 ó 1.

Por otra parte, como A conmuta con B y C, todo elemento de G es de la forma DA^k donde D está formado por productos de B con C. Es claro que ningún producto de B con C forma A o su inverso, luego K es isomorfo al subgrupo de G generado por B y C, que llamamos T. Como C es de orden 3, el subgrupo que genera es un 3-subgrupo de Sylow. Usando [**13**], se puede ver que B no pertenece al normalizador de C en T. Luego, el número de 3-subgrupos de sylow de K es mayor a 1, en consecuencia es 4.

D_{12} sólo tiene un subgrupo de orden 3, por lo tanto, K es isomorfo a S_4 y es generado por un elemento de orden 2 y por uno de orden 4.

Sean U, V y W funciones de X en si mismo definidas por

$$U([x:y:z:t]) = [x:z:y:t]$$

$$V([x:y:z:t]) = [y:x:z:t]$$

$$W([x:y:z:t]) = [z:y:x:t].$$

Es claro que U, V y W están bien definidas (al ser permutaciones en dos de las tres primeras variables) y son biyectivas. Son holomorfas pues cada una se puede representar en $GL(4,\mathbb{C})$ de la siguiente forma:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Estas matrices asociadas están en T. Para demostrar esto, sea $F = \mathbb{Q}(w)$ y $det : G \to F^*$ la aplicación que envía una matriz Θ a $det(\Theta)$. Observamos que, con uso de [**13**], B y C tienen determinantes -1 y 1, luego, $det(T) := \{1, -1\}$.

De nuevo, con [**13**], se ve que las matrices de U, V y W tienen determinante -1, así que, independiente de si tales matrices o sus inversos aditivos están en G, entonces estarán en T. Si estuvieran en las clases laterales AT o A^2T entonces sus determinantes serían $\pm w$ ó $\pm w^2$, lo que no es posible.

Además, recordando cómo son los puntos de ramificación de π_{C_3}, se ve que cada uno de ellos es enviado a los demás por composiciones de estas tres funciones, por lo que esos puntos pertenecen a la misma órbita bajo G, luego sus imágenes bajo F están en la misma órbita bajo K. Como son 6 puntos rama, por lo señalado en el capítulo 2, entonces estos forman una órbita de cardinalidad 6.

En [**3**] (ver Tabla 3 del Apéndice), se especifica una presentación para S_4 como el grupo generado por las funciones f, g h, y j definidas por

$$\begin{aligned} f(z) &= iz \\ g(z) &= 1/z \\ h(z) &= \frac{z+1}{z-1} \\ j(z) &= \frac{z+i}{z-i}, \end{aligned}$$

se especifica además que una órbita de orden 6 es la formada por 0, 1, -1, i, $-i$ y ∞. Además, hay una órbita de cardinalidad 8 y una de cardinalidad 12. Esas son las únicas órbitas de cardinalidad menor a 24.

Identificaremos G con esa representación de S_4 y elegiremos que cada punto rama de π_{C_p} sea uno y sólo uno de los puntos de la órbita de 6 puntos, luego, los 5 puntos distintos de ∞ determinarán los factores lineales del polinomio de la ecuación de X. Esta elección es posible, por la Observación 5.4.

Al ver tales órbitas como puntos de X/G, son precisamente los puntos rama de π_K, lo que es coherente con el hecho de que el dato de ramificación de S_4 es (2,3,4) según la Tabla 1 (2 para la de cardinalidad 12, 3 para la de cardinalidad 8 y 4 para la de cardinalidad 6).

Como los puntos rama de π_{C_3} están en la órbita de cardinalidad 6, se tiene, por Proposición 5.5, que la signatura de Γ es $(0, 2, 3, 12)$. Usando la notación de dicha proposición, se tiene que $s = 0$, $a = b = 1$ y $c = 3$, luego $R = 6$, lo que coincide con el hecho de que hay 6 puntos rama de π_{C_3}.

Sean Γ y Γ_3 los grupos fuchsianos relacionados con G y C_3. Sea c_0 el generador canónico de Γ_3 correspondiente a 0. Por tanto, los otros generadores canónicos son conjugados de c_0, de acuerdo al Lema 5.1.

Ahora, sea $\mathcal{A}$ la aplicación de la acción de K en C_3, y sean b y N como en el Teorema 5.2. Como A es el generador de C_3 y B y C conmutan con A, la acción de K en C_3 es trivial. Por un razonamiento similar al Ejemplo 8.1, se ve que $N = 1$.

Con esto, podemos razonar igual que en dicho ejemplo y podemos suponer que todos los generadores canónicos llegan a la misma imagen, la que podemos suponer que es b. Anotamos los datos en la siguiente tabla:

Datos	Valores
Número de puntos rama de π_{C_3}	6
Puntos rama de π_{C_3}	0, 1, -1, i, $-i$, ∞
N	1
n_i, $i = 1, ..., 6$	1

Por lo tanto, X tiene como ecuación:

$$y^3 = x(x-1)(x+1)(x-i)(x+i) = x^5 - x.$$

EJEMPLO 8.4. Sea X la curva de Bring del Ejemplo 7.6 y considérese toda la notación usada en dicho ejemplo. Es claro que f, al ser visto como permutación en S_5, se corresponde con el ciclo (1 2 3 4 5). Usando **[12]**, se observa que el normalizador del subgrupo de S_5 generado por (1 2 3 4 5) es generado por esa misma permutación y por $(2, 4, 5, 3)$ y tiene orden 20. Luego, el normalizador de C_5 es generado por f y por $g : X \to X$ definida por

$$g([x : y : z : t : u]) = [x : z : u : y : t].$$

Este automorfismo tiene orden 4 y $K = G/C_5$ tiene orden 4. Es claro que la clase de g en K tiene orden 4, por lo que K es cíclico de orden 4, generado por $\overline{g}$.

Sabemos que existen puntos rama de π_K, pues C_4 tiene dato de ramificación (4,4). En vez de calcularlos, veamos si los puntos rama de π_{C_5}, que son las clases en X/C_5 de puntos de la forma $[1 : c : c^2 : c^3 : c^4]$ con c raíz quinta primitiva de la unidad, son puntos de ramificación de π_K.

Observamos que

$$g([1 : c : c^2 : c^3 : c^4]) = [1 : c^2 : c^4 : c : c^3] = [1 : c^2 : c^4 : c^6 : c^8].$$

Es claro que la clase de $[1 : c : c^2 : c^3 : c^4]$ en X/C_5 no queda fija por $\overline{g} \in K$, luego $\overline{g}$ permuta los puntos rama de π_{C_5}. Como los estabilizadores de puntos en X/C_5 sólo pueden tener orden 1 ó 4 (por el dato de ramificación de K), el estabilizador en K de la clase de $[1 : c : c^2 : c^3 : c^4]$ en X/C_5 tiene orden 1. Concluimos que la signatura de Γ es $(0; 4, 4, 5)$.

Usando la Proposición 5.5 se tiene que $s = a = b = 1$ y con ello, $R = 4$. Por lo tanto, la signatura de Γ_5 es $(0; 4, 4, 4, 4)$, lo que coincide con el hecho de que los puntos rama de π_{C_5} son 4.

Haremos la identificación de X/C_5 con $\widehat{\mathbb{C}}$ de una manera análoga al caso de la curva de Klein, es decir, eligiendo los puntos rama de π_{C_5} de modo que sean la órbita de una transformación de Moebius de orden 4, usando la Observación 5.4.

Sea M la transformación de Moebius definida por

$$M(z) = iz - i + 1$$

Componiendo varias veces M se ve que para cada k entero positivo se tiene que:

$$M^k(z) = i^k z - i^k + 1$$

En particular, si $k = 4$ se ve que

$$M^k(z) = i^4 z - i^4 + 1 = z + 1 - 1 = z$$

Luego, M tiene orden 4.

Elegiremos los puntos rama de π_{C_5} como la órbita de 0 bajo M. Usando la formula para M^k se ve que $M^k(0) = 1 - i^k$. Sean $\xi_k = M^k(0)$ con $k = 0, 1, 2, 3$. Identificamos $\overline{g}$ con M de modo que K es generado por M.

Sean $\varrho : \Gamma \to G$ y $\chi : \Gamma \to K$ los homomorfismos del capítulo 2 (ver Tabla resumen al inicio de este capítulo). Sea c el generador canónico correspondiente a $0 = \xi_0$ y d una preimágen de M bajo χ. Entonces, de la misma manera que en los ejemplos anteriores, $\{c, dcd^{-1}, d^2cd^{-2}, d^3cd^{-3}\}$ es un conjunto de generadores canónicos que genera Γ_5, cada uno correspondiente a uno y sólo uno de los ξ_k.

Sean $\mathcal{A}$ la aplicación de la acción de K en C_5, b y N como en el Teorema 5.2. Entonces $b = f^k$ para algun k entero. Al identificar M con $\overline{g}$, se ve que $\mathcal{A}(M)(b) = gbg^{-1}$. Observando que

$$\begin{aligned} g(f(g^{-1}([x:y:z:t:u]))) &= g(f([x:t:y:u:z])) = g([t:y:u:z:x]) \\ &= [t:u:x:y:z] = f^3([x:y:z:t:u]) \end{aligned}$$

se cumple que $N = 3$.

Entonces, aplicando el Lema 5.3, con $\varrho(c) = b^2$, y anotando los datos en la siguiente tabla:

Datos	Valores
Número de puntos rama de π_{C_5}	4
Puntos rama de π_{C_5}	$1 - i^i, i = 0, \dots, 3$
N	3

se ve que $\varrho(d^icd^{-i}) = b^{3^i}$, luego

$$\varrho(dcd^{-1}) = b^3$$

$$\varrho(d^2cd^{-2}) = b^{3^2} = b^9 = b^4$$
$$\varrho(d^3cd^{-3}) = b^{3^3} = b^{27} = b^2$$

Con esto, el exponente del factor $x - (1 - i)$ es 3, el de $x - 2$ es 4 y el de $x - (1 + 1)$ es 2. Por lo tanto, X tiene como ecuación:

$$y^5 = \prod_{i=0}^{3}(x - \xi_i)^{n_i} = x(x - 1 + i)^3(x - 2)^4(x - 1 - i)^2$$

OBSERVACIÓN 8.3. En [**3**],la curva de Bring también aparece como ejemplo, luego de aplicar el método aquí expuesto, determina que una ecuación plana para esa curva es de la forma

$$y^5 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)^4$$

Al analizar la curva definida por dicha ecuación, se ve que tiene un automorfismo de orden 10, el cual se define por

$$(x, y) \to (-x, ay)$$

Donde a es una raíz quinta primitiva de la unidad. Esto contradice el hecho de que el grupo de automorfismos de la curva de Bring es S_5, que no tiene elementos de orden 10.

Pudimos determinar que el error se produjo al calcular que la acción de K en C_p corresponde a $\mathcal{A}(M)(b) = b^4$, lo que es incorrecto. Esto motivó a estudiar este ejemplo y obtener una verdadera representación plana de la curva de Bring.

9. Reflexiones sobre el caso no primo.

Ahora, la pregunta es: ¿qué pasa cuando el grupo cíclico n-gonal es de orden n no necesariamente primo?. La teoría antes expuesta en los capítulos anteriores expone superficies n-gonales con n primo para las cuales se pueden encontrar ecuaciones explícitas. Interesa saber si se puede extender el mismo método al caso cuando n no es primo. Es claro que la Observación 5.2 vale para el caso cuando $p = n$ no es primo, por lo que existe la posibilidad de que se pueda encontrar una ecuación análoga para una (de hecho, cualquier) superficie n-gonal X.

Pensemos por ejemplo el caso en que n es un cuadrado de un número primo p. Cuando estudiamos el caso primo, se ve que los puntos rama de la aplicación π_{C_p} tienen índices de ramificación p. En el caso en que $n = p^2$, con p primo, la acción de un grupo cíclico C_n sobre una superficie X puede ser tal que algunos de los puntos rama de π_{C_n} tengan índices de ramificación p, por lo que la acción del grupo cíclico no tendría *ramificación total*, es decir, que cada punto rama tenga una sola preimágen de multiplicidad p^2. Los siguientes ejemplos son una muestra de que es posible que una acción de un grupo cíclico n-gonal tenga ramificación total o no.

EJEMPLO 9.1. Sea X la curva de Fermat de grado p^2 con p un primo mayor o igual a 2. Sea f como en el Ejemplo 7.3 y sea G el grupo generado por f. Por lo antes hecho, se ve que todos los puntos de ramificación de la proyección de X en X/G tienen multiplicidad p^2 y eso hace que X sea p^2-gonal con G el grupo p^2-gonal respectivo y la ramificación es total.

EJEMPLO 9.2. Sea X la superficie hiperelíptica definida por la ecuación $y^2 = q(x)$ donde

$$q(x) = x(x^4 - 1)(x^8 + 14x^4 + 1).$$

El polinomio q tiene grado 13, luego el género de X es 6. Además se ve que $q(-x) = -q(x)$.

Sea $f : X \to X$ definida por $f(x, y) = (-x, iy)$. Como $q(-x) = -q(x)$, se ve que f está bien definida. Además, es claro que f es biyectiva.

Probemos que f es holomorfa. Sea (x, y) en X. Si $q'(x) \neq 0$, localmente f es de la forma $z \to iz$. Si $y \neq 0$, localmente f es de la forma $z \to -z$. Por lo tanto, f es holomorfa. En el primer caso usamos y como parámetro, en el segundo x.

Finalmente, vemos que f tiene orden 4 y que f^2 es la involución hiperelíptica.

Sea C_4 el grupo generado por f y $\pi_{C_4} : X \to X/C_4$ la proyección canónica. Calculamos los puntos de ramificación de π_{C_4}. Es claro que los únicos puntos fijos de f son $(0, 0)$ y el "punto en infinito", que llamamos z. Por otra parte, los puntos fijos de f^2 son z y los de la forma $(a, 0)$ con a raiz de q y es claro que $(0, 0)$ es uno de esos puntos. Luego, tenemos 12 puntos de ramificación de π_{C_4} con multiplicidad 2 y 2 puntos de ramificación con multiplicidad 4.

Sea g el género de X/C_4. Sabemos que el género de X es 6 y que $deg(\pi_{C_4}) = 4$. Aplicando la fórmula de Riemann Hurwitz se tiene que:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 6 - 2 &= 4(2g - 4) + 2 \cdot 3 + 12 \\ \Rightarrow 10 &= 8g - 8 + 18 = 8g + 10. \end{aligned}$$

De lo que se ve que $g = 0$, luego X es una superficie 4-gonal, pero la ramificación de la aplicación cociente no es total en todos los puntos rama.

Los ejemplos anteriores muestran que las ramificaciones de superficies n-gonales no siempre son totales, para n no primo.

Ahora bien, sea X una superficie p^2-gonal, con p primo y sea g su género. Sea k_i el número de puntos rama con multiplicidad p^i con $i = 1, 2$. Entonces por la fórmula de Riemann-Hurwitz se tiene que:

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= -2p^2 + k_2(p^2 - 1) + k_1(p - 1) \\ \Rightarrow 2g - 2 + 2p^2 &= k_2(p^2 - 1) + k_1(p - 1) \\ 2g + 2(p^2 - 1) &= k_2(p^2 - 1) + k_1(p - 1). \end{aligned}$$

Sabemos que existen soluciones a la ecuación diofántica en variables k_2 y k_1

$$2g + 2(p^2 - 1) = k_2(p^2 - 1) + k_1(p - 1),$$

si y sólo si el máximo común divisor de $p^2 - 1$ y $p - 1$ divide a $2g$. Pero ese máximo común divisor es igual a $p - 1$. Para distintos valores de p y g se pueden ir descartando casos de posibles acciones de grupos cíclicos en superficies de un género dado que las hagan p^2-gonales.

Supongamos que $p = g = 5$. Entonces la ecuación diofántica queda:

$$58 = 24k_2 + 4k_1,$$

Pero 58 no es divisible por 4, que es el m.c.d. de 24 y 4. Luego, no hay Superficies 25-gonales de género 5.

Así, si la ecuación diofántica

$$2g - 2 + 2p^2 = k_2(p^2 - 1) + k_1(p - 1)$$

tiene soluciones para determinados valores de g y p, el siguiente objetivo sería encontrar alguna superficie p^2-gonal de género g.

Ahora, supongamos que X es una superficie p^2-gonal y C_{p^2} su grupo p^2-gonal. Si usamos la notación del Capítulo 2, entonces se ve que la signatura de $\Gamma_{C_{p^2}}$ es de la forma

$$(0; \underbrace{p, ..., p}_{\text{s veces}}, \underbrace{p^2, ..., p^2}_{\text{s' veces}}),$$

donde s y s' dependen de la geometría de la acción del grupo p-gonal en la superficie. Si s es cero, la ramificación es total.

Analizando los datos del Capítulo 2, se ve que el hecho de que n sea primo afecta a la signatura de Γ_n, es decir, hace que la ramificación de π_{C_n} sea total, y en que $Aut(C_n)$ es cíclico. Todo eso ayuda a desarrollar la teoría antes expuesta. Además, al estudiar $\mathcal{A} : K \to Aut(C_n)$, si $k \in K$ es tal que genera a $\mathcal{A}(K)$ y $\mathcal{A}(k)(b) = b^N$, entonces N es primo relativo a n.

Ahora, veremos un ejemplo que valida la conjetura para el caso $n = p^2$ y ramificación total, p primo:

EJEMPLO 9.3. Sea X la curva plana afín definida por $y^2 = x^8 - 1$, y sean Y, U y V como en la sección de superficies hiperelípticas. Sea Z la superficie hiperelíptica obtenida a partir de X, la cual tiene género 3. Sea σ la involución hiperelíptica.

Sea $f : Z \to Z$ definida por $f(x, y) = (ix, y)$. Como $(ix)^8 = x^8$, entonces f está bien definida. Claramente es biyectiva, holomorfa y tiene orden 4.

Sea C_4 el grupo generado por f y sea π_{C_4} la proyección canónica de X en X/C_4 . Calculemos los puntos rama de π_{C_4}. Estos son los puntos fijos por f. En X, unos puntos fijos son los puntos de la forma $(0, \pm i)$. En Y, que es la curva definida por $w^2 = 1 - z^8$, unos puntos rama son los puntos de la forma $(0, \pm 1)$. Claramente estos puntos son distintos y es claro también que estos puntos son los únicos puntos fijos de f^2. Por lo tanto, la ramificación de π_{C_4} es total, con 4 puntos de ramificación de multiplicidad 4. Como el grado de π_{C_4} es 4 y el género de Z es 3, aplicando la fórmula de Riemann-Hurwitz con g el género de X/C_4 se ve que:

$$2 \cdot 3 - 2 = 8g - 8 + 4 \cdot 3$$

$$\Rightarrow 4 = 8g + 4.$$

Por lo que $g = 0$, luego, Z es 4-gonal. Observe que f^2 no es la involución hiperelíptica.

En [**11**], se tiene que el grupo de automorfismos de Z es isomorfo a

$$V_8 = \{a, b | a^4 = b^8 = (ab)^2 = (a^{-1}b)^2 = 1\}$$

Usando [**12**], se ve que V_8 tiene orden 32, y que el máximo de los órdenes de sus elementos es 8. Al estudiar los elementos de orden 4, se observa que los subgrupos que generan tienen normalizadores de ordenes 8 ó 32. En el caso de C_4, observamos que el automorfismo g de Z de orden 8 definido por

$$g(x, y) = (\frac{1+i}{\sqrt{2}}x, y)$$

satisface $g^2 = f$, luego g conmuta con f.Es claro que g, y por ende, f, conmutan con la involución hiperelíptica, luego, el normalizador de C_4 tiene orden mayor a 8, por lo tanto, es el grupo completo V_8. Observamos que $K = Aut(Z)/C_4$ tiene orden 8.

Sea $h : Z \to Z$ definida como

$$h(x, y) = \begin{cases} (1/x, iy/x^4) & \text{si } (x, y) \in U \\ (0, iy) \in Y & \text{si } (x, y) = (0, \pm i) \in X \\ (0, iy) \in X & \text{si } (x, y) = (0, \pm 1) \in Y \end{cases}$$

Se puede ver que h está bien definida, es biyectiva, es holomorfa y que h^2 es la involución hiperelíptica, por lo que h es de orden 4. También se puede ver que h no conmuta con g pues en la primera coordenada, $h \circ g$ envía x no cero en $1/((1+i)x/\sqrt{2})$ y $g \circ h$ envía x no cero en $(1+i)/(\sqrt{2}x)$. Pero h^2 conmuta con g, por lo antes explicado. Con esto al ver $\overline{h}$ y $\overline{g}$ en K, se ve que $\overline{g}$ tiene orden 2 (pues $g^2 = f$), y que $\overline{h}$ tiene orden 4. Entonces es claro que K es isomorfo a D_4.

No calcularemos la signatura de Γ como en los otros ejemplos, pero como los puntos rama de π_{C_4} son 4 con multiplicidad 4, se ve que Γ_4 tiene signatura $(0; 4, 4, 4, 4)$, pues por la Proposición 5.2, la ramificación de Γ_4 coincide con la de π_{C_4}.

Identificamos K con D_4 de la misma forma que en el Ejemplo 8.1 (ver Tabla 3 del Apéndice), recordemos de la Observación 5.4 que tal identificación puede ser efectuada, de modo que los puntos rama de π_{C_4} son el conjunto formado por $1, i, -1, -i$. Identificando $\overline{h}$ con la transformación de Moebius dada por $M(z) = iz$, entonces, la órbita de 1 bajo M es dicho conjunto.

Ahora, estudiamos la acción $\mathcal{A}$ de K en C_4. Sean N y $b = f^j$ como antes. Ya vimos que g conmuta con f, pero observamos que si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} hfh^{-1}(x,y) &= hf(1/x, -iyx^4) = h(i/x, -iyx^4) \\ &= (-ix, y) = f^3(x,y). \end{aligned}$$

Como los $(x, y) \in U$, al verlos en Z, forman un conjunto denso (por la conexidad de X y el hecho que los puntos que no están en U forman un conjunto finito), se tiene que $hfh^{-1} = f^3$, luego, $N = 3$.

Finalmente, sea c el generador canónico de Γ_4 correspondiente al punto rama 1. Sean ϱ y χ los homomorfismos del Capítulo 2 y sea d una preimágen de M bajo χ. Se tiene que el conjunto

$$\{c, dcd^{-1}, d^2cd^{-2}, d^3cd^{-3}\}$$

genera Γ_4, con cada generador canónico correspondiente a 1, i, -1 y $-i$ respectivamente. Podemos suponer que $\varrho(c) = b$. Anotamos los datos en la tabla siguiente:

Datos	Valores
Número de puntos rama de π_{C_4}	6
Puntos rama de π_{C_3}	1, -1, i, $-i$
N	3
n_1	1

Aplicando el Lema 5.3 se tiene que:

$$\begin{aligned} \varrho(dcd^{-1}) = b^3 = \varrho(d^3cd^{-3}) \\ \varrho(d^2cd^{-2}) = b \end{aligned}$$

Por lo tanto, el exponente del factor $x+1$ es 1 y el de $x-i$ y $x+i$ es 3. Así, uno podría esperar que una ecuación para Z como superficie 4-gonal fuese

$$y^4 = (x-1)(x-i)^3(x+1)(x+i)^3 = (x^2-1)(x^2+1)^3$$

Verificando con [**14**], se ve que Z es isomorfa a la curva definida por la ecuación encontrada anteriormente. Entonces se ve que el método de Wootton sirve en este caso.

A raiz del último ejemplo, se podría establecer la siguiente conjetura:

Sea $n = p^2$, p primo. X una superficie n-gonal con grupo n-gonal C_n tal que la ramificación de π_{C_n} sea total, es decir, todos los puntos de ramificación de tal aplicación tienen multiplicidad n. Sea $\{a_1, ..., a_r\}$ el conjunto de los puntos rama de π_{C_n} que sean distintos de ∞. Suponga que se verifican todas las hipótesis del Teorema 5.1. Entonces X es isomorfa a la curva definida por la ecuación:

$$y^n = \prod_{i=1}^{r}(x - a_i)^{n_i}.$$

Apéndice.

Incluimos aquí parte de la página del trabajo [**3**], la cual contiene la Tabla 3, utilizada en diversos puntos del Capítulo 3.

Bibliografía

1. H. FARKAS & I. KRA, *Riemann Surfaces.* Springer-Verlag New York Inc. (1980).
2. R. MIRANDA, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces.*
3. A. WOOTON, *Defining equations for cyclic prime covers of the Riemann Sphere*, Israel Journal of Mathematics 157 (2007) ,103-122.
4. S. A. BROUGHTON & A. WOOTON, *Cyclic n-gonal surfaces and their automorphism groups*, UNED Geometry Seminar (2009).
5. C. SAH, *Groups related to Compact Riemann Surfaces*, Acta Mathematica 123 (1969).
6. G. JONES & D. SINGERMAN, *Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint*, Cambridge University Press (1987).
7. G. SPRINGER, *Introduction to Riemann Surfaces*, Addison-Wesley Publishing Company (1957).
8. P. TZERMIAS, *The group of automorphisms of the Fermat Curve*, Journal of Number Theory 53, 173-178 (1995).
9. I. KURIBAYASHI & A. KURIBAYASHI, *On Automorphism Groups of Compact Surfaces of Genus 4*, Proc. Japan Acad. 62 Ser. A, 65-68 (1986).
10. G. WÜSTHOLZ, *A Panorama of Number Theory or The View from Baker's Garden*, Cambridge University Press (2002).
11. T. SHASKA, *Hyperelliptic Curves of Genus 3 with Prescribed Automorphism Group.*
12. THE GAP GROUP, *GAP Versión 4.4.12*, (2008), http://www.gap-system.com.
13. MAPLESOFT, *Maple 9*, (2003), http://www.maplesoft.com/products/maple/.
14. COMPUTATIONAL ALGEBRA GROUP, *Magma Computer Algebra System V2*, (2011), http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/.
15. E. BECK, *Bring's Curve*, http://www.math.uga.edu/~davids/ivrg/
16. W. J. HARVEY, *On Branch Loci in Teichmüller Space*, Trans. Amer. Math. Soc. 153 (1971), 387-399