NORMA ESPINORIAL SOBRE EL GRUPO DE SIMILITUDES

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magister en Ciencias Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS ~~BASICAS~~
~~Y FARMACEUTICAS~~

por

MICHAEL LEO NEUBURG GRUND

Marzo, 1982

Patrocinante: Dr. Ricardo Baeza R.

Facultad de Ciencias
Básicas y Farmacéuticas

Universidad de Chile

I N F O R M E   D E   A P R O B A C I O N

T E S I S   D E   M A G I S T E R

ESCUELA

Se informa a la ~~Comisión~~ de Postgrado de la Facultad de Ciencias Básicas y Farmacéuticas que la Tesis de Magister presentada por el Candidato

MICHAEL LEO NEUBURG GRUND

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Matemáticas

Patrocinante de Tesis	Ricardo Baeza R.
Comisión Informante de Tesis	Camilo Quezada B.
	César Buequeño M.
	Rambo Moresi

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

Dieudonné en "La geometrié des groupes classiques" y C. Chevalley en "The algebraic theory of spinors", dan una definición de la norma espinorial sobre el grupo ortogonal $O(q)$ relativo a una forma cuadrática q , obteniendo en particular el siguiente resultado:

Si q es isotrópica, de dimensión mayor de 2 e índice positivo, entonces la sucesión

$$1 \to [O^+(q), O^+(q)] \to O(q) \xrightarrow{\theta} k^*/k^{*2} \to 1$$

es exacta.

$[O^+(q), O^+(q)]$ indica aquí el grupo de conmutadores del grupo de rotaciones $O^+(q)$ y $\theta : O(q) \to k^*/k^{*2}$ la norma espinorial. (Véase Cap III, § 1 para las definiciones detalladas).

<u>El problema de esta tesis es</u>: Extender la definición y resultados antes expuestos al grupo de similitudes $\Sigma(q)$.

María J. Wonenburger en "The Clifford algebras and the groups of similitudes" dá esta definición, pero sobre un cuerpo de característica distinta de 2 y en un trabajo bastante denso que al final pierde el objetivo del mismo.

Este trabajo consistirá entonces en reordenar las ideas dadas por Wonenburger y demostrar que los resultados son independientes de las características del cuerpo.

Para ello damos en el Capítulo I las nociones necesarias para desarrollar el trabajo. En particular definiciones apropiadas de álgebra $(C(M,q))$, grupo (Γ) y grupo extendido (T) de Clifford, válidas para cuerpos de característica cualquiera.

En el Capítulo II veremos que, igual como existe un epimorfismo ψ de Γ sobre $O(q)$ existe un epimorfismo ψ' de T sobre $\Sigma(q)$.

Obtendremos así la sucesión exacta

$$1 \to \Delta^*(q) \to \mathrm{T} \xrightarrow{\psi'} \Sigma(q) \to 1$$

donde $\Delta(q)$ es extensión cuadrática de k (definido en Cap I. 4.6.2).

Estos resultados se obtienen suponiendo que la dimensión del espacio cuadrático es par, ya que de lo contrario se puede reducir el asunto al caso del grupo ortogonal.

En el Capítulo III estudiaremos la norma espinorial sobre el grupo de similitudes obteniéndose así los siguientes resultados:

Si $\dim M = 4r + 2$ entonces existe homomorfismo $\theta' : \Sigma(q) \to k^*/N(\Delta^*(q))$ y si $\dim M = 4r$ entonces existe función $\theta' : \Sigma(q) \to \Delta^*/(\Delta^*(q))^2$. Con θ' definida por $\theta'(\sigma) \equiv \lambda(s)(\mathrm{mod}\ N(\Delta^*(q)))$ o $\theta'(\sigma) \equiv \lambda(s)(\mathrm{mod}(\Delta^*(q))^2)$ respectivamente, donde $s \in \mathrm{T}$ es tal que $\psi'(s) = \sigma$

$\theta'(\sigma)$ es la norma espinorial de la similitud σ

Además se obtiene que si $\dim M = 4r + 2$ e índice de q es positivo entonces la sucesión

$$1 \to \Sigma^2(q) \to \Sigma(q) \xrightarrow{\theta'} k^*/N(\Delta^*(q)) \to 1$$

es exacta, donde $\Sigma^2(q)$ es el subgrupo de $\Sigma(q)$ generado por los cuadrados de $\Sigma(q)$.

CAPITULO I

DEFINICIONES Y NOCIONES PRELIMINARES

§ 1. Formas Cuadráticas

M denotará un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo k.

1.1. Definición: Una forma cuadrática q sobre M es una función $q : M \to k$ tal que

i) $q(\alpha x) = \alpha^2 q(x) \qquad \forall \alpha \in k, \quad \forall x \in M$

ii) La aplicación $Bq : M \times M \to k$ definida por

$$B_q(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$$

es una forma bilineal simétrica sobre M.

El par (M,q) lo llamamos espacio cuadrático.

1.2. Matriz asociada a la forma q

Sea (M,q) espacio cuadrático sobre k.

$$M = kx_1 \oplus \dots \oplus kx_n$$

La matriz $A = (B_q(x_i,x_j))$ se llama matriz asociada a q respecto a la base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de M. Si tomamos otra base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de M y $B = (B_q(e_i,e_j))$ es la matriz asociada a q respecto a esta base entonces, $B = CAC^t$ donde C es la matriz de paso de una base a otra.

Se tiene $\det B = \det A\,(\det C)^2$. Luego en k^*/k^{*2}

$\det B = \det A$.

1.3. Definiciones varias

1.3.1. (M,q) se llama no singular (o regular) ssi $\det A \neq 0$ para algún A asociado a q .

1.3.2. $D_k(q) = \{\alpha \in k \mid \exists x \in M\ ,\ x \neq 0 \ \text{y}\ q(x) = \alpha\}$

1.3.3. (M,q) se dirá isotrópico ssi $0 \in D_k(q)$.

1.3.4. (M,q) se dirá anisotrópico ssi $0 \notin D_k(q)$.

1.3.5. (M,q) se dirá universal ssi $D_k(q) = k$.

1.3.6. Un plano hiperbólico es un espacio $\mathbb{H} = ke_1 \oplus ke_2$ con $q(e_1) = q(e_2) = 0$ y $B_q(e_1,e_2) = 1$.

Un espacio hiperbólico es suma de planos hiperbólicos.

Nota: $D_k(\mathbb{H}) = k$

1.3.7. Sea caract $k = 2$, una base $\{e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n\}$ de M se dirá base simpléctica del espacio (M,q) relativa a la forma B_q ssi $q(e_i) = a_i \in k$, $q(f_j) = b_j \in k$, $B_q(e_i,f_j) = \delta_{ij}$ (donde δ_{ij} es 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$) y $M = \langle e_1,f_1\rangle \perp \ldots \perp \langle e_n,f_n\rangle$.

1.4. Operaciones con formas cuadráticas

1.4.1. Suma ortogonal:

Sean (M_1,q_1) y (M_2,q_2) dos espacios cuadráticos. Se define: $(M_1,q_1) \perp (M_2,q_2) = (M_1 \oplus M_2, q_1 \perp q_2)$

donde

$$(q_1 \perp q_2)(x_1,x_2) = q_1(x_1) + q_2(x_2)$$

Se tiene que $(M_1 \oplus M_2, q_1 \perp q_2)$ es un espacio cuadrático.

1.4.2. Producto tensorial

Sean (M_1,q_1) y (M_2,q_2) dos espacios cuadráticos, se define

$$(M_1,q_1) \otimes (M_2,q_2) = (M_1 \otimes M_2, q_1 \otimes q_2) \quad \text{donde}$$

$$(q_1 \otimes q_2)(x_1 \otimes x_2) = 2q_1(x_1)q_2(x_2) \ .$$

Teniéndose así que $(M_1 \otimes M_2, q_1 \otimes q_2)$ es un espacio cuadrático.

1.5. Propiedades

En este párrafo suponemos q regular. Además sólo enunciaremos propiedades fundamentales que se ocupan en este trabajo.

1.5.1. Proposición: Toda forma isotrópica contiene un plano hiperbólico. Luego, si (M,q) es isotrópico, entonces es universal.

1.5.2. Proposición: Si (M,q) es isotrópico entonces existen $e,f \in M$ con $q(e) = q(f) = 0$ y $B_q(e,f) = 1$.

Dem. Sea $e \in M$ isotrópico. Por ser (M,q) no singular existe $g \in M$ tal que $B_q(e,g) \neq 0$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer $B_q(e,g) = 1$.

Sea $f = \lambda e + g$ con $\lambda \in k$, debemos demostrar que existe

$\lambda \in k$ de modo que $B_q(e,f) = 1$ y $q(f) = 0$.

Se tiene:

$$B_q(e,f) = \lambda B_q(e,e) + B_q(e,g) = 1 \Rightarrow B_q(e,f) = 1 \quad \forall \lambda \in k$$ ya

que $B_q(e,e) = 0$ cualquiera sea caract k .

$$q(f) = \lambda^2 q(e) + q(g) + \lambda B_q(e,g) = 0 \Rightarrow \lambda = -q(g) \in k \ .$$

q.e.d.

1.5.3. <u>Teorema de descomposición de Witt</u>: Todo espacio cuadrático (M,q) se descompone en suma ortogonal $(M_s,q_s) \perp (M_h,q_h) \perp (M_a,q_a)$ donde M_s es totalmente isotrópico, M_h es hiperbólico y M_a es anisotrópico.

<u>Demostración</u>: Ver [4] Teorema 4.1. pág. 15.

1.6. <u>Definición</u>: El índice de una forma cuadrática q es la dimensión del subespacio isotrópico de (M,q) .

1.7. <u>Espacios isométricos</u>

1.7.1. <u>Definición</u>: Sean (M_1,q_1) y (M_2,q_2) espacios cuadráticos. Diremos que ellos son isométricos (Notación $\simeq$) ssi existe un isomorfismo lineal $f : M_1 \to M_2$ tal que $q_2(f(x)) = q_1(x) \quad \forall x \in M_1$.

1.7.2. <u>Teorema de cancelación de Witt</u>: Sean q, q_1 y q_2 formas cuadráticas. Entonces: $q \perp q_1 \simeq q \perp q_2 \Rightarrow q_1 \simeq q_2$.

<u>Demostración</u>: Ver [4] Teorema 4.2. pág. 15 .

§ 2. Grupo ortogonal

2.1. Definición: Una aplicación ortogonal en un espacio cuadrático (M,q) es una transformación lineal $\sigma : M \to M$ tal que $q(\sigma(x)) = q(x) \quad \forall x \in M$.

Designaremos por

$$O(q) = \{\sigma : M \to M \mid \sigma \text{ es transformación ortogonal}\} .$$

2.2. Observaciones:

Para toda forma q no singular $(O(q),0)$ es un grupo, llamado grupo ortogonal de (M,q) .

En este caso vale que $\forall \sigma \in O(q) \quad \det \sigma = \pm 1$.

Cuando caract $k \neq 2$ el subgrupo de $O(q)$ definido por

$$O^+(q) = \{\sigma \in O(q) \mid \det \sigma = 1\}$$

lo llamaremos el grupo de rotaciones de (M,q) .

Se puede ver con facilidad que

$$1 \to O^+(q) \to O(q) \xrightarrow{\det} \{\pm 1\} \to 1$$

es exacta, además $O^+(q)$ es un subgrupo de índice 2 de $O(q)$.

Si caract $k = 2$ entonces $\det \sigma = 1$. Esto es, det. no es un invariante importante para σ . En este caso se introduce la invariante de Dickson de la siguiente forma:

En primer lugar hay que notar que basta tomar el caso $\dim M = 2$, pues un espacio cuadrático, no singular, en característica 2 tiene sólo dimensión par.

Sea $\{e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n\}$ base simpléctica de M y $\sigma \in O(q)$ luego

$$\sigma(e_i) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_{ij} e_j + \beta_{ij} f_j)$$

$$\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ji}, \delta_{ji} \in k$$

$$\sigma(f_j) = \sum_{i=1}^{n} (\gamma_{ji} e_i + \delta_{ji} f_i)$$

Se define $D : O(q) \to k$ por

$$D(\sigma) = \sum_{i,j} (a_j \alpha_{ij} \gamma_{ij} + \beta_{ij} \gamma_{ij} + b_j \beta_{ij} \delta_{ij})$$

donde $q(e_i) = a_i$, $q(f_j) = b_j$. Se tiene que $D(\sigma)$ es una invariante de σ , esto es invariante de la base $\{e_i, f_j\}$ y además $\forall \sigma \in O(q)$ $D(\sigma)^2 + D(\sigma) = 0$. Luego $D(\sigma) = 0$ ó $D(\sigma) = 1$ y se obtiene así una función.

$$D : O(q) \to \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$$

$D(\sigma)$ se llama el <u>invariante de Dickson</u> de σ .

Se define entonces el grupo de rotaciones $O^+(q)$ por:

$$O^+(q) = \{\sigma \in O(q) \mid D(\sigma) = 0\}$$

y se tiene que la sucesión

$$1 \to O^+(q) \to O(q) \xrightarrow{D} \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z} \to 0$$

es exacta.

2.3. Simetrías

2.3.1. Definición: Una simetría respecto a $x \in M$ es una aplicación $\sigma_x \in O(q)$ definida por

$$\sigma_x(y) = y - \frac{B_q(x,y)}{q(x)} x$$

2.3.2. Proposición: Si $\sigma \in O(q)$ entonces σ es producto de un número menor o igual a $n = \dim M$ simetrías σ_x con $x \in M$ anisotrópico.

Dem: Ver [3] Cap. II 5.6. y [2] pág. 20-21.

§ 3. Grupo de similitudes

3.1. Definición: Una aplicación lineal $\sigma : M \to M$ tal que $\forall x \in M$ $q(\sigma(x)) = \rho q(x)$, $\rho \in k$ se llama una similitud de razón ρ .

Llamaremos

$$\Sigma(q) = \{\sigma : M \to M \mid \sigma \text{ es similitud}\} .$$

$(\Sigma(q), o)$ es un grupo llamado grupo de similitudes relativas a q .

Como de costumbre consideramos q no singular.

3.2. Lema: $O(q)$ es subgrupo de $\Sigma(q)$.

Demostración: Si $\sigma \in O(q)$ entonces σ es similitud de razón 1 .

3.3. Lema: Si σ y $\sigma' \in \Sigma(q)$ son similitudes de razón ρ y ρ' respectivamente, entonces $\sigma \circ \sigma' \in \Sigma(q)$ es de razón $\rho \cdot \rho'$.

Demostración: $q(\sigma(\sigma'(x))) = \rho q(\sigma'(x)) = \rho \cdot \rho' q(x) \quad \forall x \in M$.

§ 4. Algebras de Clifford

4.1. Definición: Sea M espacio vectorial de dimensión finita sobre k, k cuerpo, $T(M)$ el álgebra tensorial de M sobre k, $q : M \to k$ forma cuadrática de M sobre k, $I(q)$ el ideal bilátero de $T(M)$ generado por elementos de la forma $x \otimes x - q(x)1$, $x \in M$. Entonces el álgebra $C(M,q) = T(M)/I(q)$ se llama álgebra de Clifford del espacio vectorial M relativo a la forma cuadrática q.

4.2. Observaciones:

La inclusión $i : M \to T(M)$ induce una función lineal $i : T(M) \to C(M,q)$. Anotaremos la imagen de $x_1 \otimes \ldots \otimes x_r \in T(M)$ por $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_r \in C(M,q)$.

Con esta notación se tiene:

1) $x^2 = q(x) \qquad \forall x \in M$

2) $xy + yx = B_q(x,y) \qquad \forall x,y \in M$

Lo cual se obtiene al considerar $(x + y) \otimes (x + y) = q(x + y)$

3) Si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es base ortogonal de M entonces $x_i x_j = -x_j x_i \quad i \neq j$.

4) Si $\{e_1, f_1, \ldots, e_n f_n\}$ es base simpléctica de M entonces:

$$e_i f_j + f_j e_i = \delta_{ij} \quad \text{con} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} e_i e_j &= e_j e_i \\ f_i f_j &= f_j f_i \end{aligned}\right\} \quad \forall i,j$$

4.3. $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$ - graduación de $C(M,q)$.

Es sabido que el álgebra tensorial $T(M)$ se puede expresar por $T(M) = \bigoplus_{n \geq 0} T_n(M)$ donde $T_n(M) = M \otimes M \otimes \ldots \otimes M$ n-veces.

Además se puede $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$-graduar de la siguiente forma:

$$T(M) = T^+(M) \oplus T^-(M)$$

donde $T^+(M) = \bigoplus_{n \geq 0} T_{2n}(M)$ y $T^-(M) = \bigoplus_{n \geq 0} T_{2n+1}(M)$.

Esta graduación induce una $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$-graduación de $C(M,q)$ de la siguiente forma:

$$C(M,q) = C^+(M,q) \oplus C^-(M,q)$$

donde

$$C^+(M,q) = T^+(M)/I^+(q) \quad y \quad C^-(M,q) = T^-(M)/I^-(q)$$

con

$$I^+(q) = I(q) \cap T^+(M) \quad e \quad I^-(q) = I(q) \cap T^-(M) \ .$$

4.4. Teorema: Si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es base de M , entonces los productos $x_{j_1} \ldots x_{j_r}$ $(1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n)$ y 1 forman una base de $C(M,q)$. En particular $\dim M = n$ implica $\dim C(M,q) = 2^n$ y $\dim C^+(M,q) = \dim C^-(M,q) = 2^{n-1}$.

Demostración: Ver [4] Cap. 5, 1.8. y 1.9.

4.5. El conjunto M_2

4.5.1. Definición: Diremos que un elemento de $C(M,q)$ es de longitud p ssi es producto de p vectores linealmente independientes de M.

Llamaremos $M_{[p]}$ al conjunto formado por todos los vectores de longitud p.

4.5.2. Observación: Si $\dim M = n$ entonces $M_{[n]}$ es el subconjunto de $C(M,q)$ formado por vectores de longitud máxima esto es por productos de elementos de cualquier base de M.

4.5.3. Definición: Llamaremos M_2 el siguiente subconjunto de $C(M,q)$.

$$M_2 = k + \langle M_{[2]} \rangle = \{\alpha + x \mid \alpha \in k \text{ y } x \in \langle M_{[2]} \rangle \}$$

donde $\langle M_{[2]} \rangle$ es el k-módulo generado por $M_{[2]}$.

4.6. Centro del álgebra de Clifford

4.6.1. Centro de $C(M,q)$: El siguiente resultado es conocido (Ver [1] Cap. 2 § 3.).

Si $\dim M$ es par, entonces $Z(C(M,q)) = k$ y $Z(C^+(M,q)) = \Delta(q) = k + kz$.

Si $\dim M$ es impar, entonces $Z(C(M,q)) = k + kz$ y $Z(C^+(M,q)) = k$.

En ambos casos z es un elemento separable de grado 2 sobre k.

4.6.2. Caracterización de z para $\dim M$ par

i) Caract $k \neq 2$

Sin pérdida de generalidad el polinomio minimal de z sobre k tiene la forma $x^2 - d$.

Concretamente, tomando $\{x_1, \ldots, x_{2n}\}$ como base ortogonal de M, se puede escoger $z := x_1 x_2 \ldots x_{2n}$. Se tiene:

$$z^2 = (-1)^{n(2n-1)} q(x_1) \ldots q(x_{2n}) = \pm d \in k^*$$

con $d = q(x_1) \ldots q(x_{2n})$.

Notar además que si $\dim M = 4r + 2$ entonces $z^2 = -d$ y si $\dim M = 4r$ entonces $z^2 = d$.

ii) Caract $k = 2$

Sin pérdida de generalidad el polinomio minimal de z sobre k tiene la forma $x^2 + x + d$.

Si $\{e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n\}$ es base simpléctica de M, entonces se puede elegir $z := e_1 f_1 + \ldots + e_n f_n$. Se tiene que $z^2 + z = q(e_1)q(f_1) + \ldots + q(e_n)q(f_n) = d \in k^*$.

4.6.3. Involución y norma sobre $\Delta(q)$

Consideremos sobre $\Delta(q)$ la siguiente involución:

$$- : \Delta(q) \to \Delta(q) \quad \text{definida por} \quad \bar{z} = 1 - z .$$

Nótese que si caract $k \neq 2$ se puede transformar z por $z - \frac{1}{2} = u$ y se obtiene $\bar{u} = -u$.

En resumen se tiene:

$$\bar{z} = \begin{cases} -z & \text{si caract } k \neq 2 \\ z+1 & \text{si caract } k = 2 \end{cases}$$

y para un elemento cualquiera $\alpha + \beta z \in \Delta(q)$ se tiene:

$$\overline{\alpha + \beta z} = \begin{cases} \alpha - \beta z & \text{si caract } k \neq 2 \\ \alpha + \beta + \beta z & \text{si caract } k = 2 \end{cases}$$

Podemos así definir una norma $N : \Delta(q) \to k$ por $N(x) = x\bar{x}$. Por último se ve con facilidad tomando base ortogonal o simpléctica, según sea el caso que:

$$zx = x\bar{z} \qquad \forall x \in M$$

4.6.4. Anti-automorfismo $*$ de $C(M,q)$

Definamos en $C(M,q)$ el siguiente anti-automorfismo:

$$* : C(M,q) \to C(M,q) \quad \text{tal que} \quad (x_1 \ldots x_p)^* = x_p \cdot x_{p-1} \ldots x_1 \ .$$

Si caract $k \neq 2$, $\{x_1, \ldots, x_{2n}\}$ base ortogonal de M y $z := x_1 \ldots x_{2n}$ entonces $z^*z = q(x_1) \ldots q(x_{2n}) =: d$.

Si caract $k = 2$, $\{e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n\}$ base simpléctica de M y $z := e_1f_1 + \ldots + e_nf_n$ entonces $z^*z = z^2 + z = d$.

4.6.5. Lema: Consideremos z como en 4.6.2.

i) Si $\dim M = 4r + 2$, entonces $z^* = \bar{z}$

ii) Si $\dim M = 4r$, entonces $z^* = z$

Demostración: i) Sea caract $k \neq 2$, $\{x_1, \ldots, x_{4r+2}\}$ base ortogonal de M y $z = x_1 \ldots x_{4r+2}$. Luego

$$z^* = x_{4r+2} \ldots x_1 = (-1)^{\frac{(4r+2)(4r+1)}{2}} z = (-1)^{(2r+1)(4r+1)} z = -z = \bar{z}$$

Sea caract $k = 2$, $\{e_1, f_1, \ldots, e_{2r+1}, f_{2r+1}\}$ base simpléctica de M y $z = e_1 f_1 + \ldots + e_{2r+1} f_{2r+1}$. Luego

$$z^* = e_1 f_1 + \ldots + e_{2r+1} f_{2r+1} + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{2r+1\text{-veces}} = z + 1 = \bar{z}$$

ii) Para demostrar (ii) se procede en forma análoga a la anterior y obtenemos $z^* = z$.

q.e.d.

§ 5. El grupo de Clifford

5.1. Definición: El grupo de Clifford es el siguiente subgrupo multiplicativo de $C(M,q)$.

$$\Gamma = \{s \in C^*(M,q) \mid sxs^{-1} \in M \quad \forall x \in M\}$$

donde $C^*(M,q)$ indica los elementos invertibles de $C(M,q)$.

5.2. Proposición: Si $s \in \Gamma$ entonces s induce una transformación ortogonal $\sigma_s : M \to M$ definida por $\sigma_s(x) = sxs^{-1}$ $\forall x \in M$.

Demostración: Es fácil ver que σ_s es una transformación lineal.

Ahora:

$$q(\sigma_s(x)) = q(sxs^{-1}) = sxs^{-1}sxs^{-1} = sq(x)s^{-1} = q(x) .$$

Luego $\sigma_s \in O(q)$

q.e.d.

§ 6. El grupo extendido de Clifford

6.1. Definición: El grupo extendido de Clifford es el subgrupo multiplicativo de $C(M,q)$ definido por:

$$T = \{s \in C^*(M,q) \mid sxs^{-1} \in k + M_{[2]} \quad \forall x \in M_{[2]}\}$$

donde $M_{[2]}$ es el subconjunto de $C(M,q)$ definido en 4.5.2.

6.2. Lema: $\Gamma \subseteq T$

Demostración: Sea $s \in \Gamma$, luego $sxs^{-1} \in M \quad \forall x \in M$.

p.d. $\quad sxys^{-1} \in M_{[2]}$ donde x e y son l.i. en M .

$$\begin{aligned} sxys^{-1} &= sxs^{-1}sys^{-1} \\ &= \sigma_s(x)\sigma_s(y) \end{aligned}$$

donde σ_s es la transformación ortogonal definida en 5.2.. Como x e y son l.i. y σ_s es transformación ortogonal, luego $\sigma_s(x)$ y $\sigma_s(y)$ son l.i. en M . Luego $\sigma_s(x)\sigma_s(y) \in M_{[2]}$.

q.e.d.

6.3. Corolario: Si $s \in T$ entonces $sxs^{-1} \in M_2 \quad \forall x \in M_2$.

Demostración: $s(\alpha + xy)s^{-1} = \alpha + sxys^{-1} \in M_2$

q.e.d.

C A P I T U L O   II

GRUPO DE SIMILITUDES Y GRUPO EXTENDIDO DE CLIFFORD

§ 1. Relación entre el grupo ortogonal y el grupo de Clifford

1.1. Homomorfismo $\psi : \Gamma \to O(q)$

Es conocido el hecho que existe un homomorfismo $\psi : \Gamma \to O(q)$ dado de la siguiente forma

Consideremos el caso caract $k \neq 2$.

Existe homomorfismo $\alpha : M \to C(M,q)$ tal que $\alpha(x) = -x$ $\forall x \in M$; este se puede extender a un homomorfismo de $C(M,q)$, que tam - bién llamaremos α , dado por:

$$\alpha(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in C^{+}(M,q) \\ -x & \text{si } x \in C^{-}(M,q) \end{cases}$$

Se define $\psi : \Gamma \to O(q)$ por $\psi(s)(x) = \alpha(s)xs^{-1}$

i) $\psi(s) \in O(q)$ pues $\psi(s) : M \to M$ es lineal y

$$\begin{aligned} q(\psi(s)(x)) &= q(\alpha(s)xs^{-1}) = \alpha(s)xs^{-1}\alpha(s)xs^{-1} \\ &= \pm\ \alpha(s)x^{2}s^{-1} \\ &= \pm\ \alpha(s)q(x)s^{-1} \\ &= q(x) \end{aligned}$$

ii) ψ es homomorfismo de grupos pues:

$$\psi(ss')(x) = \alpha(ss')xs'^{-1}s^{-1}$$
$$= \alpha(s)\alpha(s')xs'^{-1}s^{-1}$$
$$= \alpha(s)\psi(s')(x)s^{-1}$$
$$= \psi(s)\psi(s')(x)$$

1.2. <u>Teorema</u>: Si caract $k \neq 2$, entonces la siguiente sucesión es exacta

$$1 \to k^* \to \Gamma \xrightarrow{\psi} O(q) \to 1$$

<u>Demostración</u>: i) ψ es epiyectiva

Si $\sigma \in O(q)$ entonces $\sigma = \tau_{v_1} \ldots \tau_{v_r}$ (Prop. 2.3.2. Cap I)

Sea $s = v_1 \ldots v_r$, como cada v_i es anisotrópico se tiene $s^{-1} \in C(M,q)$. Sostenemos que $s \in \Gamma$ pues:

$\forall v \in M$, $\forall x \in M$ se tiene

$$\tau_v(x) = x - \frac{B_q(x,v)}{q(v)} v = x - \frac{xv + vx}{q(v)} v$$

$$= x - \frac{xvv}{q(v)} - \frac{vxv}{q(v)} = - \frac{vxv}{q(v)} = - vxv^{-1}$$

$$= \alpha(v)xv^{-1}$$

Así $v_1 \ldots v_s x v_s^{-1} \ldots v_1^{-1} = \pm \tau_{v_1}(\ldots(\tau_{v_r}(x))) \in M \Rightarrow$ $sxs^{-1} \in M$ $\forall x \in M$. Luego $s \in \Gamma$.

Además $\psi(s) = \sigma$ pues:

$$\psi(s)(x) = \alpha(v_1 \ldots v_r)xv_r^{-1} \ldots v_1^{-1}$$

$$= \alpha(v_1) \ldots \alpha(v_r)xv_r^{-1} \ldots v_1^{-1}$$

$$= \tau_{v_1} \ldots \tau_{v_r}(x) = \sigma(x) .$$

Luego ψ es epiyectiva.

ii) Ker $\psi = k^*$.

$$s \in \text{Ker } \psi \iff \alpha(s)xs^{-1} = x \qquad \forall x \in M$$

$$\iff \alpha(s)x = xs \qquad \forall x \in M$$

$$\iff s \in k \cap C^*(M,q) \qquad \text{(Ver [1] Cap II 3.10)}$$

$\therefore$ Ker $\psi = k^*$.

q.e.d.

En caso caract $k = 2$ se obtienen los mismos resultados (ver [3] Cap II § 10.6.).

§ 2. Base de M bajo $s \in T$

En este párrafo veremos que si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es base de M y $s \in T$ entonces $sx_1x_is^{-1} = \alpha_i + y_1y_i$ con el mismo y_1 $\forall i$, además $\{y_1, \ldots, y_n\}$ es base de M .

También obtendremos relaciones entre ambas bases.

Como de costumbre el espacio cuadrático (M,q) será no singular. Esto implica que dim M será par en el caso caract $k = 2$.

2.1. Proposición: Si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es base de M con $q(x_1) \neq 0$ y $s \in T$ entonces $sx_1x_is^{-1} = \alpha_i + y_1y_i$ e $\{y_1, \ldots, y_n\}$ es base de M .

Demostración: Sea $sx_1x_is^{-1} = \alpha_i + t_iz_i$ $n \geq i > 1$, demostraremos que es posible obtener $sx_1x_is^{-1} = \beta_i + y_1y_i$ con y_1 cte. para todo i .

Sean $sx_1x_2s^{-1} = \alpha_2 + t_2z_2$ y $sx_1x_3s^{-1} = \alpha_3 + t_3z_3$

Multiplicando ambos obtenemos:

$$M_2 \ni sx_1x_2x_1x_3s^{-1} = (\alpha_2 + t_2z_2)(\alpha_3 + t_3z_3)$$

$$= \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2t_3z_3 + \alpha_3t_2z_2 + t_2z_2t_3z_3$$

Como $\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2t_3z_3 + \alpha_3t_2z_2 \in M_2$ luego $t_2z_2t_3z_3 \in M_2$, donde t_2 es l.i. con z_2 y t_3 es l.i. con z_3 .

Afirmo $\langle t_2,z_2\rangle \cap \langle t_3,z_3\rangle = kz$, donde $\langle t_i,z_i\rangle$ indica el espacio de dimensión 2 generado por t_i y z_i , pues:

$\mathrm{Dim}\langle t_2,z_2,t_3,z_3\rangle = 3$ ya que si fuese de dimensión 2 se tendría:

$$sx_1x_2s^{-1} = \alpha_2 + t_2z_2$$

$$sx_1x_3s^{-1} = \alpha_3 + \beta t_2z_2$$

luego $s\beta x_1x_2s^{-1} - sx_1x_3s^{-1} = \alpha_2\beta - \alpha_3 \Rightarrow \alpha_3 - \beta\alpha_2 + \beta x_1x_2 - x_1x_3 = 0$

$\Rightarrow x_1(\beta x_2 - x_3) \in k \Rightarrow x_1$ l.d. de x_2 y x_3 , contradicción

Luego $\dim\langle t_2,z_2,t_3,z_3\rangle = 3$

Así necesariamente $\langle t_2,z_2\rangle \cap \langle t_3,z_3\rangle = kz$.

Luego $\quad z \in \langle t_2, z_2 \rangle \Rightarrow z = \alpha t_2 - \beta z_2 \Rightarrow t_2 = \alpha^{-1} z + \beta\alpha^{-1} z_2 \quad (\alpha \neq 0)$

$z \in \langle t_3, z_3 \rangle \Rightarrow z = \alpha' t_3 - \beta' z_3 \Rightarrow t_3 = \alpha'^{-1} z + \beta'\alpha'^{-1} z_3 \quad (\alpha' \neq 0)$

Así se tiene:

$$sx_1x_2s^{-1} = \alpha_2 + (\alpha^{-1}z + \beta\alpha^{-1}z_2)z_2 = \alpha_2 + \alpha^{-1}\beta q(z_2) + z(\alpha^{-1}z_2)$$

y $\quad sx_1x_3s^{-1} = \alpha_3 + (\alpha'^{-1}z + \beta'\alpha'^{-1}z_3)z_3 = \alpha_3 + \beta'\alpha'^{-1}q(z_3) + z(\alpha'^{-1}z_3)$

Sea $y_1 := z$, $y_2 := \alpha^{-1}z_2$, $y_3 := \alpha'^{-1}z_3$, $\alpha_2'' := \alpha_2 + \alpha^{-1}\beta q(z_2)$ y $\alpha_3'' := \alpha_3 + \beta'\alpha'^{-1}q(z_3)$ luego $sx_1x_2s^{-1} = \alpha_2'' + y_1y_2$ y $sx_1x_3s^{-1} = \alpha_3'' + y_1y_3$.

Notar que si $\alpha = o$ ó $\alpha' = 0$ (consideremos $\alpha = 0$) entonces

$$sx_1x_2s^{-1} = \alpha_2 + t_2\beta^{-1}z = \alpha_2 + \beta^{-1}(B_q(t_2,z) + zt_2)$$
$$= \alpha_2 + \beta^{-1}B_q(t_2,z) + z(\beta^{-1}t_2)$$

obteniéndose así el resultado deseado.

Por último se ve claramente de las definiciones que y_1, y_2 e y_3 son l.i.

Consideremos ahora el caso

$$sx_1x_is^{-1} = \alpha_i + t_iz_i \qquad i \geq 4$$

Procediendo en forma análoga a la anterior se obtiene:

$\langle t_i, z_i \rangle \cap \langle y_1, y_2 \rangle = kw \quad$ y

$$\langle t_i, z_i \rangle \cap \langle y_1, y_3 \rangle = kw'$$

Así $\quad w \in \langle y_1, y_2 \rangle \Rightarrow w = \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2$

$w \in \langle t_i, z_i \rangle \Rightarrow \langle t_i, z_i \rangle = \langle \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2, u \rangle$ con $u \in \langle t_i, z_i \rangle$

$w' \in \langle y_1, y_3 \rangle \Rightarrow w' = \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_3$

$w' \in \langle t_i, z_i \rangle \Rightarrow \langle t_i, z_i \rangle = \langle \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_3, v \rangle$ con $v \in \langle t_i, z_i \rangle$

Luego

$$\langle \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2, u \rangle = \langle \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_3, v \rangle \Rightarrow \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_3 \in \langle \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2, u \rangle$$

$$\Rightarrow \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_3 = \mu(\alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2) + \nu u$$

Afirmo $\nu = 0$ pues si $\nu \neq 0$ se tiene:

$$u = \delta_1 y_1 + \delta_2 y_2 + \delta_3 y_3$$

Como

$$t_i \in \langle \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2, u \rangle \Rightarrow t_i = \alpha_o y_1 + \beta_o y_2 + \gamma_o u = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$$

$$z_i \in \langle \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2, u \rangle \Rightarrow z_i = \alpha' y_1 + \beta' y_2 + \gamma' y_3$$

donde u fué reemplazado por $\delta_1 y_1 + \delta_2 y_2 + \delta_3 y_3$

Así

$$sx_1 x_i s^{-1} = \alpha_i + t_i z_i = \alpha_i + (\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3)(\alpha' y_1 + \beta' y_2 + \gamma' y_3)$$

Desarrollando estos productos y teniendo en cuenta que $sx_1 x_2 s^{-1} = \alpha_2 + y_1 y_2$, $sx_1 x_3 s^{-1} = \alpha_3 + y_1 y_3$ y $sx_2 x_3 s^{-1} = \mu_o + \mu_1 y_1 y_2 + \mu_2 y_1 y_3 + \mu_3 y_2 y_3$ $(\mu_i \in k)$ se obtiene:

$$sx_1x_is^{-1} = s(\gamma_1 + \gamma_2x_1x_2 + \gamma_3x_1x_3 + \gamma_4x_2x_3)s^{-1}$$

luego

$$x_1x_i = \gamma_1 + \gamma_2x_1x_2 + \gamma_3x_1x_3 + \gamma_4x_2x_3$$

lo cual no puede ser pues $1, x_1x_2, x_1x_3, x_1x_i, x_2x_3$ son l.i. en $C(M,q)$ Así $\nu = 0$

Se tendrá entonces necesariamente que

$$\alpha_2y_1 + \beta_2y_3 = \mu(\alpha_1y_1 + \beta_1y_2) \Rightarrow \alpha_2 - \mu\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0$$

Luego $w = \alpha_1y_1$ y $w' = \alpha_2y_1$

y se tiene

$$\langle t_i, z_i\rangle \cap \langle y_1, y_2\rangle = ky_1$$

$$\langle t_i, z_i\rangle \cap \langle y_1, y_3\rangle = ky_1$$

En forma análoga a la hecha para el caso $i = 2,3$ se obtiene $sx_1x_is^{-1} = \alpha_i + y_1y_i$ y los vectores $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son l.i.. Como dim $M = n$ se tiene que $\{y_i, \ldots, y_n\}$ constituyen una base de M.

q.e.d.

2.2. Definición: Si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es base de M y $s \in T$ entonces la base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ que se obtiene de acuerdo a la proposición anterior, se llama la transformada de $x_1, \ldots, x_n$ respecto a s.

2.3. Lema: Si $\{y_1, \dots, y_n\}$ y $\{z_1, \dots, z_n\}$ son dos bases de M tales que $y_i y_j = z_i z_j$ $\forall i,j$ y $q(y_1) \neq 0$ entonces $y_i = \alpha z_i$ $\forall i$ con $\alpha \in \{+1,-1\}$.

Demostración: Como $y_i y_j = z_i z_j$ en especial se tiene $y_1 y_i = z_1 z_i$ $\forall i \geq 2$
Por [5] lema 3 se tiene:

$$\langle y_1, y_i \rangle = \langle z_1, z_i \rangle \qquad \forall i \geq 2$$

Luego
$$z_1 = \alpha_i y_1 + \beta_i y_i \qquad \forall i \geq 2$$

$$\Rightarrow \alpha_i y_1 + \beta_i y_i = \alpha_j y_1 + \beta_j y_j \qquad i \neq j \geq 2$$

$$\Rightarrow (\alpha_i - \alpha_j) y_1 + \beta_i y_i - \beta_j y_j = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \alpha_j \ , \quad \beta_i = \beta_j = 0$$

$$\Rightarrow z_1 = \alpha y_1 \quad \text{con} \quad \alpha \in k \ .$$

Como $y_1 y_i = z_1 z_i$ se tiene $q(y_1) y_i = \alpha q(y_1) z_i$ y así $y_i = \alpha z_i$ $\forall i \geq 2$.

Luego como $y_i y_j = z_i z_j$ se tiene $\alpha^2 z_i z_j = z_i z_j$ lo que implica que $\alpha^2 = 1$, luego $\alpha \in \{1,-1\}$

Luego $y_i = \alpha z_i$ $\forall i$ y $\alpha \in \{1,-1\}$.

q.e.d.

2.4. Lema: Dado (M,q) espacio cuadrático, $s \in T$, sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ base de M e $\{y_1, \dots, y_n\}$ la base transformada respecto a s. Luego valen:

i) $$q(x_1)q(x_i) = \alpha_i^2 + \alpha_i B_q(y_1, y_i) + q(y_1)q(y_i)$$

ii) $$2\alpha_i = B_q(x_1,x_i) - B_q(y_1,y_i)$$

donde $sx_1x_is^{-1} = \alpha_i + y_1y_i$.

Demostración: (i) Como

$$(sx_1x_is^{-1})^*(sx_1x_is^{-1}) = (s^{-1})^* x_ix_1s^*sx_1x_is^{-1}$$

donde $*$ indica el anti-automorfismo de $C(M,q)$ definido en Cap I. 4.6.4.

Además se verá en Cap III que $s^*s \in Z(C^+(M,q))$.

Luego:

$$\begin{aligned}
(sx_1x_is^{-1})^*(sx_1x_is^{-1}) &= q(x_1)q(x_i) \\
&= (\alpha_i + y_1y_i)^*(\alpha_i + y_1y_i) \\
&= (\alpha_i + y_iy_1)(\alpha_i + y_1y_i) \\
&= \alpha_i^2 + \alpha_i(y_iy_1 + y_1y_i) + y_iy_1y_1y_i \\
&= \alpha_i^2 + \alpha_iB_q(y_1,y_i) + q(y_1)q(y_i)
\end{aligned}$$

(ii) Calculemos:

$$\begin{aligned}
(sx_1x_is^{-1})^2 &= sx_1x_is^{-1}sx_1x_is-1 \\
&= sx_1x_ix_1x_is^{-1} \\
&= B_q(x_1,x_i)sx_1x_is^{-1} - q(x_1)q(x_i) \\
&= B_q(x_1,x_i)(\alpha_i + y_1y_i) - q(x_1)q(x_i) \\
&= \alpha_iB_q(x_1,x_i) + B_q(x_1,x_i)y_1y_i - q(x_1)q(x_i) \\
&= \alpha_iB_q(x_1,x_i) + B_q(x_1,x_i)y_1y_i - \alpha_1^2 - \alpha_iB_q(y_1y_i) - \\
&\quad - q(y_1)q(y_i)
\end{aligned}$$

$$= -\alpha_i^2 + \alpha_i(B_q(x_1,x_i) - B_q(y_1,y_i)) - q(y_1)q(y_i) + B_q(x_1,x_i)y_1y_i$$

Por otro lado

$$(sx_1x_is^{-1})^2 = (\alpha_i + y_1y_i)(\alpha_i + y_1y_i) = \alpha_i^2 + 2\alpha_iy_1y_i + y_1y_iy_1y_i$$

$$= \alpha_i^2 + 2\alpha_iy_1y_i + (B_q(y_1,y_i) - y_iy_1)y_1y_i$$

$$= \alpha_i^2 + (2\alpha_i + B_q(y_1,y_i))y_1y_i - q(y_1)q(y_i)$$

Luego:

$$\alpha_i(B_q(x_1,x_i) - B_q(y_1,y_i)) + B_q(x_1,x_i)y_1y_i = 2\alpha_i^2 + (2\alpha_i + B_q(y_1,y_i))y_1y_i$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_i(B_q(x_1,x_i) - B_q(y_1,y_i)) = 2\alpha_i^2 & \text{y} \\ B_q(x_1,x_i) = 2\alpha_i + B_q(y_1,y_i) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 2\alpha_i = B_q(x_1,x_i) - B_q(y_1,y_i)$$

q.e.d.

2.5. <u>Proposición</u>: Si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es base de M con x_1 invertible en $C(M,q)$ e $\{y_1, \ldots, y_n\}$ es la base transformada respecto a $s \in T$ en - tonces:

i) $\sigma_s : M \to M$ definida por

$$\sigma_s(x_i) := \begin{cases} \rho y_i & i = 1 \\ \alpha_i q(y_1)^{-1}y_1 + y_i & i = 2, \ldots, n \end{cases}$$

es una similitud de razón $\rho = q(x_1)q(y_1)^{-1}$

ii) $\psi' : T \to \Sigma(q)$ definido por $\psi'(s) := \sigma_s$ es una función bien definida.

Demostración: i) σ_s es una aplicación lineal y además:

$$q(\sigma_s(x_1)) = q(\rho y_1) = \rho^2 q(y_1) = \rho q(x_1)q(y_1)^{-1}q(y_1) = \rho q(x_1)$$

y para $i \geq 2$:

$$\begin{aligned} q(\sigma_s(x_i)) &= q(\alpha_i q(y_1)^{-1} y_1 + y_i) \\ &= \alpha_i^2 q(y_1)^{-1} + q(y_i) + \alpha_i q(y_1)^{-1} B_q(y_1, y_i) \\ &= (\alpha_i^2 + \alpha_i B_q(y_1, y_i))q(y_1)^{-1} + q(y_i) \end{aligned}$$

Por otro lado por el lema anterior

$$q(x_1)q(x_i) = \alpha_i^2 + \alpha_i B_q(y_1, y_i) + q(y_1)q(y_i)$$

$$\Rightarrow \quad q(y_1)^{-1}q(x_1)q(x_i) = (\alpha_i^2 + \alpha_i B_q(y_1, y_i))q(y_1)^{-1} + q(y_i)$$

Luego:

$$q(\sigma_s(x_i)) = q(y_1)^{-1}q(x_1)q(x_i) = \rho q(x_i) \qquad \forall i = 2, \ldots, n$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} B_q(\sigma_s(x_1), \sigma_s(x_i)) &= B_q(\rho y_1, \alpha_i q(y_1)^{-1} y_1 + y_i) \\ &= \rho\alpha_i q(y_1)^{-1} B_q(y_1, y_1) + \rho B_q(y_1, y_i) \\ &= \rho 2\alpha_i + \rho B_q(y_1, y_i) \quad \text{Pues } B_q(y_1, y_1) = 2q(y_1) \\ &= \rho B_q(x_1, x_i) \qquad \text{por lema anterior} \end{aligned}$$

luego $\sigma_s \in \Sigma(q)$.

ii) $\psi' : T \to \Sigma(q)$ está bien definida por el lema 2.3 y parte (i).

ψ' es un homomorfismo de grupos se verá en teorema 3.8.

q.e.d.

§ 3. Automorfismo Σ de $C(M,q)$ asociado a una similitud σ.

Este párrafo es muy importante en la teoría que estamos desarrollando. El nos permitirá desarrollar el Capítulo III, demostrar que si $\dim M$ es impar entonces $T = \Gamma$ y nos dará las herramientas necesarias para probar que la sucesión

$$1 \to (\Delta(q))^* \to T \xrightarrow{\psi'} \Sigma(q) \to 1$$

es exacta.

3.1. Lema: Si $\sigma \in \Sigma(q)$ es de razón ρ entonces existe automorfismo Σ de $T^+(M)$, asociado a σ, definido por

$$(y_1 \otimes \ldots \otimes y_{2t})^\Sigma = \rho^{-t}\sigma(y_1) \otimes \ldots \otimes \sigma(y_{2t})$$

Además bajo este automorfismo $I^+(q)$ queda fijo

Demostración: Σ está bien definido pues lleva base en base.

Σ es un homomorfismo pues:

$$((y_1 \otimes \ldots \otimes y_{2t}) \otimes (x_1 \otimes \ldots \otimes x_{2s}))^\Sigma =$$

$$= \rho^{-(t+s)}\sigma(y_1) \ldots \sigma(y_{2t})\sigma(x_1) \ldots \sigma(x_{2s})$$

$$= \rho^{-t}\sigma(y_1) \ldots \sigma(y_{2t})\rho^{-s}\sigma(x_1) \ldots \sigma(x_{2s})$$

$$= (y_1 \otimes \ldots \otimes y_{2t})^\Sigma (x_1 \otimes \ldots \otimes x_{2s})^\Sigma$$

La biyección es fácil verla.

Demostremos que $I^+(q)$ queda fijo por Σ :

Para ello bastará demostrar que un elemento de la forma

$d = y_1 \otimes \ldots \otimes y_r \otimes (x \otimes x - q(x)) \otimes z_1 \otimes \ldots \otimes z_s \in I^+(q)$ con $r + s = 2t$ es tal que $d^\Sigma \in I^+(q)$.

$$\begin{aligned} d^\Sigma &= (y_1 \otimes \ldots \otimes y_r \otimes x \otimes x \otimes z_1 \otimes \ldots \otimes z_s)^\Sigma - \\ &\quad - (q(x)y_1 \otimes \ldots \otimes y_r \otimes z_1 \otimes \ldots \otimes z_s)^\Sigma \\ &= \rho^{-(t+1)}(\sigma(y_1) \ldots \sigma(y_r)\sigma(x)\sigma(x)\sigma(z_1) \ldots \sigma(z_s)) - \\ &\quad -\rho^{-t}q(x)\sigma(y_1) \ldots \sigma(y_r)\sigma(z_1) \ldots\sigma(z_s) \\ &= \rho^{-(t+1)}(\sigma(y_1) \ldots \sigma(y_r)\sigma(x)\sigma(x)\sigma(z_1) \ldots \sigma(z_s)) - \\ &\quad -\rho^{-(t+1)}q(\sigma(x))\sigma(y_1) \ldots \sigma(y_r)\sigma(z_1) \ldots \sigma(z_s) \\ &= \rho^{-(t+1)}\sigma(y_1) \ldots \sigma(y_r)(\sigma(x)\sigma(x) - q(\sigma(x)))\sigma(z_1) \ldots \sigma(z_s) \in I^+(q) \end{aligned}$$

q.e.d.

3.2. <u>Corolario</u>: Existe automorfismo de $C^+(M,q)$ inducido por Σ , que también llamaremos Σ y será llamado automorfismo asociado a la similitud σ .

3.3. <u>Definición</u>: Sea $\dim M = 2r$ y $\sigma \in \Sigma(q)$. Por el corolario anterior existe automorfismo $\Sigma : C^+(M,q) \to C^+(M,q)$ asociado a σ .

Veremos que Σ puede ser extendido a $C(M,q)$.

Ahora $\Sigma/\Delta(q) : \Delta(q) \xrightarrow{\sim} \Delta(q)$ es un automorfismo de grupos. De modo que $z \in \Delta(q) = k + kz$ bajo este automorfismo puede tener por imagen a z ó $\bar{z}$.

Si $z^{\Sigma} = z$ entonces diremos que la similitud σ es <u>propia</u>.

Si $z^{\Sigma} = \bar{z}$ entonces diremos que la similitud σ es <u>impropia</u>.

3.4. <u>Lema</u>: Sean σ y $\sigma_1 \in \Sigma(q)$ de razón ρ y ρ_1 respectivamente, tal que $\sigma(x) = \alpha\sigma_1(x)$ $\forall x \in M$ y $\alpha \in k$. Luego los automorfismos de $C^+(M,q)$ asociados a σ y a σ_1 son iguales. Además vale $\rho_1 = \alpha^{-2}\rho$.

<u>Demostración</u>: i) Veamos primero que la razón de σ_1 es $\rho\alpha^{-2}$. Como $q(\alpha\sigma_1(x)) = q(\sigma(x)) = \rho q(x)$ y por otro lado $q(\alpha\sigma_1(x)) = \alpha^2 q(\sigma_1(x)) =$ $= \alpha^2\rho_1 q(x)$. Por lo tanto $\rho_1 = \alpha^{-1}\rho$.

ii) Demostraremos ahora que los automorfismos Σ y Σ' asociados a σ y σ_1 respectivamente son iguales. Tenemos:

$$\begin{aligned}(x_1 \ldots x_{2k})^{\Sigma} &= \rho^{-k}\sigma(x_1) \ldots \sigma(x_{2k}) \\ &= \rho^{-k}\alpha\sigma_1(x_1) \ldots \alpha\sigma_1(x_{2k}) \\ &= (\rho\alpha^{-2})^{-k}\sigma_1(x_1) \ldots \sigma_1(x_{2k}) \\ &= (x_1 \ldots x_{2k})^{\Sigma'}\end{aligned}$$

q.e.d.

3.5. <u>Teorema</u>: Si Σ es un automorfismo de $C^+(M,q)$ asociado a una similitud $\sigma \in \Sigma(q)$ de razón ρ entonces Σ puede ser extendido a un automorfismo interior de $C(M,q)$. Además:

i) Si dim M es impar entonces $\rho \in k^{*2}$ y $\forall x \in M$ $x^{\Sigma} \in M$

ii) Si dim M es par entonces $\rho^{-1} = N(\alpha + \beta z)$, $\alpha + \beta z \in \Delta(q)$ y $\forall x \in M$ $x^{\Sigma} = \sigma(x)(\alpha + \beta z)$.

<u>Demostración</u>: Demostraremos primero (i). Sea $\dim M = 2r + 1$.

Bastará considerar el caso $\text{caract } k \neq 2$, pues un espacio cuadrático no singular en característica 2 tiene sólo dimensión par.

Sea $\{x_1, \ldots, x_{2r+1}\}$ base ortogonal de M y llamemos $x_1^{\Sigma} = c$

Se tiene que $c\sigma(x_1)$ conmuta con $C^+(M,q)$ pues:

$$\sigma(x_1)(x_1x_i)^{\Sigma} = \sigma(x_1)\rho^{-1}\sigma(x_1)\sigma(x_i) = -\rho^{-1}\sigma(x_1)\sigma(x_i)\sigma(x_1) = -(x_1x_i)^{\Sigma}\sigma(x_1)$$

y $c(x_1x_i)^{\Sigma} = (x_1x_1x_i)^{\Sigma} = -(x_1x_ix_1)^{\Sigma} = -(x_1x_i)^{\Sigma}c$, luego c y $\sigma(x_1)$ anti-conmutan con $(x_1,x_i)^{\Sigma}$ y por lo tanto con $C^+(M,q)$, se tiene así que $c\sigma(x_1)$ conmuta con $C^+(M,q)$.

Luego $c\sigma(x_1) \in Z(C^+(M,q)) = k^*$, luego $c\sigma(x_1) = \alpha_1 \in k^*$, se tiene $c = \alpha\sigma(x_1)$ con $\alpha = \alpha_1(q(\sigma(x)))^{-1}$.

Además $\rho = \alpha^{-2} \in k^{*2}$ pues:

$$(x_1^{\Sigma})^2 = (\alpha\sigma(x_1))^2 = \alpha^2 q(\sigma(x_1)) = \alpha^2\rho q(x_1)$$

por otro lado

$$(x_1^{\Sigma})^2 = (x_1x_1)^{\Sigma} = q(x_1)^{\Sigma} = q(x_1)$$

luego

$$\rho = \alpha^{-2} \in k^{*2}$$

Además $\forall x \in M$ tenemos:

$$x^{\Sigma} = (q(x_1)^{-1}x_1x_1x)^{\Sigma} = q(x_1)^{-1}x_1^{\Sigma}(x_1x)^{\Sigma}$$
$$= q(x_1)^{-1}\alpha\sigma(x_1)\rho^{-1}\sigma(x_1)\sigma(x)$$

$$= q(x_1)^{-1}\alpha\rho^{-1}q(\sigma(x_1))\sigma(x)$$

$$= q(x_1)^{-1}\alpha\rho^{-1}\rho q(x_1)\sigma(x)$$

$$= \alpha\sigma(x) \in M$$

(ii) Sea $\dim M = 2r$

Si $\{x_1, \ldots, x_{2r}\}$ es base ortogonal o simpléctica de M y $c = x_1^{\Sigma}$ entonces, $c\sigma(x_1) \in Z(C^+(M,q)) = k + kz$ según sea la caract de k, pues:

Si caract $k \neq 2$ se procede en forma análoga a la anterior y se obtiene el resultado.

Si caract $k = 2$, $\{e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n\}$ base simpléctica de M y $c = e_1^{\Sigma}$ entonces:

Para $i \neq 1$.

$$c\sigma(e_1)\cdot(e_1f_i)^{\Sigma} = c\sigma(e_1)\rho^{-1}\sigma(e_1)\sigma(f_i) = c\rho^{-1}\sigma(e_1)\sigma(f_i)\sigma(e_1)$$

$$= (e_1e_1f_i)^{\Sigma}\sigma(e_1) = (e_1f_ie_1)^{\Sigma}\sigma(e_1) = (e_1f_i)^{\Sigma}c\sigma(e_1)$$

Además $c\sigma(e_1)(e_1e_i)^{\Sigma} = (e_1e_i)^{\Sigma}c\sigma(e_1)$ es análogo al caso anterior.

Para $i = 1$.

$$c\sigma(e_1)(e_1f_1)^{\Sigma} = c\sigma(e_1)\rho^{-1}\sigma(e_1)\sigma(f_1) = c(\rho^{-1}\sigma(e_1)\sigma(f_1)\sigma(e_1) + \sigma(e_1))$$

(Esto sale del hecho, fácilmente comprobable, que si $\sigma \in \Sigma(q)$ es de razón ρ y $\{e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n\}$ es base simpléctica de M, entonces $\{\rho^{-1}\sigma(e_1), \sigma(f_1), \ldots, \rho^{-1}\sigma(e_n), \sigma(f_n)\}$ es base simpléctica de M).

Luego

$$
\begin{aligned}
c\sigma(e_1)(e_1f_1)^{\Sigma} &= c(e_1f_1)^{\Sigma}\sigma(e_1) + c\sigma(e_1)\\
&= (e_1e_1f_1)^{\Sigma}\sigma(e_1) + c\sigma(e_1)\\
&= (e_1f_1e_1 + e_1)^{\Sigma}\sigma(e_1) + c\sigma(e_1)\\
&= (e_1f_1)^{\Sigma}c\sigma(e_1) + c\sigma(e_1) + c\sigma(e_1)\\
&= (e_1f_1)^{\Sigma}c\sigma(e_1)
\end{aligned}
$$

Por último $c\sigma(e_1)(e_1e_1)^{\Sigma} = c\sigma(e_1)q(e_1) = q(e_1)c\sigma(e_1) = (e_1e_1)^{\Sigma}c\sigma(e_1)$.

Luego $c\sigma(e_1) \in Z(C^+(M,q)) = k + kz$

Demostremos ahora que $\rho^{-1} = N(\alpha + \beta z)$, $\alpha,\beta \in k$, caract k cualquiera.

Como $c\sigma(x_1) = \alpha' + \beta' z$, luego $c = \sigma(x_1)(\alpha + \beta z)$

Calculemos $(x_1^{\Sigma})^2$

$$
\begin{aligned}
(x_1^{\Sigma})^2 = q(x_1) = x_1^{\Sigma}x_1^{\Sigma} = c\cdot c &= \sigma(x_1)(\alpha + \beta z)\sigma(x_1)(\alpha + \beta z)\\
&= \sigma(x_1)\sigma(x_1)\overline{(\alpha + \beta z)}(\alpha + \beta z)\\
&= q(\sigma(x_1))N(\alpha + \beta z)\\
&= \rho q(x_1)N(\alpha + \beta z)
\end{aligned}
$$

luego

$$
q(x_1) = \rho q(x_1)N(\alpha + \beta z) \Rightarrow \rho^{-1} = N(\alpha + \beta z)
$$

Demostremos que $\forall x \in M \quad x^{\Sigma} = \sigma(x)(\alpha + \beta z)$

$$x^{\Sigma} = (q(x_1)^{-1}x_1x_1x)^{\Sigma} = q(x_1)^{-1}x_1^{\Sigma}(x_1x)^{\Sigma}$$

$$= q(x_1)^{-1}\sigma(x_1)(\alpha + \beta z)\rho^{-1}\sigma(x_1)\sigma(x)$$

$$= \rho^{-1}q(x_1)^{-1}q(\sigma(x_1))\overline{(\alpha + \beta z)}\sigma(x)$$

$$= \rho^{-1}q(x_1)^{-1}\rho q(x_1)\sigma(x)(\alpha + \beta z)$$

$$= \sigma(x)(\alpha + \beta z)$$

iii) Demostraremos ahora que el automorfismo Σ de $C^{+}(M,q)$, asociado a σ , puede ser extendido a un automorfismo interior de $C(M,q)$.

Caso 1. dim M par.

Por parte (i) σ es de razón $\rho = \mu^2 \in k^{*2}$

Si consideramos la similitud $\mu^{-1}\sigma$ entonces:

$$q(\mu^{-1}\sigma(x)) = \mu^{-2}q(\sigma(x)) = q(x) \quad ,$$

por el lema anterior los automorfismos asociados a σ y $\mu^{-1}\sigma$ son iguales, luego Σ es igual al automorfismo asociado a una rotación. Pero toda rotación define un automorfismo interior de $C(M,q)$, luego Σ se puede extender a un automorfismo interior de $C(M,q)$.

Caso 2. dim M es par

Si σ es similitud propia, es decir $z^{\Sigma} = z$, entonces el automorfismo Σ asociado a σ deja invariante el centro de $C^{+}(M,q)$, así por un teorema de Albert (ver [4] Corolario 1.9, pág. 75), Σ es un automorfismo interior de $C^{+}(M,q)$ que se puede extender a un automorfismo interior de $C(M,q)$.

Si σ es similitud impropia, es decir $z^{\Sigma} = \bar{z}$, entonces definimos σ' , de la manera siguiente:

Para caract $k \neq 2$ tomamos base ortogonal $\{x_1, \ldots, x_{2r}\}$ y definimos:

$$\sigma'(x_i) = \sigma(x_i) \qquad 1 \leq i \leq 2r - 1$$

$$\sigma'(x_{2r}) = -\sigma(x_{2r})$$

De esta forma σ' es una similitud propia y el automorfismo Σ' asociado a σ' es interior.

Sea $u \in C^+(M,q)$ tal que $c^{\Sigma'} = ucu^{-1}$ y $v = x_{2r}$. uv define un automorfismo interior de $C(M,q)$ que induce en $C^+(M,q)$ el automorfismo Σ , pues:

Si $i \neq 2r$ entonces

$$ux_{2r}x_1x_ix_{2r}^{-1}u^{-1} = ux_1x_iu^{-1} = (x_1x_i)^{\Sigma'} = (x_1x_i)^{\Sigma}$$

y si $i = 2r$ entonces:

$$ux_{2r}x_1x_{2r}x_{2r}^{-1}u^{-1} = -ux_1x_{2r}u^{-1} = -(x_1x_{2r})^{\Sigma'} = (x_1x_{2r})^{\Sigma}$$

Si caract $k = 2$ entonces $z^{\Sigma} = z + 1$

Sea $\{e_1, f_1, \ldots, e_r, f_r\}$ base simpléctica de M y $z = e_1f_1 + \ldots + e_rf_r$

Definamos: $\sigma'(e_i) = \sigma(e_i) \qquad \forall i$

$$\sigma'(f_i) = \sigma(f_i) \qquad 1 \leq i \leq r - 1$$

$$\sigma'(f_r) = \sigma(f_r) + \frac{\sigma(e_r)}{q(e_r)} = \sigma(f_r) + \frac{\rho\sigma(e_r)}{q(\sigma(e_r))}$$

Se tiene:

$$z^{\Sigma'} = \rho^{-1}\sigma(e_1)\sigma(f_1) + \dots + \rho^{-1}\sigma(e_r)\left(\sigma(f_1) + \frac{\rho\sigma(e_r)}{q(\sigma(e_r))}\right)$$

$$= \rho^{-1}(\sigma(e_1)\sigma(f_1) + \dots + \sigma(e_r)\sigma(f_r) + \rho)$$

$$= z^{\Sigma} + 1 = z + 1 + 1 = z$$

Luego σ' es una similitud propia y el automorfismo Σ' asociado a σ' es interior. Si $u \in C^+(M,q)$ tal que $c^{\Sigma'} = ucu^{-1}$ $\forall c \in C^+(M,q)$ y $v = \sigma(f_r)$, entonces vu define un automorfismo interior de $C(M,q)$ que induce en $C^+(M,q)$ el automorfismo Σ .

q.e.d.

3.6. Lema: Si $s \in T$ y $\psi'(s) = \sigma_s$ definido como en 2.5. y $f_s : C(M,q) \to C(M,q)$ automorfismo interior definido por $sxs^{-1} = f_s(x)$ entonces f_s es un automorfismo interior de $C(M,q)$ asociado a la similitud σ .

Demostración: Recordar que $\sigma_s(x_i) = \alpha_i q(y_1)^{-1} y_1 + y_i$ $\quad i \geq 2$

p.d. $sx_1 \dots x_{2t}s^{-1} = (x_1 \dots x_{2t})^{\Sigma} = f_s(x_1 \dots x_{2t})$

Se tiene

$$sx_1 \dots x_{2t}s^{-1} = sx_1x_2s^{-1}sx_3x_4s^{-1} \dots sx_{2t-1}x_{2t}s^{-1}$$

Demostraremos que en general se tiene $sx_ix_js^{-1} = \rho^{-1}\sigma(x_i)\sigma(x_j)$, teniendo este resultado obtenemos:

$$sx_1 \dots x_{2t}s^{-1} = \rho^{-1}\sigma(x_1)\sigma(x_2)\rho^{-1}\sigma(x_3)\sigma(x_n) \dots \rho^{-1}\sigma(x_{2t-1})\sigma(x_{2t})$$

$$= \rho^{-t}\sigma(x_1)\ \ldots\ \sigma(x_{2t})$$

$$= (x_1\ \ldots\ x_{2t})^{\Sigma}$$

p.d. $sx_ix_js^{-1} = \rho^{-1}\sigma(x_i)\sigma(x_j)$

Si $i \neq 1$ entonces:

$$sx_ix_js^{-1} = q(x_1)^{-1}sx_1x_1x_ix_js^{-1}$$

$$= q(x_1)^{-1}sx_1(B_q(x_1,x_i) - x_ix_1)x_js^{-1}$$

$$= q(x_1)^{-1}B_q(x_1,x_i)sx_1x_js^{-1} - q(x_1)^{-1}sx_1x_ix_1x_js^{-1}$$

$$= q(x_1)^{-1}B_q(x_1,x_i)(\alpha_j + y_1y_j) - q(x_1)^{-1}(\alpha_i + y_1y_i)(\alpha_j + y_1y_j)$$

$$= q(x_1)^{-1}(B_q(x_1,x_i) - \alpha_i - y_1y_i)(\alpha_j + y_1y_j)$$

$$= q(x_1)^{-1}(B_q(x_1,x_i) - 2\alpha_i + \alpha_i - y_1y_i)(\alpha_j + y_1y_j)$$

$$= q(x_1)^{-1}(B_q(y_1,y_i) + \alpha_i - y_1y_i)(\alpha_j + y_1y_j)$$ (Por Lema 2.4.(ii))

Por otro lado

$$\sigma(x_i)\sigma(x_j) = (\alpha_iq(y_1)^{-1}y_1 + y_i)(\alpha_jq(y_1)^{-1}y_1 + y_j)$$

$$= \alpha_i\alpha_jq(y_1)^{-1} + \alpha_iq(y_1)^{-1}y_1y_j + \alpha_jq(y_1)^{-1}y_iy_1 + y_iy_j$$

$$= \alpha_i\alpha_jq(y_1)^{-1} + \alpha_iq(y_1)^{-1}y_1y_j + \alpha_jq(y_1)^{-1}B_q(y_1,y_i) -$$

$$- \alpha_jq(y_1)^{-1}y_1y_i + y_iy_j$$

$$= q(y_1)^{-1}(\alpha_i\alpha_j + \alpha_iy_1y_j + \alpha_jB_q(y_1,y_i) - \alpha_jy_1y_i + q(y_1)y_iy_j)$$

$$= q(y_1)^{-1}(\alpha_i\alpha_j + \alpha_iy_1y_j + \alpha_jB_q(y_1,y_i) - \alpha_jy_1y_i + y_1y_1y_iy_j)$$

$$= q(y_1)^{-1}(\alpha_i\alpha_j + \alpha_i y_1 y_j + \alpha_j\, B_q(y_1,y_i) - \alpha_j y_1 y_i + B_q(y_1,y_i)y_1 y_j - y_1 y_i y_1 y_j)$$

$$= q(y_1)^{-1}[\alpha_i(\alpha_j + y_1 y_j) + B_q(y_1,y_i)(\alpha_j + y_1 y_j) - y_1 y_i(\alpha_j + y_1 y_j)]$$

$$= q(y_1)^{-1}(B_q(y_1,y_i) + \alpha_i - y_1 y_i)(\alpha_j + y_1 y_j)$$

$$= q(y_1)^{-1} q(x_1) q(x_1)^{-1}(B_q(y_1,y_i) + \alpha_i - y_1 y_i)(\alpha_j + y_1 y_j)$$

$$= \rho s x_i x_j s^{-1}$$

Para $i = 1$ se tiene:

$$\rho^{-1}\sigma(x_1)\sigma(x_2) = \rho^{-1}\rho y_1(\alpha_1 q(y_1)^{-1} y_1 + y_2) = \alpha_1 + y_1 y_2 = s x_1 x_2 s^{-1}$$

luego

$$s x_i x_j s^{-1} = \rho^{-1}\sigma(x_i)\sigma(x_j) \qquad \forall i,j$$

q.e.d.

3.7. <u>Proposición</u>: Si $\dim M$ es impar entonces $T = \Gamma$.

<u>Demostración</u>: Basta demostrar $T \subseteq \Gamma$

Sea $s \in T$, p.d. $sxs^{-1} \in M \qquad \forall x \in M$.

Consideremos el automorfismo $f_s : C^+(M,q) \to C^+(M,q)$ definido por $f_s(x) = sxs^{-1}$.

Por el lema anterior f_s es un automorfismo asociado a una similitud, luego por teorema 3.5., $x^\Sigma = sxs^{-1} \in M \quad \forall x \in M$.

Luego $s \in \Gamma$.

q.e.d.

Podemos concluir que bastará analizar el caso en que $\dim M$ es par, pues si $\dim M$ es impar entonces nuestro problema se reduce al caso del párrafo 1, es decir a la sucesión

$$1 \to k^* \to \Gamma \xrightarrow{\psi} O(q) \to 1$$

De ahora en adelante $\dim M$ será par a no ser que se diga lo contrario.

3.8. <u>Teorema</u>: La sucesión

$$1 \to \Delta^*(q) \to T \xrightarrow{\psi'} \Sigma(q) \to 1$$

es exacta, donde ψ' es la función definida en 2.5.

<u>Demostración</u>: i) ψ' es un homomorfismo de grupos

p.d. $\psi'(ss_1) = \psi'(s)\psi'(s_1)$

p.d. Si σ y σ_1 son similitudes de razón ρ y ρ_1 respectivamente asociadas a s y s_1 entonces $\sigma \circ \sigma_1$ está asociada a ss_1

p.d. $ss_1x_1x_is_1^{-1}s^{-1} = (\rho\rho_1)^{-1}\sigma(\sigma_1(x_1))\sigma(\sigma_1(x_i))$

$$\begin{aligned} ss_1x_1x_is_1^{-1}s^{-1} &= s\rho_1^{-1}\sigma_1(x_1)\sigma_1(x_i)s^{-1} \\ &= (\rho\rho_1)^{-1}\sigma(\sigma_1(x_1))\sigma(\sigma_1(x_i)) \end{aligned}$$

ii) ψ' es epiyectiva

Sea $\sigma \in \Sigma(q)$ y Σ automorfismo de $C^+(M,q)$ asociado a σ.

Por Teorema 3.5. Cap. II sabemos que Σ es tal que $\forall x \in M$ $x^\Sigma = \sigma(x)(\alpha + \beta z)$.

Además es un automorfismo del álgebra simple $C(M,q)$ que deja el centro k invariante. Luego existe $s \in T$ tal que

$sxs^{-1} = \sigma(x)(\alpha + \beta z) \quad \forall x \in M$.

Demostraremos que $\psi'(s) = \sigma$, es decir:

$sx_1x_is^{-1} = \alpha_i + y_1y_i$ donde $\sigma(x_i) = \alpha_i q(y_1)^{-1}y_1 + y_i$

$i = 2, \ldots, n$ y $\sigma(x_1) = \rho y_1$.

Se tiene:

$$\begin{aligned} sx_1x_is^{-1} &= sx_1s^{-1}sx_is^{-1} \\ &= \sigma(x_1)(\alpha + \beta z)\sigma(x_i)(\alpha + \beta z) \\ &= \rho^{-1}\sigma(x_1)\sigma(x_i) \\ &= \rho^{-1}(\rho y_1)(\alpha_i q(y_1)^{-1}y_1 + y_i) \\ &= y_1(\alpha_i q(y_1)^{-1}y_1 + y_i) \\ &= \alpha_i + y_1y_i \end{aligned}$$

iii) Núcleo de ψ' :

Si σ es la identidad en $\Sigma(q)$ es decir $\sigma(x) = x \quad \forall x \in M$,

$\rho = 1$; y $s \in T$ es tal que $\psi'(s) = \sigma$, entonces:

$$sx_1x_is^{-1} = \rho^{-1}\sigma(x_1)\sigma(x_i) = x_1x_i$$

$$\Rightarrow \; sx_1x_is^{-1} = x_1x_i \;\Rightarrow\; sx_1x_i = x_1x_is$$

$$\Rightarrow \; s \in Z^*(C^+(M,q)) = \Delta^*(q) \qquad (^* \text{ pues } s \text{ es invertible})$$

Luego $\operatorname{Ker} \psi' = \Delta^*(q)$

q.e.d.

3.9. <u>Teorema</u>: El diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & k^* \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Gamma \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, hook] & O(q) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \Delta^*(q) \arrow[r] & T \arrow[r, "\psi'"] & \Sigma(q) \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

§ 4. Similitudes propias e impropias.

4.1. Invariante de Dickson generalizado

Recordemos la definición 3.3. Cap. II que decía: Si $\sigma \in \Sigma(q)$ y Σ es automorfismo asociado a σ, entonces:

σ es similitud propia ssi $z = z$

σ es similitud impropia ssi $z^{\Sigma} = \bar{z}$

Sea $\mathcal{L}$ la involución conjugación "$-$" sobre $\Delta(q)$, se tiene: $\Sigma/\Delta(q) = \mathcal{L}^{\varepsilon}$ con $\varepsilon \in \{0,1\}$.

De esta manera σ es similitud propia ssi $\varepsilon = 0$ e impropia ssi $\varepsilon = 1$.

Con esto podemos definir el <u>invariante de Dickson</u> generalizado por la función

$$D : \Sigma(q) \to \{0,1\} \quad \text{tal que} \quad \sigma \to D(\sigma) \quad \text{con}$$

$$D(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \text{ es similitud propia} \\ 1 & \text{si } \sigma \text{ es similitud impropia} \end{cases}$$

4.2. El grupo $\Sigma^+(q)$

Sea $\Sigma^+(q)$ el subgrupo de $\Sigma(q)$ formado por las similitudes propias

Sea $\sigma \in \Sigma^+(q)$ y $s \in T$ tal que $\psi'(s) = \sigma$. Como s define un automorfismo interior asociado a σ y por ser σ similitud propia se tiene:

$$szs^{-1} = z \Rightarrow sz = zs$$

luego $s \in C(Z(C^+(M,q))) = \{s \in C(M,q) \mid sx = xs \quad \forall x \in Z(C^+(M,q))\} \subseteq C^+(M,q)$

luego $s \in T \cap C^+(M,q) \ := T^+$.

Luego se tendrá

$$\psi'/T^+ : T^+ \to \Sigma^+(q)$$

Definimos $\Sigma^+(q) = \mathrm{Img}\ \psi'/T^+$ y se tiene $\psi'/T^+ : T^+ \to \Sigma^+(q)$

(Notar que este es el concepto equivalente al subgrupo de rotaciones $O^+(q)$ de $O(q)$, en efecto se puede ver en [1] Cap. III § 3. que $O^+(q) = \{\sigma \in O(q) \mid D(\sigma) = 0\}$).

C A P I T U L O   I I I

LA NORMA ESPINORIAL SOBRE EL GRUPO DE SIMILITUDES

§ 1. Norma espinorial sobre el grupo ortogonal

Este párrafo sólo dará un bosquejo de resultados ya conocidos, como se puede comprobar al leer [2] y [3].

1.1. Definición: Es conocido que existe un homomorfismo

$$\lambda : \Gamma \to k^*$$

dado por $\lambda(s) = s^*s$, donde Γ indica el grupo de Clifford y $*$ es el anti-automorfismo de $C(M,q)$ definido en Cap. I 4.6.4. $\lambda(s) = s^*s$ se llama la norma espinorial de $s \in \Gamma$.

1.2. Definición: Sea $\sigma \in O(q)$. Como $\psi : \Gamma \to O(q)$ es epiyectiva existe $s \in \Gamma$ tal que $\psi(s) = \sigma$.

Si existe $s_1 \in \Gamma$ tal que $\psi(s_1) = \sigma$, entonces $ss_1^{-1} \in \ker\psi = k^*$, luego $s_1 = \alpha s$ con $\alpha \in k^*$, teniéndose así que $\lambda(\alpha s) = \alpha^2\lambda(s)$.

Se define la norma espinorial de $\sigma \in O(q)$ por $\theta(\sigma)$, donde

$$\theta : O(q) \to k^*/k^{*2}$$

tal que $\theta(\sigma) \equiv \lambda(s) (\mathrm{mod}\ k^{*2})$, con $s \in \Gamma$ que satisface $\psi(s) = \sigma$.

1.3. Observación: Notar, como se vió en Cap. II , Teorema 1.2. que si $s \in \Gamma$ es asociado a $\sigma \in O(q)$ por ψ , entonces s puede tomarse de la forma $s = v_1 \dots v_t$ con $\sigma = \tau_{v_1} \dots \tau_{v_t}$ y v_i $1 \leq i \leq t$ son vectores anisotrópicos de M . Se tendrá entonces

$$\lambda(s) = v_t \ldots v_1 v_1 \ldots v_t = q(v_1) \ldots q(v_t)$$

Así obtenemos:

$$\theta(\sigma) = q(v_1) \ldots q(v_t) k^{*2} \in k^*/k^{*2}$$

que es la forma como define Dieudonné la norma espinorial sobre el grupo ortogonal.

1.4. Observación: Es un resultado conocido (ver [3]) que si q es isotrópica entonces la norma espinorial θ es epiyectiva, además el núcleo de θ es $[O^+(q), O^+(q)]$, grupo de conmutadores de las rotaciones (ver también § 4., 4.1.).

Luego si q es isotrópica la sucesión

$$1 \to [O^+(q), O^+(q)] \to O(q) \xrightarrow{\theta} k^*/k^{*2} \to 1$$

es exacta.

Por último también es conocido que el grupo $[O^+(q), O^+(q)]$ es generado por los cuadrados de $O^+(q)$; y si $\dim M > 2$, índice $q > 0$ entonces $[O^+(q), O^+(q)] = [O(q), O(q)]$.

§ 2. Norma espinorial sobre el grupo de similitudes

En este párrafo se verá que es posible extender la definición de norma espinorial al grupo de similitudes.

Como de costumbre bastará considerar el caso $\dim M$ par, pues el caso dim M impar se reduce al párrafo anterior.

Notar que con el estudio realizado hasta aquí podemos construir el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
\Delta^*(q) & \longleftarrow & k^* & \longrightarrow & k^{*2} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
T & \longleftarrow & \Gamma & \xrightarrow{\lambda} & k^* \\
\psi' \downarrow & & \psi \downarrow & & \downarrow \\
\Sigma(q) & \longleftarrow & O(q) & \xrightarrow{\theta} & k^*/k^{*2}
\end{array}$$

2.1. <u>Proposición</u>

i) Si $\dim M = 4r + 2$ entonces $\lambda : T \to k^*$ es un homomorfismo

ii) Si $\dim M = 4r$ entonces $\lambda : T \to \Delta^*(q)$. Además la restricción de λ a T^+ es un homomorfismo y $\lambda(s) \in k^*$ ssi $s \in \Gamma$.

Aquí λ se define igual que antes, a saber, $\lambda(s) = s^*s$.

<u>Demostración</u>: i) $\dim M = 4r + 2$.

Sea $s \in T$ y $\psi'(s) = \sigma$, sabemos por Cap. II teorema 3.5. que $\forall x \in M$ $sxs^{-1} = \sigma(x)(\alpha + \beta z)$ y por Cap. I lema 4.6.5. que $z^* = \bar{z}$, donde z es elegido como en Cap. I 4.6.2.

$\forall x \in M$ se tiene:

$$(sxs^{-1})^* = (s^*)^{-1}xs^* = (\sigma(x)(\alpha + \beta z))^* = (\alpha + \beta z)^*\sigma(x)$$

$$= \overline{(\alpha + \beta z)}\sigma(x) = \sigma(x)(\alpha + \beta z) = sxs^{-1}$$

luego

$$(s^*)^{-1}xs^* = sxs^{-1} \Rightarrow s^*sx = xs^*s \qquad \forall x \in M$$

$$\Rightarrow \lambda(s) = s^*s \in Z^*(C(M,q)) = k^*$$

luego

$$\lambda : T \to k^*$$

Además λ es un homomorfismo, pues:

$$\lambda(s_1s_2) = s_2^*s_1^*s_1s_2 = \lambda(s_1)\lambda(s_2)$$

ii) Dim $M = 4r$.

En este caso por Cap. I lema 4.6.5. sabemos que $z^* = z$

Sea $s \in T$ y $\psi'(s) = \sigma$. Se tiene:

$$\begin{aligned} sx_ix_js^{-1} &= sx_is^{-1}sx_js^{-1} \\ &= \sigma(x_i)(\alpha + \beta z)\sigma(x_j)(\alpha + \beta z) \\ &= \sigma(x_i)\sigma(x_j)N(\alpha + \beta z) \\ &= \rho^{-1}\sigma(x_i)\sigma(x_j) \end{aligned}$$

Ahora si $\{x_1, \ldots, x_{4r}\}$ es base de M , entonces:

$$\begin{aligned} (sx_ix_js^{-1})^* &= (s^*)^{-1}x_jx_is^* \\ &= (s^*)^{-1}(B_q(x_i,x_j) - x_ix_j)s^* \\ &= (s^*)^{-1}s^*B_q(x_i,x_j) - (s^*)^{-1}x_ix_js^* \\ &= B_q(x_i,x_j) - (s^*)^{-1}x_ix_js^* \end{aligned}$$

por otro lado

$$(sx_ix_js^{-1})^* = (\rho^{-1}\sigma(x_i)\sigma(x_j))^* = \rho^{-1}\sigma(x_j)\sigma(x_i)$$

$$= \rho^{-1}(B_q(\sigma(x_i),\sigma(x_j)) - \sigma(x_i)\sigma(x_j))$$

$$= \rho^{-1}(\rho B_q(x_i,x_j) - \sigma(x_i)\sigma(x_j))$$

$$= B_q(x_i,x_j) - \rho^{-1}\sigma(x_i)\sigma(x_j)$$

$$= B_q(x_i,x_j) - sx_ix_js^{-1}$$

luego

$$(s^*)^{-1}x_ix_js^* = sx_ix_js^{-1} \Rightarrow s^*sx_ix_j = x_ix_js^*s$$

$$\Rightarrow \lambda(s) \in Z^*(C^+(M,q)) = \Delta^*(q)$$

Es fácil comprobar que λ/Γ^+ es un homomorfismo.

Demostremos por último $\lambda(s) \in k \Longleftrightarrow s \in \Gamma$

$\Rightarrow$) $\lambda(s) \in k \Rightarrow s^*sx = xs^*s \qquad \forall x \in M$

$$\Rightarrow sxs^{-1} = (sxs^{-1})^*$$

$$\Rightarrow \sigma(x)(\alpha + \beta z) = \sigma(x)\overline{(\alpha + \beta z)}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta z = \overline{\alpha + \beta z}$$

$$\Rightarrow \beta = 0$$

luego

$$sxs^{-1} = \alpha\sigma(x) \in M \qquad \forall x \in M \Rightarrow s \in \Gamma .$$

El recíproco es trivial pues si $s \in \Gamma$ entonces $\lambda(s) \in k^*$

q.e.d.

2.2. Definición de la norma espinorial sobre el grupo de similitudes

Sea $\sigma \in \Sigma(q)$, como $\psi' : T \to \Sigma(q)$ es epiyectiva, entonces existe $s \in T$ tal que $\psi'(s) = \sigma$.

Si además existe $s_1 \in T$ tal que $\psi'(s_1) = \sigma$, entonces $ss_1^{-1} \in \mathrm{Ker}\psi'$; luego $s_1 = \alpha s$ con $\alpha \in \Delta^*(q) = \mathrm{Ker}\psi'$ y así αs y s definen la misma similitud σ .

Si calculamos $\lambda(\alpha s)$ obtenemos:

$$\lambda(\alpha s) = s^*\alpha^*\alpha s = \alpha^*\alpha\lambda(s) = T(\alpha)\lambda(s)$$

donde T está dado por:

Cuando $\dim M = 4r + 2$, $T(\alpha)$ es simplemente la norma de α ya que: Si $\alpha = \beta + \gamma z \in \Delta^*(q)$ entonces $T(\alpha) = (\beta + \gamma z)^*(\beta + \gamma z) = \overline{(\beta + \gamma z)}(\beta + \gamma z) = N(\alpha)$

Cuando $\dim M = 4r$, $T(\alpha) = \alpha^2$ ya que

$$T(\alpha) = (\beta + \gamma z)^*(\beta + \gamma z) = (\beta + \gamma z)(\beta + \gamma z) = \alpha^2 .$$

<u>Definimos así la norma espinorial</u> por medio de la función θ' dada de la siguiente forma:

Si $\dim M = 4r + 2$ entonces:

$$\theta' : \Sigma(q) \to k^*/N(\Delta^*(q))$$

con $\theta'(\sigma) \equiv \lambda(s) (\mathrm{mod}\ N(\Delta^*(q)))$ donde $s \in T$ es tal que $\psi'(s) = \sigma$.

Si $\dim M = 4r$ entonces

$$\theta' : \Sigma(q) \to \Delta^*(q)/(\Delta^*(q))^2$$

con $\theta'(\sigma) \equiv \lambda(s)(\mathrm{mod}(\Delta^*(q))^2)$ donde $s \in T$ es tal que $\psi'(s) = \sigma$.
$\theta'(\sigma)$ la llamamos la <u>norma espinorial de</u> $\sigma \in \Sigma(q)$.

2.3. <u>Proposición</u>: Los siguientes diagramas son conmutativos:

i) Dim M = 4r + 2

$$\begin{array}{ccc} O(q) & \xrightarrow{\theta} & k^*/k^{*2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma(q) & \xrightarrow{\theta'} & k^*/N(\Delta^*(q)) \end{array}$$

ii) Dim M = 4r

$$\begin{array}{ccc} O(q) & \xrightarrow{\theta} & k^*/k^{*2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma(q) & \xrightarrow{\theta'} & \Delta^*(q)/(\Delta^*(q))^2 \end{array}$$

§ 3. <u>El grupo de conmutadores de $\Sigma(q)$</u>

Como se vió en observación 1.4. de este capítulo, el grupo de conmutadores juega un papel importante en el núcleo de θ . Por eso este párrafo hace un estudio sobre él.

3.1. <u>Proposición</u>: Sea σ_ρ similitud de razón ρ y $g \in \Gamma^+$ asociado a la rotación $G : M \to M$ definida por $G(x) = \rho^{-1}(\sigma_\rho^2(x))$

i) Si dim M = 4r + 2 y

$\sigma_\rho \in \Sigma^+(q)$ entonces $\lambda(g) \equiv \rho(k^{*2})$

$\sigma_\rho \in \Sigma^-(q)$ entonces $\lambda(g) \equiv 1(k^{*2})$

donde $\Sigma^-(q) = \{\sigma \in \Sigma(q) \mid s \in T^-$ asociado a $\sigma\} = \{\sigma \in \Sigma(q) \mid \sigma$ es similitud impropia$\}$.

Así si índice $q > 0$, $G \in [O^+(q), O^+(q)]$ ssi $\sigma_\rho \in \Sigma^-(q)$ ó $\rho \equiv 1(k^{*2})$.

ii) Si dim M = 4r y

$\sigma_\rho \in \Sigma^+(q)$ entonces $\lambda(g) \equiv 1(k^{*2})$

$\sigma_\rho \in \Sigma^-(q)$ entonces $\lambda(g) \equiv \rho(k^{*2})$

Así si índice $q > 0$, $G \in [O^+(q), O^+(q)]$ ssi $\sigma_\rho \in \Sigma^+(q)$ ó $\rho \equiv 1(k^{*2})$

Demostración: i) Dim $M = 4r + 2$

Sea $\sigma_\rho \in \Sigma^+(q)$ y $s \in T^+$ asociado a σ_ρ . Se tiene $sxs^{-1} = \sigma_\rho(x)(\alpha + \beta z) \quad \forall x \in M$.

Notar que:

$$\begin{aligned}
s^2x(s^2)^{-1} &= ssxs^{-1}s^{-1} = s\sigma_\rho(x)(\alpha + \beta z)s^{-1} \\
&= s\overline{(\alpha + \beta z)}\sigma_\rho(x)s^{-1} \\
&= \overline{(\alpha + \beta z)}s\sigma_\rho(x)s^{-1} \qquad (\text{Pues } s \in T^+ \subseteq C^+(M,q)) \\
&= \overline{(\alpha + \beta z)}\sigma_\rho^2(x)(\alpha + \beta z) \\
&= \sigma_\rho^2(x)(\alpha + \beta z)^2
\end{aligned}$$

Por otro lado $g(\alpha + \beta z)^{-1}$ define el mismo automorfismo interior de s^2 pues:

$$\begin{aligned}
g(\alpha + \beta z)^{-1}x(\alpha + \beta z)g^{-1} &= (\alpha + \beta z)^{-1}gxg^{-1}(\alpha + \beta z) \qquad (\text{Pues } g \in \Gamma^+ \subseteq C^+(M,q)) \\
&= (\alpha + \beta z)^{-1}\rho^{-1}\sigma_\rho^2(x)(\alpha + \beta z) \\
&= \rho\overline{(\alpha + \beta z)}\rho^{-1}\sigma_\rho^2(x)(\alpha + \beta z) \qquad (\text{Pues } \rho^{-1} = (\alpha + \beta z)\overline{(\alpha + \beta z)}) \\
&= \sigma_\rho^2(x)(\alpha + \beta z)^2
\end{aligned}$$

luego por lema 4.4. Cap II

$$s^2 = \gamma g(\alpha + \beta z)^{-1} \qquad \gamma \in k$$

y $$\lambda(s^2) = (\lambda(s))^2 = \gamma^2 \in k^{*2}$$

$$\begin{aligned}\lambda(\gamma g(\alpha+\beta z)^{-1}) &= (\alpha+\beta z)^{-1*}g^*\gamma\gamma g(\alpha+\beta z)^{-1}\\ &= \gamma^2\rho\,\overline{(\alpha+\beta z)}^*g^*g\rho\,\overline{(\alpha+\beta z)}\\ &= \gamma^2\rho^2(\alpha+\beta z)\lambda(g)\overline{(\alpha+\beta z)}\\ &= \gamma^2\rho^2\rho^{-1}\lambda(g)\end{aligned}$$

luego

$$\nu^2 = \gamma^2\rho^2\rho^{-1}\lambda(g) \Rightarrow \lambda(g)\rho^{-1} = \frac{\nu^2}{\gamma^2\rho^2} \Rightarrow \lambda(g) \equiv \rho(\mathrm{mod}\ k^{*2}) .$$

Sea ahora $\sigma_\rho \in \Sigma^-(q)$ y $s \in T^-$ tal que $\forall x \in M$ $sxs^{-1} = \sigma_\rho(x)(\alpha+\beta z)$. Notar que en este caso $szs^{-1} = \bar{z} \Rightarrow sz = \bar{z}s$; pues la similitud es impropia.

Se tiene entonces:

$$\begin{aligned}s^2x(s^2)^{-1} &= s\overline{(\alpha+\beta z)}\sigma_\rho(x)s^{-1} = (\alpha+\beta z)s\sigma_\rho(x)s^{-1}\\ &= (\alpha+\beta z)\sigma_\rho^2(x)(\alpha+\beta z)\\ &= \sigma_\rho^2(x)N(\alpha+\beta z)\\ &= \rho^{-1}\sigma_\rho^2(x) = gxg^{-1}\end{aligned}$$

luego

$s^2 = \gamma g$ con $\gamma \in k^*$ y

$$\nu^2 = \lambda(s^2) = \lambda(\gamma g) = \gamma^2\lambda(g) \Rightarrow \lambda(g) \equiv 1(k^{*2}) .$$

Por último se sabe que

$G \in [O^+(q), O^+(q)]$ ssi índice $q > 0$ y $\lambda(g) \equiv 1(k^{*2})$. Luego

$G \in [O^+(q), O^+(q)]$ ssi $\sigma_\rho \in \Sigma^-(q)$ ó $\rho \equiv 1(k^{*2})$

ii) Dim M = 4r .

<u>Caso 1</u>: $\sigma_\rho \in \Sigma^+(q)$ y $s \in T^+$ con $\psi'(s) = \sigma_\rho$, $sxs^{-1} = \sigma_\rho(x)(\alpha + \beta z)$

Como en el caso anterior se tiene:

$$s^2 = \gamma g(\alpha + \beta z)^{-1}$$

Además sabemos que si dim M = 4r entonces $\lambda(s) = \Delta^*(q)$,

luego:

$$\lambda(s) = \alpha' + \beta' z = s^* s \Rightarrow s^{-1} = (\alpha' + \beta' z)^{-1} s^*$$

$$\Rightarrow sxs^{-1} = sx(\alpha' + \beta' z)^{-1} s^*$$

$$= sxs^*(\alpha' + \beta' z)^{-1} \qquad (\text{pues } s \in C^+(M,q))$$

y como $sxs^{-1} = \sigma_\rho(x)(\alpha + \beta z)$ se tiene:

$$sxs^* = \sigma_\rho(x)(\alpha + \beta z)(\alpha' + \beta' z) \ ;$$

además como

$$(sxs^*)^* = sxs^*$$

entonces

$$\sigma_\rho(x)(\alpha + \beta z)(\alpha' + \beta' z) = (\sigma_\rho(x)(\alpha + \beta z)(\alpha' + \beta' z))^*$$

$$= (\alpha' + \beta' z)(\alpha + \beta z)\sigma_\rho(x) \qquad (\text{Pues dim } M = 4r \Rightarrow z^* = z)$$

$$= \sigma_\rho(x)\,\overline{(\alpha + \beta z)}\,\overline{(\alpha' + \beta' z)}$$

luego

$$(\alpha + \beta z)(\alpha' + \beta' z) = \overline{(\alpha + \beta z)}\,\overline{(\alpha' + \beta' z)} \Rightarrow (\alpha + \beta z)(\alpha' + \beta' z) =$$

$$= t \in k^*$$

y multiplicando por $\overline{(\alpha + \beta z)}$ se obtiene $(\alpha' + \beta' z) = \rho t \overline{(\alpha + \beta z)}$, luego

$$\lambda(s) = \rho t \overline{(\alpha + \beta z)} \quad \text{con} \quad t \in k^*$$

Ahora:

$$\lambda(s^2) = s^* s^* s s = s^* \rho t \overline{(\alpha + \beta z)} s$$

$$= \rho t \overline{(\alpha + \beta z)} s^* s \qquad \text{(Pues } s \in C^+(M,q))$$

$$= \rho^2 t^2 \overline{(\alpha + \beta z)}^2$$

por otro lado

$$\lambda(s^2) = \lambda(\gamma g (\alpha + \beta z)^{-1}) = \gamma^2 (\alpha + \beta z)^{-1*} g^* g (\alpha + \beta z)^{-1}$$

$$= \gamma^2 \lambda(g) \overline{(\alpha + \beta z)}^2 \rho^2$$

luego

$$\rho^2 t^2 \overline{(\alpha + \beta z)}^2 = \gamma^2 \rho^2 \lambda(g) \overline{(\alpha + \beta z)}^2$$

$$\Rightarrow \lambda(g) = t^2 (\gamma^{-1})^2 \in k^{*2} \Rightarrow \lambda(g) \equiv 1 (k^{*2})$$

<u>Caso 2</u>: $\sigma_\rho \in \Sigma^-(q)$ y $s \in T^-$ es tal que $sxs^{-1} = \sigma_\rho(x)(\alpha + \beta z)$ $\quad \forall x \in M$.

Igual que antes se obtiene $s^2 = \gamma g$ y

$$\lambda(s^2) = \rho t(\alpha + \beta z)s^* s$$

$$= \rho^2 t^2 (\alpha + \beta z)\overline{(\alpha + \beta z)} = \rho^2 t^2 \rho^{-1} = \rho t^2$$

por otro lado

$$\lambda(s^2) = \lambda(\gamma g) = \gamma^2 \lambda(g)$$

entonces

$$\lambda(g) \equiv \rho(k^{*2})$$

Por último $G \in [O^+(q), O^+(q)]$ ssi índice $q > 0$ y $\sigma_\rho \in \Sigma^+(q)$ ó $\rho \equiv 1(k^{*2})$

q.e.d.

3.2. <u>Lema</u>: Sea $\sigma \in \Sigma(q)$ de razón ρ y $sxs^{-1} = \sigma(x)(\alpha + \beta z)$ con $s \in T$ asociado a σ .

i) Si $s \in T^+$ es asociado a σ entonces $s^{-1}xs = \sigma^{-1}(x)(\alpha + \beta z)^{-1}$

ii) Si $s \in T^-$ es asociado a σ entonces $s^{-1}xs = \sigma^{-1}(x)\overline{(\alpha + \beta z)}^{-1}$

<u>Demostración</u>: i) $\sigma^{-1}(x) = s^{-1}s\sigma^{-1}(x)s^{-1}s$

$$= s^{-1}\sigma(\sigma^{-1}(x))(\alpha + \beta z)s$$

$$= s^{-1}(x)s(\alpha + \beta z) \qquad (\text{Pues } s \in T^+ \subseteq C^+(M,q))$$

luego

$$\sigma^{-1}(x)(\alpha + \beta z)^{-1} = s^{-1}xs$$

ii) Se demuestra en forma análoga a la anterior y teniendo en cuenta que si $s \in T^-$ entonces $sz = \bar{z}s$.

q.e.d.

3.3. Lema: Sea $\dim M = 4r$ y $s \in T$ tal que $sxs^{-1} = \sigma(x)(\alpha + \beta z)$

i) Si $s \in T^+$ entonces $\lambda(s) = \mu\overline{(\alpha + \beta z)}$ y $\lambda(s^{-1}) = \mu^{-1}\overline{(\alpha + \beta z)}^{-1}$, $\mu \in k$.

ii) Si $s \in T^-$ entonces $\lambda(s) = \mu(\alpha + \beta z)$ y $\lambda(s^{-1}) = \mu^{-1}\overline{(\alpha + \beta z)}^{-1}$, $\mu \in k$.

Demostración: Como $\dim M = 4r$, sabemos que:

$$\lambda(s) = \alpha' + \beta' z \in \Delta^*(q) \Rightarrow s^{-1} = (\alpha' + \beta' z)^{-1} s^*$$

i) Si $s \in T^+$ entonces:

$$sxs^{-1} = sx(\alpha' + \beta' z)^{-1} s^* = sxs^*(\alpha' + \beta' z)^{-1}$$

y como $sxs^{-1} = \sigma(x)(\alpha + \beta z)$ entonces

$$sxs^* = \sigma(x)(\alpha + \beta z)(\alpha' + \beta' z)$$

y como $(sxs^*)^* = sxs^*$ se tiene

$$\sigma(x)(\alpha + \beta z)(\alpha' + \beta' z) = \sigma(x)\overline{(\alpha + \beta z)}\,\overline{(\alpha' + \beta' z)}$$

luego

$(\alpha + \beta z)(\alpha' + \beta' z) = t \in k$ y multiplicando por $\overline{(\alpha + \beta z)}$ obtenemos $\alpha' + \beta' z = \rho t\overline{(\alpha + \beta z)}$

Llamemos $\rho t = \mu$, tenemos:

$$\lambda(s) = \mu\overline{(\alpha + \beta z)} \Rightarrow s^{*}s = \mu\overline{(\alpha + \beta z)}$$

$$\Rightarrow 1 = (s^{*})^{-1}\mu\overline{(\alpha + \beta z)}s^{-1}$$

$$\Rightarrow \mu^{-1}\overline{(\alpha + \beta z)}^{-1} = (s^{*})^{-1}s^{-1} = \lambda(s^{-1})$$

ii) Si $s \in T^{-}$ entonces

$$\sigma(x)(\alpha + \beta z) = sxs^{-1} = sx(\alpha' + \beta' z)^{-1}s^{*} = sxs^{*}\overline{(\alpha' + \beta' z)}^{-1}$$

(Pues $sz = \bar{z}s$)

luego

$$sxs^{*} = \sigma(x)(\alpha + \beta z)\overline{(\alpha' + \beta' z)}$$

y como $sxs^{*} = (sxs^{*})^{*}$ tenemos:

$$\sigma(x)(\alpha + \beta z)(\alpha' + \beta' z) = \sigma(x)\overline{(\alpha + \beta z)}(\alpha' + \beta' z)$$

luego

$\overline{(\alpha + \beta z)}(\alpha' + \beta' z) = t \in k$ y multiplicando por $(\alpha + \beta z)$ tenemos:

$$(\alpha' + \beta' z) = \rho t(\alpha + \beta z)$$

Llamando $\mu = \rho t$ tenemos:

$$\lambda(s) = s^{*}s = \mu(\alpha + \beta z) \Rightarrow 1 = (s^{*})^{-1}\mu(\alpha + \beta z)s^{-1}$$

$$\Rightarrow \mu^{-1}\overline{(\alpha + \beta z)}^{-1} = (s^{*})^{-1}s^{-1} \quad \text{(Pues } sz = \bar{z}s \text{ si } s \in T^{-}\text{)}$$

Luego $\lambda(s) = \mu(\alpha + \beta z)$ y $\lambda(s^{-1}) = \mu^{-1}\overline{(\alpha + \beta z)}^{-1}$

q.e.d.

3.4. Proposición: Sean σ_{ρ_1} y σ_{ρ_2} en $\Sigma(q)$ de razón ρ_1 y ρ_2 respectivamente. Si $g \in \Gamma^+$ es un elemento asociado a la rotación $\sigma_{\rho_1}^{-1}\sigma_{\rho_2}^{-1}\sigma_{\rho_1}\sigma_{\rho_2} \in [\Sigma(q),\Sigma(q)]$ entonces $\lambda(g) \equiv \rho_1^{\varepsilon_2}\rho_2^{\varepsilon_1}(k^{*2})$ donde

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma_{\rho_i} \in \Sigma^+(q) \\ 1 & \text{si } \sigma_{\rho_i} \in \Sigma^-(q) \end{cases} \qquad i = 1,2$$

Demostración: Sean s_1 y s_2 en T asociados a σ_{ρ_1} y σ_{ρ_2} respectivamente, es decir $s_1xs_1^{-1} = \sigma_{\rho_1}(x)(\alpha_1 + \beta_1 z)$ y $s_2xs_2^{-1} = \sigma_{\rho_2}(x)(\alpha_2 + \beta_2 z)$ $\forall x \in M$.

Caso 1: Dim $M = 4r + 2$

En este caso $\lambda : T \to k^*$ es un homomorfismo, luego

$$\lambda(s_1^{-1}s_2^{-1}s_1s_2) = 1$$

Caso 1.1.: Si s_1 y $s_2 \in T^+$, es decir, $\sigma_{\rho_i} \in \Sigma^+(q)$ para $i = 1,2$ entonces $\forall x \in M$

$$\begin{aligned}(s_1^{-1}s_2^{-1}s_1s_2)\, x\, (s_1^{-1}s_2^{-1}s_1s_2)^{-1} &= s_1^{-1}s_2^{-1}s_1s_2xs_2^{-1}s_1^{-1}s_2s_1 \\ &= s_1^{-1}s_2^{-1}\sigma_{\rho_1}(\sigma_{\rho_2}(x))s_2s_1(\alpha_1 + \beta_1 z)(\alpha_2 + \beta_2 z) \\ &= s_1^{-1}\sigma_{\rho_2}^{-1}\sigma_{\rho_1}\sigma_{\rho_2}(x)s_1(\alpha_1 + \beta_1 z) \\ &= \sigma_{\rho_1}^{-1}\sigma_{\rho_2}^{-1}\sigma_{\rho_1}\sigma_{\rho_2}(x) \in M\end{aligned}$$

(Notar que todas estas igualdades se obtienen aplicando el lema 3.2. y considerando s_1 y $s_2 \in T^+$) .

Luego tenemos

$$s_1^{-1}s_2^{-1}s_1s_2 = g \in \Gamma^+ \Rightarrow \lambda(g) = 1$$

luego

$$\lambda(g) \equiv \rho_1^\circ\rho_2^\circ(k^{*2})$$

<u>Caso 1.2.</u>: Si $s_1 \in T^+$ y $s_2 \in T^-$ entonces $\forall x \in M$:

$$s_1^{-1}s_2^{-1}s_1s_2xs_2^{-1}s_1^{-1}s_2s_1 = s_1^{-1}s_2^{-1}s_1\sigma_{\rho_2}(x)s_1^{-1}s_2s_1\overline{(\alpha_2 + \beta_2 z)}$$

$$= s_1^{-1}s_2^{-1}\sigma_{\rho_1}\sigma_{\rho_2}(x)s_2s_1\overline{(\alpha_1 + \beta_1 z)}\,\overline{(\alpha_2 + \beta_2 z)}$$

$$= s_1^{-1}\sigma_{\rho_2}^{-1}\sigma_{\rho_1}\sigma_{\rho_2}(x)s_1\overline{(\alpha_1 + \beta_1 z)}$$

$$= \sigma_{\rho_1}^{-1}\sigma_{\rho_2}^{-1}\sigma_{\rho_1}\sigma_{\rho_2}(x)(\alpha_1 + \beta_1 z)^{-1}\overline{(\alpha_1 + \beta_1 z)}$$

luego $s_1^{-1}s_2^{-1}s_1s_2 = g(\alpha_1 + \beta_1 z)$ con $g \in \Gamma^+$ asociado a $\sigma_{\rho_1}^{-1}\sigma_{\rho_2}^{-1}\sigma_{\rho_1}\sigma_{\rho_2}$ pues:

$$g(\alpha_1 + \beta_1 z)x(\alpha_1 + \beta_1 z)^{-1}g^{-1} = (\alpha_1 + \beta_1 z)gxg^{-1}(\alpha_1 + \beta_1 z)^{-1}$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1 z)\sigma_{\rho_1}^{-1}\sigma_{\rho_2}^{-1}\sigma_{\rho_1}\sigma_{\rho_2}(x)(\alpha_1 + \beta_1 z)^{-1}$$

$$= \sigma_{\rho_1}^{-1}\sigma_{\rho_2}^{-1}\sigma_{\rho_1}\sigma_{\rho_2}(x)\overline{(\alpha_1 + \beta_1 z)}(\alpha_1 + \beta_1 z)^{-1}$$

Luego:

$$1 = \lambda(s_1^{-1}s_2^{-1}s_1s_2) = \lambda(g(\alpha_1 + \beta_1 z)) = (\alpha_1 + \beta_1 z)^* g^* g(\alpha_1 + \beta_1 z)$$

$$= \lambda(g)\overline{(\alpha_1 + \beta_1 z)}(\alpha_1 + \beta_1 z) \quad \text{(Pues si dim } M = 4r + 2 \text{ entonces } z^* = \bar{z})$$

$$= \lambda(g)\rho_1^{-1}$$

luego

$$\lambda(g) \equiv \rho_1^1\rho_2^\circ(k^{*2})$$

Caso 1.3.: $s_1 \in T^-$ y $s_2 \in T^+$. En forma análoga al caso anterior se obtiene $\lambda(g) \equiv \rho_1^\circ\rho_2^1(k^{*2})$.

Caso 1.4.: $s_1 \in T^-$ y $s_2 \in T^-$ se tiene:

$$s_1^{-1}s_2^{-1}s_1s_2xs_2^{-1}s_1^{-1}s_2s_1 = \sigma_{\rho_1}^{-1}\sigma_{\rho_2}^{-1}\sigma_{\rho_1}\sigma_{\rho_2}(x)(\alpha_1 + \beta_1 z)(\overline{\alpha_1 + \beta_1 z})^{-1}$$
$$(\overline{\alpha_2 + \beta_2 z})(\alpha_2 + \beta_2 z)^{-1}$$

luego

$$s_1^{-1}s_2^{-1}s_1s_2 = g(\overline{\alpha_1 + \beta_1 z})(\alpha_2 + \beta_2 z)$$

entonces

$$1 = \lambda(g(\overline{\alpha_1 + \beta_1 z})(\alpha_2 + \beta_2 z)) = \rho_1^{-1}\rho_2^{-1}\lambda(g) \Rightarrow \lambda(g) \equiv \rho_1^1\rho_2^1(k^{*2})$$

Caso 2: Dim M = 4r

Caso 2.1.: s_1 y s_2 en T^+

En este caso $\lambda(s_1^{-1}s_2^{-1}s_1s_2) = 1$ pues λ/T^+ es un homomorfismo. El resultado se obtiene entonces en forma análoga al caso 1.1.

Caso 2.2.: $s_1 \in T^+$ y $s_2 \in T^-$

Como en el caso 1.2. se tiene $s_1^{-1}s_2^{-1}s_1s_2 = g(\alpha_1 + \beta_1 z)$

Además

$$\lambda(s_1^{-1}s_2^{-1}s_1s_2) = s_2^*s_1^*s_2^{-1*}s_1^{-1*}s_1^{-1}s_2^{-1}s_1s_2$$

$$= s_2^* s_1^* s_2^{-1*} \mu_1^{-1} \overline{(\alpha_1 + \beta_1 z)}^{-1} s_2^{-1} s_1 s_2$$

$$= \mu_1^{-1} s_2^* s_1^* s_1 s_2 \mu_2^{-1} (\alpha_2 + \beta_2 z)^{-1} \overline{(\alpha_1 + \beta_1 z)}^{-1}$$

$$= \mu_1^{-1} \mu_2^{-1} s_2^* \mu_1 \overline{(\alpha_1 + \beta_1 z)} s_2 (\alpha_2 + \beta_2 z)^{-1} \overline{(\alpha_1 + \beta_1 z)}^{-1}$$

$$= \mu_1^{-1} \mu_2^{-1} \mu_1 \mu_2 (\alpha_2 + \beta_2 z)(\alpha_1 + \beta_1 z)(\alpha_2 + \beta_2 z)^{-1} \overline{(\alpha_1 + \beta_1 z)}^{-1}$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1 z) \overline{(\alpha_1 + \beta_1 z)}^{-1} = \rho_1 (\alpha_1 + \beta_1 z)^2$$

(Notar que todas estas igualdades se obtienen aplicando el lema 3.3. y teniendo en cuenta que $s_1 \in T^+$ y $s_2 \in T^-$).

Luego

$$\rho_1 (\alpha_1 + \beta_1 z)^2 = \lambda(g(\alpha_1 + \beta_1 z)) = \lambda(g)(\alpha_1 + \beta_1 z)^* (\alpha_1 + \beta_1 z)$$

$$= \lambda(g)(\alpha_1 + \beta_1 z)^2 \quad \text{(Pues dim } M = 4r \Rightarrow z^* = z)$$

luego

$$\lambda(g) \equiv \rho_1^1 \rho_2^\circ (k^{*2})$$

Caso 2.3.: Si $s_1 \in T^-$ y $s_2 \in T^+$ entonces en forma análoga a la anterior se obtiene:

$$\lambda(g) \equiv \rho_1^\circ \rho_2^1 (k^{*2})$$

Caso 2.4.: Si $s_1 \in T^-$ y $s_2 \in T^-$ entonces

$$\lambda(s_1^{-1} s_2^{-1} s_1 s_2) = \rho_1 \rho_2 \overline{(\alpha_1 + \beta_1 z)}^2 (\alpha_2 + \beta_2 z)^2$$

y $$\lambda(g \overline{(\alpha_1 + \beta_1 z)} (\alpha_2 + \beta_2 z)) = \lambda(g) \overline{(\alpha_1 + \beta_1 z)}^2 (\alpha_2 + \beta_2 z)^2$$

luego

$$\lambda(g) \equiv \rho_1^1 \rho_2^1 (k^{*2})$$

q.e.d.

3.5. <u>Corolario</u>: Si $\sigma_\rho \in \Sigma^-(q)$ entonces $C_{\sigma_\rho}(\Sigma(q))$ está generado por múltiplos escalares de σ_ρ y un subgrupo de $O^+(q)$.

<u>Demostración</u>: Si $\sigma \in C_{\sigma_\rho}(\Sigma(q)) = \{\sigma \in \Sigma(q) \mid \sigma\sigma_\rho = \sigma_\rho\sigma\}$ entonces $\sigma^{-1}\sigma_\rho^{-1}\sigma\sigma_\rho$ = identidad.

Además $1 \in T^+$ está asociado con la identidad y $\lambda(1) = 1$.

Si $\sigma \in \Sigma^+(q)$ entonces $1 = \lambda(1) \equiv \rho(k^{*2})$, luego la razón de σ tiene que ser un cuadrado, llamémosla α^2 , de donde $q(\sigma(x)) = \alpha^2 q(x) = q(\alpha x) \Rightarrow \sigma(x) = \alpha G(x)$ donde G es una rotación.

Si $\sigma \in \Sigma^-(q)$ entonces $1 = \lambda(1) \equiv \rho\rho'(k^{*2})$ con ρ' razón de σ . Tenemos así $\rho' = \alpha^2\rho$ y

$$q(\sigma_\rho^{-1}(\sigma(x))) = \rho^{-1}q(\sigma(x)) = \alpha^2 q(x) .$$

Luego la razón de $\sigma_\rho^{-1}\sigma$ es α^2 y se tiene $\sigma(x) = \alpha\sigma_\rho G(x)$, donde G es una rotación.

q.e.d.

3.6. <u>Corolario</u>: Si $\rho \not\equiv 1(k^{*2})$ entonces no existe $\sigma \in \Sigma^-(q)$ tal que $\sigma \in C_{\sigma_\rho}(\Sigma(q))$ con $\sigma_\rho \in \Sigma^+(q)$ de razón ρ .

Demostración: Si existiese tal $\sigma \in \Sigma^{-}(q)$ entonces $\sigma^{-1}\sigma_{\rho}^{-1}\sigma\sigma_{\rho} = 1$ y $1 \equiv \rho(k^{*2})$, contradicción.

q.e.d.

3.7. Corolario: Si índice $q > 0$ entonces $[\Sigma(q),\Sigma(q)]$ está generado por elementos de $O^{+}(q)$ asociados a $g \in \Gamma^{+}$ con $\lambda(g) \equiv \rho(k^{*2})$, donde ρ es la razón de alguna similitud en $\Sigma(q)$. Si $\dim M > 4$ entonces $[\Sigma^{+}(q),\Sigma^{+}(q)] = [O(q),O(q)]$.

Demostración: Si $\sigma \in [\Sigma(q),\Sigma(q)]$ entonces σ es producto de elementos de la forma $\sigma_{\rho_1}^{-1}\sigma_{\rho_2}^{-1}\sigma_{\rho_1}\sigma_{\rho_2}$.

Ahora $\sigma_{\rho_1}^{-1}\sigma_{\rho_2}^{-1}\sigma_{\rho_1}\sigma_{\rho_2} \in O^{+}(q)$ y está asociada a $g \in \Gamma^{+}$ tal que $\lambda(g) \equiv \rho_1^{2\varepsilon_2}\rho_2^{2\varepsilon_1}(k^{*2})$. Luego σ está asociado a un $g \in \Gamma^{+}$ con $\lambda(g) \equiv \rho_1 \ldots \rho_s(k^{*2})$ y como cada ρ_i , $1 \leq i \leq s$, es razón de una similitud entonces $\rho = \rho_1 \ldots \rho_s$ es razón de una similitud.

Inversamente, sea $\sigma \in O^{+}(q)$ asociado a $g \in \Gamma^{+}$ tal que $\lambda(g) \equiv \rho(k^{*2})$, con ρ razón de una similitud. Si $[\Sigma(q),\Sigma(q)]$ tiene algún elemento con tal norma espinorial entonces $\sigma \in [\Sigma(q),\Sigma(q)]$.

Por proposición anterior si existe una similitud propia σ_{ρ} de razón ρ , $\sigma_{\rho}^{-1}U^{-1}\sigma_{\rho}U$ es una rotación con tal norma espinorial si $U \in \Sigma^{-}(q)$.

La última parte del corolario es consecuencia del siguiente hecho que se puede ver en [3] § 9. Si $\dim M > 4$, índice $q > 0$ y F es cualquier subgrupo del grupo ortogonal $O(q)$ tal que

$[O(q),O(q)] \subset F \subset O(q)$ entonces el conmutador de F es $[O(q),O(q)]$.

q.e.d.

3.8. Teorema: Si índice $q > 0$ y $\dim M > 2$ entonces $[\Sigma(q),\Sigma(q)]$ está generado por las rotaciones G de la forma $G(x) = \rho^{-1}\sigma_\rho^2(x)$ con ρ razón de σ_ρ , y $[\Sigma^+(q),\Sigma^+(q)] = [O^+(q),O^+(q)]$.

Además las rotaciones $\rho^{-1}\sigma_\rho^2$ con $\sigma_\rho \in \Sigma^+(q)$ genera:

i) $[\Sigma(q),\Sigma(q)]$ si $\dim M = 4r + 2$

ii) $[O^+(q),O^+(q)]$ si $\dim M = 4r$

$[\Sigma(q),\Sigma(q)] = [O(q),O(q)]$ ssi la razón de cualquier similitud es un cuadrado en k^* .

Demostración: Por observación 1.4., Cap III, si $\dim M > 2$ $[O(q),O(q)] \subset [\Sigma(q),\Sigma(q)]$ está generado por cuadrados de rotaciones, luego está en el grupo generado por los G . Además las rotaciones asociadas a elementos de $\Gamma_o^+ = \{s \in \Gamma^+ | \lambda(s) = 1\}$ está en el grupo generado por los G . Luego por corolario 3.7. $[\Sigma(q),\Sigma(q)]$ está formado por rotaciones asociadas a $g \in \Gamma^+$ con $\lambda(g) \equiv \rho(k^{*2})$ y por proposición 3.1. estas similitudes están en el grupo generado por los G .

Inversamente, cualquier elemento del grupo generado por los G es una rotación asociada a un $g \in \Gamma^+$ con $\lambda(g) \equiv \rho(k^{*2})$ donde ρ es la razón de una similitud.

Luego este grupo es $[\Sigma(q),\Sigma(q)]$ por el corolario anterior.

Consideremos ahora el grupo generado por los G definido por similitudes propias

Por proposición 3.1. si $\dim M = 4r + 2$ entonces $\lambda(g) \equiv \rho(k^{*2})$.

Luego por el corolario anterior el grupo de rotaciones G definido por similitudes propias genera $[\Sigma(q),\Sigma(q)]$.

Si $\dim M = 4r$ por proposición 3.1. el grupo anterior es $[O(q),O(q)]$.

La última parte se demuestra aplicando el corolario 3.7.

q.e.d.

§ 4. Núcleo y epiyección de la norma espinorial

4.1. Núcleo y epiyección de la norma espinorial sobre el grupo ortogonal

4.1.1. Proposición: Si q es isotrópica, entonces la norma espinorial

$$\theta : O(q) \to k^*/k^{*2} \quad \text{es epiyectiva}$$

Demostración: Se sabe que si q es isotrópica entonces (M,q) contiene un plano hiperbólico, luego:

$$D_k(q) = \{q(x) \mid q(x) \neq 0\} = k^*$$

Sea $\alpha k^{*2} \in k^*/k^{*2}$

Como q es isotrópica existe $s \in M$ tal que $q(s) = \alpha$, afirmo $s \in \Gamma$, pues:

i) s es invertible ya que $s^{-1} = sq(s)^{-1}$

ii) $\forall x \in M \quad sxs^{-1} \in M$ pues

Como s y x están en M tenemos dos posibilidades, a saber, ellos son linealmente dependientes o linealmente independientes.

Si s es l.d. con x entonces $x = \beta s$, $\beta \in k$. Luego

$sxs^{-1} = \beta sss^{-1} = \beta s = x \in M$.

Si s es l.i. con x entonces

$sxs^{-1} = (B_q(s,x) - xs)s^{-1} = B_q(s,x)s^{-1} - x \in M$

Luego $\forall x \in M \quad sxs^{-1} \in M \Rightarrow s \in \Gamma$

Tenemos: $\lambda(s) = q(s) = \alpha$, con lo cual hemos demostrado que $\lambda : \Gamma \to k^*$ es epiyectiva.

Si $\psi(s) = \sigma \in O(q)$, entonces $\theta(\sigma) \equiv \lambda(s) (\mathrm{mod}\ k^{*2})$, luego

$\theta(\sigma) = \alpha k^{*2}$

Luego θ es epiyectiva. q.e.d.

Nota: Llamamos $\theta^+ = \theta/\theta^+(q) : O^+(q) \to k^*/k^{*2}$. Si q es isotrópica entonces θ^+ es epiyectiva.

4.1.2. Proposición: Si q es isotrópica y $\dim M > 2$ entonces

$\mathrm{Ker}\ \theta^+ = [O^+(q), O^+(q)]$

Demostración: Ver [2] II. 3.9.

4.1.3. Teorema: Si q es isotrópica y $\dim M > 2$ entonces la sucesión

$$1 \to [O^+(q), O^+(q)] \to O^+(q) \xrightarrow{\theta^+} k^*/k^{*2} \to 1$$

es exacta.

4.2. Epiyección de la norma espinorial sobre el grupo de similitudes

Consideraremos el caso $\dim M = 4r + 2$ pues, sólo en este caso la norma espinorial es un homomorfismo.

4.2.1. Teorema: Si índice $q > 0$ y $\dim M = 4r + 2$ entonces la norma espinorial θ' es epiyectiva.

Demostración: Como $\dim M = 4r + 2$ sabemos que $\theta' : \Sigma(q) \to k^*/N(\Delta^*(q))$ y $\lambda : T \to k^*$ son homomorfismos.

Sea $\alpha N(\Delta^*(q)) \in k^*/N(\Delta^*(q))$

Sabemos que si índice $q > 0$, es decir q isotrópica, entonces existe $s \neq 0$ en M con $q(s) = \alpha$. Afirmo $s \in T$, pues:

i) s es invertible ya que $s^{-1} = \alpha^{-1}s$

ii) Sea $x = v \cdot w \in M_{[2]}$ p.d. $sxs^{-1} \in k + M_{[2]}$

$$sxs^{-1} = svws^{-1}$$

Si s es l.d. con v ó w, (supongamos que lo es con v), entonces $s = \gamma v$ y $svws^{-1} = \gamma q(v)ws^{-1} \in M_{[2]} \subset k + M_{[2]}$

Si s es l.i. con v y w, entonces

$$\begin{aligned} svws^{-1} &= (B_q(s,v) - vs)ws^{-1} = B_q(s,v)ws^{-1} - vsws^{-1} \\ &= B_q(s,v)ws^{-1} - v(B_q(s,w) - ws)s^{-1} \\ &= B_q(s,v)ws^{-1} - B_q(s,w)vs^{-1} + vw \\ &= (B_q(s,v)w - B_q(s,w)v)s^{-1} + vw \end{aligned}$$

$$= (B_q(s,v)w - B_q(s,w)v)s^{-1} + (B_q(s,v)w - B_q(s,w)v)(-B_q(s,w)^{-1}w) +$$

$$+ B_q(s,v)B_q(s,w)^{-1}q(w)$$

$$= B_q(s,v)B_q(s,w)^{-1}q(w) + (B_q(s,v)w - B_q(s,w)v)$$

$$(s^{-1} - B_q(s,w)^{-1}w) \in k + M_{[2]}$$

luego $s \in T$

Se tendrá $\lambda(s) = s^*s = q(s) = \alpha$.

Si $\sigma \in \Sigma(q)$ es tal que $\psi'(s) = \sigma$, entonces por definición de θ' se tiene:

$$\theta'(\sigma) \equiv \lambda(s)(N(\Delta^*(q))) \Rightarrow \theta'(\sigma) = \alpha N(\Delta^*(q))$$

Luego θ' es epiyectiva.

q.e.d.

4.3. Núcleo de la norma espinorial sobre el grupo de similitudes

Como de costumbre $\dim M = 4r + 2$.

4.3.1. Lema: $[\Sigma(q), \Sigma(q)] \subseteq \ker\theta'$

Demostración: $\sigma \in [\Sigma(q), \Sigma(q)] \Rightarrow \sigma \in O^+(q)$ (Teorema 3.8. Cap III.)

$$\Rightarrow \quad g \in \Gamma^+ \subset T^+ \text{ tal que } \psi'(g) = \sigma$$

Además por proposición 3.4. Cap III.

$$\lambda(g) \equiv \rho_1^{\varepsilon_2}\rho_2^{\varepsilon_1}(k^{*2})$$

pero ρ_1 y ρ_2 pertenecen a $N(\Delta^*(q))$, por teorema 3.4. Cap II., luego

$\lambda(g) \in N(\Delta^*(q))$ y así

$$\theta'(\sigma) \equiv 1(N(\Delta^*(q)))$$

luego $\sigma \in \ker\theta'$

q.e.d.

4.3.2. <u>Lema</u>: $\ker\theta' = \psi'(\ker\lambda)$

<u>Demostración</u>: $\sigma \in \psi'(\ker\lambda) \Rightarrow \sigma = \psi'(t)$ con $\lambda(t) = 1$

$$\Rightarrow \theta'(\sigma) \equiv 1(N(\Delta^*(q)))$$

$$\Rightarrow \sigma \in \ker\theta'$$

Inversamente: $\sigma \in \ker\theta' \Rightarrow$ existe $s \in T$ con $\lambda(s) \in N(\Delta^*(q))$ y $\psi'(s) = \sigma$.

Si $\lambda(s) = N(\alpha + \beta z) = \overline{(\alpha + \beta z)}(\alpha + \beta z) = (\alpha + \beta z)^*(\alpha + \beta z)$ entonces $s_1 = \alpha + \beta z$ es tal que $\lambda(s_1) = \lambda(s)$, luego: $s = ts_1$ con $t \in \ker\lambda$.

Bastará demostrar que t define σ , es decir $\psi'(t) = \sigma$.

Como

$$\alpha_i + y_1 y_i = sx_1 x_i s^{-1} = t(\alpha + \beta z)x_1 x_i (\alpha + \beta z)^{-1} t^{-1} = tx_1 x_i t^{-1}$$

luego t define σ y se tiene $\psi'(t) = \sigma$

Luego $\mathrm{Ker}\theta' = \psi'(\ker\lambda)$

q.e.d.

4.3.3. <u>Proposición</u>: Si $H = \{(1 + s^*)^{-1}(s + 1) \mid s \in \mathcal{T}$ y $1 + s \in C^*(M,q)\}$ entonces $\ker\lambda = H$

<u>Demostración</u>: Si $t \in H$ entonces existe $s \in \mathcal{T}$ tal que $t = (1 + s^*)^{-1}(s + 1)$.

Si $s_1 = 1 + s$ entonces $s_1^* = (1 + s^*)$, luego $t = (s_1^*)^{-1}s_1$

p.d. $t \in \ker\lambda$, es decir $\lambda(t) = 1$.

$$\lambda(t) = \lambda((s_1^*)^{-1}s_1) = s_1^*s_1^{-1}(s_1^*)^{-1}s_1$$

Ahora como $\lambda(s_1) = s_1^*s_1$ entonces

$$s_1^{-1} = \lambda(s_1)^{-1}s_1^* \Rightarrow s_1^{-1}(s_1^*)^{-1} = \lambda(s_1)^{-1}$$

Luego

$$\lambda(t) = \lambda(s_1)^{-1}\lambda(s_1) \Rightarrow \lambda(t) = 1$$

$$\Rightarrow t \in \ker\lambda$$

Inversamente

$$s \in \ker\lambda \Rightarrow s^*s = 1 \Rightarrow s + s^*s = s + 1$$

$$\Rightarrow (1 + s^*)s = s + 1$$

$$\Rightarrow s = (1 + s^*)^{-1}(s + 1)$$

$$\Rightarrow s \in H$$

4.3.4. <u>Teorema</u>: $\operatorname{Ker}\theta' = \langle \Sigma^2(q) \rangle$, donde $\langle \Sigma^2(q) \rangle$ indica el subgrupo de $\Sigma(q)$ generado por cuadrados de similitudes.

Demostración: i) P.d. $\ker\theta' \subseteq \langle \Sigma^2(q) \rangle$

Como $\ker\theta' = \psi'(\ker\lambda) = \psi'(H)$, donde H es el conjunto de la proposición anterior, debemos demostrar:

$$\psi'(H) \subseteq \langle \Sigma^2(q) \rangle$$

Sea $(1 + s^*)^{-1}(1 + s) \in H$ y calculemos $\psi'((1 + s^*)^{-1}(1 + s))$, para ello debemos calcular

$$(1 + s^*)^{-1}(1 + s)x_1x_i(1 + s)^{-1}(1 + s^*)$$

donde $\{x_1, \ldots, x_{4r+2}\}$ es base de M .

Como

$$\lambda(1 + s)\lambda(1 + s)^{-1} = 1 \Rightarrow (1 + s^*)(1 + s)\lambda(1 + s)^{-1} = 1$$

se tienen así las siguientes igualdades:

$$(1 + s^*)^{-1} = (1 + s)\lambda(1 + s)^{-1}$$

$$(1 + s)^{-1} = (1 + s^*)\lambda(1 + s)^{-1}$$

$$(1 + s^*) = \lambda(1 + s)(1 + s)^{-1}$$

de donde

$$(1 + s^*)^{-1}(1 + s) = (1 + s)\lambda(1 + s)^{-1}(1 + s) = \lambda(1 + s)^{-1}(1 + s)^2$$

$$(1 + s)^{-1}(1 + s^*) = (1 + s)^{-1}\lambda(1 + s)(1 + s)^{-1} = (1 + s)^2\lambda(1 + s)$$

luego:

$$(1 + s^*)^{-1}(1 + s)x_1x_i(1 + s)^{-1}(1 + s^*) =$$

$$= \lambda(1 + s)^{-1}(1 + s)^2x_1x_i(1 + s)^{-2}\lambda(1 + s)$$

$$= (1 + s)^2x_1x_i(1 + s)^{-2}$$

Si $\sigma_\rho \in \Sigma(q)$ es tal que $\psi'(1 + s) = \sigma_\rho$, entonces como ψ' es un homomorfismo

$$\psi'((1 + s)^2) = \sigma_\rho^2 = \psi'((1 + s^*)^{-1}(1 + s)) \in \Sigma^2(q).$$

Luego

$$\psi'(H) \subseteq \langle \Sigma^2(q) \rangle .$$

ii) P.d. $\Sigma^2(q) \subseteq \mathrm{Ker}\theta'$

Si $\sigma \in \Sigma^2(q)$ entonces existe $\sigma_\rho \in \Sigma(q)$ tal que $\sigma_\rho^2 = \sigma$. Luego existe $s \in T$ tal que $\psi'(s) = \sigma_\rho$ y $\psi'(s^2) = \sigma$. Se tiene así que σ proviene de un $s^2 \in T$, y como

$$\lambda(s^2) = \lambda(s)\lambda(s) \in k^{*2} \subseteq N(\Delta^*(q))$$

luego

$$\theta'(\sigma) \equiv 1(N(\Delta^*(q))) \Rightarrow \sigma \in \ker\theta'$$

Luego

$$\mathrm{Ker}\theta' = \langle \Sigma^2(q) \rangle .$$

q.e.d.

Obtenemos el siguiente teorema:

4.3.6. Teorema: Si $\dim M = 4r + 2$ e índice de $q > 0$ entonces la sucesión

$$1 \to \langle \Sigma^2(q) \rangle \to \Sigma(q) \xrightarrow{\theta'} k^*/N(\Delta^*(q)) \to 1$$

es exacta.

4.3.7. Observaciones:

1) Sabíamos que $[\Sigma(q),\Sigma(q)] = \langle \rho^{-1}\sigma_\rho^2 \rangle$. Si nos restringimos al grupo ortogonal entonces $\langle \rho^{-1}\sigma_\rho^2 \rangle = \langle \sigma^2 \rangle = [O^+(q),O^+(q)]$, y es un resultado conocido que, si $\dim M > 2$ e índice de $q > 0$ entonces la sucesión

$$1 \to [O^+(q),O^+(q)] \to O(q) \xrightarrow{\theta} k^*/k^{*2} \to 1$$

es exacta.

Se tiene entonces: Si $\dim M = 4r + 2$ e índice $q > 0$ entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & [O^+(q),O^+(q)] & \to & O(q) & \xrightarrow{\theta} & k^*/k^{*2} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \langle \sigma^2(q) \rangle & \longrightarrow & \Sigma(q) & \xrightarrow{\theta'} & k^*/N(\Delta^*(q)) & \to & 1
\end{array}$$

2) Lo hecho hasta aquí ha sido para el caso $\dim M = 4r + 2$ e índice $q > 0$, que es el caso en que tenemos homomorfismo para la norma espinorial θ' .

Sin embargo, si consideramos $\dim M = 4r$ e índice $q > 0$ y tomamos las similitudes propias también θ' es un homomorfismo.

Para encontrar el núcleo de este homomorfismo, si revisamos el caso anterior, sólo es necesario que λ sea un homomorfismo y es independiente a la dimensión de M y además $\lambda(s^2) \in k^{*2} \subseteq (\Delta^*(q))^2$ por lo tanto $\ker\theta'/\Sigma^+(q) = \langle \sigma^2(q) \rangle$.

Se tiene así que la sucesión

$$1 \to \langle \Sigma^2(q) \rangle \to \Sigma^+(q) \xrightarrow{\theta'/\Sigma^+(q)} \mathrm{Img}(\theta'/\Sigma^+(q)) \to 1$$

es exacta.

Sólo quedaría por ver cuál es $\mathrm{Img}(\theta'/\Sigma^+(q))$, se sospecha que es $\Delta^*(q)/(\Delta^*(q))^2$.

B I B L I O G R A F I A

[1] Baeza, Ricardo : "Quadratic forms over semilocal rings" Lecture Notes in Mathematics N° 655.

[2] Chevalley, C. : "The algebraic theory of spinors" Columbia University Press, 1954.

[3] Dieudonné : "La geométrie des groupes classiques" Springer-Verlag, 1963.

[4] Lam, T.M. : "The algebraic theory of Quadratic Forms" Mathematics Lecture Note Series. Editorial Benjamin, 1973.

[5] Wonnenburger, M.J. : "The Clifford algebra and the group of similitudes" Canadian Journal of Mathematics, 1962.