HACIA UN TEOREMA CONVERSO PARA FORMAS CUSPIDALES DE JACOBI SOBRE $\Gamma_0(N) \ltimes \mathbb{Z}^2$

Tesis

Entregada A La
Universidad De Chile
En Cumplimiento Parcial De Los Requisitos
Para Optar Al Grado De

Magíster en Ciencias Matemáticas

Facultad De Ciencias

Por

Denis Orlando Osses Johns

Diciembre, 2009

Director de Tesis Dr: Yves Martin G.

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACION

TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato.

DENIS ORLANDO OSSES JOHNS

Ha sido aprobada por la comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Matemáticas, en el examen de Defensa Privada de Tesis rendido el día 15 de Diciembre de 2009.

Director de Tesis:
Dr. Yves Martin ....

Co-Director de Tesis
Dr. ....

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dra. Anita Rojas ....

Dr. Luis Arenas ....

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mis padres y hermanos por su formación y preocupación. A mi mujer, Paula, ya que sin ella no estaría escribiendo esto hoy y por su profundo amor. A mi hija, Eloísa, que me ha enseñado que la palabra correcta no es individuo, sino que dividuo. Al Profesor Yves por confiar en mí sin conocerme; por su apoyo, paciencia y valiosos consejos. A mis amigos quienes me han mostrado que la distancia más corta entre los hombres es, precisamente, la amistad.

RESUMEN

En esta tesis consideramos formas cuspidales de Jacobi de peso k, índice m y caracter de Dirichlet χ sobre el grupo $\Gamma_0(N) \ltimes \mathbb{Z}^2$, con expansión de Fourier

$$f(\tau, z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z} \\ 4mn>r^2}} c(n,r) q_\tau^n q_z^r, \quad q_\tau = e^{2\pi i\tau}, q_z = e^{2\pi i z}.$$

Luego definimos la *torcedura* de esta serie por un caracter primitivo de Dirichlet ψ,

$$f_\psi(\tau, z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z} \\ 4mn>r^2}} \psi(n) c(n,r) q_\tau^n q_z^r.$$

Demostramos que tal función se puede representar por la suma finita de series

$$f_\psi(\tau, z) = \sum_{r_0=0}^{2m\alpha-1} \Bigg(\sum_{D=1}^{\infty} d_{r_0}(D) q_\tau^{D/4m} \Bigg) \Bigg(\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ r\equiv r_0\ (2m\alpha)}} q_\tau^{r^2/4m} q_z^r \Bigg).$$

Posteriormente definimos el sistema de $2m\alpha$ series de Dirichlet

$$L_{r_0}(f_\psi, s) = \sum_{D=1}^{\infty} \frac{d_{r_0}(D)}{D^s} \quad , \quad 0 \le r_0 \le 2m\alpha - 1$$

donde α es el conductor de ψ, y para cada una de ellas asociamos las funciones Λ

$$\Lambda_{r_0, N\alpha^2}(f_\psi, s) = (2m\alpha\sqrt{N})^{s-1/2} \pi^{-s} \Gamma(s) L_{r_0}(f_\psi, s).$$

Por otro lado, definimos un cierto operador $\widetilde{W}_{N\alpha^2}$ "de tipo Fricke" que transforma la función $f(\tau, z)$ en otra forma de Jacobi que denotamos $g(\tau, z)$.

Con todo esto, nuestro resultado principal es el siguiente:

Teorema Sean m, k, N enteros positivos. Sea $f \in J_{k,m,\chi}^{cusp}(\Gamma_0(N) \ltimes \mathbb{Z}^2)$ tal que

$$C_\psi g_{\overline{\psi}}(\tau, \alpha z) = (\sqrt{N\alpha^2}\tau)^{-k} e^{mN\alpha^2}\Big(-\frac{z^2}{\tau}\Big) f_\psi\Big(-\frac{1}{N\alpha^2\tau}, \frac{z}{\tau}\Big).$$

Entonces para cualquier ψ caracter primitivo de Dirichlet de conductor α con $(\alpha, N) = 1$ se tiene que:

(i) Las series $\Lambda_{r_0,N\alpha^2}(f_\psi, s)$ y $\Lambda_{r_0,N\alpha^2}(g_{\overline{\psi}}, s)$ para $0 \le r_0 \le 2m\alpha - 1$ admiten una extensión analítica a todo el plano complejo.

(ii) Estas series son acotadas sobre cualquier franja vertical.

(iii) Para cada $a = 0, 1, \ldots, 2m\alpha - 1$ se verifica la ecuación funcional

$$\sum_{r_0=0}^{2m\alpha-1} e\Big(-\frac{ar_0}{2m\alpha}\Big) \Lambda_{r_0,N\alpha^2}(f_\psi, s) = \Big(\frac{2m\alpha}{\sqrt{N}}\Big)^{1/2} i^k C_\psi \Lambda_{a,N\alpha^2}\Big(g_{\overline{\psi}}, k - s - \frac{1}{2}\Big),$$

donde $C_\psi = \chi(\alpha)\psi(-N)\dfrac{\mathscr{G}_\psi}{\mathscr{G}_{\overline{\psi}}}$ y $\mathscr{G}_\psi, \mathscr{G}_{\overline{\psi}}$ son las sumas de Gauss asociadas a ψ y $\overline{\psi}$ respectivamente.

ABSTRACT

In this thesis we consider Jacobi cusp forms of weight k, index m with Dirichlet character χ on the group $\Gamma_0(N) \ltimes \mathbb{Z}^2$, with a Fourier development

$$f(\tau, z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z} \\ 4mn>r^2}} c(n,r) q_\tau^n q_z^r, \quad q_\tau = e^{2\pi i\tau}, q_z = e^{2\pi iz}.$$

Then, we define the *twist* of this serie by a primitive Dirichlet character ψ,

$$f_\psi(\tau, z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z} \\ 4mn>r^2}} \psi(n) c(n,r) q_\tau^n q_z^r.$$

We prove that this function can be represented by a finite sum of series

$$f_\psi(\tau, z) = \sum_{r_0=0}^{2m\alpha-1} \left(\sum_{D=1}^{\infty} d_{r_0}(D) q_\tau^{D/4m} \right) \left(\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ r\equiv r_0\ (2m\alpha)}} q_\tau^{r^2/4m} q_z^r \right).$$

Later, we define a system of $2m\alpha$ Dirichlet series

$$L_{r_0}(f_\psi, s) = \sum_{D=1}^{\infty} \frac{d_{r_0}(D)}{D^s} \quad , \quad 0 \le r_0 \le 2m\alpha - 1$$

where α is the conductor of ψ, and for all of them we associate the functions Λ

$$\Lambda_{r_0, N\alpha^2}(f_\psi, s) = (2m\alpha\sqrt{N})^{s-1/2} \pi^{-s} \Gamma(s) L_{r_0}(f_\psi, s).$$

On the other hand, we define a certain operator $\widetilde{W}_{N\alpha^2}$ of "Fricke-type" which transforms the function $f(\tau, z)$ in other Jacobi form which we'll denote $g(\tau, z)$.

With this, our main result is the following:

Theorem Let m, k, N positive integers. Let $f \in J^{cusp}_{k,m,\chi}(\Gamma_0(N) \ltimes \mathbb{Z}^2)$ such that

$$C_\psi g_{\overline{\psi}}(\tau, \alpha z) = (\sqrt{N\alpha^2}\tau)^{-k} e^{mN\alpha^2}\Big(-\frac{z^2}{\tau}\Big) f_\psi\Big(-\frac{1}{N\alpha^2\tau}, \frac{z}{\tau}\Big).$$

Then for any ψ primitive Dirichlet character of conductor α with $(\alpha, N) = 1$ one gets:

(i) The series $\Lambda_{r_0,N\alpha^2}(f_\psi, s)$ and $\Lambda_{r_0,N\alpha^2}(g_{\overline{\psi}}, s)$ for $0 \le r_0 \le 2m\alpha - 1$ allow an analytic extension on the whole complex plane.

(ii) These series are bounded on any vertical strip.

(iii) For any $a = 0, 1, \ldots, 2m\alpha - 1$ these series verify the functional equation

$$\sum_{r_0=0}^{2m\alpha-1} e\Big(-\frac{ar_0}{2m\alpha}\Big) \Lambda_{r_0,N\alpha^2}(f_\psi, s) = \Big(\frac{2m\alpha}{\sqrt{N}}\Big)^{1/2} i^k C_\psi \Lambda_{a,N\alpha^2}\Big(g_{\overline{\psi}}, k - s - \frac{1}{2}\Big),$$

where $C_\psi = \chi(\alpha)\psi(-N)\dfrac{\mathscr{G}_\psi}{\mathscr{G}_{\overline{\psi}}}$ and $\mathscr{G}_\psi, \mathscr{G}_{\overline{\psi}}$ are the Gauss sums associated to ψ and $\overline{\psi}$, respectively.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Al igual que muchos otros conceptos y definiciones dentro de las Matemáticas, las formas modulares no son un caso excepcional en cuanto a su génesis, síntesis, sistematización y generalización.

Sus orígenes se remontan a la segunda década del siglo XIX con los trabajos de Jacobi y Abel en conexión con la teoría de funciones elípticas. En este período de la historia se pueden encontrar casos particulares de lo que ahora es nuestro objeto de estudio. Posteriormente, hacia fines del siglo XIX, con Klein y Poincare se sentaron las bases de lo que hoy conocemos como formas automorfas y formas modulares.

Desde entonces las formas modulares han sido objeto de profundos estudios y han aparecido múltiples relaciones entre éstas y otras áreas de las Matemáticas. Podemos mencionar, por ejemplo, relaciones con varios problemas en la teoría de números elemental, con las funciones elípticas, con las formas cuadráticas, con representaciones de grupos, con la geometría algebraica y con la Física Matemática, entre otras.

Actualmente las generalizaciones y analogías que han devenido y derivado del concepto clásico de forma modular muestran la vitalidad de las ideas primitivas y la importancia de su estudio particular y general. Entre estas generalizaciones podemos citar a las formas de Siegel, formas de Maass, formas de

Hilbert y las formas de Jacobi. Son estas últimas en las que centraremos nuestro trabajo de tesis.

Las formas de Jacobi fueron estudiadas sistemáticamente por Eichler y Zagier en [3]. Son, a grosso modo, un cruce entre funciones elípticas y formas modulares en una variable (ver [3], p.1). Ejemplos clásicos de este tipo de funciones son las series Theta, la función $\wp$ de Weierstrass y los coeficientes de Fourier para formas modulares de Siegel de grado 2. Hoy en día es posible encontrar las formas de Jacobi en trabajos relativos al estudio de los Agujeros Negros[1], entre otros campos de la Física moderna.

Por otro lado, las formas modulares sobre el grupo $SL_2(\mathbb{Z})$ están conectadas, sorprendentemente, con ciertas series de Dirichlet. Esta relación fue dada explícitamente por Hecke en [6] y establece que una serie de Fourier $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau}$ corresponde a una forma modular sobre $SL_2(\mathbb{Z})$ si y sólo si la serie de Dirichlet $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ satisface ciertas propiedades analíticas (continuación meromorfa y ecuación funcional). En general, una equivalencia entre formas modulares y series de Dirichlet es llamada Teorema Converso (ver por ejemplo [7], [9]). El teorema converso de Hecke fue generalizado por Weil en [10] para las formas modulares sobre los subgrupos de congruencia $\Gamma_0(N)$. Para su demostración Weil utilizó la prueba de Hecke y formas modulares "torcidas"por ciertos caracteres de Dirichlet.

Con el advenimiento de las formas de Jacobi ha sido natural tratar de extender los resultados conocidos sobre las formas modulares a este nuevo objeto. El símil del teorema converso de Hecke para las formas de Jacobi sobre $SL_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ fue dado por Martin en [8]. Un teorema converso análogo al de Weil en el contexto de las formas de Jacobi aún no se conoce. En este trabajo se obtiene un resultado parcial en esta dirección, ya que probamos que las series de Dirichlet asociadas a las formas de Jacobi sobre $\Gamma_0(N) \ltimes \mathbb{Z}^2$ satisfacen propiedades analíticas análogas a las observadas en el teorema converso de Weil.

El siguiente esquema resume la analogía que queremos empezar a desarrollar con este trabajo de tesis y muestra la pregunta que eventualmente deseamos responder

[1] http://arxiv.org/PS_cache/hep-th/pdf/0603/0603066v2.pdf

$$\begin{tikzcd}
\text{formas modulares} \arrow[d] & \text{formas de Jacobi} \arrow[d] \\
\begin{array}{c}\text{teorema converso de Hecke}\\ \text{sobre } SL_2(\mathbb{Z}),\ 1936\end{array} \arrow[d, dash] & \begin{array}{c}\text{teorema converso de Martin}\\ \text{sobre } SL_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2, 1996\end{array} \arrow[d, dash] \\
\begin{array}{c}\text{teorema converso de Weil}\\ \text{sobre } \Gamma_0(N),\ 1967\end{array} & ?
\end{tikzcd}$$

En esta tesis probamos una de las dos implicaciones que el teorema converso faltante en este diagrama debiera poseer.

1.1. Breve historia de los Teoremas Conversos en formas modulares elípticas

En esta sección haremos una breve introducción histórica para comprender el contexto global en que se desarrolla el problema de esta tesis. Como explicamos anteriormente, todo teorema converso considerado acá es una implicación doble que relaciona formas modulares o formas de Jacobi (definidas por una serie de Fourier) y una o más series de Dirichlet.

En lo que sigue describiremos con exactitud una de las implicaciones, en la dirección que nos interesa, para cada uno de los teoremas conversos de Hecke, Weil y Martin. Mostraremos cada implicación recalcando sus resultados obtenidos, con el fin de direccionar y anticipar nuestro trabajo.

Cualquier forma modular elíptica $f(\tau)$ sobre el grupo $SL_2(\mathbb{Z})$ tiene una expansión de Fourier de la forma

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q_\tau^n, \quad q_\tau = e^{2\pi i \tau},$$

y por lo tanto es natural asociarle la serie de Dirichlet

$$L(f,s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}.$$

Recíprocamente, cualquier serie como la anterior define una serie de Fourier. Si bien en muchos casos esta última representa una función holomorfa sobre $\mathscr{H}=\{z\in\mathbb{C}:Im(z)>0\}$, no es necesariamente una forma modular. En 1936 Erich Hecke demostró que si $f(\tau)$ es una forma modular sobre $SL_2(\mathbb{Z})$ entonces la serie de Dirichlet asociada a ella satisface ciertas propiedades analíticas. Además estableció las condiciones que debía satisfacer una serie de Dirichlet para que la serie de Fourier correspondiente fuese una forma modular sobre $SL_2(\mathbb{Z})$.

Recordemos que una *forma modular elíptica de peso* $k>0$ y *condición de multiplicador* $C=\pm 1$ para el grupo de sustituciones generado por $\tau\mapsto\tau+N$ (con N entero positivo) y $\tau\mapsto-\frac{1}{\tau}$ es una función holomorfa $f(\tau)$ sobre $\mathscr{H}$ que satisface

1. $f(\tau+N)=f(\tau)$
2. $f\Big(-\dfrac{1}{\tau}\Big)=C\Big(\dfrac{\tau}{i}\Big)^k f(\tau)$
3. $f(\tau)$ es una función holomorfa en ∞, es decir tiene una expansión de Fourier

$$f(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n q_\tau^{n/N}.$$

El conjunto de tales funciones es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial que denotamos por $\mathscr{M}_k(N,C)$.

Asociamos a tal $f(\tau)$ las *series de Dirichlet* y Λ,

$$L(f,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

$$\Lambda_N(f,s)=\Big(\frac{2\pi}{N}\Big)^{-s}\Gamma(s)L(f,s)$$

donde $\Gamma(s)$ corresponde a la función gamma de Euler.

Por último se define el operador de Fricke $W_N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$, para N entero positivo.

Teorema (Hecke) Sea $f(\tau) \in \mathscr{M}_k(N, C)$ y $g(\tau, z) = (\sqrt{N}z)^{-k} f(-1/Nz)$ (que anotamos $g = f|_k[W_N]$). Entonces

(I) Las series $\Lambda_N(f, s)$ y $\Lambda_N(g, s)$ admiten una extensión analítica a todo el plano complejo.

(II) $\Lambda_N(f, s) + \dfrac{a_0}{s} + \dfrac{b_0}{k-s}$ es acotada sobre cualquier franja vertical (donde b_0 es el primer coeficiente en el desarrollo de Fourier para g).

(III) Las series $\Lambda_N(f, s)$ y $\Lambda_N(g, k-s)$ satisfacen la ecuación funcional

$$\Lambda_N(f, s) = C\Lambda_N(g, k-s).$$

El teorema converso de Hecke consta de este teorema y de la demostración de que el recíproco también es cierto. Note que para $N = 1$ se tiene el teorema converso para el grupo $SL_2(\mathbb{Z})$.

El resultado de Hecke fue extendido por André Weil en 1967 para formas modulares sobre grupos de congruencia $\Gamma_0(N)$ con caracter de Dirichlet χ. Estos subgrupos tienen en general múltiples generadores, al contrario de los grupos cubiertos por el teorema de Hecke, que se refiere sólo a aquellos generados por $\tau \mapsto \tau + N$ y $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$.

La idea clave de Weil para obtener tal generalización fue *torcer* la forma modular $f(\tau)$ mediante un caracter primitivo de Dirichlet ψ mod m, poniendo

$$f_\psi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi(n) a_n q_\tau^n.$$

A partir de ella define la serie de Dirichlet torcida por el caracter ψ,

$$L(f,\psi,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n)a_n}{n^s}$$

y la función Λ torcida por el caracter ψ de conductor m

$$\Lambda_N(f,\psi,s)=\left(\frac{2\pi}{m\sqrt{N}}\right)^{-s}\Gamma(s)L(f,\psi,s).$$

Para especificar los caracteres ψ necesarios para su resultado, Weil consideró cualquier conjunto $\mathbf{M}$ de primos impares o 4 tal que

(a) Cualquier elemento de $\mathbf{M}$ es primo relativo con N

(b) $\mathbf{M}\cap A(a,b)\neq\varnothing$ para cualquier progresión aritmética $A(a,b)=\{a+nb : n\in\mathbb{Z}\}$, donde a,b son dos enteros positivos relativamente primos entre sí.

Tales conjuntos $\mathbf{M}$ existen. Por ejemplo, podemos tomar como $\mathbf{M}$ el conjunto de todos los números primos impares relativamente primos con N por el Teorema de Dirichlet sobre progresiones aritméticas.

Teorema (Weil) Sean k, N enteros positivos y χ un caracter de Dirichlet mod N tal que $\chi(-1)=(-1)^k$. Sea $f(\tau)$ una forma modular de peso k y caracter ψ sobre $\Gamma_0(N)$, $g(\tau,z)=(\sqrt{N}z)^{-k}f(-1/Nz)$ (o $g=f|_k[W_N]$) y
$C_\psi g_{\overline{\psi}}(\tau,z)=(\sqrt{N\alpha^2}z)^{-k}f(-1/N\alpha^2 z)$ (o $g_{\overline{\psi}}=f_\psi|_k[W_{N\alpha^2}]$), donde C_ψ es una constante que depende de ψ, N y χ. Entonces para cualquier caracter primitivo de Dirichlet ψ cuyo conductor $m\in\mathbf{M}$, se tiene

(I) Las series $\Lambda_N(f,\psi,s)$ y $\Lambda_N(g,\overline{\psi},s)$ admiten una extensión analítica a todo el plano complejo.

(II) Éstas son acotadas sobre cualquier franja vertical.

(III) Las series $\Lambda_N(f,\psi,s)$ y $\Lambda_N(g,\overline{\psi},k-s)$ satisfacen la ecuación funcional

$$\Lambda_N(f,\psi,s) = i^k C_\psi \Lambda_N(g,\overline{\psi},k-s)$$

El teorema converso de Weil consta de este teorema y de la demostración de que el recíproco también es cierto.

1.2. Teorema Converso para Formas de Jacobi

Para el caso de las formas cuspidales de Jacobi de índice m y peso k, con m,k enteros positivos, sobre el grupo $SL_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$, existe un teorema converso análogo al de Hecke dado por Yves Martin en 1996. Para ello, consideró la serie de potencia

$$f(\tau,z) = \sum_{r_0=0}^{2m-1} \left(\sum_{D=1}^{\infty} c_{r_0}(D) q_\tau^{D/4m} \right) \left(\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ r\equiv r_0\ (2m)}} q_\tau^{r^2/4m} q_z^r \right)$$

A partir de esto define el sistema de $2m$ series de Dirichlet

$$L_{r_0}(f,s) = \sum_{D=1}^{\infty} \frac{c_{r_0}(D)}{D^s} \quad , \quad 0 \leq r_0 \leq 2m-1$$

y para cada una de ellas asocia las funciones Λ

$$\Lambda_{r_0}(f,s) = (2m)^{s-1/2}\pi^{-s}\Gamma(s)L_{r_0}(f,s).$$

Teorema (Martin) Si la serie de potencia $f(\tau,z)$ representa una forma cuspidal de Jacobi de índice m y peso k sobre $SL_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ y $g(\tau,z) = \tau^{-k}e^{-2\pi i m z^2/\tau} f(-1/\tau, z/\tau)$, entonces

(I) Las series $\Lambda_{r_0}(f,s)$ y $\Lambda_{r_0}(g,s)$ para $0 \leq r_0 \leq 2m-1$ admiten una extensión analítica a todo el plano complejo.

(II) Cada una de ellas es acotada sobre cualquier franja vertical.

(III) Para cada $a = 0, 1, \ldots, 2m-1$ se verifica la ecuación funcional

$$\sum_{r_0=0}^{2m-1} e\Big(-\frac{ar_0}{2m}\Big)\Lambda_{r_0}(f,s) = (2m)^{1/2} i^k \Lambda_a\Big(g, k-s-\frac{1}{2}\Big),$$

El teorema converso de Martin consta de este teorema y de la demostración de que el recíproco también es cierto.

En este trabajo de tesis nos interesa obtener el análogo del teorema de Weil, dado más arriba.

Más precisamente, consideramos formas cuspidales de Jacobi de peso k, índice m y caracter de Dirichlet χ sobre el grupo $\Gamma_0(N) \ltimes \mathbb{Z}^2$, con expansión de Fourier

$$f(\tau, z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\ 4mn>r^2}} c(n,r) q_\tau^n q_z^r.$$

Definimos la *torcedura* de esta serie por un caracter primitivo de Dirichlet ψ,

$$f_\psi(\tau, z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\ 4mn\geq r^2}} \psi(n) c(n,r) q_\tau^n q_z^r.$$

Y demostramos que tal función se puede representar por la suma finita de series

$$f_\psi(\tau, z) = \sum_{r_0=0}^{2m\alpha-1}\left(\sum_{D=1}^{\infty} d_{r_0}(D) q_\tau^{D/4m}\right)\left(\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r\equiv r_0\ (2m\alpha)}} q_\tau^{r^2/4m} q_z^r\right).$$

Posteriormente definimos el sistema de $2m\alpha$ series de Dirichlet

$$L_{r_0}(f_\psi, s) = \sum_{D=1}^{\infty} \frac{d_{r_0}(D)}{D^s}\ ,\ 0 \leq r_0 \leq 2m\alpha - 1$$

donde α es el conductor de ψ, y para cada una de ellas asociamos las funciones Λ

$$\Lambda_{r_0,N\alpha^2}(f_\psi, s) = (2m\alpha\sqrt{N})^{s-1/2}\pi^{-s}\Gamma(s)L_{r_0}(f_\psi, s).$$

Por otro lado, definimos un cierto operador $\widetilde{W}_{N\alpha^2}$ "de tipo Fricke"que transforma la función $f(\tau, z)$ en otra forma de Jacobi que denotamos $g(\tau, z)$.

Con todo esto, nuestro resultado principal es el siguiente:

Teorema 1 Sean m, k, N enteros positivos. Sea $f \in J^{cusp}_{k,m,\chi}(\Gamma_0(N) \ltimes \mathbb{Z}^2)$ tal que

$$C_\psi g_{\overline{\psi}}(\tau, \alpha z) = (\sqrt{N\alpha^2}\tau)^{-k} e^{mN\alpha^2}\Big(- \frac{z^2}{\tau}\Big) f_\psi\Big(- \frac{1}{N\alpha^2\tau}, \frac{z}{\tau}\Big).$$

Entonces para cualquier ψ caracter primitivo de Dirichlet de conductor α con $(\alpha, N) = 1$ se tiene que:

(i) Las series $\Lambda_{r_0,N\alpha^2}(f_\psi, s)$ y $\Lambda_{r_0,N\alpha^2}(g_{\overline{\psi}}, s)$ para $0 \leq r_0 \leq 2m\alpha - 1$ admiten una extensión analítica a todo el plano complejo.

(ii) Estas series son acotadas sobre cualquier franja vertical.

(iii) Para cada $a = 0, 1, \ldots, 2m\alpha - 1$ se verifica la ecuación funcional

$$\sum_{r_0=0}^{2m\alpha-1} e\Big(- \frac{ar_0}{2m\alpha}\Big)\Lambda_{r_0,N\alpha^2}(f_\psi, s) = \Big(\frac{2m\alpha}{\sqrt{N}}\Big)^{1/2} i^k C_\psi \Lambda_{a,N\alpha^2}\Big(g_{\overline{\psi}}, k - s - \frac{1}{2}\Big),$$

donde $C_\psi = \chi(\alpha)\psi(-N)\dfrac{\mathscr{G}_\psi}{\mathscr{G}_{\overline{\psi}}}$ y $\mathscr{G}_\psi, \mathscr{G}_{\overline{\psi}}$ son las sumas de Gauss asociadas a ψ y $\overline{\psi}$ respectivamente.

Para desarrollar todas estas ideas dividiremos esta tesis en cinco capítulos.

El primero de ellos corresponde justamente a esta introducción.

En el segundo capítulo definiremos las nociones básicas necesarias para el trabajo posterior. En particular introduciremos los conceptos de grupo y formas de Jacobi. También recordaremos la definición de caracteres de Dirichlet y probaremos que las formas de Jacobi se pueden expresar mediante una serie de Fourier y mediante una combinación de funciones Theta.

El tercer capítulo es netamente técnico. En él estimamos el tamaño de los coeficientes de Fourier de cualquier forma cuspidal de Jacobi. Esto nos asegurará la convergencia uniforme de las series de Dirichlet que se ocuparán en el capítulo cinco.

Posteriormente, en el capítulo cuatro, introduciremos conceptos análogos al operador de Fricke y a la torcedura con caracteres de Dirichlet usados por Weil en el contexto de las formas de Jacobi. Estos conceptos han sido poco estudiados en la literatura, pero en esta tesis juegan un papel fundamental. El resultado principal de esta sección corresponde a la proposición 3, que relaciona los torcidos de f con los torcidos de g, donde g es la imagen de f bajo la acción del operador de Fricke.

Finalmente, en el quinto capítulo definimos las series de Dirichlet que nosotros asociamos a una forma de Jacobi. Nuestro resultado principal es el teorema 1, donde se exhiben las propiedades analíticas más importantes de tales series de Dirichlet.

Capítulo 2

Definiciones preliminares

2.1. El Grupo de Jacobi

Definición 1 Para $A = \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ o $\mathbb{Z}$ denotamos por $A^{2\times 2}$ el conjunto de matrices de 2×2 con coeficientes en A y definimos el grupo

$$SL_2(A) \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in A^{2\times 2} : ad - bc = 1 \right\}$$

.

Definición 2 El grupo de Jacobi G^J es el conjunto de triples $[\gamma, X, \zeta]$ donde

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \ , \ \ X = (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ \ , \ \ \zeta \in S^1,$$

(con $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) y cuya ley de multiplicación está dada por

$$[\gamma, X, \zeta][\gamma', X', \zeta'] = \left[\gamma\gamma', X\gamma' + X', \zeta\zeta' e\Big(\det \begin{pmatrix} X\gamma' \\ X' \end{pmatrix}\Big)\right]. \tag{2.1}$$

Aquí y en lo que sigue $e^m(z) = e^{2\pi i m z}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ y $z \in \mathbb{C}$.

Su índole como producto semidirecto del grupo de tipo Heisenberg $H_{\mathbb{R}} = \{(X, \zeta) : X \in \mathbb{R}^2, \zeta \in S^1\}$ y $SL_2(\mathbb{R})$ es evidente al observar que este último actúa sobre $H_{\mathbb{R}}$ por la derecha mediante

$$(X, \zeta)\gamma = (X\gamma, \zeta) \quad \text{donde } \gamma \in SL_2(\mathbb{R}),\ \ X \in \mathbb{R}^2,\ \ \zeta \in S^1.$$

Además, para cada par de enteros positivos k, m podemos definir una acción de G^J sobre el conjunto de funciones $\{f : \mathscr{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$ vía

$$f|_{k,m}\Big[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (\lambda, \mu), \zeta\Big](\tau, z) =$$
$$\zeta^m (c\tau + d)^{-k} e^m\Big(- \frac{c(z + \lambda\tau + \mu)^2}{c\tau + d} + \lambda^2\tau + 2\lambda z + \lambda\mu\Big) f\Big(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z + \lambda\tau + \mu}{c\tau + d}\Big). \quad (2.2)$$

Para más detalles ver [3], p.14.

2.2. Grupos Modulares de Congruencia

A todos los subgrupos de $SL_2(\mathbb{Z})$ de índice finito los llamaremos *grupos modulares*.

Para un entero positivo M, definimos los subgrupos

$$\begin{aligned} \Gamma_0(M) &= \Big\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \mod M \Big\}, \\ \Gamma(M) &= \Big\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : b \equiv c \equiv 0,\ \ a \equiv d \equiv 1 \mod M \Big\}. \end{aligned}$$

Notamos que $SL_2(\mathbb{Z}) = \Gamma_0(1) = \Gamma(1)$.

Además, si $M'|M$ entonces $\Gamma_0(M') \supset \Gamma_0(M)$, $\Gamma(M') \supset \Gamma(M)$.

Estos subgrupos de $SL_2(\mathbb{Z})$ tienen índice finito (para una demostración ver [9], p. 103). Llamaremos a $\Gamma(M)$ el *grupo modular principal de congruencia*. Diremos que M es el *nivel* de $\Gamma_0(M)$ y $\Gamma(M)$. Cualquier grupo modular que contenga un grupo modular principal de congruencia es llamado un *grupo modular de congruencia*.

En esta tesis trabajamos con los grupos modulares de congruencia $\Gamma_0(M)$ y reticulados de la forma $T = A\mathbb{Z} \times \frac{1}{B}\mathbb{Z}$ para A, B, M enteros positivos tales que $AB|M$. De aquí que consideramos el producto semidirecto $\Gamma_0(M) \ltimes (T \cdot \langle \zeta_B \rangle) \subseteq G^J$, donde ζ_B es una raíz primitiva B-ésima de la unidad y $T \cdot \langle \zeta_B \rangle = \{(X, \zeta) \in H_{\mathbb{R}} : X \in T, \zeta \in \zeta_B\}$.

Note que el subgrupo $\langle \zeta_B \rangle$ aparece en el grupo $\Gamma_0(M) \ltimes (T \cdot \langle \zeta_B \rangle)$ para que la ley de multiplicación dada para el grupo de Jacobi G^J en (2.1) tenga sentido, ya que si $X, X' \in T$ entonces

$$e\Big(\det \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}\Big) \in \langle \zeta_B \rangle.$$

Note además que la condición $AB|M$ es necesaria para que la acción de $\Gamma_0(M)$ sobre $T \cdot \langle \zeta_B \rangle$ esté bien definida, pues de esta manera se tiene que

$$(X, \zeta)\gamma = (X\gamma, \zeta) \in T \cdot \langle \zeta_B \rangle$$

para cualquier $X \in T$, $\gamma \in \Gamma_0(M)$ y $\zeta \in \langle \zeta_B \rangle$.

En particular, definimos

$$\Gamma_0(N)^J := \Gamma_0(N) \ltimes \big(\mathbb{Z}^2 \cdot \langle 1 \rangle\big). \tag{2.3}$$

Nota: Cuando hablamos del nivel M lo hacemos de manera global, con el fin de cubrir todos los casos posibles que se generen en nuestra tesis. En cambio, el nivel N hace referencia a un entero positivo en particular.

2.3. Caracteres de Dirichlet

En esta sección recordamos el concepto de caracter de Dirichlet y algunas de sus propiedades. Para mayores detalles ver [9], p.79-81.

Sea N un entero positivo y $\widetilde{\chi}$ un caracter del grupo multiplicativo $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. Para cualquier entero n ponemos

$$\chi(n) = \begin{cases} \widetilde{\chi}\,(n \bmod N) & \text{si} \quad (n, N) = 1 \\ 0 & \text{si} \quad (n, N) \neq 1 \end{cases} . \tag{2.4}$$

Entonces χ es una función de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{C}$ que satisface

(1) $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$

(2) $\chi(m) = \chi(n)$ si $m \equiv n \pmod N$

(3) $\chi(n) \neq 0$ si y sólo si $(n, N) = 1$.

Los caracteres $\widetilde{\chi}$ de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ y las funciones χ de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{C}$ que satisfacen las condiciones (1), (2) y (3) se corresponden biyectivamente por medio de (2.4). A tal función χ de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{C}$ la llamamos *caracter de Dirichlet* mod N o simplemente *caracter* mod N. El menor entero positivo N es llamado *módulo* de χ. Al caracter de Dirichlet que corresponde al caracter trivial de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ lo llamamos *caracter trivial* mod N. Además, denotamos por χ_0 el caracter trivial mod 1 y lo llamamos *caracter principal*.

Para un caracter de Dirichlet χ mod N, definimos el *caracter conjugado* $\overline{\chi}$ por

$$\overline{\chi}(n) = \overline{\chi(n)} \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}, \tag{2.5}$$

que también es un caracter mod N. Para un múltiplo N' de N, ponemos

$$\chi'(n) = \begin{cases} \chi(n) & \text{si} \quad (n, N') = 1 \\ 0 & \text{si} \quad (n, N') \neq 1 \end{cases},$$

entonces χ' es un caracter mod N. Al caracter χ' lo llamamos *caracter inducido* desde χ mod N.

Dado un caracter de Dirichlet χ mod N, sea $\mathrm{N}_\chi = \{m \in \mathbb{Z}^+ : m|N$ y χ es inducido por un caracter mod $m\}$. Como N pertenece a N_χ, este conjunto no es vacío. Para cualquier par de elementos m_1, m_2 en N_χ, el máximo común divisor de m_1 y m_2 también pertenece a N_χ. Para probar esto ponemos $d = (m_1, m_2)$ y recordamos que χ es un caracter mod N. Como $d \in \mathbb{Z}^+$, $d|m_1$ y $d|m_2$ entonces $d|N$. Luego, basta verificar que la función $a \to \chi(a)$ define un caracter inducido mod d, para cada $a \equiv 1 \pmod{d}$. Esta función es multiplicativa sobre $\mathbb{Z}$, luego basta con probar que $\chi(a) = 1$, para cada $a \equiv 1 \pmod{d}$. Como $a = 1+dk = 1+(\alpha m_1+\beta m_2)k$, para ciertos $k, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, entonces $\chi(a) = \chi(1+\alpha m_1 k+\beta m_2 k) = \chi(1) = 1$ ya que χ es caracter inducido mod m_1 y mod m_2. Por lo tanto, el menor entero m_χ contenido en N_χ es un divisor de todos los elementos del conjunto. Llamamos a m_χ el *conductor* de χ. Cuando $N = m_\chi$, χ es llamado un *caracter primitivo* mod N.

Para dos caracteres de Dirichlet χ mod N y ψ mod M, ponemos

$$(\chi\psi)(n) = \chi(n)\psi(n) \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{Z},$$

entonces $\chi\psi$ es un caracter mod L, donde L es el mínimo común múltiplo entre Ny M.

Para un caracter de Dirichlet primitivo χ con conductor m, definimos la *suma de Gauss* de χ por

$$\mathscr{G}_\chi = \sum_{a=0}^{m-1} \chi(a) e^{2\pi i a/m}. \tag{2.6}$$

La siguiente propiedad de $\mathscr{G}_\chi$ es fundamental en este trabajo (para su demostración ver [9], p. 80).

Lema 1 Sea χ un caracter primitivo de Dirichlet mod m. Entonces

$$\sum_{a=0}^{m-1} \chi(a) e^{2\pi i ab/m} = \overline{\chi}(b) \mathscr{G}_\chi \ ,$$

para todo entero b.

Sea χ un caracter de Dirichlet mod M. Definimos un caracter χ de $\Gamma_0(M)$ por

$$\chi(\gamma) = \chi(d)\,, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(M).$$

2.4. Formas de Jacobi

Para definir formas de Jacobi, introducimos primero un concepto topológico.

Definición 3 Una *cúspide* de $\Gamma_0(M)$ es cualquier órbita de $\Gamma_0(M)$ en $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Su significado topológico es que es un punto de compactificación de la superficie de Riemann $\mathscr{H}/\Gamma_0(M)$.

Frecuentemente identificaremos una cúspide con cualquiera de sus representantes $s \in \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ (ver detalles en [9], p.25).

Definición 4 Sean k, m, A, B, C enteros positivos tales que $B|C$ y χ un caracter de Dirichlet módulo M. Una forma de Jacobi de índice mC, peso k y caracter χ sobre el grupo $\Gamma_0(M) \ltimes (T \cdot \langle \zeta_B \rangle)$, donde $T = A\mathbb{Z} \times \frac{1}{B}\mathbb{Z}$, es una función holomorfa $f(\tau, z) : \mathscr{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que satisface las dos ecuaciones

(1) $f|_{k,mC}\Big[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (0,0), 1\Big](\tau, z) = \chi(d) f(\tau, z)$ para $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(M)$,

(2) $f|_{k,mC}[Id, (\lambda, \mu), \zeta](\tau, z) = f(\tau, z)$ para $(\lambda, \mu) \in T, \zeta \in \langle \zeta_B \rangle, Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

y es tal que

(3) $f(\tau, z)$ es "holomorfa en las cúspides" de $\Gamma_0(M) \ltimes (T \cdot \langle \zeta_B \rangle)$. Sobre este punto nos explayaremos en seguida.

Observación 1 Notar que (1) y (2) pueden reescribirse por (2.2) de la siguiente forma:

(1') $f(\tau, z) = \chi(d)^{-1} (c\tau + d)^{-k} e^{mC}\Big(- \dfrac{cz^2}{c\tau + d}\Big) f\Big(\dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}, \dfrac{z}{c\tau + d}\Big)$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(M)$.

(2') $f(\tau, z) = (\lambda^2 \tau + 2\lambda z + \lambda\mu) f(\tau, z + \lambda\tau + \mu)$, $(\lambda, \mu) \in T,\ \zeta \in \langle \zeta_B \rangle$.

Observación 2 En este punto nos guiamos por [3], p.57-58, pero extendemos tal trabajo ya que ahí lo desarrollan solamente para el grupo $\Gamma_0(1)^J$. Sea s la cúspide ∞ de $\Gamma_0(M)$. Consideremos

$$\Gamma_\infty = Stab_{\Gamma_0(M)}(\infty) = \{\gamma \in \Gamma_0(M) : \gamma(\infty) = \infty\} = \Big\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^l : l \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

Es claro que para cualquier $\gamma \in \Gamma_\infty$ se debe tener $f|_{k,m}[\gamma, (0,0), 1](\tau, z) = f(\tau, z)$. En particular

$$f(\tau + 1, z) = f|_{k,mC}\Big[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (0,0), 1\Big](\tau, z) = f(\tau, z) \tag{2.7}$$

Además, tenemos que $(0, 1/B) \in T$, luego

$$f(\tau, z + 1/B) = f|_{k,mC}[Id, (0, 1/B), 1](\tau, z) = f(\tau, z) \tag{2.8}$$

De (2.7) y (2.8) se tiene que $f(\tau, z)$ define una función holomorfa sobre el producto cartesiano de anillos $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ donde $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} : 0 < |w| < 1\}$. De esta forma,

$$f(\tau, z) = \sum_{n,r \in \mathbb{Z}} c(n, r) q_\tau^n q_z^{rB} \quad , \quad q_\tau = e^{2\pi i \tau}, \quad q_z = e^{2\pi i z} \tag{2.9}$$

donde $c(n, r) \in \mathbb{C}$. La representación (2.9) es llamada la serie de Fourier de $f(\tau, z)$ en la cúspide ∞.

Por otro lado, la segunda ley de transformación para formas de Jacobi implica ciertas identidades no obvias entre los coeficientes $c(n, r)$. A saber, la ecuación funcional (2')

$$f(\tau, z) \quad = \quad e^{mC}(\lambda^2\tau + 2\lambda z + \lambda\mu) f(\tau, z + \lambda\tau + \mu) \text{ para todo } (\lambda, \mu) \in T.$$

Ya que $T = A\mathbb{Z} \times \frac{1}{B}\mathbb{Z}$, un caso particular de la identidad anterior nos da

$$f(\tau, z) = e^{mC}((A\lambda')^2\tau + 2A\lambda' z) f(\tau, z + A\lambda'\tau)$$

para todo $\lambda' \in \mathbb{Z}$.

Esto implica que la serie de Fourier (2.9) satisface

$$\sum_{n,r \in \mathbb{Z}} c(n, r) q_\tau^n q_z^{rB} = q_\tau^{(A\lambda')^2 mC} q_z^{2A\lambda' mC} \sum_{n,r \in \mathbb{Z}} c(n, r) q_\tau^n q_{(z+A\lambda'\tau)}^{rB}.$$

Recordando que $B|C$, digamos $C = Bt$ para algún $t \in \mathbb{Z}$, obtenemos

$$\sum_{n,r \in \mathbb{Z}} c(n, r) q_\tau^n q_z^{rB} = \sum_{n,r \in \mathbb{Z}} c(n, r) q_\tau^{(n + A\lambda' rB + (A\lambda')^2 mC)} q_z^{(r + 2A\lambda' mt)B}$$

De esto se sigue que

$$c(n,r) = c(n',r')$$

cuando $n' = n + A\lambda' rB + (A\lambda')^2 mC$ y $r' = r + 2A\lambda' mt$, en otras palabras cuando $r' \equiv r \pmod{2mAt}$ y $4mn't - r'^2B = 4mnt - r^2B$. Esto demuestra que los coeficientes $c(n,r)$ dependen sólo de $4mnt - r^2B$ y de $r \pmod{2mAt}$.

La recursividad de los coeficientes $c(n,r)$ puede ser aprovechada de la siguiente manera. Si definimos

$$c_r(D) := c(n,r) \tag{2.10}$$

para todo $r \in \mathbb{Z}$ y $D = 4mnt - r^2B$, entonces $c_{r'}(D) = c_r(D)$ para cada $r' \equiv r \pmod{2mAt}$.

La ecuación (2.10) nos da los coeficientes $c_{r_0}(D)$ para cada $r_0 \in \mathbb{Z}/2mAt\mathbb{Z}$ (o $r_0 \in \{0,1,\ldots,2mAt-1\}$) y todos los enteros D que satisfacen $D \equiv -r_0^2B$ (mod $4mt$), a saber

$$c_{r_0}(D) = c\Big(\frac{D + r^2B}{4mt}, r\Big)$$

para cualquier $r \in \mathbb{Z}$ con $r \equiv r_0 \pmod{2mAt}$.

Ahora extendemos la definición para todo $D \in \mathbb{Z}$ poniendo

$$c_{r_0}(D) = 0 \text{ si } D \not\equiv -r_0^2B \pmod{4mt}$$

y a partir de esto definimos

$$f_{r_0}(\tau) = \sum_{D\in\mathbb{Z}} c_{r_0}(D) q_\tau^{D/4mt}. \tag{2.11}$$

También consideramos la función Theta definida por la serie

$$\Theta_{mAt,r_0}(\tau, z) = \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r\equiv r_0(2mAt)}} q_\tau^{r^2/4mAt} q_z^r. \tag{2.12}$$

Así

$$\begin{aligned}
f(\tau, z) &= \sum_{r_0=0}^{2mAt-1} \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r\equiv r_0(2mAt)}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{r_0}(4mnt - r^2B) q_\tau^n q_z^{rB} \\
&= \sum_{r_0=0}^{2mAt-1} \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r\equiv r_0(2mAt)}} \sum_{D\in\mathbb{Z}} c_{r_0}(D) q_\tau^{\frac{D+r^2B}{4mt}} q_z^{rB} \\
&= \sum_{r_0=0}^{2mAt-1} \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r\equiv r_0(2mAt)}} \sum_{D\in\mathbb{Z}} c_{r_0}(D) q_\tau^{D/4mt} q_\tau^{r^2B/4mt} q_z^{rB} \\
&= \sum_{r_0=0}^{2mAt-1} \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r\equiv r_0(2mAt)}} f_{r_0}(\tau) q_\tau^{r^2B/4mt} q_z^{rB} \\
&= \sum_{r_0=0}^{2mAt-1} f_{r_0}(\tau) \Theta_{mAt,r_0}(AB\tau, Bz).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

A (2.13) le llamaremos la descomposición theta para $f(\tau, z)$ en el infinito.

El que $f(\tau, z)$ sea holomorfa en ∞ significa que para cada r_0, las series $f_{r_0}(\tau)$ definen funciones holomorfas en $\mathscr{H}$. Esto significa que $D \geq 0$ en cada caso (equivalentemente $4mnt \geq r^2B$).

Observación 3 Sea $s \in \mathbb{Q}$ una cúspide de $\Gamma_0(M)$. Consideramos $\Gamma_s = Stab_{\Gamma_0(M)}(s) = \{\gamma \in \Gamma_0(M) : \gamma(s) = s\}$ y tomamos $\rho \in SL_2(\mathbb{Q})$ tal que $\rho(s) = \infty$ (tal ρ siempre existe). Notamos además que $\Gamma_s = \rho^{-1}\Gamma_\infty\rho$.

Claramente $[\rho,(0,0),1]\in G^J$ y

$$\begin{aligned}[\rho,(0,0),1]\big(\Gamma_s\ltimes(\{0\}\times\{0\})\cdot\langle 1\rangle\big)[\rho^{-1},(0,0),1] &= \{[\rho\gamma\rho^{-1},(0,0),1]/\gamma\in\Gamma_s\}\\ &= \left\{[\delta,(0,0),1]/\delta\in\{\pm\begin{pmatrix}1 & H_\rho\\ 0 & 1\end{pmatrix}^l/l\in\mathbb{Z}\}\right\}\end{aligned}$$

para cierto $H_\rho\in\mathbb{Q}$, $H_\rho>0$ (ver, por ejemplo [9], p.18). Luego $f|_{k,mC}[\rho^{-1},(0,0),1]:\mathscr{H}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es una función holomorfa sobre $\mathscr{H}\times\mathbb{C}$ que satisface una igualdad análoga a (2.7), a saber

$$\begin{aligned}f|_{k,mC}[\rho^{-1},(0,0),1](\tau+H_\rho,z) &= f|_{k,mC}[\rho^{-1},(0,0),1]|_{k,mC}\Big[\begin{pmatrix}1 & H_\rho\\ 0 & 1\end{pmatrix},(0,0),1\Big](\tau,z)\\ &= f|_{k,mC}[\rho^{-1},(0,0),1](\tau,z) \qquad (2.14)\end{aligned}$$

Ahora sea $N\in\mathbb{Z}^+$ tal que $N\rho\in\mathbb{Z}^{2\times 2}$. Afirmamos que $(0,NA)\in T\rho^{-1}$ ya que si $\rho=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ entonces $(0,NA)\rho=(cNA,dNA)\in T$, luego

$$\begin{aligned}f|_{k,mC}[\rho^{-1},(0,0),1](\tau,z+NA) &= f|_{k,mC}[\rho^{-1},(0,0),1]|_{k,mC}[Id,(0,NA),1](\tau,z)\\ &= f|_{k,mC}[\rho^{-1},(0,NA),1](\tau,z)\\ &= f|_{k,mC}[Id,(cNA,dNA),1]|_{k,mC}[\rho^{-1},(0,0),1](\tau,z)\\ &= f|_{k,mC}[\rho^{-1},(0,0),1](\tau,z) \qquad (2.15)\end{aligned}$$

De (2.14) y (2.15) se tiene que $f|_{k,mC}[\rho^{-1},(0,0),1](\tau,z)$ define una función con una expansión de Fourier del tipo

$$f|_{k,mC}[\rho^{-1},(0,0),1](\tau,z) = \sum_{n,r\in\mathbb{Z}} c_\rho(n,r) q_\tau^{n/H_\rho} q_z^{r/NA}$$

donde $c_\rho(n,r) \in \mathbb{C}$. Sin pérdida de generalidad podemos modificar la notación de los coeficientes para reescribir la serie anterior como

$$f|_{k,mC}[\rho^{-1},(0,0),1](\tau,z) = \sum_{n,r\in\mathbb{Z}} c_\rho(n,r) q_\tau^{n/h_\rho} q_z^{r/h_\rho} \tag{2.16}$$

donde h_ρ es el mínimo común múltiplo entre NA y el numerador de H_ρ.

El resultado (2.16) es llamado la serie de Fourier de $f(\tau,z)$ en la cúspide s.

Como en el caso de la cúspide infinito, también hay una descomposición en funciones Theta para una cúspide arbitraria s. A saber, utilizando $(\lambda,\mu) = (AN\lambda',0) \in T$, para cualquier $\lambda' \in \mathbb{Z}$ nos da

$$\begin{aligned} f|_{k,mC}[\rho^{-1},(0,0),1]|_{k,mC}[Id,(AN\lambda',0),1] &= f|_{k,mC}[\rho^{-1},(AN\lambda',0),1] \\ &= f|_{k,mC}[Id,(AN\lambda',0)\rho,1]|_{k,mC}[\rho^{-1},(0,0),1] \\ &= f|_{k,mC}[Id,(aAN\lambda',bAN\lambda'),1]|_{k,mC}[\rho^{-1},(0,0),1] \end{aligned}$$

como $\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces $(AN\lambda',0)\rho = (aAN\lambda', bAN\lambda') \in T$, ya que $N \in \mathbb{Z}^+$ es tal que $N\rho \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$. De esta manera,

$$\begin{aligned} f|_{k,mC}[\rho^{-1},(0,0),1]|_{k,mC}[Id,(AN\lambda',0),1] &= f|_{k,mC}[Id,(aAN\lambda',bAN\lambda'),1]|_{k,mC}[\rho^{-1},(0,0),1] \\ &= f|_{k,mC}[\rho^{-1},(0,0),1] \end{aligned}$$

Esto implica que la serie de Fourier (2.16) satisface

$$\begin{aligned}\sum_{n,r\in\mathbb{Z}} c_\rho(n,r) q_\tau^{n/h_\rho} q_z^{r/h_\rho} &= q_\tau^{(AN\lambda')^2 mC} q_z^{2AN\lambda' mC} \sum_{n,r\in\mathbb{Z}} c_\rho(n,r) q_\tau^{n/h_\rho} q_{(z+AN\lambda'\tau)}^{r/h_\rho} \\ &= \sum_{n,r\in\mathbb{Z}} c_\rho(n,r) q_\tau^{(n+AN\lambda' r+h_\rho(AN\lambda')^2 mC)/h_\rho} q_z^{(r+2h_\rho AN\lambda' mC)/h_\rho}.\end{aligned}$$

A su vez, esto implica que

$$c_\rho(n,r) = c_\rho(n',r') \tag{2.17}$$

si $n' = n + AN\lambda' r + h_\rho(AN\lambda')^2 mC$ y $r' = r + 2h_\rho AN\lambda' mC$.

Análogamente a lo que ocurre en la cúspide infinito, tal recursividad de los coeficientes $c_\rho(n,r)$ puede ser aprovechada. Si definimos $D = 4mCh_\rho n - r^2$ y

$$c_{\rho,r}(D) := \begin{cases} c_\rho\Big(\dfrac{D+r^2}{4mCh_\rho}, r\Big) & \text{si } 4mCh_\rho | D + r^2 \\ 0 & \text{si } 4mCh_\rho \nmid D + r^2 \end{cases}$$

entonces la igualdad (2.17) es equivalente a la ecuación

$$c_{\rho,r}(D) = c_{\rho,r'}(D)$$

cada vez que $r \equiv r'$ (mod $2mCANh_\rho$).

A partir de esto definimos

$$f_{\rho,r_0}(\tau) = \sum_{D\in\mathbb{Z}} c_{\rho,r_0}(D) q_\tau^{D/4mCh_\rho^2}.$$

para cada $0 \leq r_0 \leq 2mCAh_\rho - 1$.

Utilizando la definición para la función Theta dada en (2.12) tenemos

$$\Theta_{mCANh_\rho,r_0}(AN\tau/h_\rho, z/h_\rho) = \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r\equiv r_0(2mCANh_\rho)}} q_\tau^{r^2/4mCh_\rho^2} q_z^{r/h_\rho}$$

De este modo

$$\begin{aligned} f(\tau,z) &= \sum_{r_0=0}^{2mCANh_\rho-1} \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r\equiv r_0(2mCANh_\rho)}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{\rho,r_0}(4mCh_\rho n - r^2) q_\tau^{n/h_\rho} q_z^{r/h_\rho} \\ &= \sum_{r_0=0}^{2mCANh_\rho-1} \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r\equiv r_0(2mCANh_\rho)}} \sum_{D\in\mathbb{Z}} c_{\rho,r_0}(D) q_\tau^{\frac{D+r^2}{4mCh_\rho^2}} q_z^{r/h_\rho} \\ &= \sum_{r_0=0}^{2mCANh_\rho-1} \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r\equiv r_0(2mCANh_\rho)}} \sum_{D\in\mathbb{Z}} c_{\rho,r_0}(D) q_\tau^{D/4mCh_\rho^2} q_\tau^{r^2/4mCh_\rho^2} q_z^{r/h_\rho} \\ &= \sum_{r_0=0}^{2mCANh_\rho-1} \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r\equiv r_0(2mCANh_\rho)}} f_{\rho,r_0}(\tau) q_\tau^{r^2/4mCh_\rho^2} q_z^{r/h_\rho} \\ &= \sum_{r_0=0}^{2mCAah_\rho-1} f_{\rho,r_0}(\tau)\Theta_{mCANh_\rho,r_0}(AN\tau/h_\rho, z/h_\rho). \end{aligned} \tag{2.18}$$

A (2.18) le llamaremos la descomposición theta para $f|_{k,mC}[\rho^{-1},(0,0),1](\tau,z)$.

Luego, que $f(\tau,z)$ sea holomorfa en s significa que para cada r_0, las series $f_{\rho,r_0}(\tau)$ definen funciones holomorfas en $\mathscr{H}$. Esto significa que $D\geq 0$ en cada caso o equivalentemente $4mCh_\rho n \geq r^2$ (esta proposición es independiente de la elección de ρ, ver [9] p.19).

Por conveniencia, para comodidad del lector, creemos pertinente repetir la definición de forma de Jacobi dada en la página 12, pues ya conocemos lo que sucede en las cúspides. Una forma de Jacobi de índice mC, peso k y caracter de Dirichlet χ módulo M sobre el grupo $\Gamma_0(M)\ltimes(T\cdot\langle\zeta_B\rangle)$ es una función $f:\mathscr{H}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ tal que

(1) $f(\tau,z)$ es holomorfa sobre $\mathscr{H}\times\mathbb{C}$.

(2) $f|_{k,mC}[\gamma,(\lambda,\mu),\zeta](\tau,z)=\chi(d)f(\tau,z)$ para cada $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(M)$, $(\lambda,\mu)\in T$, $\zeta\in\langle\zeta_B\rangle$

(3) $f(\tau,z)$ es holomorfa en las cúspides de $\Gamma_0(M)\ltimes(T\cdot\langle\zeta_B\rangle)$, es decir, en el infinito tiene una expansión en serie de Fourier

$$f(\tau,z)=\sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\ 4mnt\geq r^2B}} c(n,r)q_\tau^n q_z^{rB} \tag{2.19}$$

y en la cúspide s tiene una expansión en serie de Fourier

$$f|_{k,mC}[\rho^{-1},(0,0),1](\tau,z)=\sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\ 4mCh_\rho n\geq r^2}} c_\rho(n,r)q_\tau^{n/h_\rho}q_z^{r/h_\rho} \tag{2.20}$$

También podemos caracterizar a cada una de estas expansiones en series de Fourier mediante sus descomposiciones en funciones Theta dadas por (2.13) y (2.18) respectivamente.

Si además $c(n,r)=0$ cada vez que $4mnt-r^2B=0$ (en la cúspide infinito) y $c_\rho(n,r)=0$ cada vez que $4mCh_\rho n-r^2=0$ (en cualquier otra cúspide), la función $f(\tau,z)$ es llamada una forma cuspidal de Jacobi. Luego, cada vez que hagamos referencia a una forma cuspidal tendremos $D\geq 1$.

El $\mathbb{C}$- espacio vectorial de todas las formas de Jacobi de índice mC, peso k y caracter de Dirichlet χ sobre $\Gamma_0(M)\ltimes(T\cdot\langle\zeta_B\rangle)$ es denotado por $J_{k,mC,\chi}(\Gamma_0(M)\ltimes(T\cdot\langle\zeta_B\rangle))$ y el de las formas cuspidales $J^{cusp}_{k,mC,\chi}(\Gamma_0(M)\ltimes(T\cdot\langle\zeta_B\rangle))$.

Comentario Por el teorema 1.1 (dado en [3], p.10) sabemos que el $\mathbb{C}$- espacio vectorial $J_{k,mC,\chi}(\Gamma_0(M)\ltimes(T\cdot\langle\zeta_B\rangle))$ tiene dimensión finita. Además, si $k>2$ entonces $J_{k,mC,\chi}=J^{cusp}_{k,mC,\chi}\bigoplus J^{Eis}_{k,mC,\chi}$, donde $J^{cusp}_{k,mC,\chi}$ es el espacio de las formas cuspidales en $J_{k,mC,\chi}$ y $J^{Eis}_{k,mC,\chi}$ es el espacio generado por las series de Eisenstein (ver [3], p.25). Estas series han sido profundamente estudiadas y son bastante conocidas; en cambio, las formas cuspidales son un poco más complejas. Es por este hecho que el trabajo de la presente tesis se refiere exclusivamente a formas cuspidales de Jacobi.

Capítulo 3

Comportamiento asintótico de Formas de Jacobi

En esta sección estudiaremos el comportamiento de las formas de Jacobi cuando $Im(\tau) = y \to \infty$, lo que nos ayudará principalmente para dos propósitos: estimar el tamaño de los coeficientes de una forma cuspidal de Jacobi y probar la convergencia uniforme y absoluta de las series de Dirichlet asociadas a tales formas. Aquí, en la proposición 1, extendemos el trabajo hecho por Berndt y Böcherer en [2], p.23, ya que en él se trabaja sobre el grupo $\Gamma_0(1)^J$.

De ahora en adelante, salvo que expresemos lo contrario, solamente ocuparemos la serie de Fourier y la descomposición theta de una forma de Jacobi $f(\tau, z)$ en la cúspide infinito. Además, la notación que utilizaremos será la introducida en la sección 2.4, en particular tenemos $T = A\mathbb{Z} \times \frac{1}{B}\mathbb{Z}$, $C = Bt$ y $AB|M$.

Lema 2 Si $f(\tau, z) \in J^{cusp}_{k,mC,\chi}(\Gamma_0(M) \ltimes (T \cdot \langle \zeta_B \rangle))$ entonces para cada par de números reales positivos

y_0 y R, la función $f(\tau,z)e^m(pBtz)$ es uniformemente acotada sobre dominios del tipo

$$\{(\tau,z)\in\mathscr{H}\times\mathbb{C} : y\geq y_0, |p|\leq R\}$$

donde $\tau = x+iy$, $z = p\tau + q$ para $x,y,p,q\in\mathbb{R}$. Además,

$$f(\tau,z)e^m(Btpz) \;=\; O\Big(e\Big(\frac{iy}{4mt}\Big)\Big) \quad \text{cuando } y\to\infty \tag{3.1}$$

Demostración: Por (2.13) sabemos que podemos descomponer $f(\tau,z)$ como

$$f(\tau,z) = \sum_{r_0=0}^{2mAt-1} f_{r_0}(\tau)\Theta_{mAt,r_0}(AB\tau,Bz) = \sum_{r_0=0}^{2mAt-1} f_{r_0}(\tau) \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r\equiv r_0(2mAt)}} q_\tau^{r^2B/4mt} q_z^{rB}$$

luego

$$\begin{aligned}
f(\tau,z)e^m(pBtz) &= \sum_{r_0=0}^{2mAt-1} f_{r_0}(\tau) \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r\equiv r_0(2mAt)}} e\Big(\frac{r^2}{4mt}B\tau\Big)e(rBz)e(mpBtz)\\
&= \sum_{r_0=0}^{2mAt-1} f_{r_0}(\tau) \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r\equiv r_0(2mAt)}} e\Big(\Big(\frac{r^2}{4mt}+pr+mp^2t\Big)B\tau\Big)e(Brq+mtBpq)\\
&= \sum_{r_0=0}^{2mAt-1} f_{r_0}(\tau) \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r\equiv r_0(2mAt)}} e\Big(\frac{(r+2mtp)^2}{4mt}B\tau\Big)e\big((r+mtp)Bq\big).
\end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned}
|f(\tau,z)e^m(pBtz)| &\leq \sum_{r_0=0}^{2mAt-1} |f_{r_0}(\tau)| \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r\equiv r_0(2mAt)}} \Big|e\Big(\frac{(r+2mtp)^2}{4mt}B\tau\Big)e\big((r+mtp)Bq\big)\Big|\\
&\leq \sum_{r_0=0}^{2mAt-1} |f_{r_0}(\tau)| \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r\equiv r_0(2mAt)}} e^{-(r+2mtp)^2\pi By/2mt}\\
&\leq \sum_{r_0=0}^{2mAt-1} |f_{r_0}(\tau)| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(r+2mtp)^2\pi By/2mt}dr.
\end{aligned}$$

Usando la fórmula integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(u+b)^2}du = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2},$$

válida para $a > 0$ (ver [5]), concluimos que la integral anterior converge a $(2mt/By)^{1/2}$.

Por lo tanto

$$|f(\tau, z)e^m(pBtz)| \quad \leq \quad \left(\frac{2mt}{By}\right)^{1/2} \sum_{r_0=0}^{2mAt-1} |f_{r_0}(\tau)|.$$

Por otro lado

$$|f_{r_0}(\tau)| \leq \sum_{D=1}^{\infty} |c_{r_0}(D)|e^{-\pi Dy/2mt} = e^{-\pi y/2mt}\Big(\sum_{D=1}^{\infty} |c_{r_0}(D)|e^{-\pi(D-1)y/2mt}\Big)$$

implica que

$$|f(\tau, z)e^m(pBtz)| \leq \left(\frac{2mt}{B}\right)^{1/2} \frac{y^{-1/2}}{e^{\pi y/2mt}} \sum_{r_0=0}^{2mAt-1} \Big(\sum_{D=1}^{\infty} |c_{r_0}(D)|e^{-\pi(D-1)y/2mt}\Big).$$

Observe que el lado derecho de esta desigualdad tiende a 0 cuando $y \longrightarrow \infty$ pues

$$\Big(\sum_{D=1}^{\infty} |c_{r_0}(D)|e^{-\pi(D-1)y/2mt}\Big) \rightarrow c_{r_0}(1) \quad \text{y} \quad \frac{y^{-1/2}}{e^{\pi y/2mt}} \rightarrow 0.$$

Esto prueba la primera parte del lema. Para la fórmula asintótica, notamos que $y^{-1/2} \leq 1$ cuando $y \rightarrow \infty$. Con esto tenemos la segunda parte del lema.

■

Lema 3 Sea $f(\tau, z) \in J^{cusp}_{k,mC,\chi}(\Gamma_0(M) \ltimes (T \cdot \langle\zeta_B\rangle))$. Entonces la función $f(\tau, z)e^m(pBtz)Im(\tau)^{k/2}$ es acotada en $\mathscr{H} \times \mathbb{C}$.

Demostración: Consideremos la función

$$g(\tau,z)=|f(\tau,z)e^m(pBtz)|Im(\tau)^{k/2}.$$

Entonces, para cada $\gamma=\Big[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix},(0,0),1\Big]\in\Gamma_0(M)\ltimes(T\cdot\langle\zeta_B\rangle)$ se tiene que

$$g(\gamma(\tau,z))=\Big|f\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\Big)e^m\Big(p'Bt\frac{z}{c\tau+d}\Big)\Big|Im\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\Big)^{k/2}$$

donde $p'\in\mathbb{R}$ satisface

$$\frac{z}{c\tau+d}=p'\frac{a\tau+b}{c\tau+d}+q'.$$

Luego

$$g(\gamma(\tau,z))=\Big|\chi(d)(c\tau+d)^k e^{mC}\Big(\frac{cz^2}{c\tau+d}\Big)e^m\Big(p'Bt\frac{z}{c\tau+d}\Big)f(\tau,z)\Big|\Big(\frac{Im(\tau)}{|c\tau+d|^2}\Big)^{k/2}.$$

Recordamos que $C=Bt$, $|\chi(d)|=1$ y deducimos de la ecuación previa que

$$p'=pd-qc.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
g(\gamma(\tau,z)) &= \Big|e^{mC}\Big(\frac{cz^2+p'z}{c\tau+d}\Big)f(\tau,z)\Big|Im(\tau)^{k/2}\\
&= \Big|e^{mC}\Big(\frac{c(p\tau+q)^2+(pd-qc)(p\tau+q)}{c\tau+d}\Big)f(\tau,z)\Big|Im(\tau)^{k/2}\\
&= \Big|e^{mC}\Big(\frac{p^2\tau(c\tau+d)+pq(c\tau+d)}{c\tau+d}\Big)f(\tau,z)\Big|Im(\tau)^{k/2}\\
&= |e^{mC}(pz)f(\tau,z)|Im(\tau)^{k/2}=g(\tau,z). \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Por otro lado, para cada $\gamma = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (\lambda, \mu), \zeta\right] \in \Gamma_0(M) \ltimes (T \cdot \langle \zeta_B \rangle)$

$$g(\gamma(\tau, z)) = |f(\tau, z + \lambda\tau + \mu)e^{mC}(p''(z + \lambda\tau + \mu))|Im(\tau)^{k/2}$$

donde $p'' \in \mathbb{R}$ es tal que

$$z + \lambda\tau + \mu = p''\tau + q''.$$

Luego

$$g(\gamma(\tau, z)) = |(\zeta^{mC})^{-1} f(\tau, z)e^{mC}(-\lambda^2\tau - 2\lambda z - \lambda\mu)e^{mC}(p''(z + \lambda\tau + \mu))|Im(\tau)^{k/2}.$$

Ya que $p'' = p + \lambda$ obtenemos

$$\begin{aligned} g(\gamma(\tau, z)) &= |f(\tau, z)e^{mC}(-\lambda^2\tau - 2\lambda z - \lambda\mu)e^{mC}(p''(z + \lambda\tau + \mu))|Im(\tau)^{k/2} \\ &= |f(\tau, z)e^{mC}(-\lambda^2\tau - 2\lambda z - \lambda\mu + (p + \lambda)(z + \lambda\tau + \mu))|Im(\tau)^{k/2} \\ &= |f(\tau, z)e^{mC}(pz - \lambda z + p\lambda\tau + p\mu)|Im(\tau)^{k/2} \\ &= |f(\tau, z)e^{mC}(p^2\tau + pq - \lambda p\tau + \lambda q + p\lambda\tau)|Im(\tau)^{k/2} \\ &= |f(\tau, z)e^{mC}(pz)|Im(\tau)^{k/2} = g(\tau, z), \end{aligned}$$

donde hemos usado que $|e^z| = e^{Re(z)}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

En consecuencia, para cada $\gamma \in \Gamma_0(M) \ltimes (T \cdot \langle \zeta_B \rangle)$ hemos probado que $g(\gamma(\tau, z)) = g(\tau, z)$; es decir, podemos mirar a $g(\tau, z)$ como una función continua sobre $(\mathscr{H} \times \mathbb{C})/\Gamma_0(M) \ltimes (T \cdot \langle \zeta_B \rangle)$. Si a este cuociente le agregamos un número finito de puntos, las cúspides de $\Gamma_0(M)$, obtenemos un espacio topológico compacto. En lo que sigue verificamos que la función $g(\tau, z)$ es acotada en una vecindad de cada una de estas cúpides.

Sea s una cúspide de $\Gamma_0(M)$ y sea ρ un elemento de $SL_2(\mathbb{Q})$ tal que $\rho(s) = \infty$.

En cada cúspide s, por (2.20), $f(\tau, z)$ tiene un desarrollo de Fourier de la forma

$$f|_{k,mC}[\rho^{-1}, (0,0), 1](\tau, z) = \sum_{\substack{n,r \in \mathbb{Z} \\ 4mCh_\rho n > r^2}} c_\rho(n,r) q_\tau^{n/h_\rho} q_z^{r/h_\rho}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
g(\rho^{-1}(\tau, z)) &= |f|_{k,mC}[\rho^{-1}, (0,0), 1](\tau, z) e^{mC}(pz)| Im(\tau)^{k/2} \\
&= \Big| \sum_{\substack{n,r \in \mathbb{Z} \\ 4mCh_\rho n > r^2}} c_\rho(n,r) q_\tau^{n/h_\rho} q_z^{r/h_\rho} e^{mC}(pz) \Big| Im(\tau)^{k/2} \\
&= \Big| \sum_{r_0=0}^{2mCANh_\rho - 1} f_{\rho, r_0}(\tau) \Theta_{mCANh\rho, r_0}(AN\tau/h_\rho, z/h_\rho) e^{mC}(pz) \Big| Im(\tau)^{k/2} \\
&= \Big| \sum_{r_0=0}^{2mCANh_\rho - 1} f_{\rho, r_0}(\tau) \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r \equiv r_0 (2mCANh_\rho)}} q_\tau^{r^2/4mCh_\rho^2} q_z^{r/h_\rho} e^{mC}(pz) \Big| Im(\tau)^{k/2} \\
&\leq y^{k/2} \sum_{r_0=0}^{2mCANh_\rho - 1} |f_{\rho, r_0}(\tau)| \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r \equiv r_0 (2mCANh_\rho)}} e\Big(\frac{r^2}{4mCh_\rho^2} iy\Big) e\Big(\frac{r}{h_\rho} piy\Big) e(mCp^2 iy) \\
&= y^{k/2} \sum_{r_0=0}^{2mCANh_\rho - 1} |f_{\rho, r_0}(\tau)| \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r \equiv r_0 (2mCANh_\rho)}} e\left(\frac{\left(r + 2mCh_\rho p\right)^2}{4mCh_\rho^2} iy\right)
\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}
g(\rho^{-1}(\tau, z)) &\leq y^{k/2} \sum_{r_0=0}^{2mCANh_\rho - 1} |f_{\rho, r_0}(\tau)| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(r + 2mCh_\rho p)^2 \pi y / 2mCh_\rho^2} dr \\
&\leq y^{(k-1)/2} \Big(\frac{2mCh_\rho^2}{\pi}\Big)^{1/2} \sum_{r_0=0}^{2mCANh_\rho - 1} |f_{\rho, r_0}(\tau)| \\
&\leq y^{(k-1)/2} \Big(\frac{2mCh_\rho^2}{\pi}\Big)^{1/2} e^{-\pi y / 2mCh_\rho^2} \sum_{r_0=0}^{2mCANh_\rho - 1} \sum_{D=1}^{\infty} |c_{\rho, r_0}(D)| e^{-(D-1)\pi y / 2mCh_\rho^2},
\end{aligned}$$

que tiende a 0 cuando $y \to \infty$. O sea, $g(\rho^{-1}(\tau, z)) \to 0$. Luego $g(\tau, z)$ es acotada en una vecindad de s.

Por otro lado, en el infinito $f(\tau, z)$ tiene un desarrollo de la forma

$$f(\tau, z) = \sum_{r_0=0}^{2mAt-1} f_{r_0}(\tau) \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ r\equiv r_0(2mAt)}} q_{B\tau}^{r^2/4mt} q_{Bz}^{r}.$$

Entonces, como se vio en la demostración del lema anterior

$$|f(\tau, z)e^m(pBtz)| \leq \left(\frac{2mt}{By}\right)^{1/2} \sum_{r_0=0}^{2mAt-1} |f_{r_0}(\tau)|.$$

Por lo tanto

$$|f(\tau, z)e^m(pBtz)y^{k/2}| \leq Ky^{(k-1)/2} \sum_{r_0=0}^{2mAt-1} |f_{r_0}(\tau)| \quad \text{donde } K = \left(\frac{2mt}{B}\right)^{1/2}.$$

Como también vimos que

$$|f_{r_0}(\tau)| \leq \sum_{D=1}^{\infty} |c_{r_0}(D)|e^{-\pi Dy/2mt} = e^{-\pi y/2mt}\Big(\sum_{D=1}^{\infty} |c_{r_0}(D)|e^{-\pi(D-1)y/2mt}\Big),$$

podemos concluir

$$|f(\tau, z)e^m(pBtz)y^{k/2}| \leq K\frac{y^{(k-1)/2}}{e^{\pi y/2mt}} \sum_{r_0=0}^{2mAt-1} \Big(\sum_{D=1}^{\infty} |c_{r_0}(D)|e^{-\pi(D-1)y/2mt}\Big).$$

Claramente la expresión a la derecha de esta desigualdad tiende a 0 cuando $y \to \infty$. Esto muestra que la función $f(\tau, z)e^m(pBtz)y^{k/2}$ es acotada en una vecindad de la cúspide infinito.

En resumen, hemos probado que $g(\tau, z)$ define una función continua sobre $(\mathscr{H} \times \mathbb{C})/\Gamma_0(M) \ltimes (T \cdot \langle\zeta_B\rangle)$ y que es acotada en una vecindad de cada punto de compactificación de este cuociente.

Por lo tanto, $g(\tau, z)$ es una función continua sobre un compacto. Esto prueba el lema.

■

Proposición 1 Sea $f(\tau,z) \in J^{cusp}_{k,mC,\chi}(\Gamma_0(M) \ltimes (T \cdot \langle \zeta_B \rangle))$. Entonces existe un número real positivo E tal que $|c_{r_0}(D)| \leq ED^{k/2}$, donde $D = 4mnt - r^2 B$.

Demostración: Por el lema anterior, existe una constante $M > 0$ tal que

$$|f(\tau,z)e^m(pBtz)Im(\tau)^{k/2}| = |f(\tau,z)| y^{k/2} e^{-2\pi mBtp^2 y} \leq M.$$

Por otro lado, podemos determinar los coeficientes de la serie de Fourier de $f(\tau,z)$ mediante

$$c(n,r) = \int_0^1 \int_0^{1/B} f(\tau,z) e^{-2\pi in\tau} e^{-2\pi irBz} dx d\xi,$$

donde $\tau = x + iy$, $z = p\tau + q = \xi + i\eta$. Así

$$\begin{aligned} |c(n,r)| &\leq \int_0^1 \int_0^{1/B} M e^{2\pi ny} e^{2\pi rBpy} e^{2\pi mBtp^2 y} y^{-k/2} dx d\xi \\ &= \int_0^1 \int_0^{1/B} M e^{2\pi mBty\left((p+r/2mt)^2 + D/4m^2t^2B\right)} y^{-k/2} dx d\xi \\ &\leq \frac{M}{B} y^{-k/2} e^{2\pi mBty\left((p+r/2mt)^2 + D/4m^2t^2B\right)}. \end{aligned}$$

En particular, tomando $y = 1/D, p = -r/2mt$ obtenemos

$$|c(n,r)| \leq M' D^{k/2} e^{\pi/2mt}.$$

■

Capítulo 4

Formas de Jacobi torcidas y el operador de tipo Fricke

En este capítulo introduciremos dos ideas centrales para obtener los resultados principales de esta tesis: la torcedura de una forma de Jacobi por un caracter primitivo de Dirichlet y la acción de un operador "de tipo Fricke"sobre estas funciones. Además, estudiaremos el efecto de este operador sobre tales formas torcidas y algunas propiedades de ambos conceptos.

La idea de torcer por un caracter de Dirichlet fue utilizada por Weil en [10] para probar su teorema converso en el contexto de las formas modulares elípticas, pero en el ámbito de las formas de Jacobi ha sido poco utilizada. El operador de tipo Fricke se encuentra definido en el trabajo de Eichler y Zagier dado en [3], p.41, pero ha sido muy poco estudiado en la literatura de las formas de Jacobi.

4.1. Acción de un operador sobre una forma de Jacobi

Definición 5 Definimos el operador U_l, $(l \in \mathbb{R}^+)$ sobre funciones $\phi : \mathscr{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mediante

$$(U_l\phi)(\tau, z) = \phi(\tau, lz)$$

El operador U_l es una función que envía $J_{k,m}$ a J_{k,ml^2} (ver demostración en [3], p.41). Notar que tal operador altera el índice de la forma de Jacobi sobre la cual se aplica.

Definición 6 Sea $W_{\sqrt{N}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{N}} \\ \sqrt{N} & 0 \end{pmatrix}$, $N \in \mathbb{R}$. Notar que $W_{\sqrt{N}} \in SL_2(\mathbb{R})$.

Ahora, consideremos $f \in J_{k,m,\chi}(\Gamma_0(N)^J)$. Entonces

$$f|_{k,m}[W_{\sqrt{N}}, (0,0), 1](\tau, z) = (\sqrt{N}\tau)^{-k} e^m\Big(-\frac{z^2}{\tau}\Big) f\Big(-\frac{1}{N\tau}, \frac{z}{\sqrt{N}\tau}\Big).$$

Luego

$$U_{\sqrt{N}}\big(f|_{k,m}[W_{\sqrt{N}}, (0,0), 1]\big)(\tau, z) = (\sqrt{N}\tau)^{-k} e^{mN}\Big(-\frac{z^2}{\tau}\Big) f\Big(-\frac{1}{N\tau}, \frac{z}{\tau}\Big).$$

Esto inspira la siguiente definición:

Definición 7 Para cualquier $f(\tau, z) \in J_{k,mC,\chi}(\Gamma_0(M) \ltimes (T \cdot \langle \zeta_B \rangle))$ sea

$$f|_{k,m}[\widetilde{W}_M](\tau, z) := U_{\sqrt{M}}\big(f|_{k,m}[W_{\sqrt{M}}, (0,0), 1]\big)(\tau, z).$$

Diremos que $|_{k,m}[\widetilde{W}_M]$ es un operador de tipo Fricke. Note que M corresponde al nivel del subgrupo de congruencia $\Gamma_0(M)$.

Proposición 2 Sea $f(\tau, z) \in J_{k,m,\chi}(\Gamma_0(N)^J)$ y $g(\tau, z) := f|_{k,m}[\widetilde{W}_N](\tau, z)$. Entonces

$$g(\tau, z) \in J_{k,mN,\overline{\chi}}\Big(\Gamma_0(N) \ltimes \Big((\mathbb{Z} \times \frac{1}{N}\mathbb{Z}) \cdot \langle \zeta_N \rangle \Big)\Big).$$

Este resultado es una caso particular de la proposición 4 cuando en esta última ψ es el caracter trivial y $\alpha = 1$, como se probará en la página 28. Por lo tanto omitiremos su demostración.

4.2. Formas de Jacobi torcidas por un caracter de Dirichlet

Definición 8 Consideremos la serie de Fourier $f(\tau, z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\ 4mn\geq r^2}} c(n,r)q_\tau^n q_z^r$ y un caracter de Dirichlet ψ. Definimos

$$f_\psi(\tau, z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\ 4mn\geq r^2}} \psi(n)c(n,r)q_\tau^n q_z^r \tag{4.1}$$

y diremos que ésta es la serie f torcida por ψ.

Para uso posterior necesitamos introducir la matriz

$$\theta(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Claramente $\theta(x) \in SL_2(\mathbb{R})$.

Lema 4 Sea $f(\tau, z)$ una función holomorfa sobre $\mathscr{H} \times \mathbb{C}$ con representación de Fourier

$$f(\tau, z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\ 4mn\geq r^2}} c(n,r)q_\tau^n q_z^r$$

y ψ un caracter primitivo de Dirichlet de conductor α. Entonces, para cualquier k, m enteros positivos tenemos que

$$f_\psi = \mathscr{G}_{\overline{\psi}}^{-1} \sum_{u=1}^{\alpha} \overline{\psi}(u) f|_{k,m}\Big[\theta\Big(\frac{u}{\alpha}\Big), (0,0), 1\Big],$$

donde $\mathscr{G}_{\overline{\psi}}$ es la suma de Gauss de $\overline{\psi}$.

Demostración: Si aplicamos $\left[\theta\left(\frac{u}{\alpha}\right),(0,0),1\right]$ a $f(\tau,z)$, obtenemos

$$f|_{k,m}\left[\theta\left(\frac{u}{\alpha}\right),(0,0),1\right](\tau,z)=f\left(\tau+\frac{u}{\alpha},z\right)=\sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\4mn\geq r^2}}c(n,r)e(nu/\alpha)q_\tau^n q_z^r.$$

Así

$$\begin{aligned}\sum_{u=1}^{\alpha}\overline{\psi}(u)f|_{k,m}\left[\theta\left(\frac{u}{\alpha}\right),(0,0),1\right](\tau,z) &= \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\4mn\geq r^2}}c(n,r)\Big(\underbrace{\sum_{u=1}^{\alpha}\overline{\psi}(u)e(nu/\alpha)}_{\psi(n)\mathscr{G}_{\overline{\psi}}}\Big)q_\tau^n q_z^r\\ &= \mathscr{G}_{\overline{\psi}}f_\psi(\tau,z).\end{aligned}$$

■

Lema 5 Sea $f(\tau,z)\in J_{k,m,\chi}(\Gamma_0(N)^J)$ y ψ un caracter primitivo de Dirichlet de conductor α. Entonces $f_\psi(\tau,z)\in J_{k,m,\chi\psi^2}(\Gamma_0(N\alpha^2)\ltimes((\alpha\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\cdot\langle 1\rangle))$. Además si f es cuspidal entonces f_ψ también lo es.

Demostración: Debemos verificar que $f_\psi(\tau,z)$ cumple las condiciones que definen a una forma de Jacobi.

La holomorficidad de $f_\psi(\tau,z)$ sobre $\mathscr{H}\times\mathbb{C}$ es clara a partir del lema anterior, ya que ésta se escribe como una suma finita de funciones holomorfas $f|_{k,m}[\theta(u/\alpha),(0,0),1](\tau,z)$ (la matriz $\theta(u/\alpha)$ no altera la holomorficidad de f pues solamente traslada la variable τ).

Ahora probamos que $f_\psi|_{k,m}[\gamma,(\lambda,\mu),1]=(\chi\psi^2)(\gamma)f_\psi$ para cada $\gamma\in\Gamma_0(N\alpha^2)$, $(\lambda,\mu)\in\alpha\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Dado $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ cN\alpha^2 & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N\alpha^2)$ definamos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma} &= \theta\Big(\frac{u}{\alpha}\Big)\gamma\theta\Big(\frac{d^2u}{\alpha}\Big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ cN\alpha^2 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -d^2\frac{u}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a + uc\frac{N\alpha^2}{\alpha} & b + du\frac{(1-ad)}{\alpha} - cd^2u^2\frac{N\alpha^2}{\alpha^2} \\ cN\alpha^2 & d - ucd^2\frac{N\alpha^2}{\alpha} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Notar que $\widetilde{\gamma}$ es una matriz con coeficientes enteros pues $ad \equiv 1 \pmod{N\alpha^2}$. Luego $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_0(N\alpha^2)$.

Escribiendo $\widetilde{\gamma} = \begin{pmatrix} \widetilde{a} & \widetilde{b} \\ \widetilde{c} & \widetilde{d} \end{pmatrix}$, tenemos que

$$\widetilde{d} = d - cd^2u\frac{N\alpha^2}{\alpha} \equiv d \pmod{\alpha}.$$

Por lo tanto, usando que $f(\tau, z) \in J_{k,m,\chi}(\Gamma_0(N)^J)$ y recordando que λ es múltiplo de α podemos concluir

$$\begin{aligned}
f|_{k,m}\Big[\theta\Big(\frac{u}{\alpha}\Big), (0,0), 1\Big]|_{k,m}[\gamma, (\lambda,\mu), 1] &= f|_{k,m}\Big[\theta\Big(\frac{u}{\alpha}\Big)\gamma, (\lambda,\mu), 1\Big] \\
&= f|_{k,m}\Big[\widetilde{\gamma}\theta\Big(\frac{d^2u}{\alpha}\Big), (\lambda,\mu), 1\Big] \\
&= f|_{k,m}\Big[\widetilde{\gamma}, \Big(\lambda, \mu - d^2u\frac{\lambda}{\alpha}\Big), 1\Big]|_{k,m}\Big[\theta\Big(\frac{d^2u}{\alpha}\Big), (0,0), 1\Big] \\
&= \chi(\widetilde{d})f|_{k,m}\Big[\theta\Big(\frac{d^2u}{\alpha}\Big), (0,0), 1\Big] \\
&= \chi(d)f|_{k,m}\Big[\theta\Big(\frac{d^2u}{\alpha}\Big), (0,0), 1\Big].
\end{aligned}$$

De esto y el lema 4 se sigue que

$$\begin{aligned} f_\psi|_{k,m}[\gamma,(\lambda,\mu),1] &= \mathscr{G}_{\overline{\psi}}^{-1}\sum_{u=1}^{\alpha}\overline{\psi}(u)f|_{k,m}\Big[\theta\Big(\frac{u}{\alpha}\Big),(0,0),1\Big]|_{k,m}[\gamma,(\lambda,\mu),1] \\ &= \mathscr{G}_{\overline{\psi}}^{-1}\sum_{u=1}^{\alpha}\overline{\psi}(u)\chi(d)f|_{k,m}\Big[\theta\Big(\frac{d^2u}{\alpha}\Big),(0,0),1\Big]. \end{aligned}$$

En esta última expresión hacemos $v = d^2u$ y notamos que cuando u recorre un sistema completo de residuos (mod α), entonces v también (ya que $(d^2,\alpha)=1$). Luego, por el lema anterior

$$\begin{aligned} f_\psi|_{k,m}[\gamma,(\lambda,\mu),1] &= \mathscr{G}_{\overline{\psi}}^{-1}\sum_{v=1}^{\alpha}\overline{\psi}(v)\overline{\psi}(d^{-2})\chi(d)f|_{k,m}\Big[\theta\Big(\frac{v}{\alpha}\Big),(0,0),1\Big] \\ &= \psi^2(d)\chi(d)\mathscr{G}_{\overline{\psi}}^{-1}\sum_{v=1}^{\alpha}\overline{\psi}(v)f|_{k,m}\Big[\theta\Big(\frac{v}{\alpha}\Big),(0,0),1\Big] \\ &= \chi(d)\psi^2(d)\mathscr{G}_{\overline{\psi}}^{-1}\mathscr{G}_{\overline{\psi}}f_\psi \\ &= \chi\psi^2(\gamma)f_\psi \end{aligned}$$

Para probar la holomorficidad de $f_\psi(\tau,z)$ en las cúspides $s\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$, tomamos cualquier $\rho^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Q})$ con $\rho(s)=\infty$.

Es fácil verificar que $\theta\Big(\dfrac{u}{\alpha}\Big)\rho^{-1}\in SL_2(\mathbb{Q})$ para cada $1\le u\le\alpha$. Entonces

$$\begin{aligned} f_\psi|_{k,m}[\rho^{-1},(0,0),1](\tau,z) &= \Big(\mathscr{G}_{\overline{\psi}}^{-1}\sum_{u=1}^{\alpha}\overline{\psi}(u)\Big(f|_{k,m}\Big[\theta\Big(\frac{u}{\alpha}\Big),(0,0),1\Big]\Big)\Big)\Big|_{k,m}[\rho^{-1},(0,0),1](\tau,z) \\ &= \mathscr{G}_{\overline{\psi}}^{-1}\sum_{u=1}^{\alpha}\overline{\psi}(u)\Big(f|_{k,m}\Big[\theta\Big(\frac{u}{\alpha}\Big),(0,0),1\Big]|_{k,m}[\rho^{-1},(0,0),1]\Big) \\ &= \mathscr{G}_{\overline{\psi}}^{-1}\sum_{u=1}^{\alpha}\overline{\psi}(u)\Big(f|_{k,m}\Big[\theta\Big(\frac{u}{\alpha}\Big)\rho^{-1},(0,0),1\Big]\Big). \end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos que para cada matriz $\theta(u/\alpha)\rho^{-1}\in SL_2(\mathbb{Q})$, la función $f|_{k,m}[\theta(u/\alpha)\rho^{-1},(0,0),1]$

tiene una expansión en serie de Fourier del tipo (2.20), luego

$$f_\psi|_{k,m}[\rho^{-1},(0,0),1](\tau,z) = \mathscr{G}_{\overline{\psi}}^{-1}\sum_{u=1}^{\alpha}\overline{\psi}(u)\Big(\sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\ 4mChn\geq r^2}} c_{u,\rho}(n,r)q_\tau^{n/h}q_z^{r/h}\Big)$$

donde $h = h_{u,\rho}$. Esto muestra que $f_\psi|_{k,m}[\rho^{-1},(0,0),1](\tau,z)$ tiene una representación de Fourier del tipo deseado.

Un argumento análogo se puede aplicar a formas cuspidales.

■

Proposición 3 Sea $f(\tau,z)\in J_{k,m,\chi}(\Gamma_0(N)^J)$ y $g(\tau,z) = f|_{k,m}[\widetilde{W}_N](\tau,z)$. Sea ψ un caracter primitivo de Dirichlet de conductor α con $(\alpha,N)=1$. Entonces

$$f_\psi|_{k,m}[\widetilde{W}_{N\alpha^2}](\tau,z) = C_\psi g_{\overline{\psi}}(\tau,\alpha z)$$

con $C_\psi = \chi(\alpha)\psi(-N)\dfrac{\mathscr{G}_\psi}{\mathscr{G}_{\overline{\psi}}}$, donde $\mathscr{G}_\psi$ y $\mathscr{G}_{\overline{\psi}}$ corresponden a la suma de Gauss de ψ y $\overline{\psi}$, respectivamente.

Demostración: Para cada $u\in\mathbb{Z}$ con $(u,\alpha)=1$, existen $x,y\in\mathbb{Z}$ tal que $x\alpha - Nyu = 1$ (recordar que $(\alpha,N)=1$ por hipótesis). Entonces

$$\theta\Big(\frac{u}{\alpha}\Big)W_{\sqrt{N\alpha^2}} = \begin{pmatrix} x & u \\ yN & \alpha\end{pmatrix} W_{\sqrt{N}}\theta\Big(\frac{y}{\alpha}\Big) \tag{4.2}$$

ya que

$$\theta\Big(\frac{u}{\alpha}\Big)W_{\sqrt{N\alpha^2}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{\alpha} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{N\alpha^2}} \\ \sqrt{N\alpha^2} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\sqrt{N} & -\frac{1}{\sqrt{N\alpha^2}} \\ \sqrt{N\alpha^2} & 0\end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} x & u \\ yN & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{N}} \\ \sqrt{N} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{y}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & u \\ yN & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{N}} \\ \sqrt{N} & \frac{y\sqrt{N}}{\alpha} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u\sqrt{N} & -\frac{1}{\sqrt{N}\alpha} \\ \sqrt{N}\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} U_{\sqrt{N\alpha^2}} & \Big(\quad f|_{k,m}\Big[\theta\Big(\frac{u}{\alpha}\Big)W_{\sqrt{N\alpha^2}},(0,0),1\Big]\Big)(\tau,z) \\ &= U_{\sqrt{N\alpha^2}}\Big(f|_{k,m}\Big[\begin{pmatrix} x & u \\ yN & \alpha \end{pmatrix} W_{\sqrt{N}}\theta\Big(\frac{y}{\alpha}\Big),(0,0),1\Big]\Big)(\tau,z) \\ &= U_{\sqrt{N\alpha^2}}\Bigg(\Big(f|_{k,m}\Big[\begin{pmatrix} x & u \\ yN & \alpha \end{pmatrix},(0,0),1\Big]|_{k,m}\Big[W_{\sqrt{N}},(0,0),1\Big]\Big)|_{k,m}\Big[\theta\Big(\frac{y}{\alpha}\Big),(0,0),1\Big]\Bigg)(\tau,z). \end{aligned}$$

Como $\begin{pmatrix} x & u \\ yN & \alpha \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ y $f(\tau,z)$ no cambia bajo $\Gamma_0(N)$, salvo un factor $\chi(\alpha)$, entonces

$$\begin{aligned} U_{\sqrt{N\alpha^2}} & \Big(\quad f|_{k,m}\Big[\theta\Big(\frac{u}{\alpha}\Big)W_{\sqrt{N\alpha^2}},(0,0),1\Big]\Big)(\tau,z) \\ &= \chi(\alpha)U_{\sqrt{N\alpha^2}}\Big(f|_{k,m}[W_{\sqrt{N}},(0,0),1]|_{k,m}\Big[\theta\Big(\frac{y}{\alpha}\Big),(0,0),1\Big]\Big)(\tau,z). \end{aligned}$$

Ya que el operador U_l actúa sobre la variable z, la matriz $\theta\Big(\dfrac{u}{\alpha}\Big)$ traslada solamente a la variable τ y U_l conmuta con $\Big[\theta\Big(\dfrac{u}{\alpha}\Big),(0,0),1\Big]$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
U_{\sqrt{N\alpha^2}} & \left(f|_{k,m}\left[\theta\left(\frac{u}{\alpha}\right)W_{\sqrt{N\alpha^2}},(0,0),1\right]\right)(\tau,z) \\
&= \chi(\alpha)U_\alpha U_{\sqrt{N}}\left(f|_{k,m}[W_{\sqrt{N}},(0,0),1]\right)|_{k,m}\left[\theta\left(\frac{y}{\alpha}\right),(0,0),1\right](\tau,z) \\
&= \chi(\alpha)g|_{k,m}\left[\theta\left(\frac{y}{\alpha}\right),(0,0),1\right](\tau,\alpha z).
\end{aligned}
$$

En el último paso hemos usado la hipótesis $g = f|_{k,m}[\widetilde{W}_N]$.

Aplicando ahora el lema 4, la igualdad anterior y que $-uNy \equiv 1 \pmod{\alpha}$, con lo cual $(u,y)=1$; es decir, cada vez que u recorre un sistema completo de residuos (mod α) entonces y también, tenemos que

$$
\begin{aligned}
f_\psi|_{k,m}[\widetilde{W}_{N\alpha^2}](\tau,z) &= U_{\sqrt{N\alpha^2}}\left(f_\psi|_{k,m}[W_{\sqrt{N\alpha^2}},(0,0),1]\right)(\tau,z) \\
&= \mathscr{G}_{\overline{\psi}}^{-1}\sum_{u=1}^{\alpha}\overline{\psi}(u)U_{\sqrt{N\alpha^2}}\left(f|_{k,m}\left[\theta\left(\frac{u}{\alpha}\right)W_{\sqrt{N\alpha^2}},(0,0),1\right]\right)(\tau,z) \\
&= \chi(\alpha)\mathscr{G}_{\overline{\psi}}^{-1}\sum_{y=1}^{\alpha}\psi(-Ny)g|_{k,m}\left[\theta\left(\frac{y}{\alpha}\right),(0,0),1\right](\tau,\alpha z) \\
&= \chi(\alpha)\psi(-N)\mathscr{G}_{\overline{\psi}}^{-1}\sum_{y=1}^{\alpha}\psi(y)g|_{k,m}\left[\theta\left(\frac{y}{\alpha}\right),(0,0),1\right](\tau,\alpha z) \\
&= \chi(\alpha)\psi(-N)\mathscr{G}_{\overline{\psi}}^{-1}\mathscr{G}_\psi g_{\overline{\psi}}(\tau,\alpha z).
\end{aligned}
$$

■

Proposición 4 Sea $f(\tau,z)\in J_{k,m,\chi}(\Gamma_0(N)^J)$ y $g(\tau,z) = f|_{k,m}[\widetilde{W}_N](\tau,z)$. Entonces

$$
g_{\overline{\psi}}(\tau,\alpha z)\in J_{k,mN\alpha^2,\overline{\chi\psi^2}}\left(\Gamma_0(N\alpha^2)\ltimes\left(\left(\mathbb{Z}\times\frac{1}{N\alpha}\mathbb{Z}\right)\cdot\langle\zeta_{N\alpha}\rangle\right)\right).
$$

Demostración: Debemos verificar las tres condiciones que definen a una forma de Jacobi dadas en la sección 2.4 .

Sea $h(\tau,z) = f_\psi|_{k,m}[W_{\sqrt{N\alpha^2}},(0,0),1](\tau,z)$, es decir $\big(U_{\sqrt{N\alpha^2}}h\big)(\tau,z) = C_\psi g_{\overline{\psi}}(\tau,\alpha z)$. Como f_ψ es una función holomorfa sobre $\mathscr{H}\times\mathbb{C}$ y la acción de la matriz $W_{\sqrt{N\alpha^2}}$, bajo la operación $|_{k,m}$ no cambia la holomorficidad de f_ψ (ya que $f_\psi|_{k,m}[W_{\sqrt{N\alpha^2}},(0,0),1]$ corresponde a una composición de funciones holomorfas), entonces $h(\tau,z)$ también lo es. Además, el operador $U_{\sqrt{N\alpha^2}}$ no altera la holomorficidad de la función sobre la cual se está aplicando. Luego, por la proposición 3, se tiene que $g_{\overline{\psi}}(\tau,\alpha z)$ es holomorfa sobre $\mathscr{H}\times\mathbb{C}$.

Veamos ahora que $g_{\overline{\psi}}|_{k,mN\alpha^2}[\gamma,X,\zeta] = \overline{\chi\psi^2(\gamma)}g_{\overline{\psi}}$ para cada $\gamma\in\Gamma_0(N\alpha^2)$, $X\in\mathbb{Z}\times\frac{1}{N\alpha}\mathbb{Z}$ y $\zeta\in\langle\zeta_{N\alpha}\rangle$. Como $f_\psi\in J_{k,m,\chi\psi^2}(\Gamma_0(N\alpha^2)\ltimes(\alpha\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\cdot\langle 1\rangle)$ (por lema 5), se tiene que para cada $\begin{pmatrix} a & b\\ cN\alpha^2 & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N\alpha^2)$

$$f_\psi(\tau,z) = \chi\psi^2(d)^{-1}f_\psi|_{k,m}\Big[\begin{pmatrix} a & b\\ cN\alpha^2 & d\end{pmatrix},(0,0),1\Big](\tau,z).$$

Aplicando $|_{k,m}[W_{\sqrt{N\alpha^2}},(0,0),1]$ a ambos lados de esta igualdad tenemos

$$\begin{aligned}
h(\tau,z) &= \chi\psi^2(d)^{-1}f_\psi|_{k,m}\Big[\begin{pmatrix} a & b\\ cN\alpha^2 & d\end{pmatrix},(0,0),1\Big]\Big|_{k,m}\Big[\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{N\alpha^2}}\\ \sqrt{N\alpha^2} & 0\end{pmatrix},(0,0),1\Big](\tau,z)\\
&= \chi\psi^2(d)^{-1}f_\psi|_{k,m}\Big[\begin{pmatrix} b\sqrt{N\alpha^2} & -\frac{a}{\sqrt{N\alpha^2}}\\ d\sqrt{N\alpha^2} & -c\sqrt{N\alpha^2}\end{pmatrix},(0,0),1\Big](\tau,z)\\
&= \chi\psi^2(d)^{-1}f_\psi\Big|_{k,m}\Big[\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{N\alpha^2}}\\ \sqrt{N\alpha^2} & 0\end{pmatrix},(0,0),1\Big]\Big|_{k,m}\Big[\begin{pmatrix} d & -c\\ -bN\alpha^2 & a\end{pmatrix},(0,0),1\Big](\tau,z)\\
&= \chi\psi^2(d)^{-1}h\Big|_{k,m}\Big[\begin{pmatrix} d & -c\\ -bN\alpha^2 & a\end{pmatrix},(0,0),1\Big](\tau,z).
\end{aligned}$$

De esto se tiene que

$$h(\tau,z)=\chi\psi^2(d)^{-1}(-bN\alpha^2\tau+a)^{-k}e^m\Big(-\frac{-bN\alpha^2z^2}{-bN\alpha^2\tau+a}\Big)h\Big(\frac{d\tau-c}{-bN\alpha^2\tau+a},\frac{z}{-bN\alpha^2\tau+a}\Big).$$

Luego, como $ad\equiv 1 \pmod{N\alpha^2}$

$$h(\tau,\sqrt{N\alpha^2}z)=$$

$$=\overline{\chi\psi^2}(a)^{-1}(-bN\alpha^2\tau+a)^{-k}e^m\Big(-\frac{-bN\alpha^2(\sqrt{N\alpha^2}z)^2}{-bN\alpha^2\tau+a}\Big)h\Big(\frac{d\tau-c}{-bN\alpha^2\tau+a},\frac{\sqrt{N\alpha^2}z}{-bN\alpha^2\tau+a}\Big)$$

$$=\overline{\chi\psi^2}(a)^{-1}(-bN\alpha^2\tau+a)^{-k}e^{mN\alpha^2}\Big(-\frac{-bN\alpha^2z^2}{-bN\alpha^2\tau+a}\Big)(U_{\sqrt{N\alpha^2}}h)\Big(\frac{d\tau-c}{-bN\alpha^2\tau+a},\frac{z}{-bN\alpha^2\tau+a}\Big).$$

Es decir

$$(U_{\sqrt{N\alpha^2}}h)(\tau,z)=\overline{\chi\psi^2}(a)^{-1}\Big((U_{\sqrt{N\alpha^2}}h)|_{k,mN\alpha^2}\Big[\begin{pmatrix} d & -c\\ -bN\alpha^2 & a\end{pmatrix},(0,0),1\Big]\Big)(\tau,z)$$

para cada $\begin{pmatrix} d & -c\\ -bN\alpha^2 & a\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N\alpha^2)$. Esto muestra que

$$g_{\overline{\psi}}|_{k,mN\alpha^2}[\gamma,(0,0),1]=\overline{\chi\psi^2}(\gamma)g_{\overline{\psi}}\ \ ,\ \text{para todo}\ \ \gamma\in\Gamma_0(N\alpha^2).$$

Por otro lado, también tenemos que

$$f_\psi(\tau,z)=f_\psi|_{k,m}[Id,(\alpha\lambda,\mu),1](\tau,z)\ \ ,\ \text{para cada}\ \ (\alpha\lambda,\mu)\in\alpha\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}.$$

Si aplicamos $[W_{\sqrt{N\alpha^2}}, (0,0), 1]$ a ambos lados de esta igualdad tenemos

$$\begin{aligned}
h(\tau,z) &= f_\psi|_{k,m}[Id,(\alpha\lambda,\mu),1]\Big|_{k,m}\Big[\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{N\alpha^2}} \\ \sqrt{N\alpha^2} & 0\end{pmatrix},(0,0),1\Big](\tau,z)\\
&= f_\psi|_{k,m}\Big[\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{N\alpha^2}} \\ \sqrt{N\alpha^2} & 0\end{pmatrix},(\alpha\lambda,\mu)\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{N\alpha^2}} \\ \sqrt{N\alpha^2} & 0\end{pmatrix},1\Big](\tau,z)\\
&= f_\psi|_{k,m}\Big[\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{N\alpha^2}} \\ \sqrt{N\alpha^2} & 0\end{pmatrix},\Big(\mu\sqrt{N\alpha^2},-\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\Big),1\Big](\tau,z)\\
&= f_\psi\Big|_{k,m}\Big[\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{N\alpha^2}} \\ \sqrt{N\alpha^2} & 0\end{pmatrix},(0,0),1\Big]\Big|_{k,m}\Big[Id,\Big(\mu\sqrt{N\alpha^2},-\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\Big),1\Big](\tau,z)\\
&= h\Big|_{k,m}\Big[Id,\Big(\mu\sqrt{N\alpha^2},-\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\Big),1\Big](\tau,z).
\end{aligned}$$

De esto se tiene que

$$\begin{aligned}
h(\tau,z) &= e^m\Big((\mu\sqrt{N\alpha^2})^2\tau+2\mu\sqrt{N\alpha^2}z-\mu\lambda\alpha\Big)h\Big(\tau,z+\mu\sqrt{N\alpha^2}\tau-\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\Big)\\
&= e^m\Big((\mu\sqrt{N\alpha^2})^2\tau+2\mu\sqrt{N\alpha^2}z\Big)h\Big(\tau,z+\mu\sqrt{N\alpha^2}\tau-\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\Big).
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
h(\tau,\sqrt{N\alpha^2}z) &= e^m(\mu^2N\alpha^2\tau+2\mu N\alpha^2 z)h\Big(\tau,\sqrt{N\alpha^2}z+\mu\sqrt{N\alpha^2}\tau-\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\Big)\\
&= e^{mN\alpha^2}(\mu^2\tau+2\mu z)h\Big(\tau,\sqrt{N\alpha^2}\Big(z+\mu\tau-\frac{\lambda}{N\alpha}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Poniendo $\lambda'=\mu$ y $\mu'=-\lambda/N\alpha$ tendremos

$$\begin{aligned} h(\tau, \sqrt{N\alpha^2}z) &= e^{mN\alpha^2}((\lambda')^2\tau + 2\lambda' z)h(\tau, \sqrt{N\alpha^2}(z + \lambda'\tau + \mu')) \\ &= \zeta^{N\alpha^2} e^{mN\alpha^2}((\lambda')^2\tau + 2\lambda' z + \lambda'\mu')\big(U_{\sqrt{N\alpha^2}}h\big)(\tau, z + \lambda'\tau + \mu'). \end{aligned}$$

Equivalentemente

$$\big(U_{\sqrt{N\alpha^2}}h\big)(\tau, z) = \big((U_{\sqrt{N\alpha^2}}h)|_{k,mN\alpha^2}[Id, (\lambda', \mu'), \zeta]\big)(\tau, z)$$

para cada $(\lambda', \mu') \in \mathbb{Z} \times \frac{1}{N\alpha}\mathbb{Z}$ y $\zeta \in \langle \zeta_{N\alpha} \rangle$. Por tanto

$$g_{\overline{\psi}}|_{k,mN\alpha^2}[Id, X, \zeta] = g_{\overline{\psi}} \ \text{, para todo } \ X \in \mathbb{Z} \times \frac{1}{N\alpha}\mathbb{Z}, \ \ \zeta \in \langle \zeta_{N\alpha} \rangle.$$

Nos falta probar la holomorficidad de $g_{\overline{\psi}}(\tau, \alpha z)$ en las cúspides s.

Sea $\rho^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Q})$ tal que $\rho^{-1}(\infty) = s$. Es fácil verificar que

$$\begin{aligned} \rho^{-1} &= W^{-1}_{\sqrt{N\alpha^2}} \begin{pmatrix} d & -c/N\alpha^2 \\ -bN\alpha^2 & a \end{pmatrix} W_{\sqrt{N\alpha^2}} \\ &= W^{-1}_{\sqrt{N\alpha^2}} \begin{pmatrix} d & -c/N\alpha^2 \\ -bN\alpha^2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{N\alpha^2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{N\alpha^2} \end{pmatrix} \\ &= W^{-1}_{\sqrt{N\alpha^2}} \begin{pmatrix} -c/N\alpha^2 & -d \\ a & bN\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{N\alpha^2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{N\alpha^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pongamos $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} -c/N\alpha^2 & -d \\ a & bN\alpha^2 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} \sqrt{N\alpha^2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{N\alpha^2} \end{pmatrix}$. Notar que $\sigma^{-1} \in SL_2(\mathbb{Q})$.

Entonces, la proposición 3 implica que

$$\begin{aligned} C_{\overline{\psi}} g_{\overline{\psi}}|_{k,mN\alpha^2}[\rho^{-1},(0,0),1](\tau,\alpha z) &= \Big(U_{\sqrt{N\alpha^2}}(f_\psi|_{k,m}[W_{\sqrt{N\alpha^2}},(0,0),1])\Big)\Big|_{k,mN\alpha^2}[\rho^{-1},(0,0),1](\tau,\alpha z) \\ &= U_{\sqrt{N\alpha^2}}\Big((f_\psi|_{k,m}[W_{\sqrt{N\alpha^2}},(0,0),1])\Big|_{k,m}[\rho^{-1},(0,0),1]\Big)(\tau,\alpha z) \\ &= U_{\sqrt{N\alpha^2}}(f_\psi|_{k,m}[W_{\sqrt{N\alpha^2}}\rho^{-1},(0,0),1])(\tau,\alpha z) \\ &= U_{\sqrt{N\alpha^2}}\Big((f_\psi|_{k,m}[\sigma^{-1},(0,0),1])|_{k,m}[M,(0,0),1]\Big)(\tau,\alpha z). \end{aligned}$$

Como $f_\psi(\tau,z) \in J_{k,m,\chi\psi^2}(\Gamma_0(N\alpha^2) \ltimes ((\alpha\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\cdot\langle 1\rangle))$ tenemos que $f_\psi|_{k,m}[\sigma^{-1},(0,0),1](\tau,z)$ tiene una expansión en serie de Fourier del tipo

$$f_\psi|_{k,m}[\sigma^{-1},(0,0),1](\tau,z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z} \\ 4mah_\sigma n \geq b^2r^2}} c_\sigma(n,r) q_\tau^{an/h_\sigma} q_z^{br/h_\sigma}.$$

Luego $g_{\overline{\psi}}|_{k,mN\alpha^2}[\rho^{-1},(0,0),1](\tau,\alpha z)$ tiene una expansión similar ya que la acción de $|_{k,m}[M,(0,0),1]$ y la acción de $U_{\sqrt{N\alpha^2}}$ no cambian el tipo de esta serie.

■

Nota La proposición 4 nos dice que

$$U_\alpha(g_{\overline{\psi}}(\tau,z)) \in J_{k,mN\alpha^2,\overline{\chi\psi^2}}\Big(\Gamma_0(N\alpha^2) \ltimes \Big((\mathbb{Z}\times\frac{1}{N\alpha}\mathbb{Z})\cdot\langle\zeta_{N\alpha}\rangle\Big)\Big).$$

De esto no es difícil obtener que

$$g_{\overline{\psi}}(\tau,z) \in J_{k,mN,\overline{\chi\psi^2}}\Big(\Gamma_0(N\alpha^2) \ltimes \Big((\alpha\mathbb{Z}\times\frac{1}{N}\mathbb{Z})\cdot\langle\zeta_N\rangle\Big)\Big).$$

Capítulo 5

Resultado principal

5.1. Series de Dirichlet asociadas a una forma cuspidal

Como hemos visto en la introducción, para poder pensar en un teorema converso para formas cuspidales sobre $\Gamma_0(M) \ltimes (T \cdot \langle \zeta_B \rangle)$ a la manera de Weil, debemos necesariamente definir series de Dirichlet y funciones L que estén asociadas a tales formas.

Definición 9 Sea $f(\tau, z) \in J^{cusp}_{k,m,\chi}(\Gamma_0(N)^J)$. En este caso $A = B = C = t = 1$ (ver definición 4), entonces el desarrollo de Fourier de $f(\tau, z)$ en el infinito tiene la descomposición en funciones Theta (2.13). A saber

$$f(\tau, z) = \sum_{r_0=0}^{2m-1} \left(\sum_{D=1}^{\infty} c_{r_0}(D) q_\tau^{D/4m} \right) \Theta_{m,r_0}(\tau, z).$$

Para tal $f(\tau, z)$ asociamos el sistema de $2m$ series de Dirichlet

$$L_{r_0}(f, s) = \sum_{D=1}^{\infty} \frac{c_{r_0}(D)}{D^s} \ , \ 0 \leq r_0 \leq 2m - 1. \tag{5.1}$$

A su vez, cada una de ellas se completa con ciertos factores exponenciales y factores gamma:

$$\Lambda_{r_0,N}(f,s) = (2m\sqrt{N})^{s-1/2}\pi^{-s}\Gamma(s)L_{r_0}(f,s). \tag{5.2}$$

Con el mismo proceso encontramos la función completada para $g(\tau, z)$.

Sea la forma cuspidal de Jacobi $f_\psi(\tau, z)$. Por el lema 5, $f_\psi(\tau, z) \in J_{k,m,\chi\psi^2}(\Gamma_0(N\alpha^2) \ltimes ((\alpha\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \cdot \langle 1 \rangle))$. En este caso $A = \alpha$, $B = C = t = 1$, luego el desarrollo de Fourier de $f_\psi(\tau, z)$ en el infinito tiene la descomposición en funciones Theta (2.13) dada por

$$f_\psi(\tau, z) = \sum_{r_0=0}^{2m\alpha-1} \left(\sum_{D=1}^{\infty} d_{r_0}(D) q_\tau^{D/4m} \right) \Theta_{m\alpha,r_0}(\alpha\tau, z).$$

Las $2m\alpha$ series de Dirichlet se definirán como en (5.1), pero las funciones completadas asociadas a cada una de ellas serán

$$\Lambda_{r_0,N\alpha^2}(f_\psi,s) = (2m\alpha\sqrt{N})^{s-1/2}\pi^{-s}\Gamma(s)L_{r_0}(f_\psi,s). \tag{5.3}$$

Con un proceso análogo encontramos la función completada para $g_{\overline{\psi}}(\tau, \alpha z)$.

Ya que $c_{r_0}(D) = O(D^{k/2})$ (ver proposición 1, p.23) entonces $L_{r_0}(f,s)$ y $L_{r_0}(f_\psi, s)$ convergen absoluta y uniformemente sobre cualquier subconjunto compacto del semiplano complejo $Re(s) > k/2 + 1$.

Esta definición extiende la dada por Martin en [8], p.187, ya que allí se trabaja sobre el grupo $\Gamma_0(1)^J$.

5.2. Hacia un teorema converso para formas cuspidales de Jacobi sobre $\Gamma_0(N)^J$

En esta sección establecemos el resultado principal de esta tesis. Como antes sean k, m, N enteros positivos, χ un caracter de Dirichlet módulo N y $f(\tau, z)$ una forma cuspidal de Jacobi en $J^{cusp}_{k,m,\chi}(\Gamma_0(N)^J)$ con representación de Fourier en el infinito

$$f(\tau, z) = \sum_{\substack{n,r \in \mathbb{Z} \\ 4mn \geq r^2}} c(n, r) q_\tau^n q_z^r$$

La siguiente proposición da una representación integral para las funciones Λ asociadas a $f(\tau, z)$ por medio de una transformación de Mellin generalizada.

Proposición 5 Sea $f(\tau, z) \in J^{cusp}_{k,m,\chi}(\Gamma_0(N)^J)$, entonces

$$\sum_{r_0=0}^{2m\alpha-1} e\Big(-\frac{ar_0}{2m\alpha}\Big)\Lambda_{r_0,N\alpha^2}(f_\psi, s) = \int_0^\infty \int_0^\alpha f_\psi\Big(\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}}, p\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}} - \frac{a}{2m\alpha}\Big)e^m\Big(p^2\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}}\Big)y^{s-1/2}dp\, dy$$

donde se ha usado la parametrización de $\mathscr{H} \times \mathbb{C}$ dada por $\tau = x + iy$, $z = p\tau + q$ con $x, y, p, q \in \mathbb{R}$.

Demostración: Sea

$$I_a = \int_0^\infty \int_0^\alpha f_\psi\Big(\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}}, p\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}} - \frac{a}{2m\alpha}\Big)e^m\Big(p^2\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}}\Big)y^{s-1/2}dp\, dy. \tag{5.4}$$

Usando el desarrollo en serie de Fourier de $f_\psi(\tau, z)$ tenemos que

$$f_\psi\Big(\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}}, p\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}} - \frac{a}{2m\alpha}\Big) = \sum_{\substack{n,r \in \mathbb{Z} \\ 4mn > r^2}} c(n, r)e\Big(n\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}}\Big)e\Big(pr\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}} - \frac{ar}{2m\alpha}\Big).$$

Por lo tanto

$$I_a = \int_0^\infty \int_0^\alpha \sum_{n,r} c(n,r) e\Big(\big(n+pr\big)\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}}\Big) e\Big(-\frac{ar}{2m\alpha}\Big) e^m\Big(p^2 \frac{iy}{\alpha\sqrt{N}}\Big) y^{s-1/2} dp\, dy.$$

Con el cambio de variable $\widetilde{p} = p/\alpha + r/2m\alpha$, la integral anterior queda de la siguiente forma

$$I_a =$$

$$= \alpha \int_0^\infty \sum_{n,r} c(n,r) e\Big(-\frac{ar}{2m\alpha}\Big) y^{s-1/2} \int_{r/2m\alpha}^{1+r/2m\alpha} e^m\Big(\Big(\frac{n}{m} + \frac{r}{m}\Big(\alpha\widetilde{p} - \frac{r}{2m}\Big) + \Big(\alpha\widetilde{p} - \frac{r}{2m}\Big)^2\Big)\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}}\Big) d\widetilde{p}\, dy$$

$$= \alpha \int_0^\infty \sum_{n,r} c(n,r) e\Big(-\frac{ar}{2m\alpha}\Big) y^{s-1/2} e^{miy}\Big(\frac{4mn - r^2}{4m^2\alpha\sqrt{N}}\Big) \int_{r/2m\alpha}^{1+r/2m\alpha} e^{miy}\Big(\alpha \frac{\widetilde{p}^2}{\sqrt{N}}\Big) d\widetilde{p}\, dy$$

En esta última igualdad agrupamos los términos según $c(n,r) = c(n + r\alpha\lambda + m\alpha\lambda^2, r + 2m\alpha\lambda)$, es decir los coeficientes $c(n,r)$ no cambian mediante pasos de ancho $2m\alpha$ en la dirección r a lo largo de la parábola $D = 4mn - r^2$ (ver argumento dado en la Observación 2, p.11, con $A = \alpha$ y $B = C = t = 1$). Si usamos la notación $c_r(D) = c(n,r)$ podemos escribir

$$I_a = \alpha \sum_{r_0=0}^{2m\alpha-1} e\Big(-\frac{ar_0}{2m\alpha}\Big) \sum_{D=1}^{\infty} c_{r_0}(D) \int_0^\infty e\Big(\frac{D}{4m\sqrt{N\alpha^2}} iy\Big) y^{s-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{miy}\Big(\frac{\widetilde{p}^2}{\sqrt{N/\alpha^2}}\Big) d\widetilde{p}\, dy.$$

El intercambio del signo integral y la sumatoria se justifica ya que (por el lema 2) $f_\psi(\tau,z)e^m(pz)$ es uniformemente acotada sobre conjuntos del tipo $\{(\tau,z) \in \mathscr{H} \times \mathbb{C} : y \geq y_0, |p| \leq R\}$ y tiene un decrecimiento exponencial cuando $y \to \infty$, por lo que la función $f_\psi(\tau,z)e^m(pz)y^{s-1/2}$ sigue siendo uniformemente acotada sobre este tipo de conjuntos y se anula cuando y tiende a infinito. Con todo esto se verifican las condiciones del teorema de convergencia acotada de Lebesgue, lo que nos permite el intercambio antes mencionado.

Usamos las fórmulas integrales usuales (con $a > 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(p+b)^2} dp = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}$$

y

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax} x^{s-1} dx = a^{-s}\Gamma(s), \quad Re(s) > 0\,,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
I_a &= \alpha \sum_{r_0=0}^{2m\alpha-1} e\Big(-\frac{ar_0}{2m\alpha}\Big) \sum_{D=1}^{\infty} c_{r_0}(D) \int_0^{\infty} \Big(\frac{2my}{\sqrt{N/\alpha^2}}\Big)^{-1/2} e\Big(\frac{D}{4m\sqrt{N\alpha^2}} iy\Big) y^{s-1/2} dy \\
&= \alpha\sqrt{N} \sum_{r_0=0}^{2m\alpha-1} e\Big(-\frac{ar_0}{2m\alpha}\Big) (2m\alpha\sqrt{N})^{s-1/2} \pi^{-s}\Gamma(s) \sum_{D=1}^{\infty} \frac{c_{r_0}(D)}{D^s} \\
&= \alpha\sqrt{N} \sum_{r_0=0}^{2m\alpha-1} e\Big(-\frac{ar_0}{2m\alpha}\Big) \Lambda_{r_0,N\alpha^2}(f_\psi, s) \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

si $Re(s) > 0$.

En consecuencia, de (5.4) y (5.5) se tiene la proposición.

■

Teorema 1 Sean m, k, N enteros positivos. Sea $f \in J_{k,m,\chi}^{cusp}(\Gamma_0(N)^J)$ y $g = f|_{k,m}[\widetilde{W}_N, (0,0), 1]$. Entonces para cualquier ψ caracter primitivo de Dirichlet de conductor α con $(\alpha, N) = 1$ se tiene que:

(i) Cada serie $\Lambda_{r_0,N\alpha^2}(f_\psi, s)$ y $\Lambda_{r_0,N\alpha^2}(g_{\overline{\psi}}, s)$ para $0 \leq r_0 \leq 2m\alpha - 1$ admite una extensión analítica a todo el plano complejo.

(ii) Estas funciones son acotadas sobre cualquier franja vertical.

(iii) Además, verifican el sistema de ecuaciones funcionales

$$\sum_{r_0=0}^{2m\alpha-1} e\Big(-\frac{ar_0}{2m\alpha}\Big)\Lambda_{r_0,N\alpha^2}(f_\psi,s)=\Big(\frac{2m\alpha}{\sqrt{N}}\Big)^{1/2} i^k C_\psi \Lambda_{a,N\alpha^2}\Big(g_{\overline{\psi}},k-s-\frac{1}{2}\Big),$$

para $a=0,1,\ldots,2m\alpha-1$, donde $C_\psi=\chi(\alpha)\psi(-N)\dfrac{\mathscr{G}_\psi}{\mathscr{G}_{\overline{\psi}}}$ y $\mathscr{G}_\psi,\mathscr{G}_{\overline{\psi}}$ son las sumas de Gauss asociadas a ψ y $\overline{\psi}$, respectivamente.

Demostración: Recordemos que $f_\psi\in J^{cusp}_{k,m,\chi\psi^2}(\Gamma_0(N\alpha^2)\ltimes(\alpha\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}))$ por el lema 5, p.26, y que

$$C_\psi g_{\overline{\psi}}(\tau,\alpha z)=(\sqrt{N\alpha^2}\tau)^{-k}e^{mN\alpha^2}\Big(-\frac{z^2}{\tau}\Big)f_\psi\Big(-\frac{1}{N\alpha^2\tau},\frac{z}{\tau}\Big) \tag{5.6}$$

por la proposición 3, p,28, y por (2.2).

Por otro lado, sabemos que $g_{\overline{\psi}}(\tau,\alpha z)\in J^{cusp}_{k,mN\alpha^2,\overline{\chi\psi^2}}\Big(\Gamma_0(N\alpha^2)\ltimes\Big((\mathbb{Z}\times\frac{1}{N\alpha}\mathbb{Z})\cdot\langle\zeta_{N\alpha}\rangle\Big)\Big)$; es decir $A=1$, $B=N\alpha$, $C=N\alpha^2$, $t=\alpha$. Luego el desarrollo de Fourier de $g_{\overline{\psi}}(\tau,\alpha z)$ en el infinito tiene la descomposición en serie de Fourier dada por (2.19)

$$g_{\overline{\psi}}(\tau,\alpha z)=\sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\ 4mn>r^2N}} d(n,r)q_\tau^n q_z^{rN\alpha}\ ,\ \text{con lo cual}\ \ g_{\overline{\psi}}(\tau,z)=\sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\ 4mn>r^2N}} d(n,r)q_\tau^n q_z^{rN}.$$

Ahora, tomemos $a\in\{0,1,\ldots,2m\alpha-1\}$ y consideremos nuevamente la integral

$$I_a=\int_0^\infty\int_0^\alpha f_\psi\Big(\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}},p\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}}-\frac{a}{2m\alpha}\Big)e^m\Big(p^2\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}}\Big)y^{s-1/2}dp\,dy$$

estudiada en la proposición anterior.

A continuación separamos I_a en dos partes $I_a = I'_a + I''_a$, donde

$$\begin{aligned} I'_a &= \int_0^1 \int_0^\alpha f_\psi\Big(\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}}, p\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}} - \frac{a}{2m\alpha}\Big) e^m\Big(p^2\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}}\Big) y^{s-1/2} dp\, dy, \\ I''_a &= \int_1^\infty \int_0^\alpha f_\psi\Big(\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}}, p\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}} - \frac{a}{2m\alpha}\Big) e^m\Big(p^2\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}}\Big) y^{s-1/2} dp\, dy. \end{aligned}$$

Por (3.1), $f(\tau, z)e^m(pz) = O(e(iy/4m))$ cuando $y \to \infty$, pues $0 \le p \le \alpha$. Por lo tanto

$$f_\psi\Big(\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}}, p\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}} - \frac{a}{2m}\Big) e^m\Big(p^2\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}}\Big) = O\Big(e\Big(\frac{iy}{4m\alpha\sqrt{N}}\Big)\Big).$$

Por otro lado, la integral

$$\int_1^\infty e\Big(\frac{iy}{4m\alpha\sqrt{N}}\Big) y^{\sigma-1/2} dy \ , \quad \sigma = Re(s)$$

es convergente. De esto se sigue que I''_a es absoluta y uniformemente convergente sobre cualquier franja vertical del plano s. Esto implica que I''_a define una función holomorfa de s sobre $\mathbb{C}$.

Si usamos la identidad (5.6) con $\tau = -\dfrac{1}{\alpha\sqrt{N}iy}$, $z = -\dfrac{p}{N\alpha^2} + \dfrac{a}{2m\alpha^2\sqrt{N}iy}$, obtenemos

$$\begin{aligned} f_\psi\Big(\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}}, p\frac{iy}{\alpha\sqrt{N}} - \frac{a}{2m\alpha}\Big) &= C_\psi\Big(\frac{-1}{iy}\Big)^k e^{mN\alpha^2}\Big(-p^2\frac{iy}{N\sqrt{N}\alpha^3} + p\frac{a}{mN\alpha^3} + \frac{a^2 i}{4m^2\alpha^3\sqrt{N}y}\Big) \\ &\times\ g_{\overline{\psi}}\Big(-\frac{1}{\alpha\sqrt{N}iy}, -\frac{p}{\alpha N} + \frac{a}{2m\alpha\sqrt{N}iy}\Big). \end{aligned}$$

Si utilizamos esta igualdad en I'_a y luego hacemos el cambio de variable $\widetilde{y} = y^{-1}$ podemos escribir

$$I'_a = i^k C_\psi \int_1^\infty \int_0^\alpha g_{\overline{\psi}}\Big(\frac{i\widetilde{y}}{\alpha\sqrt{N}}, -\frac{p}{\alpha N} - \frac{ai\widetilde{y}}{2m\alpha\sqrt{N}}\Big)\widetilde{y}^{k-3/2-s} e^{mN\alpha^2}\Big(\frac{ap}{m\alpha^3 N} + \frac{a^2 i\widetilde{y}}{4m^2\alpha^3\sqrt{N}}\Big) dp\, d\widetilde{y}. \quad (5.7)$$

Observamos que al denotar $\widetilde{p} = -a/2m$ se tiene

$$g_{\overline{\psi}}\Big(\frac{i\widetilde{y}}{\alpha\sqrt{N}}, -\frac{p}{\alpha N} - \frac{ai\widetilde{y}}{2m\alpha\sqrt{N}}\Big) e^{mN\alpha^2}\Big(\frac{ap}{m\alpha^3 N} + \frac{a^2 i\widetilde{y}}{4m^2\alpha^3\sqrt{N}}\Big) =$$

$$= g_{\overline{\psi}}\Big(\frac{i\widetilde{y}}{\alpha\sqrt{N}}, \widetilde{p}\frac{i\widetilde{y}}{\alpha\sqrt{N}} - \frac{p}{\alpha N}\Big)e^{mN}\Big(\frac{ap}{m\alpha N} + \widetilde{p}^2\frac{i\widetilde{y}}{\alpha\sqrt{N}}\Big)$$
$$= g_{\overline{\psi}}\Big(\frac{i\widetilde{y}}{\alpha\sqrt{N}}, \widetilde{p}\frac{i\widetilde{y}}{\alpha\sqrt{N}} - \frac{p}{\alpha N}\Big)e^{mN}\Big(\widetilde{p}\Big(\widetilde{p}\frac{i\widetilde{y}}{\alpha\sqrt{N}} - \frac{p}{\alpha N}\Big)\Big)e\Big(\frac{ap}{2\alpha}\Big)$$

Si aplicamos a esta última expresión la fórmula asintótica (3.1) y notamos que $e\Big(\frac{ap}{2\alpha}\Big)$ es acotado, concluimos que

$$g_{\overline{\psi}}\Big(\frac{i\widetilde{y}}{\alpha\sqrt{N}}, -\frac{p}{\alpha N} - \frac{ai\widetilde{y}}{2m\alpha\sqrt{N}}\Big)e^{mN\alpha^2}\Big(\frac{ap}{m\alpha^3 N} + \frac{a^2 i\widetilde{y}}{4m^2\alpha^3\sqrt{N}}\Big) = O\Big(e\Big(\frac{i\widetilde{y}}{4m\alpha\sqrt{N}}\Big)\Big)$$

cuando $y \to \infty$. Esto implica que la integral (5.7) es absoluta y uniformemente convergente sobre cualquier franja vertical del plano s y, por lo tanto, es una función holomorfa de s sobre $\mathbb{C}$.

En consecuencia, I_a es la suma de dos funciones enteras de s, acotadas sobre cualquier franja vertical. Esto prueba que I_a también satisface estas propiedades.

El mismo cambio de variable para I_a'' lleva a que

$$I_a'' = i^k C_\psi \int_0^1 \int_0^\alpha g_{\overline{\psi}}\Big(\frac{i\widetilde{y}}{\alpha\sqrt{N}}, -\frac{p}{\alpha N} - \frac{ai\widetilde{y}}{2m\alpha\sqrt{N}}\Big)\widetilde{y}^{k-3/2-s}e^m\Big(\frac{ap}{m\alpha} + \frac{a^2\sqrt{N}i\widetilde{y}}{4m^2\alpha}\Big)dp\, d\widetilde{y}.$$

Recordando el desarrollo en serie de Fourier de $g_{\overline{\psi}}(\tau, z)$ y su convergencia uniforme, obtenemos que

$$\begin{aligned}
I_a &= i^k C_\psi \int_0^\infty \int_0^\alpha g_{\overline{\psi}}\Big(\frac{i\widetilde{y}}{\alpha\sqrt{N}}, -\frac{p}{\alpha N} - \frac{ai\widetilde{y}}{2m\alpha\sqrt{N}}\Big)\widetilde{y}^{k-3/2-s}e^m\Big(\frac{ap}{m\alpha} + \frac{a^2\sqrt{N}i\widetilde{y}}{4m^2\alpha}\Big)dp\, d\widetilde{y} \\
&= i^k C_\psi \int_0^\infty \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z} \\ 4mn>r^2N}} d(n,r)e\Big(n\frac{i\widetilde{y}}{\alpha\sqrt{N}}\Big)e\Big(-\frac{a\sqrt{N}ri\widetilde{y}}{2m\alpha}\Big)e\Big(\frac{a^2\sqrt{N}i\widetilde{y}}{4m\alpha}\Big)\widetilde{y}^{k-s-3/2}\int_0^\alpha e\Big(\frac{p}{\alpha}(a-r)\Big)dp\, d\widetilde{y} \\
&= \alpha\, i^k C_\psi \int_0^\infty \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z} \\ 4mn>r^2N}} d(n,r)e\Big(\Big(\frac{4mn - a(2r-a)N}{4m\alpha\sqrt{N}}\Big)i\widetilde{y}\Big)\widetilde{y}^{k-s-3/2}\int_0^1 e(l(a-r))dld\widetilde{y}.
\end{aligned}$$

La integral interna es cero a menos que $r = a$ (ver definición (2.10) y su extensión), por tanto para $D = 4mn - a^2N$, $d_a(D) = d(n,a)$

$$\begin{aligned} I_a &= \alpha\, i^k C_\psi \sum_{D=1}^{\infty} d_a(D) \int_0^\infty e\Big(\frac{D}{4m\alpha\sqrt{N}} i\widetilde{y}\Big) \widetilde{y}^{k-s-3/2} d\widetilde{y} \\ &= \alpha\, i^k C_\psi (2m\alpha\sqrt{N})^{k-s-1/2} \pi^{-(k-s-1/2)} \Gamma\Big(k-s-\frac{1}{2}\Big) \sum_{D=1}^{\infty} \frac{d_a(D)}{D^{k-s-1/2}} \\ &= \alpha\, i^k C_\psi (2m\alpha\sqrt{N})^{1/2} \Lambda_{a,N\alpha^2}\Big(g_{\overline{\psi}}, k-s-\frac{1}{2}\Big), \text{ para } Re(s) < k-1/2. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Como I_a es una función entera de s y acotada sobre cualquier franja vertical, entonces por (5.8) se tiene que $\Lambda_{a,N\alpha^2}(g_{\overline{\psi}}, k-s-1/2)$ admite una extensión holomorfa de s sobre $\mathbb{C}$ donde cada una de ellas es acotada sobre franjas verticales, para cada $a = 0, 1, \ldots, 2m\alpha - 1$.

Tenemos por (5.5) que

$$I_a = \alpha\sqrt{N} \sum_{r_0=0}^{2m\alpha-1} e\Big(-\frac{ar_0}{2m\alpha}\Big) \Lambda_{r_0,N\alpha^2}(f_\psi, s).$$

Esta última igualdad junto con (5.8) prueba el sistema de ecuaciones funcionales.

Además

$$\begin{aligned} \sum_{a=0}^{2m\alpha-1} e\Big(\frac{ab}{2m\alpha}\Big) I_a &= \alpha\sqrt{N} \sum_{a=0}^{2m\alpha-1} e\Big(\frac{ab}{2m\alpha}\Big) \sum_{r_0=0}^{2m\alpha-1} e\Big(-\frac{ar_0}{2m\alpha}\Big) \Lambda_{r_0,N\alpha^2}(f_\psi, s) \\ &= \alpha\sqrt{N} \sum_{r_0=0}^{2m\alpha-1} \left(\sum_{a=0}^{2m\alpha-1} e\Big(\frac{a}{2m\alpha}(b-r_0)\Big) \right) \Lambda_{r_0,N\alpha^2}(f_\psi, s) \\ &= \alpha\sqrt{N}(2m\alpha) \Lambda_{b,N\alpha^2}(f_\psi, s)\,, \end{aligned}$$

ya que la suma interior es $2m\alpha$ si $r_0 = b$ y 0 si $r_0 \neq b$, para cada $b = 0, 1, \ldots, 2m\alpha - 1$. De aquí se sigue que $\Lambda_{b,N\alpha^2}(f_\psi, s)$ admite una extensión holomorfa de s sobre $\mathbb{C}$ y cada una de ellas es acotada sobre franjas verticales.

Finalmente, de (5.5), (5.8) y la holomorficidad de $\Lambda_{a,N\alpha^2}(f_\psi, s)$ y $\Lambda_{a,N\alpha^2}(g_{\overline{\psi}}, k-s-1/2)$ se tiene el teorema.

■

En particular, si tomamos ψ como el caracter trivial (por lo tanto $\alpha = 1$) en el teorema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1 Sean m, k, N enteros positivos. Sea $f \in J^{cusp}_{k,m,\chi}(\Gamma_0(N)^J)$ tal que

$$g(\tau, z) = (\sqrt{N}\tau)^{-k} e^{mN}\Big(-\frac{z^2}{\tau}\Big) f\Big(-\frac{1}{N\tau}, \frac{z}{\tau}\Big) \tag{5.9}$$

Entonces las series $\Lambda_{r_0,N}(f,s)$ y $\Lambda_{r_0,N}(g,s)$ para $0 \leq r_0 \leq 2m-1$ pueden ser extendidas analíticamente a todo el plano complejo. Estas funciones son acotadas sobre cualquier franja vertical y verifican el sistema de ecuaciones funcionales

$$\sum_{r_0=0}^{2m-1} e\Big(-\frac{ar_0}{2m}\Big)\Lambda_{r_0,N}(f,s) = \Big(\frac{2m}{\sqrt{N}}\Big)^{1/2} i^k \Lambda_{a,N}\Big(g, k-s-\frac{1}{2}\Big), \tag{5.10}$$

para $a = 0, 1, \ldots, 2m-1$.

Este resultado generaliza la proposición 4 del trabajo de Martin en [8], p.188, para cualquier entero positivo N.

Bibliografía

[1] Berndt, R. 1994. *L-functions for Jacobi forms a la Hecke*, Manuscripta Math. **84**: 101-112.

[2] Berndt, R. y Böcherer, S. 1990. *Jacobi Forms and Discrete Series Representations of the Jacobi Group*, Mathematische Zeitschrift. **204**: 13-44.

[3] Eichler, M. y Zagier, D. 1985. *The Theory of Jacobi Forms*. En "Prog. Math.", Vol. 55, Birkhäuser, Boston.

[4] Gelbart, S. y Miller, S. 2003. *Riemman's Zeta Function and Beyond*, Bulletin of the AMS. **41**, Number 1: 59-112.

[5] Gradshteyn, I.S. y Ryzhik, I.M. 2000. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 6° ed.

[6] Hecke, E. 1936. *Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung*, Math. Ann. **112**: 664-699.

[7] Iwaniec, H. 1997. *Topics in Classical Automorphic Forms*. En "Graduate Studies in Mathematics", Vol. 17, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

[8] Martin, Y. 1996. *A Converse Theorem for Jacobi Forms*, Journal of Number Theory. **61**: 181-193.

[9] Miyake, T. 1989. *Modular Forms*. Springer-Verlag, New York.

[10] Weil, A. 1967. *Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen*, Math. Ann. **168**: 149-156.