# Comportamiento Asintótico de las Soluciones de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden No Lineales

Tesis
entregada a la
Facultad de Ciencias
de la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de

Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas
Septiembre 2009



por

Daniel Sepúlveda Oehninger

Director de Tesis: Dr. Manuel Pinto

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**UNIVERSIDAD DE CHILE**

# INFORME DE APROBACIÓN

# TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato.

DANIEL ENRIQUE SEPÚLVEDA OEHNINGER

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Matemática en el exámen de Defensa de Tesis rendido el día 15 de Septiembre de 2009.

Director de Tesis:

Dr. Manuel Pinto ..............................



Comisión de Evaluación de la Tesis:

Dr. Rolando Pomareda ..............................
Presidente

Dr. Marius Montoiu ..............................

Dr. Veronica Poblete ..............................

# Agradecimientos

Daré los siguientes agradecimientos a aquellos que hicieron posible el desarrollo de este magíster:

A mi Director de Tesis, Dr. Manuel Pinto, por la confianza que tuvo en mí desde el comienzo y su paciencia infinita.

A mis padres, Berta Oehninger y Fidel Sepúlveda, que me han dado los valores principales, siendo pilares fundamentales de todo lo que he emprendido.

A mis hermanos, Eduardo y Catalina a quienes quiero mucho.

A Carla, mi amor, quien ha estado siempre a mi lado, siendo de primordial en la culminación de este magíster.

# Resumen


Consideramos la ecuación integral escalar,

$$x(t) = p(t)x(0) + f(t, x(t)) + \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)} h(s, x(s))ds, \ t \geq 0,$$

donde $f, h : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, tales que la función *cero* sea solución. Conseguimos distintas condiciones para la estabilidad y estabilidad asintótica de la solución *cero*, usando la Teoría del Punto Fijo.

Finalmente, estudiamos la ecuación diferencial no lineal

$$x'' + f(t, x, x')x' + b(t)g(x(t - L)) = 0,$$

donde $f, b$ y $g$ son funciones continuas. La función $b$ es acotada, y $f$ es localmente Lipschitz. Establecemos, por medio de la Teoría del Punto Fijo, condiciones que garantizan que la solución *cero* es asintóticamente estable. Nuestras hipótesis son más generales y fáciles de verificar, que las obtenidas por Burton en [4].

# Abstract

We consider the scalar integral equation

$$x(t) = p(t)x(0) + f(t, x(t)) + \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)} h(s, x(s))ds, \ t \geq 0,$$

where $f, h : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are continuous functions, such that the *zero* function is a solution. We obtain several assumptions to ensure, using Fixed Point Theory, that the *zero* solution is stable or asymptotically stable.

Finally, we estudy the non-linear differential equation

$$x'' + f(t, x, x')x' + b(t)g(x(t - L)) = 0,$$

where $f, b, g$ are continuous functions. The function $b$ is positive and bounded, while $f$ is locally Lipschitz. Using Fixed Point Theory, we obtain conditions to ensure that the solution *zero* is asymptotically stable. Our assumptions are more general and easier to check, than the Burton's conditions in [4].

# Índice general

# Introducción.

Esta tesis trata sobre la estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), un problema que ha sido de constante interés por más de un siglo. El estudio de la estabilidad de las soluciones de EDO se ha apoyado en el método directo de Liapunov, así como en desigualdades integrales. Sin embargo, en la última decada surge una nueva alternativa. Burton et al. [2]-[6] han conseguido diversos resultados de estabilidad por medio de la Teoría del Punto fijo, principalmente para ecuaciones diferenciales con retardo. Burton tiene una larga trayectoria y vasta experiencia en el estudio de la soluciones estables de ecuaciones diferenciales utilizando funcionales de Liapunov. Sin embargo, para superar ciertas dificultades que aparecen en el tratamiento de la estabilidad por medio de funcionales de Liapunov, ha utilizado la Teoría del Punto Fijo. A continuación describimos algunas consideraciones, relacionadas con el estudio de la estabilidad para las soluciones de ecuaciones diferenciales con retardo, ya sea por Teoría del Punto Fijo o Funcionales de Liapunov.

1. Cuando el retardo no se comporta bien, el Método directo de Liapunov se vuelve difícil de usar, pero esas dificultades se superan fácilmente por medio de la Teoría del Punto Fijo.

2. El Método directo de Liapunov requiere relaciones puntuales, en cambio, mediante la Teoría del Punto Fijo se necesitan condiciones de promedio integrales.

3. Existe un equilibrio. En la Teoría de Liapunov uno debe hallar un funcional adecuado; en la Teoría de Punto Fijo se debe hallar un operador junto con un espacio invariante adecuado.

4. La Teoría de Punto Fijo es efectiva en el estudio de la estabilidad, puesto que restringe las funciones a un subconjunto específico, de un espacio de Banach, por lo que las condiciones para estabilidad se ven reducidas. En contraste, las funciones de Liapunov están definidas en un dominio de la forma $[0, \infty) \times D$ donde $D$ es una vecindad abierta de 0. El método de punto fijo trabaja en un conjunto mucho más pequeño.

El continuo interés por la estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales, sumado a la innovadora manera de abordar la problemática, nos impulsó a estudiar la estabilidad de soluciones de ecuaciones diferenciales, por medio de los teoremas clásicos de punto fijo, estos son: Banach, Schauder y Krasnoselskii. Este es el objetivo de esta tesis, que se divide en dos Capítulos.

En el Capítulo 1, nos fortalecemos en la Teoría del Punto Fijo, aplicada a la estabilidad de las soluciones de EDO. Ampliando nuestro conocimiento sobre este tópico. Todo lo anterior se ve reflejado en los Teoremas allí presentes, que ilustran las ideas fundamentales para conseguir resultados sobre la estabilidad de soluciones de (EDO) por medio de la Teoría del Punto Fijo. Se concluye este Capítulo con aplicaciones a: ecuaciones integro-diferenciales, ecuaciones diferenciales con retardo y a una ecuación diferencial de segundo orden.

La estabilidad de la solución *cero* de ecuaciones tipo Liénard ha sido un problema muy estudiado [4, 12, 13, 18, 21]. El Capítulo 2, que le da el título a este trabajo, trata sobre la ecuación diferencial tipo Liénard con retardo

$$x'' + f(t, x, x')x' + b(t)g(x(t - L)) = 0,$$

donde $f(t, x, y) \geq a(t)$ para alguna función continua $a$. Burton, en [4] (2005), consiguió un interesante resultado de estabilidad asintótica para la solución cero de esta ecuación, usando Teoría del Punto Fijo. Burton busca un resultado análogo al conseguido por Smith en [20], el año 1962, para la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$x'' + h(t)x' + k^2 x = 0, \tag{1}$$

donde $h(t)$ es una función continua para $t \geq 0$, $k^2$ es una constante positiva, y $h_0$ es una constante positiva tal que

$$h(t) \geq h_0.$$

Nosotros estudiamos la ecuación tratada por Burton, consiguiendo un resultado análogo al de Burton. Cabe destacar que:

1. Nuestro resultado requiere de menos condiciones que el de Burton, y más sencillas de verificar.

2. Nos acercamos más al espíritu del resultado de Smith.

3. El resultado de Smith es válido para $h(t) = h_0 + t$, pero falla para $h(t) = h_0 + t^2$. Nuestro Teorema 10 tiene una limitación similar, la que se hacemos notar, a la vez que delimitamos claramente su alcance, i.e. $h(t) = h_0 + t^\beta$ funciona para $\beta \leq 1$.

4. Conseguimos condiciones distintas a las que puede entregar el método directo de Liapunov.

5. Utilizamos el Teorema asintótico de Banach, para conseguir la estabilidad asintótica. Un hecho poco visto en la bibliografía.

# Capítulo 1

# Ecuaciones Integrales.

## 1.1. Introducción

Para comenzar consideramos la ecuación integral escalar,

$$x(t) = p(t)x(0) + f(t, x(t)) + \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)} h(s, x(s))ds, \ t \geq 0, \tag{1.1}$$

donde la función $p(t) > 0, p(0) = 1$ es continua, y $f, h : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas que satisfacen

$$f(t, 0) = 0, \quad f(0, x) = 0, \quad h(t, 0) = 0.$$

Ecuaciones del tipo (1.1) provienen de interesantes problemas como la ecuación diferencial de tipo neutral:

$$x'(t) = -a(t)x(t) + f(t, x(t)) - \frac{d}{dt}Q(t, x(t-r)), t \geq 0 \tag{1.2}$$

con la condición inicial $x(t) = \psi(t)$ con $t \in [-r, 0], r > 0$. Condiciones para la estabilidad asintótica de la solución *cero* de (1.2) se consiguen en la sección (1.3.2).

Nos ocupamos de la aplicación de la Teoría del Punto Fijo para estudiar la estabilidad de soluciones de ecuaciones integrales, pues, a cada ecuación diferencial se le puede asociar una ecuación integral equivalente. Distintos autores han trabajado en este tema los últimos 15 años, destacando T.A. Burton [2]-[4].

Denotamos por $x(t) = x(t, x_0, t_0)$ a una solución de (1.1), con condición inicial $x(t_0) = x_0$.

**Definición 1.** *Se dice que la solución $y(t) = y(t, y_0, t_0)$ de la ecuación (1.1), definida para $t \geq t_0$, es* ***estable*** *si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que: para cada $x_0$ que cumpla $|x_0 - y_0| < \delta$, existe $x(t, x_0, t_0)$ solución de (1.1), a la vez que*

$$|y(t) - x(t)| < \epsilon, \ \forall \ t \geq t_0.$$

**Definición 2.** *La solución $y(t) = y(t, y_0, t_0)$ de la ecuación (1.1) es* ***asintóticamente estable*** *si la solución $y(t)$ es estable y además cada solución de (1.1), $x(t, x_0, t_0)$, si $|x_0 - y_0| < \delta$, entonces*

$$|y(t) - x(t)| \to 0 \quad \text{cuando } t \to \infty.$$

En este capítulo estudiaremos la estabilidad de las soluciones de ecuaciones integrales, mediante la Teoría del Punto Fijo. A continuación enunciamos los Teoremas clásicos del Punto Fijo, que utilizaremos a lo largo de este trabajo.

**Teorema 1** (Banach, 1922). *Sean $(S, \rho)$ un espacio métrico completo y $F : S \to S$ un operador contractivo, entonces el operador $F$ tiene un único punto fijo en $S$.*

**Teorema 2** (Schauder, 1930). *Sea $\Omega$ un subconjunto no vacío, convexo y compacto de un espacio de Banach $S$ y $F : \Omega \to \Omega$ un operador continuo, entonces el operador $F$ tiene al menos un punto fijo en $\Omega$.*

Particular interés tienen los operadores suma $P = \Gamma_1 + \Gamma_2$, donde los puntos fijos de $P$, pueden ser atraídos por los puntos fijos del operador dominante, digamos

$$x = \Gamma_1 x,$$

si $\Gamma_2$ es pequeño. En este sentido destaca uno de los primeros teoremas de punto fijo válidos para suma de operadores, debido a Krasnoselskii, que suma un operador contractivo con otro operador continuo y compacto [6], [2],[16]:

**Teorema 3** (Krasnoselskii, 1955). *Sea $\Omega$ un subconjunto no vacío, convexo y cerrado de un espacio de Banach $S$. Supongamos que existen operadores $\Gamma_1, \Gamma_2 : \Omega \to S$ tales que :*

*(i)* $\Gamma_1 x + \Gamma_2 y \in \Omega$ *para todo* $x, y \in \Omega$,

*(ii)* $\Gamma_1$ *es un operador contractivo,*

*(iii)* $\Gamma_2$ *es un operador completamente continuo ($\Gamma_2$ es continuo y compacto).*

*Entonces existe $y \in \Omega$ de manera que $\Gamma_1 y + \Gamma_2 y = y$.*

Este último resultado relaciona y extiende los Teoremas 1 y 2. Las demostraciones de los Teoremas 1 y 2 pueden encontrarse en Dugundji y Granas [8], el Teorema 3 es demostrado en Smart [19].

En las siguientes páginas se consiguen resultados sobre estabilidad y estabilidad asintótica de la solución *cero* de la ecuación integral (1.1), mediante los Teoremas 1, 2 y 3. Hacemos notar que para utilizar los Teoremas 2 y 3, necesitaremos probar que cierto conjunto de funciones es compacto lo que, usualmente, se consigue gracias al Teorema de Arzelà-Ascoli. Nosotros estamos interesados en operadores definidos en el espacio de Banach $(BC([0,\infty)), ||\cdot||)$, el espacio de las funciones continuas y acotadas con la norma del supremo. El Teorema de Arzelà-Ascoli no es válido sobre el intervalo $[0,\infty)$. Por esto es que demostramos un buen criterio para probar la compacidad de un conjunto en $(BC([0,\infty)), ||\cdot||)$.

**Lema 1.** *Sea $A \subset BC([0,\infty))$ un conjunto cerrado y acotado, si $A$ es equicontinuo sobre cada intervalo acotado en $[0,\infty)$ y es equiconvergente a cero, esto es, para cada $\epsilon > 0$ existe $T = T(\epsilon)$ tal que*

$$|x(t)| \leq \epsilon, \forall t \geq T, \forall x \in A.$$

*Entonces $A$ es un subconjunto compacto en $(BC([0,\infty)), ||\cdot||)$.*

*Demostración.* Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $A$, sabemos que sobre todo conjunto compacto $[0,n]$ el conjunto $A$ es equicontinuo y acotado(uniformemente), luego, por el Teorema Arzelà-Ascoli sabemos que $A$ restringido al intervalo $[0,n]$ es compacto. Por lo tanto, sobre el intervalo $[0,1]$ la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, la denotamos $\{f_n^1\}_{n=1}^{\infty}$. Sobre el intervalo $[0,2]$ la sucesión $\{f_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ tiene, a su vez, una subsucesión convergente, llamémosla $\{f_n^2\}_{n=1}^{\infty}$. Así, en el intervalo $[0,k+1]$, la sucesión $\{f_n^k\}_{n=1}^{\infty}$, tiene una subsucesión convergente, denotada por $\{f_n^{k+1}\}_{n=1}^{\infty}$, de este modo podemos cubrir $[0,\infty)$. Diagonalizando conseguimos una subsucesión $\{f_n^n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, veamos que es de Cauchy en $[0,\infty)$.

Sea $\epsilon > 0$, existe $T = T(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|x(t)| \leq \epsilon/2$ para $t \in [T,\infty)$, esto lo satisface cualquier $x \in A$, gracias a la equiconvergencia a cero. Pero en $[0,T]$, la sucesión $\{f_n^{T+1}\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente (desde $n > T$, debido a la construcción), por tanto, para $\epsilon$ dado, podemos hallar $M > T$ tal que

$$\max_{t\in[0,T]} |f_n^n(t) - f_m^m(t)| \leq \epsilon, \ n,m > M.$$

Luego, para $n,m > M$

$$||f_n - f_m|| = \max\{\max_{t\in[0,T]} |f_n(t) - f_m(t)|, \sup_{t\in[0,\infty)} |f_n(t) - f_m(t)|\}$$

gracias a la desigualdad triangular, obtenemos

$$||f_n - f_m|| \leq \max\{\epsilon, \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}\}.$$

Luego la subsucesión es de Cauchy, y por tanto convergente en $BC([0,\infty))$. Como $A$ es cerrado, se sigue que $\{f_n^n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en $A$, luego, éste es un subconjunto compacto de $(BC([0,\infty)), ||\cdot||)$.

□

## 1.2. Estabilidad en una Ecuación Integral.

Reescribimos la ecuación (1.1)

$$x(t) = p(t)x(0) + f(t, x(t)) + \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)} h(s, x(s))ds, \ t \geq 0,$$

y recordamos que la función $p(t) > 0, p(0) = 1$ es continua y $f, h : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas que satisfacen

$$f(t, 0) = 0, \quad f(0, x) = 0, \quad h(t, 0) = 0.$$

Supondremos que tanto $f, h$ son Lipschitz en la segunda coordenada, es decir, existen funciones $\lambda, \mu : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tales que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \lambda(t)|x - y|, \tag{1.3}$$

$$|h(t, x) - h(t, y)| \leq \mu(t)|x - y|. \tag{1.4}$$

Para conseguir la estabilidad de una solución de la ecuación (1.1), mediante los Teoremas de punto fijo, se necesitará exigir una condición de promedio, en el siguiente resultado se trata de (1.5).

**Teorema 4.** *Si $p$ es acotada, (1.3), (1.4) se tienen, y además se satisface:*

$$\sup_{t \geq 0} \left( \lambda(t) + \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)} \mu(s) ds \right) \leq \beta < 1, \tag{1.5}$$

*entonces la solución cero de la ecuación (1.1) es estable. Si además $p(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, la solución cero es asintóticamente estable.*

*Demostración.* A partir de este momento consideramos $X := BC([0, \infty))$ el espacio vectorial de las funciones continuas y acotadas, y $|| \cdot ||$ la norma del supremo. Se sabe que $(X, || \cdot ||)$ es un espacio de Banach.

Definimos el operador

$$(Px)(t) = p(t)x_0 + f(t, x(t)) + \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)} h(s, x(s))ds, \tag{1.6}$$

para $t \geq 0$. Es fácil ver que $P$ es un operador contractivo, pues para todo par de funciones $z, y \in X$, tenemos

$$|(Pz)(t) - (Py)(t)| \leq |p(t)||x_0 - x_0| + |f(t, z(t)) - f(t, y(t))|$$
$$+ \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)} |h(s, z(s)) - h(s, y(s))| ds$$

$$\leq \lambda(t)|z(t) - y(t)| + \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)} \mu(s)|z(s) - y(s)|ds,$$

de (1.5) se consigue

$$|(Pz)(t) - (Py)(t)| \leq \beta||z - y||. \tag{1.7}$$

Luego el operador $P$ tiene un único punto fijo, para cada valor inicial.

*Estabilidad.* Dado $\epsilon > 0$, consideramos el espacio métrico completo

$$M^\epsilon = \{x \in X : ||x|| \leq \epsilon\}.$$

Existe un $\delta > 0$, tal que si $|x_0| < \delta := \frac{1-\beta}{||p||}\epsilon$, con $x \in M^\epsilon$

$$|(Px)(t)| \leq |p(t)||x_0| + |f(t, x(t))| + \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)} |h(s, x(s))|ds$$

$$\begin{aligned} |(Px)(t)| &\leq ||p||x_0 + \beta||x|| \\ &\leq ||p||\frac{1-\beta}{||p||}\epsilon + \beta\epsilon = \epsilon. \end{aligned}$$

Hemos demostrado que $PM^\epsilon \subset M^\epsilon$. Además $P_{|M^\epsilon}$, el operador $P$ restringido a $M^\epsilon$, sigue siendo contractivo. Por lo tanto, la solución de (1.1) con valor inicial $|x_0| < \delta$ satisface

$$|x(t)| \leq \epsilon.$$

Conseguimos así la estabilidad de la solución cero.

*Estabilidad asintótica.* Si además se tiene $\lim_{t\to\infty} p(t) = 0$, para conseguir la estabilidad asintótica consideramos el conjunto

$$M_0 = \{x \in X | \lim_{t\to\infty} x(t) = 0\}.$$

$(M_0, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach, pues es un subconjunto cerrado de $X$. Para demostrar la estabilidad asintótica de la solución *cero*, probaremos que $PM_0 \subset M_0$. Dados $x \in M_0, \epsilon > 0$, podemos hallar una constante positiva $T_0$, tal que, si $t > T_0$ se tiene:

$$\lambda(t)|x(t)| + \sup_{t>T_0} |x(t)| \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.8}$$

Lo anterior se sigue del hecho que $x(t) \to 0$ si $t \to \infty$. Ahora, gracias a que $p(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, y el hecho que $p(T_0)$ es una constante fija, existe la constante $T_1 > 0$, tal que

$$p(t)|x_0| + \frac{p(t)}{p(T_0)} \int_0^{T_0} \frac{p(T_0)}{p(s)} \mu(s)ds||x|| \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.9}$$

Luego si $t \geq T_1$, se tiene

$$|(Px)(t)| \leq |p(t)||x_0| + \lambda(t)|x(t)| + \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)}\mu(s)|x(s)|ds,$$

y como $T_1 > T_0$, conseguimos

$$\begin{aligned}|(Px)(t)| &\leq |p(t)||x_0| + \lambda(t)|x(t)| + \frac{p(t)}{p(T_0)}\int_0^{T_0} \frac{p(T_0)}{p(s)}\mu(s)|x(s)|ds \quad (1.10)\\ &+ \int_{T_0}^t \frac{p(t)}{p(s)}\mu(s)|x(s)|ds\\ &\leq \lambda(t)|x(t)| + \int_{T_0}^t \frac{p(t)}{p(s)}\mu(s)|x(s)|ds\\ &+|p(t)||x_0| + \frac{p(t)}{p(T_0)}\int_0^{T_0} \frac{p(T_0)}{p(s)}\mu(s)ds||x(s)||.\end{aligned}$$

Así, de la elección de $T_0$ y $T_1$ en (1.8) y (1.9), respectivamente, se tiene que:

$$|(Px)(t)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

luego $PM_0 \subset M_0$. Gracias a que el operador $P$ es contractivo, existe una única función $x^*(t) = (Px^*)(t)$, $x^* \in M_0$. Se concluye que, para cada condición inicial $x_0$ la solución $x(t, x_0, 0)$ tiende a *cero* cuando $t \to \infty$. Por lo tanto la solución *cero* de (1.1) es asintóticamente estable. □

**Ejemplo 1.** Consideremos la ecuación integral

$$x(t) = \frac{x(0)}{(a+t)^k} + \frac{tx(t)}{1+ct} + \int_0^t \left(\frac{a+s}{a+t}\right)^k \frac{x(s)}{b+s}ds, \ t \geq 0, \tag{1.11}$$

donde $k > 1, b > a > 0$ y $c > \frac{k}{k-1}$, entonces tenemos la siguiente estimación $\frac{1}{b+s} < \frac{1}{a+s}$ luego

$$\int_0^t \frac{(a+s)^k}{b+s}ds \leq \int_0^t (a+s)^{k-1}ds < \frac{(a+t)^k}{k}, \forall t \geq 0,$$

por tanto

$$\frac{1}{(a+t)^k}\int_0^t \frac{(a+s)^k}{b+s}ds < \frac{1}{k}, \forall t \geq 0,$$

entonces

$$\sup_{t\geq 0}\left[\frac{t}{1+ct} + \frac{1}{(a+s)^k}\int_0^t \frac{(a+s)^k}{b+s}ds\right] \leq \frac{1}{c} + \frac{1}{k} = \frac{k+c}{ck} < 1.$$

Luego por el Teorema 4 la solución cero es asintóticamente estable.

A continuación conseguimos un resultado análogo, suprimiendo (1.5) pero exigiendo otra condición de promedio, esta vez $\frac{\mu(s)}{p(s)} \in L^1([0,\infty))$.

**Teorema 5.** *Sea $p(t)$ acotada, si se tienen (1.3), (1.4) , y además se satisface:*

$$||\lambda|| \leq \beta < 1, \tag{1.12}$$

$$\frac{\mu(s)}{p(s)} \in L^1([0,\infty)), \tag{1.13}$$

*entonces la solución cero de la ecuación (1.1) es estable. Si además $p(t), \lambda(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, la solución cero es asintóticamente estable.*

*Demostración.* Consideremos el espacio de Banach $(X, ||\cdot||)$. Definimos el operador

$$(Px)(t) = p(t)x_0 + f(t,x(t)) + \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)} h(s,x(s))ds, \; t \geq 0.$$

Veamos que $PX \subset X$, sea $x \in X$

$$\begin{aligned}
|(Px)(t)| &\leq |p(t)||x_0| + |f(t,x(t))| + \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)}|h(s,x(s))|ds \\
&\leq ||p|||x_0| + \lambda(t)|x(t)| + \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)}\mu(s)|x(s)|ds \\
&\leq ||p|||x_0| + ||x|| + ||x||||p|| \int_0^\infty \frac{\mu(s)}{p(s)}ds,
\end{aligned}$$

luego $P : X \to X$. Pero con la norma del supremo este operador no necesariamente es contractivo. Gracias a la condición (1.13) podemos definir una métrica equivalente a la del supremo, con la que este operador se vuelve contractivo. Definimos la familia de métricas:

$$||x-y||_K := \sup_{t\geq 0} |x(t)-y(t)|e^{-K\int_0^t \frac{\mu(s)}{p(s)}ds}$$

debido a que $\frac{\mu(s)}{p(s)} \in L^1$, el espacio métrico $(X, ||\cdot||_K)$ es un espacio de Banach. Ahora determinaremos que valores de $K$ garantizan la contracción del operador. Sean $x, y \in X$ se tiene

$$\begin{aligned}
|(Px)(t)-(Py)(t)|e^{-K\int_0^t \frac{\mu(s)}{p(s)}ds} &\leq |f(t,x(t)) - f(t,y(t))|e^{-K\int_0^t \frac{\mu(s)}{p(s)}ds} \\
&+ \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)}|h(s,x(s)) - h(s,y(s))|ds e^{-K\int_0^t \frac{\mu(s)}{p(s)}ds},
\end{aligned}$$

$$|(Px)(t)-(Py)(t)|e^{-K\int_0^t \frac{\mu(s)}{p(s)}ds} \leq \lambda(t)|x(t)-y(t)|e^{-K\int_0^t \frac{\mu(s)}{p(s)}ds}$$

$$+p(t)\int_0^t e^{-K\int_s^t \frac{\mu(\xi)}{p(\xi)}d\xi}\frac{\mu(s)}{p(s)}|x(s)-y(s)|e^{-K\int_0^s \frac{\mu(\xi)}{p(\xi)}d\xi}ds.$$

Así conseguimos:

$$|(Px)(t)-(Py)(t)|e^{-K\int_0^t \frac{\mu(s)}{p(s)}ds} \le \lambda(t)||x-y||_K + p(t)\int_0^t e^{-K\int_s^t \frac{\mu(\xi)}{p(\xi)}d\xi}\frac{\mu(s)}{p(s)}||x-y||_K ds$$

integrando la segunda expresión se obtiene:

$$||(Px)-(Py)||_K \le \lambda(t)||x-y||_K + p(t)\frac{1-e^{-K\int_0^t \frac{\mu(\xi)}{p(\xi)}d\xi}}{K}||x-y||_K$$

$$\le ||x-y||_K\bigg(||\lambda|| + ||p||\frac{1}{K}\bigg).$$

La condición (1.12), garantiza $||\lambda|| \le \beta < 1$, podemos hallar $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\beta + ||p||/K_0 < 1$, y entonces el operador $P$ sobre el espacio de Banach $(X, ||\cdot||_K)$ es contractivo.

*Estabilidad.* Sea

$$M_\epsilon = \{x \in BC([0,\infty)) : |x(t)| \le \epsilon e^{(K_0+1)\int_0^t \frac{\mu(s)}{p(s)}ds}\}$$

La elección de la condición inicial $x_0$ debe ser suficientemente pequeña, por el momento se exige que $|x_0| \le \epsilon$. Debido a la condición (1.13), el conjunto $M_\epsilon$ es acotado, y además conseguimos:

$$|(Px)(t)| \le p(t)|x_0| + \beta|x(t)| + \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)}\mu(s)|x(s)|ds$$

$$\le p(t)|x_0| + \beta\epsilon e^{(K_0+1)\int_0^t \frac{\mu(s)}{p(s)}ds} + p(t)\int_0^t \frac{\mu(s)}{p(s)}\epsilon e^{(K_0+1)\int_0^s \frac{\mu(u)}{p(u)}du}ds$$

$$\le p(t)|x_0| + \beta\epsilon e^{(K_0+1)\int_0^t \frac{\mu(s)}{p(s)}ds} + \epsilon p(t)\frac{e^{(K_0+1)\int_0^t \frac{\mu(s)}{p(s)}ds}-1}{K_0+1}$$

$$|(Px)(t)| \le p(t)|x_0| + \epsilon e^{(K_0+1)\int_0^t \frac{\mu(s)}{p(s)}ds}\left[\beta + \frac{p(t)}{K_0+1}\right]. \tag{1.14}$$

y para garantizar que $M_\epsilon$ queda invariante bajo el operador $P$, debemos ser más exigentes con $x_0$, basta con:

$$|x_0| \le \frac{\epsilon}{||p||}\left[1-\beta-\frac{||p||}{K_0+1}\right] \le \frac{\epsilon}{||p||}\left[1-\beta-\frac{||p||}{K_0+1}\right]e^{(K_0+1)\int_0^t \frac{\mu(s)}{p(s)}ds}. \tag{1.15}$$

De (1.14) y (1.15), se sigue la estabilidad de la solución *cero*.

*Estabilidad asintótica.* Para conseguir la estabilidad asintótica, basta ver que toda solución de (1.1) tiende a cero cuando $t \to \infty$. Para esto resulta fundamental que $p(t), \lambda(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Dado $\epsilon > 0$, la condición (1.13) y el hecho que $p(t), x(t)$ son funciones acotadas, garantizan la existencia de $T > 0$ tal que

$$||p|| \int_T^\infty \frac{\mu(s)}{p(s)} ||x|| ds < \frac{\epsilon}{3}.$$

Gracias a que $p(t)$ tiende a *cero*, existe $T_p > T$, tal que

$$p(t)\left( |x_0| + \int_0^T \frac{\mu(s)}{p(s)} ||x||| ds \right) \leq \frac{\epsilon}{3},\ t \geq T_p.$$

Puesto que $\lambda(t)$ tiende a *cero*, existe $T_\lambda > T$, tal que

$$\lambda(t)||x|| \leq \frac{\epsilon}{3},\ t \geq T_\lambda.$$

Para $t > T$ y $x \in X$, se tiene:

$$|(Px)(t)| \leq |p(t)||x_0| + \lambda(t)|x(t)| + p(t) \int_0^T \frac{\mu(s)}{p(s)} |x(s)| ds + p(t) \int_T^t \frac{\mu(s)}{p(s)} |x(s)| ds.$$

De esta manera para $t > T_0 = \text{máx}\{T_p, T_\lambda\}$ se tiene que:

$$|(Px)(t)| \leq \epsilon,\ t \geq T_0,$$

se concluye que toda solución de (1.1) tiende a cero.

□

**Observación 1.** *Si estamos interesados en un criterio que garantice sólo la estabilidad de la solución cero de (1.1), tanto el Teorema 4, como el Teorema 5, son criterios interesantes. El Teorema 5 pide la condición de promedio (1.12) permitiendo que el promedio sea acotado, y no menor que 1, como plantea el Teorema 4 y su condición (1.5). Al buscar la estabilidad asintótica, la condición (1.13) se vuelve muy restrictiva. Dos aspectos dejan en evidencia estas limitaciones:*

1. *La condición (1.13) junto al hecho que $p(t) \to 0$ si $t \to \infty$, implican que*

$$\int_0^t \frac{p(t)}{p(s)} \mu(s) ds \to 0, \quad \text{cuando} \quad t \to \infty.$$

   *Lo que es más exigente que la condición (1.5) del Teorema 4.*

2. *La condición $p(t) \to 0$ si $t \to \infty$, implica que $1/p(t) \to \infty$ si $t \to \infty$. Para que se satisfaga la condición (1.13), $\mu$ queda muy restringida por la función $p(t)$, de modo que $\frac{\mu}{p}$ sea integrable.*

*Así, nuestro Teorema 4 resulta un mejor criterio para la estabilidad asintótica de la solución cero de (1.1), en comparación con nuestro Teorema 5.*

Los Teoremas 4 y 5 se basan en el Teorema 1, de Banach, lo que explica la necesidad de condiciones de Lipschitz sobre las funciones involucradas. Ésta propiedad resulta, en la práctica, difícil de tener. A continuación sólo exigiremos que las funciones sean localmente Lipschitz, algo que es mucho menos restrictivo. Destacamos la presencia, una vez más de condiciones de promedio (1.21). Supongamos que:

($\mathrm{Inv}_f$) Existe una función $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ continua y creciente, y $\omega(0) = 0$, tal que para todo $\rho > 0$, si $|x| \leq \rho$, se satisface:

$$|f(t,x)| \leq \omega(\rho)|x|. \tag{1.16}$$

($\mathrm{C}_f$) Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $|x|, |y| < \rho$ y $|x-y| < \delta$ entonces

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \omega(\rho)\epsilon. \tag{1.17}$$

($\mathrm{Inv}_h$) Existen funciones continuas $\eta, \mu : [0,\infty) \to [0,\infty)$ donde $\mu$ es creciente, y $\mu(0) = 0$, tales que para todo $\rho > 0$, si $|x| \leq \rho$ se satisface:

$$|h(t,x)| \leq \eta(t)\mu(\rho)|x| \tag{1.18}$$

($\mathrm{C}_h$) Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |h(t,x) - h(t,y)| \leq \eta(t)\mu(\rho)\epsilon \tag{1.19}$$

($\bar{\eta}$) La función $\eta$ satisface:

$$\sup_{t\geq 0} \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)}\eta(s)ds < \infty. \tag{1.20}$$

Existe algún $0 < \alpha < 1$ de modo que

$$\sup_{t\geq 0} \int_0^t \left(\frac{p(t)}{p(s)}\right)^{1-\alpha} \eta(s)ds < \infty. \tag{1.21}$$

Bajo estas condiciones podemos utilizar el Primer Teorema de Schauder, Teorema 2, para garantizar la estabilidad asintótica de la solución *cero* de la ecuación (1.1).

**Teorema 6.** *Si $p(t)$ tiende a cero, y se tienen ($Inv_f$), ($C_f$), ($Inv_h$), ($C_h$), ($\bar{\eta}$). Entonces la solución cero de la ecuación (1.1) es asintóticamente estable. De hecho existe una constante $R_0 > 0$, tal que la solución $x(t) = x(t, x_0, 0)$ satisface*

$$|x(t)| \leq R_0 p^{\alpha}(t),$$

*para $|x_0|$ suficientemente pequeño.*

**Observación 2.** *La constante $R_0$ para la solución $x(t,x_0,0)$, aparece claramente al conseguir el conjunto no vacío, convexo, compacto que requiere el Teorema 2. $R_0$ depende directamente de las funciones $f$ y $h$.*

*Demostración.* Definimos el operador $P:(X,||\cdot||)\to(X,||\cdot||)$

$$(Pz)(t)=p(t)z(0)+f(t,z(t))+\int_0^t\frac{p(t)}{p(s)}h(s,z(s))ds.$$

Consideramos la familia de conjuntos cerrados, convexos y no vacíos:

$$M_R=\{z\in C([0,\infty)):|z(0)|\le R\chi_0 \text{ y } |z(t)|\le Rp^{\alpha}(t)\},$$

con $\chi_0$ por determinar, pero desde ya exigimos $\chi_0\le p^{\alpha}(0)$. Definimos

$$\rho_R:=R||p^{\alpha}||,\quad k_0:=||p^{1-\alpha}||. \tag{1.22}$$

A continuación demostraremos que existen $R_0,\chi_0>0,\chi_0=\chi_0(R_0)$, tal que para todo $x\in M_{R_0}$ se satisface $Px\in M_{R_0}$. Para $x\in M_R$ se tiene

$$|(Px)(t)|\le p(t)|x(0)|+|f(t,x(t))|+\int_0^t\frac{p(t)}{p(s)}|h(s,x(s))|ds$$

$$\le p(t)|x(0)|+\omega(\rho_R)|x(t)|+\int_0^t\frac{p(t)}{p(s)}\eta(s)\mu(\rho_R)|x(s)|ds$$

$$|(Px)(t)|\le p(t)R\chi_0+\omega(\rho_R)Rp^{\alpha}(t)+\int_0^t\frac{p(t)}{p(s)}\eta(s)\mu(\rho_R)Rp^{\alpha}(s)ds. \tag{1.23}$$

Ahora notamos que

$$R\int_0^t\frac{p(t)}{p(s)}\eta(s)\mu(\rho_R)p^{\alpha}(s)ds=Rp^{\alpha}(t)\int_0^t\left(\frac{p(t)}{p(s)}\right)^{1-\alpha}\eta(s)\mu(\rho_R)ds,$$

gracias a la condición (1.21), conseguimos

$$R\int_0^t\frac{p(t)}{p(s)}\eta(s)\mu(\rho_R)p^{\alpha}(s)ds\le Rp^{\alpha}(t)\mu(\rho_R)\sup_{t\ge0}\int_0^t\left(\frac{p(t)}{p(s)}\right)^{1-\alpha}\eta(s)ds. \tag{1.24}$$

Así de (1.23) y (1.24), obtenemos

$$|Px(t)|\le Rp^{\alpha}(t)\left[p^{1-\alpha}(t)\chi_0+\omega(\rho_R)+\mu(\rho_R)\sup_{t\ge0}\int_0^t\left(\frac{p(t)}{p(s)}\right)^{1-\alpha}\eta(s)ds\right],$$

utilizando $k_0$ definido en (1.22), se tiene

$$|Px(t)|\le Rp^{\alpha}(t)\left[k_0\chi_0+\omega(\rho_R)+\mu(\rho_R)\sup_{t\ge0}\int_0^t\left(\frac{p(t)}{p(s)}\right)^{1-\alpha}\eta(s)ds\right]. \tag{1.25}$$

La estimación (1.25), es independiente del conjunto $M_R$. Para conseguir un conjunto invariante por el operador $P$, necesitamos

$$k_0\chi_0 + \omega(\rho_R) + \mu(\rho_R)\sup_{t\geq 0}\int_0^t \left(\frac{p(t)}{p(s)}\right)^{1-\alpha}\eta(s)ds \leq 1.$$

Las condiciones sobre $\omega, \mu$ exigidas en ($\mathrm{Inv}_f$) e ($\mathrm{Inv}_h$), respectivamente, junto a la condición ($\bar{\eta}$), implican que

$$\omega(\rho_R) + \mu(\rho_R)\sup_{t\geq 0}\int_0^t \left(\frac{p(t)}{p(s)}\right)^{1-\alpha}\eta(s)ds \to 0 \text{ cuando } R \to 0.$$

Por lo tanto existe $R_0 > 0$, tal que

$$\omega(\rho_{R_0}) + \mu(\rho_{R_0})\sup_{t\geq 0}\int_0^t \left(\frac{p(t)}{p(s)}\right)^{1-\alpha}\eta(s)ds < 1. \tag{1.26}$$

Como $p(0) = 1$ y $p(t)$ es acotado, se tiene $0 < ||p^{1-\alpha}|| < \infty$. Definimos ahora

$$\chi_0 := \text{mín}\left\{\frac{1 - \omega(\rho_{R_0}) - \mu(\rho_{R_0})\sup_{t\geq 0}\int_0^t \left(\frac{p(t)}{p(s)}\right)^{1-\alpha}\eta(s)ds}{k_0}, p^{\alpha}(0)\right\}, \tag{1.27}$$

con $k_0$ definido en (1.22). Las elecciones de $R_0$ y $\chi_0$ en, respectivamente, (1.26) y (1.27) definen completamente al conjunto $M_{R_0}$. Para $x \in M_{R_0}$ son válidas las estimaciones anteriores, inclusive (1.25), i.e.

$$|Px(t)| \leq Rp^{\alpha}(t)\left[k_0\chi_0 + \omega(\rho_R) + \mu(\rho_R)\sup_{t\geq 0}\int_0^t \left(\frac{p(t)}{p(s)}\right)^{1-\alpha}\eta(s)ds\right]$$

y de las elecciones de $R_0$ y $\chi_0$ en (1.26) y (1.27), se consigue

$$\begin{gathered} |Px(t)| \leq R_0 p^{\alpha}(t) \\ |Px(0)| \leq |f(0, x(0))| + p(0)|x(0)| = |0| + 1|x(0)| \leq R_0\chi_0. \end{gathered} \tag{1.28}$$

Por lo tanto, para cualquier $x \in M_{R_0}, Px \in M_{R_0}$, en otras palabras, $M_{R_0}$ es un conjunto convexo e invariante bajo el operador $P$, pero $M_{R_0}$ no es compacto.

Construiremos un subconjunto no vacío $K_{R_0}$ de $M_{R_0}$, de manera que $K_{R_0}$ sea un conjunto compacto, convexo, invariante por el operador $P$. Comenzamos por hallar una función creciente $\delta : (0, 2R_0) \to (0, \infty)$ de manera que se tengan

$$|R_0 p^{\alpha}(t_0) - R_0 p^{\alpha}(t_1)| \leq \epsilon \text{ si } 0 \leq t_0 < t_1 < t_0 + \delta(\epsilon), \tag{1.29}$$

$$|(Pz)(t_0) - (Pz)(t_1)| \leq \epsilon \text{ si } 0 \leq t_0 < t_1 < t_0 + \delta(\epsilon), \text{ ciertos } \; z \in M_{R_0}. \tag{1.30}$$

Sea $\epsilon > 0$, desde ahora fijo. Asumimos que $p(t) \to 0$ si $t \to \infty$, lo que implica $R_0 p^\alpha(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Existe $T > 0$ de modo que $|R_0 p^\alpha(t)| \leq \epsilon/2$ si $t > T$. Como la función $R_0 p^\alpha(t)$ es continua, sobre el intervalo $[0, T]$ es uniformemente continua. Por lo tanto, para $\epsilon > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$|R_0 p^\alpha(t_0) - R_0 p^\alpha(t_1)| \leq \epsilon \text{ si } 0 \leq t_0 < t_1 < t_0 + \delta_1(\epsilon).$$

Ahora nos ocuparemos de (1.30), esto lo haremos estudiando cada uno de las funciones involucradas en el operador

$$(Pz)(t) = p(t)z(0) + f(t, z(t)) + \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)} h(s, z(s))ds.$$

Comenzamos con la función $(P_1 z)(t) := p(t)z(0)$, si consideramos $z \in M_{R_0}$ se tiene

$$|(P_1 z)(t_0) - (P_1 z)(t_1)| = |p(t_0) - p(t_1)||z(0)| \leq |p(t_0) - p(t_1)| R_0 \chi_0.$$

Un argumento análogo al que utilizamos para hallar $\delta_0$, asociado a la función $R_0 p^\alpha(t)$, permite hallar ahora para $\epsilon$, dado, una función $\delta_1 > 0$, de modo que:

$$|(P_1 z)(t_0) - (P_1 z)(t_1)| \leq |p(t_0) - p(t_1)| R_0 \chi_0 \leq \frac{\epsilon}{3} \text{ si } 0 \leq t_0 < t_1 < t_0 + \delta_1(\epsilon).$$

Consideramos $(P_2 z)(t) := \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)} h(s, z(s))ds$, donde $z \in M_{R_0}$ se tiene que, como antes que

$$|(P_2 z)(t)| \leq R_0 p^\alpha(t).$$

Por lo tanto, existe $T_2 > 0$ de modo que para cada $t \geq T_2$ se tiene que $|(P_2 z)(t)| \leq \frac{\epsilon}{6}$.

A continuación estudiaremos la función $(P_2 z)(t)$ cuando $t \in [0, T_2]$.

$$|(P_2 z)(t_0) - (P_2 z)(t_1)| \leq \int_0^{t_0} \frac{|p(t_0) - p(t_1)|}{p(s)} |h(s, z(s))|ds + \int_{t_0}^{t_1} \frac{p(t_1)}{p(s)} |h(s, z(s))|ds,$$

para $z \in M_{R_0}$, se tiene que

$$|(P_2 z)(t_0) - (P_2 z)(t_1)| \leq R_0 \mu(\rho_{R_0}) \int_0^{t_0} \frac{|p(t_0) - p(t_1)|}{p(s)} \eta(s) p^\alpha(s) ds$$

$$+ R_0 \mu(\rho_{R_0}) \int_{t_0}^{t_1} \frac{p(t_1)}{p(s)} \eta(s) p^\alpha(s) ds.$$

La función $\frac{\eta(s)}{p^{1-\alpha}(s)}$ es continua sobre el intervalo $[0, T_2]$, por lo tanto, acotada i.e. existe $K > 0$, tal que $\left|\frac{\eta(s)}{p^{1-\alpha}(s)}\right| < K$, $s \in [0, T_2]$. Obtenemos así

$$|(P_2 z)(t_0) - (P_2 z)(t_1)| \leq R_0 \mu(\rho_{R_0}) K (T_2 |p(t_0) - p(t_1)| + |t_0 - t_1|).$$

Por lo tanto, para $\epsilon > 0$, fijado con anterioridad. Existe $\delta_2 > 0$ de modo que:

$$|(P_2z)(t_0) - (P_2z)(t_1)| \leq \frac{\epsilon}{3} \text{ si } 0 \leq t_0 < t_1 < t_0 + \delta_2(\epsilon).$$

A continuación definimos una función $\delta_3(\epsilon) := \text{mín}\{\delta_i(\epsilon), 0 \leq i \leq 2\}$, y ahora nos detenemos en el conjunto de funciones

$$K_0 := \{z \in M_{R_0} : \text{ dado } \epsilon > 0, \text{ si } 0 \leq t_0 < t_1 < t_0 + \delta_3(\epsilon) \Rightarrow |z(t_0) - z(t_1)| \leq \epsilon\}.$$

Notamos que $K_0$ es un conjunto equicontinuo, y equiconvergente por el Lema 1, $K_0$ es compacto. Consideramos $P_3(z,t) := f(t, z(t))$, donde $z \in K_0$. Puesto que $z \in M_{R_0}$ se tiene que

$$|P_3(z,t)| \leq R_0 p^\alpha(t).$$

Por lo tanto, la constante $T_2 > 0$ garantiza que, para cada $t \geq T_2$ se tiene que $|P_3(z,t)| \leq \frac{\epsilon}{6}$. La función $f(t, z(t))$ es continua. El conjunto $[0, T_2] \times K_{0|_{[0,T_2]}}$ es compacto, donde $K_{0|_{[0,T_2]}}$ es el conjunto $K_0$ restringido al intervalo $[0, T_2]$. Por lo tanto $f(t, z(t))$ sobre el conjunto $[0, T_2] \times K_{0|_{[0,T_2]}}$, es uniformemente continua. Luego para $\epsilon > 0$, ya fijado. Existe $\delta_4(\epsilon) > 0$ de modo que:

$$|f(t_0, z(t_0)) - f(t_1, z(t_1))| \leq \frac{\epsilon}{3} \text{ si } |z(t_0) - z(t_1)| < \delta_4(\epsilon), \text{ y } 0 \leq t_0 < t_1 < t_0 + \delta_4(\epsilon).$$

Concluimos así que existe para $\epsilon > 0$, existe un $\delta_4$ adecuado, siempre y cuando $z$ está en un subconjunto equicontinuo de $M_{R_0}$. Ahora basta definir la función $\delta_5(\epsilon) := \text{mín}\{\delta_3(\epsilon), \delta_3(\delta_4(\epsilon)), \delta_4(\epsilon)\}$, que puede redefinirse creciente. Definimos el conjunto

$$K_{R_0} := \{z \in M_{R_0} : \forall \epsilon > 0,\ |z(t_0) - z(t_1)| \leq \epsilon, \text{ si } 0 \leq t_0 < t_1 < t_0 + \delta_5(\epsilon)\}.$$

Claramente es un conjunto no vacío, convexo y cerrado. $K_{R_0}$ está acotado por la función $R_0 p^\alpha(t)$, se sigue que este conjunto es equiconvergente a *cero* y equicontinuo. Por el Lema 1 se sigue que $K_{R_0}$ es un subconjunto compacto de $M_{R_0}$. Sólo hace falta verificar que $PK_{R_0} \subset K_{R_0}$. De la construcción de $M_{R_0}$ sabemos que para cada $z \in M_{R_0}$, se tiene que $Pz \in M_{R_0}$. Sea $z \in K_{R_0}$, estudiamos la continuidad de $Pz$, sea $\epsilon > 0$, consideremos $0 \leq t_0 < t_1 < t_0 + \delta_5(\epsilon)$, y entonces

$$\begin{aligned}|(Pz)(t_0) - (Pz)(t_1)| &\leq |p(t_0)z(0) - p(t_1)z(0)| + |f(t_0, z(t_0)) - f(t_1, z(t_1))| \\ &+ \left| \int_0^{t_0} \frac{p(t_0)}{p(s)} h(s, z(s))ds - \int_0^{t_1} \frac{p(t_1)}{p(s)} h(s, z(s))ds \right|,\end{aligned}$$

debido a que $\delta_5 < \delta_2, \delta_3$ se tiene que

$$|(Pz)(t_0) - (Pz)(t_1)| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + |f(t_0, z(t_0)) - f(t_1, z(t_1))|,$$

ahora bien como $\delta_5 < \delta(\delta_4(\epsilon))$, se tiene que $|z(t_0) - z(t_1)| < \delta_4(\epsilon)$, y $0 \leq t_0 < t_1 < t_0 + \delta_4(\epsilon)$, luego $|f(t_0, z(t_0)) - f(t_1, z(t_1))| < \frac{\epsilon}{3}$. Por lo tanto

$$|(Pz)(t_0) - (Pz)(t_1)| \leq \epsilon.$$

Se concluye así que $PK_{R_0} \subset K_{R_0}$, hemos conseguido un conjunto convexo, compacto e invariante bajo el operador $P$.

A continuación probamos la continuidad del operador $P$, sean $x, y \in M_{R_0}$ se tiene

$$|(Px)(t) - (Py)(t)| \leq p(t)|x(0) - y(0)| + |f(t,x) - f(t,y)| \\ + \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)} |h(s,x(s)) - h(s,y(s))| ds,$$

dado $\epsilon > 0$, las condiciones (1.17), (1.19), asegura la existencia de $\delta_f, \delta_h > 0$, tales que si $||x - y|| < \text{mín}\{\delta_f, \delta_h\}$ entonces

$$|(Px)(t) - (Py)(t)| \leq ||p|| \, ||x - y|| + \epsilon\Big(\omega(\rho_{R_0}) + \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)} \eta(s)\mu(\rho_{R_0}) ds\Big). \quad (1.31)$$

Para demostrar la continuidad del operador $P$, utilizamos la condición (1.20) i.e.

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)} \eta(s) ds < \infty.$$

Ahora, eligiendo $\delta < \text{mín}\{\delta_f, \delta_h, \epsilon\}$, conseguimos que (1.31) se convierta en

$$|(Px)(t) - (Py)(t)| \leq \epsilon\Big(||p|| + \omega(\rho_{R_0}) + \mu(\rho_{R_0}) \sup_{t \geq 0} \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)} \eta(s) ds\Big).$$

concluimos que el operador $P$ es continuo. Gracias al Teorema 2, Primer Teorema de Schauder, hay una solución de (1.1), con condición inicial $|x_0| \leq R_0 \chi_0$ suficientemente pequeña, y entonces esta solución está en $M_{R_0}$, y por tanto $|x(t, x_0)| \leq R_0 p^\alpha(t)$. Como $p^\alpha(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, se sigue claramente la estabilidad asintótica de la solución *cero* de la ecuación integral (1.1). □

Para utilizar el Teorema 2, en la demostración del Teorema 6, construimos un intrincado conjunto $K_{R_0}$ de manera que sea convexo, compacto, e invariante por el operador $P$. La necesidad de la construcción de dicho conjunto, radica en la función $f$, que no permite utilizar el Segundo Teorema de Schauder. En este último no se requiere la compacidad del conjunto invariante, a cambio de que el operador sea continuo y compacto.

A continuación asumimos que $f$ es localmente Lipschitz, es decir:

(L) Existe la función $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ continua y creciente, tal que $\omega(0) = 0$ y para todo $\rho > 0$, si $|x|, |y| \leq \rho$ se satisface:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \omega(\rho)|x - y|. \quad (1.32)$$

**Observación 3.** *La condición (L) es suficiente para garantizar que (1.16) y (1.17) se satisfacen. Luego el Teorema 7, es un caso particular del Teorema 6. Pese a esto, nuestro Teorema 7 sirve para ilustrar las técnicas requeridas para conseguir un* *resultado de estabilidad asintótica mediante el Teorema 3, de Krasnoselskii. Remarcamos que la prueba del Teorema 7 no requiere la construcción de un conjunto convexo, compacto e invariante bajo el operador $P$. Esto se debe a que separamos el operador $P$, en suma de dos operadores, para utilizar el Teorema 3. Por lo que sólo necesitamos que una parte de $P$ sea totalmente continuo.*

**Teorema 7.** *Si $p(t)$ tiende a cero, y se tienen (L), ($Inv_h$), ($C_h$) y ($\bar{\eta}$), entonces la solución cero de la ecuación (1.1) es asintóticamente estable. De hecho la solución satisface $|x(t,x_0)| \leq R_0 p^{\alpha}(t)$, para $|x_0|$ suficientemente pequeño.*

*Demostración.* Definimos el operador $P : (X, ||\cdot||) \to (X, ||\cdot||)$

$$(Pz)(t) = (\Gamma_1 z)(t) + (\Gamma_2 z)(t),$$

con

$$(\Gamma_1 z)(t) = f(t, z(t)),$$

$$(\Gamma_2 z)(t) = p(t)z(0) + \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)} h(s, z(s))ds,$$

como en la demostración del Teorema 6, consideramos la familia de conjuntos cerrados, convexos y no vacíos:

$$M_R = \{z \in C([0,\infty)) : |z(0)| < R\chi_0 \text{ y } |z(t)| \leq Rp^{\alpha}(t)\}.$$

De igual forma como en la prueba del Teorema 6, podemos hallar $R_0$ y $\chi_0$ tales que:

$$\forall x, y \in M_{R_0} \Rightarrow \Gamma_1 x + \Gamma_2 y \in M_{R_0}.$$

En otras palabras

$$|\Gamma_1 x(0) + \Gamma_2 y(0)| \leq R_0 \chi_0, \quad \forall x, y \in M_{R_0},$$

y también

$$|\Gamma_1 x(t) + \Gamma_2 y(t)| \leq R_0 p^{\alpha}(t) \left[ k_0 \chi_0 + \omega(\rho_{R_0}) + \mu(\rho_{R_0}) \sup_{t \geq 0} \int_0^t \left( \frac{p(t)}{p(s)} \right)^{1-\alpha} \eta(s) ds \right]$$

$$\leq R_0 p^{\alpha}(t), \quad \forall x, y \in M_{R_0}.$$

Para $x, y \in M_{R_0}$ tenemos

$$|(\Gamma_1 z)(t) - (\Gamma_1 y)(t)| \leq |f(t, z(t)) - f(t, y(t))| \leq \rho(R_0)|x(t) - y(t)|$$

$$|(\Gamma_1 z)(t) - (\Gamma_1 y)(t)| \leq \omega(\rho_{R_0})||x - y||. \tag{1.33}$$

En las estimaciones anteriores utilizamos la condición (L). La elección de $R_0$, para que $M_{R_0}$ sea un conjunto invariante, conlleva que $\omega(R_0) < 1$, se sigue que $\Gamma_1$ es contractivo. Para poder aplicar el Teorema 3, sólo resta ver que el operador $\Gamma_2$ es completamente continuo. A continuación demostramos la continuidad del operador $\Gamma_2$. Sean $z, y \in M_{R_0}$, dado $\epsilon > 0$, la condición ($\mathrm{C}_h$) asegura que: existe $\delta_1 > 0$ tal que, para $||z||, ||y|| \leq \rho_{R_0}$ y $||z - y|| < \delta_1$, se tiene:

$$|h(t, z) - h(t, y)| \leq \eta(t)\mu(\rho_{R_0})\epsilon.$$

Luego elegimos $\delta := \mathrm{mín}\, \epsilon, \delta_1 > 0$ y conseguimos

$$|(\Gamma_2 z)(t) - (\Gamma_2 y)(t)| \leq p(t)|z(0) - y(0)| + \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)}|h(s, z(s)) - h(s, y(s))|ds$$

$$|(\Gamma_2 z)(t) - (\Gamma_2 y)(t)| \leq ||p||\, ||z - y|| + \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)}\eta(s)\mu(\rho_{R_0})\epsilon ds,$$

gracias a la condición ($\bar{\eta}$), podemos tomar el supremo al término integral,

$$||\Gamma_2 z - \Gamma_2 y|| \leq \epsilon\Big(||p|| + \mu(\rho_{R_0}) \sup_{t \geq 0} \int_0^t \frac{p(t)}{p(s)}\eta(s)ds\Big).$$

Se concluye la continuidad del operador $\Gamma_2$. Para demostrar que $\Gamma_2 M_{R_0}$ es un conjunto compacto se procede, una vez más como en la demostración del Teorema 6. Y así, gracias al Teorema 3, de Krasnoselskii, la solución $x(t)$ de (1.1), tal que $|x(0)| \leq R_0\chi_0$ (la pequeñez de la condición inicial está explícita). Entonces esta solución está en $M_{R_0}$, i.e. $|x(t)| \leq R_0 p^{\alpha}(t)$. Por lo tanto, $x(t) \to 0$ si $t \to \infty$. Consiguiendo así la estabilidad asintótica de la solución *cero* de la ecuación (1.1). □

**Observación 4.** *En estos últimos resultados, sólo podemos hallar condiciones que garanticen la estabilidad asintótica, pero no podemos decir mucho sobre estabilidad, a secas; esto se debe a la necesidad de un operador completamente continuo, y por lo tanto, el espacio invariante debe ser equiconvergente. Para conseguir resultados de estabilidad mediante los Teoremas 2 y 3, necesitamos técnicas distintas, que escapan de los objetivos del presente trabajo.*

A continuación ilustramos la aplicabilidad de los Teoremas 6 y 7, en una ecuación diferencial neutral.

**Ejemplo 2.** Consideremos la ecuación diferencial neutral:

$$x' = -ax + 2\sin(t)xx', \ a > 0.$$

Gracias a la fórmula de variación de parámetros, se obtiene:

$$x(t) = e^{-at}x(0) + \int_0^t e^{-a(t-s)}\sin(s)2x(s)x'(s)ds.$$

Integrando por partes se tiene:

$$x(t) = e^{-at}x(0) + \sin(t)x^2(t) - \int_0^t e^{-a(t-s)}[a\sin(s) + \cos(s)]x^2(s)ds,$$

notar que esta ecuación, satisface todas las hipótesis del Teorema 7, considerando $f(t, x) = \sin(t)x^2, h(t, x) = [a\sin(t) + \cos(t)]x^2(t)$ se consiguen las siguientes estimaciones:

1. $e^{-at} \longrightarrow 0$ cuando $t \to \infty$
2. $|\sin(t)x^2(t) - \sin(t)y^2(t)| \leq |x(t) + y(t)||x(t) - y(t)|$
3. $|[a\sin(t) + \cos(t)]x^2(t)| \leq (|a| + 1)|x(t)||x(t)|$
4. $|[a\sin(t) + \cos(t)]|x^2(t) - y^2(t)| \leq (|a| + 1)|x(t) + y(t)||x(t) - y(t)|$
5. $\int_0^t e^{-a(t-s)}(|a|+1)ds < \infty$ y para $\alpha = \frac{1}{2}$ se tiene $\int_0^t e^{-a\frac{1}{2}(t-s)}(|a|+1)ds < \infty$.

Por lo tanto, gracias al Teorema 7, la solución con condición inicial $|x(0)|$ suficientemente pequeña, tiende a cero, y además $|x(t)| \leq e^{-\frac{a}{2}t}$.

## 1.3. Aplicaciones a Diversos Tipos de Ecuaciones.

Buscamos ilustrar las diversas situaciones, en las cuales es posible aplicar la Teoría del Punto Fijo, para conseguir estabilidad y estabilidad asintótica de soluciones de ecuaciones diferenciales.

### 1.3.1. Ecuaciones Integro-Diferenciales.

Aquí consideramos una ecuación integro-diferencial de no convolución

$$x'(t) = -\int_0^t k(t,s)x(s)ds, \tag{1.34}$$

y conseguimos condiciones que garanticen la estabilidad, y estabilidad asintótica de la solución *cero*. La estabilidad de soluciones de ecuaciones de este tipo ha sido estudiada durante mucho tiempo. En 1963, Levin [14] estudió la estabilidad de la solución *cero* para la ecuación de convolución

$$x'(t) = -\int_0^t k(t-s)g(x(s))ds, \tag{1.35}$$

bajo la condición $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$, junto con la condición más restrictiva

$$(-1)^n k^{(n)}(t) \geq 0,\ 0 < t < \infty,\ n = 0, 1, 2, 3. \tag{1.36}$$

Levin de hecho consiguió un funcional de Liapunov para (1.35), bajo las condiciones (1.36). Este funcional tuvo distintas generalizaciones para ecuaciones del tipo (1.35), pero esta vez con retardo. El año 1968, Levin [15], extendió lo hecho, para (1.35), a la ecuación de no convolución

$$x'(t) = -\int_0^t k(t,s)g(x(s))ds, \tag{1.37}$$

asumiendo

$$k(t,s) \geq 0,\ k_s(t,s) \geq 0,\ k_{st}(t,s) \leq 0. \tag{1.38}$$

Éste trabajo fue extensamente discutido en la literatura posterior. Burton, en [3] (2004), consigue un resultado de estabilidad para una ecuación del tipo (1.37) con retardo, bajo condiciones distintas a (1.38) debido al uso de la Teoría del Punto Fijo. Nosotros, gracias al Teorema 4, conseguimos para la ecuación (1.34)

**Corolario 1.** *Si el núcleo* $k : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ *satisface las condiciones*

$$\int_t^\infty k(u,s)du < \infty, \ \forall t \geq s \geq 0, \tag{1.39}$$

*y*

$$\sup_{t\geq 0} \int_0^t \left( \int_t^\infty k(u,s)du \right) ds \leq \beta < \frac{1}{2}. \tag{1.40}$$

*Entonces, la solución cero de la ecuación (1.34) es estable. Si además se cumple que*

$$\int_0^\infty \left( \int_s^\infty k(u,s)du \right) ds = \infty, \tag{1.41}$$

*se concluye que además es asintóticamente estable.*

*Demostración.* Para comenzar recordamos que:

$$\frac{d}{dt}\int_0^t A(t,s)x(s) = A(t,t)x(t) + \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t}A(t,s)\right)x(s)ds$$

o bien

$$\int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t}A(t,s)\right)x(s)ds = \frac{d}{dt}\int_0^t A(t,s)x(s) - A(t,t,)x(t).$$

Si consideramos $k(t,s) = \frac{\partial}{\partial t}A(t,s)$, resulta natural definir

$$A(t,s) := \int_t^\infty k(u,s)du, \tag{1.42}$$

notemos que $A(t,s)$ está bien definido gracias a la condición (1.39). Luego la ecuación (1.34) se transforma en

$$x'(t) = -A(t,t)x(t) + \frac{d}{dt}\int_0^t A(t,s)x(s)ds, \tag{1.43}$$

sumando un *cero* adecuado, (1.43) se convierte en

$$\frac{d}{dt}[x(t) - \int_0^t A(t,s)x(s)ds] = -A(t,t)[x(t) - \int_0^t A(t,s)x(s)ds]$$

$$-A(t,t)\int_0^t A(t,s)x(s)ds.$$

Ahora gracias a la fórmula de variación de parámetros, se tiene

$$x(t) = e^{-\int_0^t A(u,u)du}x(0) + \int_0^t A(t,s)x(s)ds$$
$$-\int_0^t e^{-\int_s^t A(u,u)du}A(s,s)\left(\int_0^s A(s,v)x(v)dv\right)ds.$$

Notar las soluciones de (1.34) se obtienen de una ecuación integral análoga (1.1). A continuación utilizaremos el Teorema 4 con el objetivo de conseguir la estabilidad y estabilidad asintótica de la solución *cero*.

Definimos el operador $P : BC([0,\infty),\mathbb{R}) \to C([0,\infty),\mathbb{R})$

$$(Px)(t) = e^{-\int_0^t A(u,u)du}x(0) + \int_0^t A(t,s)x(s)ds \tag{1.44}$$
$$-\int_0^t e^{-\int_s^t A(u,u)du}A(s,s)\left(\int_0^s A(s,v)x(v)dv\right)ds.$$

Ahora probaremos que el operador $P$, definido en (1.44), es contractivo. Sean $x, y \in BC([0,\infty),\mathbb{R})$

$$|(Px)(t) - (Py)(t)| \leq |\int_0^t A(t,s)[x(s) - y(s)]ds|$$
$$+|\int_0^t e^{-\int_s^t A(u,u)du}A(s,s)\left(\int_0^s A(s,v)[x(v) - y(v)]dv\right)ds|.$$

Podemos estimar hasta conseguir:

$$|(Px)(t) - (Py)(t)| \leq \int_0^t \left(\int_t^\infty k(u,s)du\right)ds||x-y||$$
$$+\int_0^t e^{-\int_s^t A(u,u)du}A(s,s)\left[\int_0^s \left(\int_s^\infty k(u,v)du\right)dv\right]||x-y||ds.$$

La condición (1.40), conlleva

$$|(Px)(t)| \leq \beta||x-y|| + \int_0^t e^{-\int_s^t A(u,u)du}A(s,s)ds\beta||x-y||.$$

Otra vez, integrando conseguimos

$$|(Px)(t)| \leq 2\beta||x-y||.$$

La condición (1.40), asegura que $2\beta < 1$. La condición (1.39) garantiza que la función $e^{-\int_0^t A(s,s)ds}$ es acotada para $t \geq 0$. Podemos usar el Teorema 4 para concluir que la solución *cero* de (1.34) es estable. Es claro que (1.41), implica que $e^{-\int_0^t A(s,s)ds} \to 0$ cuando $t \to \infty$. Concluimos que la solución *cero* es asintóticamente estable, otra vez usando el Teorema 4. $\square$

### 1.3.2. Ecuaciones Diferenciales Neutrales.

Las ecuaciones diferenciales neutrales son aquellas en las que $x'$ aparece a ambos lados de la ecuación, del tipo

$$x' = F(t, x, x'),$$

es decir, una ecuación no resuelta en $x'$. Este tipo de ecuaciones diferenciales aparecen naturalmente en diversos problemas, por ejemplo, al describir la vibración de masas sobre una barra elástica. De manera también natural, aparecen ecuaciones diferenciales con retardo. Supongamos que buscamos una ecuación diferencial asociada a la vibración de una determinada masa sobre una barra elástica, dentro de un laboratorio. En el laboratorio un hombre supervisa el experimento, y puede hacer variar ciertas condiciones del experimento. Es claro que el movimiento de la masa en cuestión es sensible a las variaciones del sistema. En la naturaleza, las fuerzas involucradas en la vibración actúan sobre la masa de forma instantánea. Sin embargo, en nuestro experimento hay un desfase, entre el momento que el hombre se percata que debe intervenir, y el momento en que interviene. Por lo tanto, la ecuación diferencial neutral que modele tal situación, será en realidad, una ecuación diferencial neutral con retardo. Para este tipo de ecuaciones diferenciales, el problema de la estabilidad de las soluciones es relevante.

Lo anterior devela lo interesante de conseguir condiciones para la estabilidad de la solución *cero* de una ecuación diferencial neutral con retardo, digamos

$$x'(t) = -a(t)x(t) + f(t, x(t)) - \frac{d}{dt}Q(t, x(t - r(t))), \; t \geq 0, \tag{1.45}$$

donde $r : [0, \infty] \to [0, L]$ es una función diferenciable, se considera la condición inicial $x(t) = \phi(t)$ para $t \in [-L, 0]$. Se supone que $f, Q : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y además

$$Q(t, 0) = 0 \;, \;\; Q(t, 0) = 0 \;, \;\; a(t) > 0 \;, \;\; \int_0^\infty a(s)ds = \infty.$$

En [17] hallamos condiciones necesarias para garantizar la estabilidad asintótica de la solución *cero*. Para conseguir este resultado, necesitamos hallar un operador asociado a la ecuación (1.45), para conseguirlo escribimos la ecuación (1.45) como

$$\frac{d}{dt}[x(t) + Q(t, x(t - r(t)))] = -a(t)x(t) + f(t, x(t))$$

sumando un cero adecuado, obtenemos

$$\frac{d}{dt}[x(t) + Q(t, x(t - r(t)))] = -a(t)[x(t) + Q(t, x(t - r(t)))]$$
$$+a(t)Q(t, x(t - r(t))) + f(t, x(t)),$$

usando la fórmula de variación de parámetros, conseguimos una ecuación integral asociada a (1.45)

$$x(t) = e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi}[\phi(0) + Q(0, \phi_0)] + \int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi} f(s, x(s))ds$$

$$-Q(t, x(t - r(t))) + \int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi} a(s)Q(s, x(s - r(s)))ds, t \geq 0.$$

Esta ecuación lleva a definir el operador

$$(Px)(t) = e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi}[\phi(0) + Q(0, \phi_0)] + \int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi} f(s, x(s))ds \tag{1.46}$$

$$-Q(t, x(t - r(t))) + \int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi} a(s)Q(s, x(s - r(s)))ds, t \geq 0;$$

$$(Px)(t) = \phi(t), \ t \in [-L, 0).$$

Se aprecia que el operador $P$, para $t \geq 0$, se puede considerar suma de dos operadores. Por este motivo, utilizaremos el Teorema 3, de Krasnoselskii, para conseguir la existencia de al menos un punto fijo del operador. Definimos los operadores $R, S$ para $t \geq 0$ como

$$(Rx)(t) = e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi}[\phi(0) + Q(0, \phi_0)] + \int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi} f(s, x(s))ds, \tag{1.47}$$

$$(Sx)(t) = \int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi} a(s)Q(s, x(s - r(s)))ds - Q(t, x(s - r(s))). \tag{1.48}$$

Es claro que $P = R + S$. Requerimos que $S$ resulte ser un operador contractivo, claramente esto se traduce en condiciones sobre la función $Q$

**(B)** $Q$ es localmente Lipschitz

$$|Q(t, x) - Q(t, y)| \leq \omega(\rho)|x - y|, \tag{1.49}$$

donde $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es un función continua, creciente tal que, $\omega(0) = 0$.

Necesitamos que el operador $R$ sea completamente continuo, por esto le exigimos a $f$

**(S)** Existe una función $\mu : [0, \infty) \to [0, \infty)$, continua, tal que:

$$|f(t, x)| \leq \mu(t)\omega(\rho)|x|, \tag{1.50}$$

existe una constante $0 < \alpha < 1$ tal que

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-(1-\alpha)\int_s^t a(\xi)d\xi} \mu(s)ds < \infty. \tag{1.51}$$

Exigimos una restricción de continuidad local:

**(C)** $\forall x \in Z : |x| \leq \rho, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ : si $|x - y| < \delta$, entonces:

$$|f(t,x) - f(t,y)| < \epsilon\mu(t)\omega(\rho). \tag{1.52}$$

De igual manera que en la demostración del Teorema 7, definimos una familia de conjuntos no vacíos, convexos y cerrados, de la forma

$$M_\rho = \{x \in BC([-L,\infty)) : x(t) = \phi(t), t \in [-L,0], |x(t)| \leq \rho e^{-\alpha\int_0^t a(\xi)d\xi}\}. \tag{1.53}$$

Por ahora sólo exigimos que $|\phi(0)| \leq \rho$.

*Conjunto Invariante.* Sean $x, y \in M_\rho$, ahora estimaremos sus imágenes por los operadores $R$ y $S$. Para $Rx$, se tiene

$$|(Rx)(t)| \leq e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi}|\phi(0) + Q(0,\phi_0)| + |\int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi} f(s,x(s))ds|,$$

$$|(Rx)(t)| \leq e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi}|\phi(0) + Q(0,\phi_0)| + \int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi}\mu(s)\omega(\rho)|x(s)|ds$$

$$\leq e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi}|\phi(0) + Q(0,\phi_0)| + \omega(\rho)\int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi}\mu(s)[\rho e^{-\alpha\int_0^s a(\xi)d\xi}]ds,$$

$$\begin{aligned} |(Rx)(t)| &\leq e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi}|\phi(0) + Q(0,\phi_0)| \\ &+[\rho e^{-\alpha\int_0^t a(\xi)d\xi}]\omega(\rho)\int_0^t e^{-(1-\alpha)\int_s^t a(\xi)d\xi}\mu(s)ds. \end{aligned} \tag{1.54}$$

Para $Sy$, se tiene

$$|(Sy)(t)| \leq |Q(t, y(t - r(t))| + \int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi}a(s)|Q(s, y(s - r(s))|ds$$

$$\leq \omega(\rho)|y(t - r(t))| + \int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi}a(s)\omega(\rho)|y(s - r(s))|ds,$$

$$\begin{aligned} |(Sy)(t)| &\leq \omega(\rho)[\rho e^{-\alpha\int_0^{t-L} a(\xi)d\xi}] \\ &+\omega(\rho)\int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi}a(s)[\rho e^{-\alpha\int_0^{s-L} a(\xi)d\xi}]ds. \end{aligned} \tag{1.55}$$

Claramente el retardo en el argumento de $y$ genera una dificultad extra, no vista en la demostración del Teorema 7. Superamos esto, asumiendo

**(r)** Existe una constante $J > 0$ tal que

$$\sup_{t\geq 0}\int_{t-L}^{t} a(\xi)d\xi = J. \tag{1.56}$$

Utilizando (1.56) en la estimación (1.55), obtenemos:

$$|(Sy)(t)| \leq [\rho e^{-\alpha\int_0^t a(\xi)d\xi}]\omega(\rho)e^{\alpha\int_{t-L}^{t} a(\xi)d\xi}$$
$$+[\rho e^{-\alpha\int_0^t a(\xi)d\xi}]\omega(\rho)\int_0^t e^{-(1-\alpha)\int_s^t a(\xi)d\xi}a(s)e^{\alpha\int_{s-L}^{s} a(\xi)d\xi}ds,$$

o bien

$$|(Sy)(t)| \leq \rho e^{-\alpha\int_0^t a(\xi)d\xi}\left[\omega(\rho)e^J + \omega(\rho)\int_0^t e^{-(1-\alpha)\int_s^t a(\xi)d\xi}a(s)e^J ds\right]. \tag{1.57}$$

Se sigue de (1.54) y (1.57) que

$$|(Rx)(t)+(Sy)(t)| \leq e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi}|\phi(0)+Q(0,\phi_0)| \tag{1.58}$$
$$+\rho e^{-\alpha\int_0^t a(\xi)d\xi}\left(\omega(\rho)\left[e^J + \int_0^t e^{-(1-\alpha)\int_s^t a(\xi)d\xi}\mu(s)ds(1+e^J)\right]\right).$$

La hipótesis (1.51) garantiza que el término encerrado en los paréntesis es acotado. El hecho que la función $\omega$, sea continua, creciente y además $\omega(0) = 0$, nos permiten hallar $\rho_0$, suficientemente pequeño, de manera que

$$\omega(\rho_0)\left[\int_0^t e^{-(1-\alpha)\int_s^t a(\xi)d\xi}\mu(s)ds + e^J + \int_0^t e^{-(1-\alpha)\int_s^t a(\xi)d\xi}a(s)Jds\right] < 1. \tag{1.59}$$

Estamos en condiciones de determinar la pequeñez de las condición inicial $\phi$, definimos

$$K := 1 - \omega(\rho_0)\left[\int_0^t e^{-(1-\alpha)\int_s^t a(\xi)d\xi}\mu(s)ds + J + \int_0^t e^{-(1-\alpha)\int_s^t a(\xi)d\xi}a(s)Jds\right].$$

Ahora consideramos la función $\hat{Q}(x) := x + Q(0,x)$, gracias a la continuidad de $Q$, se tiene que $\hat{Q}$ es continua, pues, es suma de funciones continuas. La definición de $\hat{Q}$ y el hecho que $Q(0,0) = 0$, garantizan que $\hat{Q}(0) = 0$. Por lo tanto, dado $K\rho_0 > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $||\phi|| < \delta$ se tiene

$$|\phi(0)+Q(0,\phi(0))| < K\rho_0. \tag{1.60}$$

Puesto que $0 < \alpha < 1$, se tiene:

$$e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi} \leq e^{-\alpha\int_0^t a(\xi)d\xi}. \tag{1.61}$$

De (1.60) y (1.61) concluimos que

$$e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi}|\phi(0) + Q(0, \phi_0)| \leq K\rho_0 e^{-\alpha\int_0^t a(\xi)d\xi}. \tag{1.62}$$

Dados $x, y \in M_{\rho_0}$, gracias a (1.57), se tiene

$$|(Rx)(t) + (Sy)(t)| \leq \rho_0 e^{-\alpha\int_0^t a(\xi)d\xi}\Bigg(K + \omega(\rho_0)\Bigg[\int_0^t e^{-(1-\alpha)\int_s^t a(\xi)d\xi}\mu(s)ds$$

$$+J + \int_0^t e^{-(1-\alpha)\int_s^t a(\xi)d\xi}a(s)Jds\Bigg]\Bigg),$$

para $x, y \in M_{\rho_0}$, ambos con condiciones iniciales pequeñas, de modo que (1.62) sea válida, conseguimos

$$|(Rx)(t) + (Sy)(t)| \leq \rho_0 e^{-\alpha\int_0^t a(\xi)d\xi}.$$

Por lo tanto

$$Rx + Sy \in M_{R_0}, \forall x, y \in M_{\rho_0}.$$

Probaremos a continuación que $S$ es un operador contractivo, sean $x, y \in M_{\rho_0}$,

$$|(Sx)(t) - (Sy)(t)| \leq |Q(t, x(t - r(t))) - Q(t, y(t - r(t)))|$$

$$+\int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi}a(s)|Q(s, x(s - r(s))) - Q(s, y(s - r(s))|ds$$

$$\leq ||x - y||_{[-L,\infty)}\left(\omega(\rho_0) + \omega(\rho_0)\int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi}a(s)ds\right).$$

La elección de $\rho_0$, ver (1.59), implica que $\omega(\rho_0)+\omega(\rho_0)\int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi}a(s)ds < 1$. Se sigue que $S$ es contractivo. Probaremos que $R$ es un operador continuo y compacto. Estudiemos la continuidad, sean $x, y \in M_{\rho_0}$

$$|(Rx)(t) - (Ry)(t)| \leq \int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi}|f(s, x(s)) - f(s, y(s))|ds.$$

Dado $\epsilon > 0$ , la condición (1.52) nos asegura que, existe $\delta > 0$ tal que: para $x, y \in M_{\rho_0}$ que cumplen $||x - y||_{[-L,\infty)} < \delta$, entonces

$$|(Rx)(t) - (Ry)(t)| \leq \epsilon\int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi}\mu(s)\omega(\rho_0)ds. \tag{1.63}$$

A continuación demostraremos que

$$\sup_{t\geq 0}\int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi}\mu(s)\omega(\rho_0)ds < \infty.$$

Es claro que $1-\alpha \in (0,1)$, pues, $\alpha \in (0,1)$. Luego

$$-1 < -(1-\alpha) \Rightarrow -\int_s^t a(\xi)d\xi < -(1-\alpha)\int_s^t a(\xi)d\xi.$$

Gracias a la monotonía de la función exponencial

$$e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi} < e^{-(1-\alpha)\int_s^t a(\xi)d\xi}.$$

En otras palabras,

$$\sup_{t\geq 0}\int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi}\mu(s)\omega(\rho_0)ds < \sup_{t\geq 0}\int_0^t e^{-(1-\alpha)\int_s^t a(\xi)d\xi}\mu(s)\omega(\rho_0)ds.$$

La condición (1.51), garantiza que la expresión integral que aparece en (1.63) está acotada. Luego el operador $R$ es continuo. Para demostrar que $R : M_{\rho_0} \to M_{\rho_0}$ es un operador compacto, notamos que el conjunto $M_{\rho_0}$ es equiconvergente a cero. Así que para utilizar el Lema 1, resta probar que $RM_{\rho_0}$, es equicontinuo sobre cada intervalo $[0,n]$, con $n \in \mathbb{N}$. Sea $x \in M_{\rho_0}$, y $t \geq u$ ambos pertenecientes al intervalo $[0,n]$, entonces

$$\begin{aligned}|(Rx)(t)-(Rx)(u)| &\leq |e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi} - e^{-\int_0^u a(\xi)d\xi}||\phi(0)+Q(0,\phi_0)| \\ &+|\int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi} f(s,x(s))ds - \int_0^u e^{-\int_s^u a(\xi)d\xi} f(s,x(s))ds|, \\ &\leq |e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi} - e^{-\int_0^u a(\xi)d\xi}||\phi(0)+Q(0,\phi_0)| \\ &+\int_0^u |e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi} - e^{-\int_s^u a(\xi)d\xi}||f(s,x(s))|ds + \int_u^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi}|f(s,x(s))|ds.\end{aligned}$$

La condición (1.50), nos permite la estimación

$$\begin{aligned}|(Rx)(t)-(Rx)(u)| &\leq |e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi} - e^{-\int_0^u a(\xi)d\xi}||\phi(0)+Q(0,\phi_0)| \\ &+\int_0^u |e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi} - e^{-\int_s^u a(\xi)d\xi}|\mu(s)\omega(\rho_0)|x(s)|ds + \int_u^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi}\mu(s)\omega(\rho_0)|x(s)|ds.\end{aligned}$$

Ahora, para cualquier $x \in M_{\rho_0}$, conseguimos

$$\begin{aligned}|(Rx)(t)-(Rx)(u)| &\leq |e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi} - e^{-\int_0^u a(\xi)d\xi}||\phi(0)+Q(0,\phi_0)| \\ &+\int_0^u |e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi} - e^{-\int_s^u a(\xi)d\xi}|\mu(s)ds\omega(\rho_0)\rho_0 + \int_u^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi}\mu(s)ds\omega(\rho_0)\rho_0.\end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, la continuidad de la función $e^{-\int^t a(\xi)d\xi}$ nos garantiza que, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|t-u| < \delta_1$ entonces

$$|e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi} - e^{-\int_0^u a(\xi)d\xi}| \leq \epsilon.$$

La continuidad de las funciones $\mu(s), e^{\int_0^s a(\xi)d\xi}$, y el hecho que estamos trabajando sobre el intervalo $[0, n]$, nos garantizan que $\mu(s)e^{\int_0^s a(\xi)d\xi}$ está acotada en $\in [0, n]$. Luego, si $M > 0$ es una cota de $\mu$ sobre el intervalo $[0, n]$, para $|t - u| < \delta_1$ obtenemos

$$\int_0^u |e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi} - e^{-\int_0^u a(\xi)d\xi}|e^{\int_0^s a(\xi)d\xi}\mu(s)ds \leq \epsilon Mn,$$

$$\int_u^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi}\mu(s)ds \leq \int_u^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi}dsM. \tag{1.64}$$

Luego existe $\delta_2 > 0$, que garantiza que la expresión (1.64) es menor que $\epsilon$. Consideramos $\delta := \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ tal que

$$|(Rx)(t) - (Rx)(u)| \leq \epsilon\Big(|\phi(0) + Q(0, \phi_0)| + \epsilon + 1\Big), \quad \forall x \in M_{\rho_0}.$$

Así probamos que el conjunto $PM_{\rho_0}$ es equicontinuo sobre cada intervalo $[0, n]$. Conseguimos las hipótesis del Lema 1, que implica que $PM_{\rho_0}$ es un conjunto compacto de $BC\big([-L, \infty), \mathbb{R}\big)$. Se sigue que el operador $R$ es completamente continuo. Por el Teorema 3, de Krasnoselskii, podemos garantizar que existe una función $x(t)$ solución de la ecuación (1.45), y ésta pertenece a $M_{\rho_0}$, i.e.

$$|x(t)| \leq \rho_0 e^{-\alpha\int_0^t a(\xi)d\xi}.$$

Hemos demostrado el

**Teorema 8.** *Si las condiciones (B),(S),(C) y (r) son válidas, entonces la solución cero de la ecuación (1.45) es asintóticamente estable. Es más, las soluciones que tienen condición inicial $\phi$ suficientemente pequeña satisfacen:*

$$|x(t)| \leq \rho_0 e^{-\alpha\int_0^t a(\xi)d\xi}, \text{ donde } \rho_0 > 0 \text{ constante.}$$

Es en el marco de las ecuaciones diferenciales con retardo tanto como en el de las ecuaciones diferenciales funcionales, donde la Teoría de Punto Fijo tiene mucho para aportar en el estudio de la estabilidad de las soluciones de dichas ecuaciones. Principalmente, porque los funcionales de Liapunov adecuados para dichas ecuaciones pueden ser dificiles de hallar, o bien porque muchas veces se traducen en que las funciones involucradas sean acotadas para cada $t$. Mientras, que las condiciones de promedio, admiten funciones no acotadas en $t$.

### 1.3.3. Ecuación Diferencial de Segundo Orden.

Hasta el momento no hemos conseguido resultado alguno de estabilidad para las soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden. En parte porque los Teoremas 4,5,6 y 7, pueden extenderse para sistemas de ecuaciones diferenciales.

Por otro lado, es un tema poco tratado en la bibliografía que ha llegado a nuestras manos. Sólo hallamos [4] y [5], ambos trabajos tratan sobre la estabilidad de soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden por medio de la Teoría del Punto fijo. En [5] Burton y Furumochi estudian un caso lineal perturbado. En [4] Burton se enfoca en una ecuación de segundo orden de tipo Liénard con retardo. Debido a que existe una extensa literatura sobre ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden [7, 9, 10, 11], hemos decidido buscar una aplicación de nuestros resultados, a este interesante tipo de ecuaciones diferenciales.

En [5], Burton y Furumochi consideran la ecuación diferencial de segundo orden perturbada

$$x'' + 2f(t)x' + x + g(t)x^2 = 0, \tag{1.65}$$

y prueban que la solución *cero* de (1.65) es asintóticamente estable, cuando se tiene $f(t) > 0, f(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, $\int_0^t f(s)ds \to \infty$ cuando $t \to \infty$, y

$$|f'(t) + f^2(t)| \leq Kf(t), \ t \in [0, \infty), \ K < 1 \tag{1.66}$$

$$|g(t)| \leq Mf(t), \ t \in [0, \infty), \tag{1.67}$$

con $K, M$ constantes.

En éste resultado usan el Teorema 2. El mayor obstáculo para obtener un resultado de estabilidad por medio del primer Teorema de Schauder, pasa por conseguir un conjunto convexo, compacto, no vacío e invariante bajo el operador $\Gamma$. Para garantizar estas condiciones, generalmente se considera [ver [2, 5]] una familia de conjuntos convexos, cerrados y no vacíos, del tipo

$$M_\psi = \{x \in X : |x(t)| \leq \psi(t)\}.$$

Más allá de conocer el tipo de conjunto que podría ayudar, hallar la función mayorante adecuada, es un reto. Se requiere hallar $\psi(t)$ tal que:

i) $|(\Gamma\psi)(t)| \leq \psi(t)$, y

ii) $\psi(t) \to 0$ si $t \to \infty$.

La condición i), garantiza que $M_\psi$ resulte invariante bajo el operador $\Gamma$. Mientras que ii) asegura la equiconvergencia a cero del conjunto $M_\psi$. Condición fundamental para que el operador $\Gamma$ resulte compacto en $BC(\mathbb{R}, ||\cdot||)$. Burton y Furumochi en [5] consiguen una función $\psi(t)$ explícita. Además se percatan que la función mayorante, debe satisfacer una ecuación diferencial resoluble, cuya solución tiende a *cero*.

Nuestro objetivo aquí es construir un conjunto adecuado, de modo que el Teorema 2 garantice, un resultado de estabilidad asintótica de la solución *cero*.

Destacamos, que la construcción de dicho conjunto, se sustenta, a su vez en la Teoría del Punto Fijo. Consideramos una ecuación diferencial similar a (1.65), esta vez la ecuación diferencial semi lineal de segundo orden

$$x'' + 2f(t)x' + (1 + q(t))x + g(t, x) = 0. \tag{1.68}$$

No buscamos condiciones para la estabilidad de la solución *cero*. Nos conformamos con hallar una función mayorante $\psi$, que satisface las condiciones i) y ii). Lo anterior nos entrega un conjunto adecuado para conseguir la estabilidad asintótica de la solución *cero*, mediante el Teorema 2.

Supondremos que $f(t) > 0, f(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ y también $\int_0^t f(s)ds \to \infty$ cuando $t \to \infty$,

$$|f'(t) + f^2(t) - q(t)| \leq Kf(t),\ t \in [0, \infty),\ K < 1. \tag{1.69}$$

Además existe una función continua $\mu : [0, \infty) \to [0, \infty)$, tal que $\mu(0) = 0$, y una función continua $\lambda : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tales que:

$$|g(t, x)| \leq \lambda(t)\mu(|x|)|x|,\ t \in [0, \infty), \tag{1.70}$$

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-\int_s^t f(u)du} \lambda(s)ds < \infty, \forall t \geq 0. \tag{1.71}$$

La ecuación (1.68) se puede llevar al sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = y - f(t)x$$

$$y' = -1x - f(t)y + \{f'(t) + f^2(t) - q(t)\}x - g(t, x),$$

que se puede expresar en forma vectorial como:

$$X' = \begin{pmatrix} -f(t) & 1 \\ -1 & -f(t) \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f'(t) + f^2(t) - q(t) & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ -g(t, x) \end{pmatrix},$$

respectivamente

$$X' = A(t)X + B_1(t)X + F_1(t, X). \tag{1.72}$$

**Observación 5.** *Se hace notar que:*

$$A(t) \int_0^t A(s)ds = \int_0^t A(s)dsA(t).$$

*Por lo tanto, la matriz fundamental de* $Z' = A(t)Z$ *es* $\exp(\int_0^t A(s)ds)$, *y no es difícil ver que*

$$\exp(\int_0^t A(s)ds) = \exp(\int_0^t -f(s)ds) \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Ahora estamos en condiciones de utilizar la fórmula de variación de parametros en (1.68), y obtenemos

$$X(t) = e^{\int_0^t A(u)du}[x_0 + \int_0^t e^{-\int_0^s A(u)du}(B_1(s)X(s) + F_1(s, X(s)))ds].$$

Luego, el operador integral indicado para estudiar las soluciones de (1.68) es

$$(\Gamma X)(t) = e^{\int_0^t A(u)du}[x_0 + \int_0^t e^{-\int_0^s A(u)du}(B_1(s)X(s) + F_1(s, X(s)))ds]. \quad (1.73)$$

Consideramos la norma $|\cdot|_v$ en $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, definida para $U(t) = (u_{ij}(t))$, como $|U(t)|_v = \text{máx}\left\{ \sum_{1\leq i\leq 2} |u_{i1}(t)|, \sum_{1\leq i\leq 2} |u_{i2}(t)| \right\}$. Es sencillo conseguir

$$|B_1(t)|_v = |f'(t) + f^2(t) - q(t)| \leq Kf(t),\ t \geq 0. \quad (1.74)$$

$$|F_1(t)|_v = |g(t,x)| \leq \lambda(t)\mu(|x|)|x|,\ t \geq 0. \quad (1.75)$$

Estimando las imágenes de $\Gamma$, se consigue

$$|(\Gamma X)(t)|_v \leq 2\bigg( |x_0|_v e^{-\int_0^t f(u)du} + \int_0^t e^{-\int_s^t f(u)du} Kf(s)|X(s)|_v ds$$
$$+ \int_0^t e^{-\int_s^t f(u)du} \lambda(s)\mu(|X(s)|_v)|X(s)|_v ds \bigg).$$

puesto que buscamos una función real $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, tal que $|X(s)|_v \leq \psi(s)$, observamos que una tal $\psi$ que permita conseguir un conjunto invariante, debe satisfacer:

$$\psi(t) = \psi_0 e^{-\int_0^t f(u)du} + \int_0^t e^{-\int_s^t f(u)du} Kf(s)\psi(s)ds \quad (1.76)$$
$$+ \int_0^t e^{-\int_s^t f(u)du} \lambda(s)\mu(\psi(s))\psi(s)ds.$$

Pero la ecuación (1.76), no es más que una ecuación integral como las estudiadas en la primera sección del Capítulo 1. Es más, se asocia facilmente a la fórmula de variación de párametros de la ecuación diferencial

$$\psi'(t) = -f(t)\psi(t) + Kf(t)\psi(t) + \lambda(t)\mu(\psi(t))\psi(t). \quad (1.77)$$

**Observación 6.** *Burton y Furumochi en [2], se enfrentan a la ecuación diferencial logística*

$$v'(t) = f(t)\big(K - 1 + Mv(t)\big)v(t),$$

*que tiene solución explícita.*

A continuación, utilizamos la Teoría del Punto Fijo, para asegurar que existen soluciones de (1.77) que tienden a cero. Gracias a la condición (1.69) sabemos que $K < 1$, y luego, por las condiciones (1.70) y (1.71), sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $|x| < \delta$ entonces

$$K + \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-\int_s^t f(u)du} \lambda(s) ds \mu(|x|) < 1.$$

Como $\psi_0 e^{-\int_0^t f(u)du} \to 0$, cuando $t \to \infty$. Se satisfacen las hipótesis del Teorema 4, por lo tanto, existe una función $\psi$, solución de (1.77) que tiende a cero. Por tanto $\psi$ satisface i) y ii).

Concluimos así, que existe una función mayorante $\psi$ adecuada para definir un conjunto convexo, cerrado y no vacío

$$M_\psi = \{X \in BC([0,\infty), \mathbb{R}^2) : |X(t)|_v \leq \psi(t),\ t \geq 0\}, \tag{1.78}$$

que resulta invariante bajo el operador $\Gamma$, definido en (1.73).

# Capítulo 2

# Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden Tipo Liénard.

## 2.1. Introducción.

A principios de los 60's Smith [20] probó un resultado, ahora clásico, sobre estabilidad asintótica de una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$x'' + h(t)x' + k^2x = 0, \tag{2.1}$$

donde $h(t)$ es una función continua, $k^2$ es una constante positiva, y $h_0$ es una constante positiva, tal que

$$h(t) \geq h_0. \tag{2.2}$$

Smith demostró que la solución *cero* de (2.1) es asintóticamente estable sí y sólo si

$$\int_0^\infty e^{-\int_0^t h(u)du}\left(\int_0^t e^{-\int_0^s h(u)du}ds\right)dt = \infty. \tag{2.3}$$

No es difícil probar que (2.3) es válida para $h(t) = h_0 + t$, pero para el caso $h(t) = h_0 + t^2$ falla.

En la década de los '90s, numerosos artículos escritos por Hatvani et al. [12], [13] y Pucci y Serrin [18], extendieron el resultado en distintas formas. Ellos estudiaron el caso lineal y también una versión no lineal

$$x'' + f(t, x, x')x' + g(x) = 0, \tag{2.4}$$

con variaciones de $f(t, x, x') \geq h(t) \geq 0$, obteniendo resultados cercanos al de Smith. La condición $h(t) \geq h_0$ se puede debilitar, también Smith lo hizo, pidiendo que $h(t)$ sea integralmente positiva, pero se requiere que los intervalos donde $h(t) = 0$ estén acotados por la constante de Lipschitz de la función $g$. Estos resultados se consiguieron en su mayoría por medio de funcionales de Liapunov, o bien por desigualdades diferenciales. Sin embargo, no extendierón bien el caso en que la fuerza de reposición dependiente del tiempo, actúa con retardo. Zhang, en [21], aborda este último punto al considerar la ecuación

$$x'' + f(x)x' + g(x(t-L)) = 0, \tag{2.5}$$

y consigue, mediante funcionales de Liapunov, condiciones para la estabilidad de solución *cero*.

El año 2005, en [4], Burton estudió la estabilidad de la solución *cero* de la ecuación

$$x'' + f(t,x,x')x' + b(t)g(x(t-L)) = 0, \tag{2.6}$$

donde $f(t,x,y) \geq a(t)$ para alguna función continua $a$. Consiguiendo un análogo del resultado de Smith, para la condición suficiente. Todo esto por medio de la Teoría del Punto Fijo. Al igual que en el resultado de Smith, funciona para $a(t) = t$ pero falla para $a(t) = t^2$. Entre las condiciones que necesita el resultado de Burton destacamos:

$$\int_0^\infty \left( \int_0^\infty e^{-\int_{t+L}^{u+t+L} \gamma c(s)ds} du \right) b(t+L)dt = \infty, \ \forall \gamma > 0, \tag{2.7}$$

donde $c(t)$ es una función positiva, tal que $f(t,x,y) \leq F(x,y)c(t)$. Además

$$\begin{aligned} &2K \sup_{t\geq 0} \int_{t-L}^t \left( \int_0^\infty e^{-\int_{s+L}^{u+s+L} a(v)dv} du \right) b(s+L)ds \\ &+2K \sup_{t\geq 0} \int_0^t \left( \int_{t-s}^\infty e^{-\int_s^{u+s} a(v)dv} du \right) b(s+L)ds \leq \alpha < 1, \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde $K$ es la constante de Lispchitz de $g$. Finalmente, deben existir los números $a_0 > 0$ y $Q > 0$ tales que para cada $t \geq 0$, si $J \geq Q$ entonces

$$\int_t^{t+J} a(v)dv \geq a_0 J. \tag{2.9}$$

La condición (2.7) refleja la cercanía entre el resultado de Smith y el de Burton, siendo (2.7) fundamental para garantizar la estabilidad asintótica. Mientras la condición (2.8), se requiere para garantizar que el operador asociado a la ecuación diferencial, resulte contractivo. Mientras que (2.9) permite ciertas estimaciones fundamentales.

En este capítulo, continuamos el trabajo de Burton, sobre la estabilidad de la solución *cero* de la ecuación (2.6). Conseguimos una nueva versión del resultado en [4], pues, cambiamos las condiciones (2.8) y (2.7), por una más sencilla de verificar, que enunciamos desde ya:

Existe una función $\tau(t)$ tal que, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene

$$0 \leq \tau(t) \leq f(t, x, y), \tag{2.10}$$

y

$$\int_0^\infty \frac{|\tau'(t)|}{\tau^2(t)} dt. \tag{2.11}$$

Esta condición nos permite garantizar que

$$\begin{aligned} &2K \sup_{t\geq 0} \int_{t-L}^t \left( \int_0^\infty e^{-\int_{s+L}^{u+s+L} a(v)dv} du \right) b(s+L) ds \\ &+2K \sup_{t\geq 0} \int_0^t \left( \int_{t-s}^\infty e^{-\int_s^{u+s} a(v)dv} du \right) b(s+L) ds < \infty. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Incluso permitirá utilizar el Teorema asintótico de Banach,

**Teorema 9** (Banach, 1922). *Sean $(S, \rho)$ un espacio de Banach y $F : S \to S$ un operador , no necesariamente continuo. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F^n$ es contractivo. Entonces $F$ tiene un único punto fijo en $S$.*

Este Teorema permitirá probar que toda solución de (2.6) tiende a *cero* cuando $t \to \infty$. Mediante un ejemplo haremos notar que nuestro resultado es más amplio que el resultado Burton, a la vez que se acerca más al resultado de Smith.

Para estudiar las cualidades de las soluciones de la ecuación (2.6) se requieren una serie de transformaciones, de manera de abordar una ecuación equivalente, pero ahora cuasi-lineal. Lo anterior da forma a la segunda sección. En la tercera sección se prueban una serie de lemas que facilitaran la demostración de nuestro Teorema 10, que junto a algunos comentarios, corresponden a la última sección.

## 2.2. Transformaciones y Linealización.

Para la ecuación

$$x''(t) + f(t, x(t), x'(t))x'(t) + b(t)g(x(t-L)) = 0 \tag{2.13}$$

bajo las condiciones iniciales $x(t) = \psi(t), t \in [-L, 0]$ y $x'(0) = \sigma$. Suponemos que existe una solución $x_0(t)$ de (2.13) sobre todo el intervalo $I = [0, \infty)$. Definimos la función

$$a(t) := f(t, x_0(t), x_0'(t)) \tag{2.14}$$

y luego $x_0(t)$ es solución de la ecuación diferencial

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)g(x(t-L)) = 0 \tag{2.15}$$

con idénticas condiciones iniciales. Consideramos la ecuación (2.13) una ecuación no homogenéa en $x'(t)$, por medio de la fórmula de variación de parámetros, podemos hallar una ecuación integro-diferencial del tipo:

$$x'(t) = x'(0)e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi} - \int_0^t e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi} b(s)g(x(s-L))ds, \tag{2.16}$$

bajo las condiciones iniciales $x(t) = \psi(t), t \in [-L, 0]$ y $x'(0) = \sigma$. Otra vez, $x_0(t)$ es solución de (2.16). Para facilitar la notación, definimos

$$A(t,s) := e^{-\int_s^t a(\xi)d\xi}. \tag{2.17}$$

Podemos escribir (2.16) de la forma

$$x'(t) = x'(0)A(t,0) - \int_0^t A(t,s)b(s)g(x(s-L))ds. \tag{2.18}$$

Transformaremos ésta ecuación, de modo de poder aplicar, otra vez, la fórmula de variación de parámetros. Para esto utilizamos la identidad:

$$\frac{d}{dt}\int_0^t F(t,s)b(s)g(x(s-L))ds = F(t,t)b(t)g(x(t-L))$$

$$+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}F(t,s)b(s)g(x(s-L))ds,$$

o bien

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}F(t,s)b(s)g(x(s-L))ds = \frac{d}{dt}\int_0^t F(t,s)b(s)g(x(s-L))ds \tag{2.19}$$

$$-F(t,t)b(t)g(x(t-L)).$$

Para $F(t,s) = -\int_t^\kappa A(u,s)du$, donde $\kappa$ es una constante, la expresión (2.19) queda:

$$\int_0^t A(t,s)b(s)g(x(s-L))ds = \left[\int_t^\kappa A(u,t)du\right]b(t)g(x(t-L)) \tag{2.20}$$

$$-\frac{d}{dt}\int_0^t \left(\int_t^\kappa A(u,s)du\right)b(s)g(x(s-L))ds.$$

Nos detenemos en la expresión $|-\int_t^\kappa A(u,s)du| \leq \int_t^\kappa |A(u,s)|du \leq \int_t^\kappa e^{-\int_s^u a(\xi)d\xi}du$, pues, deseamos reemplazar $\kappa$ por $\infty$. Debemos exigir condiciones para garantizar la convergencia de la integral $-\int_t^\infty A(u,s)du$. Recordamos que $a(t) = f(t, x_0(t), x_0'(t))$, ver (2.14). Lo que hace necesario estimar $a(t)$ sin necesidad de conocer $x_0(t)$, por esto, exigimos la presencia de tres funciones continuas $\tau, \omega_1, \omega_2 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ de manera que

$$0 \leq \tau(t) \leq f(t,x,y) \leq \omega_1(t)\omega_2(|x|+|y|), \; x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.21}$$

Pues entonces, con total independencia de $x_0(t)$, se tiene la estimación

$$\int_t^{\kappa} A(u,s)du = \int_t^{\kappa} e^{-\int_s^u a(\xi)d\xi}du \le \int_t^{\kappa} e^{-\int_s^u \tau(\xi)d\xi}du. \tag{2.22}$$

Asumimos que la función $\tau$ satisface

$$\int_t^{\infty} e^{-\int_s^u \tau(\xi)d\xi}du < \infty,\ s \le t. \tag{2.23}$$

Luego las condiciones (2.21) y (2.23), garantizan que $\int_t^\infty A(u,s)du$ está bien definida para $0 \le s \le t$.

Asumiendo (2.21),(2.23), y usando (2.20), la ecuación (2.18) se escribe

$$\begin{aligned} x'(t) &= x'(0)A(t,0) - \left(\int_t^\infty A(u,t)du\right)b(t)g(x(t-L)) \\ &+\frac{d}{dt}\int_0^t \left(\int_t^\infty A(u,s)du\right)b(s)g(x(s-L))ds, \end{aligned} \tag{2.24}$$

que bajo las condiciones iniciales del comienzo, es satisfecha por $x_0(t)$. La ecuación integro-diferencial (2.24) es no lineal y con retardo, lo que complica el estudio de sus soluciones. El retardo en el segundo término de la derecha, es superado usando la identidad:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{t-L}^t \hat{F}(v+L)b(v+L)g(x(v))dv &= \hat{F}(t+L)b(t+L)g(x(t)) \\ &-\hat{F}(t)b(t)g(x(t-L)). \end{aligned} \tag{2.25}$$

O bien

$$\begin{aligned} \hat{F}(t)g(x(t-L)) &= \hat{F}(t+L)b(t+L)g(x(t)) \\ &-\frac{d}{dt}\int_{t-L}^t \hat{F}(v+L)b(v+L)g(x(v))dv. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Para $\hat{F}(v) = \int_v^\infty A(u,v)du$, la ecuación (2.26) se convierte en

$$\begin{aligned} \left(\int_t^\infty A(u,t)du\right)b(t)g(x(t-L)) &= \left(\int_{t+L}^\infty A(u,t+L)du\right)b(t+L)g(x(t)) \\ &-\frac{d}{dt}\int_{t-L}^t \left(\int_{v+L}^\infty A(u,v+L)du\right)(v+L)b(v+L)g(x(v))dv. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Reemplazamos (2.34) en (2.24) conseguimos:

$$x'(t) = x'(0)A(t,0) - \left(\int_{t+L}^\infty A(u,t+L)du\right)b(t+L)g(x(t)) \tag{2.28}$$

$$+\frac{d}{dt}\int_{t-L}^{t}\left(\int_{v+L}^{\infty}A(u,v+L)du\right)b(v+L)g(x(v))dv$$
$$+\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}\left(\int_{t}^{\infty}A(u,s)du\right)b(s)g(x(s-L))ds.$$

Ecuación que bajo las condiciones iniciales del comienzo, aún tiene como solución a $x_0(t)$. Necesitamos una ecuación que tenga una parte lineal. Por esto, exigimos que $g$ sea una función continua, tal que

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x} \text{ existe.} \tag{2.29}$$

Entonces podemos definir la función

$$q(t) := \frac{\left(\int_{t+L}^{\infty}A(u,t+L)du\right)b(t+L)g(x_0(t))}{x_0(t)} \tag{2.30}$$

que es continua (si no lo fuese, la última hipótesis sobre $g$ nos garantiza que su discontinuidad, es reparable). Así conseguimos que $x_0(t)$ sea solución de la ecuación:

$$x'(t) = x'(0)A(t,0) - q(t)x(t) + \frac{d}{dt}\int_{t-L}^{t}\mathbb{A}(v+L,v+L)b(v+L)g(x(v))dv$$
$$+\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}\mathbb{A}(t,s)b(s)g(x(s-L))ds,$$

donde

$$\mathbb{A}(t,s) = \int_{t}^{\infty}A(u,s)du. \tag{2.31}$$

La condición $x'(0)=\sigma$, lleva a estudiar

$$x'(t) = \sigma A(t,0) - q(t)x(t) + \frac{d}{dt}\int_{t-L}^{t}\mathbb{A}(v+L,v+L)b(v+L)g(x(v))dv \tag{2.32}$$
$$+\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}\mathbb{A}(t,s)b(s)g(x(s-L))ds.$$

La ecuación diferencial (2.32) con condición inicial $x(t)=\psi(t), t\in[-L,0]$ tiene como solución $x_0(t)$. Remarcamos que $x_0(t)$ es solución de la ecuación (2.13) con idénticas condiciones iniciales.

**Observación 7.** *Si se tienen las condiciones (2.21),(2.23) y (2.40). Las transformaciones anteriores serán válidas, por lo tanto, toda solución $x_0(t)$ de (2.13) satisface una ecuación cuasi-lineal del tipo (2.32). Nosotros probaremos que la ecuación (2.32) tiene solución única para el problema de condiciones iniciales, y probaremos que la solución cero de (2.32) es asintóticamente estable. Si $x_0(t)$ es solución única de (2.13), la unicidad de las soluciones de (2.13) y (2.32) nos permitirá concluir que se trata de la misma función. Y así conseguiremos la estabilidad asintótica de la solución cero de (2.13), estudiando la estabilidad de la solución cero de (2.32).*

## 2.3. Resultados Previos.

En esta sección, probaremos algunos Lemas y Proposiciones, que nos permitirán demostrar el Teorema 10, que entrega condiciones suficientes para garantizar la estabilidad asintótica de la solución *cero* de (2.13). Separaremos esta sección en los resultados que garantizan soluciones acotadas, y los resultados que aseguran soluciones tendiendo a *cero*. Estos últimos, estrechamente relacionados con la estabilidad asintótica.

### 2.3.1. Funciones Acotadas.

Para comenzar, damos condiciones que garantizan la existencia de la función $\mathbb{A}(t,s)$, definido en (2.31). Es más, probamos que estas condiciones garantizan que la función $\mathbb{A}(t,s)$ está acotada. Cabe mencionar que la acotación de dicha función es vital para utilizar el Teorema 10. Por estos motivos es que nuestro siguiente Lema es fundamental.

**Lema 2.** *Si la función $\tau(t)$ satisface (2.21), i.e.*

$$0 \leq \tau(t) \leq f(t,x,y),\ \forall x,y \in \mathbb{R},$$

*junto a la condición de promedio*

$$\int_L^\infty \left|\frac{\tau'(u)}{\tau^2(u)}\right| du < \infty. \tag{2.33}$$

*Entonces $\mathbb{A}(t,s)$ está bien definido por (2.22), para $0 \leq s \leq t$, de hecho es una función acotada para $0 \leq s \leq t$.*

*Demostración.* Para $a(t)$, definido en (2.14), gracias a la condición (2.21) se tiene:

$$0 \leq \tau(t) \leq a(t),$$

lo que implica

$$\mathbb{A}(t,t) = \int_t^\infty e^{-\int_t^u a(\xi)d\xi} du \leq \int_t^\infty e^{-\int_t^u \tau(\xi)d\xi} du, \tag{2.34}$$

$$\mathbb{A}(t,s) = \int_t^\infty A(u,s)du = \int_t^\infty e^{\int_s^u a(\xi)d\xi} du$$

$$\mathbb{A}(t,s) \leq e^{-\int_s^t \tau(\xi)d\xi} \int_t^\infty e^{-\int_t^u \tau(\xi)d\xi} du, \tag{2.35}$$

para $0 \leq s \leq t$. Definimos

$$\mathbb{E}(t,s) := \int_t^\infty e^{-\int_s^u \tau(\xi)d\xi} du. \tag{2.36}$$

De (2.36), se sigue que

$$\mathbb{A}(t,t) \leq \mathbb{E}(t,t), \quad \mathbb{A}(t,s) \leq \mathbb{E}(t,s),\ 0 \leq s \leq t. \tag{2.37}$$

A demás, se puede apreciar que

$$\mathbb{E}(t,s) \leq \mathbb{E}(t,t),\ 0 \leq s \leq t. \tag{2.38}$$

La condición de promedio para $\tau$, (2.33), garantiza que $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\tau(t)}$ existe. Ahora estudiamos $\mathbb{E}(t,t)$ definido (2.36)

$$\mathbb{E}(t,t) = e^{\int_0^t \tau(\xi)d\xi} \int_t^\infty e^{-\int_0^s \tau(\xi)d\xi} \frac{\tau(s)}{\tau(s)} ds$$

$$= e^{\int_0^t \tau(\xi)d\xi} \left[ -e^{-\int_0^s \tau(\xi)d\xi} \frac{1}{\tau(s)}\bigg|_t^\infty - \int_t^\infty e^{-\int_0^s \tau(\xi)d\xi} \left(\frac{\tau'(s)}{\tau^2(s)}\right) ds \right]$$

$$= e^{\int_0^t \tau(\xi)d\xi} \left[ e^{-\int_0^t \tau(\xi)d\xi} \frac{1}{\tau(t)} - \int_t^\infty e^{-\int_0^s \tau(\xi)d\xi} \left(\frac{\tau'(s)}{\tau^2(s)}\right) ds \right],$$

$$\mathbb{E}(t,t) = \frac{1}{\tau(t)} - \int_t^\infty e^{-\int_t^s \tau(\xi)d\xi} \left(\frac{\tau'(s)}{\tau^2(s)}\right) ds. \tag{2.39}$$

La ecuación (2.39), garantiza que $\mathbb{E}(t,t)$ está bien definida, para $t \geq 0$. De las relaciones (2.37) y (2.38), se garantiza que la función $\mathbb{A}(t,s)$ está bien definida para $0 \leq s \leq t$. Ahora podemos estimar

$$|\mathbb{E}(t,t)| \leq \frac{1}{\tau(t)} + \int_t^\infty |e^{-\int_t^s \tau(\xi)d\xi}| \frac{|\tau'(s)|}{\tau^2(s)} ds$$

$$\leq \frac{1}{\tau(t)} + \int_0^\infty \frac{|\tau'(s)|}{\tau^2(s)} ds,\ \forall t \geq L.$$

Se sigue de (2.37) que $\mathbb{A}(t,t), \mathbb{A}(t,s)$ están acotados para $0 \leq s \leq t$. □

Las siguientes proposiciones, tienen por objetivo garantizar que la imagen de cierto operador sean las funciones continuas y acotadas.

**Proposición 1.** *Si la función $g(x)$ satisface (2.40), y además*

$$\frac{g(x)}{x} \geq \beta > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

*Entonces, si la función $b(t)$ es positiva, la función $q(t)$, definida en (2.30), es positiva.*

*Demostración.* La definición de la función $A(u, t+L)$, en (2.17), garantiza que esta función sólo toma valores positivos. Asumimos que $b(t+L)$ es una función positiva. Por lo tanto,

$$\left(\int_{t+L}^{\infty} A(u, t+L)du\right)b(t+L) > 0, \ t \geq 0.$$

Para $\beta > 0$, se tiene

$$\left(\int_{t+L}^{\infty} A(u, t+L)du\right)b(t+L)\beta > 0, \ t \geq 0.$$

De la definición de $q(t)$, en (2.30), se tiene

$$q(t) = \frac{\left(\int_{t+L}^{\infty} A(u, t+L)du\right)b(t+L)g(x_0(t))}{x_0(t)}, \ t \geq 0,$$

y de la condición sobre $g$, obtenemos

$$0 < \left(\int_{t+L}^{\infty} A(u, t+L)du\right)b(t+L)\beta \leq q(t), \ t \geq 0.$$

□

**Proposición 2.** *Si la función $\tau$ definida en (2.21) es diferenciable, y satisface (2.33). Entonces se tiene que $\int_0^t e^{-\int_0^u \tau(\xi)d\xi}du$ es acotada para $t \geq 0$.*

*Demostración.* Consideremos $t \geq L$,

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-\int_0^u \tau(\xi)d\xi}du &= \int_0^L e^{-\int_0^u \tau(\xi)d\xi}du + \int_L^t e^{-\int_0^u \tau(\xi)d\xi}du \\ &= \int_0^L e^{-\int_0^u \tau(\xi)d\xi}du + \int_L^t e^{-\int_0^u \tau(\xi)d\xi}\frac{\tau(u)}{\tau(u)}du.\end{aligned}$$

Integrando por partes y estimando, conseguimos

$$|\int_0^t e^{-\int_0^u \tau(\xi)d\xi}du| \leq L + \frac{e^{-\int_0^L \tau(\xi)d\xi}}{\tau(L)} + \int_L^t \frac{|\tau'(u)|}{\tau^2(u)}du.$$

Concluimos así, que $\int_0^t e^{-\int_0^u \tau(\xi)d\xi}du$ es acotado para $t \in [0, \infty)$. □

**Proposición 3.** *Si la función $\tau$ definida en (2.21) es diferenciable, y satisface (2.33). Entonces se tiene que $\int_0^t e^{-\int_u^t \tau(\xi)d\xi}du$ es acotada para $t \geq 0$.*

*Demostración.* Consideremos $t \geq L$,

$$\int_0^t e^{-\int_u^t \tau(\xi)d\xi} du = \int_0^L e^{-\int_u^t \tau(\xi)d\xi} du + \int_L^t e^{-\int_u^t \tau(\xi)d\xi} du$$

$$= \int_0^L e^{-\int_u^t \tau(\xi)d\xi} du + \int_L^t e^{-\int_u^t \tau(\xi)d\xi} \frac{\tau(u)}{\tau(u)} du.$$

Integrando por partes y estimando, conseguimos

$$|\int_0^t e^{-\int_0^u \tau(\xi)d\xi} du| \leq L + \frac{e^{-\int_0^t \tau(\xi)d\xi}}{\tau(L)} + \int_L^t \frac{|\tau'(u)|}{\tau^2(u)} du.$$

Concluimos así, que $\int_0^t e^{-\int_u^t \tau(\xi)d\xi} du$ es acotado para $t \in [0,\infty)$. □

**Proposición 4.** *Si $|r(u)| \leq \hat{r}$ para todo $u \in [0,\infty)$ y $\eta$ es una función positiva, entonces $\int_0^t \eta(u) e^{-\int_u^t \eta(\xi)d\xi} r(u)du$ es acotada.*

*Demostración.* Sólo debemos estimar esta integral

$$|\int_0^t \eta(u) e^{-\int_u^t \eta(\xi)d\xi} r(u)du| \leq \int_0^t |\eta(u)| e^{-\int_u^t \eta(\xi)d\xi} |r(u)| du$$

$$\leq \hat{r} \int_0^t \eta(u) e^{-\int_u^t \eta(\xi)d\xi} du \leq \hat{r}\left( e^{-\int_t^t \eta(\xi)d\xi} - e^{-\int_0^t \eta(\xi)d\xi} \right) \leq \hat{r}.$$

□

### 2.3.2. Funciones que tienden a cero.

**Lema 3.** *Supongamos que para toda constante $\gamma > 0$*

$$\int_0^t \int_{s+L}^{\infty} e^{-\int_{s+L}^u \gamma\omega_1(\xi)d\xi} b(s+L) du ds = \infty, \tag{2.40}$$

*La función $b$ es positiva y $g(x)$ satisface (2.33) junto a*

$$\frac{g(x)}{x} \geq \beta > 0, \; x \in \mathbb{R}.$$

*Si las funciones $x_0(t), x_0'(t)$ están acotadas en $[0,\infty)$, entonces*

$$e^{-\int_0^t q(\xi)d\xi} \to 0 \quad \textit{cuando} \quad t \to \infty.$$

*Demostración.* De (2.30) tenemos

$$q(s) = \frac{\mathbb{A}(s+L)b(s+L)g(x_0(s))}{x_0(s)},$$

de la condición exigida a $g$, conseguimos

$$q(s) \geq \mathbb{A}(s+L)b(s+L)\beta > 0.$$

Recordamos que, $\omega_2$ es una función continua, luego, como $x_0(t)$ y $x_0'(t)$ son acotadas, $\omega_2$ está definida sobre un compacto, por lo que su imagen está acotada por un valor denotado por $\gamma_0 > 0$. De la condición (2.21), se tiene

$$f(t, x_0(t), x_0'(t)) \leq \omega_1(t)\omega_2(|x_0(t)| + |x_0'(t)|) \leq \omega_1(t)\gamma_0,$$

y así conseguimos

$$A(t,u) = e^{-\int_u^t a(\xi)d\xi} \geq e^{-\int_u^t \gamma_0\omega_1(\xi)d\xi}.$$

Luego se obtiene

$$\int_0^t q(s)ds \geq \beta \int_0^t \mathbb{A}(s+L)b(s+L)ds = \beta \int_0^t \left( \int_{s+L}^{\infty} A(u, s+L)b(s+L)du \right) ds$$

$$\geq \beta \int_0^t \left( \int_{s+L}^{\infty} e^{-\int_{s+L}^u \gamma_0\omega_1(\xi)d\xi} b(s+L)du \right) ds.$$

De la condición (2.40) se sigue que $\int_0^t q(s)ds \to \infty$ cuando $t \to \infty$. □

**Proposición 5.** *Si la función $g(x)$ satisface (2.33). Entonces para toda función $z(t)$ que tiende a cero, se tiene que*

$$\int_{t-L}^t g(z(v))dv \to 0 \quad \textit{cuando} \quad t \to \infty.$$

*Demostración.* Definimos $G(t) = \sup_{u \in [t-L,t]} ||g(z(u))||$, así obtenemos

$$\int_{t-L}^t g(z(v))dv \leq LG(t),$$

Debido a que $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x}$ existe, se sigue que $g(x) \to 0$, cuando $x \to 0$. Resulta fácil ver que si $z(t) \to 0$ si $t \to \infty$, entonces $G(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. □

**Lema 4.** *Si la función $g(x)$ satisface (2.40) y la función $\tau(t)$ satisface (2.33). Entonces para toda función $z(t)$ que tiende a cero, se tiene que*

$$\int_0^t e^{-\int_v^t \tau(\xi)d\xi} g(z(v))dv \to 0 \quad \textit{cuando} \quad t \to \infty.$$

*Demostración.* Antes de comenzar notamos que si $\tau(t)$ satisface (2.33), se tiene

$$\int_L^\infty \frac{\tau'(s)}{\tau^2(s)}ds = \frac{-1}{\tau(s)}\bigg|_L^\infty = \frac{1}{\tau(L)} - \lim_{s\to\infty}\frac{1}{\tau(s)}.$$

Por lo tanto existe el $\text{lím}_{s\to\infty}\frac{1}{\tau(s)}$. Se desprende así que $\tau(s) \geq \zeta > 0$ para $s > S > 0$. Por lo tanto

$$\int_0^t \tau(\xi)d\xi \to \infty \quad \text{cuando} \quad t \to \infty.$$

Para $t \geq T \geq L$, tenemos:

$$\int_0^t e^{-\int_v^t \tau(\xi)d\xi} g(z(v))dv = \int_0^T e^{-\int_v^t \tau(\xi)d\xi} g(z(v))dv + \int_T^t e^{-\int_v^t \tau(\xi)d\xi} g(z(v))dv,$$

de esta manera, obtenemos:

$$|\int_0^t e^{-\int_v^t \tau(\xi)d\xi} g(z(v))dv| \leq I_1(t) + I_2(t),$$

donde

$$I_1(t) = \int_0^T e^{-\int_v^t \tau(\xi)d\xi}|g(z(v))|dv,$$
$$I_2(t) = \int_T^t e^{-\int_v^t \tau(\xi)d\xi}|g(z(v))|dv.$$

Sea $\epsilon > 0$, para estimar $I_2(t)$, utilizamos integración por partes,

$$|I_2(t)| \leq \int_T^t e^{\int_v^t \tau(\xi)d\xi}||g(z)||dv \leq \int_T^t e^{\int_v^t \tau(\xi)d\xi}\frac{\tau(v)}{\tau(v)}||g(z)||dv$$
$$\leq G^*(T)\left(\frac{1}{\tau(t)} + \frac{1}{\tau(T)} + \int_T^\infty \frac{|\tau'(v)|}{\tau^2(v)}dv\right),$$

donde $G^*(T) = \sup_{s\geq T}|g(z(s))|$. Puesto que $g(x)$ es sublineal cuando $x \to 0$. Es fácil ver, que $G^*(t) \to 0$ si $z(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. La condición (2.33) garantiza que $\frac{1}{\tau(t)}$ es una función acotada para todo $t \geq L$. Por lo tanto, existe $T > 0$ tal que:

$$G^*(T)\left(\frac{1}{\tau(t)} + \frac{1}{\tau(T)} + \int_T^\infty \frac{|\tau'(v)|}{\tau^2(v)}dv\right) < \frac{\epsilon}{2},\ t > T.$$

Estimamos $I_1(t)$

$$|I_1(t)| \leq e^{-\int_T^t \tau(\xi)d\xi}\int_0^T e^{-\int_v^T \tau(\xi)d\xi}dv||g(z)||.$$

La Proposición 3 nos asegura que, $\int_0^T e^{-\int_v^T \tau(\xi)d\xi}dv$ es acotada. La condición (2.33) garantiza que $\int_0^t \tau(\xi)d\xi \to \infty$ cuando $t \to \infty$. Luego existe $T_1 > T > 0$ tal que, $|I_1(t)| < \frac{\epsilon}{2}$, para $t > T_1$. Ahora para $t > T_1$, y conseguimos

$$|I_1(t)| + |I_2(t)| \leq \epsilon,\ t \geq T_1 > T.$$

□

Ahora tenemos las herramientas necesarias para demostrar nuestro resultado de estabilidad.

## 2.4. Resultado de Estabilidad.

Reescribimos la ecuación (2.13) para evitar confusiones

$$x''(t) + f(t, x, x')x'(t) + b(t)g(x(t - L)) = 0,$$

bajo las condiciones iniciales $x(t) = \psi(t), t \in [-L, 0]$ y $x'(0) = \sigma$. Conseguiremos condiciones que garantizan que $(x(t), x'(t)) \to (0, 0)$. Suponemos que las funciones involucradas satisfacen:

(b) La función $b : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es continua y acotada.

(g) La función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es continua y existe $\beta > 0$ tal que

$$\frac{g(x)}{x} \geq \beta > 0 \quad \text{y} \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} \quad \text{existe.}$$

(f) Existen las funciones continuas $\tau, \omega_1, \omega_2 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tales que

$$0 \leq \tau(t) \leq f(t, x, y) \leq \omega_1(t)\omega_2(|x| + |y|) \tag{2.41}$$

($\tau$) la función $\tau$ es diferenciable, y además

$$\int_L^\infty \left|\frac{\tau'(s)}{\tau^2(s)}\right| ds < \infty \tag{2.42}$$

($\omega_1$) Si para todo $\gamma > 0$

$$\int_0^\infty \left( \int_{s+L}^\infty e^{-\gamma \int_{s+L}^u \omega_1(\xi) d\xi} du \right) b(s + L) ds = \infty \tag{2.43}$$

La función $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ es una función continua y localmente Lipschitz, y además existe una constante $K > 0$ tal que

$$|g(x) - g(y)| \leq K|x - y|.$$

Estas últimas condiciones, de Lipschitz, garantizan la unicidad de la solución $x$ para cada par de condiciones iniciales. Lo que resulta fundamental para nuestro resultado.

**Observación 8.** *Para ver que las soluciones de (2.13) están definidas, sobre todo el intervalo* $[0,\infty)$*, podemos escribir la ecuación (2.13) como el sistema*

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -a(t)y(t) - b(t)g(x(t-L)). \end{aligned} \tag{2.44}$$

*En la segunda ecuación de (2.44), podemos considerar el último término, como una perturbación. La fórmula de variación de parámetros garantiza que* $y(t)$ *es acotada sobre todo intervalo* $[0,T)$ *donde la solución esté definida. Entonces, miramos la primera ecuación de (2.44) y vemos que,* $x(t)$ *es también acotada en ese intervalo. Luego se puede probar que la solución está definida para todo* $t \geq 0$*, ver pp. 196 de [1].*

**Observación 9.** *La condición (2.42) conlleva:*

*i)* $\tau(t) \geq \tau_0 > 0, t \geq L.$

*ii)* $\int_0^\infty \tau(s)ds = \infty.$

*En el resultado de Burton [4] se exige (ii).*

Ahora estamos en condiciones de probar el

**Teorema 10.** *Si se tiene la ecuación (2.13) junto con las condiciones: (b),(g),(f),(*$\tau$*) y (*$\omega_1$*). Entonces toda solución* $x_0(t)$ *de (2.13) satisface*

$$(x_0(t), x_0'(t)) \to (0,0), \quad cuando\, t \to \infty.$$

*Demostración.* Consideramos $x_0(t)$, una solución de (2.13). Sea $a(t) = f(t, x_0(t), x_0'(t))$, gracias las condiciones (f),(g) y ($\tau$), son válidas todas las maniobras y transformaciones de la sección (2.2). Luego, $x_0(t)$ es también solución de la ecuación (2.32), la escribimos nuevamente para facilitar la comprensión,

$$x'(t) = \sigma A(t,0) - q(t)x(t) + \frac{d}{dt}\int_{t-L}^{t} \mathbb{A}(v+L, v+L)b(v+L)g(x(v))dv$$

$$+\frac{d}{dt}\int_0^t \mathbb{A}(t,s)b(s)g(x(s-L))ds.$$

La fórmula de variación de parámetros, como en la sección (1.3.1) de §1, [ver (1.43) a (1.44)], nos lleva a considerar el operador:

$$(Pz)(t) = e^{-\int_0^t q(\xi)d\xi}[\psi(0) - \int_{-L}^{0} \mathbb{A}(v+L, v+L)b(v+L)g(z(v))dv]$$

$$+\sigma\int_0^t e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi} A(u,0)du + \int_{t-L}^{t} \mathbb{A}(v+L, v+L)b(v)g(z(v))dv \tag{2.45}$$

$$-\int_0^t q(u)e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi}\left(\int_{u-L}^u \mathbb{A}(v+L,v+L)b(v+L)g(z(v))dv\right)du$$
$$+\int_0^t \mathbb{A}(t,v)b(v)g(z(v-L))dv$$
$$-\int_0^t q(u)e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi}\left(\int_0^u \mathbb{A}(u,v)b(v)g(z(v-L))dv\right)du,\ t\geq 0.$$

y para $t\in[-L,0)$
$$(Pz)(t)=\psi(t).$$

Ahora definimos el conjunto

$$M_\psi=\{z\in BC([-L,\infty)) : z(t)=\psi(t) \quad \text{para } t\in[-L,0]\}, \tag{2.46}$$

donde $\psi$ es la condición inicial de $x_0(t)$. Es claro, que $(M_\psi, ||\cdot||)$ es un espacio métrico completo, donde $||\cdot||$ denota la norma del supremo.

Antes de continuar, detallamos los pasos fundamentales, pues, la demostración es extensa.

1. Probar que $PM_\psi\subset M_\psi$, i.e. que las imágenes de funciones acotadas por $P$, son acotadas.

2. Probar que $P$ tiene un único punto fijo, y por lo tanto la ecuación integral tiene una solución acotada.

3. Probar que cuando $x_0(t)$ y $x_0'(t)$ son funciones acotadas, entonces el operador $P$, deja invariante al espacio de las funciones que tienden a *cero*.

4. Concluir que $P$ lleva funciones que tienden a cero en funciones que tienden a cero, i.e. las soluciones de la ecuación integral, en realidad tienden a cero.

**1.-** Necesitamos probar que $M_\psi$ es invariante bajo el operador $P$. A continuación probaremos que para cada $z\in M_\psi$, $Pz\in M_\psi$. Es claro, de la definición de $P$ en (2.45), que para $t\in[-L,0]$ se tiene $(Pz)(t)=\psi(t)$. Además la continuidad de $z(t)$, garantiza que $(Pz)(t)$ es una función continua para $t\geq 0$. Lo que resta es probar que $(Pz)(t)$ es una función acotada, esto lo veremos término a término

*a* ) Es claro que, $\psi(0)-\int_{-L}^0 \mathbb{A}(v+L,v+L)b(v+L)g(\psi(v))dv$ no depende de $t$. Es constante para cada $z\in BC([-L,\infty))$. Las condiciones (b),(f) y ($\tau$) aseguran que se puede utilizar la Proposición 1, se sigue que $q(t)>0$. Por lo tanto, el factor $e^{-\int_0^t q(\xi)d\xi}$ está acotado por 1, para $t\geq 0$. Se concluye que el primer término del operador definido en (2.45), es acotado para $t$ en el intervalo $[0,\infty)$.

*b*) Para el segundo miembro de (2.45), tenemos:

$$|\sigma\int_0^t e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi}A(u,0)du|\leq|\sigma|\int_0^t e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi}e^{-\int_0^u a(\xi)d\xi}du$$

$$\leq |\sigma| \int_0^t e^{-\int_0^u \tau(\xi)d\xi} du,$$

pues $q(s) > 0$. Ahora, la proposición 2 asegura que este sumando es acotado para $t \in [0, \infty)$.

*c)* Ahora, veamos el tercer sumando de (2.45):

$$|\int_{t-L}^{t} \mathbb{A}(v+L, v+L)b(v+L)g(z(v))dv| \leq \int_{t-L}^{t} \mathbb{E}(v+L, v+L)|b(v+L)||g(z(v))|dv,$$

donde $E(v+L, v+L)$ está definido en (2.36). Gracias a las condiciones (f) y ($\tau$), sabemos que el Lema 2 es válido. Luego

$$\sup_{t\geq 0} |\mathbb{E}(t,t)| < \infty, \ 0 \leq v \leq t.$$

Y, gracias a la condición (b), podemos hallar $K > 0$ tal que:

$$|\mathbb{E}(v+L, v+L)||b(v)| \leq K, \ v \geq L.$$

Así conseguimos estimar

$$|\int_{t-L}^{t} \mathbb{A}(v+L, v+L)b(v)g(z(v))dv| \leq \int_{t-L}^{t} K||g(z)||dv \leq LK||g(z)||,$$

luego, este término es acotado para $t \geq 0$.

*d)* Se probará que el cuarto sumando del operador, definido por (2.45), está acotado gracias a la Proposición 4.

*e)* Continuamos con:

$$|\int_0^t \mathbb{A}(t,v)b(v)g(z(v-L))dv| \leq \int_0^t |b(v)|\left(\int_t^\infty e^{-\int_v^s \tau(\xi)d\xi} ds\right) dv||g(z)||$$

$$= \int_0^t |b(v)|e^{-\int_v^t \tau(\xi)d\xi}\left(\int_t^\infty e^{-\int_t^s \tau(\xi)d\xi} ds\right) dv||g(z)||.$$

Como en c) podemos hallar $\hat{K} > 0$ tal que:

$$|b(v)|\left(\int_t^\infty e^{\int_t^s \tau(\xi)d\xi} ds\right) \leq \hat{K}.$$

Así conseguimos

$$|\int_0^t \mathbb{A}(t,v)g(z(v-L))dv| \leq \int_0^t e^{-\int_v^t \tau(\xi)d\xi} dv \hat{K}||g(z)||.$$

La acotación de este sumando sigue ahora de la condición ($\tau$) y la Proposición 3.

*f)* Para ver que los miembros 4 y 6 del operador, definido en (2.45), están acotados, por esto estudiamos las siguientes integrales:

$$|\int_0^t q(u)e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi}\int_{u-L}^u \mathbb{A}(v+L)g(z(v))dvdu|$$

$$|\int_0^t q(u)e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi}\int_0^u \mathbb{A}(u,v)g(z(v-L))dvdu|.$$

Consideramos

$$r_1(u)=\int_{u-L}^u \mathbb{A}(v+L,v+L)b(v+L)g(z(v))dv$$

y

$$r_2(u)=\int_0^u \mathbb{A}(u,v)b(v)g(z(v-L))dv.$$

Ya probamos que $r_i(u)$, $i=1,2$ están acotadas, basta usar la Proposición 4, en el caso $\lambda(u)=q(u), r_i(u), i=1,2$ en las integrales de arriba.

Por lo tanto, $PM_\psi \subset M_\psi$. Así hemos conseguido un espacio de métrico completo, invariante bajo el operador $P$.

**2.-** Aquí probamos que el operador $P$ tiene un único punto fijo, por medio del Teorema 10. Para facilitar las estimaciones, y conseguir una mejor notación, consideramos el operador $P$ como una composición de operadores $P=RS$ donde $R$ está definido por:

$$(Rz)(t)=\Gamma(t)+z(t)+\int_0^t q(u)e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi}z(u)\ t\geq 0, \tag{2.47}$$

con $\Gamma(t)$ definido por

$$\Gamma(t)=e^{-\int_0^t q(\xi)d\xi}[\psi(0)-\int_{-L}^0 \mathbb{A}(v+L,v+L)b(v+L)g(\psi(v))dv] \tag{2.48}$$
$$+\sigma\int_0^t e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi}A(u,0)du.$$

$S$ definido por:

$$(Sz)(t)=\int_{t-L}^t \mathbb{A}(v+L,v+L)b(v+L)g(z(v))dv \tag{2.49}$$
$$-\int_0^t \mathbb{A}(t,v)b(v)g(z(v-L))dv, t\geq 0.$$

Cuando $t$ está en el intervalo $[-L,0)$, tanto $R,S$ se comportan como la identidad. Buscamos estimar $|Pz-Px|$, pero esta estimación lleva trabajo, primero estimaremos $|(Sz)(t)-(Sx)(t)|$:

$$|(Sz)(t)-(Sx)(t)| \leq |\int_{t-L}^{t} \mathbb{A}(v+L,v+L)b(v+L)[g(z(v))-g(x(v))]dv|$$

$$+|\int_{0}^{t} \mathbb{A}(t,v)b(v)[g(z(v-L))-g(z(v-L))]dv|$$

$$\leq \int_{t-L}^{t} \mathbb{E}(v+L,v+L)||b||K|z(v)-x(v)|dv+\int_{L}^{t} \mathbb{E}(t,v)||b||K|z(v-L)-x(v-L)|dv.$$

Notar que para $t\leq L$, $z(t-L)=\psi(t-L)=x(t-L)$, así conseguimos

$$|(Sz)(t)-(Sx)(t)| \leq \begin{cases} \int_0^t duNK||z-x||,\ 0\leq t<L, \\ \left(\int_{t-L}^t duN+\int_L^t \mathbb{E}(t,u)||b||du\right)K||z-x||,\ t\geq L, \end{cases} \tag{2.50}$$

donde

$$N := \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}(t,t)||b||. \tag{2.51}$$

De la definición de $\mathbb{E}(t,u)$, en (2.36), se tiene que:

$$\int_L^t \mathbb{E}(t,u)||b||du = \int_L^t e^{-\int_u^t \tau(\xi)}\mathbb{E}(t,t)||b||du$$

$$\leq N\int_L^t e^{-\int_u^t \tau(\xi)}\frac{\tau(u)}{\tau(u)}du,$$

integrando por partes, conseguimos

$$N\int_L^t e^{-\int_u^t \tau(\xi)}du \leq N\left(e^{-\int_u^t \tau(\xi)d\xi}\frac{1}{\tau(u)}\right)\Bigg|_L^t + N\int_L^t \frac{\tau'(u)}{\tau^2(u)}e^{-\int_u^t \tau(\xi)d\xi}du.$$

Finalmente, gracias a la condición (2.42), se tiene que

$$N\int_L^t e^{-\int_u^t \tau(\xi)}du \leq N\left(\frac{1}{\tau(t)}+\frac{1}{\tau(L)}\right) + N\int_L^t \frac{\tau'(u)}{\tau^2(u)}e^{-\int_u^t \tau(\xi)d\xi}du$$

$$\leq 2N\sup_{t\geq L}\frac{1}{\tau(t)} + N\int_L^t \frac{\tau'(u)}{\tau^2(u)}du < \infty.$$

Por lo tanto, conseguimos

$$\int_L^t \mathbb{E}(t,u)||b||du \leq 2N\sup_{t\geq L}\frac{1}{\tau(t)} + N\int_L^t \frac{\tau'(u)}{\tau^2(u)}du,\ t\geq L. \tag{2.52}$$

Luego, la estimación hecha en (2.50), se puede cambiar por

$$|(Sz)(t)-(Sx)(t)| \leq \begin{cases} \int_0^t duNK\|z-x\|, \ 0 \leq t < L, \\ \left(\int_0^t duN + N\left[2\sup_{t\geq L}\frac{1}{\tau(t)} + \int_L^t \frac{\tau'(u)}{\tau^2(u)}du\right]\right)K\|z-x\|, t \geq L. \end{cases} \tag{2.53}$$

Estamos en condiciones de construir una función $\lambda$, que sea integrable y además permita la estimación

$$|Sz(t)-Sx(t)| \leq \int_0^t K\lambda(u)\|z-x\|du.$$

Con estos objetivos en mente, definimos la función

$$\lambda(u) = \chi_{[0,L]}(u)(N + \frac{2N}{L}\sup_{t\geq L}\frac{1}{\tau(t)}) + \chi_{(L,\infty)}(u)\frac{N\tau'(u)}{\tau^2(u)}, \tag{2.54}$$

con $N$ definido en (2.51). Ahora podemos calcular $\int_0^t \lambda(s)ds$, para $0 \leq t \leq L$, se tiene

$$\int_0^t \lambda(s)ds = \int_0^t \left(\chi_{[0,L]}(s)(N + \frac{2N}{L}\sup_{t\geq L}\frac{1}{\tau(t)}) + \chi_{(L,\infty)}(s)\frac{N\tau'(s)}{\tau^2(s)}\right)ds$$

$$\int_0^t \lambda(s)ds = \int_0^t (N + \frac{2N}{L}\sup_{t\geq L}\frac{1}{\tau(t)})ds, \ 0 \leq t \leq L. \tag{2.55}$$

Para $t \geq L$, se tiene

$$\int_0^t \lambda(s)ds = \int_0^t \left(\chi_{[0,L]}(s)(N + \frac{2N}{L}\sup_{t\geq L}\frac{1}{\tau(t)}) + \chi_{(L,\infty)}(s)\frac{N\tau'(u)}{\tau^2(u)}\right)ds$$

$$\int_0^t \lambda(s)ds = \int_0^L (N + \frac{2N}{L}\sup_{t\geq L}\frac{1}{\tau(t)})ds + \int_L^t \frac{N\tau'(s)}{\tau^2(s)}ds,$$

luego, conseguimos

$$\int_0^t \lambda(s)ds = LN + 2N\sup_{t\geq L}\frac{1}{\tau(t)})ds + N\int_L^t \frac{\tau'(s)}{\tau^2(s)}ds. \tag{2.56}$$

Gracias a la condición (2.42), sobre integrabilidad de $\frac{\tau'}{\tau^2}$, se sigue que, $\lambda \in L^1(0,\infty)$. Además de (2.55) y (2.56) se tiene

$$\int_0^t \lambda(u)du = \begin{cases} t(N + \frac{2N}{L}\sup_{t\geq L}\frac{1}{\tau(t)}), \ 0 \leq t < L, \\ LN + 2N\sup_{t\geq L}\frac{1}{\tau(t)} + N\int_L^t \frac{\tau'(u)}{\tau^2(u)}du, \ t \geq L. \end{cases} \tag{2.57}$$

Comparando (2.53) con (2.57), se aprecia que

$$|Sz(t) - Sx(t)| \leq \int_0^t K\lambda(u)||z-x||du, \; t \geq 0. \tag{2.58}$$

Hemos conseguido una función mayorante $\lambda$ adecuada, esto nos permitirá utilizar el Teorema 9.

Ahora estimamos $|(Pz)(t) - (Px)(t)| = |(RSz)(t) - (RSx)(t)|$,

$$|(Pz)(t)-(Px)(t)| \leq |(Sz)(t)-(Sx)(t)| + \int_0^t q(u)e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi}|(Sz)(u-L)-(Sx)(u-L)|du$$

$$\leq \left(\int_0^t K\lambda(u)du + \int_0^t q(u)e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi}\left[\int_0^{u-L} K\lambda(v)dv\right]du\right)||z-x||,$$

como la función $\lambda$ es positiva, la integral $\int_0^u \lambda(v)dv$ es creciente, se sigue

$$|(Pz)(t)-(Px)(t)| \leq \left(\int_0^t K\lambda(u)du + \int_0^t q(u)e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi}\left[\int_0^t K\lambda(v)dv\right]du\right)||z-x||.$$

Basta integrar para conseguir

$$|(Pz)(t) - (Px)(t)| \leq 2K\int_0^t \lambda(u)du||z-x||. \tag{2.59}$$

Veamos ahora que sucede para $P^2$, estimemos $|(P^2z)(t) - (P^2x)(t)|$,

$$|(P^2z)(t) - (P^2x)(t)| \leq |(SPz)(t) - (SPx)(t)|$$

$$+ \int_0^t q(u)e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi}|(SP)z(u) - (SPx)(u)|du.$$

De la misma manera que obtuvimos (2.58), obtenemos

$$|(SPz)(t) - (SPx)(t)| \leq \int_0^t K\lambda(v)|(Pz)(v) - (Px)(v)|dv$$

$$\leq 2K^2\int_0^t \lambda(v)\left(\int_0^v \lambda(u)||z-x||du\right)dv,$$

$$|(SP)z(t) - (SP)x(t)| \leq 2\frac{\left(K\int_0^t \lambda(v)dv\right)^2}{2}||z-x||.$$

De igual manera como obtuvimos (2.59), podemos conseguir esta vez:

$$|(P^2z)(t) - (P^2x)(t)| \leq \frac{\left(2K\int_0^t \lambda(v)dv\right)^2}{2}||z-x||. \tag{2.60}$$

Probaremos por inducción que

$$|(P^k z)(t) - (P^k x)(t)| \leq \frac{\left(2K\int_0^t \lambda(v)dv\right)^k}{k!}||z-x||.$$

Supongamos que la desigualdad es válida para $n$,

$$|(P^n z)(t) - (P^n x)(t)| \leq \frac{\left(2K\int_0^t \lambda(v)dv\right)^n}{n!}||z-x||. \tag{2.61}$$

Ahora estudiamos $|(P^{n+1}z)(t) - (P^{n+1}x)(t)|$, se tiene:

$$|(P^{n+1}z)(t) - (P^{n+1}x)(t)| \leq |(SP^n z)(t) - (SP^n x)(t)|$$
$$+ \int_0^t q(u)e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi}|(SP^n z)(u) - (SP^n x)(u)|du.$$

Sabemos que,

$$|(SP^n z)(t) - (SP^n x)(t)| \leq \int_0^t K\lambda(v)|(P^n z)(v) - (P^n x)(v)|dv$$
$$\leq \int_0^t K\lambda(v)\frac{\left(2K\int_0^v \lambda(u)du\right)^n}{n!}||z-x||dudv$$
$$= 2^n\frac{\left(K\int_0^t \lambda(v)dv\right)^{n+1}}{(n+1!)}||z-x||$$

y de igual manera como obtuvimos (2.59) , se consigue

$$|(P^{n+1}z)(t) - (P^{n+1}x)(t)| \leq \frac{\left(2K\int_0^t \lambda(v)dv\right)^{n+1}}{(n+1)!}||z-x||$$

$$|(P^{n+1}z)(t) - (P^{n+1}x)(t)| \leq \frac{\left(2K||\lambda||_1\right)^{n+1}}{(n+1)!}||z-x||, \quad t>0.$$

Entonces, para $n_0$ suficientemente grande $P^{n_0}$, es contractivo. El Teorema 9, garantiza que $P$ tiene un único punto fijo $x^*(t) \in M_\psi$. Por la construcción del operdaor $P$, $x^*(t)$ es la única solución de (2.32). Pero $x_0(t)$, única solución de (2.13), también satisface (2.32). Luego $x^*(t) = x_0(t)$, esto significa que $x_0(t) \in M_\psi$, por lo tanto, $x_0(t)$ es una solución acotada de (2.13).

**3.-** A continuación demostraremos que $x_0'0(t)$ está acotada, para conseguirlo, reescribimos (2.18)

$$x'(t) = x'(0)A(t,0) - \int_0^t A(t,s)b(s)g(x(s-L)).$$

Se sigue, en particular que

$$|x_0'(t)| \leq |x_0'(0)|e^{-\int_0^t \tau(\xi)d\xi} + \int_0^t e^{-\int_v^t \tau(\xi)d\xi}|b(v)||g(x_0(v-L))|dv.$$

Es claro que el primer sumando del lado derecho es acotado. Detengámonos en la expresión integral, como $x_0(t)$ es acotada, $g(x_0(t))$ también lo es. Así conseguimos

$$|x_0'(t)| \leq |x_0'(0)|e^{-\int_0^t \tau(\xi)d\xi} + ||bg(x_0)|| \int_0^t e^{-\int_v^t \tau(\xi)d\xi}dv.$$

Podemos aplicar la Proposición 3 a la expresión integral para concluir que, $x_0'(t)$ es una función acotada. Hemos probado que $x_0(t)$ y $x_0'(t)$ están acotadas.

Resta probar que $x_0(t) \to 0$ si $t \to \infty$. Gracias a (2.43), (b) y (g) podemos utilizar el Lema 3, para garantizar que

$$e^{-\int_0^t q(\xi)d\xi} \to 0, \quad \text{cuando} \quad t \to \infty. \tag{2.62}$$

Estamos en condiciones de probar, que en realidad la solución $x_0(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Consideramos el conjunto

$$M_0 := \{z \in BC([-L,\infty)) : z(t) = \phi(t),\ t \in [-L,0],\ \lim_{t\to\infty} z(t) = 0\}. \tag{2.63}$$

*a'*) El Lema 3 asegura que el factor $e^{-\int_0^t q(\xi)d\xi}$ tiende a *cero*. Se concluye que el primer término del operador definido en (2.45), tiende a *cero* cuando $t \to \infty$.

*b'*) Nos detenemos en el segundo miembro de (2.45),i.e. $\sigma \int_0^t e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi} A(u,0)du$. Sabemos que $|A(u,0)| \leq e^{-\int_0^u \tau(\xi)d\xi}$, gracias a la proposición 2 probamos en *b*),

$$\int_L^\infty e^{-\int_0^u \tau(\xi)d\xi}du < \infty.$$

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, existe $T > 0$, tal que :

$$\int_T^\infty e^{-\int_0^u \tau(\xi)d\xi}du < \frac{\epsilon}{2|\sigma|}.$$

Es claro que

$$|\sigma| \int_0^T e^{-\int_u^T q(\xi)d\xi}|A(u,0)|du < \infty.$$

Gracias al Lema 3, sabemos que existe $T_1 > T$, de modo que para $t > T_1$

$$e^{-\int_T^t q(\xi)d\xi}|\sigma| \int_0^T e^{-\int_u^T q(\xi)d\xi}|A(u,0)|du < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $t > T_1 > T$, gracias a las estimaciones anteriores conseguimos

$$|\sigma \int_0^t e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi} A(u,0)du| \leq |\sigma| \int_0^T e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi}|A(u,0)|du + |\sigma| \int_T^t e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi}|A(u,0)|du$$

$$\leq e^{-\int_T^t q(\xi)d\xi}|\sigma| \int_0^T e^{-\int_u^T q(\xi)d\xi}|A(u,0)|du + |\sigma| \int_T^t |A(u,0)|du$$

$$|\sigma \int_0^t e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi} A(u,0)du| \leq \epsilon.$$

Para $\epsilon$ dado. Se sigue que el segundo término del operador definido en (2.45), tiende a *cero* cuando $t \to \infty$.

*c')* Ahora, el tercer sumando de (2.45):

$$|\int_{t-L}^t \mathbb{A}(v+L, v+L)b(v+L)g(z(v))dv| \leq \int_{t-L}^t \mathbb{E}(v+L, v+L)|b(v+L)||g(z(v))|dv,$$

donde $E(v+L, v+L)$ es una función acotada, gracias a las condiciones (f) y $(\tau)$, y el Lema 2. Gracias a la condición (g), podemos utilizar la Proposición 5, para concluir que el tercer término de (2.45), tiende a *cero* cuando $t \to \infty$.

*e')* Continuamos con:

$$|\int_0^t \mathbb{A}(t,v)b(v)g(z(v-L))dv| \leq \int_0^t |b(v)| \left( \int_t^\infty e^{-\int_v^s \tau(\xi)d\xi} ds \right) |g(z(v))|dv$$

$$= \int_0^t |b(v)| e^{-\int_v^t \tau(\xi)d\xi} \left( \int_t^\infty e^{-\int_t^s \tau(\xi)d\xi} ds \right) |g(z(v))|dv.$$

$$= \int_0^t |b(v)| e^{-\int_v^t \tau(\xi)d\xi} \mathbb{E}(t,t)|g(z(v))|dv.$$

Gracias a que las funciones $E(t,t), b(t)$ estan acotadas el Lema 4, bajo pequeñas modificaciones, asegura que el quinto término de (2.45), tiende a *cero* cuando $t \to \infty$.

*f')* Es el turno de los sumandos 4 y 6 del operador, definido en (2.45). Los reescribimos, respectivamente, para mayor claridad

$$|\int_0^t q(u) e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi} \int_{u-L}^u \mathbb{A}(v+L)g(z(v))dvdu|,$$

$$|\int_0^t q(u)e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi}\int_0^u \mathbb{A}(u,v)g(z(v-L))dvdu|.$$

Consideramos

$$r_1(u) = \int_{u-L}^u \mathbb{A}(v+L, v+L)b(v+L)g(z(v))dv,$$

$$r_2(u) = \int_0^u \mathbb{A}(u,v)b(v)g(z(v-L))dv.$$

Ya probamos que $r_i(u)$, $i = 1, 2$ tienden a *cero*. Ahora probaremos que $\int_0^t q(u)e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi}r_i(u)du \to 0$, si $r_i(u) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Sea $\epsilon > 0$, existe $T_{0_i} > 0$, tal que, para $t > T_{0_i}, |r_i(t)| < \epsilon/2$. Además

$$|\int_0^{T_{0_i}} q(u)e^{-\int_u^{T_{0_i}} q(\xi)d\xi}r_i(u)du| \leq \int_0^{T_{0_i}} q(u)e^{-\int_u^{T_{0_i}} q(\xi)d\xi}du||r_i|| < \infty.$$

Gracias al Lema 3, existe $T_{1_i} > T_{0_i}$, tal que, para $t \geq T_{1_i}$ se tiene

$$e^{-\int_{T_{0_i}}^t q(\xi)d\xi}\int_0^{T_{0_i}} q(u)e^{-\int_u^{T_{0_i}} q(\xi)d\xi}du||r_i|| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Se sigue que para $t \geq T_{1_i}$, se tiene que

$$|\int_0^t q(u)e^{-\int_u^t q(\xi)d\xi}r_i(u)du| < \epsilon,\ i = 1, 2.$$

Por lo tanto, los términos 4 y 6, del operador, (2.45), tienden a *cero* cuando $t \to \infty$.

**4.-** Sabemos que $(M_0, ||\cdot||)$ es un espacio métrico completo. Ya vimos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $P^{n_0}$ es contractivo, existe $x^*$ único punto fijo de $P^{n_0}$, que también es único punto fijo de $P$. Por lo tanto, $x^*(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, y $x^*(t)$ es solución de (2.32). Como antes podemos garantizar que $x^*(t) = x_0(t)$. Por lo tanto, $x_0(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Falta demostrar que $x'(t) \to 0$, para esto volvemos a utilizar (2.18) y como antes

$$|x_0'(t)| \leq |x_0'(0)|e^{-\int_0^t \tau(\xi)d\xi} + \int_0^t e^{-\int_v^t \tau(\xi)d\xi}|b(v)||g(x_0(v-L))|dv.$$

El primer sumando tiende a cero; resta mostrar que la expresión integral tiende a cero. Como antes usamos (2.18)

$$|x_0'(t)| \leq |x_0'(0)|e^{-\int_0^t \tau(\xi)d\xi} + ||b||\int_0^t e^{-\int_v^t \tau(\xi)d\xi}|g(x_0(v-L))|dv.$$

Utilizando el Lema 5, se concluye que $x_0'(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Por lo tanto, $(x_0(t), x_0'(t)) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

□

### 2.4.1. Discusión Final.

Destacamos que nuestra condición (2.42), que reescribimos,

$$\int_L^\infty \frac{\tau'(s)}{\tau^2(s)}ds < \infty,$$

es satisfecha por $\tau(t) = t^\alpha$, con $\alpha \geq 0$. Además es mucho más sencilla de verificar que las condiciones exigidas por Burton, para que su operador resulte contractivo, i.e.

$$2K \sup_{t\geq 0} \int_{t-L}^{t} \left( \int_0^\infty e^{-\int_{s+L}^{u+s+L} \tau(v)dv} du \right) b(s+L)ds$$
$$+2K \sup_{t\geq 0} \int_0^t \left( \int_{t-s}^\infty e^{-\int_s^{u+s} \tau(v)dv} du \right) b(s+L)ds < 1.$$

El resultado clásico de Smith [20] tenía limitaciones con la condición (2.3), pues, $h(t) = t$ es adecuada para ésta, sin embargo, $h(t) = t^2$ ya no lo es. Idéntica situación sucede en el resultado de Burton, esta vez con la función $c(t)$. Veremos que nuestro resultado, como era de esperar, tiene estas limitaciones, sobre la función $\omega_1$, lo que se debe a la condición (2.43). Mostraremos de hecho que al considerar $\omega_1(t) = t^\beta$, el mayor valor que $\beta$ puede alcanzar es 1.

Para simplificar los cálculos, consideramos $b > 0$ constante, y

$$\omega_1(t) = (\beta+1)t^\beta, 0 < \beta \leq 1,$$

luego,

$$b\int_0^\infty \left( \int_{s+L}^\infty e^{-\gamma \int_{s+L}^u \omega_1(v)dv} du \right) ds = b\int_0^\infty \left( \int_{s+L}^\infty e^{-\gamma(u^{\beta+1}-(s+L)^{\beta+1})} du \right) ds.$$

Podemos utilizar el Teorema del valor medio, y con $\zeta \in (s+L, u)$ conseguimos

$$= b\int_0^\infty \left( \int_{s+L}^\infty e^{-\gamma(\beta+1)\zeta^\beta(u-s-L)} du \right) ds.$$

Debido que estamos integrando una función positiva, se tiene

$$b\int_0^\infty \left( \int_{s+L}^\infty e^{-\gamma(\beta+1)\zeta^\beta(u-s-L)} du \right) ds \geq b\int_0^\infty \left( \int_{s+L}^{s+L+1} e^{-\gamma(\beta+1)\zeta^\beta(u-s-L)} du \right) ds,$$

y de la monotonía de la función $t^{(\beta+1)}$, con $\beta > 0$, se sigue que

$$\geq b\int_0^\infty \left( \int_{s+L}^{s+L+1} e^{-\gamma(\beta+1)(s+L+1)^\beta(u-s-L)} du \right) ds,$$

$$= b\int_0^\infty \left( \frac{1-e^{-\gamma(\beta+1)(s+L+1)^\beta}}{\gamma(\beta+1)(s+L+1)^\beta} \right) ds = \infty.$$

Estas estimaciones hacen evidente que es posible considerar $\omega_1(t) = t$. Veamos que sucede en el caso $\omega_1(t) = t^\beta$, donde tanto $\beta > 1$, como $b > 0$, son constantes. Consideramos

$$\omega_1(t) = (\beta+1)t^\beta, 1 < \beta,$$

luego,

$$\int_0^\infty \left( \int_{s+L}^\infty e^{-\gamma \int_{s+L}^u \omega_1(v)dv} du \right) bds = \int_0^\infty \left( \int_{s+L}^\infty e^{-\gamma(u^{\beta+1}-(s+L)^{\beta+1})} du \right) bds.$$

Utilizamos el Teorema del valor medio, y con $\zeta \in (s+L, u)$ conseguimos

$$= \int_0^\infty \left( \int_{s+L}^\infty e^{-\gamma(\beta+1)\zeta^\beta(u-s-L)} du \right) bds.$$

La monotonía de la función $t^\beta$, con $\beta > 0$, nos garantiza que

$$b\int_0^\infty \left( \int_{s+L}^\infty e^{-\gamma(\beta+1)\zeta^\beta(u-s-L)} du \right) ds \le b\int_0^\infty \left( \int_{s+L}^\infty e^{-\gamma(\beta+1)(s+L)^\beta(u-s-L)} du \right) ds$$

$$= b\int_0^\infty \frac{1}{-\gamma(\beta+1)(s+L)^\beta}(0-1)ds \le \infty,$$

pues, como $\beta > 1$, la función $(s+L)^{-\beta}$ es integrable en $[0, \infty)$. Si bien Burton en [4], también hace comentarios sobre esta problemática, nada dice sobre casos entre $t$ y $t^2$.

A continuación, tratamos un ejemplo sencillo, para graficar las diferencias más importantes de nuestro resultado con respecto al de Burton en [4], y también con uno obtenido mediante el método directo de Liapunov.

**Ejemplo 3.** El resultado clásico de Smith, garantiza que la solución cero de la ecuación diferencial

$$x''(t) + hx'(t) + bx(t) = 0, \tag{2.64}$$

donde $h, b$ son constantes positivas, es asintóticamente estable.

Nos interesa estudiar una ecuación diferencial análoga, pero esta vez con retardo

$$x''(t) + hx'(t) + bx(t-L) = 0, x(t) = \phi(t), t \in [-L, 0], x'(0) = x_0', \tag{2.65}$$

con $h, b$ y $L$ son constantes positivas.

Mostraremos tres distintas condiciones que garantizan la estabilidad de la solución *cero* de (2.65), asociadas respectivamente con: el resultado de Burton [4], un funcional de Liapunov, y nuestro Teorema 10.

Claramente en este caso se tiene que $a(t) = \tau(t) = \omega_1(t) = h$, y se satisface la condición (2.42). Nos interesa que (2.43), sea válido para $\gamma_0 := 1$. Esto es

$$b\int_0^{\infty}\Big(\int_{s+L}^{\infty} e^{-h(u-s-L)}du\Big)ds \geq b\int_1^{\infty}\Big(-\frac{1}{h}(-e^{-h(s+L-s-L)})\Big)ds$$
$$= b\int_1^{\infty}\frac{1}{h}ds = \infty.$$

Para usar el resultado de Burton, necesitamos la condición de contractividad, i.e.

$$2K\sup_{t\geq 0}\int_{t-L}^{t}\Big(\int_0^{\infty} e^{-\int_{s+L}^{u+s+L}\tau(v)dv}du\Big)b(s+L)ds \tag{2.66}$$
$$+2K\sup_{t\geq 0}\int_0^{t}\Big(\int_{t-s}^{\infty} e^{-\int_s^{u+s}\tau(v)dv}du\Big)b(s+L)ds < 1.$$

En este caso, $K = 1$, pues, $g$ es la función identidad. Para hacer explícitas las condiciones que garantizan la contractividad, calculamos las integrales que aparecen en (2.66), para $\tau(s) = h, b > 0$

$$b\int_{t-L}^{t}\Big(\int_0^{\infty} e^{-\int_{s+L}^{u+s+L}hdv}du\Big)ds + b\int_0^{t}\Big(\int_{t-s}^{\infty} e^{-\int_s^{u+s}hdv}du\Big)ds$$
$$= b\int_{t-L}^{t}\Big(\int_0^{\infty} e^{-hu}du\Big)ds + b\int_0^{t}\Big(\int_{t-s}^{\infty} e^{-hu}du\Big)ds$$
$$b\int_{t-L}^{t}\Big(\int_0^{\infty} e^{-hu}du\Big)ds + b\int_0^{t}\Big(\int_{t-s}^{\infty} e^{-hu}du\Big)ds = \frac{b}{h}\int_{t-L}^{t}ds + \frac{b}{h}\int_0^{t}e^{-h(t-s)}ds$$
$$= \frac{bL}{h} + \frac{b}{h^2}(1-e^{-ht}).$$

Así la condición (2.66), se convierte en

$$\frac{2b}{h}(L+\frac{1}{h}) < 1. \tag{2.67}$$

Esta condición muestra una estrecha e intrincada relación entre las distintas constantes involucradas en (2.65). Si el valor de $h$ es pequeño, el resultado falla. Lo mismo sucede si $b$ o $L$ son grandes. Para facilitar comparaciones, escribimos la relación como

$$b < \frac{h^2}{2(hL+1)}. \tag{2.68}$$

Podemos estudiar la estabilidad de la solución cero de (2.65) mediante funcionales de Liapunov. Para la ecuación (2.65), se puede hallar un funcional de Liapunov en [1], la escribimos como sistema

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -hy - bx + \int_{-L}^{0} by(t+s)ds \end{aligned} \tag{2.69}$$

y usamos el funcional

$$V(x,y) = y^2 + bx^2 + \gamma \int_{-L}^{0} \int_{t+s}^{t} y^2(u)duds,$$

y entonces

$$\frac{d}{dt}V(x,y) = 2yy' + 2bxx' + \gamma \int_{-L}^{0} y^2(t)ds - \gamma \int_{-L}^{0} y^2(t+s)ds,$$

$$= 2y(-hy - bx + \int_{-L}^{0} by(t+s)ds) + 2bxy + \gamma \int_{-L}^{0} y^2(t)ds - \gamma \int_{-L}^{0} y^2(t+s)ds,$$

$$= -2hy^2 + 2y \int_{-L}^{0} by(t+s)ds) + \gamma \int_{-L}^{0} y^2(t)ds - \gamma \int_{-L}^{0} y^2(t+s)ds,$$

$$= \int_{-L}^{0} [\frac{-2h}{L} + \gamma]y^2(t) + 2by(t)y(t+s) - \gamma y^2(t+s)ds.$$

Se sabe que $2xy \leq x^2 + y^2$, en esta caso conseguimos

$$\leq \int_{-L}^{0} [\frac{-2h}{L} + \gamma + b]y^2(t) + (b - \gamma)y^2(t+s)ds,$$

Podemos elegir $\gamma = b$, y conseguimos

$$\frac{d}{dt}V(x,y) \leq 2(b - \frac{h}{L})Ly^2(t),$$

para garantizar la estabilidad, necesitamos que $\frac{d}{dt}V(x,y) \leq 0$, en este caso $bL < h$, o bien

$$b < \frac{h}{L}. \tag{2.70}$$

Otra vez existe una relación estrecha entre las tres constantes que aparecen en (2.65). Pero, se puede apreciar que, para $h, L > 0$

$$h^2L < 2h^2L + 2h \Rightarrow \frac{h^2}{2(hL+1)} < \frac{h}{L},$$

por lo tanto el resultado mediante funciones de Liapunov, permite que la constante $b$ sea más grande que el resultado de Burton.

Nuestro resultado considera muchas de las hipótesis de Burton, difiere en la condición $(\tau)$. A continuación veremos que la ecuación (2.65) satisface $(\tau)$, además hallaremos la función $\lambda$, definida en (2.54). Debido a que consideramos $\tau(t) = h$, es claro que $\frac{\tau'}{\tau} = 0$. por lo que la condición $(\tau)$ se satisface trivialmente. El valor de $N := \sup_{t\geq 0} E(t,t)||b|| = \frac{b}{h}$, luego, la función $\lambda$ es

$$\lambda(u) = \chi_{[0,L]}(u)(\frac{2b}{h} + \frac{2b}{h}\frac{1}{L}\frac{1}{h}) + \chi_{(L,\infty)}(u)\frac{b}{h}0. \tag{2.71}$$

Así, nuestro resultado es aplicable a (2.65), y garantiza que la solución cero es asintóticamente estable. Destacamos que en nuestro resultado, no será un inconveniente que $h$ sea pequeño. Algo similar sucede con las constantes $b$ o $L$, pues no es significante cuan grande sean. Nuestra función $\lambda$ permanecerá en $L^1[0,\infty)$, por lo que, nuestro resultado seguira siendo válido. Así para las constantes $b = 2, h = 10^{-1}$ y $L = 1$, nuestro resultado permite asegurar que la función *cero* es asintóticamente estable. Sin embargo,

$$\frac{10^{-2}}{2(10^{-1}+1)} < 2, \quad \frac{10^{-1}}{1} < 2,$$

lo que signinifica, que ni el resultado de Burton ni él que utiliza el funcional de Liapunov, son aplicables en este caso.

Remarcamos que el Ejemplo 3, deja de manifiesto que nuestro resultado cubre más casos que los criterios utilizados por Burton en [4]. De hecho, las condiciones que garantizan la estabilidad asintótica de la solución *cero* de(2.65), usando nuestro resultado, son poco restrictivas y están en la línea de las condiciones exigidas por Smith en [20].

Otra diferencia con el resultado de [4] pasa por la constante de Lispchitz, de la función $g$. Sólo la requerimos para garantizar la unicidad de la solución de la ecuación (2.13). Sin embargo, en [4], también influye para que el operador resulte contractivo.

Así, nuestro resultado confirma la relevancia de estudiar la estabilidad de soluciones de ecuaciones diferenciales mediante la Teoría del Punto Fijo.

# Bibliografía


[1] T.A. Burton, Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations, Academic Press, Orlando, Florida, 1985.

[2] T.A. Burton, *Perron-type stability theorems for neutral equations*, Nonlinear Analysis, **55** (2003), 285 - 297.

[3] T.A. Burton, *Fixed points and stability of a nonconvolution equation*, Proc. Amer. Math. Soc., **132** (2004), 3679 - 3687.

[4] T.A. Burton, *Fixed points, stability, and exact linearization*, Nonlinear Analysis, **61** (2005), 857 - 870.

[5] T.A. Burton, T. Furumochi, *A note on stability by Schauder's theorem*, Funkcialaj Ekvacioj **44** (2001), 73 - 82.

[6] T.A. Burton, T. Furumochi, *Krasnoselskii's fixed point theorem and stability*, Nonlinear Analysis 4, **49** (2002), 445 - 454.

[7] E.A. Coddingtone and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1955.

[8] J. Dugundji and A. Granas, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.

[9] A. Erdelyi, Asymptotic Expansions, Dover, 1956.

[10] M. Fedoryuk, Asymptotic Analysis (Linear Ordinary Differential Equations), Springer-Verlag, 1983.

[11] P. Hartman, Ordinary Differential Equations, Wiley, New York, 1964.

[12] L. Hatvani, *Integral conditions on the asymptotic stability for the damped linear oscillation with large damping*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 415-422.

[13] L. Hatvani, T. Krisztin, V. Totik, *A necessary and suficient condition for the asymptotic stability of the damped oscillator*, J. Differential Equations, **119** (1995), 209 - 223.

[14] J.J. Levin, *The asymptotic behavior of the solution of a Volterra equation*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 534 - 541.

[15] J.J. Levin, *A nonlinear Volterra equation not of a convolution type*, J. Differential Equations, **4** (1968), 176 - 186.

[16] M. Pinto, *Dichotomy and periodic solutions of quasilinear functional differential equations*. To Appear.

[17] M. Pinto, D. Sepúlveda, *Estabilidad de ecuaciones integrales con aplicaciones a ecuaciones diferenciales con retardo*, SOMACHI 2008.

[18] P. Pucci, J. Serrin, *Asymptotic stability for intermittenly controlled nonlinear oscillators* , SIAM J. Math. Anal. **25** (1995), 815 - 835.

[19] D.R. Smart, Fixed Point Theorems, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.

[20] R.A. Smith, *Asymptotic stability of* $x'' + a(t)x' + x = 0$ , Quart. J. Math. Oxford Ser. **12** (2) (1961), 123 - 126.

[21] B. Zhang, *On the retarded Liénard equation*, Proc. Amer. Math. Soc., **115** (1992), 779 - 785.