

UCH-FC
MAG-M
I-272

c.1

Sobre Ciertas Formas Cuadráticas y Geodésicas.



Marcela Ximena Ilabaca Moore

Patrocinante: Dr. Gonzalo Riera Lira.

Tesis entregada a la Universidad de Chile en cumplimiento parcial
de los requisitos para optar al grado de Magister en Ciencias
Matemáticas

Facultad de Ciencias

Noviembre, 1993.

Facultad de Ciencias
Universidad de Chile



Informe de Aprobacion
Tesis de Magister

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por la Candidato

Marcela Ximena Ilabaca Moore

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Matemáticas

Profesor Patrocinante

Dr. Gonzalo Riera L.

A handwritten signature in blue ink, appearing to be "G. Riera", written over a horizontal line.

Comisión Informante de Tesis

A handwritten signature in blue ink, appearing to be "Ricardo Baeza", written over a horizontal line.

A handwritten signature in blue ink, appearing to be "Gonzalo Riera", written over a horizontal line.

A handwritten signature in blue ink, appearing to be "Gonzalo Riera", written over a horizontal line.



Indice

1.1	El Grupo Modular	1
1.2	Formas Cuadráticas de Gauss y el Semiplano Superior	8
1.2.1	Formas Definidas.	9
1.2.2	Formas Indefinidas.	12
1.3	Geodésicas	17
2.4	El Grupo de Picard.	21
2.5	Formas Cuadráticas De Dirichlet.	37
2.5.1	Períodos de Formas Reducidas de Dirichlet	42
2.6	Formas Cuadráticas de Hermite.	45
2.6.1	Formas de Hermite Definidas.	46
2.6.2	Formas de Hermite Indefinidas.	49
2.6.3	Períodos de Formas Reducidas de Hermite.	50

Introducción

El estudio de los grupos discretos se inicia con los trabajos de Fuchs en Ecuaciones Diferenciales en el campo complejo, de Poincaré en Geometría No-Euclideana y con el teorema de Koebe que establece que toda superficie de Riemann puede ser representada como el cociente de un grupo discreto actuando en el disco unidad. Nuestro conocimiento sobre la construcción explícita de estos grupos es sin embargo bastante limitado y se puede englobar en tres áreas específicas:

- (i) Construcción de grupos a partir de Aritmética.

Donde tenemos como ejemplo los grupos $\Gamma(n), \Gamma^n$ y Γ_n , subgrupos del grupo $PSL(2, Z)$.

- (ii) Construcciones geométricas a partir de la Geometría No-Euclideana.

Un ejemplo de éstos son los grupos triangulares y sus subgrupos.

- (iii) Construcciones abstractas a partir de la teoría general del Espacio de Teichmüller.

Los grupos cuasi-fuchsianos, Kleinianos y aquellos obtenidos por los teoremas de combinación Maskit-Klein, son grupos representativos de éste tipo de construcciones.

Esta última área reveló la importancia de considerar no sólo grupos actuando en abiertos del plano complejo, sino también su acción en el espacio hiperbólico de tres dimensiones, donde la existencia de un poliedro fundamental garantiza que el grupo generado es discontinuo (Ver [Ma-Be]).

Por otra parte, Thurston inició el estudio general de los sólidos como cociente de grupos discontinuos actuando en el espacio hiperbólico tri-dimensional, clasificación que aún progresa y que se basa en las propiedades geométricas de la distancia y de los poliedros tri-dimensionales.

Pero la estructura de grupos actuando en el espacio tri-dimensional que estén dados a partir de Aritmética es desconocida y prácticamente se limita al caso de $PSL(2, Z[i])$ (considerado en esta tesis).

En ésta tesis hemos desarrollado todos los elementos algebraicos básicos necesarios para iniciar el estudio de grupos aritméticos en esta situación, y se basa en la consideración de algunas formas cuadráticas.

Si bien estos resultados están en la literatura clásica, se encuentran en forma bastante dispersa y de difícil lectura, lo que nos ha llevado a presentar estos elementos de la manera más sencilla posible, esto es, usando cuaterniones, como fue descubierto por Ahlfors hace poco tiempo.

Esperamos con ello dejar preparado el terreno para otros resultados, tal como sería por ejemplo el estudio de los grupos discretos generados por los automorfismos de formas de Hermite lo cual daría una nueva familia de grupos aritméticos.

A continuación pasaremos a detallar el contenido de esta tesis.

Un resultado clásico de aritmética obtenido por Lagrange y Gauss sobre formas cuadráticas binarias, establece una biyección entre el conjunto de clases de equivalencia de formas cuadráticas binarias, enteras y definidas, con discriminante $d < 0$ fijo y ciertos puntos del semiplano superior de Poincaré H .

En el primer capítulo estudiamos esta correspondencia que se establece via

$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \longmapsto z = \frac{-b + i\sqrt{-d}}{2a}$$

donde $d = b^2 - 4ac < 0$ es libre de cuadrados.

Las formas reducidas según Minkowski son aquellas cuya imagen está en el dominio fundamental R_Γ del grupo modular $\Gamma = SL(2, Z)/\pm\{1\}$ en H . De esta manera es fácil ver que hay sólo finitas formas reducidas con discriminante d y que toda forma es equivalente a una forma reducida.

Para el caso de formas indefinidas se establece una correspondencia entre clases de formas cuadráticas binarias indefinidas y clases de números irracionales cuadráticos reales, via el desarrollo en fracciones continuadas de $x = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$, correspondiente a la forma $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ con $d > 0$ fijo. Asociándole a cada clase de formas una clase de ciclos de enteros naturales.

Geoméricamente asociamos a cada clase de formas indefinidas la geodesica cerrada de H/Γ que se obtiene de unir las raíces de la ecuación cuadrática minimal $Q(x, 1) = 0$.

Basados en estos resultados, surge la idea de desarrollar equivalencias similares para el caso de formas cuadráticas binarias con coeficientes en el anillo de enteros de Gauss $Z[i]$.

Para establecer esta correspondencia es necesario definir el semiespacio superior de Poincare $H^3 = \{(x, y, t) \in R^3 | t > 0\}$ sobre el cual opera el grupo de Picard $\mathcal{G} = SL(2, Z[i])/\{\pm 1\}$, utilizando para ello el cuerpo de cuaterniones \mathcal{H} . Definiendo así un dominio fundamental para \mathcal{G} en H^3 .

En el segundo capítulo del trabajo se estudian primero las formas cuadráticas binarias de Dirichlet $f(z, w) = az^2 + 2bzw + cw^2$ con $a, b, c \in Z[i]$, asociándole geoméricamente el semicírculo C_f de H^3 , que se obtiene de unir las raíces z_1 y z_2 de la ecuación minimal $f(z, 1) = 0$. Viendo que efectivamente clases de formas cuadráticas binarias sobre $Z[i]$ corresponden a clases de semicírculos bajo la acción del grupo \mathcal{G} . Lo cual permite definir el concepto de formas reducidas como aquellas cuyos semicírculos intersectan el poliedro fundamental $P_{\mathcal{G}}$.

A tal forma es posible asociarle un conjunto de arcos de curvas que se obtienen cuando el semicírculo C_f pasa a través de los infinitos poliedros que particionan

el semiespacio H^3 . Sin embargo mediante una transformación adecuada es siempre posible trasladar un arco cualquiera a uno en el poliedro fundamental, obteniendo así un conjunto finito de arcos llamado el período de arcos reducidos de la forma reducida f . Este período de arcos nos dará una caracterización de las formas de Dirichlet equivalentes, pues dos formas de Dirichlet serán equivalentes sí y sólo si pertenecen al mismo período.

Finalmente, estudiamos las formas cuadráticas de Hermite $f(z, w) = az\bar{z} + bz\bar{w} + \bar{b}z\bar{w} + cw\bar{w}$ con $a, c \in Z$ y $b \in Z[i]$ cuyo discriminante es $D = b\bar{b} - ac \in Z$.

Para $D < 0$, decimos que la forma es definida y le asociamos geoméricamente un punto, que se obtiene como punto límite al construir un haz de esferas a través del círculo imaginario $f(z, 1) = 0$.

Se definen las formas de Hermite reducidas en forma similar al caso de las formas de Dirichlet, es decir, como aquellas cuyo punto representante pertenece al poliedro fundamental. Y se estudia la finitud de dichas formas.

Respectivamente, para el caso de las formas de Hermite indefinidas, con $D > 0$, se le asocia geoméricamente a una forma f la semiesfera que se construye sobre el círculo real determinado por la ecuación minimal $f(z, 1) = 0$.

Si la semiesfera que representa a la forma interseca el poliedro fundamental decimos que la forma es reducida e igual que en los casos anteriores vemos que existen finitas formas reducidas con un discriminante dado.

Análogamente a lo realizado con las formas de Dirichlet, asociamos a una forma f reducida, un período de polígonos reducidos que se obtienen cuando la semiesfera que representa a la forma interseca los infinitos poliedros que cubren el semiespacio superior de Poincare, de esta forma obtenemos una caracterización para las formas de Hermite equivalentes, pues dos formas de Hermite reducidas serán equivalentes sí y sólo si pertenecen al mismo período.

Capítulo 1

1.1 El Grupo Modular

Definición 1.1.1

El grupo modular es el subgrupo de $SL(2, R)$ formado por las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, con coeficientes enteros, tal que $ad - bc = 1$, donde hemos identificado la matriz A y $-A$. Lo denotaremos por Γ . Es decir:

$$\Gamma = SL(2, Z)/\{\pm 1\}$$

Teorema 1.1.1

Γ esta generado por las matrices:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Demostración:

Identificando la matriz A con $-A$ realizaremos inducción sobre $c \geq 0$.

Para $c = 0$ tenemos $ad = 1, b \in \mathbb{Z}$ luego $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^{\pm b}$.

Para $c = 1$ tenemos $b = ad - 1$ luego

$$A = \begin{pmatrix} a & ad - 1 \\ 1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^a S T^d$$

Para $c \neq 0, 1$.

De $ad - bc = 1$ tenemos que c no divide a d , por algoritmo de Euclides, existen $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que: $d = cq + r$ con $0 < r < c$ entonces

$$AT^{-q}S = \begin{pmatrix} -aq + b & -a \\ r & -c \end{pmatrix} = B$$

con $0 < r < c$.

De aquí aplicamos hipótesis de inducción a la matriz B .

□

Consideremos ahora el semiplano superior de \mathbb{C} o semiplano de Poincaré:

$$H = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}z > 0\}$$

Γ actúa sobre H de la siguiente manera:

Para todo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ y $z \in H$ se define:

$$Az = \frac{az + b}{cz + d}$$

Veremos más adelante, en lema 1.1 que H es estable bajo la acción de Γ .

Diremos que $z_1, z_2 \in H$ son equivalentes bajo Γ sí y sólo si existen $A \in \Gamma$ tal que

$$z_1 = A \cdot z_2.$$

Explícitamente si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ entonces:

$$z_1 = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d}$$

Γ particiona el semiplano H en clases de equivalencia llamadas órbitas.

Una región fundamental para Γ es un subconjunto R_Γ de H , el cual contiene un punto de cada órbita.

Demostraremos el siguiente:

Teorema 1.1.2

$$R_\Gamma = \left\{ z \in H \mid \begin{array}{l} -1/2 < \operatorname{Re} z \leq 1/2, \quad |z| > 1 \quad \text{si } -1/2 < \operatorname{Re} z < 0 \\ |z| \geq 1 \quad \text{si } 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1/2 \end{array} \right\}$$

es una región fundamental de Γ en H .

Previamente a la demostración, veamos el siguiente:

Lema 1.1.1

Sean $z_1 = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ entonces:

$$\operatorname{Im} z_1 = \frac{\operatorname{Im} z_2}{|cz_2 + d|^2}$$

Demostración:

$$\operatorname{Im} z_1 = \frac{1}{2i} \left(\frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \right) = \frac{1}{2i} \frac{z - \bar{z}}{|cz + d|^2} = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2}$$

□

Ahora realizaremos la demostración del teorema.

Demostración:

Sea $z \in H$, aplicando T o T^{-1} cuantas veces sea necesario, obtenemos :

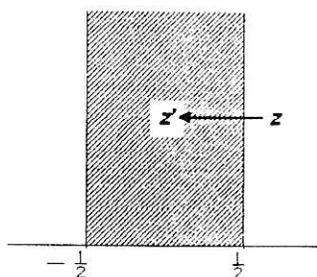


Figura 1.1:

$$z \rightarrow z' \text{ con } -1/2 < \operatorname{Re} z' \leq 1/2$$

Si $|z'| \geq 1$ entonces $z' \in R_\Gamma$.

Si $|z'| < 1$ por el lema 1.1 definimos $z'' = S \cdot z'$ que cumple $\operatorname{Im} z'' > \operatorname{Im} z'$ y entonces trasladamos

$$z'' \rightarrow z''' \text{ con } -1/2 < \operatorname{Re} z''' \leq 1/2$$

Si $|z'''| \geq 1$ estamos en la región R_Γ sino repetimos el proceso.

Después de un número finito de composiciones de S y T obtenemos $z^{(n)} \in R_\Gamma$, de lo contrario tendríamos una sucesión infinita de puntos con un punto de acumulación en el disco unitario, lo que no puede ocurrir pues Γ actúa de manera discontinua en H .

Tenemos así que en R_Γ existe al menos un representante de cada clase del cociente H/Γ .

Veamos ahora que sólo existe un representante de cada clase en R_Γ .

Supongamos lo contrario, es decir que existen z_1 y $z_2 \in R_\Gamma$ y $A \in \Gamma$ tal que $z_1 = A \cdot z_2$.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ entonces por el lema 1.1

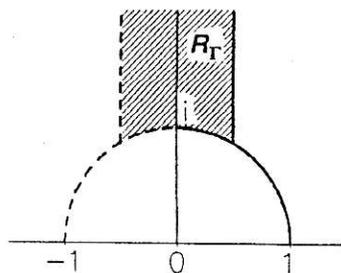


Figura 1.2:

$$\operatorname{Im} z_2 = \frac{\operatorname{Im} z_1}{|cz_1 + d|^2}$$

Mostraremos a continuación que $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.

Si $\operatorname{Im} z_2 < \operatorname{Im} z_1$ entonces $|cz_1 + d| < 1$.

Si $|c| \geq 2$ entonces:

$$|\operatorname{Im}(cz_1 + d)| = |c| \operatorname{Im} z_1 \geq 2 \frac{\sqrt{3}}{2} > 1$$

Esta desigualdad se cumple para todo $d \in \mathbb{Z}$ en particular para el d de la matriz A .

Obtenemos entonces una contradicción con lo anterior, por lo tanto $|c| < 2$.

Como siempre podemos tomar $c \geq 0$, tenemos dos posibilidades $c = 0$ o $c = 1$.

Si $c = 0$ entonces $|d| < 1$ luego $d = 0$ y por lo tanto $A \notin \Gamma$. Lo que es una contradicción.

Si $c = 1$ entonces:

$$1 > |z_1 + d| \geq |\operatorname{Re} z_1 + d| \geq |d| - |\operatorname{Re} z_1|$$

de donde obtenemos que:

$$|d| \leq 1 + |\operatorname{Re} z_1| \leq \frac{3}{2}$$

por lo tanto $d = 0$ o $d = \pm 1$.

Si $d = 0$ entonces $|z_1| < 1$ lo que contradice que $z_1 \in R_\Gamma$.

Si $d = \pm 1$ entonces:

$$| \operatorname{Re}(d + z_1) | \geq 1/2 \quad \text{y} \quad | \operatorname{Im}(d + z_1) | \geq 3/2$$

es decir $|d + z_1| \geq 1$ lo cual es una contradicción.

Luego no podemos tener $\operatorname{Im} z_2 > \operatorname{Im} z_1$.

Por simetría tampoco es posible $\operatorname{Im} z_2 < \operatorname{Im} z_1$.

Concluimos así que $\operatorname{Im} z_2 = \operatorname{Im} z_1$ y $|d + z_1| = 1$.

Siguiendo el mismo razonamiento anterior tenemos:

Si $c = 0$ entonces $d = a = \pm 1$ luego $z_1 = z_2 + b$. Pero como z_1 y $z_2 \in R_\Gamma$ entonces $b = 0$ y $z_1 = z_2$.

Si $c = 1$ entonces $d = 0$ y $b = -1$ es decir;

$$z_1 = \frac{az_2 - 1}{z_2} \quad \text{con} \quad |z_1| = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2.$$

De esto obtenemos:

$$\operatorname{Re} z_1 = a - \frac{\operatorname{Re} z_2}{|z_2|} \quad \text{y} \quad \operatorname{Im} z_1 = \frac{\operatorname{Im} z_2}{|z_2|}$$

Luego $|z_2| = 1$ y por lo tanto $\operatorname{Re} z_1 = a - \operatorname{Re} z_2$.

Como z_1 y $z_2 \in R_\Gamma$ obtenemos $a = 0$ es decir:

$$z_1 = \frac{-1}{z_2} = -\overline{z_2}$$

Por lo tanto, $z_1 = z_2 = i$.

Luego existe un sólo representante para cada elemento de H/Γ en R_Γ y por lo tanto R_Γ es una región fundamental para la acción de Γ en H .

□

Observación

Los únicos puntos fijos de R_Γ por algún elemento no trivial de Γ son i y $\rho = 1/2 + i\sqrt{3}/2$. El elemento i es fijado por S que es una transformación de orden 2, mientras que ρ es fijado por la compuesta TS de orden 3.

Directamente puede verificarse que no hay otros elementos de Γ que fijen estos puntos .

Para un estudio más detallado ver [Se] .

1.2 Formas Cuadráticas de Gauss y el Semiplano Superior

Definición 1.2.1

Sea $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$ una forma cuadrática, binaria y primitiva (es decir $(a, b, c) = 1$) con discriminante $d = b^2 - 4ac$ libre de cuadrados. Denotemos $Q = [a, b, c]$ a tal forma.

El grupo modular Γ opera sobre el conjunto de formas cuadráticas binarias, irreducibles, enteras y primitivas de discriminante d de la siguiente manera:

Para todo $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$ y $Q = [a, b, c]$ se define:

$$A \cdot Q(x, y) = Q\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

Diremos que dos formas Q y Q_1 son equivalentes bajo Γ sí y sólo si existe $A \in \Gamma$ tal que :

$$A \cdot Q = Q_1$$

Explícitamente si $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$ entonces:

$$Q(x, y) = Q_1(x_1, y_1) \quad \text{con} \quad \begin{aligned} x &= \alpha x_1 + \beta y_1 \\ y &= \gamma x_1 + \delta y_1 \end{aligned}$$

Esta relación nos permite tener clases de formas equivalentes.

De las ecuaciones anteriores fácilmente vemos que formas equivalentes tienen el mismo discriminante.

1.2.1 Formas Definidas.

Consideremos primero la forma $Q = [a, b, c]$ con $d < 0$, es decir, la forma es definida o equivalentemente anisótropa (que no representa al 0) sobre R .

Como $d < 0$ tenemos $a, c > 0$ o $a, c < 0$. Sin restricción consideremos $a, c > 0$.

Sea $z = \frac{-b + i\sqrt{-d}}{2a} \in C/R$ el número irracional cuadrático, imaginario cuya ecuación minimal $Q(z, 1) = 0$ tiene discriminante d . Como $\frac{\sqrt{-d}}{2a} > 0$ entonces $z \in H$.

Diremos que

$$z = \frac{-b + i\sqrt{-d}}{2a}$$

es el representante de la forma cuadrática $Q = [a, b, c]$.

Teorema 1.2.1

Dos formas cuadráticas de discriminante $d < 0$ son equivalentes sí y sólo si sus representantes son equivalentes bajo Γ .

Demostración:

Si Q es equivalente a Q_1 , existe $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$ tal que:

$$Q(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) = Q_1(x, y)$$

Si z y z_1 son los representantes de Q y Q_1 respectivamente, basta considerar

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \in \Gamma \text{ y se tiene } z_1 = A^{-1} \cdot z.$$

Inversamente, si z y z_1 son los representantes de Q y Q_1 respectivamente y existe $A \in \Gamma$ tal que $A \cdot z = z_1$ entonces considerando A^{-1} se tiene que $A^{-1} \cdot Q = Q_1$.

□

Definición 1.2.2

Diremos que la forma $Q = [a, b, c]$ con discriminante $d < 0$ es reducida sí y sólo si su representante $z \in R_\Gamma$.

Observación

Del teorema 1.2.1 se deduce que dos formas reducidas son equivalentes sí y sólo si ellas son iguales.

Así mismo, cada clase de formas contiene exactamente una forma reducida.

Teorema 1.2.2

La forma $Q = [a, b, c]$ es reducida sí y sólo si

$$-a \leq b < a \leq c \quad \text{con} \quad b \leq 0 \text{ si } a = c.$$

Demostración:

Sea $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ reducida entonces por definición:

$$-\frac{1}{2} < \frac{-b}{2a} \leq \frac{1}{2}$$

De donde:

$$-1 < -\frac{b}{a} \leq 1$$

Multiplicando por -1 queda:

$$1 > \frac{b}{a} \geq -1$$

luego

$$-a \leq b < a$$

como además z satisface $|z| = \frac{c}{a} \geq 1$ entonces, se tiene $-a \leq b < a \leq c$.

Si $a = c$ entonces $|z| = 1$, es decir:

$$0 \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}$$

De donde $0 \leq -\frac{b}{2a} \leq \frac{1}{2}$, por lo tanto :

$$-a \leq b \leq 0$$

De donde se obtiene la segunda condición.

□

Observación

Como $|d| = 4ac - b^2 \geq 4ac - a^2 \geq 3a^2$ entonces

$$0 < a^2 \leq \frac{|d|}{3}$$

de donde

$$0 < a \leq \sqrt{\frac{|d|}{3}}$$

Deducimos de aquí que sólo existe un número finito de formas reducidas de discriminante d llamado el número de clase.

Definición 1.2.3

Los puntos del cociente H/Γ que son proyecciones de números irracionales cuadráticos imaginarios se llaman puntos de Heegner.

Observemos que si $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ es reducida, su representante

$$z = \frac{-b + i\sqrt{-d}}{2a}$$

es un punto de Heegner.

Tenemos así el siguiente teorema.

Teorema 1.2.3

Para $d < 0$ existe una biyección entre el conjunto de clases de formas cuadráticas de discriminante d y el conjunto de puntos de Heegner cuya ecuación minimal tiene discriminante d .

1.2.2 Formas Indefinidas.

Consideremos ahora la forma

$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

indefinida o equivalentemente isótropa sobre R , es decir con $d > 0$.

La ecuación cuadrática asociada $Q(x, 1) = ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos raíces:

$$x = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} \quad y \quad x' = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$$

que son irracionales cuadráticos reales.

Definición 1.2.4

Un racional cuadrático real se dice reducido sí y sólo si

$$x > 0 \quad y \quad -1 < x' < 0$$

Asumiremos ahora conocida la teoría de Fracciones Continuas, presentamos entonces resultados generales de Teoría de Números cuyas demostraciones hemos omitido, sin embargo pueden ser consultadas en [Ha-Wr].

Recordemos que utilizando el algoritmo de Euclides podemos expresar un número real como una fracción continuada:

$$x = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots}} =: [n_1, n_2, n_3, \dots]$$

donde $n_1, n_2, n_3, \dots \in Z$.

Si el desarrollo es finito, x es racional y si es infinito x es irracional.

Definición 1.2.5

Una fracción continuada infinita $[n_1, \dots]$ se dice periódica sí y sólo si existe $k > 0$ tal que $n_{r+k} = n_r$ para todo $r \geq R$ y se denota:

$$[n_1, \dots, \overline{n_R, \dots, n_{R+k-1}}]$$

El conjunto de cuocientes parciales n_R, \dots, n_{R+k-1} se llama el período.

Si $R = 1$ el número se llama puramente periódico .

Presentamos a continuación los siguientes resultados generales de Teoría de Números:

Teorema 1.2.4

Una fracción continuada es periódica sí y sólo si corresponde a un número irracional cuadrático.

Teorema 1.2.5

El desarrollo en fracción continuada de un irracional cuadrático es puramente periódico sí y sólo si el número es reducido.

Consideremos el desarrollo en fracción continuada de $x = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}$ correspondiente a la forma cuadrática $Q = [a, b, c]$.

Como x es irracional cuadrático, su desarrollo será periódico

$$x = [n_1, \dots, \overline{a_0, \dots, a_k}]$$

Asociemosle a cada x su período $[\overline{a_0, \dots, a_k}]$ llamado el ciclo de enteros naturales asociado a x .



Teorema 1.2.6

Sean x_1 y x_2 números reales :

$$x_1 = [n_1, n_2, \dots]$$

$$x_2 = [m_1, m_2, \dots]$$

Entonces x_1 es equivalente a x_2 bajo Γ sí y sólo si existen $p, q > 0$ tal que:

$$n_{p+r} = m_{q+r} \text{ para todo } r \geq 0$$

Demostración:

Sean T y S las matrices que generan Γ es decir:

$$T(x) = x + 1$$

$$S(x) = -\frac{1}{x}$$

Si $x_1 = [n_1, n_2, \dots]$, entonces:

$$T^{-n_1} x_1 = [n_2, n_3, \dots]^{-1}$$

$$ST^{-n_1} x_1 = -[n_2, n_3, \dots]$$

$$T^{n_2} ST^{-n_1} x_1 = -[n_3, n_4, \dots]^{-1}$$

$$ST^{n_2} ST^{-n_1} x_1 = [n_3, n_4, \dots]$$

y así sucesivamente.

Si las "colas" de x_1 y x_2 coinciden, tendremos:

$$T^{(-1)^p n_p} S \dots ST^{-n_1} x_1 = T^{(-1)^q m_q} S \dots ST^{-m_1} x_2$$

de aquí tendremos $x_1 = \frac{ax_2 + b}{cx_2 + d}$ donde :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T^{n_1} S T^{-n_2} \dots T^{(-1)^{p+1} n_p} T^{(-1)^q m_q} S \dots S T^{-m_1} \in \Gamma$$

Inversamente, sólo necesitamos saber que toda matriz A del grupo modular puede ser escrita de la forma :

$$T^{n_1} S T^{-n_2} \dots S$$

y esto resulta del hecho que S y T generan el grupo modular.

□

Sea $x = [n_1, \dots, n_r, \overline{a_0, \dots, a_k}]$ un irracional cuadrático podemos concluir de este teorema lo siguiente:

Si consideramos ciclos de enteros equivalentes como aquellos que se obtienen de una permutación circular, a saber:

$$\begin{aligned} x_0 &= [\overline{a_0, a_1, \dots, a_k}] \\ x_1 &= [\overline{a_1, a_2, \dots, a_k, a_0}] \\ &\vdots \\ x_k &= [\overline{a_k, a_0, \dots, a_{k-1}}] \end{aligned}$$

entonces x es equivalente a x_0, \dots, x_k los cuales resultan ser todos los irracionales cuadráticos reducidos en la clase de x . Luego a cada clase de números cuadráticos irracionales podemos asociar una clase de ciclos de enteros naturales.

Resumiendo obtenemos la siguiente correspondencia:

Teorema 1.2.7

Existe una biyección entre las siguientes clases de equivalencia:

Clases de irracionales cuadráticos reales .

Clases de formas cuadráticas indefinidas.

Clases ciclos de enteros naturales.

Observación

Para estudiar más profundamente la relación entre la geometría no - euclídeana y las fracciones continuadas recomendamos ver [Se-i].

1.3 Geodésicas

Para comprender la correspondencia entre clases de formas cuadráticas y geodésicas de H/Γ es necesario primero recordar algunas ideas de la geometría hiperbólica .

En primer lugar, hemos usado el semiplano de Poincaré H , como modelo de plano hiperbólico, el cual unido al círculo al infinito corresponde al plano hiperbólico cerrado. En el cual definimos una métrica ρ a partir del diferencial

$$ds = \frac{|dz|}{\text{Im}(z)}$$

de la siguiente manera:

Definición 1.3.1

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow H$ camino continuamente diferenciable, se define la longitud de γ por:

$$\|\gamma\| = \int_a^b \frac{|\dot{\gamma}(t)|}{\text{Im}(\gamma(t))} dt$$

La función ρ se define entonces :

$$\rho(z, w) = \inf \|\gamma\|$$

donde $z, w \in H$ y el ínfimo es tomado sobre todos los γ que unen z y w en H .

Fácilmente podemos verificar que ρ es no negativa, simétrica y satisface la desigualdad triangular, en efecto, ρ es una métrica en H .

Teorema 1.3.1

Sean z y w dos puntos de H . Una curva γ que une a z y w satisface

$$\|\gamma\| = \rho(z, w)$$

(es decir, γ será minimal) si y sólo si γ es una parametrización de $[z, w]$ como una curva simple.

Para estudiar la demostración de este teorema y en general estudiar la geometría hiperbólica recomendamos ver [Be].

De la equivalencia establecida en el teorema anterior, resulta natural definir ahora:

Definición 1.3.2

Se define una recta hiperbólica o equivalentemente una geodésica hiperbólica como la intersección del plano hiperbólico con un círculo o línea recta euclídeana ortogonales al círculo al infinito.

Consideremos la proyección:

$$\Pi : H \longrightarrow H/\Gamma$$

es un revestimiento del grupo de automorfismos Γ . Como Γ es un grupo de isometrías de H , H/Γ hereda la métrica hiperbólica via Π .

Tenemos entonces que una geodésica del cuociente H/Γ es la imagen de una geodésica de H bajo Π .

Definición 1.3.3

Sea γ una geodésica de H y $\bar{\gamma}$ su proyección en H/Γ decimos que $\bar{\gamma}$ es una geodésica cerrada si el estabilizador de γ es un subgrupo cíclico infinito de Γ .

Donde el estabilizador de γ se define como:

$$E(\gamma) = \{A \in \Gamma | A \cdot \gamma = \gamma\}$$

Explícitamente si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ y:

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\longrightarrow H \\ t &\longmapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

entonces:

$$A \cdot \gamma(t) = \frac{a\gamma(t) + b}{c\gamma(t) + d} = \gamma(t) \quad \text{para todo } t \in [a, b]$$

Veamos ahora la correspondencia entre clases de formas cuadráticas indefinidas y geodésicas de la superficie modular .

Sean x y x' las raíces de la ecuación cuadrática minimal $Q(x, 1) = 0$ asociada a la forma $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Existe entonces una geodésica de H que une x y x' la cual se proyecta bajo Π en una geodésica de H/Γ ,(ver figura(1.3)). De esta manera asociamos a la forma cuadrática Q esta geodésica.

Dos formas equivalentes tendrán geodésicas equivalentes y al proyectarse en H/Γ estas deben ser la misma pues de no ser así contradice el hecho de ser una región fundamental.

Por lo tanto obtenemos asociada a la clase de equivalencia de Q en forma única una geodésica sobre H/Γ .

Teorema 1.3.2

Para $d > 0$ existe una biyección entre las clases de formas cuadráticas de discriminante d y el conjunto de geodésicas de la superficie modular cuya ecuación minimal tiene discriminante d .

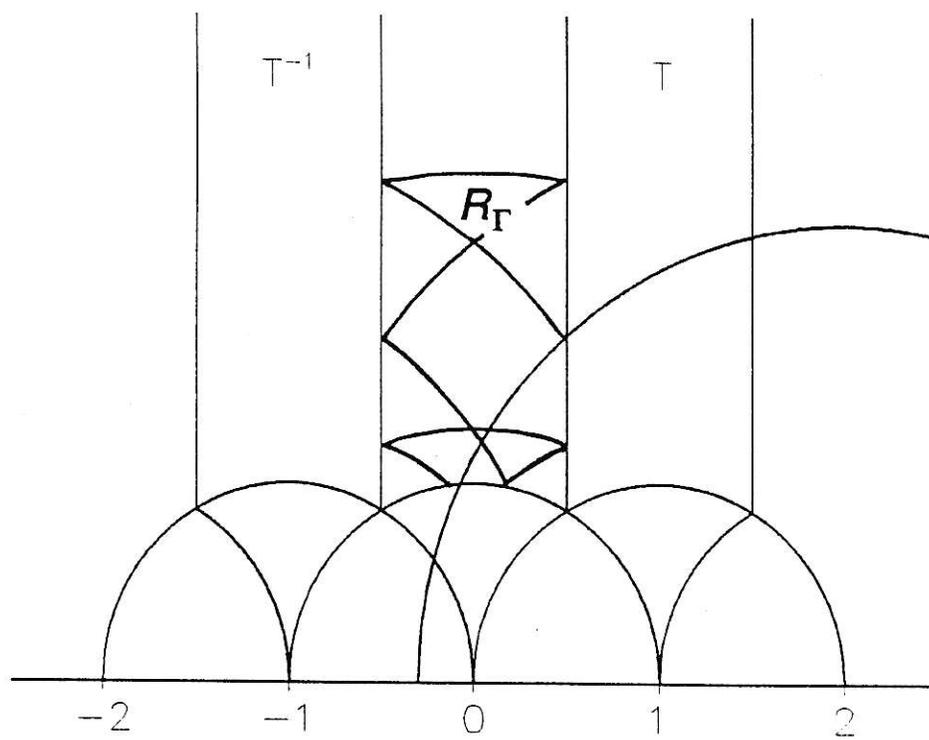


Figura 1.3: Proyección de una geodésica sobre R_Γ

Capítulo 2

2.4 El Grupo de Picard.

Definición 2.4.1

El grupo de Picard es el grupo formado por las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, con coeficientes en el anillo $Z[i]$ donde $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ y tal que identificamos las matrices A y $-A$.

Denotaremos este grupo por $\mathcal{G} =: SL(2, Z[i])/\{\pm 1\}$

Teorema 2.4.1

\mathcal{G} esta generado por las matrices :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración:

Sean :

$$\begin{aligned}
V_1 &= ST^{-1}S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
V_i &= SV^{-1}S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} \\
U &= SVV_iV = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Si $m = a + bi$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$ denotemos:

$$S_m = T^a V^b = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad V_m = V_1^a V_i^b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $\Sigma \in \mathcal{G}$. veamos que Σ se puede escribir como una combinación de S, T y V .

Supongamos primero que $\alpha = 0$ entonces Σ es de la forma:

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = SS_{-\delta} \\
&\quad \circ \\
\Sigma &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & \delta \end{pmatrix} = USS_{-i\delta}
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $\beta = 0$. Tenemos dos posibilidades para Σ :

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} = V_\gamma \\
&\quad \circ \\
\Sigma &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ \gamma & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i\gamma & 1 \end{pmatrix} = UV_{i\gamma}
\end{aligned}$$

Supongamos que $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$ usando el algoritmo de Euclides construyamos Σ de la siguiente serie de transformaciones:

$$\Sigma_1 = \Sigma \cdot V_{m_1} = \begin{pmatrix} \alpha + m_1\beta & \beta \\ \gamma + m_1\delta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta \\ \gamma_1 & \delta \end{pmatrix}$$

donde $N(\alpha_1) = \frac{1}{2}N(\beta)$ y $N(a)$ corresponde a la norma del complejo a .

Siguiendo el proceso:

$$\Sigma_2 = \Sigma_1 \cdot S_{m_2} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta + m_2\alpha_1 \\ \gamma_1 & \delta + m_2\gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_3 = \Sigma_2 \cdot V_{m_3} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + m_3\beta_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 + m_3\delta_1 & \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos así una sucesión de enteros de Gauss m_1, m_2, m_3, \dots tales que:

$$N(\alpha_1) \leq \frac{1}{2}N(\beta), N(\beta_1) \leq \frac{1}{2}N(\alpha_1), N(\alpha_2) \leq \frac{1}{2}N(\beta_1) \dots$$

El proceso termina cuando obtenemos una transformación Σ_k con α o β nulos. Esto debe ocurrir ya que la serie de números enteros positivos $N(\beta), N(\alpha_1), N(\beta_1), \dots$ es constantemente decreciente. De aquí podemos fácilmente escribir Σ como combinación de T, S y V.

□

Para aclarar la construcción anterior daremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

Sea $\Sigma = \begin{pmatrix} 3i+2 & 2i+1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ entonces usando el algoritmo de Euclides:

$$3i+2 = (1)(2i+1) + (i+1)$$

$$3 = (1)(2) + 1$$

construimos entonces:

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} (3i+2) + (-1)(2i+1) & 2i+1 \\ 3 + (-1)(2) & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i+1 & 2i+1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \Sigma V_1$$

con $N(i+1) = 2 \leq N(2i+1) = 5$

continuando el proceso:

$$\Sigma_2 = \Sigma_1 \cdot S_{-1} = \begin{pmatrix} (i+1) & (2i+1) + (-1)(i+1) \\ 1 & 2 + (-1)1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i+1 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_3 = \Sigma_2 \cdot V_{i-1} = \begin{pmatrix} (i+1) + (i-1)i & i \\ 1 + (i-1)1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = U \cdot S \cdot S_{-i}$$

A continuación generalizaremos la noción de plano superior de Poincaré a dimensión 3 y haremos operar al grupo \mathcal{G} sobre él en forma similar al caso clásico.

Definición 2.4.2

Sea

$$H^3 = \{(x, y, t) \in R^3 \mid t > 0\}$$

A este subespacio de R^3 lo llamaremos subespacio superior de Poincaré en dimensión 3.

El grupo de Picard \mathcal{G} opera sobre H^3 de la siguiente manera:

Sea \mathcal{H} el cuerpo de los cuaterniones (para estudiar los cuaterniones ver [Ja]) podemos entonces identificar cada elemento $(x, y, t) \in H^3$ con el cuaternión:

$$\vec{h} = x + yi + tj \quad \text{con } t > 0$$

Definamos para todo $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$ y $\vec{h} = x + yi + tj \in \mathcal{H}$ la siguiente operación:

$$A \cdot \vec{h} = (\alpha \vec{h} + \beta)(\gamma \vec{h} + \delta)^{-1}$$

Debido a que $(\alpha \vec{h} + \beta)(\gamma \vec{h} + \delta) = (\gamma \vec{h} + \delta)(\alpha \vec{h} + \beta)$, usaremos la notación usual

$$A \cdot \vec{h} = \frac{\alpha \vec{h} + \beta}{\gamma \vec{h} + \delta}.$$

Explícitamente si $\vec{h} = z + tj$ con $z = x + iy$ y $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$ entonces :

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{h} &= \frac{\alpha(z + tj) + \beta}{\gamma(z + tj) + \delta} = \frac{\alpha z + \alpha t j + \beta}{(\gamma z + \delta) + \gamma t j} \\ &= ((\alpha z + \beta) + \alpha t j) \frac{\overline{\gamma z + \delta} - \gamma t j}{|\gamma z + \delta|^2 + |\gamma t|^2} \\ &= \frac{\alpha \bar{\gamma} z \bar{z} + \alpha \bar{\delta} z + \beta \bar{\gamma} \bar{z} + \beta \bar{\delta} + (\alpha t \delta - \beta \gamma t) j + \alpha \bar{\gamma} t \bar{t}}{\gamma \bar{\gamma} (z \bar{z} + t \bar{t}) + \gamma \bar{\delta} z + \delta \bar{\gamma} \bar{z} + \delta \bar{\delta}} \end{aligned}$$

Si $\rho^2 = x^2 + y^2 + t^2$ entonces:

$$A \cdot \vec{h} = \frac{\alpha \bar{\gamma} \rho^2 + \alpha \bar{\delta} z + \beta \bar{\gamma} \bar{z} + \beta \bar{\delta}}{\gamma \bar{\gamma} \rho^2 + \gamma \bar{\delta} z + \delta \bar{\gamma} \bar{z} + \delta \bar{\delta}} + \frac{t}{\gamma \bar{\gamma} \rho^2 + \gamma \bar{\delta} z + \delta \bar{\gamma} \bar{z} + \delta \bar{\delta}} \cdot j$$

Observemos que la operación esta bien definida pues efectivamente,

$$\gamma \bar{\gamma} \rho^2 + \gamma \bar{\delta} z + \delta \bar{\gamma} \bar{z} + \delta \bar{\delta} = \gamma \bar{\gamma} \rho^2 + 2\text{Re}(\gamma \bar{\delta} z) + \delta \bar{\delta}$$

es un número real y como $t > 0$, $A \cdot \vec{h} \in H^3$.

Tenemos entonces que el grupo \mathcal{G} particiona el semiespacio superior en clases de equivalencia.

Demostraremos a continuación el siguiente resultado:

Teorema 2.4.2

Un poliedro fundamental para \mathcal{G} en H^3 es:

$$P_{\mathcal{G}} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} \leq y < \frac{1}{2}, x^2 + y^2 + t^2 \geq 1 \right\}$$



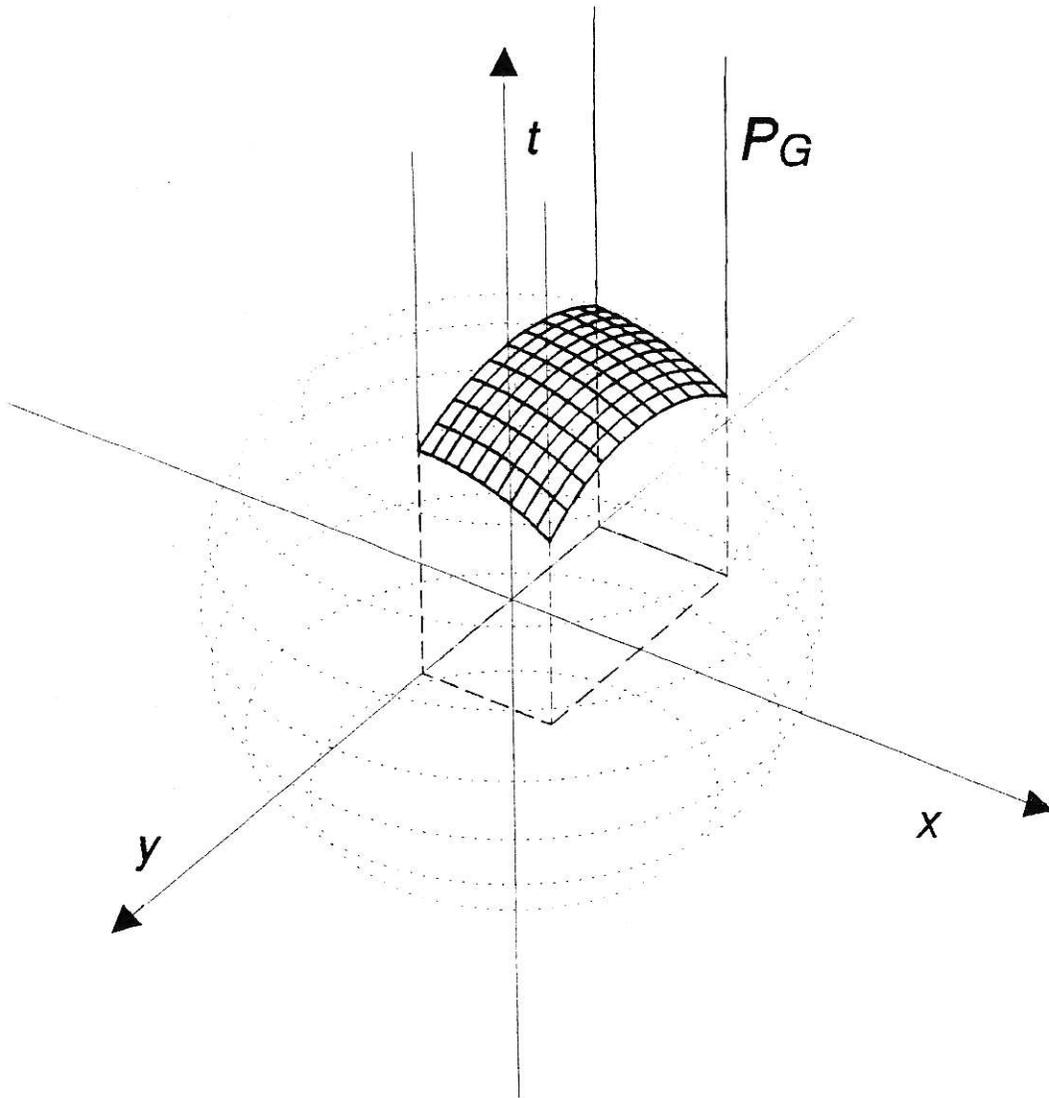


Figura 2.1: Poliedro fundamental P_G

Demostración:

La demostración se realiza de manera análoga a la que se hace para el grupo modular.

Veamos que cada punto de H^3 es equivalente a un punto de P_G .

Sea $p = (x, y, t) \in H^3$, observemos que las transformaciones elementales S, T y V actúan sobre p como sigue:

$$\begin{aligned} S(p) &= \left(\frac{-x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{t}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \\ T(p) &= (x + 1, y, t) \\ V(p) &= (x, y + 1, t) \\ U(p) &= (-x, -y, t) \end{aligned}$$

Luego basta ver que cualquier punto de H^3 es equivalente con algún punto cuyas coordenadas satisfacen:

$$\frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \frac{-1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \quad (2.1)$$

$$x^2 + y^2 + t^2 \geq 1 \quad (2.2)$$

Si aplicamos T y V tantas veces como sea necesario obtenemos $p \mapsto p_1$ con p_1 que satisface las inecuaciones (2.1) Si además p_1 satisface (2.2) entonces p_1 es el punto buscado, sino aplicamos la transformación $S : p_1 \mapsto p'_1$ la cual cumple $t'_1 > t_1$, es decir S "levanta" a p_1 .

Como queremos que p_1 satisfaga (2.1) aplicamos nuevamente T y V obteniendo p_2 que satisfaga (2.1).

Si además p_2 satisface (2.2) entonces p_2 es el punto buscado sino repetimos el proceso obteniendo una sucesión de puntos $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$ que satisfacen (2.1) y en un número finito de pasos debemos alcanzar p_n que satisface (2.1) y (2.2). De lo contrario, como la sucesión t_1, t_2, \dots es decreciente, tendríamos una sucesión infinita de puntos p_1, p_2, p_3, \dots en la región acotada:

$$\frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{-1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}, \quad x^2 + y^2 + t^2 < 1$$

Luego tendríamos un punto de acumulación, lo cual contradice el hecho que G actúa discontinuamente en H^3 .

Veamos ahora que sólo existe un representante de cada clase en H^3/P_G .

Sean $p = (x, y, t)$ y $p_1 = (x_1, y_1, t_1)$ puntos equivalentes en el interior de P_G , es decir:

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \leq y < \frac{1}{2} \quad x^2 + y^2 + t^2 \geq 1 \\ 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \leq y_1 < \frac{1}{2} \quad x_1^2 + y_1^2 + t_1^2 \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer $t_1 \geq t$.

Sea $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G$ tal que $p_1 = A \cdot p$ entonces como

$$t_1 = \frac{t}{\gamma\bar{\gamma}\rho^2 + \gamma\bar{\delta}z + \delta\bar{\gamma}\bar{z} + \delta\bar{\delta}}$$

donde $\rho^2 = x^2 + y^2 + t^2$ y $z = x + iy$

Tenemos entonces:

$$\frac{1}{t_1 t} = \frac{\rho^2}{t^2} \gamma\bar{\gamma} + \frac{z}{t^2} \gamma\bar{\delta} + \frac{\bar{z}}{t^2} \delta\bar{\gamma} + \frac{\delta\bar{\delta}}{t^2} \quad (2.4)$$

$$= \left(1 + \frac{z\bar{z}}{t^2}\right) \gamma\bar{\gamma} + \frac{1}{t^2} (\gamma\bar{\delta}z + \delta\bar{\gamma}\bar{z} + \delta\bar{\delta}) \quad (2.5)$$

$$= \gamma\bar{\gamma} + \frac{1}{t^2} (z\bar{z}\gamma\bar{\gamma} + \gamma\bar{\delta}z + \delta\bar{\gamma}\bar{z} + \delta\bar{\delta}) \quad (2.6)$$

$$= \gamma\bar{\gamma} + \frac{1}{t^2} (z\gamma + \delta)(\bar{z}\bar{\gamma} + \bar{\delta}) \quad (2.7)$$

como $t^2 \geq \frac{1}{2}$ (por 2.3), entonces $t \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ y además $t_1 \geq t$ luego tenemos que:

$$\frac{1}{t t_1} < \frac{1}{t^2} < 2 \text{ de donde}$$

$$2 > \gamma\bar{\gamma} + \frac{1}{t^2} (\gamma z + \delta)(\bar{\gamma}\bar{z} + \bar{\delta})$$

como $\gamma \in Z[i]$, $\gamma\bar{\gamma} \in Z$ tenemos dos posibilidades:

$$\gamma\bar{\gamma} = 0 \quad \circ \quad (2.8)$$

$$\gamma\bar{\gamma} = 1 \quad (2.9)$$

Si ocurre (2.8) $\gamma = \bar{\gamma} = 0$, como $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ entonces:

$$\alpha = 1, \quad \delta = 1, \quad \gamma = 0$$

o

$$\alpha = i, \quad \delta = -i, \quad \gamma = 0$$

luego

$$x_1 + iy_1 = x + iy + \beta$$

o

$$x_1 + iy_1 = -(x + iy) + i\beta$$

como $\beta \in Z[i]$ entonces $\beta = a + bi$ con ciertos $a, b \in Z$.

Entonces de $x_1 + iy_1 = x + iy + a + bi$ obtenemos (por 2.3):

$$x_1 = x + a$$

$$y_1 = y + b$$

De donde $a = 0$ y $b = 0$ por lo tanto $\beta = 0$.

Y si $x_1 + iy_1 = -(x + iy) + i\beta$ tendríamos

$$x_1 + x = -b$$

$$y_1 + y = a$$

Lo que es una contradicción con el hecho que $a, b \in Z$.

Luego si ocurre (2.8) tenemos entonces $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si ocurre (2.9) la ecuación (2.4) queda:

$$\frac{1}{tt_1} = \frac{\rho^2}{t^2} + \frac{1}{t^2}(z\gamma\bar{\delta} + \bar{z}\gamma\delta + \delta\bar{\delta})$$

pero como

$$\frac{\rho^2}{t^2} > \frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{tt_1}$$

entonces $z\gamma\bar{\delta} + \bar{z}\gamma\delta + \delta\bar{\delta} < 0$.

Multiplicando por $(\gamma\bar{\gamma})^{-1}$ resulta:

$$z \frac{\bar{\delta}}{\gamma} + \bar{z} \frac{\delta}{\gamma} + \frac{\delta \bar{\delta}}{\gamma \bar{\gamma}} < 0$$

Si $\frac{\delta}{\gamma} = p + qi$, con ciertos $p, q \in \mathbb{Z}$ y $z = x + iy$ entonces:

$$p^2 + q^2 + 2px + 2qy < 0$$

lo que contradice el hecho que $p, q \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq x \leq 1/2$, $-1/2 \leq y < 1/2$.

□

En resumen, tenemos que $P_{\mathcal{G}}$ es un poliedro fundamental para la acción de \mathcal{G} en H^3 y de la demostración obtenemos además que la identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la única transformación que fija los puntos de $P_{\mathcal{G}}$.

A continuación veremos explícitamente como esta región se transforma, bajo la acción de \mathcal{G} y llena el espacio H^3 .

Sea $w = x + iy + jt \in H^3$, recordemos que los generadores de \mathcal{G} son:

$$T(w) = w + 1$$

$$S(w) = -\frac{1}{w}$$

$$V(w) = w + i$$

Consideremos además la combinación:

$$U(w) = SVSV^{-1}SV(w) = -\frac{iw}{i} = -x - iy + jt.$$

Por otra parte, los vértices de $P_{\mathcal{G}}$ son :

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}j \\
 B &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j \\
 C &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j \\
 D &= \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}j
 \end{aligned}$$

e ∞ , entonces las transformaciones de P_G en dirección del eje x se realiza a través de U y T como se muestra en la figura (2.2):

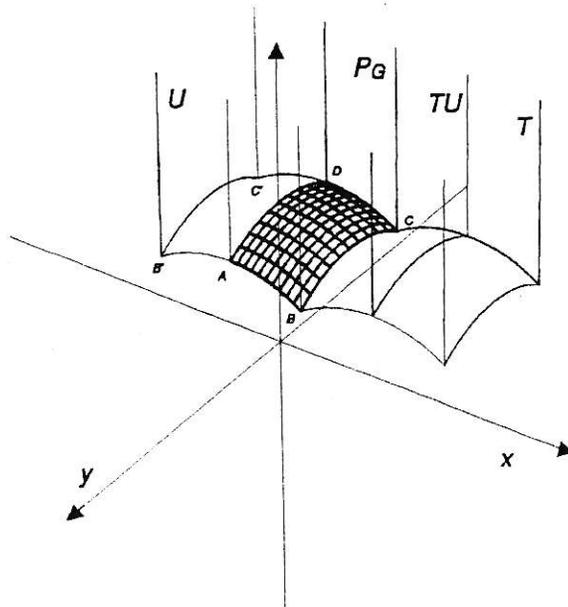


Figura 2.2: Transformación de P_G por U y T .

Donde:

$$U(A) = D$$

$$U(B) = C'$$

$$U(C) = B'$$

$$U(D) = A$$

Las traslaciones de P_G en dirección al eje y se realizan por las transformaciones V y V^{-1} según la figura (2.3):

Para estudiar la acción de S elijamos el punto A y veamos como se reúnen las imágenes de la región fundamental en torno a este punto, primero en el plano yt y después en todo el espacio.

Observemos primero que S fija el círculo $y^2 + t^2 = 1$, luego:

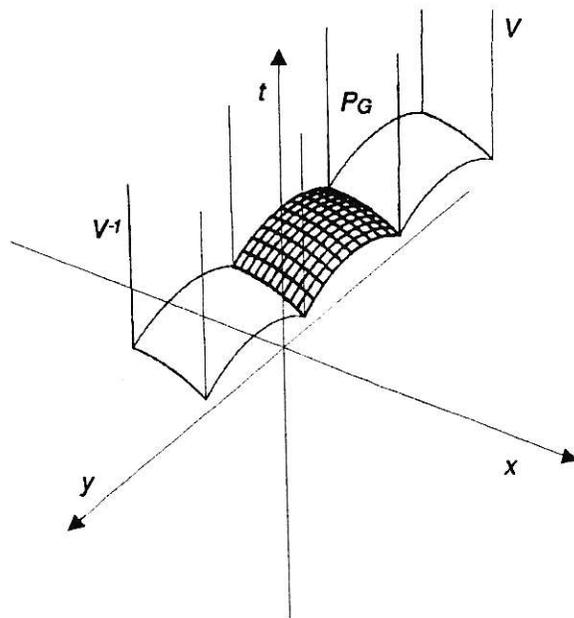


Figura 2.3: Transformación de P_G por V y V^{-1} .

$$S(A) = A$$

$$S(B) = B'$$

$$S(C) = C'$$

$$S(D) = D$$

$$S(\infty) = 0$$

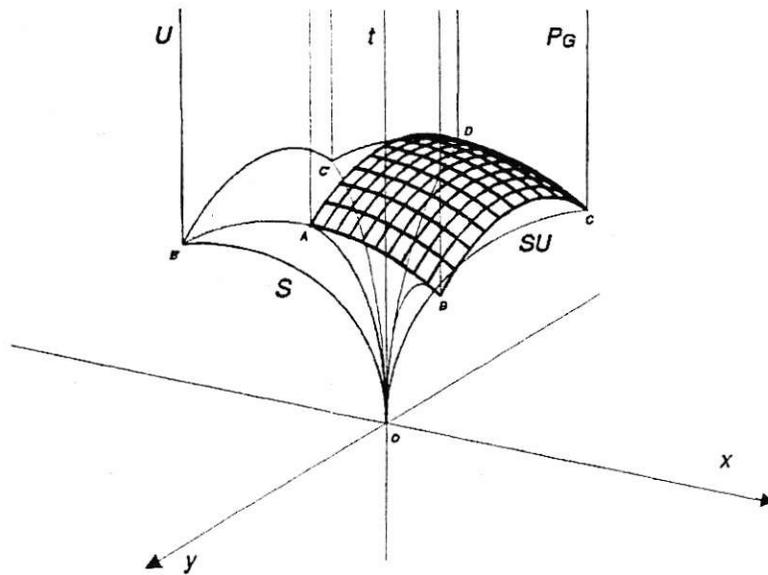


Figura 2.4: Transformación de P_G por S .

Luego P_G se transforma en el poliedro de vértices B', C', A, D y 0 bajo S , (ver figura (2.4)) y en el poliedro de vértices $A, B, C, D, 0$ bajo SU (figura(2.4)).

En el plano yt estudiemos las imágenes de P_G bajo el grupo de orden 6 generado por

$$R = V^{-1}SV \quad \text{y} \quad S$$

$$I_A = \{1, S, R, RS, SR, SRS\}$$

Tenemos entonces que I_A es el grupo de isotropía del punto A .

Aquí:

$$\begin{aligned}
 S^2 &= 1 \\
 R^2 &= 1 \\
 (SR)^2 &= RS \\
 (SR)^3 &= 1 \\
 (RS)^2 &= SR \\
 (RS)^3 &= 1 \\
 (SRS)^2 &= 1 \\
 (SRS)(SR) &= S \\
 (SR)(SRS) &= R \\
 R(SR) &= SRS
 \end{aligned}$$

Este grupo es isomorfo a S_3 , simétrico en 3 elementos.

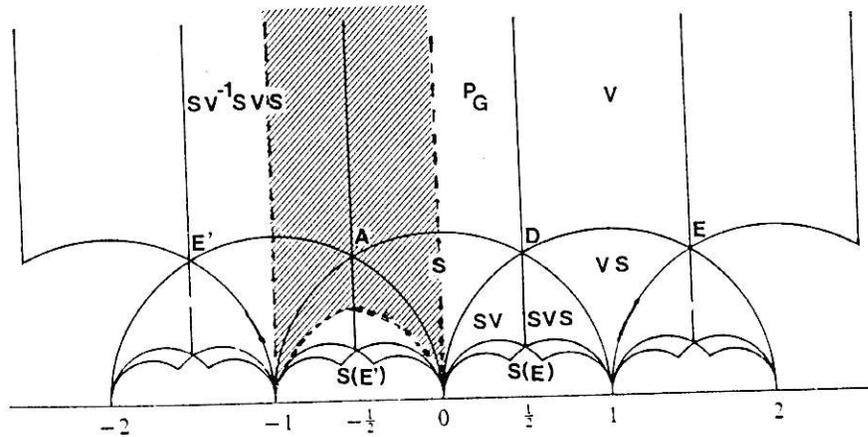


Figura 2.5: sección del plano- yt

Tenemos además :

Si $E = \frac{3}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}j$ entonces $S(E) = \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{6}j$

Si $E' = -\frac{3}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}j$ entonces $S(E) = -\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{6}j$

Generamos ahora el conjunto:

$$I_A U = \{U, SU, RU, RSU, SRU, SRSU\}$$

donde $I_A \cup I_A U$ es el grupo de orden 12 cuya acción sobre P_G cubren el punto A en H^3 .

$$I_A \cup I_A U = \{1, S, R, RS, SR, SRS, U, SU, RU, RSU, SRU, SRSU\}$$

donde:

$$RS = SV^{-1}U$$

$$R = SV^{-1}SU$$

$$SR = V^{-1}SU$$

$$SRS = V^{-1}U$$

$$RSU = SV^{-1}$$

$$RU = SV^{-1}S$$

$$SRU = V^{-1}S$$

$$SRSU = V^{-1}$$

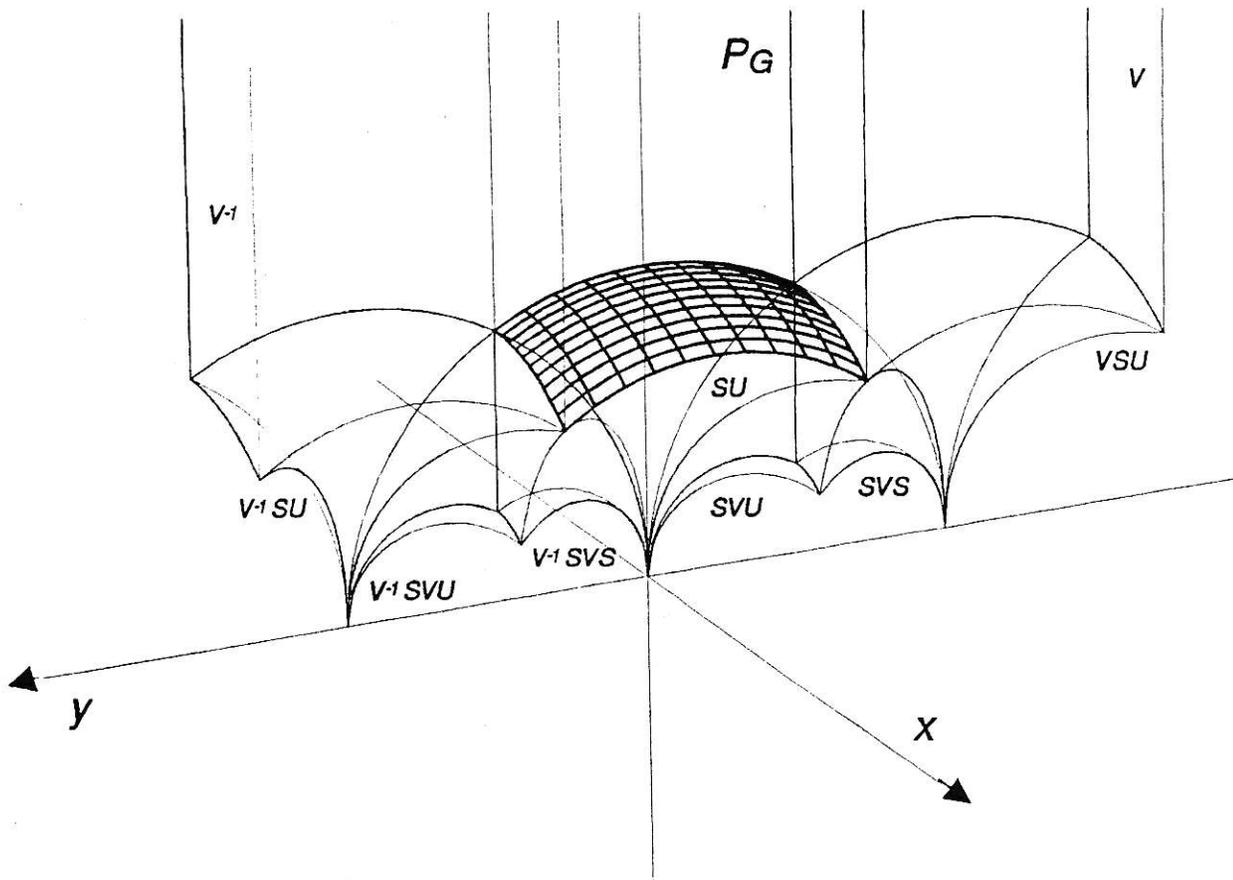


Figura 2.6: Acción del grupo de Picard sobre el poliedro fundamental

2.5 Formas Cuadráticas De Dirichlet.

Definición 2.5.1

Una forma cuadrática binaria

$$f(z, w) = az^2 + 2bzw + cw^2 \quad (2.10)$$

cuyos coeficientes $a, b, c \in Z$ es llamada una forma de Dirichlet con discriminante $D = b^2 - ac$.

La denotaremos $f \equiv (a, b, c)$.

Análogamente a las formas de Gauss, el grupo de Picard G actúa sobre el conjunto de formas cuadráticas de Dirichlet de la siguiente manera:

Para todo $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$ y una forma de Dirichlet f , se define:

$$A \cdot f(z, w) = f\left(A \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right)$$

Diremos que dos formas f y f_1 son equivalentes bajo G sí y sólo si existe $A \in \mathcal{G}$ tal que :

$$A \cdot f = f_1$$

Explícitamente si $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$ entonces:

$$f(z, w) = f_1(z_1, w_1) \quad \text{con} \quad \begin{aligned} z &= \alpha z_1 + \beta w_1 \\ w &= \gamma z_1 + \delta w_1 \end{aligned}$$

Esta es una relación de equivalencia y posteriormente veremos como caracterizar las formas equivalentes.



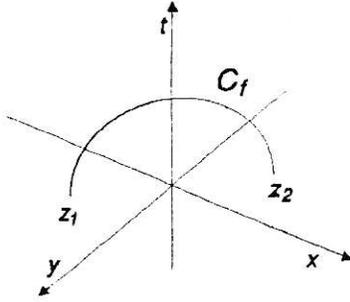


Figura 2.7: Semicírculo representante de la forma f

Consideremos ahora las dos raíces z_1, z_2 , de la ecuación cuadrática asociada a la forma (2.10) :

$$f(z, 1) = az^2 + 2bz + c = 0$$

Estas raíces $z_1, z_2 \in C$ determinan en R^3 dos puntos que denotaremos también por z_1 y z_2 :

$$z_1 = (x_1, y_1, 0)$$

$$z_2 = (x_2, y_2, 0)$$

y se encuentran en el xy -plano.

Asociaremos geoméricamente a la forma f , el semicírculo C_f determinado por z_1 y z_2 en H^3 , que corta ortogonalmente el plano xy en z_1 y z_2 , (figura(2.7)).

Observación

Cada forma f quedará determinada absolutamente por su semicírculo representante y su discriminante, pues a través de ellos nos será posible determinar los coeficientes de la forma.

En efecto:

Dados $z_1, z_2 \in C$ distintos y $D \in Z[i]$ queremos encontrar $a, b, c \in Z[i]$ tales que:

$$f(z, w) = az^2 + 2bzw + cw^2$$

pero sabemos que:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{a}$$

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{a}$$

luego, resolviendo el sistema y como $z_1 \neq z_2$ tenemos:

$$a = \frac{2\sqrt{D}}{z_1 - z_2}$$

$$b = -\frac{\sqrt{D}(z_1 + z_2)}{z_1 - z_2}$$

$$c = \frac{b^2 - D}{a}$$

Es claro que si f es equivalente a f' bajo una transformación $A \in \mathcal{G}$, entonces la transformación $A^{-1} \in \mathcal{G}$ transformará C_f en $C_{f'}$. En efecto se tiene más precisamente, para todo $A \in \mathcal{G}$:

$$A \cdot C_f = C_{A^{-1}f}$$

Teorema 2.5.1

Dos formas de Dirichlet f y f' , de igual discriminante, serán equivalentes bajo G si y sólo si sus semicírculos representantes son equivalentes en H^3 .

Demostración:

Sean C_f y $C_{f'}$ los semicírculos representantes de f y f' respectivamente. Si ellos son equivalentes bajo la transformación $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$ entonces la transformación

inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$ transforma f en f' .

□

Definición 2.5.2

Diremos que una forma de Dirichlet es reducida sí y sólo si su semicírculo representante intersecta al poliedro fundamental P_G .

Observación

La definición de forma reducida se traduce en términos de desigualdades relacionadas con los coeficientes, tal como ocurre en el caso de formas sobre Z . En efecto, se tiene que la forma $f(z, w) = az^2 + 2bzw + cw^2$ es reducida sí y sólo si :

$$|a| < \sqrt{2|D|} \qquad |b| < \frac{|a|}{\sqrt{2}} + \sqrt{|D|}$$

Teorema 2.5.2

Cada forma de Dirichlet es equivalente a una forma reducida.

Demostración:

Sea f una forma de Dirichlet dada y C_f su semicírculo representante.

Consideremos $p \in C_f$ punto cualquiera. Sabemos que aplicando una transformación adecuada $A \in G$ podemos trasladar p al poliedro fundamental P_G . Entonces el semicírculo $A \cdot C_f = C_{A^{-1}f}$ intersecta a P_G . Luego por definición $A^{-1} \cdot f$ es reducida.

□

Teorema 2.5.3

Existe sólo una cantidad finita de formas de Dirichlet reducidas de discriminante D dado.

Demostración:

Sea $f(z, w) = az^2 + 2bzw + cw^2$ forma de Dirichlet reducida de discriminante $D = b^2 - ac$ y sean z_1 y z_2 las raíces de la ecuación $f(z, 1) = 0$, entonces el radio del semicírculo representante es :

$$R = \frac{|z_1 - z_2|}{2} = \frac{\sqrt{|D|}}{|a|}$$

Como f es reducida, el semicírculo C_f debe cortar al poliedro P_G , entonces:

$$\frac{\sqrt{|D|}}{|a|} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto:

$$|a| \leq \sqrt{2|D|}$$

De donde obtenemos que hay sólo finitos coeficientes a para la forma f .

Para cada valor de a tenemos una cantidad finita de valores de b incongruentes (mod a), a saber las raíces distintas de la congruencia :

$$b^2 \equiv D \pmod{a}$$

Dos formas $f \equiv (a, b, c)$ y $f' \equiv (a, b', c')$ con el mismo discriminante y primer coeficiente común a las llamaremos paralelas sí y sólo si $b' \equiv b \pmod{a}$.

Así, basta demostrar que en cada clase de formas paralelas hay sólo finitas formas reducidas. Sea $f \equiv (a, b, c)$ paralela a $f' \equiv (a, b', c')$ forma reducida entonces :

$$b' \equiv b \pmod{a}$$

Es decir, $b' = b + a\beta$ con cierto $\beta \in Z[i]$.

Así la transformación $B = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ lleva f sobre f' , en efecto:

$$\begin{aligned} f(z, w) &= az^2 + 2bzw + bw^2 \\ &= a(z'^2 + 2\beta z'w' + \beta^2 w'^2) + 2b(z' + \beta w')w' + cw'^2 \\ &= az'^2 + 2a\beta z'w' + a\beta^2 w'^2 + 2(b' - a\beta)(z'w' + \beta w'^2) + cw'^2 \\ &= az'^2 + 2b'z'w' + (2b'\beta - a\beta^2 + c)w'^2 \end{aligned}$$

pero :

$$D = b'^2 - a(2b'\beta - a\beta^2 + c) = b'^2 - ac'$$

luego $c' = 2\beta b' - a\beta^2 + c$

por lo tanto resulta:

$$f(z, w) = az'^2 + 2b'z'w' + c'w'^2 = f'(z', w')$$

Por consiguiente el semicírculo $C_{f'}$ que representa a f' sera transformado en el respectivo C_f de f .

Como f' es reducida, $C_{f'}$ cortará el poliedro fundamental P_G , respectivamente C_f cortará el poliedro $P'_G = B \cdot P_G$, es decir, el poliedro que se obtiene de aplicar la transformación B a P_G .

Pero como la transformación B es una traslación $B : z \mapsto z + \beta$ sólo pueden existir finitas traslaciones enteras del poliedro fundamental, que intersecten al semicírculo C_f de f .

Por lo tanto existen finitos valores de β y por consiguiente finitos valores de b .

□

Observación

De las desigualdades que caracterizan las formas reducidas, se pueden obtener cotas explícitas, en función de D , para el número total de formas reducidas.

2.5.1 Períodos de Formas Reducidas de Dirichlet

Sea f forma reducida y C_f su semicírculo representante.

Recordemos que el grupo \mathcal{G} actúa sobre el semiespacio H^3 particionandolo en una cantidad infinita de poliedros. Así, el semicírculo C_f pasa a través de una cantidad infinita de poliedros, determinando una serie de arcos de curva:

$$\dots l_{-3}, l_{-2}, l_{-1}, l_1, l_2, l_3, \dots \quad (2.11)$$

donde l_1 designará el arco a través de P_G .

Como vimos anteriormente, bajo una transformación adecuada del grupo \mathcal{G} podemos trasladar cualquier arco de la serie a un arco en el poliedro fundamental, es decir, transformarlo en un arco reducido. Así, cada arco l_i define un arco reducido l'_i .

Pero como tenemos sólo una cantidad finita de formas reducidas con el mismo discriminante, en la serie

$$\dots l_{-3}, l_{-2}, l_{-1}, l_1, l_2, l_3, \dots$$

debemos tener un primer arco l_{n+1} que tiene el mismo arco reducido que alguno anterior l_r .

Como l_{n+1} y l_r tienen el mismo arco reducido existe $\tau \in \mathcal{G}$ tal que :

$$\begin{aligned} \tau(l_r) &= l_{n+1} \\ \tau(l_{r-1}) &= l_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es decir, $\tau(C_f) = C_f$.

Concluimos de aquí :

Lema 2.5.1

Dos arcos reducidos l'_r y l'_s coinciden sí y sólo si $r \equiv s \pmod{n}$.

Definición 2.5.3

Sea $\{l'_1, l'_2, l'_3, \dots, l'_n\}$ el conjunto finito de arcos reducidos correspondientes a la serie de arcos (2.11). Llamaremos a este conjunto el período de arcos reducidos de la forma f .

Y diremos que sus formas de Dirichlet reducidas correspondientes $\{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$ pertenecen a un período reducido de formas de f .

Observación

Claramente dos formas que pertenecen al mismo período son formas reducidas equivalentes.

Teorema 2.5.4

Dos formas de Dirichlet son equivalentes sí y sólo si pertenecen al mismo período.

Demostración:

Basta ver que si f y f' son dos formas reducidas equivalentes entonces pertenecen al mismo período.

Pero eso es claro pues si son equivalentes existe $\tau \in \mathcal{G}$ tal que $\tau : f \longrightarrow f'$ y $\tau^{-1} : C_f \longrightarrow C_{f'}$, donde C_f y $C_{f'}$ son los semicírculos representantes de f y f' respectivamente.

Luego τ^{-1} llevará algún arco l_i de C_f en el arco reducido l'_i de $C_{f'}$ lo cual basta para ver que f y f' pertenecen al mismo período.

□

2.6 Formas Cuadráticas de Hermite.

Definición 2.6.1

Una forma cuadrática binaria :

$$f(z, w) = az\bar{z} + bz\bar{w} + \bar{b}z\bar{w} + cw\bar{w} \quad (2.12)$$

con $a, c \in Z$ y $b \in Z[i]$, es llamada una forma de Hermite con discriminante $D = b\bar{b} - ac$.

Aquí \bar{z} representa el complejo conjugado de z .

Notemos que si $b = b_1 + ib_2$, con ciertos $b_1, b_2 \in Z$ entonces $D = b_1^2 + b_2^2 - ac$ es siempre un número real, a diferencia de la formas de Dirichlet cuyo discriminante pertenece a $Z[i]$.

Por esta razón si $D < 0$ diremos que la forma es definida y si $D > 0$ diremos que la forma es indefinida tal como ocurre con las formas de Gauss.

Denotaremos a la forma de Hermite (2.12) por $f \equiv (a, b_1, b_2, c)$.

El grupo de Picard \mathcal{G} actúa sobre el conjunto de formas de Hermite de manera similar a las formas de Dirichlet, es decir:

Para todo $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$ y una forma de Hermite f , se define:

$$A \cdot f(z, w) = f\left(A \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right)$$

Diremos que dos formas f y f_1 son equivalentes bajo \mathcal{G} sí y sólo si existe $A \in \mathcal{G}$ tal que :

$$A \cdot f = f_1$$

Explícitamente si $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$ entonces:

$$f(z, w) = f_1(z_1, w_1) \quad \text{con} \quad \begin{aligned} z &= \alpha z_1 + \beta w_1 \\ w &= \gamma z_1 + \delta w_1 \end{aligned}$$

Esto define una relación de equivalencia y particiona el conjunto de formas de Hermite en clases de equivalencia, las cuales trataremos de caracterizar posteriormente.

2.6.1 Formas de Hermite Definidas.

Consideremos primero la forma f dada por (2.12) definida.

Sin pérdida de generalidad podemos tomar $a, c > 0$ limitando el estudio a formas positivas, es decir, que representan números positivos, ya que fácilmente se deduce al determinar explícitamente los coeficientes, que formas positivas son equivalentes con formas positivas y respectivamente las negativas.

Consideremos ahora la ecuación cuadrática asociada a la forma (2.12) :

$$f(z, 1) = az\bar{z} + bz + \bar{b}z + c = 0$$

Explícitamente si $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. y $b = b_1 + b_2i$ con $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

$$f(z, 1) = a(x^2 + y^2) + 2b_1x - 2b_2y + c = 0$$

Esta ecuación representa geoméricamente un círculo imaginario en el xy -plano.

En \mathbb{R}^3 podemos construir a través de este círculo un haz de esferas como sigue:

Si λ es un parámetro real, el haz está dado por :

$$\left(x + \frac{b_1}{a}\right)^2 + \left(y - \frac{b_2}{a}\right)^2 + \left(t - \frac{\lambda}{a}\right)^2 = \frac{D + \lambda^2}{a^2}$$

Este haz contiene dos esferas infinitamente pequeñas o puntos límite cuyas coordenadas son:

$$x = -\frac{b_1}{a}, \quad y = \frac{b_2}{a}, \quad t = \pm \frac{\sqrt{-D}}{a}$$

El punto límite que pertenece al semiespacio superior H^3 :

$$\left(-\frac{b_1}{a}, \frac{b_2}{a}, \frac{\sqrt{-D}}{a} \right)$$

lo llamaremos el representante geométrico de la forma de Hermite f .

Tenemos así una correspondencia entre clases de formas de Hermite definidas y clases de puntos representantes equivalentes.

Definición 2.6.2

Diremos que una forma de Hermite definida es reducida sí y sólo si su punto representante pertenece al poliedro fundamental.

Observación

La definición de forma de Hermite definida reducida también es posible traducirla en términos de desigualdades relacionadas con los coeficientes tal como hemos hecho en los otros casos. En efecto, la forma de Hermite $f \equiv (a, b_1, b_2, c)$ es reducida sí y sólo si

$$a \leq c, \quad 0 \leq b_1 \leq a/2, \quad -a/2 \leq b_2 \leq a/2$$

Esto se obtendrá como un resultado lateral en la demostración del teorema siguiente.

Ya que hemos visto que siempre es posible trasladar un punto, bajo una transformación adecuada, al poliedro fundamental P_G tenemos que cada forma de Hermite tiene una forma reducida equivalente.

Teorema 2.6.1

Existe sólo un número finito de formas de Hermite definidas reducidas de discriminante D .

Demostración:

Sea $f \equiv (a, b_1, b_2, c)$ reducida y su punto representante de coordenadas

$$\left(-\frac{b_1}{a}, \frac{b_2}{a}, \frac{\sqrt{-D}}{a}\right) \in P_{\mathcal{G}}$$

entonces, como vimos anteriormente, los coeficientes de f satisfacen :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{-b_1}{a} \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} &\leq \frac{b_2}{a} \leq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{b_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{b_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-D}}{a}\right)^2 &\geq 1 \end{aligned}$$

de donde resulta que :

$$a \leq c, \quad 0 \leq b_1 \leq \frac{a}{2}, \quad -\frac{a}{2} \leq b_2 \leq \frac{a}{2}$$

Como además debemos tener $\frac{\sqrt{-D}}{a} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ entonces $a < \sqrt{-2D}$. nos da una cota para los coeficientes de la forma.

De aquí resulta clara la finitud de las formas de Hermite reducidas.

□

Corolario 2.6.1

Si $Min(f)$ representa el mínimo de los valores representados por f , se tiene:

$$Min(f) < \sqrt{2|D|}$$

Ejemplo:

Si $D = -5$ entonces $a < \sqrt{10}$ luego podemos tener $a = 1, 2, 3$

Si $a = 1$ sólo podemos tener $b_1 = 0$ y $b_2 = 0$.

Como $D = -5 = b_1^2 + b_2^2 - ac$ obtenemos $c = 5$.

Luego una forma de Hermite reducida de discriminante -5 es $f \equiv (1, 0, 0, 5)$.

Analizando las otras posibilidades obtenemos que existen solamente tres formas reducidas de discriminante -5 , a saber:

$$f_1 \equiv (1, 0, 0, 5)$$

$$f_2 \equiv (2, 0, 1, 3)$$

$$f_3 \equiv (2, 1, 0, 3)$$

Veamos ahora el caso de las formas de Hermite indefinidas.

2.6.2 Formas de Hermite Indefinidas.

Consideremos una forma de Hermite

$$f(z, w) = az\bar{z} + bz\bar{w} + \overline{bz}w + cw\bar{w}$$

indefinida, es decir, con $D > 0$.

La ecuación cuadrática asociada:

$$f(z, 1) = az\bar{z} + bz + \overline{bz} + c = 0 \quad \text{con } z \in \mathbb{C}$$

Representa geoméricamente un círculo real en el xy -plano. En \mathbb{R}^3 , este círculo es el ecuador de la esfera:

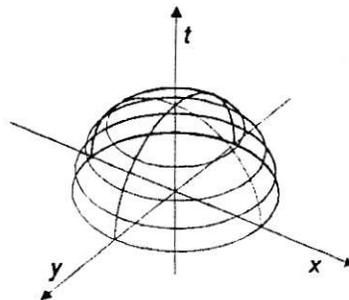


Figura 2.8: Semiesfera representante de la forma f

$$\left(x + \frac{b_1}{a}\right)^2 + \left(y - \frac{b_2}{a}\right)^2 + t^2 = \frac{D}{a^2}$$

donde $b = b_1 + b_2i$ con $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$.

Diremos que la semiesfera que pertenece al semiespacio positivo H^3 es la semiesfera que representa geoméricamente a la forma de Hermite f . (ver figura (2.8)).

Proposición 2.6.1

Toda forma de Hermite esta totalmente determinada por su discriminante y la semiesfera que la representa.

Además, formas equivalentes tendrán semiesferas equivalentes en H^3 , obteniendose así una correspondencia de clases de formas de Hermite de discriminante D y semiesferas en H^3 correspondientes a este discriminante.

Definición 2.6.3

Diremos que una forma de Hermite indefinida es reducida sí y sólo si la semiesfera que representa geoméricamente a la forma pasa a través del poliedro fundamental P_G .

Por un razonamiento análogo al hecho para las formas de Dirichlet, cada forma de Hermite indefinida es equivalente a una forma reducida y tenemos sólo una cantidad finita de formas reducidas de discriminante dado D .

2.6.3 Períodos de Formas Reducidas de Hermite.

Consideremos una forma de Hermite reducida f de discriminante $D > 0$ dado. La semiesfera representante de f intersecta una cantidad infinita de poliedros del semiespacio H^3 . Poliedros que se obtienen de aplicar las transformaciones del grupo de Picard a la región fundamental P_G .

Se forma entonces sobre esta semiesfera una red de polígonos la cual cubre totalmente la semiesfera, digamos:

$$\dots \pi_{-3}, \pi_{-2}, \pi_{-1}, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots \quad (2.13)$$

donde π_i designará el polígono a través de P_G .

Sabemos que cada polígono π_i de la red podemos reducirlo, es decir, a través de una transformación adecuada del grupo de Picard G trasladamos $\pi_i \mapsto \pi'_i$ donde π'_i es un polígono cuyos lados son arcos que se encuentran sobre las caras del poliedro fundamental P_G .

A este polígono π'_i le corresponde una forma de Hermite reducida de discriminante D , como sólo existe una cantidad finita de formas reducidas, tendremos una cantidad finita de polígonos reducidos distintos, a saber:

$$\pi'_1, \pi'_2, \pi'_3, \dots, \pi'_n$$

Definición 2.6.4

Sea $\{\pi'_1, \pi'_2, \pi'_3, \dots, \pi'_n\}$ el conjunto finito de polígonos reducidos correspondientes a la serie infinita de polígonos (2.13). Llamaremos a este conjunto el período de polígonos reducidos de la forma f .

Y diremos que sus formas de Hermite reducidas correspondientes $\{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$ pertenecen a un período reducido de formas de f .

Claramente, si dos formas reducidas pertenecen al mismo período, ellas son equivalentes bajo G .

Teorema 2.6.2

Dos formas de Hermite reducidas son equivalentes sí y sólo si pertenecen al mismo período.

Demostración:

Sean f_1 y f_2 formas reducidas indefinidas equivalentes.

Entonces existe una transformación de G que lleva la red esférica de f_1 en la red esférica de f_2 . Así el polígono de la red de f_1 que pertenece al poliedro fundamental P_G es equivalente a algún polígono de la red de f_2 , lo que significa que f_1 y f_2 pertenecen al mismo período.

□

Referencias

- [Be] Beardon, Alan F. *The Geometry of Discrete Groups*. Springer-Verlag, 1983.
- [Bi] Bianchi, Luigi. *Geometrische darstellung der gruppen linearer substitutionen mit ganzen complexen coefficienten nebst anwendungen auf die zahlen-theorie*. Mathematische Annalen, 38, 1891.
- [Ha-Wr] Hardy, G.H. Wright, E.M. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford, 1954.
- [Ja] Jacobson, Nathan. *Basic Algebra 1. Second Edition*. W.H. Freeman and Company. N. York, 1985.
- [La] Lachaud, Gilles. *Formes quadratiques. fractions continues. géodésiques hyperboliques, et fonctions zeta*. Publication de l' Institut de Recherche Mathématique Avancée, 1988.
- [Ma-Be] Maskit, Bernard. *Kleinian Groups*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 287, Springer-Verlag, 1980.
- [Se-i] Series, C. *Non-Euclidean geometry, continued fractions and ergodic theory*. The Mathematical Intelligencer 4, 1982, p.24-31.
- [Se-ii] Series, C. *The geometry of Markoff numbers*. The Mathematical Intelligencer 7, 1985, p.20-29.
- [Se] Serre, Jean-Pierre. *A Course in Arithmetic*. Springer-Verlag, 1973.