Modelos Lineales de Aplicaciones Continuas del Intervalo.

Tesis entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los
requisitos para optar al grado de
Magister en Ciencias con Mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias

Fernando Córdova Lepe

Abril 1994

Director de Tesis Dr. Rodrigo Bamón.

Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Informe de Aprobación
Tesis de Magister

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el Candidato:

Fernando Córdova Lepe

ha sido aprobada por la Comisión de Tesis como requisito de Tesis para optar al grado de Magister en Ciencias Matemáticas.

Director de Tesis:
Dr. Rodrigo Bamón ....

Comisión Informante de Tesis:
Dr. Victor Cortes ....

Dr. Victor Guiñez ....

Dr. Manuel Pinto ....

Dr. Nicolás Yus ....

Dedico este trabajo a mi madre y a todos los que quiero, me quieren y/o comparten mis sueños.

Agradecimientos [1]

Agradezco al profesor Rodrigo Bamón por su infinita paciencia y disposición; a la Comisión Informante, V. Cortes, V. Guiñez, M. Pinto y N. Yus por sus consejos y correcciones; y a quienes han ayudado con la presentación de esta tesis, la Sra. Virginia y Srta. Vicky en la escritura Latex y mi amigo J. Prado con los dibujos.

[1] Esta tesis ha contado con el apoyo financiero de CONICYT, Proyecto FONDECYT 1930863.

INDICE

Introducción		i
Capítulo 1:	Definiciones Preliminares y Teorema de Preston	1
Capítulo 2:	Conjugaciones, Semiconjugaciones, Teorema de Parry, Entropía y Teorema de Milnor y Thurston	5
Capítulo 3:	Condiciones necesarias para la existencia de modelos lineales expansivos y una generalización al Teorema de Parry	14
Capítulo 4:	Función expansiva de Factor de expansión igual a uno con cascada de ciclos	21
Bibliografía		37

INTRODUCCION

Sean I el intervalo $[0,1]$ y $C(I)$ el conjunto de las funciones continuas de I en sí mismo.

Para f en $C(I)$ definimos sus iterados por $f^0 = id$, $f^1 = f$ e inductivamente $f^n = f \circ f^{n-1}$ para todo $n \geq 0$. El conjunto $\{f^n\}_{n\geq 0}$ es un ejemplo simple de sistema dinámico. Tal sistema modela procesos naturales donde I es el conjunto de estados del sistema y f la ley de evolución (discreta) del mismo: $\{f^n(x)\}_{n\geq 0}$ representa el conjunto de estados sucesivos a partir de un estado inicial x y se llama la órbita positiva de x.

Un ejemplo de esto es la conocida familia de funciones logísticas $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq \mu \leq 4$, que se ha utilizado para modelar dinámica de poblaciones con tasa de nacimiento lineal respecto a la población. Ver May [3].

El estudio de la dinámica de $f \in C(I)$ (i.e., el estudio de las propiedades topológicas de las órbitas positivas) puede simplificarse si se encuentra un modelo dinámicamente equivalente (i.e., cambio de coordenadas) adecuado. Por ejemplo f_4 es dinámicamente equivalente a la aplicación $g(x)$ igual a $2x$ si $0 \leq x \leq 1/2$ y a $2(1-x)$ si $1/2 < x \leq 1$. De hecho f_4 y g son topológicamente conjugadas, esto es , existe homeomorfismo creciente h de I en sí mismo tal que $h \circ f = g \circ h$. Esto permite determinar, por ejemplo, que f_4 tiene una órbita positiva densa en I. (i.e., f_4 es topológicamente transitiva).

En general los modelos lineales a pedazos, asi como g, son modelos que facilitan el estudio de propiedades dinámicas.

W. Parry en [6] demostró que si $f \in M(I)$ (las funciones en $C(I)$ con finitos extremos locales) es topológicamente transitiva en I entonces f es conjugada a una función lineal a pedazos expansiva (i.e., con pendientes en valor absoluto mayor que 1).

En este trabajo buscamos generalizar el Teorema de Parry. Encontramos una condición dinámica necesaria para que una función $f \in M(I)$ admita un modelo lineal expansivo. Brevemente, I debe ser esencialmente una unión finita de f -ciclos topológicamente transitivos. Un f -ciclo es una colección finita disjunta de subintervalos cerrados $I_1, \cdots, I_n$ tal que $f(I_j) \subset I_{j+1}$ para todo $j = 1, \cdots, n$

(mod n). El resultado se enuncia en el Corolario 1 al Teorema 4.

Otro objetivo ha sido establecer si nuestra condición necesaria es también suficiente. Usando un Teorema de Milnor y Thurston hemos llegado a una conclusión parcial. Más precisamente, mostramos que si I es esencialmente un f - ciclo topológicamente transitivo entonces f es conjugada a una aplicación lineal a pedazos expansiva (Teorema 5).

Finalmente incluimos un ejemplo de función en $M(I)$ que prueba la necesidad de la hipótesis en nuestro Teorema 4 y que además tiene interesantes propiedades dinámicas.

Para los conceptos que se introducen nos hemos basado en [8] de Preston. El principal resultado que nos interesa de [8] lo hemos enunciado como Teorema 1.

En el Capítulo 1 damos definiciones generales e introducimos el Teorema 1 de Preston.

En el Capítulo 2 estudiamos los conceptos de conjugación topológica y semiconjugación. Nos referimos a algunas relaciones conocidas entre entropía topológica de una función en $M(I)$ y sus propiedades dinámicas. También enunciamos el Teorema de Parry y el Teorema de Milnor y Thurston.

En el Capítulo 3 demostramos el Corolario 1 que determina condiciones necesarias para la existencia de modelos lineales expansivos y el Teorema 5 que generaliza el resultado de Parry.

En el Capítulo 4 construimos el ejemplo anunciado.

CAPITULO 1

DEFINICIONES PRELIMINARES Y TEOREMA DE PRESTON

Sea I el intervalo $[0,1]$ y $C(I)$ el conjunto de las funciones continuas de I en sí mismo.

Para $f \in C(I)$ y $x \in I$ definimos por:

$f^0(x) = x,\ f^1(x) = f(x), \cdots, f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ los iterados de x por f;

$\mathcal{O}_f^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$ la órbita positiva de x; y

$\mathcal{O}_f^-(x) = \{y \in I : f^n(y) = x$ para algún $n \geq 0\}$ la órbita negativa de x.

Una función $f \in C(I)$ se llama monótona a pedazos si existe $N \in \mathbb{N}$ y $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_N < c_{N+1} = 1$ con f estrictamente monótona sobre cada intervalo $[c_k, c_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Si f no es monótona en toda vecindad de c_k, $k = 1, \ldots, N$ entonces llamamos a los $[c_k, c_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, N$ intervalos de monotonicidad de f y a $T(f) = \{c_1, c_2, \cdots, c_N\}$ conjunto de puntos críticos de f. El conjunto de las funciones monótonas a pedazos lo denotamos por $M(I)$, éste es cerrado bajo composición de funciones.

El intervalo I está dotado de la la topología inducida por $\mathbb{R}$. Cuando un conjunto es abierto se entenderá que este lo es con respecto a I. Si $A \subset I$ entonces $\bar{A}$ denotará la clausura de A, $int(A)$ el interior de A, y $\#A$ su cardinalidad. Si A es un intervalo, $|A|$ denota su longitud. Un conjunto $A \subseteq I$ se dice invariante por f si $f^{-1}(A) \cup f(A) \subset A$ y positivamente invariante por f si $f(A) \subset A$.

En [8] de Preston se prueba que cada $f \in M(I)$ tiene asociado un conjunto residual de I sobre el que es posible describir tres tipos esencialmente distintos de dinámicas, a saber:

(i) f^n es monótona sobre un subintervalo para todo $n \geq 0$,

(ii) f es minimal sobre un conjunto tipo Cantor, positivamente invariante (i.e., todo punto en dicho conjunto tiene órbita positiva densa en él), y

(iii) f es topológicamente transitiva sobre una unión finita de intervalos cerrados disjuntos (i.e., existe punto en dicha unión cuya órbita positiva es densa).

El propósito de este primer capítulo es exponer con algún detalle este resultado pues lo necesitaremos en los siguientes capítulos.

Comenzaremos con algunas definiciones. La letra f denotará una función en $M(I)$.

Sea $J \subset (0,1)$ un intervalo abierto tal que f^n es monótona sobre J para todo $n \geq 0$ y supongamos que J es máximal con esta propiedad. J es un <u>sumidero de f</u> si existe $m \geq 1$ tal que $f^m(J) \subset J$. En general hay dos posibilidades: existen $n, m \in \mathbf{N}$, $n \neq m$, tales que $f^n(J) \cap f^m(J) \neq \phi$ y lo contrario. No es difícil probar que en el primer caso existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $f^n(J)$ es un sumidero. Si $f^n(J) \cap f^m(J) = \phi$ para todo $n, m \in \mathbf{N}$, $n \neq m$ decimos que J es un <u>intervalo errante de f</u> .

Podemos formar los conjuntos:

$S(f) = \{x \in I : f^n(x) \in J$ para algún sumidero J y algún $n \geq 0\}$ y

$E(f) = \{x \in I : f^n(x) \in J$ para algún intervalo errante J y algún $n \geq 0\}$.

Estos conjuntos son abiertos, disjuntos y positivamente invariantes.

Un f - ciclo es una unión finita de intervalos cerrados disjuntos no triviales $C = B_0 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_{m-1}$ tales que $f(B_{k-1}) \subset B_k$ para todo $k = 1, \ldots, m$ (mod m). El número m se denomina período de C y escribiremos $per(C) = m$. El f - ciclo se llama propio si $f(B_{k-1}) = B_k$, para todo $k = 1, \ldots, m$ (mod m) .

Un f - ciclo C se llama topológicamente transitivo si es un f - ciclo y existe $x \in C$ tal que $\theta_f^+(x)$ es denso en C . En este caso también es un f - ciclo propio.

Puede ocurrir que dentro de un f - ciclo haya otro f - ciclo de período mayor y sucesivamente. Digamos que puede existir una sucesión de f - ciclos $\{C_n\}_{n\geq 1}$ con $C_{n+1} \subseteq C_n$ y $per(C_{n+1}) > per(C_n)$ para todo $n \geq 1$. En este caso si $C_1 \cap (S(f) \cup E(f)) = \phi$, $R = \cap_{n\geq 1} C_n$ se denomina una cascada de f - ciclos . Decimos que $\{C_n\}_{n\geq 1}$ genera a R . Observemos que necesariamente $per(C_{n+1})$ es un múltiplo de $per(C_n)$ y R es un conjunto cerrado positivamente invariante (i.e., $f(R) \subset R$). Además R es minimal con esta propiedad. No existe subconjunto cerrado propio que sea positivamente invariante.

El resultado de Preston que comentamos más arriba y que usaremos en capítulos posteriores dice que toda $f \in M(I)$ tiene genéricamente (i.e., en un residual de I) las siguientes dinámicas:

(i) sumideros e intervalos errantes,

(ii) finitos f - ciclos topológicamente transitivos, y/o

(iii) finitas cascadas de f - ciclos.

Para un enunciado más preciso necesitamos aún otros conceptos.

Si C es un f -ciclo, definimos la cuenca de atracción de C por

$$A(C, f) = \{x \in I : f^n(x) \in int(C) \text{ para algún } n \geq 0\}$$

y si R es una cascada de f - ciclos generada por $\{C_n\}_{n\geq 1}$ entonces definimos la cuenca de atracción de R por

$$A(R, f) = \cap_{n\geq 1} A(C_n, f).$$

Teorema 1 (Preston) *Sean* $f \in M(I)$, $C_1, \cdots, C_n$ *los f-ciclos topológicamente transitivos y* $R_1, \cdots, R_m$ *las cascadas de f-ciclos. Entonces* $1 \leq n + m \leq \#T(f)$ *y los conjuntos* $A(C_1, f), \cdots, A(C_n, f), A(R_1, f), \cdots, A(R_m, f), S(f)$ *y* $E(f)$ *son disjuntos y su unión,* $\Lambda(f)$, *es un subconjunto residual de* I.

En esta tesis haremos uso de los conceptos presentados y del Teorema 1 en el estudio del problema de la existencia o no de modelo lineal a pedazos y expansivo para una aplicación f en $M(I)$. Más precisamente mostramos que es necesario, para la existencia de tal modelo, descartar algunos de los conjuntos que forman la unión disjunta $\Lambda(f)$. También probamos que algunas de estas condiciones en $\Lambda(f)$ son además suficientes para tener modelo lineal a pedazos.

CAPITULO 2

CONJUGACIONES, SEMICONJUGACIONES, TEOREMA DE PARRY, ENTROPIA Y TEOREMA DE MILNOR Y THURSTON

En este capítulo definimos los conceptos de conjugación y semiconjugación topológica entre dos funciones en $M(I)$. Presentamos el Teorema de Parry que asegura la existencia de modelos lineales expansivos para cierta clase de funciones en $M(I)$. Definimos la entropía topológica para una función f monótona a pedazos. Calculamos la entropía para un ejemplo sencillo y damos algunos resultados conocidos que permiten cuantificarla a partir de propiedades dinámicas de f. Finalmente enunciamos el Teorema de Milnor y Thurston.

Definición 1 *Sean $f, g \in M(I)$. Decimos que f es topológicamente conjugada a g si existe un homeomorfismo creciente $h : I \to I$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Es decir, tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & I \arrow[d, "h"] \\ I \arrow[r, "g"'] & I \end{tikzcd}$$

Esta definición induce naturalmente una relación de equivalencia en $M(I)$. Que f y g sean topológicamente equivalentes significa que ambas funciones tienen, vía el homeomorfismo h, "igual" comportamiento dinámico. En particular $h(T(f)) = T(g)$ y $h(\theta_f^{\pm}(x)) = \theta_g^{\pm}(h(x))$. Es decir, f y g son modelos de una misma dinámica.

Ejemplo: Sean $f, g \in M(I)$ con

$$f(x) = 4x(1-x) \text{ (figura 1)}$$

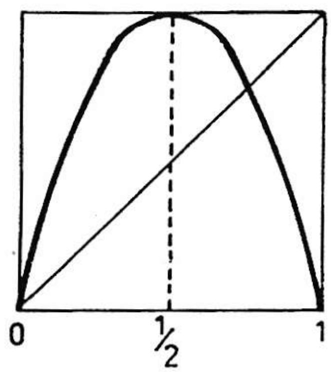

Fig. 1

y

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1/2) \\ 2-2x, & x \in [1/2, 1] \text{ (figura 2)} \end{cases}$$

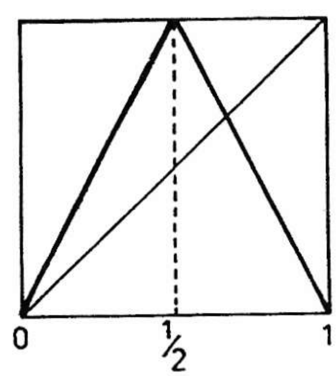

Fig. 2

El homeomorfismo $h(x) = \frac{2}{\pi} arcsen\sqrt{x}$ $(h^{-1}(x) = sen^2(\frac{\pi}{2}x))$ es una conjugación entre f y g. Podemos decir que la función g, llamada tienda de campaña, es un modelo, en este caso lineal, de la dinámica de f.

Definición 2 *Sea $f \in M(I)$. Decimos que f es* <u>*semiconjugada*</u> *a una función $g \in M(I)$ si y sólo si existe $\varphi \in C(I)$ creciente (i.e., si $x < y$ entonces $\varphi(x) \leq \varphi(y)$) y sobreyectiva tal que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$.*

Para una función continua $\varphi : I \to I$ creciente y sobreyectiva definimos el <u>soporte de φ</u> por

$$sop(\varphi) = \{x \in I : |\varphi(J)| > 0 \ \forall \text{ intervalo abierto } J \subset I \text{ con } x \in J\}$$

Si $\varphi \in C(I)$ semiconjuga a una función $f \in M(I)$ con otra $g \in M(I)$ entonces g describe el comportamiento de f sobre $sop(\varphi)$. Es decir, las propiedades dinámicas de g dan información sobre la dinámica de f sobre $sop(\varphi)$. Si $sop(\varphi) = I$, φ es una conjugación.

En el Capítulo 3 mostramos que si φ es una semiconjugación entonces $sop(\varphi)$ es un conjunto cerrado, sin puntos aislados y no numerable.

Ejemplo: Sean $f, \varphi \in M(I)$ con

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1/2, & \text{si } x \in [0, 1/4) \\ 2x - 1/2, & \text{si } x \in [1/4, 3/4) \\ -2x + 5/2, & \text{si } x \in [3/4, 1] \end{cases} \text{ (figura 3)}$$

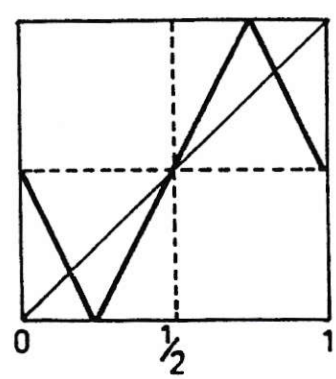

Fig. 3

y

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \in [0,1/2) \\ 2x-1, & \text{si} \quad x \in [1/2,1] (\text{figura } 4) \end{cases}$$

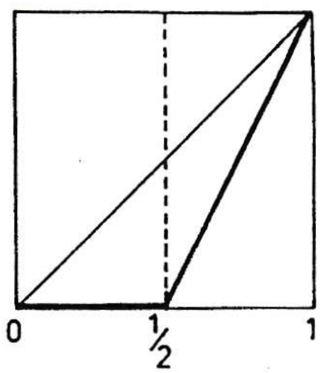

Fig. 4

La función f es semiconjugada, vía φ, a la función tienda de campaña de la figura 2. En este ejemplo es claro que la función tienda de campaña describe el comportamiento dinámico de f sobre $sop(\varphi) = [1/2, 1]$.

Ahora damos propiedades (y la idea de sus demostraciones) que permiten visualizar mejor en que medida el concepto de semiconjugación entre dos funciones "respeta" la dinámica de éstas.

Sean $f, g \in M(I)$. Si $\varphi \in C(I)$ es una semiconjugación de f con g entonces:

(i) $T(g) \subset \varphi(T(f))$.

En efecto, sea $c \in T(g)$, supongamos sin pérdida de generalidad que c es un máximo local de g. Notemos que $\varphi^{-1}(c) = [x, y]$ y existe $\epsilon > 0$ tal que $g \circ \varphi = \varphi \circ f$ es creciente en $[\epsilon - x, x]$ y decreciente en $[y, y+\epsilon]$, de donde $[x, y] \cap T(f) \neq \phi$, es decir, $c \in \varphi(T(f))$.

(ii) Si C es un f-ciclo topológicamente transitivo y $sop(\varphi) \cap int(C) \neq \phi$, entonces $\varphi(C)$ es un g-ciclo topológicamente transitivo.

De hecho, sean $B_0, \dots, B_{m-1}$ las componentes de C. La condición $int(C) \cap sop(\varphi) \neq \phi$ implica que existe j tal que $\varphi(B_j)$ es un intervalo cerrado no trivial, además como claramente $g^n(\varphi(B_k)) \subset \varphi(B_i)$ cuando $f^n(B_k) \subset B_i$ tenemos que todos los $\varphi(B_k)$ son intervalos cerrados no triviales con interiores disjuntos, de donde no es difícil probar que $\cup_{k=0}^{m-1} \varphi(B_k)$ es un g - ciclo de período m ó $m/2$.

Sea $x \in C$ tal que $\theta_f^+(x)$ es densa en C. Si $\theta_g^+(\varphi(x))$ no es densa en $\varphi(C)$ entonces existe intervalo abierto no trivial $J \subset \varphi(C)$ tal que $g^n(\varphi(x)) \notin J$ para todo $n \geq 0$, es decir, $f^n(x) \notin \varphi^{-1}(J)$ para todo $n \geq 0$. Esto contradice que C sea topológicamente transitivo, pues $\varphi^{-1}(J)$ está contenido en C y tiene interior no vacío.

(iii) Si R es una cascada de f-ciclos y $sop(\varphi) \cap R \neq \phi$, entonces $\varphi(R)$ es una cascada de g-ciclos.

Sea $\{C_n\}_{n \geq 1}$ un generador de R. Como $R \cap sop(\varphi) \neq \phi$ tenemos que $C_n \cap sop(\varphi) \neq \phi$ para todo $n \geq 1$, que $sop(\varphi)$ sea positivamente invariante por f (Lema 2 (iv)) permite tener $int(C_n) \cap sop(\varphi) \neq \phi$ para todo $n \geq 1$. Por (ii) deducimos que $\varphi(C_n)$ es un g - ciclo de período $per(C_n)$ ó $per(C_n)/2$, además $\varphi(C_2) \cap (S(g) \cup E(g)) = \phi$ pues $C_2 \cap (S(f) \cup E(f)) = \phi$. Luego $\{\varphi(C_{2n})\}_{n \geq 1}$ es un generador de una cascada de g - ciclos R' tal que $R' = \cap_{n \geq 1} \varphi(C_{2n}) = \varphi(\cap_{n \geq 1} C_{2n}) = \varphi(R)$.

(iv) $S(g) \cup E(g) = \phi$ si sólo si $[S(f) \cup E(f)] \cap sop(\varphi) = \phi$.

Es decir, tal como dijimos φ traspasa a g la dinámica de f sobre $sop(\varphi)$. En el caso $sop(\varphi) = I$ (φ conjugación) tenemos la igualdad $\Lambda(g) = \varphi(\Lambda(f))$. Ver Teorema 1.

Definición 3 *Sea $f \in M(I)$. Diremos que f es:*

(i) Topológicamente transitiva si existe $x \in I$ tal que $\theta_f^+(x)$ es un conjunto denso en I (o bien, I es un f-ciclo topológicamente transitivo).

(ii) Lineal a pedazos expansiva si sobre cada intervalo de monotonicidad de f, esta es lineal con pendiente mayor que 1 o menor que -1.

(iii) Uniformemente lineal a pedazos expansiva si es lineal a pedazos expansiva y la pendiente en cada intervalo de monotonicidad es única salvo signo.

Notemos que una función f en $M(I)$ es topológicamente transitiva si sólo si cada subconjunto propio de I cerrado y positivamente invariante por f tiene interior vacío. En efecto sean $f \in M(I)$ y $F \subset I$ tal que existe $x \in I$ con $\overline{\theta_f^+(x)} = I$, F es cerrado y positivamente invariante por f. Supongamos que $int(F) \neq \phi$, luego existe $n \in \mathrm{N}$ tal que $f^n(x) \in F$, como $f(F) \subset F$ tenemos que $\theta_f^+(f^n(x)) \subset F$ y por lo tanto $F = I$, pues $I = \overline{\theta_f^+(x)} = \overline{\theta_f^+(f^n(x))} \subset \overline{F} = F$. Inversamente sea $f \in M(I)$ tal que para cada subconjunto cerrado F de I y positivamente invariante por f se tiene $F = I$ o $int(F) = \phi$. Sea U un abierto no vacío de I y formemos los conjuntos $V = f^{-n}(U) \neq \phi$ y $F = I - V$. El conjunto F es claramente cerrado y positivamente invariante por f, de donde, como $F \neq I$ tenemos que $int(F) = \phi$ y por lo tanto V es un abierto denso de I. Sea $x \in I$, el conjunto $\theta_f^+(x)$ es denso en I si sólo si $\theta_f^+(x) \cap U \neq \phi$ para todo abierto U de I, es decir, si sólo si $x \in f^{-n}(U)$ para todo abierto U de I. Luego para que f sea topológicamente transitiva basta mostrar que la intersección de abiertos densos $L = \cap_{U\ ab.\ de\ I} f^{-n}(U)$ es no vacía. Sea $\{U_m\}_{m \geq 1}$ una base numerable para la topología de I, notemos que $\cap_{m \geq 1} f^{-n}(U)$ es una intersección numerable de abiertos densos contenida en L. Es decir, no solo existe un punto en I cuya órbita positiva es densa en I, más aun estos puntos forman un residual de I.

Sea $f \in M(I)$. En general un f - ciclo C es topológicamente transitivo si sólo si para cada $F \subset C$ cerrado y positivamente invariante por f se tiene que $F = C$ ó $int(F) = \phi$.

Ejemplo: La función tienda de campaña de la figura 2 es un ejemplo de función topológicamente transitiva; de hecho, sea $F \subset I$ cerrado tal que $g(F) \subset F$ e $int(F) \neq \phi$. Sea J un intervalo no trivial contenido en F. Si $1/2 \notin J$ entonces $|f(J)| = 2|J|$, luego existe n tal que $1/2 \in f^n(J)$ y por lo tanto, $0 \in f^{n+2}(J)$. Un argumento similar al anterior muestra que existe $m \geq n+2$ tal que $1/2 \in f^m(J)$, es decir, $[0, 1/2] \subset f^m(J)$, pues 0 es un punto fijo. Finalmente $I = f([0, 1/2]) \subset f^{m+1}(J) \subset f^{m+1}(F) \subset F$. Es claro que esta función también es uniformemente lineal a pedazos expansiva.

La función $f(x) = 4x(1-x)$ de la figura 1 es topológicamente transitiva, pues es topológicamente conjugada a la función tienda de campaña.

En [6] W. Parry demostró el siguiente teorema que nos ha motivado por la búsqueda de una clasificación de las dinámicas de las funciones en $C(I)$, y el estudio de la existencia de modelos lineales para estas dinámicas.

Teorema 2 (Parry) *Sea $f \in M(I)$. Si f es topológicamente transitiva entonces f es topológicamente conjugada a una función uniformemente lineal a pedazos expansiva.*

Esquema de Demostración: La demostración que hace Parry de este Teorema es la aplicación de un resultado concerniente a dinámica simbólica. El considera la transformación shift actuando sobre un conjunto compacto y positivamente invariante del espacio de las sucesiones infinitas de símbolos escogidos desde un conjunto finito y demuestra que bajo cierta condición existe una medida de Borel respecto a la que esta transformación actúa de un modo "lineal". □

Definición 4 *Sea $f \in M(I)$. Denotamos por $\ell(f)$ el número de intervalos de monotonicidad de f y definimos la entropía topológica de f por* $h(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \ell(f^n)$.

Observemos que $h(f) \geq 0$ para toda función $f \in M(I)$. El que una función tenga entropía topológica positiva indica cierta complejidad en su dinámica. La dinámica de la función f es caótica en el sentido de Li y Yorke [2] si existen $x, y \in I$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} sup|f^n(x) - f^n(y)| > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} inf|f^n(x) - f^n(y)| = 0$$

Ejemplo:

Un ejemplo de función con entropía positiva es $f(x) = 4x(1-x)$ de la figura 1. Para calcular su entropía notemos que $\ell(f^n) = \#T(f^n) + 1$ y $T(f^n) = \{x \in I : f^k(x) = 1/2$ para algún $0 \leq k < n\}$. Como $\#f^{-n}(1/2) = 2^n$ se tiene $\#T(f^n) = 2^n - 1$ y por lo tanto $h(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(2^n) = \log 2 > 0$. Para esta función f las preimágenes de cualquier punto de I forman un denso en I tal como podemos deducir de su modelo lineal g de la figura 2. De hecho, esta función es caótica .

Definición 5 *Sean* $f \in C(I)$ *y* $n \geq 0$. *Un elemento* $x \in I$ *es llamado* *punto periódico de* f *de período* n *si y sólo si* $f^n(x) = x$ *y* $f^k(x) \neq x$ *para todo* $k = 1, \cdots, n-1$. *Si* $n = 1$, x *es llamado un* *punto fijo de* f.

El siguiente resultado (ver [1] para demostración y referencia) caracteriza la entropía nula.

Proposición 1 *Sea* $f \in M(I)$. *Entonces*

(i) $h(f) = 0$ *si y sólo si toda órbita periódica de* f *tiene período igual a una potencia de 2.*

(ii) $h(f) > 0$ *si y sólo si* f *contiene una herradura, es decir, existe* $m \geq 1$ *y existen* $J_0, J_1 \subset I$, *intervalos abiertos disjuntos no vacíos tales que* $J_0 \cup J_1 \subset f^m(J_0) \cap f^m(J_1)$.

Ejemplo: La función $f \in M(I)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1/2, & \text{si} \quad x \in [0, 1/2) \\ \\ 2 - 2x, & \text{si} \quad x \in [1/2, 1] \text{ (figura 5)} \end{cases}$$

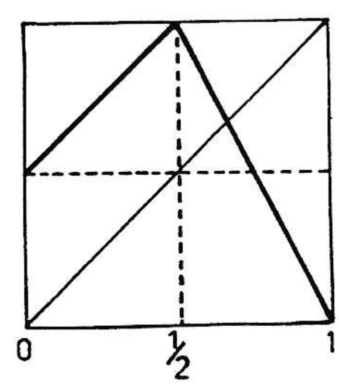

Fig. 5

es tal que 0 es un punto periódico de período 3, que no es una potencia de 2, es decir, f tiene entropía topológica positiva. Se puede ver también que f contiene una herradura, por ejemplo, $(0, 1/2) \cup (1/2, 1) \subset f^2(0, 1/2) \cap f^2(1/2, 1)$.

En [8] se demuestra el siguiente resultado que usaremos más adelante.

Proposición 2 *Sea* $f \in M(I)$. *Si* f *contiene un f-ciclo topológicamente transitivo entonces la entropía topológica de* f *es positiva.*

Esquema de Demostración: Sabemos que si m es el período del f - ciclo topológicamente transitivo y B alguna de sus componentes conexas entonces $f^m|B$ es topológicamente transitiva. La demostración se reduce a probar que toda función topológicamente transitiva contiene una herradura. □

Para terminar este capítulo presentamos el siguiente resultado de Milnor y Thurston [4], el que aplicaremos en el capítulo siguiente.

Teorema 3 (Milnor y Thurston) *Sea* $f \in M(I)$ *con* $h(f) > 0$. *Entonces* f *es semiconjugada a una función uniformemente lineal a pedazos expansiva con pendiente igual a* $exp(h(f))$.

CAPITULO 3

CONDICIONES NECESARIAS PARA LA EXISTENCIA DE MODELOS LINEALES EXPANSIVOS Y UNA GENERALIZACION AL TEOREMA DE PARRY

En el presente capítulo demostramos un teorema mediante el que deducimos condiciones necesarias para que una función monótona a pedazos tenga un modelo lineal expansivo. En esta parte damos propiedades en los Lemas 1, 2 y 3 de lo que entendemos por soporte de una semiconjugación. Demostramos el Teorema 5 que asegura la existencia de modelos lineales expansivos para una clase más extensa que las funciones topológicamente transitivas. Finalmente mostramos algunos ejemplos de aplicaciones en $M(I)$ para las que es aplicable el Teorema 5.

Definición 6 *Sea $f \in M(I)$. Decimos que f es expansiva si existe $\lambda \geq 1$ tal que $|f(x)-f(y)| > \lambda|x-y|$ para todo x e y distintos en un mismo intervalo de monotonicidad de f. La mayor constante λ la denominamos factor de expansión de f.*

Ejemplo: Una función lineal a pedazos expansiva es un ejemplo de función expansiva con factor de expansión mayor que uno.

Proposición 3 *Sea $f \in M(I)$. Si f es una función expansiva entonces no existen sumideros ni intervalos errantes de f.*

Demostración: Sea $J \subset (0,1)$ un intervalo abierto no vacío tal que f^n es monótona sobre J para todo $n \geq 0$. Como f es expansiva $|f^n(J)| > |J|$ para todo $n \geq 1$ y por lo tanto. $f^n(J) \not\subset J$ para todo $n \geq 1$. Así J no es un sumidero. Por otro lado es imposible que los conjuntos $\{f^n(J)\}_{n\geq 0}$ sean disjuntos. En efecto, si lo fueran $\sum_{n=0}^{+\infty} |f^n(J)| < |I| = 1$, y claramente esto es una contradicción pues $\lim_{n\to\infty} |f^n(J)| \neq 0$. □

Teorema 4 *Sea $f \in M(I)$. Si f es una función expansiva de factor de expansión mayor que 1 entonces no existe cascada de f-ciclos.*

Demostración: Sean $J = [a, b]$ un intervalo en I tal que $J \cap T(f) = \{c\}$ para alguna función expansiva $f \in M(I)$. Sabemos que $f(J)$ es igual a uno de los siguientes conjuntos $[f(a), f(c)]$, $[f(c), f(a)]$, $[f(b), f(c)]$ ó $[f(c), f(b)]$. Sin pérdida de generalidad supongamos $f(J) = [f(a), f(c)]$. Entonces $f(a) \leq f(b) < f(c)$, $b - c < f(c) - f(b) < f(c) - f(a)$ y $c - a < f(c) - f(a)$, pues f es expansiva. Así $b - a < 2(f(c) - f(a))$; es decir, $\frac{|J|}{2} < |f(J)|$.

Si existe una cascada de f - ciclos con generador $\{K_n\}_{n \geq 0}$ entonces es posible encontrar un f - ciclo K_{n_0} tal que cada una de sus componentes conexas contiene en su interior a lo más un punto crítico de f. Sean $B_1, \cdots, B_m$ los intervalos del f - ciclo K_{n_0} tales que $f(B_i) = B_{i+1}$ $\forall i = 1, \cdots, m - 1$ y $f(B_m) = B_1$. Sean $B_{m_1}, \cdots, B_{m_r}$ los intervalos de K_{n_0} que contienen puntos críticos $(m_1 < m_2 < \cdots < m_r = m)$. Sea c_i el punto crítico en B_i para cada $i = 1, \cdots, r$.

Si f es expansiva y λ es el factor de expansión de f deducimos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
|B_{m_1}| &> \lambda^{m_1 - 1}|B_1|, \\
|B_{m_{i+1}}| &> \lambda^{m_{i+1} - (m_i + 1)}|B_{m_i}| \quad \forall i = 1, 2, \cdots, r - 1, \\
|B_{m_i + 1}| &> \tfrac{1}{2}|B_{m_i}| \quad \forall i = 1, 2, \cdots, r - 1 \qquad \text{y} \\
|B_1| &> \tfrac{1}{2}|B_m|.
\end{aligned}$$

De estas desigualdades se obtiene que $\lambda^{per(K_{n_0})} < (2\lambda)^r$. Esto también debe ser válido para un f - ciclo K_n con $n \geq n_0$. Luego si $\lambda > 1$, como r es fijo y $per(K_n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$ se contradice esta última desigualdad, es decir, no existe una cascada de f - ciclos. $\square$

En el Capítulo 4 probaremos que en el Teorema 4 la condición sobre el factor de expansión es la mejor posible. Es decir, contruiremos una función expansiva, de factor de expansión igual a 1, la que tiene una cascada de ciclos.

Corolario 1 *Sea* $f \in M(I)$. *Si* f *es topológicamente conjugada a una función lineal a pedazos expansiva entonces existen f-ciclos topológicamente transitivos* $C_1, \cdots, C_r$; $1 \leq r \leq \#T(f)$ *tal que la unión disjunta de los conjuntos* $A(C_1, f), \cdots, A(C_r, f)$ *es residual en* I.

Demostración: Sea $f \in M(I)$ topológicamente conjugada a una función lineal a pedazos expansiva g. Por la Proposición 3 la función g no tiene sumideros ni intervalos errantes, es decir, $S(g) \cup E(g) = \phi$. El Teorema 4 muestra que no existen cascadas de g - ciclos, pues al ser g lineal esta es expansiva de factor de expansión mayor que 1. Luego, aplicando el Teorema 1, tenemos que el conjunto $\Lambda(g)$ se compone sólo de las cuencas de los ciclos topológicamente transitivos. Por la conjugación, lo mismo ocurre para f. □

En lo que sigue estudiaremos hasta que punto estas condiciones necesarias sobre la unión disjunta $\Lambda(f)$ del Teorema 1 son suficientes para que una función $f \in M(I)$ tenga un modelo lineal a pedazos expansivo. De hecho probamos que si $f \in M(I)$ tiene un sólo f -ciclo topológicamente transitivo C con $I - A(C, f)$ numerable entonces f admite modelo lineal expansivo. En este resultado usamos el teorema de Milnor y Thurston y algunos lemas previos.

Lema 1 *Sean* $f \in M(I)$ *y* $A \subset I$ *un conjunto cerrado tal que para todo intervalo abierto* $J \subset I$, $J \cap A \neq \phi$ *si sólo si* $f(J) \cap A \neq \phi$. *Entonces* A *e* $I - A$ *son positivamente f-invariantes.*

Demostración: Sea $x \in f(A)$ entonces existe $y \in A$ tal que $f(y) = x$. Sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \cap A \neq \phi$. Entonces por hipótesis $f(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \cap A \neq \phi$. Como f es continua y $x \in f(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que $x \in A$, pues A es cerrado. Luego $f(A) \subset A$. Ahora sea $x \in f(I-A)$ entonces existe $y \in I - A$ tal que $f(y) = x$. Sabemos que $I - A$ es abierto, luego existe $\varepsilon_0 > 0$ con $(y - \varepsilon_0, y + \varepsilon_0) \subset I - A$, es decir, $(y - \varepsilon_0, y + \varepsilon_0) \cap A = \phi$ lo cual implica $f(y - \varepsilon_0, y + \varepsilon_0) \cap A = \phi$ y por lo tanto $x \notin A$, de donde $f(I - A) \subset I - A$. □

Lema 2 *Sean* $f, g \in M(I)$. *Si* $\varphi \in C(I)$ *es una semiconjugación de* f *con* g *entonces:*

(i) $sop(\varphi) \neq \phi$;

(ii) $sop(\varphi)$ *es un conjunto cerrado, no tiene puntos aislados y es no numerable;*

(iii) para todo intervalo abierto $J \subset I$, $J \cap sop(\varphi) \neq \phi$ *si y sólo si* $f(J) \cap sop(\varphi) \neq \phi$; *y*

(iv) $sop(\varphi)$ *e* $I - sop(\varphi)$ *son f-positivamente invariantes.*

Demostración:

(i) Esto es claro pues φ es creciente y sobreyectiva.

(ii) Si $x \notin sop(\varphi)$ entonces existe intervalo abierto $J \subset I$ conteniendo a x tal que $|\varphi(J)| = 0$. Así $I - sop(\varphi)$ es un abierto y $sop(\varphi)$ es cerrado. Por otro lado, si y es un punto aislado de $sop(\varphi)$ tenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $|\varphi(y - \varepsilon, y + \varepsilon)| > 0$ y $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \cap sop(\varphi) = \{y\}$. Esto implica que $|\varphi(y, y + \varepsilon)| = 0$ y $|\varphi(y - \varepsilon, y)| = 0$ lo que contradice $y \in sop(\varphi)$. Finalmente todo conjunto perfecto en $\mathbb{R}$ es no numerable.

(iii) Sea J un intervalo abierto. Como $g(\varphi(J)) = \varphi(f(J))$, se tiene $J \cap sop(\varphi) \neq \phi \iff |\varphi(J)| > 0 \iff |g(\varphi(J))| > 0 \iff |\varphi(f(J))| > 0 \iff f(J) \cap sop(\varphi) \neq \phi$.

(iv) Aplicar Lema 1 a $sop(\varphi)$ usando (iii). $\square$

Sea $f \in M(I)$. Notaremos por $T^*(f)$ al conjunto $T(f) \cup \{0, 1\}$. Sea U un abierto de I tal que $f(U - T^*(f)) \subset U$. Si J es una componente conexa de U, entonces $f^m(J) \cap J = \phi$ para todo $m \geq 1$, o existe $m \geq 1$ tal que $f^m(\bar{J}) \subseteq \bar{J}$. En este último caso decimos que J es periódico.

Lema 3 *Sean* $f \in M(I)$, $\varphi \in C(I)$ *una función que semiconjuga a* f *con otra función* g *y sea* C *un f-ciclo topológicamente transitivo. Entonces,* $int(C) \subset sop(\varphi)$ *o* $int(C) \subset I - sop(\varphi)$.

Demostración: Denotemos por $sop^c(\varphi)$ al complemento de $sop(\varphi)$, el cual es un conjunto abierto. Si $int(C) \not\subset sop(\varphi)$ entonces $int(C) \cap sop^c(\varphi)$ es un abierto no vacío. Como $f(int(C) - T^*(f)) \subset int(C)$ y $f(sop^c(\varphi)) \subset sop^c(\varphi)$ se deduce que $f(int(C) \cap sop^c(\varphi) - T^*(f)) \subset int(C) \cap sop^c(\varphi)$.

Sea J una componente de $int(C) \cap sop^c(\varphi)$. Veamos que J es periódica. Si no lo fuera $F = \overline{\cup_{m\geq 1}(f^m(J))}$ es tal que $f(F) \subset F \subset C$. Como f es topológicamente transitivo en C se tiene $F = C$ ó $int(F) = \phi$. Como $int(F) \neq \phi$ se tiene $F = C$, $J \cap F \neq \phi$ lo cual es una contradicción. Así, J debe ser periódica.

Sea m el período de J y $G = \cup_{j=0}^{m-1} f^j(\bar{J})$ que es cerrado, positivamente f-invariante e $int(G) \neq \phi$. Necesariamente $G = C$. Pero $int(C) \cap sop(\varphi) \subset G \cap (sop(\varphi) \cup int(C)^c) = G - int(C) \cap sop(\varphi)^c$ que es finito y como $sop(\varphi)$ no tiene puntos aislados $int(C) \cap sop(\varphi) = \phi$. □

Observemos que $int(C) \subset A(C, f)$ e $int(C) \cap sop(\varphi) = \phi$ implican $A(C, f) \cap sop(\varphi) = \phi$ (pues $sop(\varphi)$ es positivamente f-invariante). Luego bajo las mismas condiciones del Lema 3, $A(C, f) \subset sop(\varphi)$ o $A(C, f) \subset sop(\varphi)^c$.

Teorema 5 *Sean $f \in M(I)$ y C un f-ciclo topológicamente transitivo tal que $I - A(C, f)$ es numerable. Entonces f es conjugada a una función uniformemente lineal a pedazos expansiva.*

Demostración: Sea $f \in M(I)$ y supongamos f tiene un f - ciclo topológicamente transitivo C tal que $I - A(C, f)$ es numerable. Por la Proposición 2 y el Teorema 3 existe $\varphi \in C(I)$ creciente y sobreyectiva que semiconjuga f con una función uniformemente lineal a pedazos expansiva. Además por el Lema 3 $A(C, f) \subset sop(\varphi)$ ó $A(C, f) \subset sop^c(\varphi)$. Esta última posibilidad implica que $sop(\varphi)$ es numerable, lo que es imposible por (ii) del Lema 2. Por lo tanto, $A(C, f) \subset sop(\varphi)$ y como $sop(\varphi)$ es cerrado $I = \overline{A(C, f)} = sop(\varphi)$ y φ es una conjugación. □

El resultado de Parry, Teorema 2, es un caso particular donde el f - ciclo topológicamente transitivo C es todo el intervalo I.

Las siguientes aplicaciones en $M(I)$ son ejemplos de funciones que satisfacen las hipótesis del Teorema 5 y que, por lo tanto, tienen modelos lineales expansivos.

Ejemplo 1: Consideremos la función f de la figura 6. Si $[x_1, 1]$ es un f -ciclo topológicamente transitivo de período 1 entonces $I - A([x_1, 1], f) = \{0, x_0, x_1, 1\}$.

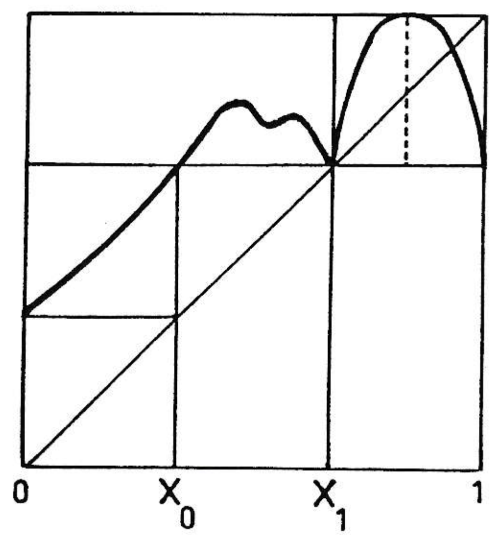

Fig. 6

Ejemplo 2: Sea la función g de la figura 7, para esta función supongamos que $[x_0, 1]$ es un g -ciclo topológicamente transitivo de período 1. Entonces $I - A([x_0, 1], g) = \{0, 1, x_0, x_1, x_2, \cdots\}$, es decir, es numerable.

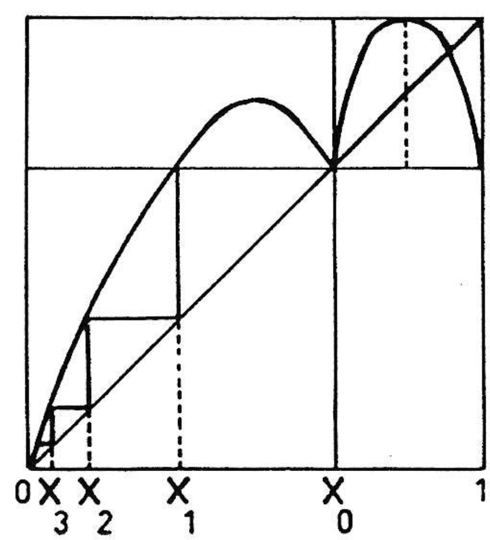

Fig. 7

Ejemplo 3: Si en la función h de la figura 8, $[0, y_0] \cup [y_1, 1]$ es un h - ciclo topológicamente transitivo de período 2 entonces $I - A([0, y_0] \cup [y_1, 1], h) = \{0, y_0, y_1, 1, x_1, x_2, x_3, \cdots, \lim_{n\to\infty} x_n\}$.

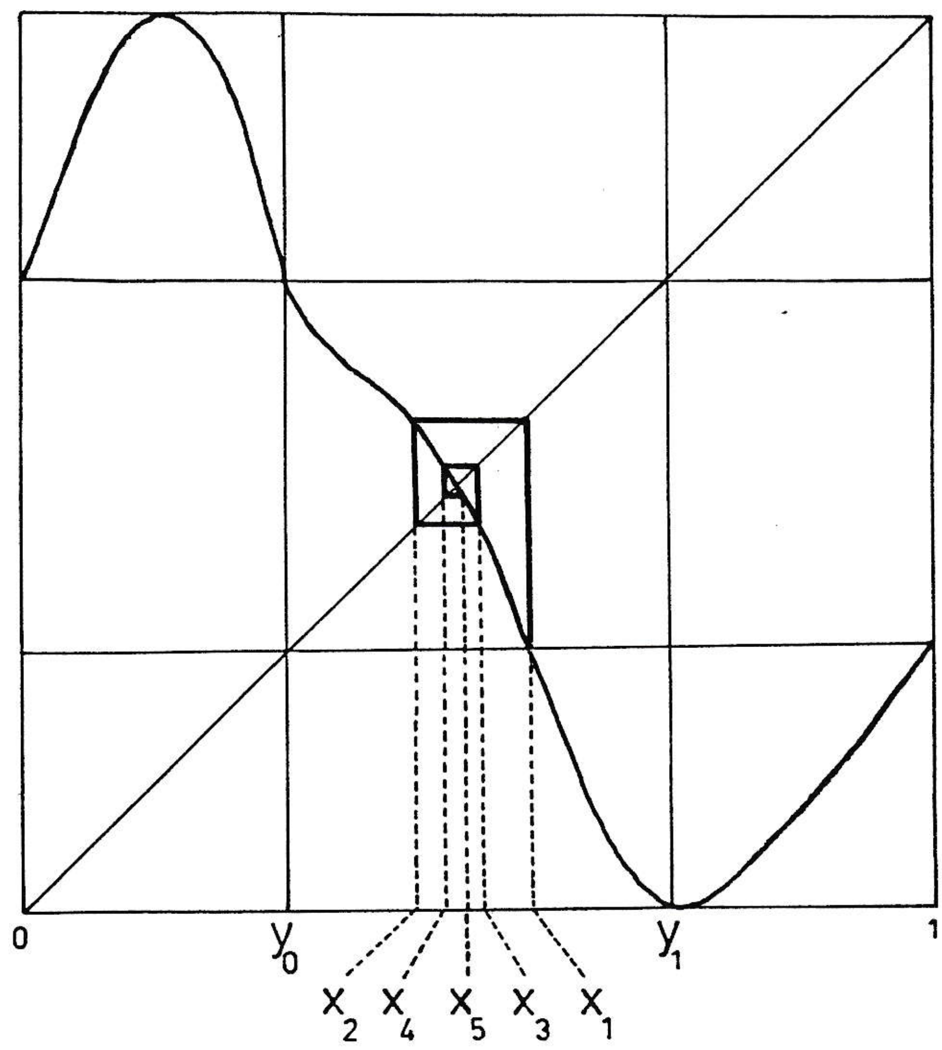

Fig.8

CAPITULO 4

FUNCION EXPANSIVA DE FACTOR DE EXPANSION IGUAL A UNO CON CASCADA DE CICLOS

En el Teorema 4 demostramos que una función expansiva de factor de expansión mayor que uno no tiene cascada de ciclos. En este capítulo veremos la necesidad de esa hipótesis. De hecho construiremos una función f en $M(I)$ tal que:

(i) $T(f) = \{c\}$;

(ii) $f(c) = 1$, $f(1) = 0$ y $0 < f(0) < 1$;

(iii) $|f(x) - f(y)| > |x - y|$ para todo x e y en un mismo intervalo de monotonicidad de f (i.e., expansiva de factor de expansión igual a 1); y

(iv) existe cascada de f - ciclos propios generada por $I = B_0 \supset B_1 \supset B_2, \cdots$, con B_n un f - ciclo de período 2^n, $c \in int(B_n)$ y $\partial B_n \subset \partial B_{n+1}$ para todo $n \geq 0$.

Supongamos que una función $f \in M(I)$ como la descrita existe. Deduciremos condiciones necesarias sobre la estructura de los f - ciclos B_n, como también del comportamiento de f en estos ciclos para todo $n \geq 0$.

Sabemos que B_1 es un ciclo de período 2 con $\partial B_1 \supset \partial B_0 = \{0, 1\}$, $c \in int(B_1)$ y $f(c) = 1$. Luego B_1 debe ser la unión disjunta de intervalos cerrados B_{11} y B_{12} como en la figura 9 y tales que $c \in int(B_{11})$, $f(B_{11}) = B_{12}$, $f(B_{12}) = B_{11}$ y f decreciente sobre B_{12}.

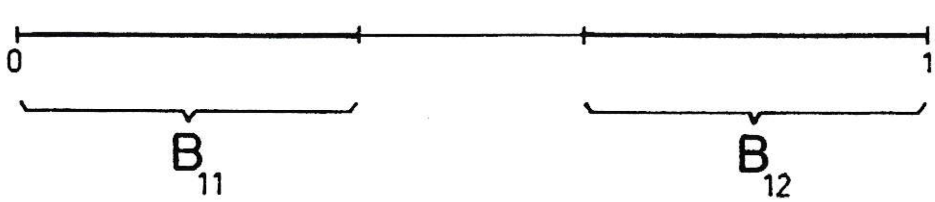

Fig. 9

Las condiciones $\partial B_1 \subset \partial B_2$ y $per(B_2) = 4$ implican la existencia de intervalos cerrados y disjuntos B_{21}, B_{22}, B_{23} y B_{24} cuya unión es el ciclo B_2, además $B_{21} \cup B_{22} \subset B_{11}$ y $B_{23} \cup B_{24} \subset B_{12}$. Ver figura 10. Considerando que $c \in int(B_2) \cap int(B_{11})$ y $f(c) = 1 \in B_{24}$ debemos tener $f(B_{22}) = B_{24}$ ó $f(B_{21}) = B_{24}$. De $f(1) = 0 \in B_{21}$ se deduce $f(B_{24}) = B_{21}$, luego si $f(B_{21}) = B_{24}$ entonces $B_{21} \cup B_{24}$ es un f - ciclo de período 2, lo que contradice $per(B_2) = 4$. Por lo tanto, $f(B_{22}) = B_{24}$, $f(B_{24}) = B_{21}$, $f(B_{21}) = B_{23}$, $f(B_{23}) = B_{22}$. Deducimos también que $c \in int(B_{22})$; de donde f debe ser creciente sobre B_{21} y decreciente sobre B_{23} y B_{24}.

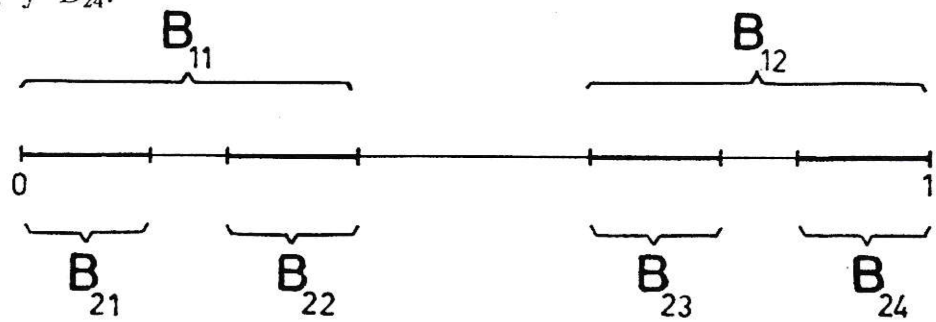

Fig. 10

Similarmente B_3 es la unión disjunta de intervalos cerrados B_{3i}, $i = 1, \cdots, 8$ tal que $B_{31} \cup B_{32} \subset B_{21}$, $B_{33} \cup B_{34} \subset B_{22}$, $B_{35} \cup B_{36} \subset B_{23}$ y $B_{37} \cup B_{38} \subset B_{24}$ como muestra la figura 11. La condición $f(1) = 0$ implica $f(B_{38}) = B_{31}$. Que $f(B_{21}) = B_{23}$ y f sea creciente sobre B_{21} obliga tener $f(B_{31}) = B_{35}$. De $f(B_{23}) = B_{22}$ y f decreciente sobre B_{23} se deduce $f(B_{35}) = B_{34}$. La única forma de completar el ciclo B_3 es tener $f(B_{34}) = B_{37}$, $f(B_{37}) = B_{32}$, $f(B_{32}) = B_{36}$, $f(B_{36}) = B_{33}$ y $f(B_{33}) = B_{38}$. Además como $f(c) = 1 \in B_{38}$ y $c \in int(B_3)$ entonces $c \in int(B_{33})$. Luego f será creciente sobre B_{31} y B_{32} y decreciente sobre $B_{34}, B_{35}, B_{36}, B_{37}$ y B_{38}.

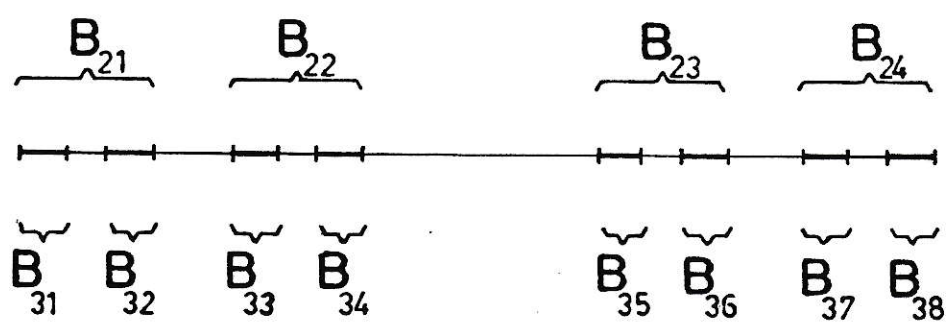

Fig. 11

En general si $f \in M(I)$ es tal que (i), (ii), (iii) y (iv) entonces necesariamente:

(v) El f - ciclo B_n es la unión disjunta de intervalos cerrados $B_{n\,i}$, $i = 1, \cdots, 2^n$ tales que si $i, j \in \{1, \cdots, 2^n\}$ con $i < j$ entonces $x < y$ $\forall (x,y) \in B_{n\,i} \times B_{n\,j}$ y $\forall n \geq 0$.

(vi) $B_{n\,j} \supset B_{n+1\,2j-1} \cup B_{n+1\,2j}$ y el punto frontera mínimo de $B_{n\,j}$ (resp. máximo de $B_{n\,j}$) es el punto frontera mínimo de $B_{n+1\,2j-1}$ (resp. máximo de $B_{n+1\,2j}$) $\forall j = 1, \cdots, 2^n$ y $\forall n \geq 0$.

(vii) Existe $r(n) \in \{1, \cdots, 2^n\}$ de modo que si $j \in \{1, \cdots, 2^n\}$ entonces: f es creciente sobre $B_{n\,j}$ si $j < r(n)$, f es decreciente si $j > r(n)$ y $c \in int(B_{n\,r(n)})$ $\forall n \geq 1$.

(viii) $r(1) = 1$ y

$$r(n) = \begin{cases} 2r(n-1) & \text{si } n \text{ es par} \\ \\ 2r(n-1) - 1 & \text{si } n \text{ es impar}, \quad \forall n \geq 2. \end{cases} \tag{1}$$

(ix) Existe permutación σ_n de $\{1, \cdots, 2^n\}$ tal que $f(B_{n\,j}) = B_{n\,\sigma_n(j)}$ $\forall j = 1, \cdots, 2^n$ y $\forall n \geq 0$, además $\sigma_1 = (21)$.

(x) Para $n \geq 1$ y $j \in \{1, \cdots, 2^n\}$ tenemos que:

Si $j \neq r(n)$ entonces

$$\sigma_{n+1}(2j-1) = \begin{cases} 2\sigma_n(j) - 1 & \text{si} \quad j < r(n) \\ \\ 2\sigma_n(j) & \text{si} \quad j > r(n) \end{cases} \tag{2}$$

y

$$\sigma_{n+1}(2j) = \begin{cases} 2\sigma_n(j) & \text{si} \quad j < r(n) \\ \\ 2\sigma_n(j) - 1 & \text{si} \quad j > r(n). \end{cases} \tag{3}$$

Si $j = r(n)$ entonces

$$\sigma_{n+1}(2j-1) = \begin{cases} 2\sigma_n(j) & \text{si } n \text{ es par} \\ 2\sigma_n(j) - 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \tag{4}$$

y

$$\sigma_{n+1}(2j) = \begin{cases} 2\sigma_n(j) - 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 2\sigma_n(j) & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \tag{5}$$

De hecho: sabemos que para todo $n \geq 0$ el f - ciclo B_n es de período 2^n, es decir, B_n es la unión disjunta de 2^n intervalos cerrados. Denotemos por $B_{n\,1}, \cdots, B_{n\,2^n}$ a estos intervalos según su orden de distribución de izquierda a derecha en I. Como $B_{n+1} \subset B_n$ cada componente conexa de B_n debe contener $per(B_{n+1})/per(B_n) = 2$ componentes de B_{n+1}. La numeración asignada a estas componentes y la condición $\partial B_n \subset \partial B_{n+1}$ permiten deducir fácilmente (v) y (vi). Ver figura 12.

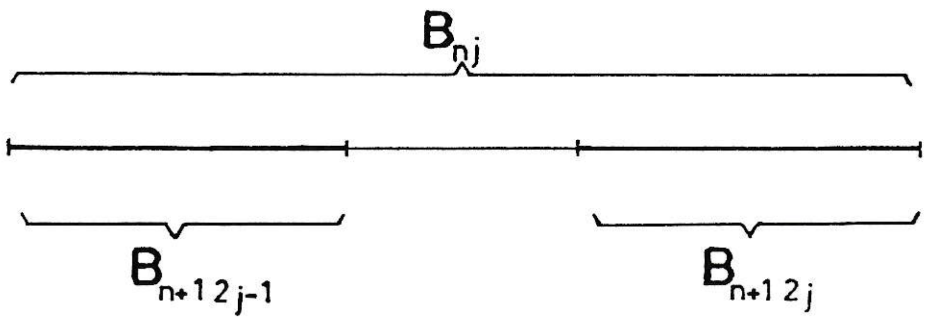

Fig.12

Como $T(f) = \{c\}$ y $f(1) = 0$ tenemos que necesariamente f es creciente en $[0, c]$ y decreciente en $[c, 1]$. El que $c \in int(B_n)$ implica la existencia de una componente de B_n, denotémosla por $B_{n\,r(n)}$, tal que $c \in int(B_{n\,r(n)})$. Luego concluimos que sobre cada componente a la izquierda (resp. derecha) de $B_{n\,r(n)}$ la función f es creciente (resp. decreciente), es decir, (vii). Por otro lado, como $r(1) = 1$ y $c \in int(B_{n+1})$ deducimos que si $r(n) = j$ entonces $r(n+1) = 2j - 1$ ó $r(n+1) = 2j$.

Dado $n \geq 0$ e $i \in \{1, \cdots, 2^n\}$ existe $j \in \{1, \cdots, 2^n\} \setminus \{i\}$ tal que $f(B_{n\,i}) = B_{n\,j}$. Escribamos $j = \sigma_n(i)$. La transformación σ_n asi definida es una permutación de $\{1, \cdots, 2^n\}$, pues B_n es un f - ciclo. Además $f(B_{11}) = B_{12}$ y $f(B_{12}) = B_{11}$, es decir, $\sigma_1 = (21)$. Luego se cumple (ix).

Sea $j \in \{1, \cdots, 2^n\}$. Si $j < r(n)$, es decir, si f es creciente sobre $B_{n\,j}$ entonces $f(B_{n+1\,2j-1})$ (resp. $f(B_{n+1\,2j})$) debe ser igual a la componente de B_{n+1} contenida a la izquierda (resp. derecha) de $B_{n\,\sigma_n(j)}$, digamos $f(B_{n+1\,2j-1}) = B_{n+1\,2\sigma_n(j)-1}$ y $f(B_{n+1\,2j}) = B_{n+1\,2\sigma_n(j)}$ (i.e., si $j < r(n)$ entonces $\sigma_{n+1}(2j-1) = 2\sigma_n(j) - 1$ y $\sigma_{n+1}(2j) = 2\sigma_n(j)$). Por otro lado, en el caso $j > r(n)$, es decir, si f es decreciente sobre $B_{n\,j}$ entonces $f(B_{n+1\,2j-1}) = B_{n+1\,2\sigma_n(j)}$ y $f(B_{n+1\,2j}) = B_{n+1\,2\sigma_n(j)-1}$ (i.e., si $j > r(n)$ entonces $\sigma_{n+1}(2j-1) = 2\sigma_n(j)$ y $\sigma_{n+1}(2j) = 2\sigma_n(j) - 1$). Por lo tanto, se verifica (2) y (3).

Seguidamente sea $B_{n-1\,i} = [x_0, y_0]$ componente conexa de B_{n-1} que contiene en su interior al punto crítico c, es decir, $r(n-1) = i$. Como $c \in int(B_n)$, y $B_{n\,2i-1} \cup B_{n\,2i} \subset B_{n-1\,i}$ entonces, $c \in B_{n\,2i-1} = [x_0, y_1]$ ó $c \in B_{n\,2i} = [x_1, y_0]$.

Supongamos que $c \in int(B_{n\,2i})$, es decir, $r(n) = 2i = 2r(n-1)$. De $f(c) = 1$ se deducen $f([x_0, y_0]) = B_{n-1\,2^{n-1}} = [a_0, 1]$ y $f([x_1, y_0]) = B_{n\,2^n} = [a_1, 1]$ para algunos a_0 y a_1 reales tal que $a_0 < a_1 < 1$. Ver figura 13.

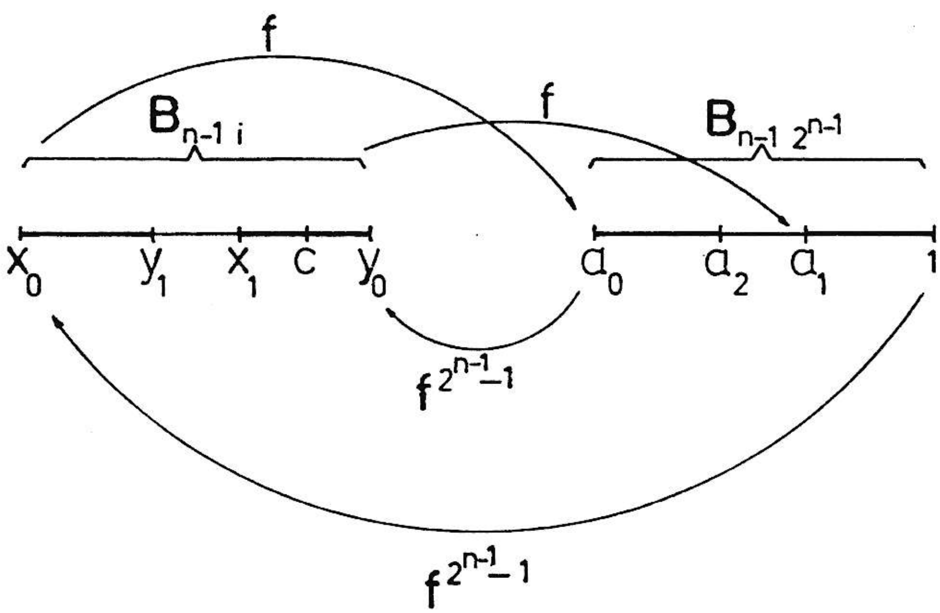

Fig.13

Tenemos que $f(x_0) = a_0$, pues $f(y_0) \in [a_1, 1]$. Además $f^{2^{n-1}-1}(a_0) = y_0$ y $f^{2^{n-1}-1}(1) = x_0$, pues B_{n-1} es un 2^{n-1} ciclo y si $f^{2^{n-1}-1}(a_0) = x_0$ entonces a_0 es un punto periódico en una cascada de f - ciclos lo que es una contradicción. Así $f(y_0) = a_1$, pues si $f(y_0) \neq a_1$ entonces $f(x_1) = a_1$, $f^{2^{n-1}-1}(a_1) = y_1$, $f(y_1) = a_2$ y $f^{2^{n-1}-1}(a_2) = x_1$ de donde x_1 es un punto periódico, contradicción.

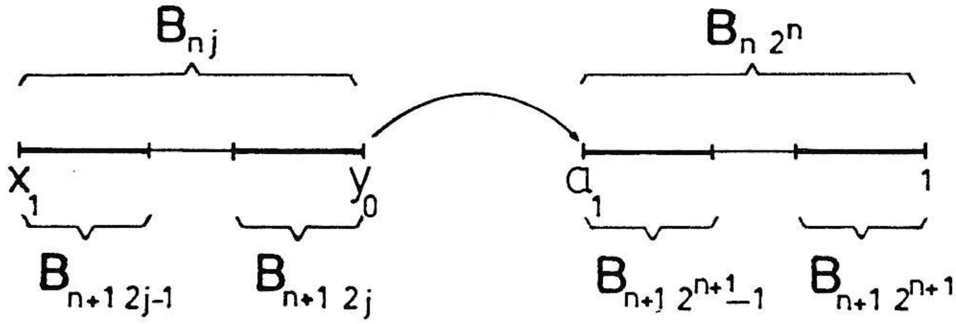

Fig.14

Sea $j = 2i$. Deducimos que $c \in intB_{n+1\,2j-1}$, pues $f(c) = 1 \notin B_{n+1\,2^{n+1}-1} = f(B_{n+1\,2j})$ y $c \in int(B_{n+1})$. Ver figura 14. Luego $r(n) = 2r(n-1)$ y $r(n+1) = 2r(n) - 1$.

En forma similar al suponer $c \in int(B_{n\,2i-1})$ concluimos que $r(n) = 2r(n-1) - 1$ y $r(n+1) = 2r(n)$. Luego $r(n+1)$ es $2r(n)$ ó $2r(n) - 1$ alternadamente. Como $r(1) = 1$, $r(2) = 2r(1)$ y $r(3) = 2r(2) - 1$ tenemos (1), es decir, (viii).

De aquí deducimos fácilmente que si $j = r(n)$ entonces se cunple (4) y (5). Esto completa la verificación de la propiedad (x).

Con estas condiciones necesarias, construiremos f inductivamente en los complementos de los f - ciclos B_n. Más precisamente la función f se definirá inductivamente en una sucesión $A_1, A_2, A_3, \cdots$ de conjuntos cerrados disjuntos con $\overline{\cup_{n\geq 1} A_n} = I$ de modo que el f - ciclo B_n estará dado por $\overline{(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n)^c}$. Extendiendo continuamente f quedará definida en todo I.

Lema 4 *Sean* $0 < \bar{\alpha} < \beta < \alpha$ *con* $\alpha + \beta < 1$. *Entonces existen* α_i, β_i, $i = 1,2,3$ *tal que* $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, $\beta_3 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_3$, $\beta_2 < \alpha_2 < \beta_2 + \beta_3$ *y* $\bar{\alpha} < \beta_1 + \beta_2$.

Demostración: Sean $0 < \bar{\alpha} < \beta < \alpha$ con $\alpha + \beta < 1$. Elegimos α_i, β_i, $i = 1,2,3$ tal que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha$ y $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \beta$ mediante el siguiente algoritmo:

a) Se elije α_3 tal que $\alpha_3 > \bar{\alpha}$ y $\alpha_1 + \alpha_2 < \beta$.

b) Se elije β_1 tal que $\bar{\alpha} < \beta_1 < \alpha_3$ y $\beta_2 + \beta_3 < \alpha_1 + \alpha_2$.

Por a) $\alpha_1 + \alpha_2 < \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$.

c) Se elije α_1 tal que $\alpha_1 < \beta_1$ y $\alpha_2 < \beta_2 + \beta_3$.

Por b) $\beta_2 + \beta_3 < \alpha_1 + \alpha_2$.

d) Se elije β_2 tal que $\beta_2 < \alpha_2$ y $\beta_3 < \alpha_1$. □

Construcción Básica

Sean $J \subset I$ un intervalo cerrado y α, β y γ números positivos tales que $|J| = \alpha + \beta + \gamma$. Por trisectar J según (α, β, γ) se entenderá el proceso de elegir intervalos cerrados $J(1), J(2)$ y $J(3)$ tales que $J = J(1) \cup J(2) \cup J(3)$, $max J(1) = min J(2)$, $max J(2) = min J(3)$, $|J(1)| = \alpha$, $|J(2)| = \beta$ y $|J(3)| = \gamma$.

Construcción de f

Para definir A_1 y B_1 tal que $B_1 = \overline{A_1^c}$ el intervalo $I = [0,1]$ debe ser trisectado según $(a, 1-(a+b), b)$ donde a y b son positivos y $a+b<1$. Así determinamos $A_1 = I(2)$ y $B_1 = B_{11} \cup B_{12}$ con $B_{11} = I(1)$ y $B_{12} = I(3)$. Ver figura 15.

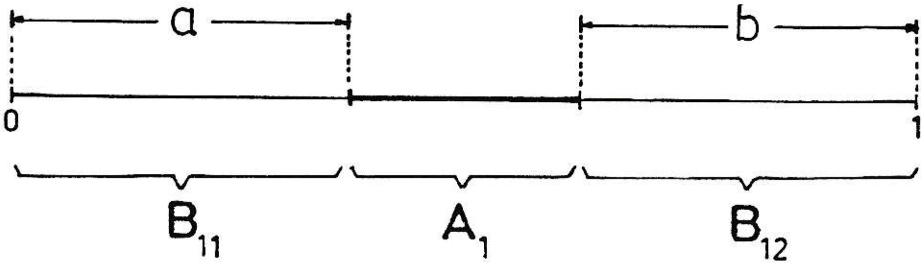

Fig.15

Como B_1 debe ser un f - ciclo de período 2 y f expansiva exigimos que $b < a$, pues sabemos que es necesario tener $f(B_{12}) = B_{11}$, $f(B_{11}) = B_{12}$ y $c \in int(B_{11})$. Claramente es posible elegir a y b con estas propiedades.

Seguidamente para determinar A_2 y B_2 debemos trisectar B_{11} y B_{12} según (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) respectivamente, para algunos a_i, b_i; $i = 1,2,3$ positivos tales que $a = a_1 + a_2 + a_3$ y $b = b_1 + b_2 + b_3$. Quedan definidos así $A_2 = A_{21} \cup A_{22}$ y $B_2 = \overline{(A_1 \cup A_2)^c} = B_{21} \cup B_{22} \cup B_{23} \cup B_{24}$ tales que $B_{21} = B_{11}(1)$, $A_{21} = B_{11}(2)$, $B_{22} = B_{11}(3)$, $B_{23} = B_{12}(1)$, $A_{22} = B_{12}(2)$ y $B_{24} = B_{12}(3)$. Ver figura 16.

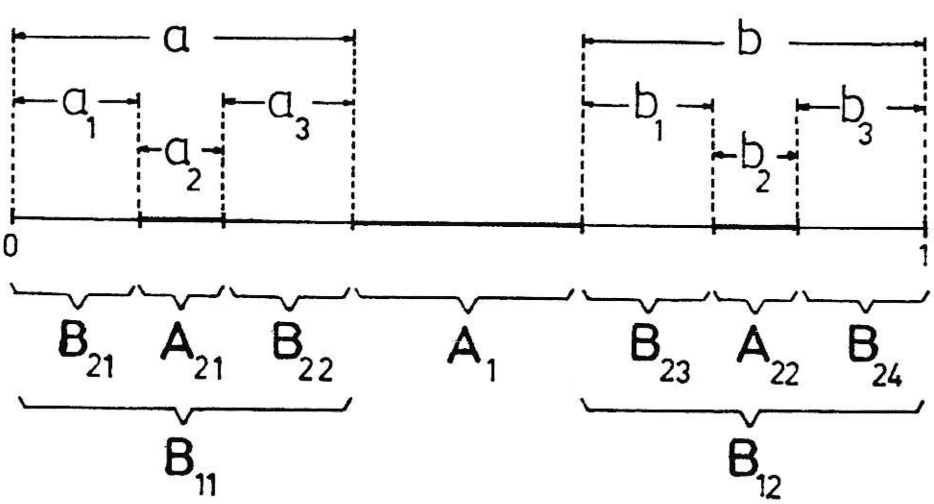

Fig.16

Sabemos que B_2 es un f - ciclo de período 4 tal que $f(B_{24}) = B_{21}$, $f(B_{21}) = B_{23}$, $f(B_{23}) = B_{22}$, $f(B_{22}) = B_{24}$ y $c \in int(B_{22})$. Como $A_2 \subset B_1$ concluimos que $f(A_{22}) = A_{21}$ y $f(A_{21}) \supset A_{22}$. Luego por la necesaria expansividad de f los a_i, b_i, $i = 1, 2, 3$ satisfacen las desigualdades $b_3 < a_1 < b_1 < a_3$ y $b_2 < a_2 < b_2 + b_3$. Tales a_i, b_i existen, basta aplicar el Lema 4 con $\alpha = a$, $\beta = b$ y $\bar{\alpha} = 0$.

La función $f|A_1$ se define monótona, decreciente, expansiva, de clase C^0 y tal que $f(A_1) = A_1 \cup B_{23} \cup A_{22}$.

Sobre A_2 la función f también deberá ser monótona, expansiva y de clase C^0 en cada componente conexa de A_2, decreciente sobre A_{22}, creciente sobre A_{21} y $f(A_{22}) = A_{21}$. Por la necesaria continuidad y expansividad de f la imagen de A_{21} tendrá que contener propiamente a A_{22}.

Para definir $f(A_{21}), A_3$ y B_3 trisectaremos los intervalos $B_{2\,j}$, $j = 1, 2, 3$ de modo que cada $B_{2\,j}$, $j = 1, 2, 3$, sea la unión de intervalos cerrados $B_{3\,2j-1}$, $A_{3\,j}$ y $B_{3\,2j}$. Ver figura 17.

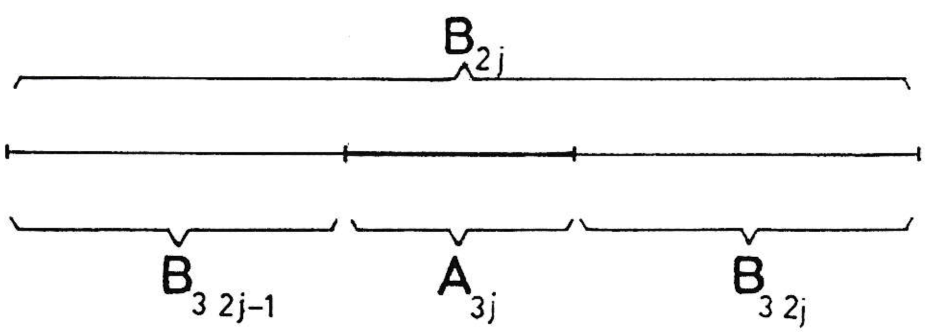

Fig.17

Determinaremos así $A_3 = \cup_{i=1}^{4} A_{3\,i}$ y $B_3 = \cup_{i=1}^{8} B_{3\,i}$ que sabemos debe ser un f - ciclo tal que $f(B_{3\,i}) = B_{3\,\sigma_3(i)}$, $\forall i = 1, \cdots, 8$ y $c \in int(B_{33})$. Como $A_{3\,j} \subset B_{2\,j}$ $\forall j = 1, \cdots, 4$ también es necesario que $f(A_{34}) = A_{31}$, $f(A_{31}) = A_{33}$, $f(A_{33}) = A_{32}$ y $f(A_{32}) \supset A_{34}$.

Atendiendo a la continuidad y expansividad que impone la construcción de f se debe tener $f(A_{21}) = A_{22} \cup B_{37} \cup A_{34}$ y

$$\begin{aligned} |B_{3\,i}| &< |B_{3\,\sigma_3(i)}| \;\; \forall i \neq 3 = r(3), \\ |A_{3\,j}| &< |A_{3\,\sigma_2(j)}| \;\; \forall j \neq 2 = r(2), \\ |A_{32}| &< |A_{34}| + |B_{38}| \quad \text{y} \\ |A_{21}| - |A_{22}| &< |B_{37}| + |A_{34}| \end{aligned} \tag{6}$$

Afirmamos que la trisección de las componentes de B_2 con estas propiedades es posible.

En efecto, sean $\alpha = |B_{22}|$, $\beta = |B_{24}|$ y $\bar{\alpha} = |A_{21}| - |A_{22}|$. Considerando que $0 < \bar{\alpha} < \beta < \alpha$ y $\alpha + \beta < 1$, apliquemos el Lema 4 para α y β y trisectemos B_{22} según $(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$ y B_{24} según $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, es decir, $|B_{33}| = \alpha_3$, $|A_{32}| = \alpha_2$, $|B_{34}| = \alpha_1$, $|B_{37}| = \beta_1$, $|A_{34}| = \beta_2$ y $|B_{38}| = \beta_3$.

Sean $\gamma = |B_{21}|$ y $\delta = |B_{23}|$, notemos que $\beta < \gamma < \delta < \alpha$. Elijamos γ_i, δ_i, $i = 1, 2, 3$ tal que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ y proporcionalmente como en la figura 18.

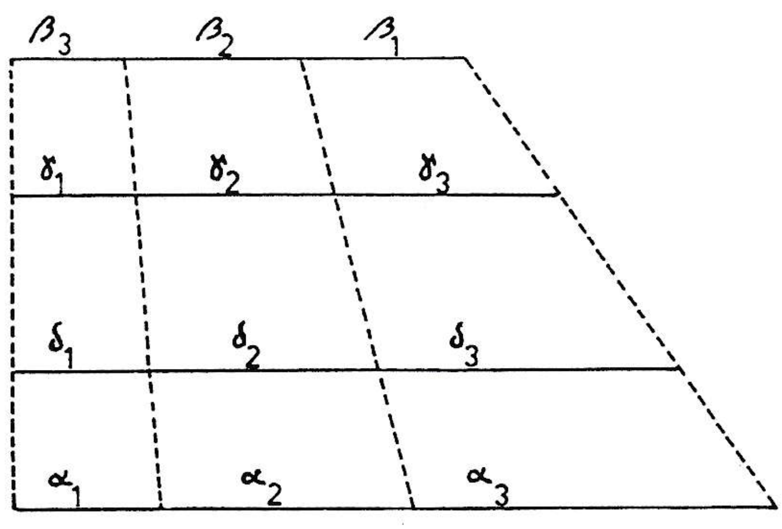

Fig. 18

Trisectemos B_{21} según $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ y B_{23} según $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, es decir, $|B_{31}| = \gamma_1$, $|A_{31}| = \gamma_2$, $|B_{32}| = \gamma_3$, $|B_{35}| = \delta_1$, $|A_{33}| = \delta_2$ y $|B_{36}| = \delta_3$.

De las desigualdades que por el Lema 4 satisfacen los $\alpha_i, \beta_i,\ i = 1,2,3$ y el hecho que $\beta_j < \gamma_i < \delta_i < \alpha_i$ para todo i,j tal que $i + j = 4$ deducimos las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
&\beta_3 < \gamma_1 < \delta_1 < \alpha_1 < \beta_1 < \gamma_3 < \delta_3 < \alpha_3, \\
&\beta_2 < \gamma_2 < \delta_2 < \alpha_2, \\
&\alpha_2 < \beta_2 + \beta_3, \quad \text{y} \\
&\bar{\alpha} < \beta_1 + \beta_2.
\end{aligned} \tag{7}$$

Estas corresponden a las desigualdades de (6).

En general procederemos inductivamente.

Supongamos definidos $A_n = A_{n\,1} \cup \cdots \cup A_{n\,2^{n-1}}$, $B_n = B_{n\,1} \cup \cdots \cup B_{n\,2^n}$ y $f|A_{n-1}$ tal que:

$$|B_{n\,i}| < |B_{n\,\sigma_n(i)}| \ \ \forall i \in \{1, \cdots, 2^n\} \setminus \{r(n)\}, \tag{8}$$

$$|A_{n\,j}| < |A_{n\,\sigma_{n-1}(j)}| \ \ \forall j \in \{1, \cdots, 2^{n-1}\} \setminus \{r(n-1)\}, \tag{9}$$

$$|A_{n\,r(n-1)}| < |A_{n\,2^{n-1}}| + |B_{n\,2^n}| \tag{10}$$

y

$$|A_{n-1\ r(n-2)}| < |A_{n-1\ 2^{n-1}}| < |B_{n\ 2^n-1}| + |A_{n\ 2^{n-1}}|. \tag{11}$$

Entonces es posible definir $A_{n+1} = \cup_{i=1}^{2^n} A_{n+1\,i}$, $B_{n+1} = \cup_{i=1}^{2^{n+1}} B_{n+1\,i}$ y $f|A_n$ tal que (8), (9), (10) y (11) se cumplen para $n + 1$.

Para definir A_{n+1}, B_{n+1} y $f|A_n$ trisectaremos cada $B_{n\,i}$, $i = 1, \cdots, 2^n$, determinando $B_{n+1\,2i-1} = B_{n\,i}(1)$, $A_{n+1\,i} = B_{n\,i}(2)$ y $B_{n+1\,2i} = B_{n\,i}(3)$ tal que $B_{n\,i} = B_{n+1\,2i-1} \cup A_{n+1\,i} \cup B_{n+1\,2i}$ $\forall i = 1, \cdots, 2^n$, de donde, $A_{n+1} = A_{n+1\,1} \cup A_{n+1\,2} \cup \cdots \cup A_{n+1\,2^n}$ y $B_{n+1} = B_{n+1\,1} \cup \cdots \cup B_{n+1\,2^{n+1}}$.

Designemos respectivamente por α, β y $\bar{\alpha}$ las magnitudes $|B_{n\ r(n)}|$, $|B_{n\ 2^n}|$ y $|A_{n\ r(n-1)}| - |A_{n\ 2^{n-1}}|$. Notemos que de (8) para $i = 2^n$ y (10) se tiene $0 < \bar{\alpha} < \beta < \alpha$. Apliquemos el Lema 4 para estos $\bar{\alpha}, \beta$ y α determinando α_i, β_i, $i = 1, 2, 3$. Trisectemos $B_{n\ 2^n}$ según $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, es decir, $|B_{n+1\ 2^{n+1}-1}| = \beta_1$, $|A_{n+1\ 2^n}| = \beta_3$ y $|B_{n+1\ 2^{n+1}}| = \beta_3$. Trisectemos $B_{n\ r(n)}$ según $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ si n es impar y según $(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$ si n es par.

Sin pérdida de generalidad supongamos n impar, en cuyo caso $r(n+1) = 2r(n)$, $|B_{n+1\ r(n+1)-1}| = \alpha_1$, $|A_{n+1\ r(n)}| = \alpha_2$ y $|\beta_{n+1\ r(n+1)}| = \alpha_3$.

De las desigualdades del Lema 4 concluimos:

$$|B_{n+1\ 2^{n+1}}| < |B_{n+1\ r(n+1)-1}| < |B_{n+1\ 2^{n+1}-1}| < |B_{n+1\ r(n+1)}|, \tag{12}$$

$$|A_{n+1\ 2^n}| < |A_{n+1\ r(n)}|, \tag{13}$$

$$|A_{n+1\ r(n)}| < |A_{n+1\ 2^n}| + B_{n+1\ 2^{n+1}}| \tag{14}$$

y

$$|A_{n\ r(n-1)}| - |A_{n\ 2^{n-1}}| < |B_{n+1\ 2^{n+1}-1}| + |A_{n+1\ 2^n}| \tag{15}$$

Observemos que (14) y (15) equivalen respectivamente a (10) y (11) para $n+1$.

Los restantes $B_{n\ i}$, $i \neq r(n), 2^n$ serán trisectados "proporcionalmente" a las trisecciones de $B_{n\ r(n)}$ y $B_{n\ 2^n}$, más precisamente elijamos $\gamma_1(i), \gamma_2(i)$ y $\gamma_3(i)$ tal que su suma es $|B_{n\ i}|$ y como en la figura 19.

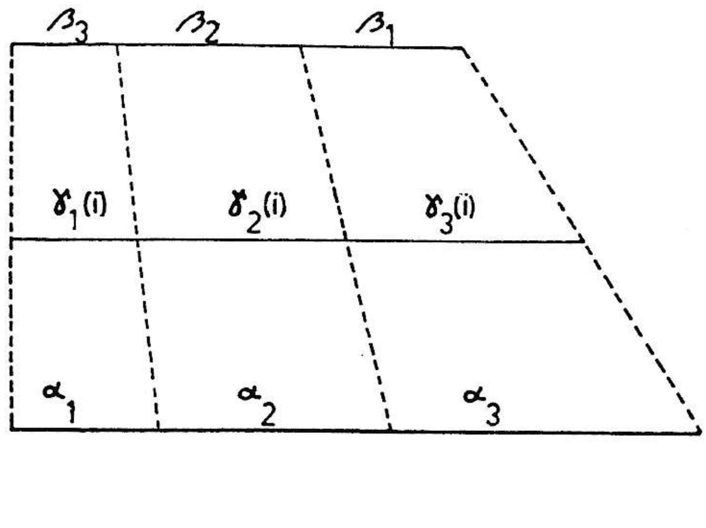

Fig.19

Si $p(i) = \frac{|B_{n\,i}|-\beta}{\alpha-|B_{n\,i}|}$ entonces $\gamma_1(i) = \frac{p(i)\alpha_1+\beta_3}{p(i)+1}$, $\gamma_2(i) = \frac{p(i)\alpha_2+\beta_2}{p(i)+1}$, $\gamma_3(i) = \frac{p(i)\alpha_3+\beta_1}{p(i)+1}$

y

$$\beta_s < \gamma_t(i) < \alpha_t, \quad s+t=4. \tag{16}$$

Como $|B_{n\,i}| < |B_{n\,\sigma_n(i)}|$, se deduce que $p(i) < p(\sigma_n(i))$, de donde no es difícil probar las desigualdades

$$\gamma_k(i) < \gamma_k(\sigma_n(i)) \quad \forall k = 1,2,3. \tag{17}$$

Trisectemos $B_{n\,i}$ según $(\gamma_1(i), \gamma_2(i), \gamma_3(i))$ si i es impar y según $(\gamma_3(i), \gamma_2(i), \gamma_1(i))$ si i es par.

Supongamos $i = 2j-1$ para algún $j = 1, \cdots, 2^{n-1}$; es decir, i es impar, en este caso

$$|B_{n+1\,2i-1}| = \gamma_1(i), \ |A_{n+1\,i}| = \gamma_2(i) \ \text{y} \ |B_{n+1\,2i}| = \gamma_3(i).$$

Hay dos posibilidades: $j < r(n-1)$ ó $j > r(n-1)$.

Si $j < r(n-1)$ entonces, por (2), $\sigma_n(i)$ es impar e $i < r(n) = 2r(n-1)-1$ y por (17)

$$|B_{n+1\,2i-1}| < |B_{n+1\,2\sigma_n(i)-1}|, \ |B_{n+1\,2i}| < |B_{n+1\,2\sigma_n(i)}|$$

y

$$|A_{n+1\,i}| < |A_{n+1\,\sigma_n(i)}|. \tag{18}$$

De $\sigma_{n+1}(2i-1) = 2\sigma_n(i)-1$ y $\sigma_{n+1}(2i) = 2\sigma_n(i)$, pues $i < r(n)$, concluimos que

$$|B_{n+1\,2i-1}| < |B_{n+1\,\sigma_{n+1}(2i-1)}| \ \text{y} \ |B_{n+1\,2i}| < |B_{n+1\,\sigma_{n+1}\,(2i)}|. \tag{19}$$

Similarmente si $j > r(n-1)$ entonces $\sigma_n(i)$ es par e $i > r(n) = 2r(n-1)-1$; luego

$$|B_{n+1\ 2i-1}| < |B_{n+1\ 2\sigma_n(i)}|, \qquad |B_{n+1\ 2i}| < |B_{n+1\ 2\sigma_n(i)-1}|$$

y

$$|A_{n+1\ i}| < |A_{n+1\ \sigma_n(i)}|. \tag{20}$$

De $\sigma_{n+1}(2i-1) = 2\sigma_n(i)$ y $\sigma_{n+1}(2i) = 2\sigma_n(i)-1$, pues $i > r(n)$, también concluimos (19).

Notemos que (12), (16) y (19) demuestran (8) para $n+1$, así como (13), (16), (18) y (20) demuestran (9) para $n+1$. Se procede similarmente si i es par.

Así hemos definido $A_{n+1} = \cup_{i=1}^{2^n} A_{n+1\ i}$ y $B_{n+1} = \cup_{i=1}^{2^{n+1}} B_{n+1\ i}$. Resta mostrar como definir adecuadamente la función f sobre A_n.

Primero destaquemos que existe elección de $A_n = \cup_{i=1}^{2^{n-1}} A_{n\ i}$ y $B_n = \cup_{i=1}^{2^n} B_{n\ i}$ tal que se cumple (8), (9), (10) y (11) $\forall n \in \mathbb{N}$ y además $|B_{n\ r(n)}| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

De hecho: elijamos B_n tal que

$$|B_{n\ 2^n}| = x_n \text{ y } |B_{n\ \sigma^j(2^n)}| = \lambda_n^j x_n \quad \forall j = 1, \cdots, 2^n - 1.$$

Las desigualdades (8), (9), (10) y (11) imponen las condiciones

$$0 < x_n < 1, \qquad \lambda_n > 1$$

y

$$0 < x_{n-1}(\lambda_{n-1}^{2^{n-1}-1} - 1) - x_n(\lambda_n^{2^{n-1}-1} - 1)(1 + \lambda_n^{2^{n-1}}) < x_n - x_{n+1}$$

para todo $n \in \mathbf{N}$.

Si además pedimos que $|B_{n\ r(n)}| \to 0$ cuando $n \to \infty$ entonces debemos tener

$$\lambda_n^{2^n-1} x_n \to 0 \text{ si } n \to \infty.$$

Sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con tales exigencias existen, por ejemplo $x_n = (\frac{2}{5})^n$ y $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > 1$ tal que $\lambda_n^{2^n} < \frac{8}{5}$.

Finalmente $f|A_n$ se define tal que:

$$f|A_{n\ i} \text{ es monótona expansiva y de clase } C^0 \ \forall i = 1, \cdots, 2^{n-1};$$

$$f|A_{n\ i} \text{ es creciente si } i < r(n-1) \text{ y decreciente si } i > r(n-1);$$

$$f|A_{n\ r(n-1)} \text{ es creciente si } n \text{ es par y decreciente si } n \text{ es impar;}$$

$$f(A_{n\ i}) = A_{n\ \sigma_n(i)} \ \text{ si } i \neq r(n-1);$$

y

$$f(A_{n\ r(n-1)}) = A_{n\ 2^{n-1}} \cup B_{n+1\ 2^{n+1}-1} \cup A_{n+1\ 2^n}.$$

Si B_n se elijió tal que $|B_{n\ r(n)}| \to 0$ cuando $n \to \infty$ entonces de (8) y $\sigma_n^{2^n-1}(2^n) = r(n)$ se deduce que $\sum_{i=1}^{2^n} |B_{n\ i}| \to 0$ si $n \to \infty$. Por lo que si $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ entonces $\bar{A} = I$. Así también $\overline{f(A)} = \overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} f(A_n)} \supseteq \overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = I$, es decir, $\overline{f(A)} = I$.

La función f se definió sobre A, denso en I, de modo que pueda ser extendida continuamente a I y ésta resulte continua monótona a pedazos expansiva y tal que $R = \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ es una cascada de f - ciclos. Ver figura 20.

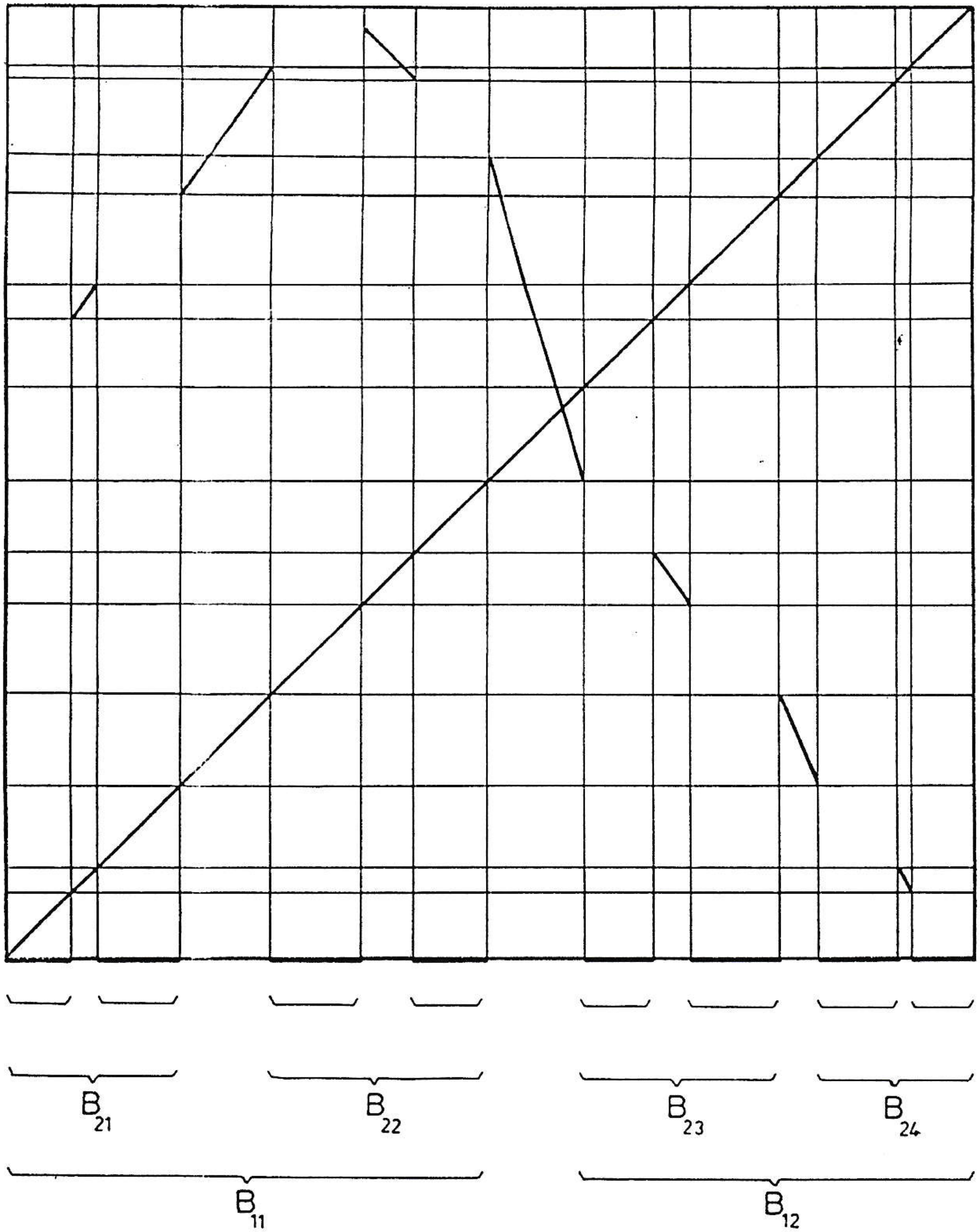

Fig. 20

BIBLIOGRAFIA

[1] Fedorenko, Sarkovskii and Smital. (1990): Characterization of weakly chaotic maps of the interval. Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 110, Number 1, September, 141 - 148.

[2] Li and Yorke. (1975): Period three implies chaos. American Math. Monthly, 82, 985 - 992.

[3] May. (1976): Simple mathematical models with very complicated dynamics. Nature, 261, 459 - 467.

[4] Milnor and Thurston. (1977): On iterated maps of the interval. I. The kneading matrix, and II. Periodic points. Preprint, Princeton University.

[5] Misiurewicz. (1982): Attracting Cantor Set of positive measure for a C^∞ map of the interval. Ergod, Th. and Dynam. Sys., 2, 405 - 415.

[6] Parry. (1966): Simbolic dynamics and transformation of the unit interval. Trans. of the A.M.S., 122, 368 - 378.

[7] Preston. (1983): Iterates of maps on an interval. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 999. Springer - Verlag, New York, Berlin.

[8] Preston. (1988): Iterates on piecewise monotone mappings on an interval. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 1347, Springer - Verlag, New York, Berlin.