# Valores especiales de una función zeta generalizada

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias Matemáticas
Facultad de Ciencias

por

**Henry Fernando Hughes Villarroel**

Mayo, 2015

Director de Tesis: **Dr. Eduardo Friedman**

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

**Henry Hughes**

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 24 de Abril de 2015.



**Director de Tesis**

Dr. Eduardo Friedman

**Comisión de Evaluación de la Tesis**

Dr. Luis Arenas

Dr. Yves Martin

# Agradecimientos

Durante todo mi camino de aprendizaje matemático, ha habido gente que ha estado o compartido conmigo de alguna u otra forma, es por eso que deseo compartir mis agradecimientos en esta página.

A todos los profesores que me han formado, pues ellos me han ayudado a fortalecer mi criterio y han logrado transmitirme su amor por las matemáticas. En especial agradezco a mi tutor, el profesor Eduardo Friedman, por su entrega y paciencia por todo este tiempo.

A las personas que me han acompañado en toda mi época universitaria, ya sea compañeros, amigos, funcionarios, etc. pues hacían más amena la estadía en la universidad, además por la buena voluntad que podían tener para ofrecer una mano.

A mis padres, hermanos, hermana y en general toda mi familia, que desde siempre me han apoyado de todas las formas posibles, y además han confiado en mi.

A Javiera, por todo el apoyo de cada día, por las veces que me tuvo que soportar en momentos complicados e intentó subirme el ánimo, y gracias por su gran amor.

# Índice general

# RESUMEN

Para $f, g \in \mathbb{C}[x]$ polinomios en $p$ variables, definimos la serie zeta asociada a $f$ y a $g$ como

$$\zeta(s; f, g) := \sum_{k \in \mathbb{N}_0^p} g(k) f(k)^{-s} \qquad \Big(\mathrm{Re}(s) \gg 0\Big),$$

donde $f$ cumple ciertas hipótesis de no nulidad y crecimiento en $(0, \infty)^p$, y $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Uno de los objetivos de este trabajo es probar para $N \geq 0$ entero la fórmula de valores especiales para productos

$$\deg(f_1 \cdot f_2)\zeta(-N; f_1 \cdot f_2, g) = \deg(f_1)\zeta(-N; f_1, g f_2^N) + \deg(f_2)\zeta(-N; f_2, g f_1^N).$$

Para probar este resultado primero lo mostraremos para un análogo integral de la serie zeta que denotaremos por $Z(s; f_1 f_2, g)$. Luego, mediante la *Fórmula de Raabe*, lo obtendremos para las series.

El segundo objetivo es mostrar una relación entre los ceros de un polinomio $f$ en una variable y $Z(-N; f, g)$, donde $N$ es un entero no negativo.

El tercer objetivo es demostrar que ciertas integrales de series zeta son nulas.



# ABSTRACT

For $f, g \in \mathbb{C}[x]$ polynomials in $p$ variables, we define the zeta series asociated to $f$ and $g$ as

$$\zeta(s; f, g) := \sum_{k \in \mathbb{N}_0^p} g(k) f(k)^{-s}, \qquad \Big(\mathrm{Re}(s) \gg 0\Big),$$

where $f$ satisfies certain non-vanishing and growth assumptions on $(0, \infty)^p$, and $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Our first objective is to prove for any integer $N \geq 0$ the special value formula for products

$$\deg(f_1 \cdot f_2)\zeta(-N; f_1 \cdot f_2, g) = \deg(f_1)\zeta(-N; f_1, g f_2^N) + \deg(f_2)\zeta(-N; f_2, g f_1^N).$$

To prove this, first we will prove a similar formula for an integral analogue $Z(s; f_1 f_2, g)$ of $\zeta(s; f_1 f_2, g)$. Then, using *Raabe's Formula*, we will deduce the result for $\zeta(s; f_1 f_2, g)$.

Our second objective will be to show a relation between the zeros of a polynomial $f$ in one variable and $Z(-N; f, g)$, where $N$ is a nonnegative integer.

Our third objective is to prove that certain integrals of zeta series vanish.

# Introducción

A mediado de los años 70, motivado por ciertos problemas de teoría de números, T. Shintani [8] estudió una función zeta multidimensional $\zeta(s, \mathscr{M}, x)$ con $\mathscr{M}$ una matriz de tamaño $p \times m$

$$\mathscr{M} := \{a_{ij}\}, \ i = 1, \cdots, p, \ j = 1, \cdots, m,$$

con coeficientes positivos, $x \in \mathbb{R}_+^p := (0, \infty)^p$, y

$$\zeta(s, \mathscr{M}, x) := \sum_{k_1, \cdots, k_p = 0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} \left( \sum_{i=1}^{p} (x_i + k_i) a_{ij} \right)^{-s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > p/m. \tag{0.1}$$

Para $m = 1$ esta función zeta es la función zeta múltiple de Barnes [1]. T. Shintani obtuvo fórmulas explícitas para el valor de la continuación analítica de la función (0.1) en los enteros no negativos $s = 0, -1, -2, \cdots$.

En 2004 E. Friedman y S. Ruijsenaars [5] mostraron que el trabajo de Shintani sobre funciones zeta múltiples podía simplificarse y extenderse por medio de ecuaciones en diferencia. Utilizaron una función zeta ligeramente más general que (0.1),

$$\zeta_{p,m}(s, w \mid a_1, \cdots, a_p) := \sum_{k_1, \cdots, k_p = 0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} \left( w_j + \sum_{i=1}^{p} k_i a_{ij} \right)^{-s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > p/m. \tag{0.2}$$

Aquí los $a_i$ y $w$ son elementos de $\mathbb{C}^m$ cuyas coordenadas son $a_{ij}$ y $w_j$, respectivamente, y sus partes reales se asumen positivas. Esta función es una generalización de (0.1) ya que

$$\zeta(s, \mathscr{M}, x) = \zeta_{p,m}(s, W(x) \mid a_1, \cdots, a_p), \qquad W(x) = W(x \mid a_1, \cdots, a_p) := \sum_{i=1}^{p} x_i a_i. \tag{0.3}$$

La ventaja de (0.2) es que satisface ecuaciones en diferencia del tipo

$$\zeta_{p,m}(s, w + a_p \mid a_1, \cdots, a_p) - \zeta_{p,m}(s, w \mid a_1, \cdots, a_p) = -\zeta_{p-1,m}(s, w \mid a_1, \cdots, a_{p-1}), \tag{0.4}$$ verificar!

con $\zeta_{0,m}(s, w) := \prod_{j=1}^{n} w_j^{-s}$.

El principal objetivo de esta tesis es estudiar funciones zeta asociadas a polinomios más generales que las de (0.2). Obtenemos tres resultados, inicialmente relacionados con la integral zeta

$$Z(s; f, g) := Z(s; f, g) := \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} g(x) f(x)^{-s} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_p \qquad \Big(\mathrm{Re}(s) \gg 0\Big),$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios en $p$ variables que satisfacen ciertas hipótesis (ver

Hipótesis de Mahler §1.1). Luego aplicamos estos resultados a la serie zeta

$$\zeta(s; f, g) := \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_p=0}^{\infty} g(k_1, \cdots, k_p) f(k_1, \cdots, k_p)^{-s} \qquad \Big(\mathrm{Re}(s) \gg 0\Big).$$

En la práctica resulta más fácil trabajar con las integrales zetas que con la series zetas. Sin embargo, gracias a la Fórmula de Raabe (ver Proposición 1.13) obtendremos los resultados esperados para las series $\zeta(s; f, g)$ a partir de los obtenidos para las integrales $Z(s; f, g)$. Para $f_1, f_2, g \in \mathbb{C}[x]$ polinomios en $p$ variables, con $f_1$ y $f_2$ bajo ciertas hipótesis, obtenemos

$$\deg(f_1 f_2) \cdot Z(-N; f_1 f_2, g) = \deg(f_1) \cdot Z(-N; f_1, g f_2^N) + \deg(f_2) \cdot Z(-N; f_2, g f_1^N), \quad (0.5)$$

donde $N \geq 0$ es un entero. Por medio de la Fórmula de Raabe deducimos

$$\deg(f_1 f_2) \cdot \zeta(-N; f_1 f_2, g) = \deg(f_1) \cdot \zeta(-N; f_1, g f_2^N) + \deg(f_2) \cdot \zeta(-N; f_2, g f_1^N). \quad (0.6)$$

Cabe mencionar que E. Friedman y A. Pereira [4] concluyen lo mismo para el caso $N = 0$. Los resultados (0.5) y (0.6) se deducen fácilmente de [4], pero nos parece importante explicitarlos. En particular, explican por qué el caso $N = 0$ es bastante más sencillo que $N > 0$.

En el Capítulo 2 obtenemos la relación

$$Z(-N; f, g) = \frac{1}{\deg(f)} \sum_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ f(z)=0}} F_N(z),$$

entre los ceros de un polinomio $f$ de una variable y $Z(-N; f, g)$. Aquí $N \geq 0$ es un entero, $F_N$ es el polinomio tal que su derivada $F_N' = g f^N$ y $F_N(0) = 0$, y la suma (finita) es sobre los ceros de $f$. Sería interesante extender esta fórmula a más variables, pero no hemos encontrado una fórmula elegante en este caso.

En el Capítulo 3, obtenemos

$$\lim_{F \to f_{\mathrm{top}}} \int_{[0,1]^p} \zeta(s; F_t, g_t) \mathrm{d}t = 0 \qquad \Big(s \in \mathbb{R},\ s \leq 0\Big), \quad (0.7)$$

donde $F_t(x) := F(t + x)$, $f_{\mathrm{top}}$ es la parte homogénea de grado máximo de $f$ y $F = \{F_j\}$ es una sucesión de polinomios que tienden a $f_{\mathrm{top}}$ y satisfacen la Hipótesis de Mahler. El resultado de la ecuación (0.7) es análogo al que obtienen E.Friedman y S.Ruijsenaars en [4]

$$\int_{[0,1]^p} \zeta_{p,m}(s, W(x)) \mathrm{d}x = 0 \qquad \Big(\mathrm{Re}(s) < p/m\Big). \quad (0.8)$$

El resultado (0.8) es la principal herramienta que utilizan para demostrar que las ecuaciones en diferencia del tipo (0.4) determinan los valores especiales $\zeta_{p,m}(s, W(x))$ en $s = 0, -1, -2, \cdots$. Es de suponer que nuestro resultado (0.7) podría ser utilizado de la misma manera para estudiar los valores especiales de $\zeta(s; f, g)$.

# Capítulo 1

# Producto en las series e integrales zeta

## 1.1. Series e integrales zeta

Sean $f$ y $g$ polinomios en $p$ variables con coeficientes complejos. Definimos la serie de Dirichlet, para $f$ conveniente,

$$\zeta(s; f, g) := \sum_{k_1, \cdots, k_p = 0}^{\infty} g(k_1, \cdots, k_p) f(k_1, \cdots, k_p)^{-s} \qquad \Big(\mathrm{Re}(s) \gg 0\Big). \tag{1.1}$$

Si tomamos $g(x) = 1$, $f(x) = \prod_{j=1}^{m} \big(w_j + \sum_{i=1}^{p} x_i a_{ij}\big)$, obtenemos la función $\zeta_{p,m}$ de (0.2). Es decir,

$$\zeta\Big(s;\ \prod_{j=1}^{m} \big(w_j + \sum_{i=1}^{p} x_i a_{ij}\big),\ 1\Big) = \zeta_{p,m}(s, w \mid a_1, \cdots, a_p). \tag{1.2}$$

Sea la integral zeta

$$Z(s; f, g) := \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} g(x_1, \cdots, x_p) f(x_1, \cdots, x_p)^{-s} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_p \qquad \Big(\mathrm{Re}(s) \gg 0\Big). \tag{1.3}$$

**Definición 1.1** *Para $P(x) = P(x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_p]$ en $p$ variables, su* ***parte homogénea de grado*** *$j$, con $j \leq \deg(P)$, es la suma de monomios de $P(x)$ en los cuales la suma de los exponentes de $x_1, \cdots, x_p$ es igual a $j$. La denotaremos como $P_{(j)}(x)$. Escribiremos la* ***parte homogénea de grado máximo****, es decir, para $j = \deg(P)$, como $P_{\mathrm{top}}(x)$.*

**Definición 1.2** *Para $h \in \mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_p]$ y $a = (a_1, \cdots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, definimos $h_a(x) := h(x + a)$.*

Para la convergencia de la serie en (1.1) y de la integral en (1.3) asumiremos que $f$ cumple con la siguiente hipótesis dada por Mahler [6, pág. 385].

**Hipótesis 1.3 (Mahler)** *El polinomio $f(x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_p]$ no es constante y no se anula en ningún punto del octante cerrado $\mathbb{R}_+^p := [0, \infty)^p$. Además su parte homogénea de grado máximo $f_{\mathrm{top}}(x)$ no se anula en ningún punto de $\mathbb{R}_+^p \setminus \{0\}$.*

Notamos que en la Hipótesis de Mahler la suposición de que $f$ no se anule en $\mathbb{R}_+^p$ no es fundamental, pues si es que sucediese podemos reemplazar $f$ por $f_a$ para algún $a \in \mathbb{R}_+^p$ conveniente, teniendo en cuenta además que $(f_a)_{\text{top}}(x) = f_{\text{top}}(x)$. La necesidad esencial es que $f_{\text{top}}$ no se anule.

En adelante en esta tesis asumiremos la hipótesis de Mahler para $f$. Esta hipótesis nos asegura la existencia de una rama analítica del logaritmo $\log f(x)$ para $x \in \mathbb{R}_+^p$ (única salvo sumar un múltiplo entero de $2\pi i$). Si $f_1, \cdots, f_n$ satisfacen esta hipótesis, existe una rama analítica del logaritmo $\log f_j(x)$ para cada $j = 1, \cdots, n$. Definimos la rama del logaritmo para el producto mediante

$$\log \prod_{j=1}^{n} f_j(x) := \sum_{j=1}^{n} \log f_j(x),$$

lo que asegura que

$$\Big(\prod_{j=1}^{n} f_j(x)\Big)^{-s} = \prod_{j=1}^{n} f_j(x)^{-s}.$$

**Definición 1.4** *Sea*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{m,p} := \{f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_p] \mid \ \deg(f) = m, \ f \textit{ satisface la Hipótesis de Mahler} \}.$$

**Lema 1.5** **([4, pág. 701])** *$\mathcal{M}_{m,p}$ de la Definición 1.4 es un conjunto abierto no vacío en el espacio vectorial finito-dimensional de coeficientes de todos los polinomios en $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_p]$ de grado $\leq m$.*

**Corolario 1.6** **([2, pág. 6])** *Si $f \in \mathcal{M}_{m,p}$, entonces existe una vecindad $U$ de $0$, tal que $f_{(a+t)} \in \mathcal{M}_{m,p}$ para todo $a \in U$, $t \in \mathbb{R}_+^p$. Más aún, se puede elegir una rama continua de $\log f_{(a+t)}(x)$ para $t, x \in \mathbb{R}_+^p$ y $a \in U$.*

## 1.2. Continuación meromorfa de la integral zeta

Para expresar la continuación meromorfa de la integral $Z(s; f, g)$ de (1.3), es conveniente hacer un cambio de coordenadas desde las coordenadas cartesianas $x = (x_1, \cdots, x_p)$ a las coordenadas cúbicas $(\rho, \sigma)$,

$$\rho = \rho(x) := \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_p|\}, \qquad \sigma = \sigma(x) := \frac{x}{\rho(x)} \quad (x \neq 0). \tag{1.4}$$

Denotamos por $\partial C_+^p$ al subconjunto del hipercubo unitario $C^p = [0,1]^p$, donde al menos una coordenada es 1,

$$\partial C_+^p := \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^p \mid \rho(x) = 1\}. \tag{1.5}$$

Para $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomio con $p$ variables que satisface la hipótesis de Mahler, con $m = \deg(f)$ y $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^p$, $x \neq 0$, escribimos

$$r(x) = r_f(x) := \frac{f(x) - f_{\text{top}}(x)}{f_{\text{top}}(x)}, \tag{1.6}$$

por lo que

$$f(x) = f_{\text{top}}(x)(1 + r(x)) = \rho^m f_{\text{top}}(\sigma)(1 + r(\rho\sigma)) \qquad (x \neq 0). \tag{1.7}$$

Notamos que para $\rho > 0$ y $\sigma \in \partial C_+^p$,

$$r(\rho\sigma) = r_f(\rho\sigma) = \frac{f_{(m-1)}(\sigma)}{\rho f_{\text{top}}(\sigma)} + \frac{f_{(m-2)}(\sigma)}{\rho^2 f_{\text{top}}(\sigma)} + \cdots + \frac{f_{(1)}(\sigma)}{\rho^{m-1} f_{\text{top}}(\sigma)} + \frac{f_{(0)}}{\rho^m f_{\text{top}}(\sigma)}. \tag{1.8}$$

Siguiendo a Mahler [6] y considerando (1.7), escogemos una rama del logaritmo de $\log f$ de modo que

$$\log f(x) = \log f(\rho\sigma) = m \log \rho + \log f_{\text{top}}(\sigma) + \log(1 + r(\rho\sigma)), \tag{1.9}$$

donde $\log \rho$ es un número real, $\log f_{\text{top}}(\sigma)$ es cualquier elección continua de $\log f_{\text{top}}$ sobre $\partial C_+^p$ y $\log(1+r)$ es la única rama continua que para $\rho$ lo suficientemente grande está dado por el valor principal

$$\log(1+r) = -\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(-r)^\lambda}{\lambda} \quad (r = r(\rho\sigma),\ \rho \gg 0).$$

En (1.9) se utilizó la Hipótesis de Mahler para asegurar que $1 + r \neq 0$ y $f_{\text{top}}(\sigma) \neq 0$.

Ahora citamos el resultado principal de Mahler [6] acerca de la continuación meromorfa de $\zeta(s; f, g)$ y de $Z(s; f, g)$.

**Teorema 1.7 (Mahler [6])** *Sean $f, g$ polinomios en $p$ variables con coeficientes en $\mathbb{C}$ tales que $f$ satisface la Hipótesis de Mahler. Entonces la integral $Z(s; f, g)$ de (1.3) y la serie $\zeta(s; f, g)$ de (1.1) convergen absolutamente en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > (\deg(g) + p)/\deg(f)$ y se extienden a funciones meromorfas en $\mathbb{C}$ con a lo más polos simples en los números racionales contenidos en*

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(f, g) := \left\{ s \in \mathbb{C} \;\middle|\; s = \frac{p + \deg(g) - \ell}{\deg(f)}, \qquad (\ell = 0, 1, 2, \cdots),\ s \neq 0, -1, -2, \cdots \right\}. \tag{1.10}$$

*Además las series $\zeta(s; f, g)$ y las integrales $Z(s; f, g)$ son regulares en los enteros no positivos $s = 0, -1, -2, \cdots$, y fuera del conjunto de polos $\mathfrak{P}$ son funciones analíticas en $s$ y localmente analíticas en los coeficientes de $f$ y de $g$ cuando la rama de $\log f(x)$ se elige continua en $x \in \mathbb{R}_+^p$ y en los coeficientes de $f$.*

Notamos que $\mathfrak{P}$ de (1.10) no depende de los coeficientes de $f$ ni de $g$, solamente de sus grados.

A continuación exponemos la continuación analítica de $Z(s; f, g)$ en enteros no positivos $s = -N$ (ver [4] y[6]).

**Teorema 1.8** [4, **pág. 710**] *Sean $f, g \in \mathbb{C}[x]$ polinomios en $p$ variables tal que $f$ satisface la Hipótesis de Mahler, y sea $N \geq 0$ un entero. Entonces el valor de la continuación analítica de la integral zeta de (1.3) en $s = -N$ es*

$$Z(-N; f, g) = \frac{1}{m} \sum_{\lambda = N + \lceil p/m \rceil}^{q+p+Nm} \frac{(-1)^{\lambda - N}}{\lambda - N} \binom{\lambda}{N}^{-1} \int_{\sigma \in \partial C_+^p} C_{\lambda,N}(\sigma) f_{\text{top}}(\sigma)^N \, \mathrm{d}\sigma, \tag{1.11}$$

*donde $m = \deg(f)$, $q = \deg(g)$, $\lceil p/m \rceil$ es el menor entero $\geq p/m$, $C_{\lambda,N}(\sigma)$ es el coeficiente de $\rho^{-p-mN}$ en la expansión de Laurent de la función racional $g(\rho\sigma) r_f(\rho\sigma)^\lambda$, con $r_f(\rho\sigma)$ como en (1.8), y $\binom{\lambda}{N}$ es el coeficiente binomial $\frac{\lambda!}{N!(\lambda-N)!}$.*

De esta continuación analítica Castillo [2] obtuvo

**Proposición 1.9** **[2, pág 24]** *Sean $f, g \in \mathbb{C}[x]$ polinomios en $p$ variables tales que $f$ satisface la Hipótesis de Mahler, y sea $N \geq 0$ un entero. Entonces*

$$Z(-N; f, g) = -\frac{1}{m}\mathrm{Coeff}_{\rho^{-p}}\left(\int_{\sigma\in\partial C_+^p} g(\rho\sigma)(f(\rho\sigma))^N \log\left(\frac{f}{f_{\mathrm{top}}}(\rho\sigma)\right) \mathrm{d}\sigma\right),$$

*donde $m = \deg(f)$ y $\log$ es la rama principal del logaritmo para $\rho \gg 0$.*

En el Apéndice damos una prueba distinta de la de Castillo.

## 1.3. Productos

En esta sección mostraremos cómo se relaciona una integral $Z(-N; f, g)$ definida por (1.3) cuando $f = \prod f_j$ es un producto de polinomios, con las integrales $Z(-N; f_j, g)$ correspondientes a cada $f_j$. De forma análoga veremos lo mismo para las series. Para las integrales zetas usaremos los siguientes lemas.

**Lema 1.10** *Sean $f, g \in \mathbb{C}[x]$ polinomios en $p$ variables tales que $f$ satisface la Hipótesis de Mahler, y sea $N$ un entero no negativo. Entonces*

$$Z(-N; f, g) = Z(0; f, gf^N), \tag{1.12}$$

*con $f^N(x) := f(x)^N$.*

**Demostración.** Tenemos por la Proposición 1.9, aplicada a los polinomios $f$ y $g$, con $m = \deg(f)$

$$\begin{aligned} Z(-N; f, g) &= -\frac{1}{m}\mathrm{Coeff}_{\rho^{-p}}\left(\int_{\sigma\in\partial C_+^p} g(\rho\sigma) f(\rho\sigma)^N \log\Big(\frac{f}{f_{\mathrm{top}}}(\rho\sigma)\Big)\mathrm{d}\sigma\right) \\ &= -\frac{1}{m}\mathrm{Coeff}_{\rho^{-p}}\left(\int_{\sigma\in\partial C_+^p} (gf^N)(\rho\sigma) \log\Big(\frac{f}{f_{\mathrm{top}}}(\rho\sigma)\Big)\mathrm{d}\sigma\right). \end{aligned}$$

Por otro lado, debido a la Proposición 1.9 aplicada a los polinomios $f$ y $f^N g$, tenemos que la parte derecha de la última ecuación es igual a $Z(0; f, gf^N)$.

□

**Lema 1.11** **[4, pág 712]** *Sean $f_1, f_2, \cdots, f_n \in \mathbb{C}[x]$ polinomios en $p$ variables que satisfacen la Hipótesis de Mahler, y sea $g \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio en $p$ variables. Entonces*

$$\deg(f) \cdot Z(0; f, g) = \sum_{j=1}^{n} \deg(f_j) \cdot Z(0; f_j, g) \tag{1.13}$$

*con $f := \prod_{j=1}^n f_j$.*

Ahora mostraremos la relación que nos interesa.

**Teorema 1.12** *Sean $f_1, f_2, \cdots, f_n \in \mathbb{C}[x]$ polinomios en $p$ variables que satisfacen la Hipótesis de Mahler, sea $g \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio en $p$ variables y sea $N$ un entero no negativo. Entonces*

$$\deg(f) \cdot Z(-N; f, g) = \sum_{j=1}^{n} \deg(f_j) \cdot Z(0; f_j, gf^N) = \sum_{j=1}^{n} \deg(f_j) \cdot Z(-N; f_j, g\hat{f}_j^N) \tag{1.14}$$

*con* $f := \prod_{j=1}^{n} f_j$ *y* $\hat{f}_j := \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} f_i$.

**Demostración.** Usando el Lema 1.10, tenemos

$$\deg(f)\cdot Z(-N;f,g) = \deg(f)\cdot Z(0;f,gf^N).$$

Del Lema 1.11 para los polinomios $f = \prod_{j=1}^{n} f_j$ y $gf^N$ obtenemos

$$\deg(f)\cdot Z(-N;f,g) = \sum_{j=1}^{n} \deg(f_j)\cdot Z(0;f_j,gf^N).$$

Para concluir, del Lema 1.10 nuevamente obtenemos

$$Z(0;f_j,gf^N) = Z(0;f_j,gf_j^N\hat{f}_j^N) = Z(-N;f_j,g\hat{f}_j^N).$$

□

A continuación demostraremos el resultado análogo para la serie zeta de la ecuación (1.1). Para esto necesitaremos enunciar la Fórmula de Raabe [4], que nos ayudará a obtener resultados para las series zetas a partir de las integrales zetas.

**Proposición 1.13** [4, pág. 704] *Supongamos que $f$ y $g$ son polinomios en $p$ variables, y asumamos que $f$ satisface la Hipótesis de Mahler. Entonces*

*(1) (Fórmula de Raabe) Para $s$ fuera del conjunto de polos de $Z(s;f,g)$ dado en el Teorema 1.7, tenemos*

$$Z(s;f,g) = \int_{t\in[0,1]^p} \zeta(s;f_t,g_t)\mathrm{d}t, \tag{1.15}$$

*donde* $\mathrm{d}t$ *es la medida de Lebesgue sobre* $\mathbb{R}^p$.

*(2) Para $N$ un entero no negativo, las funciones $a \to \zeta(-N;f_a,g_a)$ y $a \to Z(-N;f_a,g_a)$ son polinomios en $a=(a_1,\cdots,a_p)\in\mathbb{R}^p\geq 0$ de grado a lo más $N\deg(f)+\deg(g)+p$.*

*(3) Si escribimos el polinomio $Z(-N;f_a,g_a)$ como suma de monomios*

$$Z(-N;f_a,g_a) = \sum_L c_L a^L \qquad \left(a^L := \prod_{i=1}^{p} a_i^{L_i},\ c_L = c_L(N;f,g)\in\mathbb{C}\right),$$

*entonces*

$$\zeta(-N;f,g) = \sum_L c_L B_L,$$

*donde $B_L := \prod_{i=1}^{p} B_{L_i}$ es un producto de números de Bernoulli. Más generalmente, para $a\in\mathbb{R}^p_{\geq 0}$ tenemos*

$$\zeta(-N;f_a,g_a) = \sum_L c_L B_L(a), \tag{1.16}$$

*donde $B_L(a) := \prod_{i=1}^{p} B_{L_i}(a_i)$ es un producto de polinomios de Bernoulli.*

Además necesitaremos dos lemas, al igual como en el caso de las integrales.

**Lema 1.14** *Sean $f, g \in \mathbb{C}[x]$ polinomios en $p$ variables tales que $f$ satisface la Hipótesis de Mahler, y sea $N$ un entero no negativo. Entonces*

$$\zeta(-N; f, g) = \zeta(0; f, gf^N), \tag{1.17}$$

*con $f^N(x) := f(x)^N$.*

**Demostración.** Utilizando el resultado del item (3) de la Proposición 1.13, escribiremos primero $Z(-N; f_a, g_a)$ como suma de monomios,

$$Z(-N; f_a, g_a) = \sum_L c_L a^L \qquad \left(a^L := \prod_{i=1}^{p} a_i^{L_i},\ c_L = c_L(N; f, g) \in \mathbb{C}\right), \tag{1.18}$$

obteniendo

$$\zeta(-N; f, g) = \sum_L c_L B_L. \tag{1.19}$$

Por otro lado, para $a \in \mathbb{R}^p_{\geq 0}$, $f_a$ satisface la Hipótesis de Mahler, pues $f$ lo hace, así por el Lema 1.10

$$Z(-N; f_a, g_a) = Z(0; f_a, (gf^N)_a). \tag{1.20}$$

Por lo tanto, de (1.18) y (1.20) tenemos

$$Z(0; f_a, (gf^N)_a) = \sum_L c_L a^L.$$

Entonces, por el resultado del item (3) de la Proposición 1.13 obtenemos

$$\zeta(0; f, gf^N) = \sum_L c_L B_L. \tag{1.21}$$

Finalmente, podemos igualar las ecuaciones (1.19) y (1.21)

$$\zeta(-N; f, g) = \zeta(0; f, gf^N).$$

□

**Lema 1.15** **[4, pág. 701]** *Sean $f_1, f_2, \cdots, f_n \in \mathbb{C}[x]$ polinomios en $p$ variables que satisfacen la Hipótesis de Mahler, y sea $g \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio en $p$ variables. Entonces*

$$\deg(f) \cdot \zeta\,(0; f, g) = \sum_{j=1}^{n} \deg(f_j) \cdot \zeta(0; f_j, g), \tag{1.22}$$

*con $f = \prod_{j=1}^{n} f_j$.*

Ahora mostraremos la relación mencionada en la Introducción.

**Teorema 1.16** *Sean $f_1, f_2, \cdots, f_n \in \mathbb{C}[x]$ polinomios en $p$ variables que satisfacen la Hipótesis de Mahler, sea $g \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio en $p$ variables y sea $N$ un entero no negativo. Entonces*

$$\deg(f) \cdot \zeta(-N; f, g) = \sum_{j=1}^{n} \deg(f_j) \cdot \zeta(0; f_j, gf^N) = \sum_{j=1}^{n} \deg(f_j) \cdot \zeta(-N; f_j, g\hat{f}_j^N) \tag{1.23}$$

*con* $f := \prod_{j=1}^{n} f_j$ *y* $\hat{f}_j := \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} f_i$.

**Demostración.** Usando el Lema 1.14, tenemos

$$\deg(f) \cdot \zeta(-N; f, g) = \deg(f) \cdot \zeta(0; f, gf^N).$$

Utilizamos el Lema 1.15 para los polinomios $f = \prod_{j=1}^{n} f_j$ y $gf^N$

$$\deg(f) \cdot \zeta(-N; f, g) = \sum_{j=1}^{n} \deg(f_j) \cdot \zeta(0; f_j, gf^N).$$

El Lema 1.14 nuevamente nos permite escribir

$$\zeta(0; f_j, gf^N) = \zeta(0; f_j, gf_j^N \hat{f}_j^N) = \zeta(-N; f_j, g\hat{f}_j^N).$$

□

# Capítulo 2

# Relación con los ceros de un polinomio en una variable

En este capítulo tendremos una relación entre los ceros de un polinomio $f$ en una variable y $Z(-N; f, g)$. Antes de enunciarlo damos unos resultados preliminares.

**Lema 2.1** *Sean $f, g \in \mathbb{C}[x]$ polinomios en $p$ variables, tales que $f$ satisface la Hipótesis de Mahler, y sea $s \in \mathbb{C}$ un punto de analiticidad de $Z(s; f, g)$. Entonces $Z(s; f, g)$ es lineal en $g$.*

**Demostración.** Para $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ y $g = ag_1 + bg_2$, donde $a, b \in \mathbb{C}$, $g_1, g_2 \in \mathbb{C}[x]$

$$\begin{aligned} Z(s; f, ag_1 + bg_2) =& \int_{\mathbb{R}_+^p} (ag_1(x) + bg_2(x)) f(x)^{-s} \mathrm{d}x \\ =& a \int_{\mathbb{R}_+^p} g_1(x) f(x)^{-s} \mathrm{d}x + b \int_{\mathbb{R}_+^p} g_2(x) f(x)^{-s} \mathrm{d}x \\ =& aZ(s; f, g_1) + bZ(s; f, g_2). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Luego, por continuación analítica, (2.1) se cumple para todo $s \in \mathbb{C}$ en que $Z(s; f, g)$ sea analítica.

□

**Corolario 2.2** *Sean $f, g \in \mathbb{C}[x]$ polinomios en una variable, tal que $f$ satisface la Hipótesis de Mahler, y sea $N$ un entero no negativo. Entonces*

$$Z(-N; f, g) = \sum_{j=0}^{\deg(g)} \mathrm{Coeff}_{x^j}(g(x)) Z(-N; f, x^j). \tag{2.2}$$

**Lema 2.3** *Sean $f, g \in \mathbb{C}[x]$ polinomios en $p$ variables, asumamos que $f$ satisface la Hipótesis de Mahler, $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ y sea $s \in \mathbb{C}$ un punto de analiticidad de $Z(s; f, g)$. Entonces*

$$Z(s; af, g) = a^{-s} Z(s; f, g),$$

*eligiendo las ramas del logaritmo de modo que $a^{-s} f(x)^{-s} = \big(af(x)\big)^{-s}$.*

**Demostración.** Para $\mathrm{Re}(s) \gg 0$, de (1.3) tenemos claramente $Z(s; af, g) = a^{-s} Z(s; f, g)$. Luego por continuación analítica se obtiene el lema.

□

**Lema 2.4** *Para $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$ y $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos*

$$Z(0; ax+b, x^k) = \frac{1}{k+1}\left(-\frac{b}{a}\right)^{k+1}. \tag{2.3}$$

**Demostración.** Por la Proposición 1.9, tenemos para $\rho > |b||a|$

$$Z(0; ax+b; x^k) = \mathrm{Coeff}_{\rho^{-1}}\Big( -\rho^k \log\Big(\frac{a\rho + b}{a\rho}\Big)\Big)$$
$$Z(0; ax+b; x^k) = \mathrm{Coeff}_{\rho^{-1-k}}\Big( -\log\Big(1 + \frac{b}{a\rho}\Big)\Big).$$

Luego

$$Z(0; ax+b, x^k) = \mathrm{Coeff}_{\rho^{-1-k}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n \rho^{-n}\Big) = \frac{1}{k+1}\left(-\frac{b}{a}\right)^{k+1}.$$

□

A continuación demostramos el resultado que mencionamos al comienzo del capítulo.

**Teorema 2.5** *Sea $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomio en una variable que satisface la Hipótesis de Mahler, sea $g \in \mathbb{C}[x]$, y sea $N$ un entero no negativo. Entonces*

$$Z(-N; f, g) = \frac{1}{\deg(f)} \sum_{\substack{z \\ f(z)=0}} F_N(z), \tag{2.4}$$

*donde $F_N$ es la antiderivada (primitiva) de $gf^N$ que satisface $F_N(0) = 0$.*

**Demostración.** Fijamos $m = \deg(f)$ y escribimos $f(x) = a\prod_{j=1}^{m}(x - z_j)$ con $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $z_j$ los ceros de $f(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} Z(-N; f, g) =& Z(0; f, gf^N) = Z(0; a\prod_j (x - z_j), gf^N) = Z(0; \prod_j (x - z_j), gf^N) \\ =& \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Z(0; x - z_j, gf^N), \end{aligned}$$

donde usamos el Lema 2.3 y el Teorema 1.12. Escribimos ahora

$$Z(-N; f, g) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Z\Big(0; x - z_j, \sum_{i=0}^{mN+\deg(g)} C_{i,N}x^i\Big),$$

donde $C_{i,N} := \mathrm{Coeff}_{x^i}(gf^N(x))$. Luego del Corolario 2.2 obtenemos

$$Z(-N; f, g) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{mN+\deg(g)} C_{i,N} Z\Big(0; x - z_j, x^i\Big) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{mN+\deg(g)} \frac{C_{i,N}}{i+1} z_j^{i+1},$$

donde utilizamos el Lema 2.4. Sea $F_N(y) := \sum_{i=0}^{mN+\deg(g)} \frac{C_{i,N}}{i+1} y^{i+1}$, que cumple claramente $F_N' = gf^N$ y $F_N(0) = 0$. Usando este nuevo polinomio obtenemos

$$Z(-N; f, g) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} F_N(z_j).$$

Por último, como $z_1, \cdots, z_m$ son todas las raíces de $f$, tenemos

$$Z(-N; f, g) = \frac{1}{m} \sum_{\substack{z \\ f(z)=0}} F_N(z).$$

$\square$

**Corolario 2.6** *Sea $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomio en una variable de grado $m > 0$, que satisface la Hipótesis de Mahler. Tenemos*

$$Z(0; f, 1) = -\frac{1}{m} \cdot \frac{a_{m-1}}{a_m},$$

*donde $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.*

**Demostración.** Utilizamos el Teorema 2.5

$$Z(0; f, 1) = \frac{1}{m} \sum_{\substack{z \\ f(z)=0}} F_0(z),$$

donde $F_0' = 1$, $F_0(0) = 0$, es decir, $F_0(x) = x$. Luego

$$Z(0; f, 1) = \frac{1}{m} \sum_{\substack{z \\ f(z)=0}} z.$$

De $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0 = a_m \prod_{\substack{z \\ f(z)=0}} (x - z)$, tenemos

$$Z(0; f, 1) = -\frac{1}{m} \cdot \frac{a_{m-1}}{a_m}.$$

$\square$

Usando la función $r$ que viene de la ecuación (1.8), podemos escribir para $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ polinomio en una variable

$$r = r(\rho) = \frac{1}{a_m} \sum_{j=1}^{m} a_{m-j}\, \rho^{-j}. \tag{2.5}$$

**Lema 2.7** *Sea $r$ como en la ecuación (2.5). Si $h \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mathrm{Coeff}_{\rho^{-j}}\left(r(\rho)^h\right)$ no depende de $a_{m-(j+1)}, a_{m-(j+2)}, \cdots, a_0$.*

Notemos que este resultado es trivial si $\deg(f) - 1 \leq j$.
**Demostración.** Sea $l \in \{j+1, j+2, \cdots, m\}$. Debemos verificar que $\text{Coeff}_{\rho^{-j}}\big(r(\rho)^h\big)$ no depende de $a_{m-l}$. Para eso, basta notar en la ecuación (2.5) que $a_{m-l}$ va acompañado de $\rho^{-l}$, por lo que en $r(\rho)^h$ los términos que contengan $a_{m-l}$ no pueden ir acompañados de $\rho^{-j}$. En conclusión, $\text{Coeff}_{\rho^{-j}}\big(r(\rho)^h\big)$ no depende de $a_{m-l}$.

□

Generalizando el Corolario 2.6, podemos obtener el siguiente resultado.

**Lema 2.8** *Sea $f \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio en una variable que satisface la Hipótesis de Mahler, de modo que $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$. Sea $k$ un entero no negativo. Entonces $Z(0; f, x^k)$ depende solamente de $a_m, a_{m-1}, \cdots, a_{m-(k+1)}$*

**Demostración.** Usamos la Proposición 1.9,

$$Z(0; f, x^k) = -\frac{1}{m}\text{Coeff}_{\rho^{-1}}\left(\rho^k \log\left(\frac{f}{f_{\text{top}}}(\rho)\right)\right) = -\frac{1}{m}\text{Coeff}_{\rho^{-(1+k)}}\left(\log\left(\frac{f}{f_{\text{top}}}(\rho)\right)\right).$$

Utilizamos la relación de la ecuación (1.7)



$$Z(0; f, x^k) = -\frac{1}{m}\text{Coeff}_{\rho^{-(1+k)}}\Big(\log(1 + r(\rho))\Big).$$

Luego, para $\rho$ lo suficientemente grande tenemos $|r(\rho)| < 1$, así

$$\begin{aligned} Z(0; f, x^k) =& -\frac{1}{m}\text{Coeff}_{\rho^{-(1+k)}}\left(-\sum_{h=1}^{\infty}\frac{(-r(\rho))^h}{h}\right) \\ =& \frac{1}{m}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{(-1)^h}{h}\text{Coeff}_{\rho^{-(1+k)}}\big(r(\rho)^h\big), \end{aligned}$$

suma de hecho finita. Gracias a la ecuación (2.5), tenemos que $\text{Coeff}_{\rho^{-(1+k)}}(r(\rho)^h) = 0$ si $h \notin \{1, 2 \cdots, k+1\}$. Es decir,

$$Z(0; f, x^k) = \frac{1}{m}\sum_{h=1}^{k+1}\frac{(-1)^h}{h}\text{Coeff}_{\rho^{-(1+k)}}\big(r(\rho)^h\big).$$

Utilizando el Lema 2.7 para $j = k+1$, tenemos que $Z(0; f, x^k)$ depende solamente de $a_m$, $a_{m-1}, \cdots, a_{m-(k+1)}$.

□

Para finalizar el capítulo, extenderemos el Lema 2.8 a $p$ variables. Sin embargo, citaremos primero una observación que aparece en [3, pág 211].
**Observación.** *Para todo $s$ fuera del conjunto de polos posibles, del Teorema 1.7, tenemos*

$$Z(s; f, g) = \int_{\sigma \in \partial C_+^p} Z(s; f_\sigma, g_{\sigma,p})\text{d}\sigma, \tag{2.6}$$

*donde $f_\sigma(\rho) := f(\rho\sigma)$, $g_{\sigma,p}(\rho) := \rho^{p-1}g(\rho\sigma)$ son polinomios en una variable.*

**Teorema 2.9** *Sea $f \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio en $p$ variables que satisface la hipótesis de Mahler. Al escribir $f$ en partes homogéneas*

$$f(\rho\sigma) = \sum_{j=0}^{m} \rho^j f_{(j)}(\sigma), \tag{2.7}$$

*tenemos que $Z(0; f, 1)$ depende solamente de $f_{\text{top}} = f_{(m)}, f_{(m-1)}, \cdots, f_{(m-p)}$.*

Notemos que este resultado es trivial si $\deg(f) \leq p$.
**Demostración.** Usamos la ecuación (2.6)

$$Z(s; f, 1) = \int_{\sigma \in \partial C_+^p} Z(s; f_\sigma, x^{p-1}) \mathrm{d}\sigma,$$

y el Lema 2.8. Así $Z(0; f_\sigma, x^{p-1})$ depende solamente de $f_{\text{top}} = f_{(m)}, f_{(m-1)}, \cdots, f_{(m-p)}$ para todo $\sigma \in \partial C_+^p$. Esto implica lo que deseábamos mostrar.

$\square$

**Teorema 2.10** *Sea $f \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio en $p$ variables que satisface la hipótesis de Mahler. Al escribir $f$ en partes homogéneas*

$$f(\rho\sigma) = \sum_{j=0}^{m} \rho^j f_{(j)}(\sigma)$$

*tenemos que $\zeta(0; f, 1)$ depende solamente de $f_{\text{top}} = f_{(m)}, f_{(m-1)}, \cdots, f_{(m-p)}$.*

**Demostración.** Escribimos $Z(0; f_a, 1_a) = Z(0; f_a, 1)$ como suma de monomios

$$Z(0; f_a, 1) = \sum_L c_L a^L,$$

donde $a^L = \prod_{i=1}^{p} a_i^{L_i}$, $c_L = c_L(f)$. Luego, $c_L$ depende solamente de $f_{\text{top}} = f_{(m)}, f_{(m-1)}, \cdots,$ $f_{(m-p)}$. De la parte (3) de la Proposición 1.13 tenemos

$$\zeta(0; f, 1) = \sum_L c_L B_L.$$

Por lo tanto, $\zeta(0; f, 1)$ depende solamente de $f_{\text{top}} = f_{(m)}, f_{(m-1)}, \cdots, f_{(m-p)}$.

$\square$

# Capítulo 3

# Integrales nulas

En este capítulo obtendremos que ciertas integrales son nulas. Estas integrales son análogas a las que obtuvieron Friedman y Ruijsenaars [5, pág 380]. Antes de enunciar el resultado, debemos ver cual sería la analogía para el caso que queremos. Recordemos de la ecuación (1.2)

$$\zeta_{p,m}(s, w \mid a_1, \cdots, a_p) = \zeta(s; f, 1) \qquad \Big(f(x) = \prod_{j=1}^{m} \big(w_j + \sum_{i=1}^{p} x_i a_{ij}\big)\Big).$$

Para $W(t) := \sum_{i=1}^{p} t_i a_i = (W_1(t), \cdots, W_m(t)) \in \mathbb{C}^m$ como en (0.3) y $t = (t_1, \cdots, t_p) \in \mathbb{R}_+^p$, en [5] se obtuvo

$$\int_{[0,1]^p} \zeta_{p,m}(s, W(t))\mathrm{d}t = 0 \qquad \Big(\mathrm{Re}(s) < p/m\Big).$$

Tenemos

$$\zeta_{p,m}(s, W(t)) = \zeta(s; (f_{\mathrm{top}})_t, 1), \tag{3.1}$$

ya que

$$f_{\mathrm{top}}(x) = \prod_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{p} a_{ij} x_i\Big) = \prod_{j=1}^{m} W_j(x),$$

y así

$$(f_{\mathrm{top}})_t(x) = f_{\mathrm{top}}(x+t) = \prod_{j=1}^{m} \Big(W_j(t) + \sum_{i=1}^{p} a_{ij} x_i\Big).$$

Teniendo ya la ecuación (3.1), la idea de nuestra nueva integral nula es como la de la ecuación (0.8) pero en vez de $\zeta_{p,m}(s, W(t))$ iría $\zeta(s; (f_{\mathrm{top}})_t, g_t)$. Sin embargo, surge el problema que $(f_{\mathrm{top}})_t$ no satisface la Hipótesis de Mahler para $t = 0$. Esto hace que la convergencia de la integral

$$\int_{t\in[0,1]^p} \zeta(s; (f_{\mathrm{top}})_t, g_t)\mathrm{d}t$$

no sea evidente.[1] Para remediar esto, consideramos $f_{\mathrm{top}}$ como límite de funciones $F_j$ que satisfacen la Hipótesis de Mahler. Además nos restringiremos a $s \in \mathbb{R}$ y $s \leq 0$.

[1] De hecho, nos parece probable que esta integral converja para $\mathrm{Re}(s) < p/\deg(f)$, pero no hemos podido demostrar esto.

Sea $f \in \mathcal{M}_{m,p}$ y consideremos para $T > 0$ el polinomio en $x = (x_1, \cdots, x_p)$ dado por

$$h_T(x) = T^m f(x/T) = f_{\text{top}}(x) + T f_{(m-1)}(x) + T^2 f_{(m-2)}(x) + \cdots + T^m f_{(0)}.$$

Dado que $(h_T)_{\text{top}} = f_{\text{top}}$, y que $h_T$ no se anula en $[0,\infty)^p$ puesto que $f$ no lo hace, tenemos que $h_T \in \mathcal{M}_{m,p}$ y

$$\lim_{T \to 0^+} h_T = f_{\text{top}} \qquad \text{(convergencia de coeficientes)}.$$

De esta manera si tomamos una sucesión $T_j \to 0$ y ponemos $F_j(x) = h_{T_j}(x)$, tenemos que

$$F_j \in \mathcal{M}_{m,p}, \qquad \lim_{j\to\infty} F_j = f_{\text{top}}, \qquad (F_j)_{\text{top}} = f_{\text{top}}. \tag{3.2}$$

En adelante cuando escribimos $F \to f_{\text{top}}$ se asumirá que será para $F_j$ que satisfacen (3.2). Sin embargo, nuestros resultados no dependerán de la sucesión $F_j$ elegida.

A continuación enunciamos el resultado análogo a la integral nula de la ecuación (0.8).

**Proposición 3.1** *Sean $f, g \in \mathbb{C}[x]$ polinomios en $p$ variables, tales que $f$ satisface la Hipótesis de Mahler. Para $s$ real y $s \le 0$, $s \notin \mathfrak{P}$ (ver (1.10)), tenemos*

$$\lim_{F \to f_{\text{top}}} \int_{[0,1]^p} \zeta(s; F_t, g_t)\mathrm{d}t = 0 \qquad \big(s \in \mathbb{R},\ s \le 0\big). \tag{3.3}$$

Para demostrar esto, veremos unos lemas. Para $w \gg 0$, $q := \deg(g)$, $m := \deg(f)$, $N \in \mathbb{N}$, $s > -N$, y $F = F_j \to f_{\text{top}}$, pongamos

$$R(x) := \frac{F(x) - F_{\text{top}}(x)}{F_{\text{top}}(x)} = \frac{F(x) - f_{\text{top}}(x)}{f_{\text{top}}(x)},$$

$$N_k = N_k(s,w) := \int_{\partial C_+^p} \int_w^\infty f_{\text{top}}(\sigma)^{-s} \rho^{p-1-ms} g(\rho\sigma)(R(\rho\sigma))^k \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(1+tR(\rho\sigma))^{s+k}} \mathrm{d}t\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\sigma. \tag{3.4}$$

Notamos que $R \to 0$ cuando $F \to f_{\text{top}}$, lo que nos será útil en el Lema 3.2. Entonces [4, págs. 708–709] tenemos,

$$Z(s; F, g) = Z_1 + k\binom{-s}{k} N_k + \sum_{\lambda=0}^{k-1} \binom{-s}{\lambda} M_\lambda \quad \Big(\mathrm{Re}(s) > -N,\ k := Nm+q+p+1\Big), \tag{3.5}$$

donde

$$Z_1 = Z_1(s, w; F, g) := \int_{\rho=0}^{w} \rho^{p-1} \int_{\sigma \in \partial C_+^p} g(\rho\sigma) F(\rho\sigma)^{-s} \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\rho, \tag{3.6}$$

y $M_\lambda = M_\lambda(s, w)$ está dado por

$$M_\lambda := \sum_{h=0}^{q+(m-1)\lambda} \frac{w^{q+p-ms-\lambda-h}}{ms+\lambda+h-q-p} \int_{\partial C_+^p} \mathrm{Coeff}_{\rho^{q-\lambda-h}}(g(\rho\sigma)(R(\rho\sigma))^\lambda) f_{\text{top}}(\sigma)^{-s} \mathrm{d}\sigma, \tag{3.7}$$

que tiene a lo más polos simples en puntos racionales de la forma $s = \frac{q+p-(\lambda+h)}{m}$ donde $0 \le h \le q + (m-1)\lambda$. Por la Fórmula de Raabe (1.15), tenemos $\int_{[0,1]^p} \zeta(s; F_t, g_t)\mathrm{d}t = Z(s; F, g)$. Por lo tanto, para demostrar la Proposición 3.1, estudiamos qué sucede con $Z(s; F, g)$ cuando $F$ tiende a $f_{\text{top}}$ .

**Lema 3.2** *Para $Z_1$ como en la ecuación* (3.6)*, $M_0$ como en la ecuación* (3.7) *y $s \notin \mathfrak{P}$ (ver* (1.10)*) con $s \leq 0$, tenemos*

$$\lim_{F \to f_{\text{top}}} Z_1(s, w; F, g) = -M_0(s, w).$$

*Además $\lim_{F \to f_{\text{top}}} N_k(s, w) = 0$ con $k$ como en* (3.5) *y $w \gg 0$.*

**Demostración.** Para demostrar la primera parte del lema, de la definición (3.6) obtenemos

$$\lim_{F \to f_{\text{top}}} Z_1(s, w; F, g) = \lim_{F \to f_{\text{top}}} \int_0^w \int_{\partial C_+^p} \rho^{p-1} g(\rho\sigma) F(\rho\sigma)^{-s} \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\rho. \tag{3.8}$$

Lo que haremos será acotar la función $|\rho^{p-1} g(\rho) F(\rho\sigma)^{-s}|$ por $H = H(s, w)$ que no depende de los $F_j \to f_{\text{top}}$, para así utilizar el Teorema de Convergencia Dominada y poder intercambiar el límite con las dos integrales. Tenemos que $\rho^{p-1} g(\rho\sigma)$ es continua sobre el conjunto compacto $[0, w] \times \partial C_+^p$, por lo que

$$|\rho^{p-1} g(\rho\sigma)| \leq K, \tag{3.9}$$

donde $K > 0$. Para acotar $F(\rho\sigma)^{-s}$, escribimos $F$ en partes homogéneas,

$$F(\rho\sigma) = \rho^m f_{\text{top}}(\sigma) + \rho^{m-1} F_{(m-1)}(\sigma) + \cdots + \rho F_{(1)}(\sigma) + F_{(0)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} |F(\rho\sigma)| =& \left|\rho^m f_{\text{top}}(\sigma) + \rho^{m-1} F_{(m-1)}(\sigma) \cdots + F_{(0)}\right|. \\ \leq& \left|\rho^m f_{\text{top}}(\sigma)\right| + \left|\rho^{m-1} F_{(m-1)}(\sigma)\right| \cdots + \left|F_{(0)}\right|. \end{aligned}$$

Para $\rho \in [0, w]$ y $k \gg 0$, tenemos que $\rho^k \leq (1+w)^k$. Entonces,

$$F(\rho\sigma) \leq (1+w)^m \left|f_{\text{top}}(\sigma)\right| + (1+w)^{m-1} \left|F_{(m-1)}(\sigma)\right| \cdots + (1+w)\left|F_{(1)}(\sigma)\right| + \left|F_{(0)}\right|. \tag{3.10}$$

Por otro lado, $F \to f_{\text{top}}$, por lo que $F_{(m-\ell)}(\sigma) \to 0$ uniformemente para todo $\ell \in \{1, 2, \cdots, m\}$, $\sigma \in \partial C_+^p$. Por lo tanto, tenemos $|F_{(m-\ell)}(\rho\sigma)| \leq b_\ell$, con $b_\ell \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\ell \in \{1, 2, \cdots, m\}$, $\sigma \in \partial C_+^p$. Con esto y la desigualdad (3.10) concluimos que

$$|F(\rho\sigma)| \leq (1+w)^m \left|F_{\text{top}}(\sigma)\right| + (1+w)^{m-1} b_1 + \cdots + (1+w) b_{m-1} + b_m \leq C, \tag{3.11}$$

para algún $C = C(w)$. Para $s \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\begin{aligned} |F(\rho\sigma)^{-s}| =& \left|e^{-s\log(F(\rho\sigma))}\right| = e^{-s\mathrm{Re}(\log(F(\rho\sigma)))} \\ =& e^{-s\log|F(\rho\sigma)|} \end{aligned} \tag{3.12}$$

De (3.11), tenemos

$$\log|F(\rho\sigma)| \leq \log C.$$

Recordemos que suponemos $s \leq 0$, entonces

$$-s\log|F(\rho\sigma)| \leq -s\log C$$

Esto implica que

$$e^{-s\log|F(\rho\sigma)|} \leq e^{-s\log C} = C^{-s}. \tag{3.13}$$

Con $H(s,w) := C^{-s}K$, de la ecuación (3.12) y de las desigualdades (3.9) y (3.13) tenemos

$$|\rho^{p-1}g(\rho\sigma)F(\rho\sigma)^{-s}| \leq H.$$

Podemos usar entonces el Teorema de la Convergencia Dominada y obtenemos de la ecuación (3.8)

$$\begin{aligned}
\lim_{F\to f_{\text{top}}} Z_1(s,w) &= \int_0^w \int_{\partial C_+^p} \lim_{F\to f_{\text{top}}} \rho^{p-1}g(\rho\sigma)F(\rho\sigma)^{-s}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^w \int_{\partial C_+^p} \rho^{p-1-ms}g(\rho\sigma)f_{\text{top}}(\sigma)^{-s}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\rho.
\end{aligned}$$

Escribimos $g$ en sus partes homogéneas $g(\rho\sigma) = \rho^q\sum_{h=0}^q \rho^{-h}g_{(q-h)}(\sigma)$, así

$$\begin{aligned}
\lim_{F\to f_{\text{top}}} Z_1(s,w) &= \int_0^w \int_{\partial C_+^p} \rho^{q+p-1-ms}\left(\sum_{h=0}^q \rho^{-h}g_{(q-h)}(\sigma)\right) f_{\text{top}}(\sigma)^{-s}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\rho \\
&= \sum_{h=0}^q \int_0^w \rho^{q+p-ms-h-1}\mathrm{d}\rho \int_{\partial C_+^p} g_{(q-h)}(\sigma)f_{\text{top}}^{-s}(\sigma)\mathrm{d}\sigma \\
&= -\sum_{h=0}^q \frac{w^{q+p-ms-h}}{ms+h-q-p}\int_{\partial C_+^p} g_{(q-h)}(\sigma)f_{\text{top}}^{-s}(\sigma)\mathrm{d}\sigma \\
&= -M_0(s,w),
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración de la primera parte del lema.

Pasando a la segunda parte del lema, de la ecuación (3.4) tenemos

$$\lim_{F\to f_{\text{top}}} N_k = \lim_{F\to f_{\text{top}}} \int_{\partial C_+^p}\int_w^\infty f_{\text{top}}(\sigma)^{-s}\rho^{p-1-ms}g(\rho\sigma)(R(\rho\sigma))^k \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(1+tR(\rho\sigma))^{s+k}}\mathrm{d}t\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\sigma.$$

Aquí al igual que en el lema anterior, deseamos que se intercambie el límite con las integrales, y para eso usaremos el Teorema de Convergencia Dominada. Dado $\rho_0 > 0$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$|g(\rho\sigma)| \leq C_1\rho^q \quad \forall \rho \geq \rho_0,$$

y existe una constante $C_2$ de modo que para todo $\sigma \in \partial C_+^p$, $\rho \geq \rho_0$ se tiene

$$|R(\rho\sigma)| \leq C_2\rho^{-1}, \quad |R(\rho\sigma)| < 1/2.$$

Tenemos así

$$\left| f_{\text{top}}(\sigma)^{-s}\rho^{p-1-ms}g(\rho\sigma)(R(\rho\sigma))^k \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(1+tR(\rho\sigma))^{s+k}}\mathrm{d}t \right| < K\rho^{p-1-ms+q-k},$$

donde $K$ es una constante. La función de la derecha es integrable sobre $[w,\infty]$ ya que

$s > -N$ y la definición de $k$ dan $p - ms + q - k < 0$. Luego, tomando $w \geq \rho_0$,

$$\lim_{F \to f_{\text{top}}} N_k = \int_{\partial C_+^p} \int_w^\infty \lim_{F \to f_{\text{top}}} f_{\text{top}}(\sigma)^{-s} \rho^{p-1-ms} g(\rho\sigma)(R(\rho\sigma))^k \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(1+tR(\rho\sigma))^{s+k}} \mathrm{d}t\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_{\partial C_+^p} \int_w^\infty f_{\text{top}}(\sigma)^{-s} \rho^{p-1-ms} g(\rho\sigma) \cdot 0 \cdot \int_0^1 (1-t)^{k-1} \mathrm{d}t\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\sigma = 0,$$

ya que $\lim_{F \to f_{\text{top}}} R(\rho\sigma) = 0$ como comentáramos después de la ecuación (3.4).

□

**Lema 3.3** *Para $M_\lambda$ como en la ecuación* (3.7) *con* $\lambda \neq 0$, *tenemos*

$$\lim_{F \to f_{\text{top}}} M_\lambda(s, w) = 0.$$

**Demostración.** De la ecuación (3.7), con $A_{\lambda,h}(\sigma) := \text{Coeff}_{\rho^{q-\lambda-h}}(g(\rho\sigma)(R(\rho\sigma))^\lambda)$ tenemos

$$\lim_{F \to f_{\text{top}}} M_\lambda = \lim_{F \to f_{\text{top}}} \sum_{h=0}^{q+(m-1)\lambda} \frac{w^{q+p-ms-\lambda-h}}{ms+\lambda+h-q-p} \int_{\partial C_+^p} A_{\lambda,h}(\sigma) f_{\text{top}}(\sigma)^{-s} \mathrm{d}\sigma$$

$$= \sum_{h=0}^{q+(m-1)\lambda} \lim_{F \to f_{\text{top}}} \frac{w^{q+p-ms-\lambda-h}}{ms+\lambda+h-q-p} \int_{\partial C_+^p} A_{\lambda,h}(\sigma) f_{\text{top}}(\sigma)^{-s} \mathrm{d}\sigma,$$

siempre que demostremos que estos límites existen. Como $A_{\lambda,h}$ depende de $F = F_j$ (recordemos que $\lim_{F \to f_{\text{top}}}$ significa $\lim_{F_j \to f_{\text{top}}}$), tenemos que $R$ depende de $j$. Por definición, $A_{\lambda,h}(\sigma)$ es el coeficiente de $\rho^{q-\lambda-h}$ en la expansión de $g(\rho\sigma)(R(\rho\sigma)^\lambda)$, donde

$$R(\rho\sigma) = \frac{F_{(m-1)}(\sigma)}{\rho f_{\text{top}}(\sigma)} + \frac{F_{(m-2)}(\sigma)}{\rho^2 f_{\text{top}}(\sigma)} + \cdots + \frac{F_{(0)}}{\rho^m f_{\text{top}}(\sigma)}.$$

El hecho $f_{\text{top}}(\sigma) \neq 0$ sobre el conjunto compacto $\partial C_+^p$ y el teorema multinomial nos permite concluir que $|A_{\lambda,h}(\sigma)| < C$ para alguna constante $C$, ya que $F_{(m-\ell)} \to 0$. Recordamos que $\lambda$ es un entero positivo por hipótesis. Entonces tenemos por Convergencia Dominada que

$$\lim_{F \to f_{\text{top}}} M_\lambda = \sum_{h=0}^{q+(m-1)\lambda} \frac{w^{q+p-ms-\lambda-h}}{ms+\lambda+h-q-p} \int_{\partial C_+^p} 0 \cdot f_{\text{top}}(\sigma)^{-s} \mathrm{d}\sigma = 0.$$

□

**Demostración Proposición 3.1.** Sea $s \notin \mathfrak{P}$ (ver Teorema 1.7), tal que $s \leq 0$. Usamos la ecuación (3.5) y el Lema 3.2 para obtener

$$\lim_{F \to f_{\text{top}}} Z(s; F, g) = \lim_{F \to f_{\text{top}}} \Big( Z_1(s, w; F, g) + k \binom{-s}{k} N_k(s, w) + \sum_{\lambda=0}^{k-1} \binom{-s}{\lambda} M_\lambda(s, w) \Big)$$

$$= \lim_{F \to f_{\text{top}}} \Big( \sum_{\lambda=1}^{k-1} M_\lambda(s, w) \Big) = 0,$$

por el Lema 3.3.

□

A continuación enunciaremos otra de las integrales que se anulan mencionadas al comienzo del capítulo.

**Proposición 3.4** *Para todo operador* $\partial^J := \dfrac{\partial^{|J|}}{\partial_{t_1}^{J_1}\cdots\partial_{t_p}^{J_p}}$ *de orden* $|J| := \sum_{i=1}^{p} J_i$*, donde* $J = (J_1,\cdots,J_p) \in \mathbb{N}_0^p$*, para todo* $f, g \in \mathbb{C}[x]$ *polinomios en* $p$ *variables tales que* $f$ *satisface la Hipótesis de Mahler, para* $s \in \mathbb{R}$*,* $s \notin \mathfrak{P}$ *(ver Teorema 1.7),* $s \leq -|J|$*, tenemos*

$$\lim_{F\to f_{\mathrm{top}}} \int_{[0,1]^p} \partial^J \zeta(s; F_t, g_t)\mathrm{d}t = 0. \tag{3.14}$$

Notamos que si $|J| = 0$, obtenemos la Proposición 3.1.

Requeriremos el siguiente lema.

**Lema 3.5** *Bajo las hipótesis de la Proposición 3.1, tenemos que la función* $s \mapsto \partial^J\zeta(s; F_t, g_t)$ *es meromorfa en* $\mathbb{C}$*. Sus polos son simples y están contenidos en el conjunto*

$$\mathscr{P}_J = \mathscr{P}(F, g, J) := \left\{\frac{p + \deg(g) - |J| - \ell}{\deg(F)}\right\}_{\ell=0,1,2\cdots}. \tag{3.15}$$

*Además la función es regular en* $s = 0, -1, -2, \cdots$.

**Demostración.** Sean $F, g \in \mathbb{C}[x]$ polinomios en $p$ variables tales que $F$ satisface la Hipótesis de Mahler, fijamos $m := \deg(F)$, $q := \deg(g)$. Demostraremos el lema por inducción sobre $|J|$. Primero para $|J| = 0$, notamos que $F_t$ satisface la Hipótesis de Mahler y $\deg(F) = \deg(F_t)$, $\deg(g) = \deg(g_t)$, entonces

$$\mathfrak{P}(F_t, g_t) = \mathfrak{P}(F, g), \qquad \mathscr{P}(F_t, g_t, J) = \mathscr{P}(F, g, J).$$

Por lo tanto, del Teorema 1.7, obtenemos lo deseado para $|J| = 0$.

A continuación suponemos cierto el lema para $|J|$, y lo probaremos para $|J| + 1$. Sea $J' \in \mathbb{N}_0^p$ con $|J'| = |J| + 1$, escribimos para $k \in \{1, 2, \cdots, p\}$ tal que la coordenada $k$-ésima de $J'$ sea distinta de cero, $J' = J_0 + e_k$, con $e_k, J_0 \in \mathbb{N}_0^p$, donde $e_k$ tiene un 1 en su $k$-ésima coordenada y ceros en la demás, y $|J_0| = |J|$. Consideremos $s \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(s) \gg 0$. Tenemos de la definición de $\zeta$ en la ecuación (1.1)

$$\partial^{J'}\zeta(s; F_t, g_t) = \partial^{J_0}\zeta\left(s; F_t, \left(\frac{\partial g}{\partial t_k}\right)_t\right) - s\cdot\partial^{J_0}\zeta\left(s+1; F_t, \left(g\frac{\partial F}{\partial t_k}\right)_t\right). \tag{3.16}$$

Analizando los dos sumandos de la derecha de la ecuación (3.16), tenemos primero por hipótesis inductiva que $\partial^{J_0}\zeta\left(s; F_t, \left(\frac{\partial g}{\partial t_k}\right)_t\right)$ tiene continuación meromorfa en $\mathbb{C}$, donde los posibles polos son simples y pertenecen a $\mathscr{P}\left(F_t, \left(\frac{\partial g}{\partial t_k}\right)_t, J_0\right) \subset \mathscr{P}(F_t, g_t, J')$. Además es regular para $s = 0, -1, -2, \cdots$.

Notemos que $s \notin \mathscr{P}(F_t, g_t, J') \Rightarrow s + 1 \notin \mathscr{P}(F_t, \left(g\frac{\partial F}{\partial t_k}\right)_t, J_0)$. Nuevamente, por inducción obtenemos la continuación meromorfa en $\mathbb{C}$ de $\partial^{J_0}\zeta\left(s+1; F_t, \left(g\frac{\partial F}{\partial t_k}\right)_t\right)$, con posibles polos simples en $\mathscr{P}\left(F_t, \left(g\frac{\partial F}{\partial t_k}\right)_t, J_0\right)$. Además la función es regular para $s + 1 = 0, -1, -2, \cdots$, es decir, para $s = -1, -2, -3, \cdots$. Como los polos son a lo más simples obtenemos que $s \cdot \partial^{J_0}\zeta\left(s+1; F_t, \left(g\frac{\partial F}{\partial t}\right)_t\right)$ es regular también para $s=0$. Concluimos que $\partial^{J'}\zeta(s; F_t, g_t)$ tiene una continuación meromorfa en $\mathbb{C}$ cuyos polos son simples y están contenidos en el conjunto $\mathscr{P}(F_t, g_t, J') = \left\{\frac{p+q-|J'|-\ell}{m}\right\}_{\ell=0,1,2,\cdots}$. Además la función es regular en $s = 0, -1, -2, \cdots$.

□

**Demostración Proposición 3.4.** Por el lema anterior, la integral en (3.14) tiene sentido. Para calcular su límite cuando $F \to f_{\text{top}}$, nuevamente usaremos inducción sobre $|J|$. Si $|J| = 0$, basta con usar la Proposición 3.1. Luego suponemos nuestra hipótesis inductiva para $|J|$ y lo mostraremos para $|J|+1$. Sea $s \notin \mathfrak{P}$, $s \leq -(|J|+1)$. Sea $J' \in \mathbb{N}_0^p$ con $|J'| = |J|+1$, escribimos para $k \in \{1, 2, \cdots, p\}$ tal que la coordenada $k$-ésima de $J'$ sea distinta de cero $J' = J_0 + e_k$, con $e_k$, $J_0 \in \mathbb{N}_0^p$ donde $e_k$ tiene un 1 en su $k$-ésima coordenada y ceros en las demás, y $|J_0| = |J|$. Consideramos la misma ecuación (3.16) y hacemos tender el límite cuando $F \to f_{\text{top}}$ junto con integrar sobre $[0,1]^p$

$$\begin{aligned}\lim_{F\to f_{\text{top}}} \int_{[0,1]^p} \partial^{J'}\zeta(s; F_t, g_t)\mathrm{d}t = \lim_{F\to f_{\text{top}}} \int_{[0,1]^p} \partial^{J_0}\zeta\left(s; F_t, \left(\frac{\partial g}{\partial t_k}\right)_t\right)\mathrm{d}t \\ - s\cdot \lim_{F\to f_{\text{top}}} \int_{[0,1]^p} \partial^{J_0}\zeta\left(s+1; F_t, \left(g\frac{\partial F}{\partial t_k}\right)_t\right)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Como $\mathfrak{P}(F, \frac{\partial g}{\partial t_k}) \subset \mathfrak{P}(F, g)$, y $s \notin \mathfrak{P}(F, g)$, $s \leq -(|J|+1) < -|J| = -|J_0|$, por la hipótesis inductiva el primer límite de la parte derecha de (3.17) es nulo. Para evaluar el segundo límite, notemos que $\deg(\frac{\partial F}{\partial t_k}) = \deg(F) - \kappa$, con $\kappa \geq 1$. Por lo tanto, $s \notin \mathfrak{P}(F, g)$ implica $s+1 \notin \mathfrak{P}(F, g\frac{\partial F}{\partial t_k})$. Como por hipótesis $s \leq -|J|-1$, tenemos $s+1 \leq -|J_0|$. Por hipótesis inductiva (aplicada a $s+1$ y a $F, g\frac{\partial F}{\partial t_k}$), concluimos que el segundo límite en (3.17) también es cero.

□

# Apéndice A

# Una demostración alternativa

En este apéndice damos una nueva demostración de la siguiente fórmula de V. Castillo [2]

**Proposición A.1** *Sean $f, g \in \mathbb{C}[x]$ polinomios en $p$ variables tales que $f$ satisface la Hipótesis de Mahler, y sea $N \geq 0$ un entero no negativo. Entonces*

$$Z(-N; f, g) = -\frac{1}{m}\mathrm{Coeff}_{\rho^{-p}}\left(\int_{\sigma\in\partial C_+^p} g(\rho\sigma)(f(\rho\sigma))^N \log\left(\frac{f}{f_{\mathrm{top}}}(\rho\sigma)\right)\mathrm{d}\sigma\right),$$

*donde $m = \deg(f)$ y $\log$ es la rama principal del logaritmo.*

Antes de demostrar la proposición, veremos los siguientes lemas.

**Lema A.2** *Sea $R \in \mathbb{C}$ con $|R| < 1$. Para $N \geq 0$ un entero no negativo, tenemos*

$$\sum_{\lambda=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda-N}}{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-N)} R^\lambda = -\frac{(1+R)^N}{N!}\log(1+R) + z(1+R), \tag{A.1}$$

*con $z(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado $\leq N$.*

**Demostración.** Por inducción sobre $N$. Para $N = 0$, tenemos que

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{(-1)^\lambda R^\lambda}{\lambda} = -\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda+1}R^\lambda}{\lambda} = -\log(1+R).$$

Por lo tanto, satisface (A.1) con $z = 0$. Ahora supondremos cierto (A.1) para $N \geq 0$ un entero no negativo, y lo demostraremos para $N+1$. Es decir demostraremos que

$$\sum_{\lambda=N+2}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda-(N+1)}R^\lambda}{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(N+1))} = -\frac{(1+R)^{N+1}}{(N+1)!}\log(1+R) + w(1+R), \tag{A.2}$$

con $w(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado menor o igual a $N+1$. Si derivamos el sumando del lado izquierdo con respecto a $R$ obtenemos

$$\left(\frac{(-1)^{\lambda-(N+1)}R^\lambda}{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(N+1))}\right)' = \frac{(-1)^{\lambda-(N+1)}R^{\lambda-1}}{(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-N)(\lambda-(N+1))},$$

para todo $\lambda$. Luego sumamos ambas expresiones de $\lambda = N+2$ hasta infinito

$$\sum_{\lambda=N+2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{\lambda-(N+1)}R^{\lambda}}{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(N+1))}\right)' = \sum_{\lambda=N+2}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda-(N+1)}R^{\lambda-1}}{(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-N)(\lambda-(N+1))}.$$

Haciendo un cambio de variable $\mu = \lambda - 1$ en el lado derecho, tenemos

$$\sum_{\lambda=N+2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{\lambda-(N+1)}R^{\lambda}}{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(N+1)}\right)' = \sum_{\mu=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu-N}R^{\mu}}{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-N)}.$$

Luego por hipótesis de inducción

$$\sum_{\lambda=N+2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{\lambda-(N+1)}R^{\lambda}}{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(N+1))}\right)' = -\frac{(1+R)^N}{N!}\log(1+R) + z(1+R),$$

con $z(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado $N$. Integramos ambos lados y obtenemos

$$\int_0^R\left(\sum_{\lambda=N+2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{\lambda-(N+1)}r^{\lambda}}{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(N+1))}\right)'\right)\mathrm{d}r = \int_0^R\left(-\frac{(1+r)^N}{N!}\log(1+r)+z(1+r)\right)\mathrm{d}r.$$

Como la suma converge absolutamente, se pueden intercambiar la integral con la sumatoria. Es decir

$$\sum_{\lambda=N+2}^{\infty}\int_0^R\left(\frac{(-1)^{\lambda-(N+1)}r^{\lambda}}{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(N+1))}\right)'\mathrm{d}r = \int_0^R\left(-\frac{(1+r)^N}{N!}\log(1+r) + z(1+r)\right)\mathrm{d}r.$$

Luego, integrando por partes,

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=N+2}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda-(N+1)}R^{\lambda}}{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(N+1))} &= -\int_0^R\frac{(1+r)^N}{N!}\log(1+r)\mathrm{d}r + \int_0^R z(1+r)\mathrm{d}r\\ &= \frac{(1+r)^{N+1}}{(N+1)!}\log(1+r)\Big|_0^R - \int_0^R\frac{(1+r)^N}{(N+1)(N+1)!}\mathrm{d}r + \int_0^R z(1+r)\mathrm{d}r\\ &= -\frac{(1+R)^{N+1}}{(N+1)!}\log(1+R) + \frac{(1+R)^{N+1}-1}{(N+1)(N+1)!} + \int_0^R z(1+r)\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Sea $w(1+R) := \dfrac{(1+R)^{N+1}-1}{(N+1)(N+1)!} + \displaystyle\int_0^R z(1+r)\mathrm{d}r$. Entonces $w(x) \in \mathbb{Q}[x]$ es de grado $\leq N+1$.

□

**Lema A.3** *Si $N+1 \leq \lambda < N + \lceil p/m \rceil$, o si $q+p+mN < \lambda$, con $m = \deg(f)$, $q = \deg(g)$ y $r(\rho\sigma)$ como en (1.8), tenemos que* $\mathrm{Coeff}_{\rho^{-p-mN}}\left(g(\rho\sigma)r(\rho\sigma)^{\lambda}\right) = 0$.

**Demostración.** Notemos que

$$\begin{aligned}
g(\rho\sigma) =& \rho^q \left(g_{(q)}(\sigma) + \rho^{-1} g_{(q-1)}(\sigma) + \cdots + \rho^{-q} g_{(0)}\right), \\
r(\rho\sigma)^\lambda =& \rho^{-\lambda} \left(\frac{f_{(m-1)}(\sigma)}{f_{\text{top}}(\sigma)} + \rho^{-1} \frac{f_{(m-2)}(\sigma)}{f_{\text{top}}(\sigma)} + \cdots + \rho^{-(m-1)} \frac{f_{(0)}}{f_{\text{top}}(\sigma)}\right)^\lambda.
\end{aligned}$$

Luego

$$g(\rho\sigma) r(\rho\sigma)^\lambda = \rho^{q-\lambda} \sum_{h=0}^{q+(m-1)\lambda} A_h^\lambda(\sigma) \rho^{-h}, \tag{A.3}$$

con $A_h^\lambda(\sigma)$ una función racional sin polos en $\partial C_+^p$. Entonces

$$\operatorname{Coeff}_{\rho^{-p-mN}}(g(\rho\sigma) r(\rho\sigma)^\lambda) = A_{q+p+mN-\lambda}^\lambda(\sigma).$$

Notemos que el exponente de $\rho$ en $g(\rho\sigma) r(\rho\sigma)^\lambda$ está entre $-m\lambda$ y $q - \lambda$. Entonces,

- para $q+p+mN < \lambda$, tenemos que $q+p+mN-\lambda < 0$, de donde $q-\lambda < -p-mN$. Luego $A_{q+p+mN-\lambda}^\lambda(\sigma)$ es un coeficiente de una potencia de $\rho$ mayor a la que aparece en (A.3). Por lo tanto, $A_{q+p+mN-\lambda}^\lambda(\sigma) = 0$.

- para $N+1 \leq \lambda < N + \lceil p/m \rceil$, tenemos $m\lambda < p+mN$, de donde $-p-mN < -m\lambda$. Luego $A_{q+p+mN-\lambda}^\lambda(\sigma)$ es un coeficiente de una potencia de $\rho$ menor a la que aparece en (A.3). Por lo tanto, $A_{q+p+mN-\lambda}^\lambda(\sigma) = 0$.

En cualquiera de los dos casos, obtenemos que $\operatorname{Coeff}_{\rho^{-p-mN}}\left(g(\rho\sigma) r(\rho\sigma)^\lambda\right) = 0$.

□

**Demostración Proposición A.1.** De (1.11) tenemos que

$$\begin{aligned}
mZ(-N; f, g) &= \sum_{\lambda=N+\lceil p/m \rceil}^{q+p+Nm} \frac{(-1)^{\lambda-N}}{\lambda-N} \binom{\lambda}{N}^{-1} \int_{\sigma \in \partial C_+^p} \operatorname{Coeff}_{\rho^{-p-mN}}\left(g(\rho\sigma) r(\rho\sigma)^\lambda\right) f_{\text{top}}(\sigma)^N \, \mathrm{d}\sigma \\
&= \int_{\sigma \in \partial C_+^p} \sum_{\lambda=N+\lceil p/m \rceil}^{q+p+Nm} \frac{(-1)^{\lambda-N}}{\lambda-N} \binom{\lambda}{N}^{-1} \operatorname{Coeff}_{\rho^{-p-mN}}\left(g(\rho\sigma) r(\rho\sigma)^\lambda\right) f_{\text{top}}(\sigma)^N \mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

Usando el Lema A.3 obtenemos que

$$\begin{aligned}
mZ(-N; f, g) &= \int_{\sigma \in \partial C_+^p} \sum_{\lambda=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda-N}}{\lambda-N} \binom{\lambda}{N}^{-1} \operatorname{Coeff}_{\rho^{-p-mN}}\left(g(\rho\sigma) r(\rho\sigma)^\lambda\right) f_{\text{top}}(\sigma)^N \mathrm{d}\sigma \\
&= \int_{\sigma \in \partial C_+^p} \operatorname{Coeff}_{\rho^{-p-mN}}\left(g(\rho\sigma) f_{\text{top}}(\sigma)^N \sum_{\lambda=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda-N}}{\lambda-N} \binom{\lambda}{N}^{-1} r(\rho\sigma)^\lambda\right) \mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

Luego, un cálculo sencillo da

$$\frac{m}{N!} Z(-N; f, g) = \int_{\sigma \in \partial C_+^p} \operatorname{Coeff}_{\rho^{-p-mN}}\left(g(\rho\sigma) f_{\text{top}}(\sigma)^N \sum_{\lambda=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda-N}}{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-N)} r(\rho\sigma)^\lambda\right) \mathrm{d}\sigma.$$

Usando el Lema A.2 con $R = r(\rho\sigma)$, notando que para $\rho \gg 0$ tenemos que $|r(\rho\sigma)| < 1$, así

$$\frac{m}{N!}Z(-N;f,g) = \int_{\sigma\in\partial C_+^p} \mathrm{Coeff}_{\rho^{-p-mN}}\Big(g(\rho\sigma)f_{\mathrm{top}}(\sigma)^N\Big(-\frac{(1+r(\rho\sigma))^N}{N!}\log(1+r(\rho\sigma))+z\Big)\Big)\mathrm{d}\sigma,$$

con $z := z(1+r(\rho\sigma))$ y $z(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado $\leq N$. Notemos que

$$\mathrm{Coeff}_{\rho^{-p-mN}}\Big(g(\rho\sigma)f_{\mathrm{top}}(\sigma)^N z(\rho,\sigma)\Big) = 0,$$

pues las potencias de $\rho$ de la expresión $g(\rho\sigma)f_{\mathrm{top}}(\sigma)^N z(1+r(\rho\sigma))$ se encuentran en $\{-mN, -mN+1, \cdots, q\}$. Luego

$$\frac{m}{N!}Z(-N;f,g) = \int_{\sigma\in\partial C_+^p} \mathrm{Coeff}_{\rho^{-p-mN}}\Big(g(\rho\sigma)f_{\mathrm{top}}(\sigma)^N\Big(-\frac{(1+r(\rho\sigma))^N}{N!}\log(1+r(\rho\sigma))\Big)\Big)\mathrm{d}\sigma.$$

Como $1 + r(\rho\sigma) = \dfrac{f(\rho\sigma)}{f_{\mathrm{top}}(\rho\sigma)} =: \dfrac{f}{f_{\mathrm{top}}}(\rho\sigma)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
mZ(-N;f,g) &= -\int_{\sigma\in\partial C_+^p} \mathrm{Coeff}_{\rho^{-p-mN}}\Big(g(\rho\sigma)f_{\mathrm{top}}(\sigma)^N\Big(\frac{f}{f_{\mathrm{top}}}(\rho\sigma)\Big)^N \log\Big(\frac{f}{f_{\mathrm{top}}}(\rho\sigma)\Big)\Big)\mathrm{d}\sigma \\
&= -\int_{\sigma\in\partial C_+^p} \mathrm{Coeff}_{\rho^{-p-mN}}\Big(g(\rho\sigma)\frac{f(\rho\sigma)^N}{\rho^{mN}}\log\Big(\frac{f}{f_{\mathrm{top}}}(\rho\sigma)\Big)\Big)\mathrm{d}\sigma \\
&= -\int_{\sigma\in\partial C_+^p} \mathrm{Coeff}_{\rho^{-p}}\Big(g(\rho\sigma)f(\rho\sigma)^N\log\Big(\frac{f}{f_{\mathrm{top}}}(\rho\sigma)\Big)\Big)\mathrm{d}\sigma \\
&= \mathrm{Coeff}_{\rho^{-p}}\left(-\int_{\sigma\in\partial C_+^p} g(\rho\sigma)f(\rho\sigma)^N\log\Big(\frac{f}{f_{\mathrm{top}}}(\rho\sigma)\Big)\mathrm{d}\sigma\right).
\end{aligned}$$

$\square$

# Bibliografía


[1] Barnes, Ernest William, *On the theory of the multiple gamma function*, Trans. Cambridge Philos. Soc. **19** (1904) 374–425.

[2] Castillo, Víctor, *Productos finitos de productos regularizados*, Tesis de Magíster, Pontificia Universidad Católica de Chile, Facultad de Matemáticas, Departamento de Matemáticas (2012).

[3] Castillo-Garate, Victor y Friedman, Eduardo, *Discrepancies of products of zeta-regularized products*, Math. Res. Lett. **19** (2012) 199–212.

[4] Friedman, Eduardo y Pereira, Aldo, *Special values of Dirichlet series and zeta integrals*, Int. J. Number Theory **8** (2012) 697–714.

[5] Friedman, Eduardo y Ruijsenaars, Simon, *Shintani-Barnes zeta and gamma functions*, Adv. Math. **187** (2004) 362–395.

[6] Mahler, Kurt, *Über einen Satz von Mellin*, Math. Ann. **100** (1928) 384–398.

[7] Pereira, Aldo, *Valores especiales de series e integrales de Dirichlet*, Tesis de Magíster, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas (2009).

[8] Shintani, Takuro, *On values at $s = 1$ of certain $L$ functions of totally real algebraic number fields*, in: S. Inayaga (Ed.), Algebraic Number Theory, Papers Contributed for the International Symposium, Kyoto, (1976), Japan Society for the Promotion of Science, Tokyo (1977) 201–212.