Soluciones positivas para sistemas de ecuaciones con operadores del tipo p-Laplaciano

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias Matemáticas
Facultad de Ciencias

por

María Gabriela López Urra

Septiembre, 2010

Directora de Tesis: **Dra. Marta García-Huidobro Campos**

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister en Ciencias Matemáticas presentada por la candidata

María Gabriela López Urra

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magister en Ciencias Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 30 de agosto de 2010.

Director de Tesis:

Dra. Marta García-Huidobro ....

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Gonzalo Robledo ....

Dr. Marius Mantoiu ....

Dra. Verónica Poblete ....

BIOGRAFÍA

Nací el 9 de septiembre de 1981 en la ciudad de Rancagua, Sexta Región; la primera etapa de mi niñez se desarrolló en la localidad de San Francisco de Mostazal. A la edad de 12 años, mi familia se trasladó a la ciudad de Rancagua donde terminé mi enseñanza básica en el colegio de niñas República Argentina, egresando como una de las mejores alumnas de mi generación. El año 1996 comencé la enseñanza media en el Liceo Oscar Castro Zúñiga, lugar del cual conservo preciosos recuerdos, amigos entrañables, y una gran gratitud por quienes fueron mis profesores, pues de ellos recibí la preparación necesaria para ingresar a la universidad sin que provenir de la educación pública fuese un obstáculo real, también porque fue aquí donde despertó en mí la inquietud por aprender y mi interés por las matemáticas.

Mientras cursaba tercer año medio, decidí estudiar Licenciatura en Matemática con la intención de continuar posteriormente estudios de pedagogía, fue así que el año 2000 me trasladé a Santiago e ingresé a la Pontificia Universidad Católica de Chile, comenzó aquí una enriquecedora etapa de descubrimiento y crecimiento personal y por supuesto académico. En lo personal, fueron años difíciles pues debí enfrentar, recién a los dieciocho años una realidad nueva y por primera vez lejos de mi familia, sin duda esta experiencia ha fortalecido mi voluntad y mi convicción de que no hay dificultades insalvables ni metas imposibles de alcanzar. En lo académico pude descubrir, que mi gusto por las matemáticas iba mucho más allá de la docencia y luego de tomar los primeros cursos de análisis, decidí continuar estudios de postgrado. Luego de egresar de Licenciatura en Matemática, comencé mis estudios de Magíster en Matemática en esta Facultad el año 2006, luego de un año y ante la falta de apoyo económico, comencé a trabajar en la edición de textos escolares en la Editorial Santillana, lugar donde me desempeñé durante casi dos años. No ha sido fácil distribuir mi tiempo y energías entre trabajo y estudios, tampoco lo ha sido renunciar a la posibilidad asistir a congresos y seminarios, compartir con mis compañeros y participar de las actividades propias de la vida universitaria, sin embargo estos sacrificios son los que en parte, me han permitido cumplir un nuevo objetivo y presentar hoy día esta tesis.

Actualmente me desempeño como docente en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Diego Portales y en la Universidad Técnica Federico Santa María.

AGRADECIMIENTOS

Debo comenzar agradeciendo a quien ha sido mi profesora guía Marta García-Huidobro, por su inmensa paciencia, por el apoyo, la ayuda y la confianza, no solo durante el desarrollo de este trabajo sino que a través de estos ocho años de generosa amistad. Gracias por estar conmigo en los momentos difíciles y ayudarme a salir de ellos, por sus consejos y largas conversaciones, por ayudarme a crecer y por creer en mí. Finalmente por permitirme ser parte de su proyecto Fondecyt, financiamiento que ha sido fundamental en la realización de esta tesis.

En segundo lugar, agradezco a mi familia por haberme permitido seguir el camino que elegí, por la comprensión y la ayuda incondicional durante todos estos años de estudio, por los sacrificios que han debido hacer para que yo pudiera llegar hasta aquí y por todo el tiempo de ausencia que jamás han reclamado.

Agradezco también a mis amigos Fernando, Miguel, Fernanda y Valentina por estar siempre conmigo aun cuando hemos seguido caminos tan distintos, a mis amigas Claudia y Pilar gracias por el cariño, las confidencias, por escucharme y contenerme. Muchos nombres que han quedado fuera, sin embargo todos son parte de este logro y a todos agradezco los buenos momentos que hemos compartido a lo largo de la vida.

Índice

RESUMEN

Probaremos existencia de soluciones positivas de sistemas de ecuaciones de la forma

$$\begin{gathered}(\phi(u'))' + f(t, v(t)) = 0, \quad (\psi(v'))' + g(t, u(t)) = 0, \quad t \in (0,1) \\ \theta(u(0)) = \beta_1 \theta(u'(0)), \qquad \eta(v(0)) = \beta_2 \eta(v'(0)) \\ \theta(u(1)) = -\delta_1 \theta(u'(1)), \qquad \eta(v(1)) = -\delta_2 \eta(v'(1)), \quad \beta_i, \delta_i \geq 0\, (i = 1, 2),\end{gathered}$$

donde ϕ, ψ, θ, η son homeomorfismos impares y crecientes de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$.
Para obtener los resultados se usarán estimaciones a-priori y el grado de Leray-Schauder.

ABSTRACT

We prove the existence of positive solution to system of equations of the form

$$\begin{gathered}(\phi(u'))' + f(t, v(t)) = 0, \quad (\psi(v'))' + g(t, u(t)) = 0, \quad t \in (0,1) \\ \theta(u(0)) = \beta_1 \theta(u'(0)), \qquad \eta(v(0)) = \beta_2 \eta(v'(0)) \\ \theta(u(1)) = -\delta_1 \theta(u'(1)), \qquad \eta(v(1)) = -\delta_2 \eta(v'(1)), \quad \beta_i, \delta_i \geq 0\, (i = 1, 2),\end{gathered}$$

where ϕ, ψ, θ, η are odd increasing homeomorphisms of $\mathbb{R}$ into $\mathbb{R}$. Our approach is via a-priori estimates and Leray-Schauder degree.

Capítulo 1

Introducción

El problema de existencia de soluciones positivas para problemas de valores en la frontera asociados a ecuaciones del tipo $(\phi(u'))' + g(t,u) = 0$, ya sea con condiciones de borde mixtas o periódicas, ha sido vastamente estudiado durante las últimas décadas. El análisis del problema con condiciones de borde mixtas, es decir

$$(\phi(u'))' + g(t,u) = 0, \quad t \in (0,1) \tag{1.1}$$

$$\alpha u(0) - \beta u'(0) = 0, \quad \gamma u(1) + \delta u'(1) = 0, \tag{1.2}$$

donde ϕ es un homeomorfismo impar y creciente de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$, y $g : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ es continua, $g(t,0) = 0$ y $g(t,s) > 0$ para todo $(t,s) \in [0,1] \times [0,\infty)$, y α, $\beta \geq 0$, fue iniciado por L.H. Erbe y H. Wang en [4], para el caso particular $\phi(s) = s$ y $g(t,u) = a(t)f(u)$, donde $a : [0,1] \to [0,\infty)$ y $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$. Las herramientas utilizadas por ellos fueron adoptadas posteriormente por una serie de autores para extender sus resultado a casos en que la función ϕ no es necesariamente identidad. Por este motivo serán descritas, de manera muy general, luego de la siguiente definición.

Definición 1.1.

- Diremos que una función $g : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ es sublineal en 0 y superlineal en infinito con respecto a $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si

  $$(g_1) \qquad g_0(t) := \lim_{s\to 0} \frac{g(t,s)}{\phi(s)} = 0 \quad \text{y} \quad g_\infty(t) := \lim_{s\to\infty} \frac{g(t,s)}{\phi(s)} = \infty$$

  uniformemente en $t \in [0,1]$.

- Diremos que una función $g : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ es superlineal en 0 y sublineal en infinito con respecto a $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si

  $$(g_2) \qquad g_0(t) := \lim_{s\to 0} \frac{g(t,s)}{\phi(s)} = \infty \quad \text{y} \quad g_\infty(t) := \lim_{s\to\infty} \frac{g(t,s)}{\phi(s)} = 0$$

  uniformemente en $t \in [0,1]$.

Erbe y Wang probaron, para el caso $\phi(s) = s$, $g(t,u) = a(t)f(u)$, la existencia de al menos una solución (clásica) positiva del problema mencionado anteriormente, siempre que la función g satisfaga (g_1) o (g_2). El resultado se obtiene como consecuencia del Teorema de Punto Fijo en conos o Teorema de Krasnoselskii [11], el cual establece que si $T : X \to K$ es un operador continuo y compacto, donde K es un cono[1] en el Espacio de Banach X, y existen constantes reales distintas r y R tales que $Tx - x \notin K$ para $\|x\| = r$ y $x - Tx \notin K$ para $\|x\| = R$, entonces existe un punto fijo $x \in K$, para el operador T tal que $r \leq \|x\| \leq R$.
Los mismos autores consiguieron probar en [3], que existen al menos dos soluciones positivas de la ecuación (1.1) sujeta a las condiciones de borde (1.2), cuando $g : [0,1] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ es simplemente una función continua y no negativa, si es superlineal en un extremo (0 o ∞) y sublineal en el otro. Posteriormente estos resultados fueron extendidos por J. Wang en [16] para el problema con p-laplaciano en una dimensión, más precisamente para la ecuación $(\phi(u'))' + a(t)f(u) = 0$, donde ahora $\phi(s) = s|s|^{p-2}$, $s \neq 0$, para $p > 1$, $\phi(0) = 0$, pero considerando condiciones de borde no lineales. Los resultados fueron obtenidos para el caso en que f es sublineal o superlineal con respecto a la función ϕ. Aquí, por solución del problema se entiende una función $u \in C^1[0,1]$ tal que $\phi(u') \in C^1[0,1]$ que satisface las condiciones de borde correspondientes.
Años más tarde B. Liu y J. Zhang, obtuvieron en [12] una primera (aparente) generalización de estos resultados, al problema con un operador del tipo p-laplaciano, ellos prueban la existencia de soluciones postivas de la ecuación $(\phi(u'))' + a(t)f(u) = 0$, sujeta a las condiciones de borde (1.2), donde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un homeomorfismo impar que satisface la condición

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Los resultados fueron obtenidos para f una función superlineal o sublineal con respecto a ϕ. Sin embargo la condición (1.3), implica que $\phi(s) = s|s|^{p-2}$, para algún $p > 1$. Este hecho es obsevardo por M. García-Huidobro, R. Manásevich y J. R. Ward en [7], ver también [14]. En [7], los autores prueban la existencia de soluciones positivas del problema

$$(\phi(u'))' + f(t, u(t)) = 0, \qquad t \in (0,1) \tag{1.4}$$

$$\theta(u(0)) = \beta\theta(u'(0)), \quad \theta(u(1)) = -\delta\theta(u'(1)), \tag{1.5}$$

donde las funciones ϕ y θ, no necesariamente homogéneas, son homeomorfismos impares y crecientes de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. También aquí se obtiene un resultado de existencia cuando f es una función sublineal o bien superlineal con respecto al homeomorfismo

[1] Un cono en un espacio de Banach X, es un conjunto $K \subset X$ cerrado y convexo tal que $\lambda K \subset K$ para $\lambda \geq 0$ y $(-K \cap K) = \{0\}$.

ϕ, pero a diferencia de los trabajos anteriores, mediante el método de cotas apriori y las propiedades clásicas del grado de Leray-Schauder, lo que permite prescindir de la condición (1.3). Los autores dan además una extensión de estos resultados para sistemas de la forma

$$\begin{gathered}(\phi(u'))' + g(t,v) = 0, \quad (\psi(v'))' + f(t,u) = 0, \quad t \in (0,1) \\ u(0) = \beta_1 u'(0), \quad u(1) = -\delta_1 u'(1), \quad v(0) = \beta_2 v'(0), \quad v(1) = -\delta_2 v'(1).\end{gathered} \tag{1.6}$$

donde las constantes β_i, δ_i, $(i = 1,2)$, son no negativas, $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son homeomorfismos impares y crecientes de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$, y las funciones $f, g : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ son continuas. Es el objetivo de esta tesis obtener una pequeña generalización de los resultados obtenidos por los autores en [7] para este tipo de sistemas, por lo que estos serán enunciados a continuación.

Teorema GHMW 1. *Sean ϕ y ψ homeomorfismos impares y crecientes de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ y β_i, δ_i (i=1,2), constantes reales no negativas. Si f y g satisfacen* (g_1)

$$\liminf_{s\to 0} \frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} > 0, \quad \liminf_{s\to 0} \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} > 0 \quad \textit{para todo } 0 < \tau < 1, \tag{1.7}$$

$$\liminf_{s\to \infty} \frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} < \infty, \quad \liminf_{s\to \infty} \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} < \infty \quad \textit{para todo } \tau > 1. \tag{1.8}$$

Entonces existe al menos una solución (u,v) del problema (1.6), tal que $u(t) > 0$ y $v(t) > 0$ para todo $t \in (0,1)$.

Teorema GHMW 2. *Sean ϕ y ψ homeomorfismos impares y crecientes de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ y β_i, δ_i (i=1,2), constantes reales no negativas. Si f y g satisfacen (g_2) y*

$$\liminf_{s\to 0} \frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} < \infty, \quad \liminf_{s\to 0} \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} < \infty \quad \textit{para todo } \tau > 1, \tag{1.9}$$

$$\liminf_{s\to \infty} \frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} > 0, \quad \liminf_{s\to \infty} \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} > 0 \quad \textit{para todo } \tau < 1. \tag{1.10}$$

Entonces existe al menos una solución (u,v) del problema (1.6), tal que $u(t) > 0$ y $v(t) > 0$ para todo $t \in (0,1)$.

El operador $(\phi(u'))'$ generaliza el operador p-Laplaciano. Para más resultados relacionados, ver [8], [9], [2] y [1]. También se han considerado versiones vectoriales del operador, ver por ejemplo [5], [6], [10], [13], y [15].

En el presente trabajo se extienden ambos teoremas para sistemas que contienen condiciones de borde más generales del tipo (1.5), más precisamente, se prueba que existe al menos una solución positiva del sistema

$$\begin{cases} (\phi(u'))' + f(t, v(t)) &= 0 \\ (\psi(v'))' + g(t, u(t)) &= 0 \end{cases} \quad t \in (0,1) \tag{1.11}$$

sujeto a las condiciones de borde

$$\begin{cases} \theta(u(0)) = \beta_1\theta(u'(0)), & \eta(v(0)) = \beta_2\eta(v'(0)) \\ \theta(u(1)) = -\delta_1\theta(u'(1)), & \eta(v(1)) = -\delta_2\eta(v'(1)), \end{cases} \tag{1.12}$$

donde las constantes β_i, δ_i para $i = 1, 2$, son no negativas y los homeomorfismos ϕ, ψ, θ y η, son funciones en general no homogéneas que satisfacen:

$$(H_1) \qquad \begin{cases} \phi, \psi, \theta, \eta \quad \text{son homeomorfismos impares y crecientes} \\ \text{de } \mathbb{R} \text{ sobre } \mathbb{R}, \end{cases}$$

y las funciones f y g satisfacen:

$$(H_2) \qquad \begin{cases} f, g : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty) \text{ son continuas,} \\ f(t,0) = g(t,0) = 0, f(t,s) > 0,\ g(t,s) > 0 \text{ para todo } s > 0 \text{ y } t \in [0,1]. \end{cases}$$

Vale la pena mencionar en este punto que las condiciones (H_1) y (H_2) constituyen hipóstesis generales del problema y de aquí en adelante serán asumidas sin mención explícita.
Los resultados principales en esta tesis son los siguientes.

Teorema 1.1. *Sean f y g funciones que satisfacen (g_1) y supongamos que:*

$$\liminf_{s\to 0} \frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} > 0 \quad y \quad \liminf_{s\to 0} \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} > 0 \quad \textit{para todo } 0 < \tau < 1 \tag{1.13}$$

y

$$\limsup_{s\to\infty} \frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} < \infty \quad y \quad \limsup_{s\to\infty} \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} < \infty \quad \textit{para todo } \tau > 1. \tag{1.14}$$

Si en (1.12), $\delta_i > 1$, para $i = 1, 2$, suponemos también que para cada par de sucesiones $\{s_k\}$ y $\{r_k\}$ de términos positivos, tales que $s_k \to 0$ y $r_k \to 0$ cuando $k \to \infty$, se cumple que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\theta(r_k s_k)}{\theta(s_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\eta(r_k s_k)}{\eta(s_k)} = 0. \tag{1.15}$$

Entonces existe al menos una solución positiva del problema (1.11).

Teorema 1.2. *Sean f y g funciones que satisfacen (g_2) y supongamos que:*

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} > 0 \quad y \quad \liminf_{s\to\infty} \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} > 0 \quad \textit{para todo } 0 < \tau < 1, \tag{1.16}$$

$$\limsup_{s\to 0} \frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} < \infty \quad y \quad \limsup_{s\to 0} \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} < \infty \quad \textit{para todo } \tau > 1. \tag{1.17}$$

Si en el problema (1.11), $\delta_i > 1$, para $i = 1, 2$, suponemos también que para cada par de sucesiones $\{s_k\}$ y $\{r_k\}$ de términos positivos, tales que $s_k \to \infty$ y $r_k \to 0$ cuando $k \to \infty$, se cumple que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\theta(r_k s_k)}{\theta(s_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\eta(r_k s_k)}{\eta(s_k)} = 0. \tag{1.18}$$

Entonces existe al menos una solución positiva del problema (1.11).

Para probar estos resultados reformulamos el problema de modo de transformarlo en un problema de punto fijo para un operador T definido en $C[0,1] \times C[0,1]$. La construcción del operador T será expuesta con detalle en el capítulo 3. En los capítulos 4 y 5 se expone la demostración de los teoremas, y en el capítulo 6 se exhiben algunos ejemplos. Finalmente se incluye un anexo con una breve descripción de las propiedades del grado de Leray-Schauder. Previo a esto es necesario establecer algunos aspectos preliminares, los que serán tratados en el capítulo 2 a continuación.

Capítulo 2

Resultados preliminares

En el presente capítulo se discutirán algunos aspectos preliminares. Los dos resultados enunciados en la sección 1 se pueden encontrar en [7], por lo que se omitirán algunos detalles técnicos de modo que el lector pueda centrar su atención en la prueba de los resultados que fueron obtenidos particularmente para el problema estudiado en esta tesis, los cuales serán expuestos en la sección 2.

2.1 Principio del máximo

Proposición 2.1 (Principio generalizado del máximo).
Sea $u \in C^1[0,1]$ y ϕ, θ como en (H_1). Si $\phi(u') \in C^1[0,1]$ y satisface el problema

$$\begin{aligned} -(\phi(u'))' \geq 0, \quad \textit{para todo } t \in (0,1) \\ \theta(u(0)) = \beta\theta(u'(0)), \quad \theta(u(1)) = -\delta\theta(u'(1)), \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $\beta, \delta \geq 0$. Entonces $u \equiv 0$ o bien $u(t) > 0$ para todo $t \in (0,1)$, en cuyo caso $u'(0) > 0$ y $u'(1) < 0$. Si además $\beta \neq 0$, entonces $u(0) > 0$ y si $\delta \neq 0$ entonces $u(1) > 0$. En ambos casos se tiene que

$$u(t) \geq \min\{u(0), u(1)\} \tag{2.2}$$

La prueba de este teorema es bastante simple e intuitiva y puede encontrarse en [7], por lo que solo incluiremos aquí un esquema de la demostración. Como el lector podrá notar, el resultado es trivial si $u \in C^1[0,1]$ es una función positiva y cóncava que presenta un máximo en $(0,1)$. Ahora bien, si u es una solución no trivial de (2.1) es inmediato observar que $\phi(u')$ es no creciente en $(0,1)$, es decir si t_1, $t_2 \in (0,1)$ tales que $t_1 \geq t_2$ entonces $\phi(u'(t_1)) \leq \phi(u'(t_2))$, luego como ϕ es una función creciente, necesariamente $u'(t_1) \leq u'(t_2)$, es decir u' es no creciente en $(0,1)$, o equivalentemente u es cóncava en $(0,1)$.

Por otra parte, directamente de las condiciones de borde y gracias a que θ es una función impar, se obtiene que $u'(0) > 0$ (de donde si $\beta \neq 0$, también $u(0) > 0$) y

$u'(1) < 0$ (de donde $u(1) > 0$ si $\delta \neq 0$) por lo que necesariamente existe un punto $t \in (0,1)$ tal que $u'(t) = 0$ el cual gracias a la concavidad de u necesariamente corresponde a un máximo.

Proposición 2.2. *Si u es una solución no trivial del problema (2.1), para la cual existe un único $\bar{t} \in (0,1)$ tal que $u'(\bar{t}) = 0$, entonces para cada $\rho \in (0,1/2)$ fijo, la solución u satisface*

$$u(t) \geq u(\bar{t})\frac{\rho/2}{1-\rho/2}, \quad \textit{para todo} \quad t \in [\rho, 1-\rho]. \tag{2.3}$$

La demostración de esta proposición se puede encontrar en [7], por lo que solo daremos una idea de los argumentos usados y únicamente se expondrá con detalle el caso que los autores han dejado al lector.
Sea $\rho \in (0,1/2)$ fijo. Notamos que efectivamente si $0 < \rho < 1/2$ entonces $1 > 1-\rho > 1/2 > \rho$, y por lo tanto $\rho < 1-\rho$.
Supongamos primero que $\bar{t} > \rho$ y consideramos la recta que une los puntos $(\bar{t}, u(\bar{t}))$ y $(\rho/2, u(\rho/2))$, es decir

$$l(t) = u(\bar{t}) + \frac{u(\rho/2) - u(\bar{t})}{\rho/2 - \bar{t}}(t - \bar{t}).$$

por la concavidad de u en $[\rho/2, \bar{t}]$ se tiene que $l(t) \leq u(t)$, es decir

$$\begin{aligned} u(t) &\geq u(\bar{t}) + \frac{u(\rho/2) - u(\bar{t})}{\rho/2 - \bar{t}}(t - \bar{t}) \\ &\geq u(\bar{t}) + \frac{u(\bar{t})}{\bar{t} - \rho/2}(t - \bar{t}) \\ &\geq u(\bar{t})\left(1 + \frac{t - \bar{t}}{\bar{t} - \rho/2}\right) \\ &\geq u(\bar{t})\left(\frac{t - \rho/2}{\bar{t} - \rho/2}\right), \end{aligned}$$

luego

$$u(t) \geq u(\bar{t})\frac{\rho/2}{1-\rho/2}, \quad \text{para todo} \quad t \in [\rho, \bar{t}]. \tag{2.4}$$

Suponiendo ahora que $\bar{t} \leq 1-\rho$ y considerando la recta que une los puntos $(\bar{t}, u(\bar{t}))$ y $(1-\rho/2, u(1-\rho/2))$, y argumentando de manera análoga (como se puede encontrar en [7]) se obtiene que,

$$u(t) \geq u(\bar{t})\frac{\rho/2}{1-\rho/2}, \quad \text{para todo } t \in [\bar{t}, 1-\rho]. \tag{2.5}$$

Así, si $\bar{t} \leq \rho$, el resultado se obtiene de (2.5), si $\rho < \bar{t} < 1-\rho$, (2.3) se obtiene de (2.4) y (2.5), y finalmente si $\bar{t} \geq 1-\rho$, entonces (2.3) se sigue de (2.4).

2.2 Un problema auxiliar

Consideremos ahora el siguiente problema

$$\begin{aligned} -(\phi(u'))' &\geq f(t, |v(t)|), & -(\psi(v'))' &\geq g(t, |u(t)|), \quad t \in (0,1) \\ \theta(u(0)) &= \beta_1 \theta(u'(0)), & \eta(v(0)) &= \beta_2 \eta(v'(0)) \\ \theta(u(1)) &= -\delta_1 \theta(u'(1)), & \eta(v(1)) &= -\delta_2 \eta(v'(1)), \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde $\beta_i, \delta_i \geq 0, (i = 1, 2)$, las funciones ϕ, ψ, θ, η, satisfacen (H_1), y f y g satisfacen (H_2).

Proposición 2.3. *Sean f y g tales que*

$$f_\infty(t) = g_\infty(t) = \infty \quad \textit{uniformemente para} \quad t \in [0, 1]. \tag{2.7}$$

Si existe una sucesión de soluciones de (2.6), $\{(u_k, v_k)\}$ tal que

$$\|(u_k, v_k)\| = \|u_k\| + \|v_k\| \to \infty \tag{2.8}$$

cuando $k \to \infty$, entonces existe una subsucesión $\{(u_j, v_j)\}$ tal que $u_j(t) \to \infty$ y $v_j(t) \to \infty$ uniformemente para $t \in [\rho, 1 - \rho]$, y $0 < \rho < 1/2$.

Demostración. Notamos que si u_k y v_k son soluciones de (2.6), entonces satisfacen también el problema (2.1), luego por la Proposición 2.1, se tiene que

$$u_k(t) > 0 \quad \text{y} \quad v_k(t) > 0 \quad \text{para} \quad \text{todo } t \in (0, 1), \tag{2.9}$$

ambas son cóncavas en este intervalo, y existe al menos un $t_k \in (0,1)$ y $r_k \in (0,1)$ tales que $u_k'(t_k) = 0$ con $u_k(t_k) = \|u_k\|$ y $v_k'(r_k) = 0$ con $v_k(r_k) = \|v_k\|$ respectivamente.
Supongamos que existe otro punto $\bar{t}_k \in (0, 1)$, digamos $\bar{t}_k > t_k$ tal que $u_k'(\bar{t}_k) = 0$, entonces por la concavidad de u_k se tiene que $u_k'(t) = 0$ para todo $t \in (t_k, \bar{t}_k)$, de donde $(\phi(u_k'(t)))' = 0$ para $t \in (t_k, \bar{t}_k)$ y entonces por (H_2), $f(t, |v(t)|) = 0$ para todo $t \in (t_k, \bar{t}_k)$, luego $v(t) = 0$ para todo t en este intervalo, lo que contradice (2.9). Por lo tanto existe un único $t_k \in (0, 1)$ tal que $u_k'(t_k) = 0$ con $u_k(t_k) = \|u_k\|$. De igual forma, existe un único $r_k \in (0,1)$ tal que $v_k'(r_k) = 0$ con $v_k(r_k) = \|v_k\|$.
Por otra parte, por (2.8) al menos una de las sucesiones $\{u_k\}$ o $\{v_k\}$ contiene una subsucesión cuya norma tiende a infinito cuando $k \to \infty$. Supongamos que existe $\{u_j\}$ subsucesión de $\{u_k\}$ tal que $\|u_j\| \to \infty$ cuando $j \to \infty$, entonces por la Proposición 2.2, se tiene que para $0 < \rho < 1/2$,

$$u_j(t) \geq \|u_j\| \frac{\rho/2}{1 - \rho/2} \quad \text{para} \quad \text{todo } t \in [\rho, 1 - \rho], \tag{2.10}$$

de donde $u_j \to \infty$ uniformemente en $[\rho, 1-\rho]$ para cualquier $\rho \in (0, 1/2)$.
De la misma forma probamos que $v_j \to \infty$ cuando $j \to \infty$, si en vez de $\{u_k\}$ la sucesión que contiene una subsucesión cuya norma tiende a infinito es $\{v_k\}$.
Por otra parte, de (2.7) se tiene que dado $N > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$g(t, |u_j(s)|) \geq N\phi(u_j(s)) \quad \forall s \in [\rho, 1-\rho] \quad \text{y} \quad j \geq j_0. \tag{2.11}$$

Supongamos que la sucesión generada por los puntos t_j, tiene una subsucesión t_i completamente contenida en $(0, 1/2]$, así para cada t_i:

$$g(t, |u_i(s)|) \geq N\phi(u_i(s)) \quad \text{para todo} \quad s \in [t_i, 1-\rho] \quad \text{e} \quad i \geq j_0, \tag{2.12}$$

integrando la segunda desigualdad en (2.6) sobre el intervalo $[t_i, t]$ para $t < \rho$, se obtiene

$$-\psi(v_i'(t)) \geq -\psi(v_i'(t_i)) + \int_{t_i}^{t} g(s, |u_i(s)|)ds,$$

entonces de (2.11) se tiene que

$$-v_i'(t) \geq \psi^{-1}\left(\int_{t_i}^{t} N\phi(u_i(s))ds\right) \quad \text{para} \quad t_i \leq t \leq 1-\rho.$$

Sea $m_i = \min\limits_{s\in[t_i,1-\rho]} \phi(u_i(s))$. Notamos que el mínimo de $\phi(u_i(s))$ se alcanza en el intervalo $[\rho, 1-\rho]$ aun cuando $t_i < \rho$, pues u_i alcanza su máximo en t_i, y al ser esta una función cóncava, necesariamente es decreciente en el intervalo $[t_i, 1-\rho]$, así por la monotonía de ϕ, se tiene que para $t_i < \rho$,

$$\min_{s\in[t_i,1-\rho]} \phi(u_i(s)) = \min_{s\in[\rho,1-\rho]} \phi(u_i(s)),$$

razón por la cual podemos considerar, sin pérdida de generalidad, el valor m_i como el mínimo de $\phi(u_i(s))$ sobre el intervalo $[t_i, 1-\rho]$.
Notamos también que $m_i \to \infty$ cuando $i \to \infty$, pues $u_i \to \infty$ cuando $i \to \infty$, así

$$-v_i'(t) \geq \psi^{-1}\left(Nm_i(t-t_i)\right), \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad t_i \leq t \leq 1-\rho. \tag{2.13}$$

Consideremos ahora $t \in [\frac{3-2\rho}{4}, 1-\rho]$, y notamos que $\frac{1}{2} < \frac{3-2\rho}{4} < 1-\rho$. Integrando (2.13) sobre $[t, 1-\rho]$ obtenemos

$$\begin{aligned} v_i(t) &\geq \int_t^{1-\rho} \psi^{-1}(Nm_i(s-t_i))ds \\ &\geq \int_t^{1-\rho} \psi^{-1}(Nm_i(t-\frac{1}{2}))ds \\ &\geq \psi^{-1}(Nm_i(t-\frac{1}{2}))(1-\rho-t), \end{aligned}$$

luego,

$$v_i(r_k) \geq v_i\Big(\frac{3-2\rho}{4}\Big) \geq \psi^{-1}\left(Nm_i\Big(\frac{3-2\rho}{4}-\frac{1}{2}\Big)\right)\left(1-\rho-\frac{3-2\rho}{4}\right)$$
$$\geq \psi^{-1}\left(Nm_i\Big(\frac{1-2\rho}{4}\Big)\right)\left(\frac{1-2\rho}{4}\right),$$

de donde $v_i \to \infty$ cuando $i \to \infty$, luego por la Proposición 2.2, se tiene que $v_i \to \infty$ uniformemente en $[\rho, 1-\rho]$ para $\rho \in (0, 1/2)$, lo que prueba la proposición en el caso en que $t_k < 1/2$.
Si $t_k > 1/2$ para todo $k \in \mathbb{N}$, hacemos el cambio de variable $t = 1-s$, de esta forma se obtienen,

$$\widetilde{f}(s,x) = f(1-s,x), \quad \widetilde{g}(s,x) = g(1-s,x)$$

y

$$u_k(t) = u_k(1-s) = \widetilde{u}_k(s), \quad v_k(t) = v_k(1-s) = \widetilde{v}_k(s),$$

de este modo, $\widetilde{u}'_k(s) = -u'_k(t)$, $\widetilde{v}'_k(s) = -u'_k(t)$ y entonces

$$\begin{aligned}-(\phi(\widetilde{u}'_k(s)))' = (\phi(u'_k(t)))' \geq -(\phi(u'_k(t)))' &\geq f(t,|v_k(t)|)\\ &= f(1-s,|v_k(1-s)|)\\ &= \widetilde{f}(s,|\widetilde{v}_k(s)|)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}-(\psi(\widetilde{v}'_k(s)))' = (\psi(v'_k(t)))' \geq -(\psi(v'_k(t)))' &\geq g(t,|u_k(t)|)\\ &= g(1-s,|u_k(1-s)|)\\ &= \widetilde{g}(s,|\widetilde{u}_k(s)|).\end{aligned}$$

Por lo tanto (u_k, v_k) satisface el problema

$$\begin{aligned}-(\phi(\widetilde{u}'_k(s)))' \geq \widetilde{f}(s,|\widetilde{v}_k(s)|), &\quad -(\psi(\widetilde{v}'_k(s)))' \geq \widetilde{g}(s,|\widetilde{u}_k(s)|) \quad s \in (0,1)\\ \theta(\widetilde{u}_k(0)) = \delta_1\theta(\widetilde{u}'_k(0)), &\quad \eta(\widetilde{v}_k(0)) = \delta_2\eta(\widetilde{v}'_k(1))\\ \theta(\widetilde{u}_k(1)) = -\beta_1\theta(\widetilde{u}'_k(1)) &\quad \eta(\widetilde{v}_k(1)) = -\beta_2\eta(\widetilde{v}'_k(1)).\end{aligned}$$

Notamos que $0 = u'_k(t_k) = -\widetilde{u}'_k(s_k)$ y $0 = v'_k(r_k) = -\widetilde{v}'_k(r_k)$ con $s_k = 1-t_k$, de modo que $s_k \in (0, \frac{1}{2})$, luego como $\widetilde{f}_\infty = \widetilde{g}_\infty = \infty$ uniformemente para $s \in [0,1]$ y satisfacen la condición (H_2), el argumento previo es válido también en este caso, completándose así la prueba de la proposición.

□

Proposición 2.4. *Sean f y g tales que $f_\infty(t) = g_\infty(t) = \infty$ uniformemente para $t \in [0,1]$, y supongamos que existe una sucesión de soluciones del problema auxiliar (2.6), $\{(u_k, v_k)\}$ que satisface (2.8), entonces existe $\tau > 1$ tal que*

$$\limsup_{s\to\infty}\frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} = \infty \quad \textit{o bien} \quad \limsup_{s\to\infty}\frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} = \infty. \tag{2.14}$$

Demostración. Sea $N > 0$, y denotemos por $\{t_k\}$ y $\{r_k\}$, a los únicos puntos tales que $\|u_k\| = u_k(t_k)$ y $\|v_k\| = v_k(r_k)$ respectivamente. Podemos suponer que, por medio de una subsucesión si es necesario, existen t_0 y r_0 tales que $t_k \to t_0$ y $r_k \to r_0$ cuando $k \to \infty$, y sin pérdida de generalidad que $t_0 \leq r_0$.
Supongamos primero que $t_0 \in (0, 1]$, entonces para $0 < \rho < t_0/4$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_k \geq t_0 - \rho$ y $r_k \geq r_0 - \rho$ para todo $k \geq k_0$, y gracias a que f y g son superlineales en infinito, podemos suponer que para todo $k \geq k_0$,

$$f(t, |v_k(t)|) \geq N\psi(v_k(t)) \quad \text{y} \quad g(t, |u_k(t)|) \geq N\phi(u_k(t)) \tag{2.15}$$

para todo $t \in [\rho, 1 - \rho]$. Ahora, para $s \in [\rho, t_0 - \rho]$, integrando ambas desigualdades en (2.6) sobre $[s, t_k]$ y $[s, r_k]$ respectivamente, y gracias a (2.15) se tiene que

$$u_k'(s) \geq \phi^{-1}\left(\int_s^{t_k} f(\tau, |v_k(\tau)|)d\tau\right) \geq \phi^{-1}\left(N\int_s^{t_0-\rho} \psi(v_k(\tau))d\tau\right) \tag{2.16}$$

y

$$v_k'(s) \geq \psi^{-1}\left(\int_s^{r_k} g(\tau, |u_k(\tau)|)d\tau\right) \geq \psi^{-1}\left(N\int_s^{r_0-\rho} \phi(u_k(\tau))d\tau\right), \tag{2.17}$$

entonces, integrando (2.16) y (2.17) sobre $[\rho, t]$ para $t \in [\rho, t_0 - \rho]$ se tiene que

$$u_k(s) \geq \int_\rho^t \phi^{-1}\left(N\int_s^{t_0-\rho} \psi(v_k(\tau))d\tau\right) ds \tag{2.18}$$

y

$$v_k(s) \geq \int_\rho^t \psi^{-1}\left(N\int_s^{r_0-\rho} \phi(u_k(\tau))d\tau\right) ds. \tag{2.19}$$

Así, como u_k y v_k son crecientes en el intervalo $[\rho, t_0 - \rho]$ se obtienen

$$u_k(s) \geq \int_\rho^t \phi^{-1}\left(N\int_t^{t_0-\rho} \psi(v_k(t))d\tau\right) ds$$

y

$$v_k(s) \geq \int_\rho^t \psi^{-1}\left(N\int_t^{r_0-\rho} \phi(u_k(t))d\tau\right) ds,$$

luego, para $t \in [2\rho, t_0 - 2\rho]$ tenemos que:

$$\begin{aligned} u_k(t) &\geq \phi^{-1}\Big(N\psi(v_k(t))(t_0 - \rho - t)\Big)(t - \rho) \\ &\geq \rho\phi^{-1}(\rho N\psi(v_k(t))) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} v_k(t) &\geq \psi^{-1}\Big(N\phi(u_k(t))(r_0 - \rho - t)\Big)(t - \rho) \\ &\geq \psi^{-1}\Big(N\phi(u_k(t))(t_0 - \rho - t)\Big)(t - \rho) \\ &\geq \rho\psi^{-1}(\rho N\phi(u_k(t))), \end{aligned}$$

de donde,

$$\phi\left(\frac{1}{\rho}u_k(t)\right) \geq N\rho\psi(v_k(t)) \quad \text{y} \quad \psi\left(\frac{1}{\rho}v_k(t)\right) \geq N\rho\phi(u_k(t)) \tag{2.20}$$

para $t \in [2\rho, t_0 - 2\rho]$, y por lo tanto

$$\frac{\phi(\frac{1}{\rho}u_k(t))}{\phi(u_k(t))}\frac{\psi(\frac{1}{\rho}v_k(t))}{\psi(v_k(t))} \geq (N\rho)^2,$$

lo cual implica que

$$\left(\limsup_{s\to\infty}\frac{\phi(\frac{1}{\rho}s)}{\phi(s)}\right)\left(\limsup_{s\to\infty}\frac{\psi(\frac{1}{\rho}s)}{\psi(s)}\right) \geq (N\rho)^2,$$

donde N fue escogido arbitrariamente grande, y por lo tanto se cumple (2.14).
Para el caso en que $t_0 = 0$ y $r_0 < 1$, consideramos $0 < \rho < r_0/4$ y escogemos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_k \leq \rho$ y $r_k \leq r_0 + \rho$ para todo $k \geq k_0$.
Integrando ambas desigualdades en (2.6) sobre $[t_k, s]$ y $[r_k, s]$ respectivamente, para $s \in [\rho, 1-\rho]$, se obtiene que

$$-\phi(u_k'(s)) \geq \int_{t_k}^{s} f(\tau, |v_k(\tau)|)d\tau \quad \text{y} \quad \psi(v_k'(s)) \geq \int_{r_k}^{s} g(\tau, |u_k(\tau)|)d\tau,$$

y por (2.15),

$$-\phi(u_k'(s)) \geq \int_{t_k}^{s} N\psi(v_k(\tau))d\tau \quad \text{y} \quad -\psi(v_k'(s)) \geq \int_{r_k}^{s} N\phi(u_k(\tau))d\tau,$$

luego

$$-u_k'(s) \geq \phi^{-1}\left(\int_{\rho}^{s} N\psi(v_k(\tau))d\tau\right)$$

y

$$-v_k'(s) \geq \psi^{-1}\left(\int_{r_0+\rho}^{s} N\phi(u_k(\tau))d\tau\right).$$

Así, para $t \in [\rho, 1-\rho]$, integrando ambas expresiones sobre $[t, 1-\rho]$ se obtienen

$$u_k(t) \geq \int_{t}^{1-\rho} \phi^{-1}\left(N\int_{\rho}^{s} \psi(v_k(\tau))d\tau\right)ds$$

y

$$v_k(t) \geq \int_{t}^{1-\rho} \psi^{-1}\left(N\int_{r_0+\rho}^{s} \phi(u_k(\tau))d\tau\right)ds$$

luego, como u_k y v_k decrecen en el intervalo $[r_0+\rho, 1-\rho]$, se tiene que

$$u_k(t) \geq \int_t^{1-\rho} \phi^{-1}\left(N\int_\rho^t \psi(v_k(t))d\tau\right) ds \geq \int_t^{1-\rho} \phi^{-1}\left(N\int_{r_0+\rho}^t \psi(v_k(t))d\tau\right) ds$$

y

$$v_k(t) \geq \int_t^{1-\rho} \psi^{-1}\left(N\int_{r_0+\rho}^t \phi(u_k(t))d\tau\right) ds,$$

entonces,

$$u_k(t) \geq (1-\rho-t)\phi^{-1}\Big(N(t-\rho-r_0)\psi(v_k(t))\Big)$$

y

$$v_k(t) \geq (1-\rho-t)\psi^{-1}\Big(N(t-\rho-r_0)\phi(v_k(t))\Big).$$

Así, para $t \in [r_0+2\rho, 1-2\rho]$ se tiene que

$$u_k(t) \geq \rho\phi^{-1}\Big(N\rho\psi(v_k(t))\Big) \quad \text{y} \quad v_k(t) \geq \rho\psi^{-1}\Big(N\rho\phi(v_k(t))\Big),$$

de donde, para $t \in [r_0+2\rho, 1-2\rho]$

$$\phi\left(\frac{1}{\rho}u_k(t)\right) \geq N\rho\psi(v_k(t)) \quad \text{y} \quad \psi\left(\frac{1}{\rho}v_k(t)\right) \geq N\rho\phi(u_k(t)),$$

y por lo tanto

$$\frac{\phi\left(\frac{1}{\rho}u_k(t)\right)}{\phi(u_k(t))}\frac{\psi\left(\frac{1}{\rho}v_k(t)\right)}{\psi(v_k(t))} \geq (N\rho)^2,$$

de donde se obtiene (2.14).

Finalmente, si $t_0 = 0$ y $r_0 = 1$, consideramos $0 < \rho < 1/4$ y escogemos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_k \geq \rho/2$ y $r_k \leq 1-\rho/2$ para todo $k \geq k_0$, entonces de (2.3) se tienen

$$u_k(t) \geq u_k(t_k)\frac{\rho/2}{1-\rho/2} \quad \text{para todo } t \in [\rho, 1-\rho] \tag{2.21}$$

y

$$v_k(t) \geq v_k(r_k)\frac{\rho/2}{1-\rho/2} \quad \text{para todo } t \in [\rho, 1-\rho], \tag{2.22}$$

integrando ambas desigualdades en (2.6) sobre $[t_k, s]$ y $[s, r_k]$ respectivamente, para $s \in [\rho, 1-\rho]$, se obtienen

$$-u_k'(s) \geq \phi^{-1}\left(\int_{t_k}^s Nf(\tau, |v_k(\tau)|)d\tau\right) \quad \text{y} \quad v_k'(s) \geq \psi^{-1}\left(\int_s^{r_k} Ng(\tau, |u_k(\tau)|)d\tau\right),$$

luego, por (2.15) se tiene que

$$-u_k'(s) \geq \phi^{-1}\left(\int_{t_k}^s N\psi(v_k(\tau))d\tau\right) \tag{2.23}$$

y

$$v_k'(s) \geq \psi^{-1}\left(\int_s^{r_k} N\phi(u_k(\tau))d\tau\right). \tag{2.24}$$

Así, integrando (2.23) y (2.24) sobre $[t, 1-\rho]$ y $[\rho, t]$ respectivamente, para $t \in [\rho, 1-\rho]$, obtenemos que

$$u_k(t) \geq \int_t^{1-\rho} \phi^{-1}\left(N\int_\rho^s \psi(v_k(\tau))d\tau\right) ds \geq \int_t^{1-\rho} \phi^{-1}\left(N\int_\rho^t \psi(v_k(\tau))d\tau\right) ds$$

y

$$v_k(t) \geq \int_\rho^t \psi^{-1}\left(N\int_s^{1-\rho} \phi(v_k(\tau))d\tau\right) ds \geq \int_\rho^t \psi^{-1}\left(N\int_t^{1-\rho} \phi(v_k(\tau))d\tau\right) ds,$$

entonces para $t \in [\rho, 1-\rho]$, donde u_k es decreciente y v_k creciente, se tiene que

$$u_k(t) \geq \int_t^{1-\rho} \phi^{-1}\left(N\int_\rho^t \psi(v_k(\rho))d\tau\right) ds \geq (1-\rho-t)\phi^{-1}\Big(N(t-\rho)\psi(v_k(\rho))\Big)$$

y

$$v_k(t) \geq \int_\rho^t \psi^{-1}\left(N\int_t^{1-\rho} \phi(u_k(1-\rho))d\tau\right) ds \geq (t-\rho)\psi^{-1}\Big(N(1-\rho-t)\phi(u_k(1-\rho))\Big),$$

luego, para $t \in [2\rho, 1-2\rho]$ obtenemos

$$u_k(t) \geq \rho\phi^{-1}\Big(N\rho\psi(v_k(\rho))\Big) \quad \text{y} \quad v_k(t) \geq \rho\psi^{-1}\Big(N\rho\phi(u_k(1-\rho))\Big), \tag{2.25}$$

donde, de (2.21) y (2.22):

$$u_k(1-\rho) \geq \frac{\rho/2}{1-\rho/2}\|u_k\| \quad \text{y} \quad v_k(\rho) \geq \frac{\rho/2}{1-\rho/2}\|v_k\|,$$

reemplazando en (2.25), se obtiene que

$$\|u_k\| \geq u_k(t) \geq \rho\phi^{-1}\left(N\rho\psi\left(\frac{\rho/2}{1-\rho/2}\|v_k\|\right)\right)$$

y

$$\|v_k\| \geq v_k(t) \geq \rho\psi^{-1}\left(N\rho\phi\Big(\frac{\rho/2}{1-\rho/2}\|u_k\|\Big)\right),$$

y por tanto,

$$\phi\Big(\frac{1}{\rho}\|u_k\|\Big) \geq N\rho\psi\Big(\frac{\rho/2}{1-\rho/2}\|v_k\|\Big) \quad \text{y} \quad \psi\Big(\frac{1}{\rho}\|v_k\|\Big) \geq N\rho\phi\Big(\frac{\rho/2}{1-\rho/2}\|u_k\|\Big),$$

lo cual implica que

$$\frac{\phi(\frac{1}{\rho}\|u_k\|)}{\phi\big(\frac{\rho/2}{1-\rho/2}\|u_k\|\big)}\frac{\psi(\frac{1}{\rho}\|v_k\|)}{\psi\big(\frac{\rho/2}{1-\rho/2}\|v_k\|\big)} \geq (N\rho)^2.$$

Así, si llamamos $\mu_k = \frac{\rho/2}{1-\rho/2}\|u_k\|$ y $\nu_k = \frac{\rho/2}{1-\rho/2}\|v_k\|$, esta última expresión se puede escribir como

$$\frac{\phi(\frac{2}{\rho^2}\mu_k)}{\phi(\mu_k)}\frac{\psi(\frac{2}{\rho^2}\nu_k)}{\psi(\nu_k)} \geq (N\rho)^2, \tag{2.26}$$

donde N fue escogido arbitrariamente grande, y por lo tanto

$$\limsup_{s\to\infty}\frac{\phi(\frac{2}{\rho^2}s)}{\phi(s)} = \infty \quad \text{o} \quad \limsup_{s\to\infty}\frac{\psi(\frac{2}{\rho^2}s)}{\psi(s)} = \infty.$$

$\square$

Capítulo 3

Formulación abstracta

3.1 Construcción del operador en $L^1(0,1) \times L^1(0,1)$

Consideremos las funciones $h, \widetilde{h} \in L^1(0,1)$, y el sistema:

$$\begin{aligned} -(\phi(u'))' = |h(t)|, &\quad -(\psi(v'))' = |\widetilde{h}(t)|, \quad t \in (0,1) \\ \theta(u(0)) = \beta_1 \theta(u'(0)), &\quad \eta(v(0)) = \beta_2 \eta(v'(0)) \\ \theta(u(1)) = -\delta_1 \theta(u'(1)), &\quad \eta(v(1)) = -\delta_2 \eta(v'(1)), \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $\beta_i, \delta_i \geq 0$ para $i = 1, 2$.

Probaremos que el sistema (3.1) es equivalente a una ecuación abstracta.

Sea (u, v) una solución del sistema (3.1). Integrando ambas ecuaciones sobre el intervalo $(0, t)$, obtenemos

$$\phi(u'(t)) = \phi(u'(0)) - \int_0^t |h(\tau)| d\tau \quad \text{y} \quad \psi(v'(t)) = \psi(v'(0)) - \int_0^t |\widetilde{h}(\tau)| d\tau,$$

luego

$$u'(t) = \phi^{-1}\left(\phi(u'(0)) - \int_0^t |h(\tau)| d\tau\right) \tag{3.2}$$

y

$$v'(t) = \psi^{-1}\left(\psi(v'(0)) - \int_0^t |\widetilde{h}(\tau)| d\tau\right), \tag{3.3}$$

integrando nuevamente ambas ecuaciones, ahora sobre el intervalo $(t, 1)$ obtenemos

$$u(t) = u(1) - \int_t^1 \phi^{-1}\left(\phi(u'(0)) - \int_0^s |h(\tau)| d\tau\right) ds \tag{3.4}$$

y

$$v(t) = v(1) - \int_t^1 \psi^{-1}\left(\psi(v'(0)) - \int_0^s |\widetilde{h}(\tau)| d\tau\right) ds. \tag{3.5}$$

Si llamamos $r := \phi(u'(0))$ y $\widetilde{r} := \psi(v'(0))$, usando las condiciones de borde en $t = 1$, obtenemos que

$$u(1) = -\theta^{-1}(\delta_1\theta(u'(1))) \quad \text{y} \quad v(1) = -\eta^{-1}(\delta_2\eta(v'(1))),$$

donde $u'(1)$ y $v'(1)$ se obtienen de (3.2) y (3.3) respectivamente, es decir:

$$u'(1) = \phi^{-1}\left(r - \int_0^1 |h(\tau)|d\tau\right) \quad \text{y} \quad v'(1) = \psi^{-1}\left(\widetilde{r} - \int_0^1 |\widetilde{h}(\tau)|d\tau\right).$$

Así, si definimos las funciones $\gamma_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, como:

$$\gamma_1(s) := \theta^{-1}(\delta_1\theta(\phi^{-1}(s))) \quad \text{y} \quad \gamma_2(s) := \eta^{-1}(\delta_2\eta(\psi^{-1}(s))) \tag{3.6}$$

Las ecuaciones (3.4) y (3.5), pueden expresarse como

$$u(t) = -\gamma_1\left(r - \int_0^1 |h(\tau)|d\tau\right) - \int_t^1 \phi^{-1}\left(r - \int_0^s |h(\tau)|d\tau\right) ds \tag{3.7}$$

y

$$v(t) = -\gamma_2\left(\widetilde{r} - \int_0^1 |\widetilde{h}(\tau)|d\tau\right) - \int_t^1 \psi^{-1}\left(\widetilde{r} - \int_0^s |\widetilde{h}(\tau)|d\tau\right) ds. \tag{3.8}$$

Notamos que para $\delta_i > 0$, $i = 1, 2$, las funciones γ_1 y γ_2, son homeomorfismos impares y crecientes, si $\delta_1 = 0$ entonces $\gamma_1 \equiv 0$ y del mismo modo, si $\delta_2 = 0$, entonces $\gamma_2 \equiv 0$. Por otra parte, de las condiciones de borde en $t = 0$, se obtienen las siguientes expresiones para $u(0)$ y $v(0)$:

$$u(0) = \theta^{-1}(\beta_1\theta(u'(0))) \quad \text{y} \quad v(0) = \eta^{-1}(\beta_2\eta(v'(0))),$$

donde, $u'(0)$ y $v'(0)$ se obtienen de la definición de r y $\widetilde{r}$ respectivamente, es decir $u'(0) = \phi^{-1}(r)$ y $v'(0) = \psi^{-1}(\widetilde{r})$.
De esta forma,

$$u(0) = \mu_1(r) \quad \text{y} \quad v(0) = \mu_2(\widetilde{r}),$$

donde las funciones $\mu_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, para $i = 1, 2$, están dadas por

$$\mu_1(s) := \theta^{-1}(\beta_1\theta(\phi^{-1}(s))) \quad \text{y} \quad \mu_2(s) := \eta^{-1}(\beta_2\eta(\psi^{-1}(s))).$$

Para $\beta_i > 0$ $(i = 1, 2)$, ambas funciones son homeomorfismos impares y crecientes, si $\beta_i = 0$, entonces $\mu_i \equiv 0$ para $i = 1, 2$.
Así, evaluando (3.7) y (3.8) en $t = 0$, obtenemos

$$\mu_1(r) + \gamma_1\left(r - \int_0^1 |h(\tau)|d\tau\right) + \int_0^1 \phi^{-1}\left(r - \int_0^s |h(\tau)|d\tau\right) ds = 0$$

y

$$\mu_2(\widetilde{r}) + \gamma_2 \left(\widetilde{r} - \int_0^1 |\widetilde{h}(\tau)| d\tau \right) + \int_0^1 \psi^{-1} \left(\widetilde{r} - \int_0^s |\widetilde{h}(\tau)| d\tau \right) ds = 0,$$

es decir, r y $\widetilde{r}$ deben satisfacer las ecuaciones $G_1(r,h) = 0$ y $G_2(\widetilde{r},\widetilde{h}) = 0$ respectivamente, donde $G_i : \mathbb{R} \times L^1(0,1) \to \mathbb{R}$, $(i = 1,2)$ se definen como:

$$G_1(r,h) := \mu_1(r) + \gamma_1 \left(r - \int_0^1 |h(\tau)| d\tau \right) + \int_0^1 \phi^{-1} \left(r - \int_0^s |h(\tau)| d\tau \right) ds \quad (3.9)$$

y

$$G_2(\widetilde{r},\widetilde{h}) = \mu_2(\widetilde{r}) + \gamma_2 \left(\widetilde{r} - \int_0^1 |\widetilde{h}(\tau)| d\tau \right) + \int_0^1 \psi^{-1} \left(\widetilde{r} - \int_0^s |\widetilde{h}(\tau)| d\tau \right) ds. \quad (3.10)$$

Notamos que para $h \in L^1(0,1)$ y $\widetilde{h} \in L^1(0,1)$ fijas, G_1 y G_2 son funciones estrictamente crecientes de r y $\widetilde{r}$ respectivamente, que tienden a $-\infty$ cuando r o $\widetilde{r}$ tienden a $-\infty$, y a $+\infty$, cuando r o $\widetilde{r}$ tienden a $+\infty$. Así, dadas $h \in L^1(0,1)$ y $\widetilde{h} \in L^1(0,1)$ existe un único $r = \chi_1(h)$ tal que $G_1(r,h) = 0$, y un único $\widetilde{r} = \chi_2(\widetilde{h})$ tal que $G_2(\widetilde{r},\widetilde{h}) = 0$. Por lo tanto, si u y v satisfacen (3.7) y (3.8) respectivamente, entonces (u,v) es la única solución del sistema (3.1).

Proposición 3.1. *Las funciones $G_i : \mathbb{R} \times L^1(0,1) \to \mathbb{R}$ y $\chi_i : L^1(0,1) \to \mathbb{R}$, $(i = 1,2)$ son continuas.*

Demostración. Probamos solo la continuidad de G_1, pues la continuidad de G_2 se demuestra de la misma manera.
Sean $r_n \to r$ en $\mathbb{R}$ y $h_n \to h$ en $L^1(0,1)$.
Como μ_1 es una función continua, se tiene que $\mu_1(r_n) \to \mu_1(r)$ en $\mathbb{R}$.
Por otra parte

$$\left| \int_0^\tau |h_n(s)| ds - \int_0^\tau |h(s)| ds \right| \leq \int_0^1 |h_n(s) - h(s)| ds = \|h_n - h\|_{L^1} \to 0 \quad (3.11)$$

cuando $n \to \infty$, por lo tanto

$$\int_0^\tau |h_n(s)| ds \to \int_0^\tau |h(s)| ds \quad \text{uniformemente para } \tau \in [0,1], \text{ cuando } n \to \infty. \quad (3.12)$$

Así,

$$\left(r_n - \int_0^s |h_n(\tau)| d\tau \right) \to \left(r - \int_0^s |h(\tau)| d\tau \right) \quad \text{uniformemente en } [0,1], \quad (3.13)$$

y entonces, por la continuidad de ϕ^{-1}

$$\phi^{-1}\left(r_n - \int_0^s |h_n(\tau)|d\tau\right) \to \phi^{-1}\left(r - \int_0^s |h(\tau)|d\tau\right) \quad \text{uniformemente en } [0,1]. \tag{3.14}$$

Ahora, como

$$\left|\int_0^1 |h_n(\tau)| - \int_0^1 |h(\tau)|d\tau\right| \leq \|h_n - h\|_{L^1} \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty, \tag{3.15}$$

se tiene que

$$\int_0^1 |h_n(\tau)|d\tau \to \int_0^1 |h(\tau)|d\tau,$$

y entonces, gracias a la continuidad de γ_1,

$$\gamma_1\left(r_n - \int_0^1 |h_n(\tau)|d\tau\right) \to \gamma_1\left(r - \int_0^1 |h(\tau)|d\tau\right).$$

Por lo tanto $G_1(r_n, h_n) \to G_1(r, h)$ en $\mathbb{R}$, es decir G_1 es continua.

Para probar que χ_1 es una función continua (la demostración de la continuidad de χ_2 es análoga), suponemos que $h_n \to h$ en $L^1(0,1)$ y que $r_n = \chi_1(h_n)$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, r_n satisface $G_1(r_n, h_n) = 0$ es decir,

$$G_1(r_n, h_n) := \mu_1(r_n) + \gamma_1\left(r_n - \int_0^1 |h_n(\tau)|d\tau\right) + \int_0^1 \phi^{-1}\left(r_n - \int_0^s |h_n(\tau)|d\tau\right) ds = 0$$

donde, de (3.7) se obtiene que

$$\gamma_1\left(r_n - \int_0^1 |h_n(\tau)|d\tau\right) = -u(1),$$

y $-u(1) \leq 0$ como consecuencia de la Proposición 2.1, por lo tanto,

$$\gamma_1\left(r_n - \int_0^1 |h_n(\tau)|d\tau\right) < 0,$$

luego, como γ_1 es una función impar y creciente, necesariamente se tiene que

$$r_n - \int_0^1 |h_n(\tau)|d\tau \leq 0,$$

y entonces

$$r_n \leq \int_0^1 |h_n(\tau)|d\tau = \|h_n\|_{L^1}.$$

Por lo tanto, $\{r_n\}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$, luego cualquier subsucesión, digamos $\{r_{n_k}\}$, de ella contiene una subsucesión $\{r_{n'_k}\}$ que converge a algún r_0 en $\mathbb{R}$. Así, como $G_1(r_{n'_k}, h_{n'_k}) = 0$ y G_1 es continua en $\mathbb{R} \times L^1(0,1)$, se tiene que $G_1(r_{n'_k}, h_{n'_k}) \to G_1(r_0, h) = 0$ cuando $n'_k \to \infty$, de donde $r_n = \chi(h_n) \to r_0 = \chi(h)$, y por lo tanto χ es continua. □

Ahora, definiendo $\mathcal{T}_1 : L^1(0,1) \to C[0,1]$ como

$$\mathcal{T}_1(h)(t) := -\gamma_1\left(\chi_1(h) - \int_0^1 |h(\tau)|d\tau\right) - \int_t^1 \phi^{-1}\left(\chi_1(h) - \int_0^s |h(\tau)|d\tau\right) ds \quad (3.16)$$

y $\mathcal{T}_2 : L^1(0,1) \to C[0,1]$ como

$$\mathcal{T}_2(\widetilde{h})(t) := -\gamma_2\left(\chi_2(\widetilde{h}) - \int_0^1 |\widetilde{h}(\tau)|d\tau\right) - \int_t^1 \psi^{-1}\left(\chi_2(\widetilde{h}) - \int_0^s |\widetilde{h}(\tau)|d\tau\right) ds, \quad (3.17)$$

se tiene que la única solución de (3.1), satisface la ecuación

$$(u, v) = \mathcal{T}(h, \widetilde{h}), \quad (3.18)$$

donde $\mathcal{T}(h, \widetilde{h}) := (\mathcal{T}_1(h), \mathcal{T}_2(\widetilde{h}))$.

3.2 Extendiendo el operador a $C[0,1] \times C[0,1]$

Proposición 3.2. *El operador $\mathcal{T}$ es continuo y cada una de sus componentes transforma conjuntos acotados de $L^1(0,1)$ en conjuntos relativamente compactos de $C[0,1]$, y por lo tanto $\mathcal{T}$ es un operador completamente continuo.*

Demostración. Demostramos solo la continuidad de la primera componente de $\mathcal{T}$, pues para probar la continuidad de $\mathcal{T}_2$, se argumenta de la misma manera.
Sean, $\{h_n\}$ una sucesión de funciones en $L^1(0,1)$ y $h \in L^1(0,1)$, tales que $h_n \to h$ en $L^1(0,1)$. De (3.15), se tiene que

$$\int_0^1 |h_n(\tau)|d\tau \to \int_0^1 |h(\tau)|d\tau, \quad \text{cuando } n \to \infty, \quad (3.19)$$

y gracias a que χ_1 es una función continua se tiene que $\chi(h_n) \to \chi(h)$, luego por la continuidad de γ_1,

$$\gamma_1\left(\chi_1(h_n) - \int_0^1 |h_n(\tau)|d\tau\right) \to \gamma_1\left(\chi_1(h) - \int_0^1 |h(\tau)|d\tau\right) \quad (3.20)$$

cuando $n \to \infty$.
Por otra parte, de (3.12) y (3.13), con $r_n = \chi_1(h_n)$ y $r = \chi_1(h)$, y gracias a la continuidad de ϕ^{-1}, se tiene que

$$\phi^{-1}\left(\chi_1(h_n) - \int_0^s |h_n(\tau)|d\tau\right) \to \phi^{-1}\left(\chi_1(h) - \int_0^s |h(\tau)|d\tau\right) \tag{3.21}$$

uniformemente en $[0,1]$, luego $\mathcal{T}_1(h_n)(t) \to \mathcal{T}_1(h)(t)$ uniformemente para todo $t \in [0,1]$ cuando $n \to \infty$, y por lo tanto $\mathcal{T}_1$ es continuo.

Consideremos ahora $\{h_n\}$ y $\{\widetilde{h}_n\}$ sucesiones acotadas en $L^1(0,1)$ y sea $M > 0$ tal que

$$\|h_n\|_{L^1(0,1)} \leq M \quad \text{y} \quad \|\widetilde{h}_n\|_{L^1(0,1)} \leq M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{3.22}$$

Notamos que al ser $\{h_n\}$ acotada y $\chi_1 : L^1(0,1) \to \mathbb{R}$ continua, entonces $\chi_1(h_n)$ es también acotada en $\mathbb{R}$, es decir existe una constante positiva m_0, tal que $|\chi(h_n)| \leq m_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}_1(h_n)(t)| &\leq \left| -\gamma_1\left(\chi_1(h_n) - \int_0^1 |h_n(\tau)|d\tau\right) - \int_t^1 \phi^{-1}\left(\chi_1(h_n) - \int_0^s |h_n(\tau)|d\tau\right) ds \right| \\
&\leq \left| \gamma_1\left(-\chi_1(h_n) + \int_0^1 |h_n(\tau)|d\tau\right) + \int_t^1 \phi^{-1}\left(-\chi_1(h_n) + \int_0^s |h_n(\tau)|d\tau\right) ds \right| \\
&\leq \left| \gamma_1\left(\|h_n\|\right) + \int_t^1 \phi^{-1}\left(\int_0^s |h_n(\tau)|d\tau\right) ds \right| \\
&\leq \left| \gamma_1\left(\|h_n\|\right) + \int_t^1 \phi^{-1}\left(\|h_n\|\right) ds \right| \\
&\leq \left|\gamma_1\left(\|h_n\|\right)\right| + \left|\phi^{-1}\left(\|h_n\|\right)\right|(1-t) \\
&\leq \left|\gamma_1(M)\right| + \left|\phi^{-1}(M)\right|(1-t),
\end{aligned}$$

luego,

$$\|\mathcal{T}_1(h_n)\| = \sup_{t\in[0,1]} |\mathcal{T}_1(h_n)(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |\gamma_1(M)| + \sup_{t\in[0,1]} \left|\phi^{-1}(M)(1-t)\right| \leq \gamma_1(M). \tag{3.23}$$

Por lo tanto, la sucesión $\{\mathcal{T}_1(h_n)\}$ es uniformemente acotada. De la misma forma se prueba que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\|\mathcal{T}_2(h_n)\| = \sup_{t\in[0,1]} |\mathcal{T}_2(\widetilde{h}_n)(t)| \leq \gamma_2(M). \tag{3.24}$$

Así, las sucesiones $\{\mathcal{T}_1(h_n)\}$ y $\{\mathcal{T}_2(\widetilde{h}_n)\}$ son uniformemente acotadas en $C[0,1]$, y además

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}_1'(h_n)(t)| &= \left|-\phi^{-1}\left(\chi_1(h_n) - \int_0^1 |h_n(\tau)|d\tau\right) + \phi^{-1}\left(\chi_1(h_n) - \int_0^t |h_n(\tau)|d\tau\right)\right| \\
&= \left|\phi^{-1}\left(-\chi_1(h_n) + \int_0^1 |h_n(\tau)|d\tau\right) - \phi^{-1}\left(-\chi_1(h_n) + \int_0^t |h_n(\tau)|d\tau\right)\right| \\
&\leq \left|\phi^{-1}\left(\int_0^1 |h_n(\tau)|d\tau\right) - \phi^{-1}\left(\int_0^t |h_n(\tau)|d\tau\right)\right| \\
&\leq \left|\phi^{-1}\left(\int_0^1 |h_n(\tau)|d\tau\right)\right| + \left|\phi^{-1}\left(\int_0^t |h_n(\tau)|d\tau\right)\right| \\
&\leq 2\left|\phi^{-1}\left(\|h_n\|\right)\right| \leq 2\left|\phi^{-1}(M)\right|,
\end{aligned}$$

de donde

$$\|\mathcal{T}_1'(h_n)\| \leq 2\left|\phi^{-1}(M)\right|, \tag{3.25}$$

y análogamente se demuestra que

$$\|\mathcal{T}_2'(\widetilde{h}_n)\| \leq 2\left|\psi^{-1}(M)\right|. \tag{3.26}$$

Es decir, $\{\mathcal{T}_1(h_n)\}$ y $\{\mathcal{T}_2(\widetilde{h}_n)\}$ son familias de operadores continuos de derivada acotada y por lo tanto equicontinuas, luego por el Teorema de Arzelà-Ascoli existen subsucesiones convergentes de $\{\mathcal{T}_1(h_n)\}$ y $\{\mathcal{T}_2(\widetilde{h}_n)\}$, de donde se concluye que $\mathcal{T}$ transforma conjuntos acotados de $(L^1(0,1))^2$ en conjuntos relativamente compactos de $(C[0,1])^2$ y entonces es un operador completamente continuo.

□

Ahora, reescribimos el problema (1.11) como:

$$\begin{aligned}
(\phi(u'))' + f(t,|v(t)|) = 0, &\quad (\psi(v'))' + g(t,|u(t)|) = 0, \quad t \in (0,1) \\
\theta(u(0)) = \beta_1\theta(u'(0)), &\quad \eta(v(0)) = \beta_2\eta(v'(0)) \\
\theta(u(1)) = -\delta_1\theta(u'(1)), &\quad \eta(v(1)) = -\delta_2\eta(v'(1)), \quad \beta_i, \delta_i \geq 0, (i=1,2),
\end{aligned} \tag{3.27}$$

y consideramos $\mathcal{F} : C[0,1] \to C[0,1]$ y $\mathcal{G} : C[0,1] \to C[0,1]$ definidos como

$$\mathcal{F}(v)(t) = f(t,|v(t)|) \quad \text{y} \quad \mathcal{G}(u)(t) = g(t,|u(t)|)$$

los operadores de Nemitsky asociados a f y g respectivamente, los cuales como es sabido, transforman conjuntos acotados en conjuntos acotados. A partir de ellos definimos

$$T_1 := \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{F} \quad \text{y} \quad T_2 := \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{G},$$

entonces $T_i : C[0,1] \to C[0,1]$, para $i = 1, 2$, y están dadas por

$$\begin{aligned} T_1(v) = &-\gamma_1 \left(\chi_1(f(\cdot, |v(\cdot)|)) - \int_0^1 f(\tau, |v(\tau)|)d\tau \right) \\ &- \int_t^1 \phi^{-1} \left(\chi_1(f(\cdot, |v(\cdot)|)) - \int_0^s f(\tau, |v(\tau)|)d\tau \right) ds \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} T_2(u) = &-\gamma_2 \left(\chi_2(g(\cdot, |u(\cdot)|)) - \int_0^1 g(\tau, |u(\tau)|)d\tau \right) \\ &- \int_t^1 \psi^{-1} \left(\chi_2(g(\cdot, |u(\cdot)|)) - \int_0^s g(\tau, |u(\tau)|)d\tau \right) ds. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Finalmente, definimos $T : (C[0,1])^2 \to (C[0,1])^2$ como

$$T(u, v) := (T_1(v), T_2(u)), \tag{3.30}$$

de esta manera T es un operador completamente continuo, y encontrar soluciones del sistema (3.27), es equivalente a encontrar soluciones del problema de punto fijo

$$(u, v) = T(u, v), \tag{3.31}$$

o equivalentemente, soluciones del sistema

$$u = T_1(v), \quad v = T_2(u). \tag{3.32}$$

CAPÍTULO 4

RESULTADOS PRINCIPALES

4.1 Teorema 1.1

Proposición 4.1. *Supongamos que*

$$f_0(t) = g_0(t) = 0 \quad \textit{uniformemente para todo} \quad t \in [0,1], \tag{4.1}$$

y que las funciones ϕ *y* ψ *satisfacen*

$$\liminf_{s\to 0} \frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} > 0 \quad y \quad \liminf_{s\to 0} \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} > 0 \quad \textit{para todo } 0 < \tau < 1. \tag{4.2}$$

Si $\delta_i > 1$, *para* $i = 1, 2$, *suponemos además que para cada par de sucesiones* $\{s_k\}$ *y* $\{r_k\}$ *tales que* $s_k \to 0$ *y* $r_k \to 0$ *cuando* $k \to \infty$, *se tiene que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\theta(r_k s_k)}{\theta(s_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\eta(r_k s_k)}{\eta(s_k)} = 0. \tag{4.3}$$

Entonces existe $\rho_0 > 0$ *suficientemente chico, de manera que la única solución de* $(u,v) = T(u,v)$ *en* $\mathcal{B}(0,\rho)$, *la bola abierta con centro en* 0 *y radio* ρ *en* $(C[0,1])^2$, $(0 < \rho < \rho_0)$, *es* $(u,v) \equiv (0,0)$ *y por lo tanto el grado de Leray-Schauder* $\deg_{LS}(I - T, B(0,\rho), 0)$ *está definido para todo* $0 < \rho < \rho_0$ *fijo, y*

$$\deg_{LS}(I - T, \mathcal{B}(0,\rho), 0) = 1. \tag{4.4}$$

Demostración. Consideremos la familia de problemas

$$(u,v) = \lambda T(u,v), \quad \text{donde} \quad \lambda \in [0,1], \tag{4.5}$$

y supongamos que existen sucesiones $\{(u_k, v_k)\}$ en $(C[0,1])^2$ y $\{\lambda_k\}$ en $[0,1]$ tales que

$$(u_k, v_k) = \lambda_k T(u_k, v_k),$$

con $\|(u_k, v_k)\| = \|u_k\| + \|v_k\| = \rho_k$, $\rho_k > 0$ y $\rho_k \to 0$ cuando $k \to \infty$, entonces de (3.28), (3.29), (4.5) y gracias a que $\chi_1(f(\cdot, |v_k(\cdot)|)) > 0$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
u_k(t) &= \lambda_k \left[-\gamma_1 \left(\chi_1(f(\cdot, |v_k(\cdot)|)) - \int_0^1 f(\tau, |v_k(\tau)|) d\tau \right) \right. \\
&\qquad \left. - \int_t^1 \phi^{-1} \left(\chi_1(f(\cdot, |v_k(\cdot)|)) - \int_0^s f(\tau, |v_k(\tau)|) d\tau \right) ds \right] \\
&= \lambda_k \left[\gamma_1 \left(-\chi_1(f(\cdot, |v_k(\cdot)|)) + \int_0^1 f(\tau, |v_k(\tau)|) d\tau \right) \right. \\
&\qquad \left. + \int_t^1 \phi^{-1} \left(-\chi_1(f(\cdot, |v_k(\cdot)|)) + \int_0^s f(\tau, |v_k(\tau)|) d\tau \right) ds \right] \\
&\leq \gamma_1 \left(\int_0^1 f(\tau, |v_k(\tau)|) d\tau \right) + \int_t^1 \phi^{-1} \left(\int_0^s f(\tau, |v_k(\tau)|) d\tau \right) ds \\
&\leq \gamma_1 \left(\int_0^1 f(\tau, |v_k(\tau)|) d\tau \right) + \int_0^1 \phi^{-1} \left(\int_0^1 f(\tau, |v_k(\tau)|) d\tau \right) ds \\
&\leq \gamma_1 \left(\int_0^1 f(\tau, |v_k(\tau)|) d\tau \right) + \phi^{-1} \left(\int_0^1 f(\tau, |v_k(\tau)|) d\tau \right),
\end{aligned}
$$

por lo tanto,

$$
u_k(t) \leq \gamma_1 \left(\int_0^1 f(\tau, |v_k(\tau)|) d\tau \right) + \phi^{-1} \left(\int_0^1 f(\tau, |v_k(\tau)|) d\tau \right), \tag{4.6}
$$

y análogamente,

$$
v_k(t) \leq \gamma_2 \left(\int_0^1 g(\tau, |u_k(\tau)|) d\tau \right) + \psi^{-1} \left(\int_0^1 g(\tau, |u_k(\tau)|) d\tau \right). \tag{4.7}
$$

Ahora, consideremos una sucesión de términos positivos $\{\varepsilon_k\}$ tal que $\varepsilon_k \to 0$ cuando $k \to \infty$, como f y g son sublineales en 0 y las sucesiones $\{u_k\}$ y $\{v_k\}$ tienden a cero cuando $k \to \infty$, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$f(t, |v_k(t)|) \leq \varepsilon_k \psi(|v_k(t)|) \quad \text{para todo } k \geq k_1 \text{ y } t \in [0,1]$$

y

$$g(t, |u_k(t)|) \leq \varepsilon_k \phi(|u_k(t)|) \quad \text{para todo } k \geq k_2 \text{ y } t \in [0,1],$$

sea $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$, así

$$f(t, |v_k(t)|) \leq \varepsilon_k \psi(|v_k(t)|) \leq \varepsilon_k \psi(\|v_k\|)$$

y

$$g(t, |u_k(t)|) \leq \varepsilon_k \phi(|u_k(t)|) \leq \varepsilon_k \phi(\|u_k\|)$$

para todo $k \geq k_0$ y $t \in [0,1]$, entonces, de (4.6) y (4.7), se tiene que para todo $k \geq k_0$ y $t \in [0,1]$,

$$\|u_k\| \leq \gamma_1\left(\varepsilon_k\psi(\|v_k\|)\right) + \phi^{-1}\left(\varepsilon_k\psi(\|v_k\|)\right)$$

y

$$\|v_k\| \leq \gamma_2\left(\varepsilon_k\phi(\|u_k\|)\right) + \psi^{-1}\left(\varepsilon_k\phi(\|u_k\|)\right),$$

luego,

$$1 \leq \frac{\gamma_1\left(\varepsilon_k\psi(\|v_k\|)\right)}{\|u_k\|} + \frac{\phi^{-1}\left(\varepsilon_k\psi(\|v_k\|)\right)}{\|u_k\|} \tag{4.8}$$

y

$$1 \leq \frac{\gamma_2\left(\varepsilon_k\phi(\|u_k\|)\right)}{\|v_k\|} + \frac{\psi^{-1}\left(\varepsilon_k\phi(\|u_k\|)\right)}{\|v_k\|}, \tag{4.9}$$

definiendo $\tau_k := \dfrac{\phi^{-1}\left(\varepsilon_k\psi(\|v_k\|)\right)}{\|u_k\|}$ y $\sigma_k := \dfrac{\psi^{-1}\left(\varepsilon_k\phi(\|u_k\|)\right)}{\|v_k\|}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, (4.36) y (4.9) pueden expresarse como

$$1 \leq \frac{\gamma_1\left(\varepsilon_k\psi(\|v_k\|)\right)}{\|u_k\|} + \tau_k \tag{4.10}$$

y

$$1 \leq \frac{\gamma_2\left(\varepsilon_k\phi(\|u_k\|)\right)}{\|v_k\|} + \sigma_k, \tag{4.11}$$

donde τ_k y σ_k tienden a cero cuando $k \to \infty$, pues de lo contrario existirían subsucesiones de $\{\tau_k\}$ y $\{\sigma_k\}$, las que nombraremos igual, tales que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\tau_k > c_1$ y $\sigma_k > c_2$, donde $0 < c_i < 1$, $i = 1, 2$. Así, si $c_0 = \text{mín}\{c_1, c_2\}$, se tendría que $0 < c_0 < 1$ y

$$\frac{\phi^{-1}\left(\varepsilon_k\psi(\|u_k\|)\right)}{\|u_k\|} > c_0 \quad \text{y} \quad \frac{\psi^{-1}\left(\varepsilon_k\phi(\|u_k\|)\right)}{\|v_k\|} > c_0 \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N},$$

entonces

$$\frac{\phi(c_0\|u_k\|)}{\psi(\|v_k\|)} < \varepsilon_k \quad \text{y} \quad \frac{\psi(c_0\|v_k\|)}{\phi(\|u_k\|)} < \varepsilon_k \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N},$$

luego

$$\frac{\phi(c_0\|u_k\|)}{\phi(\|u_k\|)} \cdot \frac{\psi(c_0\|v_k\|)}{\psi(\|v_k\|)} < \varepsilon_k^2 \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N},$$

lo que contradice (4.2). Por lo tanto no existen subsucesiones de τ_k y σ_k tales que $\tau_k > c_0$ y $\sigma_k > c_0$ para $c_0 > 0$ es decir, ambas sucesiones tienden a cero cuando $k \to \infty$.

Ahora, de la definición de τ_k y σ_k, se tiene que

$$\phi(\tau_k\|u_k\|) = \varepsilon_k\psi(\|v_k\|) \quad \text{y} \quad \psi(\sigma_k\|v_k\|) = \varepsilon_k\phi(\|u_k\|),$$

de donde (4.10) y (4.11) pueden expresarse como:

$$1 \leq \frac{\gamma_1(\phi(\tau_k\|u_k\|))}{\|u_k\|} + \tau_k \quad \text{y} \quad 1 \leq \frac{\gamma_2(\psi(\sigma_k\|v_k\|))}{\|v_k\|} + \sigma_k,$$

y usando la definición de γ_1 y γ_2, obtenemos:

$$1 \leq \frac{\theta^{-1}(\delta_1\theta(\tau_k\|u_k\|))}{\|u_k\|} + \tau_k$$

y

$$1 \leq \frac{\eta^{-1}(\delta_2\eta(\sigma_k\|v_k\|))}{\|v_k\|} + \sigma_k,$$

luego, como τ_k y σ_k tienden a cero cuando $k \to \infty$, existen $0 < m_1 < 1$ y $0 < m_2 < 1$, tales que para k suficientemente grande $\tau_k + m_1 \leq 1$ y $\sigma_k + m_2 \leq 1$, respectivamente. Así, para k grande, se tiene que

$$m_1 \leq \frac{\theta^{-1}(\delta_1\theta(\tau_k\|u_k\|))}{\|u_k\|} \quad \text{y} \quad m_2 \leq \frac{\eta^{-1}(\delta_2\eta(\sigma_k\|v_k\|))}{\|v_k\|}$$

de donde,

$$\frac{\theta(\tau_k\|u_k\|)}{\theta(m_1\|u_k\|)} \geq \frac{1}{\delta_1} \quad \text{y} \quad \frac{\eta(\sigma_k\|v_k\|)}{\eta(m_2\|v_k\|)} \geq \frac{1}{\delta_2}.$$

Definiendo $s_k = m_1\|u_k\|$ y $\widetilde{s}_k = m_2\|v_k\|$, se obtienen las desigualdades

$$\frac{1}{\delta_1} \leq \frac{\theta(\frac{\tau_k}{m_1}s_k)}{\theta(s_k)} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\delta_2} \leq \frac{\eta(\frac{\sigma_k}{m_2}\widetilde{s}_k)}{\eta(\widetilde{s}_k)} \tag{4.12}$$

y para k suficientemente grande, se tiene que $\tau_k < m_1$, luego $\frac{\tau_k}{m_1}s_k < s_k$ y entonces $\theta(\frac{\tau_k}{m_1}s_k) < \theta(s_k)$, de donde

$$\frac{\theta(\frac{\tau_k}{m_1}s_k)}{\theta(s_k)} < 1 \quad \text{y análogamente,} \quad \frac{\eta(\frac{\sigma_k}{m_2}\widetilde{s}_k)}{\eta(\widetilde{s}_k)} < 1,$$

luego, si $\delta_i \leq 1$, $(i = 1, 2)$, las últimas desigualdades contradicen (4.12), y por lo tanto también la existencia de sucesiones $\{(u_k, v_k)\}$ y $\{\lambda_k\}$ con $\|(u_k, v_k)\| \to 0$, que satisfagan (4.5).

Ahora, si $\delta_i > 1$ para $i = 1, 2$, de (4.12) obtenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\theta(\frac{\tau_k}{m_1}s_k)}{\theta(s_k)} \geq \frac{1}{\delta_1} \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\eta(\frac{\sigma_k}{m_2}\widetilde{s}_k)}{\eta(\widetilde{s}_k)} \geq \frac{1}{\delta_2},$$

lo que contradice (4.3). Por lo tanto, existe $\rho_0 > 0$ chico, tal que si $(u, v) \in \mathcal{B}(0, \rho_0)$ satisface (4.5), entonces necesariamente $(u, v) \equiv (0, 0)$. Esto, en particular implica que para todo $0 < \rho < \rho_0$, $0 \notin (I - \lambda T)(\partial \mathcal{B}(0,\rho) \times [0,1])$. Luego, el grado de Leray-Schauder $\deg_{LS}(I - \lambda T, \mathcal{B}(0,\rho), 0)$ está definido para todo $0 < \rho < \rho_0$ y por la propiedad de invariancia bajo homotopías, este no depende de λ, es decir

$$1 = \deg_{LS}(I, \mathcal{B}(0,\rho), 0) = \deg_{LS}(I - T, \mathcal{B}(0,\rho), 0) \quad \text{para todo } 0 < \rho < \rho_0.$$

Por lo tanto, la única solución de (3.31) en $\mathcal{B}(0,\rho)$, la bola abierta con centro en cero y radio ρ, en $(C[0,1])^2$, es $(u,v) \equiv (0,0)$, y

$$\deg_{LS}(I - T, \mathcal{B}(0,\rho), 0) = 1 \quad \text{para todo } 0 < \rho < \rho_0.$$

□

Proposición 4.2. *Consideremos el problema*

$$(P_M) \qquad \begin{aligned} (\phi(u'))' + f(t,|v(t)|) + M = 0, &\quad (\psi(v'))' + g(t,|u(t)|) = 0, \quad t \in (0,1) \\ \theta(u(0)) = \beta_1\theta(u'(0)), &\quad \eta(v(0)) = \beta_2\eta(v'(0)) \\ \theta(u(1)) = -\delta_1\theta(u'(1)), &\quad \eta(v(1)) = -\delta_2\eta(v'(1)), \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde $M > 0$, $\beta_i, \delta_i \geq 0, i = 1,2$, las funciones ϕ y ψ satisfacen las condiciones (H_1), f y g las condiciones (H_2) y (2.7). Si además ϕ y ψ satisfacen que

$$\limsup_{s\to\infty} \frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} < \infty, \quad \limsup_{s\to\infty} \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} < \infty \quad \textit{para todo} \quad \tau > 1, \tag{4.14}$$

entonces existe $M_0 > 0$ tal que para todo $M \geq M_0$, el problema (4.13) no tiene soluciones.

Demostración. Supongamos que existe una sucesión $\{M_k\}$ tal que $M_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$, y para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $\{(u_k, v_k)\}$ la correspondiente solución del problema (P_{M_k}), es decir del problema (P_M) con $M = M_k$. Así, $\{(u_k, v_k)\}$ satisface el problema

$$(P_{M_k}) \qquad \begin{aligned} (\phi(u'))' + f(t,|v(t)|) + M_k = 0, &\quad (\psi(v'))' + g(t,|u(t)|) = 0, \quad t \in (0,1) \\ \theta(u(0)) = \beta_1\theta(u'(0)), &\quad \eta(v(0)) = \beta_2\eta(v'(0)) \\ \theta(u(1)) = -\delta_1\theta(u'(1)), &\quad \eta(v(1)) = -\delta_2\eta(v'(1)), \end{aligned}$$

entonces u_k satisface también el problema

$$\begin{gathered} -(\phi(u_k'))' \geq M_k \quad t \in (0,1) \\ \theta(u_k(0)) = \beta_1\theta(u_k'(0)), \quad \theta(u_k(1)) = -\delta_1\theta(u_k'(1)), \quad \beta_1, \delta_1 \geq 0, \end{gathered} \tag{4.15}$$

luego por la Proposición 2.1, $u_k(t) > 0$ para todo $t \in (0,1)$ y existe un único $t_k \in (0,1)$ tal que $u_k'(t_k) = 0$ con $u_k(t_k) = \|u_k\|$.
Supongamos que $\{t_k\}$ tiene una subsucesión contenida en $(0,1/2]$ a la que

nombraremos igual, $\{t_k\}$, es decir consideraremos los términos de la sucesión tales que $0 < t_k \leq \frac{1}{2}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Sea $\rho \in (0, 1/4)$ un número fijo. Integrando la desigualdad en (4.15), sobre $[t_k, t]$ con $t \in (t_k, 1)$, se obtiene

$$-\phi(u_k'(t)) \geq M_k(t - t_k),$$

de donde,

$$-u_k'(t) \geq \phi^{-1}\left(M_k(t - t_k)\right).$$

Así, integrando ahora sobre $[t, 1 - \rho/4]$, con $t \in [\frac{1}{2}, 1 - \frac{\rho}{4}]$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
u_k(t_k) &\geq u_k(1 - \frac{\rho}{4}) + \int_t^{1-\rho/4} \phi^{-1}\left(M_k(\tau - t_k)\right) d\tau \\
&\geq u_k(1 - \frac{\rho}{4}) + \int_t^{1-\rho/4} \phi^{-1}\left[M_k\left(\tau - \frac{1}{2}\right)\right] d\tau \\
&\geq \int_t^{1-\rho/4} \phi^{-1}\left[M_k\left(t - \frac{1}{2}\right)\right] d\tau,
\end{aligned}$$

por lo tanto, para todo $t \in [1/2, 1 - \rho/4]$, se tiene que

$$u_k(t) \geq \phi^{-1}\left[M_k\left(t - \frac{1}{2}\right)\right]\left(1 - \frac{\rho}{4} - t\right), \tag{4.16}$$

entonces para $t \in [\frac{1}{2} + \frac{\rho}{2}, 1 - \frac{\rho}{2}]$, se cumple que $t - \frac{1}{2} \geq \rho/2$ y $1 - \rho/4 - t \geq \rho/4$, luego de (4.16) se obtiene que

$$u_k(t) \geq \frac{\rho}{4}\phi^{-1}\left(M_k\frac{\rho}{2}\right) \quad \text{para todo} \quad t \in [\frac{1}{2} + \frac{\rho}{2}, 1 - \frac{\rho}{2}],$$

así,

$$\|u_k(t)\| \geq \frac{\rho}{4}\left\|\phi^{-1}\left(M_k\frac{\rho}{2}\right)\right\| \to \infty \quad \text{cuando } k \to \infty,$$

y entonces $\|(u_k, v_k)\| = \|u_k\| + \|v_k\| \to \infty$, cuando $k \to \infty$, luego por la Proposición 2.4, existe $\tau > 1$ tal que

$$\limsup_{s\to\infty} \frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} = \infty \quad \text{y} \quad \limsup_{s\to\infty} \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} = \infty,$$

lo que contradice (4.14). Por lo tanto no puede existir una subsucesión de $\{t_k\}$ completamente contenida en $(0, 1/2]$, es decir, $t_k > 1/2$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Ahora, mediante el cambio de variable $t = 1 - s$, se tiene que

$$\widetilde{f}(s, x) = f(1 - s, x), \quad v_k(t) = v_k(1 - s) = \widetilde{v}_k(s), \quad \text{y} \quad u_k(t) = u_k(1 - s) = \widetilde{u}_k(s),$$

de donde $\widetilde{u}_k$ satisface el problema

$$\begin{aligned} -(\phi(\widetilde{u}_k'(s)))' &\geq \widetilde{f}(s, |\widetilde{v}_k(s)|), \quad s \in (0,1) \\ \theta(\widetilde{u}_k(0)) = \delta_1\theta(\widetilde{u}_k'(0)), &\quad \theta(\widetilde{u}_k(1)) = -\beta_1\theta(\widetilde{u}_k'(1)), \end{aligned}$$

donde $'$ denota ahora la derivada con respecto a s. De $0 = u_k'(t_k) = -\widetilde{u}_k'(s_k)$ con $s_k = 1 - t_k$ y $t_k \in (\frac{1}{2}, 1)$, se obtiene que $s_k \in (0, \frac{1}{2})$. Y entonces, como $M_k \to \infty$, mediante el mismo argumento anterior, obtenemos que $\{s_k\}$ no puede tener una subsucesión contenida en $(0, 1/2)$. Es decir $\{t_k\}$ tampoco puede tener una subsucesión contenida en $(1/2, 1)$.
De lo anterior se concluye que no existe una sucesión $\{M_k\}$ que tienda a infinito cuando $k \to \infty$, tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ exista una solución del problema (P_{M_k}), lo cual implica que existe una constante $M_0 > 0$ tal que el problema (P_M) no tiene solución para ningún $M \geq M_0$.

□

Consideremos ahora la familia de problemas

$$\begin{aligned} (\phi(u'))' + f(t, |v(t)|) + \mu M = 0, &\quad (\psi(v'))' + g(t, |u(t)|) = 0, \quad t \in (0,1) \\ \theta(u(0)) = \beta_1\theta(u'(0)), &\quad \eta(v(0)) = \beta_2\eta(v'(0)) \\ \theta(u(1)) = -\delta_1\theta(u'(1)), &\quad \eta(v(1)) = -\delta_2\eta(v'(1)), \end{aligned} \tag{4.17}$$

donde $\mu \in [0, 1]$ y $M \geq M_0$ es una constante fija.

Proposición 4.3. *Si en el problema (4.17), ϕ y ψ satisfacen la hipótesis (4.14) y f y g satisfacen (2.7). Entonces las soluciones de (4.17) son a-priori acotadas, es decir existe una constante positiva R_0 tal que si (μ, u, v) satisface (4.17), entonces*

$$\|(u, v)\| = \|u\| + \|v\| < R_0, \tag{4.18}$$

y además se cumple que

$$\deg_{LS}(I - T, \mathcal{B}(0, R), 0) = 0, \tag{4.19}$$

para algún $R > R_0$, donde, como antes, $\mathcal{B}(0, R) = B(0, R) \times B(0, R) \subset (C[0, 1])^2$.

Demostración. Supongamos que existe una sucesión $\{(\mu_k, u_k, v_k)\}$, con $\mu_k \in [0, 1]$, $u_k \in C[0, 1]$ y $v_k \in C[0, 1]$ de soluciones de (4.17) con

$$\|(u_k, v_k)\| = \|u_k\| + \|v_k\| \to \infty \quad \text{cuando}\, k \to \infty. \tag{4.20}$$

Como (μ_k, u_k, v_k) satisface también el problema

$$\begin{aligned} (\phi(u'))' + f(t, |v(t)|) \geq, &\quad (\psi(v'))' + g(t, |u(t)|) = 0, \quad t \in (0,1) \\ \theta(u(0)) = \beta_1\theta(u'(0)), &\quad \eta(v(0)) = \beta_2\eta(v'(0)) \\ \theta(u(1)) = -\delta_1\theta(u'(1)), &\quad \eta(v(1)) = -\delta_2\eta(v'(1)), \end{aligned}$$

nos encontramos en la situación de la Proposición 2.4, luego por esta proposición y (4.20), se tiene que (2.14) se cumple, contradiciendo (4.14), y entonces existe $R_0 > 0$ tal que se satisface (4.18), de donde también se tiene (4.19). $\square$

Definición 4.1. Sea $S : [0,1] \times C[0,1] \times C[0,1] \mapsto C[0,1] \times C[0,1]$ el operador dado por

$$S(\mu, u, v) := (\mathcal{T}_1 \circ \widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{G}), \tag{4.21}$$

donde, $\widetilde{\mathcal{F}}$ se define como $\widetilde{\mathcal{F}}(v)(t) = f(t, |v(t)|) + \mu M_0$, $t \in [0,1]$, $\mu \in [0,1]$ y tal como en el capítulo 3, $\mathcal{G}(u)(t) = g(t, |u(t)|)$.

Así definido, S es un operador completamente continuo y $S(0,\cdot,\cdot) = T$.
Por (4.18), el grado $\deg_{LS}(I - S(\mu,\cdot,\cdot), \mathcal{B}(0,R), 0)$ está definido para todo $R > \max\{M, R_0\}$ y, por la continuidad del grado de Leray-Schauder con respecto a la función, es constante para todo $\mu \in [0,1]$, entonces

$$\begin{aligned}\deg_{LS}(I - T, \mathcal{B}(0,R), 0) &= \deg_{LS}(I - S(0,\cdot,\cdot), \mathcal{B}(0,R), 0)\\ &= \deg_{LS}(I - S(1,\cdot,\cdot), \mathcal{B}(0,R), 0) = 0,\end{aligned}$$

donde el último grado es igual a cero gracias a la Proposición 4.3.
Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema 1.1.

Demostración del Teorema 1.1. El problema (1.11) fue expresado en capítulo 3, de manera equivalente como el problema de punto fijo

$$(u,v) = T(u,v), \tag{4.22}$$

por la Proposición 4.18, existe $R > 0$ tal que

$$\deg_{LS}(I - T, \mathcal{B}(0,R), 0) = 0 \tag{4.23}$$

y por (4.4) en la Proposición 4.1, existe $0 < \rho < R$ tal que

$$\deg_{LS}(I - T, \mathcal{B}(0,\rho), 0) = 1, \tag{4.24}$$

luego por definición de grado se tiene que $\deg_{LS}(I - T, \mathcal{B}(0,R) \setminus \overline{\mathcal{B}(0,\rho)}, 0) \neq 0$. Esto implica que (4.22) tiene un punto fijo (u,v), con $\rho < \|(u,v)\| < R$, el cual por los argumentos previos, es una solución positiva del problema (1.11), es decir satisface que $u(t) > 0$ y $v(t) > 0$ para todo $t \in (0,1)$. $\square$

4.2 Teorema 1.2

Proposición 4.4. *Supongamos que*

$$f_\infty(t) = g_\infty(t) = 0 \quad \textit{uniformemente con respecto a } t \in [0,1], \tag{4.25}$$

y que para $0 < \tau < 1$,

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} > 0 \quad y \quad \liminf_{s\to\infty} \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} > 0. \tag{4.26}$$

Si además en el problema (1.11), $\delta_i > 1$, $i = 1, 2$ *suponemos también que para cada par de sucesiones* $\{s_k\}$ *y* $\{r_k\}$ *tales que* $s_k \to \infty$ *y* $r_k \to 0$ *cuando* $k \to \infty$, *se cumple que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\theta(r_k s_k)}{\theta(s_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\eta(r_k s_k)}{\eta(s_k)} = 0. \tag{4.27}$$

Entonces existe $R_0 > 0$ *tal que si* $(u,v) \in (C[0,1])^2$ *es una solución de* $(u,v) = \lambda T(u,v)$ *para algún* $\lambda \in [0,1]$ *y* T *definido en (3.30), se tiene que* $\|(u,v)\| = \|u\|+\|v\| \leq R_0$, *y en consecuencia el grado de Leray-Schauder* $\deg_{LS}(I-T, \mathcal{B}(0,R), 0)$ *está definido para todo* $R \geq R_0$, *y*

$$\deg_{LS}(I - T, \mathcal{B}(0,R), 0) = 1. \tag{4.28}$$

Demostración. Supongamos que existen sucesiones $\{(u_k, v_k)\}$ en $(C[0,1])^2$ y $\lambda_k \in [0,1]$ tales que

$$(u_k, v_k) = \lambda_k T(u_k, v_k) \quad \text{con} \quad \|(u_k, v_k)\| \to \infty. \tag{4.29}$$

Notamos que si $\|(u_k, v_k)\| \to \infty$ entonces al menos una de las sucesiones $\{u_k\}$ o $\{v_k\}$, contiene una subsucesión $\{u_j\}$ o $\{v_j\}$ respectivamente, tal que $\|u_j\| \to \infty$ o $\|v_j\| \to \infty$, cuando $k \to \infty$ según corresponda. Supongamos que $\|u_k\| \to \infty$ cuando $k \to \infty$. De (4.25) se tiene que si $\{\varepsilon_j\}$ es una sucesión de números positivos tal que $2\varepsilon_j < 1$ con $\varepsilon_j \to 0$ cuando $j \to \infty$, entonces para cada $j \in \mathbb{N}$ existen constantes positivas C_j y $\widetilde{C}_j$ tales que

$$f(t, |v_j(t)|) \leq \varepsilon_j \psi(v_j(t)) + C_j \quad \text{y} \quad g(t, |u_j(t)|) \leq \varepsilon_j \phi(u_j(t)) + \widetilde{C}_j, \tag{4.30}$$

para todo $t \in [0,1]$, así

$$\int_0^1 f(\tau, |v_j(\tau)|) \leq \varepsilon_j \int_0^1 \psi(v_j(\tau)) + C_j \leq \varepsilon_j \|\psi(v_j)\| + C_j. \tag{4.31}$$

por otra parte, de (4.6) en la página 25, se tiene que

$$u_j(t) \leq \gamma_1 \left(\int_0^1 f(\tau, |v_j(\tau)|) d\tau \right) + \phi^{-1} \left(\int_0^1 f(\tau, |v_j(\tau)|) d\tau \right), \tag{4.32}$$

de esta forma, combinando (4.31) y (4.32), se tiene que

$$u_j(t) \leq \gamma_1\left(\varepsilon_j\|\psi(v_j)\| + C_j\right) + \phi^{-1}\left(\varepsilon_j\|\psi(v_j)\| + C_j\right),$$

entonces

$$\|u_j\| = u_j(t_j) \leq \gamma_1\left(\varepsilon_j\|\psi(v_j)\| + C_j\right) + \phi^{-1}\left(\varepsilon_j\|\psi(v_j)\| + C_j\right),$$

donde $t_j \in [0,1]$ es el único punto tal que $u'(t_j) = 0$ con $\|u_j\| = u_j(t_j)$, luego como $\|u_j\| \to \infty$, necesariamente $\|v_j\| \to \infty$. Por lo tanto, si $\|(u_k, v_k)\| \to \infty$ entonces existen subsucesiones de $\|u_k\|$ y $\|v_k\|$ tales que

$$\|u_j\| \to \infty \quad \text{y} \quad \|v_j\| \to \infty \quad \text{cuando} \quad k \to \infty, \tag{4.33}$$

y entonces existen subsucesiones $\{u_i\}$ y $\{v_i\}$ tales que para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\varepsilon_i\phi(\|u_i\|) \geq C_i \quad \text{y} \quad \varepsilon_i\psi(\|v_i\|) \geq \widetilde{C}_i,$$

así, de (4.30) se tiene que

$$\int_0^1 f(\tau, |v_i(\tau)|)d\tau \leq \varepsilon_i \int_0^1 \psi(v_i(\tau))d\tau + C_j \leq \varepsilon_i\psi(\|v_i\|) + C_j \leq 2\varepsilon_i\psi(\|v_i\|) \tag{4.34}$$

y

$$\int_0^1 g(\tau, |u_i(\tau)|)d\tau \leq \varepsilon_i \int_0^1 \phi(u_i(\tau))d\tau + \widetilde{C}_j \leq \varepsilon_i\phi(\|u_i\|) + \widetilde{C}_j \leq 2\varepsilon_i\phi(\|u_i\|), \tag{4.35}$$

reemplazando en (4.6) y (4.7) respectivamente, se obtienen

$$u_i(t) \leq \gamma_1\big(2\varepsilon_i\psi(\|v_i\|)\big) + \phi^{-1}\big(2\varepsilon_i\psi(\|v_i\|)\big)$$

y

$$v_i(t) \leq \gamma_1\big(2\varepsilon_i\phi(\|u_i\|)\big) + \psi^{-1}\big(2\varepsilon_i\phi(\|u_i\|)\big),$$

de donde

$$1 \leq \frac{\gamma_1\big(2\varepsilon_i\psi(\|v_i\|)\big)}{\|u_i\|} + \frac{\phi^{-1}\big(2\varepsilon_i\psi(\|v_i\|)\big)}{\|u_i\|} \tag{4.36}$$

y

$$1 \leq \frac{\gamma_2\big(2\varepsilon_i\phi(\|u_i\|)\big)}{\|v_i\|} + \frac{\psi^{-1}\big(2\varepsilon_i\phi(\|u_i\|)\big)}{\|v_i\|}, \tag{4.37}$$

así, usando la definición de γ_1 y γ_2, (4.36) y (4.37) se pueden expresar como

$$1 \leq \frac{\theta^{-1}\big(\delta_1\theta(\phi^{-1}(2\varepsilon_i\psi(\|v_i\|)))\big)}{\|u_i\|} + \tau_i \tag{4.38}$$

y

$$1 \leq \frac{\eta^{-1}\big(\delta_2\eta(\psi^{-1}(2\varepsilon_i\phi(\|u_i\|)))\big)}{\|v_i\|} + \sigma_i, \tag{4.39}$$

donde

$$\tau_i = \frac{\phi^{-1}\big(2\varepsilon_i\psi(\|v_i\|)\big)}{\|u_i\|} \quad \text{y} \quad \sigma_i = \frac{\psi^{-1}\big(2\varepsilon_i\phi(\|u_i\|)\big)}{\|v_i\|},$$

luego, de (4.38) y (4.39) y usando la definición de τ_i y σ_i, obtenemos

$$\frac{\theta^{-1}\big(\delta_1\theta(\tau_i\|u_i\|)\big)}{\|u_i\|} + \tau_i \geq 1 \quad \text{y} \quad \frac{\eta^{-1}\big(\delta_2\eta(\sigma_i\|v_i\|)\big)}{\|v_i\|} + \sigma_i \geq 1. \tag{4.40}$$

Notamos que $\tau_i < 1$ y $\sigma_i < 1$, pues de lo contrario se tendría que para cada $i \in \mathbb{N}$ $1 \leq 4\varepsilon_i^2$, lo cual no es posible ya que $\varepsilon_i \to 0$ cuando $i \to \infty$, por lo que en (4.40), se obtiene de inmediato una contradicción para $\delta_i = 0$, $(i = 1, 2)$. Asumimos entonces que $\delta_i > 0$ para $i = 1, 2$.

Supongamos que existen constantes positivas c_1 y c_2, tales que para j suficientemente grande, $\tau_i \geq c_1$ y $\sigma_i \geq c_2$. Sea $c_0 = \max\{c_1, c_2\}$, de esta forma, $\tau_i \geq c_0$ y $\sigma_i \geq c_0$, es decir

$$\frac{\phi^{-1}\big(2\varepsilon_i\psi(\|v_i\|)\big)}{\|u_i\|} > c_0 \quad \text{y} \quad \frac{\psi^{-1}\big(2\varepsilon_i\phi(\|u_i\|)\big)}{\|v_i\|} > c_0,$$

de donde

$$\frac{\phi(c_0\|u_i\|)}{\phi(\|u_i\|)}\frac{\psi(c_0\|v_i\|)}{\psi(\|v_i\|)} < 4\varepsilon_i^2,$$

lo que contradice (2.4). Por lo tanto $\tau_i \to 0$ y $\sigma_i \to 0$ cuando $i \to \infty$, y entonces existen constantes $0 < m_1 < 1$ y $0 < m_2 < 1$ tales que para i suficientemente grande, $\tau_i + m_1 \leq 1$ y $\sigma_i + m_2 \leq 1$, respectivamente. Así, se tiene que

$$\frac{\theta^{-1}\big(\delta_1\theta(\tau_i\|u_i\|)\big)}{\|u_i\|} \geq m_1 \quad \text{y} \quad \frac{\eta^{-1}\big(\delta_2\eta(\sigma_i\|v_i\|)\big)}{\|v_i\|} \geq m_2,$$

luego,

$$\frac{\theta\big(\tau_i\|u_i\|\big)}{\theta\big(m_1\|u_i\|\big)} \geq \frac{1}{\delta_1} \quad \text{y} \quad \frac{\eta\big(\sigma_i\|v_i\|\big)}{\eta\big(m_2\|v_i\|\big)} \geq \frac{1}{\delta_2},$$

donde, haciendo $s_i = m_1\|u_i\|$ y $\widetilde{s}_i = m_2\|v_i\|$, se obtienen

$$\frac{\theta\big(\frac{\tau_i}{m_1}s_i\big)}{\theta(s_i)} \geq \frac{1}{\delta_1} \quad \text{y} \quad \frac{\eta\big(\frac{\sigma_i}{m_2}\widetilde{s}_i\big)}{\eta(\widetilde{s}_i)} \geq \frac{1}{\delta_2}.$$

Notamos que para i grande, $\tau_i < m_1$ y $\sigma_i < m_2$, luego,

$$\frac{\theta\big(\frac{\tau_i}{m_1}s_i\big)}{\theta(s_i)} \leq 1 \quad \text{y} \quad \frac{\eta\big(\frac{\sigma_i}{m_2}\widetilde{s}_i\big)}{\eta(\widetilde{s}_i)} \leq 1,$$

así,

$$\frac{1}{\delta_1} \leq \frac{\theta\big(\frac{\tau_i}{m_1}s_i\big)}{\theta(s_i)} \leq 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{\delta_2} \leq \frac{\eta\big(\frac{\sigma_i}{m_2}\widetilde{s}_i\big)}{\eta(\widetilde{s}_i)} \leq 1,$$

lo cual, si $\delta_i \leq 1$ para $i = 1, 2$, constituye una contradicción. Ahora, si $\delta_i > 1$, obtenemos que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\theta\left(\frac{\tau_i}{m_1} s_i\right)}{\theta(s_i)} \geq \frac{1}{\delta_1} \quad \text{y} \quad \lim_{i\to\infty} \frac{\eta\left(\frac{\sigma_i}{m_2} \widetilde{s}_i\right)}{\eta(\widetilde{s}_i)} \geq \frac{1}{\delta_2},$$

lo que contradice (4.27), y por lo tanto se concluye que existe R_0 tal que para cada (u, v) solución de $(u, v) = \lambda T(u, v)$, con $\lambda \in [0, 1]$, se satisface que

$$\|(u, v)\| \leq R_0, \tag{4.41}$$

luego, de (4.41) se tiene que para todo $R \geq R_0$, la familia de ecuaciones

$$(u, v) = \lambda T(u, v), \tag{4.42}$$

no tiene soluciones en la frontera de $\mathcal{B}(0, R) \subset (C[0, 1])^2$ y entonces $\deg_{LS}(I - \lambda T, \mathcal{B}(0, R), 0)$ está definido para todo $R \geq R_0$ y por la invariancia bajo homotopías del grado de Leray-Schauder, este es independiente de $\lambda \in [0, 1]$ y por lo tanto,

$$\deg_{LS}(I - T, \mathcal{B}(0, R), 0) = \deg_{LS}(I, \mathcal{B}(0, R), 0) = 1. \tag{4.43}$$

□

Proposición 4.5. *Si f y g son dos funciones tales que*

$$f_0(t) = g_0(t) = \infty \quad \textit{uniformemente con respecto a } t \in [0, 1], \tag{4.44}$$

y para todo $\tau > 1$,

$$\limsup_{s\to 0} \frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} < \infty \quad y \quad \limsup_{s\to 0} \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} < \infty, \tag{4.45}$$

entonces existe $\rho_0 > 0$ tal que para algún $M > 0$, el problema (P_M) enunciado en la página 28 , no tiene soluciones en la bola cerrada $\overline{\mathcal{B}(0, \rho_0)} \in (C[0, 1])^2$.

Demostración. Supongamos que existen sucesiones $\{M_k\}$ y $\{(u_k, v_k)\} \subset (C[0, 1])^2$, tal que para cada k, (u_k, v_k) es solución del problema (P_M) con $M = M_k$ y $u_k \to 0$, $v_k \to 0$, cuando $k \to \infty$, es decir para cada k, u_k satisface el problema

$$\begin{aligned} -(\phi(u_k'(t)))' \geq M_k > 0, \quad -(\psi(v_k'(t)))' = g(t, |u_k(t)|) \geq 0, \quad t \in (0, 1) \\ \theta(u_k(0)) = \beta_1 \theta(u_k'(0)), \quad \eta(v_k(0)) = \beta_2 \eta(v_k'(0)) \\ \theta(u_k(1)) = -\delta_1 \theta(u_k'(1)), \quad \eta(v_k(1)) = -\delta_1 \eta(v_k'(1)), \end{aligned} \tag{4.46}$$

donde $\beta_i > 0$ y $\delta_i > 0$, para $i = 1, 2$. De la Proposición 2.1, se tiene que $u_k(t) > 0$ y $v_k(t) > 0$, para todo $t \in (0, 1)$, ambas son cóncavas en este intervalo y existe un único t_k y r_k tal que $u_k'(t_k) = 0$ con $\|u_k\| = u_k(t_k)$ y $v_k'(r_k) = 0$ con $\|v_k\| = v_k(r_k)$,

respectivamente.
Ahora, $\|u_k\| \to 0$ y $\|v_k\| \to 0$ cuando $k \to \infty$, y de (4.44) se sigue que dado $N > 0$, existe $k_0 \geq 1$ tal que para todo $k \geq k_0$,

$$f(t, |v_k(t)|) \geq N\psi(v_k(t)) \quad \text{y} \quad g(t, |u_k(t)|) \geq N\phi(u_k(t)). \tag{4.47}$$

Al igual que en la demostración de la Proposición 2.4 de la página 10, podemos suponer que existen t_0 y r_0 tales que (por medio de una subsucesión) $t_k \to t_0$ y $r_k \to r_0$ cuando $k \to \infty$, también de la misma manera se obtiene que si $t_0 < r_0$ y $t_0 \in (0,1)$ o bien $t_0 = 0$ con $r_0 < 1$ entonces para $0 < \rho < \bar{t}_0/4$ y $0 < \rho < \widetilde{r}_0/4$ respectivamente, en cada caso, se tiene que

$$\frac{\phi\left(\frac{1}{\rho}u_k(t)\right)}{\phi(u_k(t))} \frac{\psi\left(\frac{1}{\rho}v_k(t)\right)}{\psi(v_k(t))} \geq (N\rho)^2,$$

lo cual implica que

$$\left(\limsup_{s\to 0} \frac{\phi\left(\frac{1}{\rho}s\right)}{\phi(s)}\right)\left(\limsup_{s\to 0} \frac{\psi\left(\frac{1}{\rho}s\right)}{\psi(s)}\right) \geq (N\rho)^2,$$

lo que contradice (4.45). También en el caso en que $t_0 = 0$ y $r_0 = 1$, se demuestra como en (2.26) página 15, que para $0 < \rho < 1/4$, $\mu_k = \frac{\rho/2}{1-\rho/2}\|u_k\|$ y $\nu_k = \frac{\rho/2}{1-\rho/2}\|v_k\|$, se satisface que

$$\frac{\phi\left(\frac{2}{\rho^2}\mu_k\right)}{\phi(\mu_k)} \frac{\psi\left(\frac{2}{\rho^2}\nu_k\right)}{\psi(\nu_k)} \geq (N\rho)^2,$$

de donde se sigue que

$$\left(\limsup_{s\to 0} \frac{\phi\left(\frac{2}{\rho^2}s\right)}{\phi(s)}\right)\left(\limsup_{s\to 0} \frac{\psi\left(\frac{2}{\rho^2}s\right)}{\psi(s)}\right) \geq (N\rho)^2,$$

lo cual contradice también (4.45). Por lo tanto se concluye que existe $\rho_0 > 0$ tal que para algún $M > 0$, la bola cerrada $\overline{\mathcal{B}(0,\rho_0)} \subset (C[0,1])^2$, no contiene soluciones del problema (P_M). □

Proposición 4.6. *Bajo las hipótesis de la Proposición 4.5, existe $\rho_1 > 0$ tal que la única solución de (3.27) en la bola cerrada $\overline{\mathcal{B}(0,\rho_1)} \subset (C[0,1])^2$, es la trivial.*

Demostración. Supongamos que existe una sucesión $\{(u_n, v_n)\}$ de soluciones de (3.27) con $0 \neq \|(u_n, v_n)\| \to 0$, cuando $n \to \infty$, entonces necesariamente $\|u_n\| \to 0$ y $\|v_n\| \to 0$, cuando $n \to \infty$.
Ya que cada u_n y v_n satisfacen el problema

$$\begin{aligned} -(\phi(u_n'(t)))' = f(t, |v_n(t)|), \quad -(\psi(v_n'(t)))' = g(t, |u_n(t)|), \quad t \in (0,1) \\ \theta(u_n(0)) = \beta_1\theta(u_n'(0)), \quad \eta(v_n(0)) = \beta_2\eta(v_n'(0)) \\ \theta(u_n(1)) = -\delta_1\theta(u_n'(1)), \quad \eta(v_n(1)) = -\delta_1\eta(v_n'(1)), \end{aligned}$$

se tiene que cada u_n y v_n es positiva y cóncava en $(0, 1)$ y por lo tanto el argumento dado en la demostración de la Proposición 4.5, es válido también en este caso, de donde se concluye que la única solución de (3.27) en la bola $\overline{\mathcal{B}(0, \rho_1)}$ es la trivial. $\square$

Proposición 4.7. *Bajo las hipótesis de la Proposición 4.5, existe $\rho_2 > 0$ tal que para todo $0 < \rho \leq \rho_2$,*

$$\deg_{LS}(I - T, \mathcal{B}(0, \rho), 0) = 0, \tag{4.48}$$

Demostración. Sea ρ_0 es dado por la Proposición 4.5 para un $M_0 > 0$ fijo, y sea ρ_1 como en la Proposición 4.6, escogemos $\rho_2 = \text{mín}\{\rho_0, \rho_1\}$. Las dos últimas proposiciones, garantizan que no existen soluciones de la familia de ecuaciones

$$(u, v) = S(\mu, u, v), \quad \mu \in [0, 1] \tag{4.49}$$

en la frontera de la bola $\mathcal{B}(0, \rho)$, donde $0 < \rho \leq \rho_2$ y $S(\mu, u, v)$ es el definido en (4.21), luego el grado $\deg_{LS}(I - S(\mu, \cdot), \mathcal{B}(0, \rho), 0)$, está definido y como consecuencia de la propiedad de invariancia bajo homotopías del grado de Leray-Schauder, es independiente de μ. Así, ya que $T = S(0, \cdot)$, se tiene que para $0 < \rho \leq \rho_2$,

$$\begin{aligned}\deg_{LS}(I - T, \mathcal{B}(0, \rho), 0) &= \deg_{LS}(I - S(0, \cdot), \mathcal{B}(0, \rho), 0) \\ &= \deg_{LS}(I - S(1, \cdot), \mathcal{B}(0, \rho), 0) = 0,\end{aligned} \tag{4.50}$$

donde el último grado es igual a cero gracias a la Proposición 4.5, y por lo tanto se tiene (4.48). $\square$

Demostración del Teorema 1.2. Por la Proposiciones 4.4 y 4.48, existen números positivos ρ_1 y R_1 tales que $0 < \rho_1 < R_1$ y

$$\deg_{LS}(I - T, \mathcal{B}(0, \rho_1), 0) = 0 \quad \text{y} \quad \deg_{LS}(I - T, \mathcal{B}(0, R_1), 0) = 1, \tag{4.51}$$

luego, por la propiedad de excisión del grado de Leray-Schauder, se tiene que

$$1 = \deg_{LS}(I - T, \mathcal{B}(0, R_1), 0) = \deg_{LS}(I - T, \mathcal{B}(0, R_1) \setminus \overline{\mathcal{B}(0, \rho_1)}, 0), \tag{4.52}$$

esto prueba que existe una solución no trivial del problema (3.27), como cualquier solución de (3.27) es positiva en $[0, 1]$, esta es una solución positiva del problema (1.11). $\square$

Capítulo 5

Algunos ejemplos

5.1 Un ejemplo para $\phi(s) = \psi(s) = s$

Proposición 5.1. *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned} u''(t) + (1+t)|v(t)|^2 &= 0, \qquad & v''(t) + |u(t)|\sqrt{(1+t)|u(t)|} &= 0 \\ u(0)\exp(|u(0)|) &= \beta_1 u'(0)\exp(|u'(0)|), \qquad & v(0)\frac{(1+|v(0)|)}{(1+|v'(0)|)} &= \beta_2 v'(0) \\ u(1)\exp(|u(1)|) &= -\delta_1 u'(1)\exp(|u'(1)|), \qquad & v(1)\frac{(1+|v(1)|)}{(1+|v'(1)|)} &= -\delta_2 v'(1), \end{aligned} \tag{5.1}$$

si las constantes $\beta_i > 0$ y $\delta_i > 1$ para $i = 1, 2$, entonces existe al menos una solución positiva del problema (5.1).

Demostración. Notamos que (5.1) es un caso particular del problema (1.11), basta considerar en este último, los homeomorfismos ϕ y ψ iguales a la identidad, es decir $\phi(s) = s$ y $\psi(s) = s$, las funciones f y g como

$$f(t,s) = (1+t)|s|^2 \quad \text{y} \quad g(t,s) = |s|\sqrt{(1+t)|s|}, \tag{5.2}$$

y los homeomorfismos θ y η en las condiciones de borde, como

$$\theta(s) = s\exp(|s|) \quad \text{y} \quad \eta(s) = s(1+|s|), \tag{5.3}$$

los cuales satisfacen la condición (H_1). al igual que los homeomorfismos ϕ y ψ y las funciones f y g, satisfacen la condición (H_2). Además, para todo $t \in [0,1]$,

$$f_0(t) = \lim_{s\to 0}(1+t)|s| = 0 \quad \text{y} \quad f_\infty(t) = \lim_{s\to\infty}(1+t)|s| = \infty \tag{5.4}$$

$$g_0(t) = \lim_{s\to 0}\sqrt{(1+t)|s|} = 0 \quad \text{y} \quad g_\infty(t) = \lim_{s\to\infty}\sqrt{(1+t)|s|} = \infty. \tag{5.5}$$

Por otra parte, para cada par de sucesiones $\{r_k\}$ y $\{s_k\}$ tales que $r_k \to 0$ y $s_k \to 0$, cuando $k \to \infty$, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\theta(r_k s_k)}{\theta(s_k)} = \lim_{k\to\infty} r_k \exp\big(-s_k(1-r_k)\big) = 0 \tag{5.6}$$

y

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\eta(r_k s_k)}{\eta(s_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{r_k(1+|r_k s_k|)}{1+|s_k|} = 0. \tag{5.7}$$

Finalmente, los homeomorfismos ϕ y ψ, satisfacen trivialmente las condiciones (1.13) y (1.14), pues para todo $0<\tau<1$

$$\liminf_{s\to 0} \frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} = \liminf_{s\to 0} \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} = \tau > 0,$$

y la misma forma, para $\tau > 1$

$$\limsup_{s\to\infty} \frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} = \limsup_{s\to\infty} \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} = \tau < \infty,$$

luego por el Teorema 1.1, existe al menos una solución (u,v) de (5.1) con $u(t)>0$ y $v(t)>0$ para todo $t\in(0,1)$. □

5.2 Un sistema con ϕ y ψ no homogéneas.

Consideremos ahora el problema

$$\begin{array}{lll} (\phi(u'))' + (1+t)|u(t)|^r = 0, & (\psi(v'))' + (1+t)\,u(t)|u(t)|^q = 0, & t\in(0,1) \\ u(0) = \beta_1 u'(0), & v(0)|v(0)| = \beta_2 v'(0)|v'(0)| & \\ u(1) = -\delta_1 u'(1), & v(1)|v(1)| = -\delta_2 v'(1)|v'(1)|, \ (\beta_i,\delta_i \geq 0, i=1,2), & \end{array} \tag{5.8}$$

donde los homeomorfismos ϕ y ψ están dados por

$$\phi(s) = s|s|^{p_1-2}\Big(\log\big(1+|s|\big)\Big)^\alpha \quad \text{y} \quad \psi(s) = s|s|^{p_2-2}, \tag{5.9}$$

para $\alpha>0$, y $p_i>1$, $(i=1,2)$.

Proposición 5.2. *Si r y q satisfacen*

$$\frac{1}{r} < \frac{1}{(p_2-1)} \quad y \quad q > \alpha + p_1 - 2, \tag{5.10}$$

o bien

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{(p_2-1)} \quad y \quad q < \alpha + p_1 - 2, \tag{5.11}$$

existe al menos una solución positiva del problema (5.8).

Demostración. Sean

$$f(t,s) = (1+t)|s|^r \quad \text{y} \quad g(t,s) = (1+t)s|s|^q$$

$$\theta(s) = s \quad \text{y} \quad \eta(s) = s(|s|+1)$$

Así el problema (5.8), es de la forma

$$\begin{aligned} (\phi(u'))' + f(t, v(t)) &= 0, & (\psi(v'))' + g(t, u(t)) &= 0 \\ \theta(u(0)) &= \beta_1 \theta(u'(0)), & \eta(v(0)) &= \beta_2 \eta(v'(0)) \\ \theta(u(1)) &= -\delta_1 \theta(u(1)), & \eta(v(1)) &= -\delta_2 \eta(v'(1)). \end{aligned}$$

Supongamos primero que se cumple (5.10), así

$$g_0(t) = \lim_{s\to 0}(1+t)|s|^{q-p_1+2-\alpha}\left(\frac{|s|}{\log(1+|s|)}\right)^{\alpha} = 0$$

pues para todo $\alpha > 0$,

$$\lim_{s\to 0}\left(\frac{|s|}{\log(1+|s|)}\right)^{\alpha} = 1,$$

y por (5.10) se tiene que $q - p_1 + 2 - \alpha > 0$, y

$$f_0(t) = \lim_{s\to 0}\frac{(1+t)|s|^{r-p_2+2}}{s} = 0$$

ya que por por (5.10), $r - p_2 + 2 > 1$. Por otra parte

$$g_\infty(t) = \lim_{s\to\infty}(1+t)\left(\frac{|s|^{\frac{q-p_1+2}{\alpha}}}{\log(1+|s|)}\right)^{\alpha} = \infty$$

y

$$f_\infty(t) = \lim_{s\to\infty}\frac{(1+t)|s|^{r-p_2+2}}{s} = \infty,$$

ya que gracias a (5.10),

$$\frac{q-p_1+2}{\alpha} > 1 \quad \text{y} \quad r - p_2 + 2 > 1$$

Por lo tanto, para r y q como en (5.10), se tiene que $f_0(t) = g_0(t) = 0$ y $f_\infty(t) = g_\infty(t) = \infty$, uniformemente para todo $t \in [0,1]$. Ahora,

$$\frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} = \tau|\tau|^{p_1-2}\left(\frac{\log(1+|\tau s|)}{\log(1+|s|)}\right)^{\alpha} \quad \text{y} \quad \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} = \tau|\tau|^{p_2-2}, \tag{5.12}$$

luego, para $0 < \tau < 1$, se tiene que

$$\liminf_{s\to 0} \frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} = \tau|\tau|^{p_1-2} > 0 \quad \text{y} \quad \liminf_{s\to 0} \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} = \tau|\tau|^{p_2-2} > 0, \tag{5.13}$$

y para $\tau > 1$

$$\limsup_{s\to \infty} \frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} = \tau|\tau|^{p_1-2} < \infty \quad \text{y} \quad \limsup_{s\to \infty} \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} = \tau|\tau|^{p_2-2} < \infty. \tag{5.14}$$

Por otra parte, si $\{s_k\}$ y $\{r_k\}$ son dos sucesiones de términos positivos, tales que $s_k \to 0$ y $r_k \to 0$ cuando $k \to \infty$, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\theta(r_k s_k)}{\theta(s_k)} = \lim_{k\to\infty} r_k = 0 \tag{5.15}$$

y

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\eta(r_k s_k)}{\eta(s_k)} = \lim_{k\to\infty} r_k|r_k| = \lim_{k\to\infty} \operatorname{sgn}(r_k)|r_k|^2 = \lim_{k\to\infty} |r_k|^2 = 0, \tag{5.16}$$

por lo tanto, por el Teorema 1.1, existe al menos una solución positiva del problema (5.8).

Supongamos ahora que se satisface (5.11), entonces para todo $t \in [0,1]$,

$$g_0(t) = \lim_{s\to 0} (1+t)|s|^{q-p_1+2-\alpha} \left(\frac{|s|}{\log(1+|s|)} \right)^{\alpha} = \infty$$

y

$$f_0(t) = \lim_{s\to 0} \frac{(1+t)|s|^{r-p_2+2}}{s} = \infty,$$

uniformemente para $t \in [0,1]$, pues por (5.11), $q - p_1 + 2 - \alpha < 0$ y $r - p_2 + 2 > 1$. Además,

$$g_\infty(t) = \lim_{s\to\infty} \frac{(1+t)}{|s|^{p_1-2-q} \left(\log(1+|s|)\right)^{\alpha}} = 0.$$

$$f_\infty(t) = \lim_{s\to\infty} \frac{(1+t)|s|^{r-p_2+2}}{s} = 0,$$

donde $p_1 - 2 - q > 0$ y $r - p_2 + 2 < 1$, gracias a (5.11). Así, se tiene que $f_0(t) = g_0(t) = \infty$ y $f_\infty(t) = g_\infty(t) = 0$, uniformemente para $t \in [0,1]$. Ahora, por (5.12), se tiene que para $0 < \tau < 1$,

$$\liminf_{s\to \infty} \frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} = \tau|\tau|^{p_1-2} > 0 \quad \text{y} \quad \liminf_{s\to \infty} \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} = \tau|\tau|^{p_2-2} > 0, \tag{5.17}$$

y para $\tau > 1$

$$\limsup_{s\to 0} \frac{\phi(\tau s)}{\phi(s)} = \tau|\tau|^{p_1-2} < \infty \quad \text{y} \quad \limsup_{s\to 0} \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} = \tau|\tau|^{p_2-2} < \infty. \tag{5.18}$$

Finalmente, si $\{r_k\}$ y $\{s_k\}$ son dos sucesiones de números positivos, tales que $r_k \to 0$ y $s_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\theta(r_k s_k)}{\theta(s_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\eta(r_k s_k)}{\eta(s_k)} = 0,$$

pues de (5.16) se tiene que ambos límites son independientes de s_k, satisfaciéndose así todas las hipótesis del Teorema 1.2, y por lo tanto existe también en este caso, al menos una solución positiva del problema (5.8). $\square$

Apéndice A

El grado de Leray-Schauder

A.1 Introducción

El problema de existencia y multiplicidad de soluciones de ecuaciones del tipo

$$\phi(x) = b, \quad x \in D, \tag{A.1}$$

donde tanto la función ϕ, como su dominio de definición D dependen del problema en estudio, a pesar de su aparente simpleza ha sido fundamental en el desarrollo de diversas áreas de la matemática. La introducción de herramientas topológicas al estudio de este problema durante los siglos XIX y XX dio origen a la teoría del grado topológico.

El grado $\mathrm{d}(\phi, \Omega, b)$ representa esencialmente el número de soluciones de la ecuación $\phi(x) = b$ en un subconjunto abierto dado Ω de X. Aquí $\phi : \Omega \subset X \to X$ es una función continua, $b \notin \phi(\partial\Omega)$, y X es un espacio topológico que usualmente es también un espacio métrico. Además en el caso $X = \mathbb{C}$, el grado constituye una generalización del índice o número de vueltas de $\phi : \overline{\Omega} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si se identifica el plano complejo $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$.
Sea

$$A \subset \{(\phi, \Omega, b) : \Omega \subset X \text{ es abierto y acotado }, \phi : \Omega \to X \text{ es continua}, p \notin \phi(\partial\Omega)\}.$$

Buscamos una función $d : A \to \mathbb{Z}$ que satisfaga las siguientes propiedades:

(D_1) Si $X = \mathbb{R}^n$, Ω es abierto, acotado y si $b \notin \phi(\partial\Omega)$, entonces

$$d(I|_{\Omega}, \Omega, b) = 1,$$

donde I denota la función identidad de X.

(D_2) Si $d(\phi, \Omega, b) \neq 0$, entonces existe $x \in \Omega$ tal que $\phi(x) = b$.

(D_3) Si $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ y si $b \notin \phi(\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2)$, entonces

$$d(\phi, \Omega_1 \cup \Omega_2, b) = d(\phi|_{\Omega_1}, \Omega_1, b) + d(\phi|_{\Omega_2}, \Omega_2, b).$$

(D_4) Si $H \in C([0,1] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ es una homotopía tal que $b \notin H(t)(\partial\Omega)$ para cada $t \in [0,1]$, entonces

$$d(H(t), \Omega, b) = d(H(0), \Omega, b).$$

(D_5) Si $b \notin \phi(\partial\Omega)$, entonces

$$d(\phi, \Omega, b) = d(\phi - b, \Omega, 0).$$

De [17], existe una única función $d : A \to \mathbb{Z}$ que verifica las propiedades (D_1) a (D_5). d se llama grado topológico y en dimensión finita es denominado *grado de Brouwer* ya que la idea fue desarrollada por Brouwer a principios del siglo XX y en dimensión infinita es conocido como *grado de Leray-Schauder*, pues Leray y Schauder extendieron el grado de Brouwer a espacios de Banach para perturbaciones compactas de la identidad, es decir para operadores de la forma $I - T$ donde T es un operador compacto, y se denota por $\deg_{LS}(I - T, \Omega, b)$.

A.1 Una breve cronología del grado topológico

El concepto de grado topológico surge como una generalización de la teoría del índice de funciones holomorfas y a pesar de que sus orígenes se remontan a las demostraciones del Teorema Fundamental de Álgebra dadas por Gauss, su principal antecedente se encuentra en el trabajo de Kronecker ([28], [27], [29], [30]) a fines del siglo XIX.[1] Sin embargo la definición de grado de una función continua, en espacios de dimensión finita, fue dada recién en 1912 por L. E. J Brouwer en [21] y [22]. La construcción del grado hecha por Brouwer fue extendida, un par de décadas más tarde, a espacios de dimensión infinita para una clase especial de operadores; las perturbaciones compactas de la identidad, por Jean Leray y Juliusz Schauder[2] en [32]. El trabajo de Leray y Schauder permitió grandes avances, durante la segunda mitad del siglo XX, en el estudio de existencia, multiplicidad y bifurcación de soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales.
En 1951 Nagumo presenta en [35] y [36] un nuevo enfoque para definir el grado topológico utilizando métodos analíticos. Este tratamiento del tema suele llamarse

[1]Una interesante descripción, anternada con notas históricas, de los problemas antiguos (incluyendo el trabajo de Kronecker) que condujeron al desarrollo de la teoría del grado, se puede encontrar en [39] y [37].

[2]Para conocer algunos aspectos históricos del desarrollo de la teoría del grado de Leray-Schauder, así como el alcance de sus aplicaciones en el campo del análisis no lineal, el lector puede revisar [33], [34] y la extensa bibliografía citada por el autor en ambos trabajos.

enfoque diferencial y es el que utilizaremos en el desdarrollo de este anexo. Finalmente Amman y Weiss consiguen establecer una caracterización axiomática del grado de Leray-Schauder en [17].
Desde entonces y a fin de abordar problemas particulares, se han construido numerosas extensiones del grado de Leray-Schauder, las que por razones de tiempo y espacio no serán incluidas en este trabajo.

En las siguientes secciones se hará una exposición lo más sintética posible de la construcción del grado de Brouwer, sus propiedades básicas y su extensión a espacios de dimensión infinita para perturbaciones compactas de la identidad, es decir del grado de Leray-Schauder.

A.2 El grado de Brouwer

A.2 Definición de grado

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Denotaremos por $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ al espacio de funciones $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ que son k veces diferenciables en Ω y cuyas derivadas (de orden $1, 2 \ldots, k$) pueden ser extendidas continuamente a $\overline{\Omega}$. Denotaremos la frontera de Ω por $\partial\Omega$. Finalmente, llamaremos $\rho(b, A) = \inf\limits_{a \in A} \operatorname{dist}(b, a)$, donde $\operatorname{dist}(a, b)$ denota la distancia entre los punto a y b.
Notamos que si $\phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, entonces $\phi'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y por lo tanto puede ser representada por una matriz $n \times n$. Denotaremos por $J_\phi(x)$ al determinante de $\phi'(x)$.

Definición A.1. Sea $\phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, diremos que $x \in \overline{\Omega}$ es un *punto crítico* de ϕ si $J_\phi(x) = 0$ y en ese caso diremos que $\phi(x)$ es *valor crítico* de ϕ.
Denotaremos por S al conjunto de puntos críticos de ϕ, es decir

$$S = \{x \in \overline{\Omega} : J_\phi(x) = 0\}.$$

Si $b \notin \phi(S)$, entonces diremos que b es un *valor regular* de ϕ.

El conjunto $\phi(S)$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$. Este resultado es conocido como Terema de Sard y una demostración detallada de éste se puede encontrar por ejemplo en [26].

Definición A.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado, sea $\phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, y $b \notin \phi(S) \cup \phi(\partial\Omega)$. Se define el grado de ϕ en Ω con respecto a b, como

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega, b) = \begin{cases} 0, & \text{si } \phi^{-1}(b) = \emptyset \\ \sum\limits_{x \in \phi^{-1}(b)} \operatorname{sgn}(J_\phi(x)), & \text{si } \phi^{-1}(b) \neq \emptyset, \end{cases} \tag{A.2}$$

donde sgn denota la función signo ($\operatorname{sgn}(s) = 1$ si $s > 0$, $\operatorname{sgn}(s) = -1$ si $s < 0$ y $\operatorname{sgn}(0) = 0$).

Observación A.1. *Notamos que* $b \notin \phi(S) \cup \phi(\partial\Omega)$, *luego* $\phi'(x)$ *está bien definida para* $x \in \phi^{-1}(b)$ *y* $J_\phi(x) \neq 0$, *entonces* $J_\phi(x)$ *tiene un signo determinado y, por el teorema de la función inversa,* ϕ *es invertible en una vecindad de* x. *Además, como se demuestra en la siguiente proposición, gracias a la compacidad de* $\overline{\Omega}$ *el conjunto* $\phi^{-1}(b)$ *es finito y por lo tanto (A.2), tiene sentido.*

Proposición A.1. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto acotado,* $\phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *y* $b \notin \phi(S) \cup \phi(\partial\Omega)$. *Entonces el conjunto* $\phi^{-1}(b)$ *es finito.*

Demostración. Supongamos que $\phi^{-1}(b)$ no es finito. Como $b \notin \phi(S) \cup \phi(\partial\Omega)$ para todo $x \in \phi^{-1}(b)$, $\phi'(x) \neq 0$ luego, por el teorema de la función inversa, para cada $x \in \phi^{-1}(b)$ existe una vecindad V_x donde ϕ es invertible y además

$$\phi^{-1}(b) \cap V_x = \{x\},$$

ya que si existiera $y \in \phi^{-1}(b) \cap V_x$, $y \neq x$ tendríamos que $\phi(x) = \phi(y) = b$ y entonces $\phi|_{V_x}$ no sería inyectiva. Por lo tanto todos los puntos en $\phi^{-1}(b)$ son aislados, de donde el conjunto de puntos límites $(\phi^{-1}(b))'$ es vacío. Entonces

$$\overline{\phi^{-1}(b)} = \phi^{-1}(b) \cup (\phi^{-1}(b))' = \phi^{-1}(b),$$

es decir $\phi^{-1}(b)$ es un conjunto cerrado contenido en el compacto $\overline{\Omega}$. Luego $\phi^{-1}(b)$ también es compacto, de donde todo subconjunto infinito de $\phi^{-1}(b)$ debe tener al menos un punto límite en $\phi^{-1}(b)$, lo cual no es posible. Por lo tanto $\phi^{-1}(b)$ es finito. □

Observación A.2. *Como es posible observar de la definición, si* $d(\phi, \Omega, b) \neq 0$ *entonces existe al menos una solución de la ecuación* $\phi(x) = b$ *en* Ω. *También es importante destacar que si bien el grado se define como cero si* ϕ *no alcanza el valor* b, *el recíproco no es cierto, como ilustra el siguiente ejemplo.*

Ejemplo A.2.1. Sea $\Omega = (-1, 1)$ y $\phi(x) = x^2 - t^2$, donde $t < 1$. Entonces $\phi'(x) = 2x$ y $\phi^{-1}(0) = \{t, -t\}$, luego

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega, 0) = \mathrm{sgn}(\phi'(t)) + \mathrm{sgn}(\phi'(-t)) = 1 - 1 = 0.$$

Sin embargo existen dos soluciones de la ecuación $\phi(x) = 0$ en Ω.

Para extender la definición de grado a funciones continuas y valores no necesariamente regulares, es necesario probar que el grado definido en (A.2) es localmente constante en b y ϕ. Con este objetivo comentaremos algunos aspectos previos, partiendo por representación integral para el grado. Esta fórmula fue introducida por Heinz (1959) en [25], su demostración puede encontrarse además en [26], [23] o [18] entre otros.

Proposición A.2. *Sea* $\phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *y sea* $b \notin \phi(S) \cup \phi(\partial\Omega)$. *Entonces existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que para todo* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega, b) = \int_\Omega \varphi_\varepsilon(\phi(x) - b) J_\phi(x) dx \tag{A.3}$$

donde $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es una función* C^∞ *y* $\operatorname{spt} \varphi_\varepsilon \subset B(0, \varepsilon)$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1$$

La ventaja de la representación integral es que permite calcular el grado con respecto a valores no necesariamente regulares de ϕ. Sin embargo en (A.2), ε depende de b, y entonces no es claro que el grado sea continuo con respecto a b. Para asegurar esta continuidad exigiremos una condición extra a ϕ, pues si $\phi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ el grado $\mathrm{d}(\phi, \Omega, b)$ es constante en una vecindad de b, esto es consecuencia del siguiente resultado:

Proposición A.3. *Si* $\phi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $b \notin \phi(\partial\Omega)$ *y* $b_1, b_2 \in B(b, \rho_0)$, *donde* $\rho_0 = \rho(b, \phi(\partial\Omega)) > 0$, *entonces*

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega, b_1) = \mathrm{d}(\phi, \Omega, b_2), \tag{A.4}$$

siempre que $b_i \notin \phi(S)$ *para* $i = 1, 2$.

Notamos que por el teorema de Sard, el conjunto de valores críticos de ϕ, tiene medida cero y entonces necesariamente existen valores regulares de ϕ en $B(b, \rho_0)$, donde tal como antes $\rho_0 = \rho(b, \phi(\partial\Omega)) > 0$, y el grado de ϕ con respecto a cualquiera de esos puntos es el mismo por la Proposición A.3. Así, si $\phi \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ y $b \notin \phi(\partial\Omega)$, podemos definir $\mathrm{d}(\phi, \Omega, b)$ como $\mathrm{d}(\phi, \Omega, b')$ donde b' es un valor regular de ϕ en $B(b, \rho_0)$. Formalmente, se tiene la siguiente definición.

Definición A.3. Sea $\phi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $b \notin \phi(\partial\Omega)$ y sea $\rho_0 = \rho(b, \phi(\partial\Omega))$. Se define el grado de ϕ en Ω con respecto a b como

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\phi, \Omega, b'),$$

donde b' es un valor regular de ϕ en $B(b, \rho_0)$.

La demostración de la Proposición A.3 requiere de algunos aspectos técnicos que sería extenso y engorroso detallar aquí, pero consiste básicamente en utilizar la representación integral del grado para expresar $\mathrm{d}(\phi, \Omega, b_1) - \mathrm{d}(\phi, \Omega, b_2)$ como integral de una divergencia (en este punto es necesaria la hipóstesis $\phi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$) con soporte en Ω y entonces por el Teorema de la divergencia se obtiene que $\mathrm{d}(\phi, \Omega, b_1) - \mathrm{d}(\phi, \Omega, b_2) = 0$.

Nuestro siguiente objetivo es remover la hipótesis $\phi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ y definir el grado para funciones $\phi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$.

Proposición A.4. *Si* $\phi, \psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *y* $b \notin \phi(\partial\Omega)$, *entonces existe* $\varepsilon = \varepsilon(\phi, \psi, \Omega)$ *tal que para* $|t| < \varepsilon$,

$$\mathrm{d}(\phi + t\psi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\phi, \Omega, b).$$

Demostración. Consideramos tres casos $b \notin \phi(\Omega)$, $b \notin \phi(S)$ y $b \in \phi(S)$.

Caso 1: Si $b \notin \phi(\Omega)$, entonces $\widetilde{\rho} = \rho(b, \phi(\overline{\Omega})) > 0$ y consideramos $\varepsilon = \widetilde{\rho}/2\|\psi\|_\infty$, (donde $\|\cdot\|_\infty$ denota la norma en $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$). Si $|t| < \varepsilon$, entonces $\rho(b, (\phi + t\psi)(\overline{\Omega})) \geq \widetilde{\rho}/2 > 0$, luego $b \notin (\phi + t\psi)(\overline{\Omega})$, por lo tanto

$$\mathrm{d}(\phi + t\psi, \Omega, b) = 0 = \mathrm{d}(\phi, \Omega, b).$$

Caso 2: Sea $b \notin \phi(S)$ y sea $\phi^{-1}(b) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, entonces como $b \notin \phi(S)$, se tiene que $J_\phi(x_i) \neq 0$ para $1 \leq i \leq m$. Definamos

$$h(t, x) = \phi(x) + t\psi(x) - b.$$

Así, para $1 \leq i \leq m$, se tiene que $h(0, x_i) = \phi(x_i) - b$ y $\partial_x h(0, x_i) = \phi'(x_i)$, y $\phi'(x_i)$ es invertible, por hipótesis, luego por el teorema de la función implícita, existen vecindades $(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ de cero en $\mathbb{R}$, vecindades $\mathcal{U}_i$ de x_i en Ω y funciones continuas $\varphi_i : (-\varepsilon_i, \varepsilon_i) \to \mathcal{U}_i$, tales que las únicas soluciones de $h(t, x) = 0$ en $(-\varepsilon_i, \varepsilon_i) \times \mathcal{U}_i$ son de la forma $(t, \varphi_i(t))$. Además achicando las vecindades si es necesario, podemos asegurar que $\operatorname{sgn}(J_{\phi+t\psi}(x)) = \operatorname{sgn}(J_\phi(x))$.
Escogiendo $\varepsilon = \min\limits_{1 \leq i \leq m} \varepsilon_i$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\phi + t\psi, \Omega, b) &= \int_\Omega \varphi\big((\phi + t\psi)(x) - b\big) J_{\phi+t\psi}(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{U}_i} \varphi\big((\phi + t\psi)(x) - b\big) J_{\phi+t\psi}(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn}\big(J_{\phi+t\psi}(x)\big) \int_{\mathcal{U}_i} \varphi\big((\phi + t\psi)(x) - b\big) \left|J_{\phi+t\psi}(x)\right| dx, \\
&= \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn}\big(J_{\phi+t\psi}(x)\big) \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi(y) dy, \\
&= \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn}\big(J_{\phi+t\psi}(x)\big) = \mathrm{d}(\phi, \Omega, b).
\end{aligned}$$

Caso 3: Sea $b \in \phi(S)$ y $\rho_0 = \rho(b, \phi(\partial\Omega))$. Escogemos $b_1 \in B(b, \rho_0/3)$ tal que b_1 es un valor regular de ϕ y entonces por el caso 2, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < |t| < \varepsilon_0$,

$$\mathrm{d}(\phi + t\psi, \Omega, b_1) = \mathrm{d}(\phi, \Omega, b_1) = \mathrm{d}(\phi, \Omega, b). \tag{A.5}$$

Ahora escojamos $\varepsilon < \text{mín}\{\varepsilon_0, \rho_0/3\|\psi\|_\infty\}$, entonces para $|t| < \varepsilon$,

$$\widetilde{\rho} = \rho(b, (\phi + t\psi)(\partial\Omega)) > \frac{2}{3}\rho_0 > 0,$$

y entonces $b \notin (\phi+t\psi)(\partial\Omega)$, y por lo tanto el grado, $\mathrm{d}(\phi+t\psi, \Omega, b)$ está definido. Por otra parte $b_1 \in B(b, \rho_0/3)$, luego $\|b - b_1\| < \frac{\rho_0}{3} \leq \frac{\widetilde{\rho}}{2}$, donde $\|\cdot\|$ denota la norma usual en $\mathbb{R}^n$, luego $b_1 \in B(b, \widetilde{\rho}/2)$, entonces por definición $\mathrm{d}(\phi + t\psi, \Omega, b_1) = \mathrm{d}(\phi + t\psi, \Omega, b)$, así por (A.5) se tiene que

$$\mathrm{d}(\phi + t\psi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\phi + t\psi, \Omega, b_1) = \mathrm{d}(\phi, \Omega, b).$$

□

Ahora podemos definir el grado para todas las funciones continuas, pues si $\phi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ y $b \notin \phi(\partial\Omega)$, entonces $\rho_0 = \rho(b, \phi(\partial\Omega)) > 0$ y existe $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que $\|\phi - \psi\|_\infty < \rho_0/2$, claramente $b \notin \psi(\partial\Omega)$ y entonces el grado $\mathrm{d}(\psi, \Omega, b)$ está bien definido, luego si $\psi_1, \psi_2 \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ son tales que $\|\phi - \psi_1\|_\infty < \rho_0/2$ y $\|\phi - \psi_2\|_\infty < \rho_0/2$, y consideramos $\widetilde{\psi} = \psi_1 - \psi_2$, entonces para $0 < t < 1$, se tiene que $\|\phi - (\psi_2 + t\widetilde{\psi})\|_\infty < \rho_0$ y por la proposición anterior, la función

$$d(t) = \mathrm{d}(\psi_2 + t\widetilde{\psi}, \Omega, b)$$

es localmente constante, luego por la conexidad de $[0, 1]$, es constante en todo este intervalo, por lo que $d(0) = d(1)$ entonces

$$\mathrm{d}(\psi_1, \Omega, b) = \mathrm{d}(\psi_2, \Omega, b),$$

y podemos definir $\mathrm{d}(\phi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\psi_2, \Omega, b)$ o $\mathrm{d}(\phi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\psi_2, \Omega, b)$, tal como se enuncia en la siguiente definición.

Definición A.4. Sea $\phi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ y $b \notin \phi(\partial\Omega)$, si $\rho_0 = \rho(b, \phi(\partial\Omega))$, entonces el grado de ϕ en Ω con respecto a b, está dado por

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\psi, \Omega, b)$$

para cualquier $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que $\|\phi - \psi\|_\infty < \rho_0/2$.

Proposición A.5. *Si* $\phi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *y* $b \notin \phi(\partial\Omega)$, *entonces*

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\phi - b, \Omega, 0). \tag{A.6}$$

Demostración. Si $\rho_0 = \rho(b, \phi(\partial\Omega)) = \rho(0, (\phi - b)(\partial\Omega)) > 0$ y $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que $\|\phi - \psi\|_\infty < \rho_0/2$, entonces $\|(\phi - b) - (\psi - b)\|_\infty = \|\phi - \psi\|_\infty < \rho_0/2$, luego por definición

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\psi, \Omega, b) \quad \text{y} \quad \mathrm{d}(\phi - b, \Omega, 0) = \mathrm{d}(\psi - b, \Omega, 0). \tag{A.7}$$

Así si b es un valor regular de ψ, es trivial verificar de la definición (A.2) que $\mathrm{d}(\psi - b, \Omega, 0) = \mathrm{d}(\psi, \Omega, b)$ y entonces $\mathrm{d}(\phi - b, \Omega, 0) = \mathrm{d}(\phi, \Omega, b)$.
Por otra parte si $b \in \psi(S)$, es posible encontrar un valor regular b_1 de ψ tal que $\|b - b_1\| < \rho(b, \psi(\partial\Omega))/2$, para el cual, por definición, se tiene que

$$\mathrm{d}(\psi - b_1, \Omega, 0) = \mathrm{d}(\psi - b, \Omega, 0) \quad \text{y} \quad \mathrm{d}(\psi, \Omega, b_1) = \mathrm{d}(\psi, \Omega, b) \tag{A.8}$$

y como b_1 es un valor regular, $\mathrm{d}(\psi - b_1, \Omega, 0) = \mathrm{d}(\psi, \Omega, b_1)$ y entonces de (A.7) y (A.8), se obtiene que $\mathrm{d}(\phi - b, \Omega, 0) = \mathrm{d}(\phi, \Omega, b)$. □

A.2 Propiedades del grado de Brouwer

En esta sección probaremos las propiedades básicas del grado de Brouwer y comentaremos algunas de sus consecuencias.

Teorema A.1.

(P1) *(Continuidad con respecto a la función)*

Sea $\phi \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ y $b \notin \phi(\partial\Omega)$. Existe una vecindad $\mathcal{U}$ de ϕ en $C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tal que para cada $\psi \in \mathcal{U}$,

$$\mathrm{d}(\psi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\phi, \Omega, b) \tag{A.9}$$

(P2) *(Invariancia bajo homotopías)*

Sea $H \in C(\overline{\Omega} \times [0,1], \mathbb{R}^n)$ tal que $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Entonces $d(H(\cdot, t), \Omega, b)$ es independiente de t.

(P3) *El grado $\mathrm{d}(\phi, \Omega, \cdot)$ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial\Omega)$.*

(P4) *(Aditividad)*

Sean Ω_1 y Ω_2 conjuntos abiertos y acotados en $\mathbb{R}^n$, si $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ y $b \notin \phi(\partial\Omega_1) \cup \phi(\partial\Omega_2)$, donde $\phi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ y $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, entonces

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\phi, \Omega_1, b) + \mathrm{d}(\phi, \Omega_2, b) \tag{A.10}$$

Demostración.

(P1) Sea $\mathcal{U} = \{\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) : \|\phi - \psi\|_\infty < \rho_0/4\}$, donde $\rho_0 = \rho(b, \phi(\partial\Omega))$.
Si $\psi \in \mathcal{U}$ entonces $\widetilde{\rho} = \rho(b, \psi(\partial\Omega)) \geq \frac{3}{4}\rho_0$, luego $b \notin \psi(\partial\Omega)$ y por lo tanto el grado $\mathrm{d}(\psi, \Omega, b)$ está bien definido.
Sea $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que $\|\phi - \varphi\|_\infty < \rho_0/8$, entonces

$$\|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{3}{8}\rho_0 \leq \frac{1}{2}\widetilde{\rho},$$

y entonces por definición,

$$\mathrm{d}(\psi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\varphi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\phi, \Omega, b).$$

(P2) Por $(P1)$, $\mathrm{d}(H(\cdot, t), \Omega, b)$ es localmente constante y entonces continua, luego como $[0, 1]$ es conexo, es constante en todo el intervalo.

(P3) Por (A.6), $\mathrm{d}(\phi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\phi - b, \Omega, 0)$ y para todo b_1 tal que $\|b - b_1\| < \rho_0/4$, donde $\rho_0 = \rho(b, \phi(\partial\Omega))$ se tiene que $\mathrm{d}(\phi - b, \Omega, 0) = \mathrm{d}(\phi - b_1, \Omega, 0)$, luego el grado es localmente constante y entonces continuo, por lo tanto es constante en cada componente conexa.

(P3) Sea $\rho_0 = \rho(b, \phi(\partial\Omega))$ y $\psi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tal que $\|\phi - \psi\|_\infty < \rho_0/2$, entonces

$$\mathrm{d}(\psi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\phi, \Omega, b) \quad \text{y} \quad \mathrm{d}(\psi, \Omega_i, b) = \mathrm{d}(\phi, \Omega_i, b), \quad \text{para}\, i = 1, 2. \tag{A.11}$$

Por otra parte $B = B(b, \rho_0/2)$ es un conexo contenido en $\mathbb{R}^n \setminus \psi(\partial\Omega)$ y en $\mathbb{R}^n \setminus \psi(\partial\Omega_i)$, para $i = 1, 2$, por lo tanto el grado está bien definido en cada uno de estos conjuntos y en sus componentes conexas y por el Teorema de Sard, existe $c \in B$ un valor regular de ψ y entonces

$$\mathrm{d}(\psi, \Omega, c) = \mathrm{d}(\psi, \Omega, b) \quad \text{y} \quad \mathrm{d}(\psi, \Omega_i, c) = \mathrm{d}(\psi, \Omega_i, b) \quad \text{para}\, i = 1, 2. \tag{A.12}$$

Ahora, como c es un valor regular de ψ, se obtiene directamente de la definición (A.2) que $\mathrm{d}(\psi, \Omega, c) = \mathrm{d}(\psi, \Omega_1, c) + \mathrm{d}(\psi, \Omega_2, c)$, y por lo tanto de (A.11) y (A.12), se obtiene

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\phi, \Omega_1, b) + \mathrm{d}(\phi, \Omega_2, b).$$

□

Otras propiedades del grado de Brouwer, son las siguientes:

Proposición A.6. *Si* $\phi \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *y* $b \notin \phi(\overline{\Omega})$, *entonces* $\mathrm{d}(\phi, \Omega, b) = 0$. *Equivalentemente si* $\mathrm{d}(\phi, \Omega, b) \neq 0$, *entonces existe* $x \in \Omega$ *tal que* $\phi(x) = b$.

Demostración. Sea $\rho_0 = \rho(b, \phi(\overline{\Omega}))$. Si $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que $\|\phi - \psi\|_\infty < \rho_0/2$, entonces $b \notin \psi(\overline{\Omega})$ y entonces b no es un valor crítico de ψ, por lo tanto el grado $\mathrm{d}(\psi, \Omega, b)$ está bien definido y es igual a cero, por lo tanto

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\psi, \Omega, b) = 0.$$

$\square$

Proposición A.7. *Si $\phi, \psi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tales que $\phi = \psi$ sobre $\partial\Omega$ y $b \notin \phi(\partial\Omega)$, entonces*

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\psi, \Omega, b). \tag{A.13}$$

Este resultado es consecuencia inmediata de la propiedad (P2).

Proposición A.8. *(Propiedad de Excisión) Sea $\phi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ y $b \notin \phi(\partial\Omega)$. Si $K \subset \overline{\Omega}$ es un conjunto cerrado y $b \notin \phi(K)$, entonces*

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\phi, \Omega \setminus K, b). \tag{A.14}$$

Demostración. Sea $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que $\|\phi - \psi\|_\infty < \widetilde{\rho}$, donde $\widetilde{\rho} = \rho(b, \phi(\partial\Omega \cup K))$, y tal que b es un valor regular de ψ. Entonces $\rho(b, \psi(K)) \geq \widetilde{\rho}/2$, es decir $b \notin \psi(K)$ y por lo tanto $\psi^{-1}(b) \cap K = \emptyset$, luego

$$d(\psi, \Omega, b) = \sum_{\psi^{-1}(b)} \mathrm{sgn}(J_\psi(x)) = \sum_{\psi^{-1}(b) \cap (\Omega \setminus K)} \mathrm{sgn}(J_\psi(x)) = d(\psi, \Omega \setminus K, b) \tag{A.15}$$

Por otra parte $\partial\Omega \subset \partial\Omega \cup K$, entonces $\rho(b, \phi(\partial\Omega)) \geq \rho(b, \phi(\partial\Omega \cup K)) = \widetilde{\rho}$, de donde $\|\phi - \psi\| < \dfrac{\widetilde{\rho}}{2} \leq \dfrac{1}{2}\rho(b, \phi(\partial\Omega))$ y entonces por definición de grado para funciones continuas, se tiene que

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\psi, \Omega, b) \tag{A.16}$$

y $\partial(\Omega \setminus K) \subset \partial\Omega \cup K$, por lo tanto $\rho(b, \phi(\partial(\Omega \setminus K))) \geq \widetilde{\rho} > 0$ y el grado $\mathrm{d}(\phi, \Omega \setminus K, b)$ está bien definido. Además

$$\sup_{x \in \overline{\Omega} \setminus K} \|\phi - \psi\| \leq \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|\phi - \psi\| \leq \frac{\widetilde{\rho}}{2},$$

entonces por definición,

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega \setminus K, b) = \mathrm{d}(\psi, \Omega \setminus K, b), \tag{A.17}$$

luego, de (A.17), (A.16) y (A.15), se tiene que

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega \setminus K, b) = \mathrm{d}(\phi, \Omega, b).$$

$\square$

Notamos que la propiedad dada por la Proposición A.6 garantiza, bajo ciertas condiciones, la existencia de soluciones para ecuaciones de la forma $\phi(x) = b$. Cabe destacar también que la Proposición A.7, expresa una propiedad interesante: el grado de una aplicación depende solo de sus valores en la frontera. Por otro lado la Proposición A.8 asegura que al calcular el grado se puede prescindir de aquellos subconjuntos cerrados del dominio que no contengan ceros de ϕ. Más generalmente se puede probar que si $\phi(x) = b$ tiene una solución aislada x_0 en K, entonces

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\phi, \Omega \setminus B(x_i, \varepsilon), b) + i(\phi, x_0, b),$$

donde $i(\phi, \Omega, b) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathrm{d}(\phi, B(x_0, \varepsilon), b)$.
Observamos que la propiedad A.6 nos es útil cuando el grado es distinto de cero. En este sentido la propiedad (P2) es fundamental porque permite comparar ciertas funciones, mediante homotopías, con la función identidad cuyo grado sabemos es igual a uno. Otros resultados importantes en esta dirección son por ejemplo el Teorema de Borsuk que nos dice que el grado de una función impar definida en una bola que no se anula en la frontera es impar, o el Teorema de Punto Fijo de Brouwer, que establece que una función continua definida de la clausura de una bola abierta de $\mathbb{R}^n$ sobre si misma, tiene un punto fijo. (la demostración de estos teoremas así como algunas aplicaciones interesantes, pueden encontrarse por ejemplo en [26] o [18]).

A.3 El grado de Leray-Schauder

A.3 Definiciones y resultados preliminares

En esta sección X representará un espacio de Banach real y $\Omega \subset X$ un conjunto abierto y acotado .

Definición A.5. Sean X e Y espacios de Banach. Sea Ω un conjunto abierto y acotado en X y $T : \overline{\Omega} \to Y$ un operador continuo. Diremos que T es un operador *compacto* si transforma conjuntos acotados de X en conjuntos relativamente compactos en Y.

Definición A.6. Sea $T : \overline{\Omega} \to X$ un operador compacto, el operador $\phi = I - T$ se llama una *perturbación compacta de la identidad.*

Proposición A.9. *Una perturbación compacta de la identidad en X es cerrada (es decir transforma conjuntos cerrados en conjuntos cerrados) y propia (es decir, la imagen inversa de un conjunto compacto es compacto)*[3].

[3]La demostración de esta proposición se puede encontrar por ejemplo en [18] o [26].

Definición A.7. Sean X e Y, espacios de Banach. Un operador $T : X \to Y$ tal que $T(X)$ está contenido en un subespacio de dimensión finita de Y, se llama un *operador de rango finito*[4].

Lema A.4. *Sea $K \subset X$ un conjunto compacto. Dado $\varepsilon > 0$, existe un subespacio de dimensión finita $V_\varepsilon \subset X$ y una aplicación $g_\varepsilon : K \to V_\varepsilon$ tal que para cada $x \in K$*

$$\|g_\varepsilon(x) - x\| < \varepsilon \tag{A.18}$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, por la compacidad de K, existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ ($n = n(\varepsilon)$), tales $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$. Sea $V_\varepsilon = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, el subespacio generado por $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, así $\dim V_\varepsilon \leq n < \infty$ y para cada $x \in K$ definimos

$$b_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - x_i\|, & \text{si } x \in B(x_i, \varepsilon) \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Como $\{B(x_i, \varepsilon)\}_{i=1^n}$ es un cubrimiento finito de K, $\sum_{i=1}^{n} b_i(x_i) \neq 0$ para cada $x \in K$, entonces podemos definir para cada $x \in K$

$$g_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i(x) x_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i(x)} \quad \in V_\varepsilon,$$

así si $b_i(x) \neq 0$, entonces $\|x - x_i\| < \varepsilon$ y si $x \in K$,

$$\|g_\varepsilon(x) - x\| = \left\| \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i(x)(x_i - x)}{\sum_{i=1}^{n} b_i(x)} \right\| < \varepsilon.$$

□

Observación A.3. *Si V es un espacio de dimensión finita, digamos* $\dim V = n$, *$\phi \in C(\overline{\Omega}, V)$, donde $\Omega \subset V$ es un conjunto abierto y acotado y $b \notin \phi(\partial\Omega)$, entonces dada una base de V podemos identificar V con $\mathbb{R}^n$ y el grado $d(\phi, \Omega, b)$ es independiente de la elección de la base, pues dadas dos bases distintas, un vector*

[4] Claramente un operador de rango finito es un operador compacto.

x puede expresarse como $x^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ o $x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$ dependiendo de la base escogida y existe una matriz invertible M tal que $Mx^{(2)} = x^{(1)}$. Si $\Omega \subset V$ es un conjunto abierto y acotado y $b \in V$, entonces dada $\phi \in C(\overline{\Omega}_i, \mathbb{R}^n)$, $i = 1$ o 2 según corresponda, se tiene que

$$\phi_2(x^{(2)}) = M^{-1}\phi_1(x^{(2)}). \tag{A.19}$$

Así, si $\phi \in C^1(\overline{\Omega}, V)$, de (A.19) se obtiene que $J_\phi(x)$ es independiente de la base escogida y si b es un valor regular, el cual también se puede expresar como $b^{(1)}$ o $b^{(2)}$, vemos que

$$\mathrm{d}(\phi_1, \Omega_1, b^{(1)}) = \mathrm{d}(\phi_2, \Omega_2, b^{(2)}).$$

El resultado sigue siendo válido si b no es un valor regular, gracias al Teorema de Sard.

Definición A.8. Sea $\Omega \subset X$ un conjunto abierto y acotado en un espacio de Banach X y sea $T : \overline{\Omega} \to X$ un operador de rango finito. Si $b \notin \phi(\partial\Omega)$ donde $\phi = I - T$, se define

$$\mathrm{d}(\phi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\phi|_{\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, b), \tag{A.20}$$

donde $F \subset X$ es un subespacio de dimensión finita que contiene a $T(\overline{\Omega})$ y a b.

La observación previa muestra que la definición (A.8) es independiente de la elección del subespacio F y por lo tanto el grado para operadores de rango finito está bien definido.

A.4 Definición del grado de Leray-Schauder

Definición A.9. Sea Ω un conjunto abierto y acotado en un espacio de Banach X y $\phi = I - T : \overline{\Omega} \to X$ una perturbación compacta de la identidad. Sea $b \notin \phi(\partial\Omega)$ y $\rho_0 = \rho(b, \phi(\partial\Omega))$. Sea $\widehat{T} : \overline{\Omega} \to X$ un operador de rango finito tal que $\|Tx - \widehat{T}x\| < \rho_0/2$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Definimos el *grado de Leray-Schauder* de ϕ en Ω con respecto a b como

$$\deg_{LS}(\phi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\widehat{\phi}, \Omega, b), \tag{A.21}$$

donde $\widehat{\phi} = I - \widehat{T}$.

Notamos que el grado está bien definido, pues por la proposición A.9, $\phi(\partial\Omega)$ es un conjunto cerrado y entonces $\rho_0 > 0$, por lo tanto gracias al Lema A.4, siempre es posible encontrar un operador de rango finito $\widehat{T}$ como el descrito en la definición, basta considerar

$$\widehat{T} = g_{\rho_0/2} \circ T,$$

donde $g_{\rho_0/2}$ es la aplicación dada por el Lema A.4 para $\varepsilon = \rho_0/2$. Entonces para $x \in \partial\Omega$ se tiene que $\|\phi(x) - \widehat{\phi}(x)\| < \rho_0/2$, de donde $\rho(b, \widehat{\phi}(\partial\Omega)) \geq \rho_0/2 > 0$, luego el grado $\mathrm{d}(\widehat{\phi}, \Omega, b)$ está bien definido y

$$\mathrm{d}(\widehat{\phi}, \Omega, b) = \mathrm{d}(\widehat{\phi}|_{\Omega\cap F}, \Omega \cap F, b),$$

donde $F \subset X$ es un subespacio de dimensión finita que contiene a $\widehat{T}(\overline{\Omega})$ y a b.
Por último, es necesario verificar que esta definición es independiente de la elección de $\widehat{T}$, para esto consideremos dos operadores de rango finito T_1 y T_2 tales que $\|Tx - T_ix\| < \rho_0/2$, para $i = 1, 2$ y para todo $x \in \overline{\Omega}$. Sean $\phi_i = I - T_i$ y $F_i \subset X$, subespacios de dimensión finita que contienen a $T_i(\overline{\Omega})$ y a b, para $i = 1, 2$, entonces por definición

$$\mathrm{d}(\phi_i, \Omega, b) = \mathrm{d}(\phi_i|_{\Omega\cap F_i}, \Omega \cap F_i, b), \quad \text{para}\, i = 1, 2,$$

y si $F \subset X$ un subespacio de dimensión finita que contiene a $F_1 + F_2$ y a b, entonces

$$\mathrm{d}(\phi_i, \Omega, b) = \mathrm{d}(\phi_i|_{\Omega\cap F}, \Omega \cap F, b), \quad \text{para}\, i = 1, 2.$$

Sea $H(x, t) = t\phi_1(x) + (1 - t)\phi_2(x)$ para $x \in \overline{\Omega}$ y $t \in [0, 1]$. Es fácil ver que $x \notin H(\cdot, t)(\partial\Omega)$ y por lo tanto el grado $\mathrm{d}(H, \Omega, b)$ está definido. Además $\|\phi(x) - H(x, t)\| < \rho_0/2$ para $t \in [0, 1]$, luego por la propiedad de invariancia bajo homotopías del grado de Brouwer, se tiene que

$$\mathrm{d}(\phi_1|_{\Omega\cap F}, \Omega \cap F, b) = \mathrm{d}(\phi_2|_{\Omega\cap F}, \Omega \cap F, b)$$

Por lo tanto el grado en (A.21) está bien definido.

A.4 Propiedades del grado

En adelante denotaremos por $Q(\overline{\Omega}, X)$ al espacio de todos los operadores compactos definidos de $\overline{\Omega}$ sobre X, donde Ω es un conjunto abierto y acotado en un espacio de Banach X.

Teorema A.2.

1. *Sea $T \in Q(\overline{\Omega}, X)$ y $b \notin (I - T)(\partial\Omega)$. Existe una vecindad $\mathcal{U}$ de T en $Q(\overline{\Omega}, X)$ tal que para todo $S \in \mathcal{U}$, se tiene que $b \notin (I - S)(\partial\Omega)$ y*

$$\deg_{LS}(I - S, \Omega, b) = \deg_{LS}(I - T, \Omega, b). \tag{A.22}$$

2. *Sea $H \in C(\overline{\Omega} \times [0, 1], X)$ defininida por $H(x, t) = x - S(x, t)$, donde $S \in Q(\overline{\Omega} \times [0, 1], X)$. Si $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$, entonces $\deg_{LS}(H(\cdot, t), \Omega, b)$ es independiente de t.*

3. El grado es constante en cada componente conexa de $X \setminus (I-T)(\partial\Omega)$.

4. Si $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ *y* $b \notin (I-T)(\partial\Omega_i)$, $i = 1,2$, *entonces*

$$\deg_{LS}(I-T,\Omega,b) = \deg_{LS}(I-T,\Omega_1,b) + \deg_{LS}(I-T,\Omega_2,b). \tag{A.23}$$

Demostración. Sea $\rho_0 = \rho(b, I-T(\partial\Omega)) > 0$ y $\mathcal{U} = \{S \in Q(\overline{\Omega}, X) : \|S-T\|_\infty < \rho_0/2\}$. Si $S \in \mathcal{U}$, entonces claramente $b \notin (I-S)(\partial\Omega)$, de hecho $\rho(b,(I-S)(\partial\Omega)) > \rho_0/2$. Sean T_1 y S_1 dos operadores de rango finito tales que

$$\|T-T_1\|_\infty < \frac{\rho_0}{4} \quad \text{y} \quad \|S-S_1\|_\infty < \frac{\rho_0}{4},$$

y sea $F \subset X$ un subespacio de dimensión finita que contiene a $T_1(\overline{\Omega})$, $S_1(\overline{\Omega})$ y b, entonces

$$\begin{aligned} \deg_{LS}(I-T,\Omega,b) &= \mathrm{d}((I-T_1)|_{\overline{\Omega}\cap F}, \Omega\cap F, b) \\ \deg_{LS}(I-S,\Omega,b) &= \mathrm{d}((I-S_1)|_{\overline{\Omega}\cap F}, \Omega\cap F, b). \end{aligned} \tag{A.24}$$

Sea $H(x,t) = t(I-T_1)x + (1-t)(I-S_1)x$, para $x \in \Omega \cap F$. Es fácil ver que para $x \in \partial(\Omega\cap F)$ y $0 < t < 1$, $\|H(x,t) - b\| \geq \rho_0/4 > 0$ y por lo tanto $b \notin H(\cdot,t)(\partial(\Omega\cap F))$, luego (A.22) se obtiene de la propiedad de invariancia bajo homotopías del grado de Brouwer y (A.24).
Las demás propiedades son consecuencia de *1* y las propiedades del grado de Brouwer. □

Observación A.4. *Las propiedades expuestas en las Proposiciones A.6, A.7 y A.8, se extienden también al grado de Leray-Schauder.*

La teoría del grado se utiliza para probar existencia de soluciones para ecuaciones de la forma $\phi(x) = 0$, básicamente según el siguiente esquema: se expresa el problema como el caso t = 1 de una familia de problemas que dependen de un parámetro $t \in [0,1]$, de tal forma que el grado para el problema con t = 0 sea distinto de cero (o viceversa) y que la homotopía sea admisible (es decir, que no existan soluciones en la frontera), entonces por las propiedades de invariancia bajo homotopías y la Proposición A.6 (en general, sus extensiones al grado de Leray-Schauder) se obtiene la existencia de al menos una solución para $t = 1$, es decir para el problema original. La dificultad de este método radica en demostrar que a lo largo de la homotopía no existen soluciones en la frontera, en la práctica esto se asegura estableciendo cotas a priori para las posibles soluciones y sus derivadas. La utilización de cotas a priori para probar la existencia de soluciones de problemas de valores en la frontera elípticos fue introducida por Bernstein, ([19], [20]) pero su importancia en el estudio de problemas de existencia de soluciones para ecuaciones abstractas fue descubierta por Leray y Schauder ([32], [31]).

El análogo al teorema de punto fijo de Brouwer para operadores compactos en espacios de Banach fue demostrado por Schauder ([38]), y su demostración puede encontrarse también en [18] o [26], entre otros.

Teorema A.3. *Teorema del punto fijo de Schauder. Si $B \subset X$ es una bola abierta en un espacio de Banach X y $T : B \to B$ es un operador compacto, entonces existe $x \in B$ tal que $x = T(x)$.*

La teoría del grado ha sido utilizada en el estudio de una gran variedad de problemas de valores en la frontera, muchas de las aplicaciones y extensiones de esta teoría pueden encontrarse en las referencias citadas en este anexo, sin embargo la bibliografía al respecto supera largamente la lista básica incluida en este trabajo. Una síntesis de estas aplicaciones, la que sería imposible de incluir aquí de forma óptima, puede encontrarse en [24] y [33], en esta última el autor resume de manera excelente muchos de los métodos que utilizan la teoría del grado en el estudio de este tipo de problemas y finaliza cada capítulo con una nota bibliográfica e histórica del tema en cuestión.

REFERENCIAS

[1] A. Cabada, P. Habets, and R. Pouso. Optimal existence conditions for ϕ-Laplacian equations with upper and lower solutions in the reversed order. *J. Differential Equations*, 166(2):385–401, 2000.

[2] A. Cabada and R. Pouso. Existence results for the problem $(\phi(u'))' = f(t, u, u')$ with periodic and Neumann boundary conditions. *Nonlinear Anal.*, 30:1733–1742, 1997.

[3] L. Erbe, S. Hu, and H. Wang. Multiple positive solutions of some boundary value problems. *J.Math. Anal. Appl.*, 184:640–648, 1994.

[4] L. Erbe and H. Wang. On the existence of positive solutions of ordinary differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 120(3):743–748, 1994.

[5] M. García-Huidobro, R. Manásevich, and M. Ôtani. Existence results for p-Laplacian-like systems of O. D. E.'s. *Funkcial. Ekvac.*, 46:253–285, 2003.

[6] M. García-Huidobro, R. Manásevich, and J. Ward. Vector p-Laplacian like operators, pseudo-eingevalues, and bifurcation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems.*, 19:299–321, 2007.

[7] M. García-Huidobro, R. Manásevich, and J. R. Ward. Positive solutions for equations and systems with p-Laplace-like operators. *Adv. Differential Equations*, 14(5-6):401–432, 2009.

[8] M. García-Huidobro, R. Manásevich, and F. Zanolin. A Fredholm-like result for strongly nonlinear second order ODEs. *J. Differential Equations*, 114:132–167, 1994.

[9] M. García-Huidobro, R. Manásevich, and F. Zanolin. Strongly nonlinear second-order ODEs with rapidly growing terms. *J.Math. Anal. Appl.*, 202(1), 1996.

[10] L. Hu and L. Wang. Multiple positive solutions of boundary value problems for systems of nonlinear second-order differential equations. *J.Math. Anal. Appl.*, 335:1052–1060, 2007.

[11] M. A. Krasnoselskii. *Positive solutions of operator equations.* Noordhoff, Groningen, 1964.

[12] B. Liu and J. Zhang. The existence of positive solutions for some nonlinear boundary value problems with linear mixed boundary conditions. *J.Math. Anal. Appl.*, 309:505–516, 2005.

[13] R. Manásevich and J. Mawhin. Periodic solutions for nonlinear systems with p-Laplacian-like operators. *J. Differential Equations*, 145:367–393, 1998.

[14] M. Rao and Z. Ren. *Theory of Orlicz Spaces.* Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1991.

[15] H. Wang. On the number of positive solutions for nonlinear systems. *J.Math. Anal. Appl.*, 281:287–306, 2003.

[16] J. Wang. The existence of positive solutions for the one-dimesional p- laplacian. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125(8):2275–2283, 1997.

Referencias Apéndice

[17] H. Amann and S. A. Weiss. On the Uniqueness of the Topological Degree. *Math. Z.*, 130:39–54, 1973.

[18] H. Berestycki. *Théorie du degré topologique et applications à des problèmes aux limites non linéaires.* Laboratoire Analyse Numerique - L. A 189, París, France, 1975.

[19] S. Bernstein. Sur la généralisation du problème de Dirichlet. *Math. Ann.*, 62(2):253–271, 1906.

[20] S. Bernstein. Sur la généralisation du problème de Dirichlet. *Math. Ann.*, 69(1):82–136, 1910.

[21] L. E. J. Brouwer. Beweis der Invarianz der Dimensionnenzahl. *Math. Ann.*, 70(2):161–165, 1911.

[22] L. E. J. Brouwer. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 71(4):97–115, 1912.

[23] I. Fonseca and W. Gangbo. *Degree theory in analysis and aplications.* Clarendon Press, Oxford, 1995.

[24] R. Gaines and J. Mawhin. *Coincidence Degree, and Nonlinear Differential Equations, Lecture Notes in Math.,vol 568.* Springer-Verlag, Berlin and New York, 1977.

[25] E. Heinz. An elementary analytic theory of degree of mapping in n-dimensional space. *J. Math. and Mech*, 8:231–247, 1959.

[26] S. Kesavan. *Nonlinear functional analysis, a first course.* Hindustan Book Agency, New Delhi, India, 2004.

[27] L. Kronecker. Über Systeme von Functionen mehrer Variabeln. *Monatsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 688–698, 1869.

[28] L. Kronecker. Über Systeme von Functionen mehrer Variablen. *Monatsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 159–193, 1869.

[29] L. Kronecker. Über die verschiedenen Sturm'schen Reihen und ihre gegenseitigen Beziehungen. *Monatsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 117–154, 1873.

[30] L. Kronecker. Über die Charakteristik von Funktionen Systemen. *Monatsberichte der Kgl. Preussischen Akadenie der Wissenschaften*, pages 145–152, 1878.

[31] J. Leray. Les problèmes non linéaires. *Enseign.Math.*, 35:139–151, 1936.

[32] J. Leray and J. Schauder. Topologie et èquations fonctionnelles. *Annales Scientifiques de l'É.N.S.*, 51(3):45–78, 1934.

[33] J. Mawhin. *Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems.* Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Providence, Rhode Island, 1979.

[34] J. Mawhin. Leray-Schauder Degree: A half century of extensions and aplications. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 14(2):195–228, 1999.

[35] M. Nagumo. Degree of Mapping in Convex Linear Topoligical Space. *Amer. J. Math.*, 73(3):487–511, 1951.

[36] M. Nagumo. A Theory of Degree of Mapping Based on Infinitesimal Analysis. *Amer. J. Math.*, 73(3):485–496, 1951.

[37] E. Outerelo and J. M. Ruiz. *Mapping degree theory*, volume 108. Graduate Studies in Mathematics, AMS-RSME, 2009.

[38] J. Schauder. Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen. *Studia Math*, 2:171–180, 1930.

[39] H. W. Siegberg. Some Historical Remarks ConcerningDegree Theory. *The American Mathematical Monthly*, 88(2):125–139, 1981.