ALGEBRAS DE BERNSTEIN DE DIMENSION n , $n \leq 6$

Tesis

entregada a la

Universidad de Chile

en cumplimiento parcial de los requisitos

para optar al grado de

Magister en Ciencias Matemáticas con mención en Algebra

FACULTAD DE CIENCIAS

por

ANA LAURA FUENZALIDA CAMMAS

Octubre, 1988

Patrocinante: Dr. César Burgueño M.

Facultad de Ciencias

Universidad de Chile

I N F O R M E   D E   A P R O B A C I O N

T E S I S   D E   M A G I S T E R

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el Candidato

ANA LAURA FUENZALIDA CAMMAS

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Matemáticas con mención en Algebra

Patrocinante de Tesis

Dr. César Burgueño M.

Comisión Informante de Tesis

Dr. Ricardo Baeza R. — R Baeza

Dra. Alicia Labra J. — Alicia Labra J.

Dr. Jorge Soto A.

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

Las Algebras de Bernstein surgieron a principios de siglo (1923-1924) con trabajos realizados en el campo de la Biología por Serge Bernstein, quien dió una descripción completa de las $\mathbb{R}$-álgebras conmutativas, no necesariamente asociativas, de dimensión tres que satisfacen la ecuación $(x^2)^2 = (w(x))^2x^2$ donde w es un homomorfismo no trivial del álgebra en el cuerpo. Sus resultados los obtuvo a partir de consideraciones sobre las leyes de herencia y el principio estacionario de una población.

Posteriormente (1975), P. Holgate estudió el problema desde un punto de vista algebraico. Descompuso el álgebra en sub-espacios y a partir de ellos obtuvo resultados sobre la estructura del álgebra, lo cual le permitió determinar los posibles tipos de Algebras de Bernstein de dimensión tres y cuatro, quedando como problema abierto el determinar las tablas de dimensión cuatro.

El objeto de esta Tesis es describir totalmente las tablas de multiplicación antes mencionadas. También, los posibles tipos de familias paramétricas de Algebras de Bernstein de dimensión cinco y seis, estudiando además la ortogonalidad de ellas.

En el Capítulo I, de las generalidades, se dan las nociones básicas sobre las Algebras de Bernstein y su descomposición en sub-espacios dada por P. Holgate [5], en base a la cual se trabaja en los Capítulos siguientes.

En el Capítulo II, de la clasificación, se muestran los diferentes tipos de Algebras de Bernstein de dimensión $n \leq 6$ y se describen las tablas de multiplicación de las Algebras de Bernstein de dimensión $n \leq 4$ correspondientes a cada tipo.

En el Capítulo III, de la ortogonalidad, se prueba que hay cierto tipo de Algebras de Bernstein de dimensión $n + 1$ que siempre son ortogonales. Este resultado se utiliza, junto a los resultados obtenidos en [7], para mostrar que toda Algebra de Bernstein de dimensión ≤ 4 es ortogonal.

CAPITULO I

GENERALIDADES

Sea K un cuerpo

Definición 1.1. Una K-álgebra o un álgebra sobre K es un K-espacio vectorial A sobre el cual se define una aplicación K-bilineal:

$$\mu : A \times A \to A$$
$$(x,y) \to xy$$

llamada multiplicación en A .

A es asociativa sí y sólo si

$$\mu(\mu(x,y),z) = \mu(x,\mu(y,z)) \qquad \forall\ x,y,z \in A$$

A es conmutativa sí y sólo si

$$\mu(x,y) = \mu(y,x) \qquad \forall\ x,y \in A$$

A tiene elemento uno, 1_A , sí y sólo si existe $1_A \in A$ tal que

$$\mu(1_A,x) = x = \mu(x,1_A) \qquad \forall\, x \in A .$$

Ejemplo 1.2. Todo cuerpo K tiene una estructura natural de K-álgebra con elemento uno, asociativa y conmutativa.

Ejemplo 1.3. Sea V un K-espacio vectorial, $\dim_K V < \infty$ entonces $A = \mathcal{L}_K(V) = \{f \,/\, f : V \to V \text{ K-lineal}\}$ es una K-álgebra al definir $f \cdot g = f \circ g \quad \forall\, f,g \in \mathcal{L}_K(V)$. A es llamada el álgebra de las transformaciones lineales del espacio vectorial V y es una K-álgebra asociativa con elemento uno, id_V y en general, no es conmutativa.

Ejemplo 1.4. Sea A una K-álgebra con multiplicación que denotamos por xy y definamos sobre A una aplicación K-bilineal dada por:

$$A \times A \to A$$

$$(x,y) \to x \cdot y := xy + yx$$

luego A tiene una estructura de K-álgebra respecto del nuevo producto.

Observación 1.5. Si A es asociativa y conmutativa respecto al producto xy entonces A es asociativa respecto al producto $x \cdot y$.

Ejemplo 1.6. Sea A una K-álgebra asociativa y definamos sobre A una aplicación K-bilineal dada por:

$$A \times A \to A$$

$$(x,y) \to x \cdot y := xy - yx \ ,$$

en que xy denota el producto original en A , luego A tiene una estructura de K-álgebra conmutativa y no asociativa. A se llama álgebra de Lie.

Definición 1.7. Sea A un álgebra sobre K , la dimensión del álgebra A sobre K , denotada $\dim_K A$ es la dimensión de A como espacio vectorial sobre K .

Observación 1.8. En el presente trabajo, consideraremos sólo álgebras de dimensión finita.

Definición 1.9. Sea A una K-álgebra, $\dim_K A = n$. Sea $\{a_i\}_{i=1}^n$ una base de A sobre K . Las relaciones:

$$a_i a_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} a_k , \qquad \gamma_{ijk} \in K \qquad \forall\, i,j,k = 1, \ldots, n$$

constituyen la tabla de multiplicación del álgebra A . Los escalares γ_{ijk} se llaman constantes de estructura del álgebra A con respecto a la base $\{a_i\}_{i=1}^n$.

Ejemplo 1.10. Cuaterniones Hamiltonianos: $\mathbb{H}$.
Como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$. Sea $\{e_i\}_{i=1}^4$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

Consideremos la tabla de multiplicación siguiente:

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2
e_4	e_4	e_3	$-e_2$	$-e_1$

Así se define sobre $\mathbb{H}$ una estructura de $\mathbb{R}$-álgebra, asociativa, no conmutativa y con elemento uno, e_1 .

En este ejemplo, hay exactamente 4^3 constantes de estructura las cuales pertenecen al conjunto $\{0,-1,1\}$.

Definición 1.11. Sea A una K-álgebra. Sea B un K-sub-espacio de A estable para la multiplicación en A . Entonces B se dice una K-sub-álgebra de A .

Ejemplo 1.12. Sea A una K-álgebra. Consideremos $\mathcal{L}_K(A)$ el álgebra de las transformaciones lineales de A . Sea

$$x \in A , \quad \begin{array}{l} L_x : A \to A \\ \quad a \to xa \end{array} , \quad \begin{array}{l} R_x : A \to A \\ \quad a \to ax \end{array}$$

la multiplicación a la izquierda y a la derecha respectivamente.

Entonces el conjunto de transformaciones lineales de A generado por las multiplicaciones a la izquierda, a la derecha y por la identidad de $\mathcal{L}_K(A)$ constituye una sub-álgebra de $\mathcal{L}_K(A)$, denotada por $T(A)$.

Definición 1.13. Sea A una K-álgebra. $J \subseteq A$. Se dice que J es un ideal a la izquierda (respectivamente a la derecha) de A si:

i) J es un K-subespacio de A

ii) $AJ \subseteq J$ (respectivamente $JA \subseteq J$) .

Observación 1.14.

1. J es ideal bilateral si es ideal a la izquierda y a la derecha a la vez.

2. Si A es asociativa y admite elemento uno, 1_A se tiene:

$$\alpha x = (\alpha 1_A)x = x(\alpha 1_A) \qquad \forall \alpha \in K , \forall x \in A .$$

Luego, los ideales a la izquierda (a la derecha, bilaterales) del anillo A son idénticos a los ideales a la izquierda (a la derecha, bilaterales) de la K-álgebra A respectivamente.

Definición 1.15. Sea A una K-álgebra. J un ideal bilateral de A .

$A/_J$ es una K-álgebra llamada K-álgebra cuociente de A por el ideal bilateral J si:

a) $A/_J$ es un K-espacio vectorial cuociente,

b) se define la aplicación K-bilineal

$$A/_J \times A/_J \to A/_J$$

$$(x + J,y + J) \to (x + J)\cdot(y + J) := xy + J$$

en que xy denota el producto en A .

Definición 1.16. Sea A una K-álgebra no necesariamente conmutativa ni asociativa.

Sea $\mathcal{U}$ una sub-álgebra de A , $x \in A$, $r \in \mathbb{N}$.

a) $$^{1}x := x \,, \quad ^{r+1}x := x(^{r}x)$$

$$x^{1} := x \,, \quad x^{r+1} := (x^{r})x$$

se llaman potencias principales izquierdas (respectivamente derechas) de x .

b) $$^{1}\mathcal{U} := \mathcal{U} \,, \quad ^{r+1}\mathcal{U} := \langle \mathcal{U}(^{r}\mathcal{U}) \rangle$$

$$\mathcal{U}^{1} := \mathcal{U} \,, \quad \mathcal{U}^{r+1} := \langle (\mathcal{U}^{r})\mathcal{U} \rangle$$

se llaman potencias principales izquierdas (respectivamente derechas) de $\mathcal{U}$.

c) $$\mathcal{U}^{(1)} := \mathcal{U} \,, \quad \mathcal{U}^{(r+1)} := \langle \mathcal{U}\mathcal{U}^{(r)}, \mathcal{U}^{(r)}\mathcal{U} \rangle$$

se llaman potencias principales de $\mathcal{U}$.

d) $$x^{[1]} := x \,, \quad x^{[r+1]} := x^{[r]}x^{[r]}$$

se llaman potencias plenas del elemento x .

e) $$\mathcal{U}^{[1]} := \mathcal{U} \,, \quad \mathcal{U}^{[r+1]} := \langle \mathcal{U}^{[r]}\mathcal{U}^{[r]} \rangle$$

se llaman potencias plenas de la sub-álgebra $\mathcal{U}$.

f) $$x^{i}x^{j} := x^{i+j}$$

se llama potencia asociativa de x .

Observación 1.17.

1) En general, $x^r \neq x^{[r]}$; $x^{[1]} = x$, $x^{[2]} = x^2$, $x^{[3]} = x^2x^2$.

2) Las potencias principales izquierdas (respectivamente derechas) de una sub-álgebra $\mathcal{U}$ son ideales izquierdos (respectivamente derechos) de $\mathcal{U}$.

3) Las potencias principales de $\mathcal{U}$ son ideales de $\mathcal{U}$.

4) Si $\mathcal{U}$ es conmutativa entonces las potencias principales izquierdas y derechas coinciden con las potencias principales.

5) $^{r+1}\mathcal{U} \subseteq {}^{r}\mathcal{U}$, $\mathcal{U}^{r+1} \subseteq \mathcal{U}^{r}$

$\mathcal{U}^{(r+1)} \subseteq \mathcal{U}^{(r)}$, $\mathcal{U}^{[r+1]} \subseteq \mathcal{U}^{[r]}$.

Definición 1.18. Sean A y A' dos K-álgebras cuyas multiplicaciones son denotadas por xy y $x'\cdot y'$ $\forall\, x,y \in A$, $\forall\, x',y' \in A'$ respectivamente.

$f : A \to A'$ se dice un homomorfismo de K-álgebras si:

i) f es un homomorfismo de los K-espacios vectoriales,

ii) $f(xy) = f(x)\cdot f(y)$ $\forall\, x,y \in A$.

Además, si:

i') f es epiyectiva, f se dice epimorfismo de las K-álgebras.

ii') f es inyectiva, f se dice monomorfismo de las K-álgebras

iii') f es biyectiva, f se dice isomorfismo de las K-álgebras.

Si $A = A'$ y f es un isomorfismo, f se dice un automorfismo del álgebra A .

Definición 1.19. Sean A, A' dos K-álgebras.

Sea $f : A \to A'$ un homomorfismo de K-álgebras. Entonces $\ker f = \{a \in A \,/\, f(a) = 0\}$ es el núcleo del homomorfismo f.

Definición 1.20. Sea A una K-álgebra conmutativa no necesariamente asociativa, A se dice álgebra ponderada o bárica si existe un homomorfismo de K-álgebras no nulo $\omega : A \to K$, ω se llama una ponderación del álgebra A, o función peso del álgebra A. Se dirá también que el par (A, ω) es una K-álgebra ponderada.

Observación 1.21.

a) Necesariamente la función peso es epiyectiva.

b) Sea (A, ω) una K-álgebra bárica de dimensión n, entonces $\ker\omega$ es un ideal de A de dimensión $n - 1$ y se tiene $A/_{\ker\omega} \simeq K$.

c) Sea (A, ω) una K-álgebra bárica. Si $e \in A$ es un idempotente $(e \neq 0)$ entonces $\omega(e) = 1 \vee \omega(e) = 0$.

d) Sea (A, ω) álgebra bárica, entonces no siempre es verdad que ω sea único, por ejemplo; sea $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle_{\mathbb{R}}$ conmutativa con tabla de multiplicación:

	a_1	a_2	a_3
a_1	$a_1 + a_2$	a_2	a_2
a_2		a_2	a_2
a_3			$a_2 + a_3$

y considerar los homomorfismos:

$$\omega : A \to \mathbb{R} \quad , \quad \omega_1 : A \to \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{lll} a_1 \to 1 & a_1 \to 0 & \\ a_2 \to 0 & a_2 \to 0 & \text{con } \omega \neq \omega_1 \\ a_3 \to 0 & a_3 \to 1 & \end{array}$$

Definición 1.22. Un morfismo de álgebras ponderadas $f : (A,\omega) \to (A',\omega')$ es un morfismo (homomorfismo) de K-álgebras $f : A \to A'$ que verifica $\omega' \circ f = \omega$.

Observación 1.23. Si (A,ω) es un álgebra ponderada, existe un elemento e en A tal que $\omega(e) = 1$ luego la descomposición en suma directa de K-espacios vectoriales $A = Ke \oplus \ker\omega$. Además $\ker\omega$ es un ideal de A . Si ahora $f : (A,\omega) \to (A',\omega')$ es un morfismo de álgebras ponderadas, la condición $\omega' \circ f = \omega$ implica $f(\ker\omega) \subset \ker\omega'$ luego, por paso a los cuocientes, $\exists!$ isomorfismo de K-álgebras $\bar{f} : Ke \to Ke'$ que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ Ke \arrow[r, dashed, "\bar{f}", "\sim"'] & Ke' \end{tikzcd}$$

en que las flechas verticales son canónicas. Así, en una categoría de álgebras ponderadas, la componente Ke de estas álgebras es única, salvo isomorfismo, es decir, Ke es un invariante en la categoría.

Definición 1.24. Sea (A,ω) un álgebra ponderada y $h : A \to A$ una aplicación cuadrática, es decir $h(\lambda x) = \lambda^2 h(x)$ $\forall \lambda \in K$, $\forall x \in A$ y la aplicación $A \times A \to A$ definida por $(x,y) \mapsto h(x+y) - h(x) - h(y)$ es K-bilineal, necesariamente simétrica. Se dirá ahora que la terna (A,ω,h) es un álgebra de Bernstein si $h(h(x)) = h(\omega(x)x)$ $\forall x \in A$, o aún $h(h(x)) = $ $= \omega(x)^2 h(x)$ $\forall x \in A$.

Ejemplo 1.25. Sea (A,ω) un álgebra ponderada y sea $h : A \to A$ la aplicación cuadrática definida por $x \mapsto \omega(x)x$ luego la aplicación K-bilineal simétrica asociada es $A \times A \to A$, $(x,y) \mapsto \omega(x)y + \omega(y)x$. Es claro que (A,ω,h) es un álgebra de Bernstein pues $h(h(x)) = \omega(x)^2 h(x)$ $\forall x \in A$.

Observación 1.26. En este trabajo nos referiremos a un caso particular de álgebras de Bernstein en la cual la aplicación cuadrática $h : A \to A$ es definida por $x \mapsto x^2$, y anotaremos simplemente (A,ω). Hacemos notar, además que el cuerpo K a considerar será el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$.

Mencionaremos, a continuación, algunos teoremas de estructura de álgebras de Bernstein.

Sea (A,ω) un álgebra de Bernstein sobre $\mathbb{C}$. El homomorfismo peso ω es único, pues si hay otro ω_1 se demuestra primero que, $\omega(z) = \omega_1(z)$ $\forall z \in \ker\omega$ y luego que $\omega(x) = \omega_1(x)$ $\forall x \in A - \ker\omega$. Existe un idempotente e de A (el cuadrado de un elemento de peso uno) y $\omega(e) = 1$.

Podemos considerar luego, la descomposición en suma directa de sub-espacios vectoriales $A = \mathbb{C}e \oplus \ker\omega$. Además, $\mathbb{C}e$ es una subálgebra de A y $\ker\omega$ es un ideal de A.

<u>Proposición 1.27</u>. Sea (A,ω) una álgebra de Bernstein sobre $\mathbb{C}$ y e un idempotente en A. Para todo z en $\ker\omega$ se verifican las siguientes identidades:

1) $z^{[3]} = 0$

2) $z^2(ze) = 0$

3) $4(ze)^2 + 2z^2e - z^2 = 0$

4) $2(ze)e - ze = 0$

5) $(z_1z_2)(z_3z_4) + (z_1z_3)(z_2z_4) + (z_1z_4)(z_2z_3) = 0$

6) $(z_1z_2)(z_3e) + (z_1z_3)(z_2e) + (z_2z_3)(z_1e) = 0$

7) $4(z_1e)(z_2e) + 2(z_1z_2)e - z_1z_2 = 0$

8) $z_1^2z_2^2 = -2(z_1z_2)^2$

9) $z_1^2(z_2e) = -2(z_1z_2)(z_1e)$

<u>Demostración</u>: Las cuatro primeras se obtienen considerando un elemento genérico de peso uno $y = e + \theta z$, $z \in \ker\omega$, $\theta \in \mathbb{C}$, ya que y satisface la ecuación de Bernstein obtenemos un polinomio en la variable θ igual al polinomio nulo, es decir, tenemos

$$(e + \theta z)^{[3]} - (e + \theta z)^{[2]} = 0 \qquad \forall\, \theta \in \mathbb{C} ,$$

luego los coeficientes correspondientes a las potencias de θ son nulos.

Las restantes se obtienen considerando

$$z = \sum_{i=1}^{4} \theta_i z_i , \qquad \theta_i \in \mathbb{C} , \qquad z_i \in \ker\omega :$$

si sustituimos z en (1) (en (2); en (3)) y aplicamos el mismo procedimiento anterior obtenemos (5) y (8) ((6) y (9); (7)) respectivamente.

Observación 1.28.

a) (7) se puede expresar como:

$$(10) \qquad (z_1 z_2)e = \frac{1}{2} z_1 z_2 - 2(z_1 e)(z_2 e)$$

b) $(\ker\omega)^2$ es un ideal en A, ya que $(\ker\omega)^2$ es un ideal en $\ker\omega$ y por (10) $(\ker\omega)^2 e \subseteq (\ker\omega)^2$.

Proposición 1.29. Sea (A,ω) un álgebra de Bernstein sobre $\mathbb{C}$. Sea e un elemento idempotente en A. Sean $\mathcal{U} = \langle ze \rangle_{\mathbb{C}}$ $z \in \ker\omega$ y $V = \langle u_i u_j \rangle_{\mathbb{C}}$ $u_i, u_j \in \mathcal{U}$ sub-espacios vectoriales de A, así $V = \mathcal{U}^2$ y consideremos, además, W un subespacio suplementario de la suma de $\mathbb{C}e$, $\mathcal{U}$ y V. Entonces en A se tienen las siguientes relaciones:

$$(11) \qquad ue = \frac{1}{2} u \qquad \forall\, u \in \mathcal{U}$$

$$(12) \qquad ve = \frac{1}{2} u_1 u_2 - 2(u_1 e)(u_2 e) \qquad \forall\, v \in V, \quad \forall\, u_1, u_2 \in \mathcal{U}$$

$$(13) \qquad ve = 0 \qquad \forall\, v \in V.$$

Demostración:

(11) se obtiene de (4) sustituyendo ze por u.

(12) se obtiene de (10) sustituyendo z_1 y z_2 por u_1 y u_2 respectivamente y haciendo $u_1 u_2 = v$.

(13) se obtiene colocando (11) en (12).

Observación 1.30.

(i) $\mathcal{U} \cap V = \{0\}$ en virtud de (11) y (13).

(ii) $A = \mathbb{C}e \oplus \mathcal{U} \oplus V \oplus W$ (como espacio vectorial).

Proposición 1.31. En A se verifican aún las siguientes identidades para v_i en V, u_j en $\mathcal{U}$ y w_k en W en que $i = 1,2$; $j = 1,2,3$; $k = 1,2$.

(14) $(v_1v_2)u = 0 \quad , \quad \forall\, u \in \mathcal{U}$

(15) $(vu_1)u_2 + (vu_2)u_1 = 0 \quad , \quad \forall\, v \in V$

(16) $(u_1u_2)u_3 + (u_2u_3)u_1 + (u_3u_1)u_2 = 0$

(17) $(v_1v_2)e = \frac{1}{2}\, v_1v_2$

(18) $(uv)e = \frac{1}{2}\, uv \quad , \quad \forall\, u \in \mathcal{U} \; , \; \forall\, v \in V$

(19) $w_1w_2 = 2(w_1w_2)e + 4(w_1e)(w_2e)$

(20) $wu = 2(wu)e + 2(we)u \quad , \quad \forall\, u \in \mathcal{U}$

(21) $wv = 2(wv)e \quad , \quad \forall\, v \in V \; , \; \forall\, w \in W$

Demostración: Las identidades (14), (15) y (16) se obtienen de (6) sustituyendo z_1, z_2 y z_3 por los u_j, v_i, u y v convenientemente.

La identidad (17) se obtiene de (10) al reemplazar z_1, z_2 por v_1 y v_2 respectivamente.

Las identidades del (18) al (21) se obtienen sustituyendo z_1 y z_2 por los w_k, w, u y v convenientemente.

Observación 1.32. Por simple inspección de las identidades anteriores se tienen en A las siguientes inclusiones:

a) $V^2 \subseteq U$ por (17)

b) $UV \subseteq U$ por (18)

c) $W^2 \subseteq U \oplus V$ por (19)

d) $WU \subseteq U \oplus V$ por (20)

e) $WV \subseteq U$ por (21)

La siguiente proposición, que se demuestra directamente a partir de lo anterior, nos da una interesante propiedad de la descomposición de A, a saber:

Proposición 1.33. Sea (A,ω) un álgebra de Bernstein sobre $\mathbb{C}$. Consideremos la descomposición de A en sub-espacios vectoriales

$$A = \mathbb{C}e \oplus U \oplus V \oplus W .$$

Sea $C = \mathbb{C}e \oplus U \oplus V$. Entonces

i) C es un ideal de A.

ii) $C = A^2$.

Observación 1.34. El ideal C se denomina corazón del álgebra de Bernstein y es independiente de la elección del idempotente.

Proposición 1.35. En un álgebra de Bernstein los elementos idempotentes son precisamente aquellos de la forma: $e + u + u^2$, $u \in U$.

Demostración: Claramente un idempotente no puede tener componente en W pues $W^2 \subseteq U \oplus V$, $e + u + u^2$ es idempotente (por cálculo directo), además, $(e + u + v)^2 = e + (u + 2vu + v^2) + u^2$. Si $e + u + v$ es idempotente entonces $e + (u + 2vu + v^2) + u^2 = e + u + v$, luego $v = u^2$.

Definición 1.36. Sea (A,ω) un álgebra de Bernstein sobre $\mathbb{C}$. Consideremos la descomposición de A en sub-espacios vectoriales

$$A = \mathbb{C}e \oplus U \oplus V \oplus W .$$

Entonces, A se dirá un álgebra de Bernstein ortogonal si $UV = \{0\}$.

Proposición 1.37. Sea A un álgebra de Bernstein ortogonal. Sea $U^* = \{u \in U / u(U \oplus V) = \{0\}\}$. Entonces en A se verifican:

a) $V^2V = \{0\}$

b) $V^2 \subseteq U^*$

c) Si $we \neq 0$ entonces $w^2 \in V$, $\forall w \in W$

si $we = 0$ entonces $w^2 \in U$, $\forall w \in W$

d) $W^2 \subseteq U^*$

e) $UW \subseteq U^*$

f) $VW \subseteq U^*$.

Demostración:

a) Por observación 1.32 parte a) tenemos $V^2V \subseteq UV = \{0\}$.

b) Como $V^2 \subseteq U$ y por la parte a) $V^2V = \{0\}$ y además la relación (14) de la proposición 1.31 nos dice que $V^2U = \{0\}$, luego $V^2 \subseteq U^*$.

c) Consideremos $e + \theta w$, $\theta \in \mathbb{C}$, $w \in W$

$$(e + \theta w)^{[3]} = (e + \theta^2 w^2 + 2\theta ew)^2 = e + \theta^4 w^{[3]} + 4\theta^2 (we)^2 +$$

$$+ 2\theta^2 ew^2 + 4\theta e(ew) + 4\theta^3 w^2 (ew) ,$$

como $e + \theta w$ es de peso uno, su cuadrado es un idempotente

$$(e + \theta w)^{[3]} = (e + \theta w)^2 = e + \theta^2 w^2 + 2\theta we .$$

Igualando tenemos:

$$e + \theta^4 w^{[3]} + 4\theta^2 (we)^2 + 2\theta^2 ew^2 + 4\theta e(ew) + 4\theta^3 w^2 (ew) - e +$$

$$+ \theta^2 w^2 + 2\theta we = 0 \qquad \forall\, \theta \in \mathbb{C} .$$

Luego:

1) $w^{[3]} = 0$

2) $w^2 (we) = 0$

3) $4(we)^2 - w^2 + 2ew^2 = 0$

4) $2e(we) - we = 0$

Ahora, si $we \neq 0$ entonces $(e + \theta w)^2 = e + 2\theta we + \theta^2 w^2 = e +$ $+ 2\theta we + (2\theta we)^2$ en virtud de la proposición 1.35 ya que $we \in U$. Así,

$$\theta^2 w^2 - 4\theta^2 (we)^2 = 0 \qquad \forall\, \theta \in \mathbb{C} .$$

Luego $w^2 = 4(we)^2$, así $w^2 \in V$. Si $we = 0$, la relación 3) queda $w^2 = 2ew^2 \in U$.

d) y e) Consideremos el elemento de peso uno

$$e + \Phi u + \theta w \ , \ \Phi, \theta \in \mathbb{C} \ , \quad u \in U \ , \quad w \in W$$

i) $$(e + \Phi u + \theta w)^{[3]} = e + \Phi^4 u^{[3]} + \theta^4 w^{[3]} + \Phi^2 u^2 + 4\theta^2 \Phi^2 (uw)^2 + \\ + \Phi u + 2\theta^2 ew^2 + 4\theta\Phi e(uw) + 2\Phi^2 eu^2 + 2\Phi\theta^2 uw^2 + \\ + 4\theta\Phi^2 u(uw) + 2\Phi^3 u^3 + 4\theta^3 \Phi w^2 (uw) + 2\theta^2 \Phi^2 w^2 u^2 + \\ + 4\theta\Phi^3 (uw) u^2 \ .$$

Además,

ii) $$(e + \Phi u + \theta w)^{[3]} = (e + \Phi u + \theta w)^2 = e + \Phi u + \theta^2 w^2 + 2\theta\Phi uw + \Phi^2 u^2$$

pues $(e + \Phi u + \theta w)^2$ es un idempotente.

Igualando i) y ii) obtenemos finalmente:

1) $2ew^2 - w^2 = 0$

2) $4e(uw) - 2uw = 0$

3) $4(uw)^2 + 2w^2 u^2 = 0$

4) $2uw^2 = 0$

5) $u(uw) = 0$

6) $4w^2 (uw) = 0$

7) $4(uw)u^2 = 0$.

De 1), $w^2 = 0 \vee w^2 \in U$ en virtud de observación 1.32 parte c).

De 2), $uw = 0 \vee uw \in U$ en virtud de observación 1.32 parte d).

Luego, si $w^2 \in \mathcal{U}$ y además por 4), $uw^2 = 0$ entonces $w^2 \in \mathcal{U}^*$ en virtud de la ortogonalidad, por lo tanto, $\{w^2 / w \in W\} \subseteq \mathcal{U}^*$, pero

$$w_1 w_2 = \frac{1}{2}\left\{(w_1 + w_2)^2 - w_1^2 - w_2^2\right\} \qquad \forall\, w_1, w_2 \in W .$$

Luego, $W^2 \subseteq \mathcal{U}^*$.

Ahora, si $uw \in \mathcal{U}$ y además por 5) $u(uw) = 0$, entonces $uw \in \mathcal{U}^*$ en virtud de la ortogonalidad, así $\mathcal{U}W \subseteq \mathcal{U}^*$.

f) Consideremos el elemento de peso uno

$$e + \Phi u + \psi v + \theta w \ ; \quad \Phi, \psi, \theta \in \mathbb{C} \ , \quad u \in \mathcal{U} \ , \quad v \in V \ , \quad w \in W$$

y aplicando el mismo método anterior, obtenemos, entre otras, la relación $u(vw) = 0$ y de la observación 1.32 parte e) se obtiene $VW \subseteq \mathcal{U}^*$ en virtud de la ortogonalidad.

A continuación, sea (A, ω) un álgebra de Bernstein sobre $\mathbb{C}$, no necesariamente ortogonal y consideremos la descomposición de A en subespacios vectoriales:

$$A = \mathbb{C}e \oplus \mathcal{U} \oplus V \oplus W .$$

<u>Proposición 1.38</u>. Si todo elemento en V es el cuadrado de algún elemento en $\mathcal{U}$, entonces $V^2 = \{0\}$.

<u>Demostración</u>: Si $v = u^2$, $v^2 = (u^2)^2 = u^{[3]} = 0$ y

$$v_1 v_2 = \frac{1}{2}\left\{(v_1 + v_2)^2 - v_1^2 - v_2^2\right\} = 0 \qquad \therefore \quad V^2 = \{0\} .$$

Corolario 1.39. Si $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$ entonces $V^2 = \{0\}$.

Observación 1.40. Sea $\mathcal{U}^+$ un sub-espacio suplementario de $\mathcal{U}^*$ en $\mathcal{U}$. Designemos por: $d_v = \dim_{\mathbb{C}} V$, $d_u = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{U}$, $d_{u^+} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{U}^+$, luego tenemos:

a) $A = \mathbb{C}e \oplus \mathcal{U}^+ \oplus \mathcal{U}^* \oplus V \oplus W$

b) $d_v \leq \frac{1}{2} d_{u^+} (d_{u^+} + 1)$

c) $d_v > 0 \Rightarrow d_{u^+} > 0$

Observación 1.41. La distribución de la dimensión de $\ker\omega$ entre las dimensiones de los sub-espacios $\mathcal{U}^+$, $\mathcal{U}^*$, V y W da origen a los diferentes tipos de álgebras de Bernstein de una determinada dimensión. Estos tipos posibles los estudiaremos en el próximo Capítulo.

C A P I T U L O   II

CLASIFICACION

En el presente Capítulo nos ocuparemos de clasificar los tipos de familias paramétricas de álgebras de Bernstein de dimensión $n \leq 6$ en base a la teoría desarrollada en el Capítulo anterior.

Sea (A,ω) un álgebra de Bernstein sobre $\mathbb{C}$ no necesariamente ortogonal y consideremos la descomposición de A en sub-espacios vectoriales:

$$A = \mathbb{C}e \oplus \ker\omega = \mathbb{C}e \oplus \mathcal{U}^+ \oplus \mathcal{U}^* \oplus V \oplus W .$$

Los diferentes tipos de familias paramétricas de álgebras de Bernstein (o simplemente, los diferentes tipos de álgebras de Bernstein) se obtienen por la distribución de la dimensión del $\ker\omega$ entre las dimensiones de los sub-espacios $\mathcal{U}^+$, $\mathcal{U}^*$, V y W . Anotaremos cada tipo por cuaternas cuyas componentes corresponden a las dimensiones de $\mathcal{U}^+$, $\mathcal{U}^*$, V y W respectivamente.

En el caso $\dim_{\mathbb{C}} A = 1$, tenemos trivialmente un único tipo: $(0,0,0,0)$, pues $A = \mathbb{C}e$, e idempotente de A , así

$$\ker\omega = \mathcal{U}^{+} = \mathcal{U}^{*} = V = W = \{0\} .$$

Si $\dim_{\mathbb{C}} A = 2$ entonces $\dim_{\mathbb{C}} \ker\omega = 1$ se distribuye entre las dimensiones de $\mathcal{U}^{+}$, $\mathcal{U}^{*}$, V y W . Luego los posibles tipos son:

1) $(0,1,0,0)$

2) $(0,0,0,1)$

en virtud de la observación 1.40 y de la definición de los sub-espacios vectoriales $\mathcal{U}^{+}$, $\mathcal{U}^{*}$, V y W .

Señalaremos ahora, la clasificación dada por P. Holgate en [5] de los tipos de álgebras de Bernstein de dimensión tres y cuatro respecto de la teoría mencionada anteriormente.

En dimensión tres los posibles tipos son:

1) $(0,2,0,0)$

2) $(0,0,0,2)$

3) $(0,1,0,1)$

4) $(1,0,1,0)$

En dimensión cuatro los posibles tipos son:

1) $(0,3,0,0)$

2) $(0,0,0,3)$

3) $(0,2,0,1)$

4) $(0,1,0,2)$

5) (1,1,1,0)

6) (1,0,1,1)

7) (2,0,1,0) .

Clasificación de álgebras de Bernstein de dimensión cinco y seis.

Para realizar la clasificación plantearemos un procedimiento general aplicable a toda álgebra de Bernstein de dimensión finita.

Sea (A,ω) un álgebra de Bernstein sobre $\mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}} A = n + 1$, luego $\dim_{\mathbb{C}} \ker\omega = n$.

Procedimiento para determinar los diferentes tipos:

a) Obtener las particiones del número que expresa la dimensión del $\ker\omega$, o sea, las particiones de n .

b) Formar todas las posibles cuaternas con los números de cada partición.

c) Seleccionar las cuaternas del punto b) que sean compatibles con las restricciones dadas por la observación 1.40 y con las definiciones de los sub-espacios vectoriales: U^+ , U^* , V , W en que se descompone el álgebra.

Dicho procedimiento puede resultar largo y es por ello que, trataremos de simplificarlo del modo siguiente:

Afirmaciones:

1. Las componentes correspondientes a las dimensiones de U^+ y de V son ambas nulas o son ambas no nulas. En efecto:

i) Si suponemos $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{U}^+ = r > 0$ y $\dim_{\mathbb{C}} V = 0$ entonces $\mathcal{U}^+ = \langle c_1, c_2, \ldots, c_r \rangle_{\mathbb{C}}$ con todos los productos $c_i c_j = 0$ $\forall\, i,j = 1,2, \ldots, r$ ya que $\mathcal{U}^2 = V = \{0\}$. Pero esto significa que $c_i \in \mathcal{U}^*$ $\forall\, i = 1, \ldots, r$; lo que es una contradicción.

ii) Si suponemos $\dim_{\mathbb{C}} V = s > 0$ y $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{U}^+ = 0$ se tiene una contradicción con las desigualdades de la observación 1.40.

2. Sea la componente correspondiente a la dimensión de $\mathcal{U}^+$ un número r tal que $0 \leq r < n$ entonces la componente correspondiente a la dimensión de V es un número $s \geq 0$ que satisface las desigualdades $s \leq \frac{1}{2} r(r + 1)$ y $s + r \leq n$.

3. Una vez obtenidas las componentes correspondientes a las dimensiones de $\mathcal{U}^+$ y de V se llenan las componentes correspondientes a las dimensiones de $\mathcal{U}^*$ y de W con los números de las particiones de n de tal manera que la suma de las cuatro componentes sea n .

En lo que sigue, nos abocaremos a describir los diferentes tipos de álgebras de Bernstein de dimensión cinco y seis, utilizando el procedimiento anteriormente expuesto.

En dimensión cinco los posibles tipos son:

1)	(0,4,0,0)	5)	(0,2,0,2)	9)	(2,0,1,1)
2)	(0,0,0,4)	6)	(1,2,1,0)	10)	(2,1,1,0)
3)	(0,1,0,3)	7)	(1,0,1,2)	11)	(2,0,2,0)
4)	(0,3,0,1)	8)	(1,1,1,1)	12)	(3,0,1,0)

En dimensión seis los posibles tipos son:

1)	(0,5,0,0)	11)	(2,0,1,2)
2)	(0,0,0,5)	12)	(2,2,1,0)
3)	(0,4,0,1)	13)	(2,1,1,1)
4)	(0,1,0,4)	14)	(2,0,2,1)
5)	(0,2,0,3)	15)	(2,1,2,0)
6)	(0,3,0,2)	16)	(2,0,3,0)
7)	(1,3,1,0)	17)	(3,0,1,1)
8)	(1,0,1,3)	18)	(3,1,1,0)
9)	(1,1,1,2)	19)	(3,0,2,0)
10)	(1,2,1,1)	20)	(4,0,1,0)

Conocido el tipo de álgebra de Bernstein, es factible determinar las tablas de multiplicación con respecto a una base dada.

En este Capítulo exhibiremos las tablas de multiplicación, con respecto a una base dada, para todos los tipos de álgebras de Bernstein de dimensiones menores o iguales a cuatro.

De aquí en adelante, no anotaremos el cuerpo de base $\mathbb{C}$ en los subespacios generados, además, c_o representará siempre un idempotente del álgebra de Bernstein A .

Para obtener las tablas de multiplicación se deben recordar las propiedades de las álgebras de Bernstein mencionadas en el Capítulo I

En dimensión uno:

Sea $A = \langle c_o \rangle$

Tipo: (0,0,0,0)

$\mathcal{U}^+ = \mathcal{U}^* = V = W = \{0\}$

Luego, la tabla de multiplicación es trivial:

$$\boxed{c_o^2 = c_o}$$

En dimensión dos:

Sea $A = \langle c_o, c_1 \rangle$

Tipo: (0,1,0,0)

$\mathcal{U}^+ = V = W = \{0\}$, $\mathcal{U}^* = \langle c_1 \rangle$

Luego, la tabla de multiplicación es:

$$\boxed{c_o^2 = c_o \ , \quad c_o c_1 = 1/2\ c_1 \ , \quad c_1^2 = 0}$$

Tipo: (0,0,0,1)

$\mathcal{U}^+ = \mathcal{U}^* = V = \{0\}$, $W = \langle c_1 \rangle$

Luego, la tabla de multiplicación es:

$$\boxed{c_o^2 = c_o \ , \quad c_o c_1 = 0 \ , \quad c_1^2 = 0}$$

Para dimensión tres remitirse a [5] .

En dimensión cuatro:

Sea $A = \langle c_o, c_1, c_2, c_3 \rangle$

Tipo: (0,3,0,0)

$U^+ = V = W = \{0\}$, $U^* = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$.

Luego, la tabla de multiplicación es:

$$\boxed{\begin{array}{l} c_o^2 = c_o \;,\quad c_o c_i = 1/2\; c_i \quad \forall\, i = 1,2,3 \;, \\ c_i c_j = 0 \quad \forall\, i,j = 1,2,3 \end{array}}$$

Tipo: (0,0,0,3)

$U^+ = U^* = V = \{0\}$, $W = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$.

Luego, la tabla de multiplicación es:

$$\boxed{c_o^2 = c_o \;,\; c_o c_i = 0 \quad \forall\, i = 1,2,3 \;,\quad c_i c_j = 0 \quad \forall\, i,j = 1,2,3}$$

Tipo: (0,2,0,1)

$U^+ = V = \{0\}$, $U^* = \langle c_1, c_2 \rangle$, $W = \langle c_3 \rangle$.

Como $W \neq \{0\}$ y $U^* \neq \{0\}$, se nos presentan dos posibilidades: $c_o c_3 = 0 \;\underline{\vee}\; c_o c_3 \neq 0$. Si $c_o c_3 = 0$ entonces $c_3^2 \in U$, es decir

$$c_3^2 = \gamma_{331} c_1 + \gamma_{332} c_2 \;.$$

Si $c_oc_3 \neq 0$ entonces $c_3^2 \in V = \{0\}$, luego $c_3^2 = 0$. Así, tenemos las siguientes tablas de multiplicación:

$$(1)\quad \boxed{\begin{array}{l} c_o^2 = c_o \ , \ c_oc_1 = \frac{1}{2}\, c_1 \ , \quad c_oc_2 = \frac{1}{2}\, c_2 \ , \ c_1^2 = c_2^2 = c_1c_2 = 0 \\[2ex] c_oc_3 = 0 \ , \ c_3^2 = \gamma_{331}c_1 + \gamma_{332}c_2 \\[2ex] c_1c_3 = \gamma_{131}c_1 + \gamma_{132}c_2 \ , \ c_2c_3 = \gamma_{231}c_1 + \gamma_{232}c_2 \end{array}}$$

$$(2)\quad \boxed{\begin{array}{l} c_o^2 = c_o \ , \ c_oc_1 = \frac{1}{2}\, c_1 \ , \ c_oc_2 = \frac{1}{2}\, c_2 \ , \ c_1^2 = c_2^2 = c_1c_2 = 0 \\[2ex] c_oc_3 = \gamma_{031}c_1 + \gamma_{032}c_2 \ , \ \gamma_{031} \neq 0 \ , \ \gamma_{032} \neq 0 \\[2ex] c_3^2 = 0 \ , \ c_1c_3 = \gamma_{131}c_1 + \gamma_{132}c_2 \ , \ c_2c_3 = \gamma_{231}c_1 + \gamma_{232}c_2 \end{array}}$$

$$(3)\quad \boxed{\begin{array}{l} c_o^2 = c_o \ , \ c_oc_1 = \frac{1}{2}\, c_1 \ , \ c_oc_2 = \frac{1}{2}\, c_2 \ , \ c_1^2 = c_2^2 = c_1c_2 = 0 \\[2ex] c_oc_3 = \gamma_{031}c_1 \ , \ \gamma_{031} \neq 0 \ , \ c_3^2 = 0 \\[2ex] c_1c_3 = \gamma_{131}c_1 + \gamma_{132}c_2 \ , \ c_2c_3 = \gamma_{231}c_1 + \gamma_{232}c_2 \end{array}}$$

$$(4)\quad \boxed{\begin{array}{l} c_o^2 = c_o \ , \ c_oc_1 = \frac{1}{2}\, c_1 \ , \ c_oc_2 = \frac{1}{2}\, c_2 \ , \ c_1^2 = c_2^2 = c_1c_2 = 0 \\[2ex] c_oc_3 = \gamma_{032}c_2 \ , \ \gamma_{032} \neq 0 \ , \ c_3^2 = 0 \\[2ex] c_1c_3 = \gamma_{131}c_1 + \gamma_{132}c_2 \ , \ c_2c_3 = \gamma_{231}c_1 + \gamma_{232}c_2 \end{array}}$$

Tipo: (0,1,0,2)

$\mathcal{U}^+ = V = \{0\}$, $\mathcal{U}^* = \langle c_1 \rangle$, $W = \langle c_2, c_3 \rangle$.

Como en el tipo anterior, debido a que $W \neq \{0\}$ y $\mathcal{U}^* \neq \{0\}$ tenemos más de una tabla de multiplicación:

$$(1)\qquad \boxed{\begin{array}{l} c_o^2 = c_o \ , \ c_oc_1 = \frac{1}{2}c_1 \ , \ c_1^2 = 0 \ , \ c_1c_2 = \gamma_{121}c_1 \\ c_1c_3 = \gamma_{131}c_1 \ , \ c_oc_2 = 0 \ , \ c_oc_3 = 0 \\ c_2^2 = \gamma_{221}c_1 \ , \ c_3^2 = \gamma_{331}c_1 \ , \ c_2c_3 = \gamma_{231}c_1 \end{array}}$$

$$(2)\qquad \boxed{\begin{array}{l} c_o^2 = c_o \ , \ c_oc_1 = \frac{1}{2}c_1 \ , \ c_1^2 = 0 \ , \ c_1c_2 = \gamma_{121}c_1 \\ c_1c_3 = \gamma_{131}c_1 \ , \ c_oc_2 = \gamma_{021}c_1 \ , \ \gamma_{021} \neq 0 \\ c_oc_3 = \gamma_{031}c_1 \ , \ \gamma_{031} \neq 0 \ , \ c_2^2 = 0 = c_3^2 \ , \\ c_2c_3 = \gamma_{231}c_1 \end{array}}$$

$$(3)\qquad \boxed{\begin{array}{l} c_o^2 = c_o \ , \ c_oc_1 = \frac{1}{2}c_1 \ , \ c_1^2 = 0 \ , \ c_1c_2 = \gamma_{121}c_1 \\ c_1c_3 = \gamma_{131}c_1 \ , \ c_oc_2 = 0 \ , \ c_2^2 = \gamma_{221}c_1 \\ c_oc_3 = \gamma_{031}c_1 \ , \ \gamma_{031} \neq 0 \ , \ c_3^2 = 0 \ , \ c_2c_3 = \gamma_{231}c_1 \end{array}}$$

(4) $$\boxed{\begin{array}{l} c_o^2 = c_o \;,\; c_oc_1 = \frac{1}{2}\,c_1 \;,\; c_1^2 = 0 \;,\; c_1c_2 = \gamma_{121}c_1 \;, \\ c_1c_3 = \gamma_{131}c_1 \;,\; c_oc_2 = \gamma_{021}c_1 \;,\; c_2^2 = 0 \;,\; \gamma_{021} \neq 0 \\ c_oc_3 = 0 \;,\; c_3^2 = \gamma_{331}c_1 \;,\; c_2c_3 = \gamma_{231}c_1 \end{array}}$$

Tipo: (1,1,1,0)

$\mathcal{U}^+ = \langle c_1 \rangle$, $\mathcal{U}^* = \langle c_2 \rangle$, $V = \langle c_3 \rangle$, $W = \{0\}$.

Luego, la tabla de multiplicación es:

$$\boxed{\begin{array}{l} c_o^2 = c_o \;,\; c_oc_1 = \frac{1}{2}\,c_1 \;,\; c_oc_2 = \frac{1}{2}\,c_2 \;,\; c_oc_3 = 0 \\ c_1^2 = \gamma_{113}c_3 \;,\; \gamma_{113} \neq 0 \;,\; c_1c_2 = 0 \;,\; c_2c_3 = 0 \\ c_3^2 = 0 \;,\; c_1c_3 = 0 \;,\; c_2^2 = 0 \end{array}}$$

Tipo: (1,0,1,1)

$\mathcal{U}^+ = \langle c_1 \rangle$, $\mathcal{U}^* = \{0\}$, $V = \langle c_2 \rangle$, $W = \langle c_3 \rangle$.

En este caso $W \neq 0$ pero $\mathcal{U}^* = \{0\}$, luego existe una única tabla de multiplicación:

$$\boxed{\begin{array}{l} c_o^2 = c_o \;,\; c_oc_1 = \frac{1}{2}\,c_1 \;,\; c_oc_2 = 0 \;,\; c_oc_3 = 0 \\ c_3^2 = 0 \;,\; c_1^2 = \gamma_{112}c_2 \;,\; \gamma_{112} \neq 0 \;,\; c_1c_2 = 0 \\ c_2^2 = 0 \;,\; c_2c_3 = 0 \;,\; c_1c_3 = 0 \end{array}}$$

Tipo: (2,0,1,0)

$\mathcal{U}^{+} = \langle c_1, c_2 \rangle$, $\mathcal{U}^{*} = W = \{0\}$, $V = \langle c_3 \rangle$.

Considerando las dimensiones de $\mathcal{U}^{+}$ y V observamos que:

$$c_1^2 = \gamma_{113} c_3 \ , \quad c_2^2 = \gamma_{223} c_3 \ , \quad c_1 c_2 = \gamma_{123} c_3$$

con $(\gamma_{113}, \gamma_{223}, \gamma_{123}) \neq (0,0,0)$

luego, tenemos las siguientes tablas:

(1)

$$\boxed{\begin{array}{l} c_o^2 = c_o \ , \ c_o c_1 = \frac{1}{2} c_1 \ , \ c_o c_2 = \frac{1}{2} c_2 \ , \ c_o c_3 = 0 \\ c_1^2 = \gamma_{113} c_3 \ , \ c_2^2 = \gamma_{223} c_3 \ , \ c_1 c_2 = \gamma_{123} c_3 \\ \gamma_{113} \neq 0 \ , \ \gamma_{223} \neq 0 \ , \ \gamma_{123} \neq 0 \\ c_3^2 = 0 \ , \ c_1 c_3 = c_2 c_3 = 0 \end{array}}$$

(2)

$$\boxed{\begin{array}{l} c_o^2 = c_o \ , \ c_o c_1 = \frac{1}{2} c_1 \ , \ c_o c_2 = \frac{1}{2} c_2 \ , \ c_o c_3 = 0 \\ c_1^2 = \gamma_{113} c_3 \ , \ c_2^2 = \gamma_{223} c_3 \ , \ \gamma_{113} \neq 0 \ , \ \gamma_{223} \neq 0 \\ c_1 c_2 = 0 \ , \ c_3^2 = c_1 c_3 = c_2 c_3 = 0 \end{array}}$$

$$(3)\qquad \boxed{\begin{array}{l} c_o^2 = c_o \ , \ c_oc_1 = \frac{1}{2}\, c_1 \ , \ c_oc_2 = \frac{1}{2}\, c_2 \ , \ c_oc_3 = 0 \\ c_1^2 = \gamma_{113}c_3 \ , \ \gamma_{113} \neq 0 \ , \ c_2^2 = 0 \ , \ c_1c_2 = \gamma_{123}c_3 \\ \gamma_{123} \neq 0 \ , \ c_3^2 = 0 \ , \ c_1c_3 = c_2c_3 = 0 \end{array}}$$

$$(4)\qquad \boxed{\begin{array}{l} c_o^2 = c_o \ , \ c_oc_1 = \frac{1}{2}\, c_1 \ , \ c_oc_2 = \frac{1}{2}\, c_2 \ , \ c_oc_3 = 0 \\ c_1^2 = 0 \ , \ c_2^2 = \gamma_{223}c_3 \ , \ \gamma_{223} \neq 0 \\ c_1c_2 = \gamma_{123}c_3 \ , \ \gamma_{123} \neq 0 \ , \ c_3^2 = 0 \ , \ c_1c_3 = c_2c_3 = 0 \end{array}}$$

$$(5)\qquad \boxed{\begin{array}{l} c_o^2 = c_o \ , \ c_oc_1 = \frac{1}{2}\, c_1 \ , \ c_oc_2 = \frac{1}{2}\, c_2 \ , \ c_oc_3 = 0 \\ c_1^2 = 0 \ , \ c_2^2 = 0 \ , \ c_1c_2 = \gamma_{123}c_3 \ , \ \gamma_{123} \neq 0 \\ c_3^2 = 0 \ , \ c_1c_3 = c_2c_3 = 0 \end{array}}$$

Podemos notar que claramente las tablas (3) y (4) corresponden a Algebras de Bernstein cuyos espacios vectoriales subyacentes son isomorfos mediante la aplicación $c_2 \leftrightarrow c_1$, pero este isomorfismo no puede ser ex - tendido a las álgebras respectivas.

Así, hemos concluído la presentación de todas las tablas de multiplicación de las álgebras de dimensión menor o igual a cuatro.

C A P I T U L O III

ORTOGONALIDAD

Recordemos que en el Capítulo I se definió un Algebra de Bernstein Ortogonal en la forma siguiente: Sea (A,ω) un Algebra de Bernstein sobre $\mathbb{C}$ cuya descomposición en sub-espacios vectoriales es $A = \mathbb{C}e \oplus U \oplus V \oplus W$, e elemento idempotente. Si $UV = \{0\}$ entonces A se dice ortogonal.

Como se ha señalado en el Capítulo II, es factible obtener la clasificación de los diferentes tipos de Algebras de Bernstein de dimensión finita.

Ahora plantearemos y demostraremos un teorema que nos permitirá, dado un cierto tipo de Algebra de Bernstein, concluir que siempre es ortogonal.

TEOREMA. Sean A un Algebra de Bernstein sobre $\mathbb{C}$ de dimensión $n + 1$, $\{c_0, \ldots, c_n\}$ base de A, c_0 idempotente de A. Si A es de tipo $(1, t, 1, n - t - 2)$, $0 \leq t \leq n - 2$ entonces A es ortogonal.

Demostración: Recordemos la descomposición del Algebra de Bernstein: $A = \mathbb{C}e \oplus \mathcal{U}^{+} \oplus \mathcal{U}^{*} \oplus V \oplus W$ en sub-espacios vectoriales, en que $e = c_o$.

Como A es de tipo $(1, t, 1, n-t-2)$, $n \geq 2$, $0 \leq t \leq n-2$ entonces $\dim \mathcal{U}^{+} = 1$, $\dim \mathcal{U}^{*} = t$, $\dim V = 1$, $\dim W = n-t-2$.

Luego, $\mathcal{U}^{+} = \langle c_1 \rangle$, $\mathcal{U}^{*} = \langle c_2, \ldots, c_{t+1} \rangle$, $V = \langle c_{t+2} \rangle$, $W = \langle c_{t+3}, \ldots, c_n \rangle$; como $c_1^2 \in V$ por definición de V, así $c_1^2 = \gamma_{11(t+2)} c_{t+2}$ con $\gamma_{11(t+2)} \neq 0$, pues $\dim V = 1$, por lo tanto $c_{t+2} = \gamma_{11(t+2)}^{-1} c_1^2$, de donde

$$c_{t+2} c_1 = (\gamma_{11(t+2)}^{-1} c_1^2) c_1 = \gamma_{11(t+2)}^{-1} c_1^3 = 0$$

pues $c_1^3 = 0$. Además, por definición de $\mathcal{U}^{*}$ se tiene $c_k c_{t+2} = 0$ $\forall k$, $2 \leq k \leq t+1$. Luego $\mathcal{U}V = \{0\}$.

Con respecto a lo obtenido en el Capítulo II, observamos que todas las álgebras de dimensión menor o igual a cuatro son ortogonales. En efecto, basta examinar las tablas de multiplicación donde los productos uv son cero $\forall u \in \mathcal{U}$, $\forall v \in V$; sin embargo, inspeccionando a nivel sólo de los tipos de Algebras de Bernstein de dimensión menor o igual a cuatro podemos constatar, salvo para el tipo $(2,0,1,0)$, que todas son ortogonales.

Recordemos los posibles tipos en dimensión cinco:

i)	(0,0,0,4)	vii)	(1,0,1,2)
ii)	(0,4,0,0)	viii)	(1,1,1,1)
iii)	(0,1,0,3)	ix)	(2,0,1,1)
iv)	(0,3,0,1)	x)	(3,0,1,0)
v)	(0,2,0,2)	xi)	(2,0,2,0)
vi)	(1,2,1,0)	xii)	(2,1,1,0)

Para el caso de $\dim A = 5$, utilizando el teorema previo, se tiene que los siguientes tipos de álgebras son ortogonales: vi), vii) y viii). Además, los tipos i) al v) son ortogonales debido a que $V = \{0\}$.

Luego, falta estudiar la ortogonalidad de los tipos ix) al xii).

Recordemos los posibles tipos en dimensión seis:

1)	(0,5,0,0)	11)	(2,0,1,2)
2)	(0,0,0,5)	12)	(2,2,1,0)
3)	(0,4,0,1)	13)	(2,1,1,1)
4)	(0,1,0,4)	14)	(2,0,2,1)
5)	(0,2,0,3)	15)	(2,1,2,0)
6)	(0,3,0,2)	16)	(2,0,3,0)
7)	(1,3,1,0)	17)	(3,0,1,1)
8)	(1,0,1,3)	18)	(3,1,1,0)
9)	(1,1,1,2)	19)	(3,0,2,0)
10)	(1,2,1,1)	20)	(4,0,1,0)

Para el caso de $\dim A = 6$, utilizando el teorema previo, se tiene que los siguientes tipos de álgebras son ortogonales: 7) al 10). Además, los tipos 1) al 6) son ortogonales debido a que $V = \{0\}$.

Luego, falta estudiar la ortogonalidad de los tipos 11) al 20).

Un camino, para el estudio de la ortogonalidad en álgebras de dimensión cinco y seis, es describir las tablas de multiplicación como se hizo para dimensión cuatro, lo cual requiere de muchos cálculos. Otra manera; sería plantear, a nivel de los tipos, algunas relaciones que permitan decidir si se trata de un álgebra ortogonal o no.

Existen trabajos recientes [7] en que considerando otra descomposición del Algebra de Bernstein se obtienen resultados sobre la ortogonalidad.

B I B L I O G R A F I A

[1] M.T. Alcalde, C. Burgueño, A. Labra et A. Micali., Sur les Algèbres de Bernstein, Proc. London Math. Soc. (por aparecer).

[2] S. Bernstein., Démonstration mathématique de la loi d'hérédité de Mendel, C.R. Acad. Sc. Paris 177 (1923), 528-531.

[3] S. Bernstein., Principe de stationarité et généralisation de la loi de Mendel, C.R. Acad. Sc. Paris 177 (1923), 581-584.

[4] S. Bernstein., Solution of a mathematical problem connected with the theory of heredity, Ann. Sc. de l'Ukraine 1 (1924), 83-114 (en russe), Ann. Math. Statist. 13 (1924), 53-61 (traduction en anglais).

[5] P. Holgate., Genetic algebras satisfying Bernstein Stationarity principle, J. London Math. Soc. (2), 9 (1975), 613-623.

[6] A. Wörz-Busekros., Algebras in genetics, Lecture Notes in Biomathematics 36, Springer-Verlag, Berlin 1980.

[7] M.T. Alcalde, R. Baeza, C. Burgueño., Autour des algèbres de Bernstein, Arch. der Math. (por aparecer).