COTAS PARA LAS SOLUCIONES MINIMALES DE FORMAS CUADRATICAS SOBRE CUERPOS DE FUNCIONES RACIONALES

Tesis

entregada a la

Universidad de Chile

en cumplimiento parcial de los requisitos

para optar al grado de

Magister en Ciencias Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS

por

MONICA DEL PILAR CANALES CHACON

Patrocinante: Dr. Ricardo Baeza R.

Facultad de Ciencias

Universidad de Chile

I N F O R M E   D E   A P R O B A C I O N

T E S I S   D E   M A G I S T E R

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el Candidato

MONICA DEL PILAR CANALES CHACON

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Matemáticas

Patrocinante de Tesis

Dr. Ricardo Baeza R. ______ Ricardo Baeza

Comisión Informante de Tesis

Dr. Gonzalo Riera ______

Dr. José Pantoja ______

Dr. Jorge Soto ______

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

En la teoría de formas cuadráticas, si consideramos formas isótro - pas sobre dominios con algún tipo de función grado, resulta natural pregun - tarse sobre el "tamaño" de las soluciones, así como, sobre su relación con la forma. Es decir, sobre la existencia de una función que dependiendo de la forma, acote sus soluciones minimales.

Sobre $\mathbb{Z}$, con el valor absoluto $|\ |$, el problema de encontrar es - timaciones para el tamaño de las soluciones ha sido estudiado en profundidad. Al respecto existe resultados clásicos como el teorema de Holzer [3] para formas diagonales de dimensión 3; que proporciona una cota simétrica en fun- ción de los coeficientes de la forma. Y, un teorema de Cassels [1], (que es mejorado en [2]) y que muestra existe una cota general, en función de los coeficientes y dimensión de la forma, resolviendo así el problema sobre $\mathbb{Z}$.

Recientemente A. Prestel [5] ha estudiado el problema sobre el anillo de polinomios $k[t_1, \ldots, t_d]$, car $k \neq 2$, con $|\ |$ el grado usual, obte- niendo dos importantes resultados; por un lado, la existencia de una función cota general cuando $d = 1$, y por otro, que no existe una cota análoga si

$d \geq 2$ por lo menos para formas de dimensión mayor a 15.

Motivados por estos resultados, hemos estudiado que pasa en dimensiones menores, en especial dimensión 2 y 3 (pues si $d \geq 2$ se sabe no existe cota, al menos para isotropía débil, en dimensión 4). Esto es:

Sea k cuerpo con car $k \neq 2$, $R = k[t_1, \ldots, t_d]$ anillo de polinomios con coeficientes en k, $d \geq 1$, $| \, |$ = grado total usual. Consideremos formas cuadráticas no singulares sobre R

$$F(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} X_i X_j \qquad a_{ij} = a_{ji} \in R .$$

Entonces, se busca una función δ, que dependa exclusivamente de los grados de los coeficientes a_{ij} de la forma y de la dimensión n, tal que, si F isótropa entonces tiene un cero no trivial con grado acotado por δ i.e. $\exists\ a_1, \ldots, a_n \in R$, no todos nulos tal que $F(a_1, \ldots, a_n) = 0$ con

$$\max_{1 \leq i \leq n} |a_i| \leq \delta\left(|a_{ij}| \quad i,j = 1, \ldots, n \quad , \quad n \right)$$

La función δ se llamará una función cota.

Los resultados obtenidos son principalmente dos. La existencia de una función cota optimal para formas binarias, lo que resuelve el problema para dimensión 2, y proporciona además resultados positivos sobre otros dominios. Y, la validez del teorema de Holzer sobre $k[t]$ donde k cuerpo en que -1 no es un cuadrado.

Estos resultados y ejemplos conforman el Capítulo II.

En el Capítulo I se dan los fundamentos y definiciones de formas cuadráticas necesarias en el Capítulo II. Además se enuncian los resultados conocidos hasta ahora sobre el problema.

En el Apéndice A hemos incluído una versión no publicada de la demostración del Teorema 2 de Prestel (Capítulo I) sobre la no existencia de una función cota general sobre $\mathbb{R}[X,Y]$ y las herramientas necesarias para ésta, esto es, sólo resultados de formas cuadráticas sobre cuerpos formalmente reales.

En el Apéndice B se hacen algunas observaciones acerca del problema sobre $k[t_1, \ldots, t_d]$ con otras posibles funciones grado $|\ |$ y se plantean algunos problemas abiertos.

C A P I T U L O   I

§ 1. Fundamentos.

Siempre consideraremos K cuerpo con $\mathrm{car}K \neq 2$.

Una forma cuadrática sobre K , de dimensión n , es un polinomio homogéneo de grado 2

$$F(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} X_i X_j \tag{1}$$

en n variables con $a_{ij} \in K$, $i,j = 1, \ldots, n$.

Sin restricción podemos suponer los coeficientes de F simétricos pues claramente

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} X_i X_j = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left(\frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \right) X_i X_j$$

donde $b_{ij} = \dfrac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$ satisface $b_{ij} = b_{ji}$ para todo $i,j = 1, \ldots, n$.

Ahora definiremos un concepto equivalente que es de gran utilidad para trabajar en formas cuadráticas.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre K , y sea $b : V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica, esto es, existe una matriz $B = (b_{ij})$ de $n \times n$ simétrica con coeficientes en K tal que

$$b(x,y) = x^{t}By \tag{2}$$

para todo $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ vectores columna en V .

Definamos entonces $F_b : V \to K$ por $F_b(x) = b(x,x)$, para todo $x \in V$. Observamos por (2)

$$F_b(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} b_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2} b_{ij}x_ix_j$$

luego por (1)

$$F_b(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} b_{ii}X_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij}X_iX_j$$

es una forma cuadrática de dimensión n sobre K con coeficientes $b_{ij} = b_{ji} \in K$.

Inversamente si

$$F(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}X_iX_j \qquad a_{ij} = a_{ji} \in K$$

es una forma cuadrática de dimensión n sobre K , sea $V \cong K^n$ espacio vectorial sobre K , se tiene

$$F(x) = x^{t}Ax \qquad \text{para todo } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V \text{ , donde } A = (a_{ij}) \text{ matriz}$$

simétrica asociada a F , por lo tanto

$$b(x,y) = \frac{1}{2}[F(x+y) - F(x) - F(y)]$$

es una forma bilineal simétrica sobre K y se recupera $F = F_b$.

Luego, estos conceptos son equivalentes en característica distinta de 2. El par (V,b) se llama el espacio bilineal simétrico asociado a la forma F . La matriz simétrica únicamente determinada por la forma se llama matriz asociada a F .

Denotaremos por $\dot{K}$ a $K - \{0\}$ y por $\dot{K}^2$ al conjunto $\{x^2 / x \in \dot{K}\}$.

Sea (V,b) el espacio bilineal simétrico asociado a la forma F entonces $x,y \in V$ se dicen ortogonales, $x \perp y$, si $b(x,y) = 0$.

F se dice no singular si $V^{\perp} = \{x \in V / b(x,y) = 0$, para todo $y \in V\} = \{0\}$ i.e. el único vector ortogonal a todo el espacio es el cero y esto es, sí y sólo si, $\det A \neq 0$ donde A es la matriz asociada a F .

Dos formas cuadráticas, de igual dimensión n , se dicen isométricas, se denota $F_1 \simeq F_2$, si existe una matriz invertible $\Delta \in GL_n(K)$ tal que

$$F_1(\Delta x) = F_2(x) \qquad \text{para todo } x \in V \tag{3}$$

esto es, existe un cambio de variables lineal que transforma una forma en la otra. Se tiene así

$$\begin{aligned} F(\Delta x) &= (\Delta x)^t A_1 (\Delta x) \ , & A_1 \text{ matriz asociada a } F_1 \\ &= x^t(\Delta^t A_1 \Delta) x \\ &= x^t A_2 x \ , & A_2 \text{ matriz asociada a } F_2 \end{aligned}$$

entonces $F_1 \simeq F_2$ sí y sólo si $A_2 = \Delta^t A_1 \Delta$, algún $\Delta \in GL_n(K)$, luego $\simeq$ es una relación de equivalencia y observamos $\det A_2 = \det A_1 (\det \Delta)^2$, esto es

$$F_1 \simeq F_2 \Rightarrow \det A_1 \equiv \det A_2 (\mathrm{mod}\ \dot{K}^2) \tag{4}$$

Se define el determinante de una forma F , se denota $\det F$, como el determinante de su matriz simétrica asociada.

Una forma cuadrática se dice diagonal si

$$F(X_1, \ldots, X_n) = a_1X_1^2 + \ldots + a_nX_n^2 \quad , \quad a_i \in K \ , \quad i = 1, \ldots, n$$

y se denota $F = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

Ahora demostraremos que en efecto toda forma cuadrática no singular es diagonalizable, esto es, es isométrica a una forma diagonal.

PROPOSICION. Sea (V,b) espacio bilineal simétrico. Sea $W \leq V$ tal que $(W,b_{|W})$ no singular. Entonces $V = W \oplus W^{\perp}$.

Se denota $V = W \perp W^{\perp}$ pues $b(x,y) = 0$ para todo $x \in W$, $y \in W^{\perp}$.

PROPOSICION. Sea (V,b) espacio bilineal simétrico no singular. Entonces existe $x \in V$ tal que $b(x,x) \neq 0$.

<u>Demostración</u>: Supongamos lo contrario, esto es, $b(x,x) = 0$ para todo $x \in V$. Sean $x,y \in V$, luego

$$0 = b(x + y, x + y) = b(x,x) + 2b(x,y) + b(y,y) = 2b(x,y)$$

esto es $b(x,y) = 0$ para todo $x,y \in V$ y por lo tanto (V,b) es singular. $\lrcorner$

LEMA. Sea (V,b) espacio bilineal simétrico, no singular, tal que existe subespacios $U,W \leq V$ con $V = U \perp W$. Entonces $(U,b_{|U})$, $(W,b_{|W})$ son no singulares.

COROLARIO. Toda forma cuadrática no singular es diagonalizable.

Demostración: Sea

$$F(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}X_iX_j \qquad a_{ij} = a_{ji} \in K$$

una forma cuadrática sobre K y sea (V,b) espacio bilineal no singular asociado a F i.e. $b(x,y) = x^tAy$, $A = (a_{ij})$.

Demostraremos existe base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V tal que $V = Ke_1 \perp \perp \ldots \perp Ke_n$, esto es, $b(e_i,e_j) = 0 \quad \forall\, i \neq j$, de modo que

$$b(x,y) = a_1x_1y_1 + \ldots + a_nx_ny_n \quad , \text{ ciertos } a_k = b(e_k,e_k) \in \dot{K} ,$$

para todo $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_ie_i$ en V. Luego la forma cuadrática asociada a la nueva forma bilineal $\tilde{b}(x,y) = x^t\tilde{A}y$ donde $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ es $\tilde{F}(X_1, \ldots, X_n) = a_1X_1^2 + \ldots + a_nX_n^2$ y se tiene $F \simeq \tilde{F}$.

Como sabemos, hay $e_1 \in V$ con $b(e_1,e_1) \neq 0$, luego $V = Ke_1 \perp (Ke_1)^{\perp}$ suma ortogonal de espacios no singulares. Por inducción sobre la dimensión de V se tiene hay $\{e_2, \ldots, e_n\}$ en V base ortogonal de $(Ke_1)^{\perp}$ tal que $V = Ke_1 \perp Ke_2 \perp \ldots \perp Ke_n$, y se tiene el resultado. $\lrcorner$

Diremos que una forma cuadrática F es isótropa sobre K si existe $x_1, \ldots, x_n \in K$, no todos nulos, tal que $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Se dirá $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es una solución no trivial de F sobre K.

Una forma cuadrática F se dirá débilmente isótropa si existe

$n \in \mathbb{N}$ tal que $n \times F = F \perp \ldots \perp F$ es isótropa sobre K .

PROPOSICION. Sea F una forma cuadrática no singular de dimensión 2 sobre K . Entonces F es isótropa sobre K sí y sólo si $\det F \equiv -1 (\mathrm{mod}\ \dot{K}^2)$.

<u>Demostración</u>: Sin restricción sea $F \simeq \langle a,b \rangle$, $a,b \in \dot{K}$. Luego $\det F \equiv$ $\equiv ab (\mathrm{mod}\ \dot{K}^2)$ por (4). Supongamos $\det F \equiv -1 (\mathrm{mod}\ \dot{K}^2)$ entonces $ab = -c^2$, algún $c \in \dot{K}$, de modo que $ab^2 + bc^2 = 0$, esto es, existe solución no trivial de $\langle a,b \rangle$ en K^2 , luego existe solución no trivial de F en K^2 . Inversamente, si F isótropa, luego $\langle a,b \rangle$ isótropa y existe $x,y \in \dot{K}$ tal que $ax^2 + by^2 = 0$, luego $ab = -\left(\frac{by}{x}\right)^2$ y entonces $\det F \equiv -1 (\mathrm{mod}\ \dot{K}^2)$. ┘

Observamos, K puede reemplazarse sin pérdida de generalidad por un dominio R , con $\mathrm{car}\ R \neq 2$ y V por un R-módulo libre de dimensión finita. De hecho en adelante consideraremos sólo formas sobre dominios y supondremos que toda forma es no singular.

§ 2. <u>Resultados conocidos</u>.

A continuación enunciaremos los resultados conocidos sobre la existencia de funciones cota:

TEOREMA (Cassels). Sea

$$F(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} f_{ij} X_i X_j \qquad\qquad f_{ij} = f_{ji} \in \mathbb{Z}$$

forma cuadrática sobre $\mathbb{Z}$. Si F isótropa entonces existe solución no trivial $a \in \mathbb{Z}^n$ con

$$\|a\| = \max_{1 \le i \le n} |a_i| \le \Big(3 \sum_{1 \le i,j \le n} |f_{ij}|\Big)^{\frac{n-1}{2}}$$

donde $|\ |$ denota el valor absoluto.

Este resultado resuelve completamente el problema sobre $\mathbb{Z}$ y muestra que las soluciones minimales "crecen" cuando la forma lo hace. Cabe observar que el exponente $\frac{n-1}{2}$ es optimal.

TEOREMA (Holzer). Sea

$$F(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$$

forma cuadrática sobre $\mathbb{Z}$ en su forma normal i.e. abc libre de cuadrados. Si F isótropa entonces existe solución no trivial $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ con

$$|x| \le |bc|^{1/2} \quad , \quad |y| \le |ac|^{1/2} \quad , \quad |z| \le |ab|^{1/2} \ .$$

Aquí las variables de las soluciones son acotadas en forma simétrica y se obtiene una estimación mucho mejor de las soluciones, respecto a Cassels en el caso diagonal.

TEOREMA 1 (Prestel). Sea $R = k[t]$, car $k \neq 2$, $|\ |$ = grado usual. Sea

$$F(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} X_i X_j$$

forma cuadrática sobre R . Si F isótropa entonces existe solución no trivial $a \in R^n$ con

$$\|a\| = \max_{1 \le i \le n} |a_i| \le \frac{n-1}{2} \|F\| \quad \text{donde} \quad \|F\| = \max_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}| \ .$$

La demostración de Prestel de este resultado tiene como modelo la demostración de Cassels para $\mathbb{Z}$ [2]. Por la propiedad ultramétrica del grado se mejora la cota en este caso. Se demuestra además que esta cota es optimal.

Luego este resultado resuelve el problema para el anillo de polinomios en una variable.

TEOREMA 2 (Prestel). Sea $R = \mathbb{R}[t_1, t_2]$. Sean $u_m = t_1$, $v_m = t_1^2 + mt_2 + t_2^2$ polinomios en R , $m \in \mathbb{N}$. Entonces la forma cuadrática

$$F_m = 4 \times \langle u_m + 1,\ v_m + 1,\ u_m v_m,\ -1 \rangle$$

es isótropa sobre R , para todo $m \in \mathbb{N}$. Si δ_m es el grado minimal de una solución no trivial de F_m entonces $\{\delta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es no acotado.

Luego, como las formas F_m tienen dimensión y grado constantes, para todo $m \in \mathbb{N}$, se concluye, no existe una función δ , que dependa exclusivamente de los grados de los coeficientes de la forma y su dimensión, que acote el grado de las soluciones minimales. Esto implica no existe función cota δ sobre $R = \mathbb{R}[t_1, \ldots, t_d]$ si $d \geq 2$ para formas de dimensión $n \geq 16$.

Así queda abierto el problema para dimensiones menores.

CAPITULO II

§ 1. Estudio del problema para $n = 2$

Sea k cuerpo con car $k \neq 2$. $R = k[t_1, \ldots, t_d]$ anillo de polinomios en $d \geq 1$ variables con coeficientes en k . $| \; |$ = grado total usual, luego $| \; | : \dot{R} \to \mathbb{N}$, y para todo $a,b \in \dot{R}$ se cumple

(i) $|a \cdot b| = |a| + |b|$

(ii) $|a + b| \leq \max \{|a|, |b|\}$, se tiene la igualdad si $|a| \neq |b|$.

Existencia de una función cota optimal para formas binarias.

TEOREMA 1. Sea $R = k[t_1, \ldots, t_d]$, $d \geq 1$, car $k \neq 2$, $| \; |$ = grado total. Entonces para toda forma cuadrática binaria, isótropa, sobre R

$$F(X_1, X_2) = \sum_{1 \leq i,j \leq 2} a_{ij} X_i X_j$$

existe solución no trivial $x = (x_1, x_2) \in R^2$ con

$$\|x\| \leq \frac{\|F\|}{2} \qquad \text{donde } \|F\| = \max |a_{ij}|$$

y $\delta(|a_{ij}|\ \ i,j = 1,2\ ,\ 2) = \frac{\|F\|}{2}$ es optimal.

Demostración: Sea $a_{11} \cdot a_{22} \neq 0$ sin restricción, de lo contrario existe solución no trivial en k^2. Car $k \neq 2$, luego toda forma es diagonalizable por un cambio de variables lineal, sea entonces $\Delta : K \times K \to K \times K$, $K = \mathrm{Quot}(R)$, representado naturalmente por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -a_{12} \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$ tal que

$$F(\Delta\chi) = a_{11}\overline{F}(\chi) \quad \text{donde} \quad \overline{F} = \langle 1, \det F \rangle \tag{1}$$

para todo $\chi \in K^2$. Como F isótropa, no singular, de dimensión 2, se tiene

$$\det F = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \quad \text{y existe} \quad c \in \dot{R} \mid \det F = -c^2 \tag{2}$$

luego $\overline{F} = \langle 1, -c^2 \rangle$ y $\overline{\chi} = (c, \pm 1) \in R^2$ es solución de $\overline{F}$, de grado minimal sobre R; esto pues si $\overline{y} = (y_1, y_2) \in R^2$ es solución de $\overline{F}$ i.e. $y_1^2 - c^2y_2^2 = 0$, R dominio de factorización única entonces $\overline{y} = (cy_2, \pm y_2)$ y por lo tanto $\|\overline{y}\| = |c| + |y_2| \geq |c| = \|\overline{\chi}\|$.

Ahora bien, si $\chi \in K^2$ es solución de F se tiene por (1): $\Delta^{-1}\chi$ es solución de $\overline{F}$ y por lo tanto $\Delta^{-1}\chi = y(c, \pm 1)$, algún $y \in K$. Entonces toda solución de F sobre K es de la forma

$$\chi = \Delta(\Delta^{-1}\chi) = y\Delta(c, \pm 1) \quad , \quad y \in K$$

donde

$$\Delta(c, \pm 1) = (c \mp a_{12}, \pm a_{11}) .$$

Luego existe solución minimal de F sobre R en $\{\chi_+, \chi_-\}$ donde

$$\chi_+ = \left(\frac{c - a_{12}}{d_+} , \frac{a_{11}}{d_+}\right) \qquad d_+ = \mathrm{MCD}(c - a_{12}, a_{11})$$

$$\chi_- = \left(\frac{c + a_{12}}{d_-} , \frac{-a_{11}}{d_-}\right) \qquad d_- = \mathrm{MCD}(c + a_{12}, a_{11}) \tag{4}$$

Como sabemos explícitamente donde encontrar una solución minimal de F , demostraremos, caso a caso, no pueden darse $\|\chi_+\| > \frac{\|F\|}{2}$ y $\|\chi_-\| > \frac{\|F\|}{2}$ simultáneamente. De (2) resulta

$$a_{11}a_{22} = (a_{12} + c)(a_{12} - c) \ . \tag{5}$$

Naturalmente podemos distinguir dos casos:

I. $a_{11} \nmid a_{12} \pm c$ y $a_{22} \nmid a_{12} \pm c$: Consideremos entonces

$a_{12} + c = \prod_{\substack{p \text{ primo} \\ p \mid a_{12}+c}} p^{n_p}$, $a_{12} - c = \prod_{\substack{q \text{ primo} \\ q \mid a_{12}-c}} q^{n_q}$, sus descomposiciones primas. Por (5) $a_{11} = p_1q_1$, $a_{22} = p_2q_2$ donde $p_i \mid a_{12}+c$, $q_i \mid a_{12}-c$ no constantes, $i = 1,2$ tales que $a_{12} + c = p_1p_2$, $a_{12} - c = q_1q_2$. Además $a_{11} \nmid a_{12}+c \Rightarrow q_1 \nmid p_2$, $a_{22} \nmid a_{12}-c \Rightarrow p_2 \nmid q_1$ entonces $(p_2,q_1) = 1$; $a_{22} \nmid a_{12}+c \Rightarrow q_2 \nmid p_1$, $a_{11} \nmid a_{12}-c \Rightarrow p_1 \nmid q_2$ entonces $(p_1,q_2) = 1$. Luego

$$\chi_+ = \left(-\frac{q_1q_2}{d_+} , \frac{p_1q_1}{d_+}\right) = (-q_2,p_1)$$

$$\chi_- = \left(\frac{p_1p_2}{d_2} , -\frac{p_1q_1}{d_-}\right) = (p_2,-q_1) \tag{6}$$

Supongamos $\|x_+\| > \frac{\|F\|}{2}$ y $\|x_-\| > \frac{\|F\|}{2}$. Sin restricción puede suponerse $|a_{11}| \geq |a_{22}|$ i.e. $|p_1| + |q_1| \geq |p_2| + |q_2|$ de modo que en (6) hay las siguientes posibilidades:

1) $|p_1| \geq |q_2| \wedge |q_1| \geq |p_2|$; esto es $\|x_+\| = |p_1|$, $\|x_-\| = |q_1|$ entonces $|a_{11}| = |p_1 q_1| > \|F\|$.

2) $|p_1| \geq |q_2| \wedge |p_2| > |q_1|$; esto es $\|x_+\| = |p_1|$, $\|x_-\| = |p_2|$ entonces $|p_1| > \frac{\|F\|}{2}$ y $|p_2| > \frac{\|F\|}{2}$ luego $|p_1 p_2| = |a_{12} + c| > \|F\|$, por lo tanto $|a_{12}| < |c|$ y $|a_{12} + c| = |a_{12} - c| = |c| > \|F\|$. Entonces $|a_{11} a_{22}| = 2|c| > 2\|F\|$.

3) $|q_2| \geq |p_1| \wedge |q_1| > |p_2|$; análogamente se tiene $|a_{11} a_{22}| > 2\|F\|$.

Todos estos casos conducen a contradicción pues $\|F\| = \max\{|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{22}|\}$ luego $\exists\ x \in \{x_+, x_-\} \ /\ F(x) = 0$, con $\|x\| \leq \frac{\|F\|}{2}$.

Analicemos ahora el caso restante, esto es

II. $a_{ii} \mid a_{12} + c$ ó $a_{ii} \mid a_{12} - c$, algún $i = 1,2$: Este caso aparece naturalmente al estudiar las soluciones minimales de formas cuyos determinantes fueron obtenidos de manera simple por los coeficientes de la forma, como por ejemplo, determinantes que fuesen combinación lineal de algunos coeficientes. Así, si

$$c = \alpha a_{11} + \beta a_{12} \qquad \alpha, \beta \in R \quad \text{donde} \quad \det F = -c^2 \tag{7}$$

encontramos $\beta = \pm 1$ satisface (7) con $a_{22} = -\alpha(\alpha a_{11} \pm 2a_{12})$ tal que $a_{11} \mid c \mp a_{12}$, según $\beta = \pm 1$.

Por simetría y la forma de las soluciones en (4) consideramos

$$a_{11} \mid c - a_{12} \qquad \text{esto es} \quad \exists\ \alpha \in \dot{R} / c = \alpha a_{11} + a_{12}$$

de modo que $a_{22} = -\alpha(\alpha a_{11} + 2a_{12})$ y por lo tanto

$$\chi_+ = \left(\frac{\alpha a_{11}}{d_+}\ ,\ \frac{a_{11}}{d_+}\right)$$

$$\chi_- = \left(\frac{\alpha a_{11} + 2a_{12}}{d_-}\ ,\ -\frac{a_{11}}{d_-}\right)\ , \tag{8}$$

luego consideraremos las soluciones de F sobre R,

$$\chi' = (\alpha, 1) \qquad \text{con} \quad \|\chi'\| = |\alpha|$$

$$\chi'' = \left(-\frac{a_{22}}{\alpha}\ ,\ -a_{11}\right) \qquad \text{con} \quad \|\chi''\| = \max\{|a_{22}| - |\alpha|\ ,\ |a_{11}|\}\ . \tag{9}$$

Observamos $|a_{22}| = |\alpha(\alpha a_{11} + 2a_{12})| \leq \max\{2|\alpha| + |a_{11}|\ ,\ |\alpha| + |a_{12}|\}$. Demostraremos que al menos una de estas soluciones tiene grado acotado por $\frac{\|F\|}{2}$:

<u>Caso</u> $|a_{11}| > |a_{12}|$.

Luego $|a_{22}| = 2|\alpha| + |a_{11}|$, $|\alpha| \geq 0$ por lo tanto $\|F\| = |a_{22}|$, como $|a_{22}| - |\alpha| = |\alpha| + |a_{11}| \geq |a_{11}|$ se tiene por (9) $\|\chi'\| = |\alpha| \leq \frac{|a_{22}|}{2}$ ó $\|\chi''\| \leq |a_{22}| - |\alpha| \leq \frac{|a_{22}|}{2}$, de lo contrario $|a_{22}| = |\alpha| + |a_{22}| - |\alpha| >$ $> \frac{|a_{22}|}{2} + \frac{|a_{22}|}{2}$ lo que es una contradicción.

<u>Caso</u> $|a_{11}| = |a_{12}|$.

Si $|\alpha| > 0$, $|a_{22}| = 2|\alpha| + |a_{11}| = \|F\|$ luego es análogo al caso anterior.

Si $|\alpha| = 0$, $\|x'\| = 0 \leq \frac{\|F\|}{2}$.

<u>Caso</u> $|a_{12}| > |a_{11}|$.

i. $|a_{22}| = 2|\alpha| + |a_{11}| > |\alpha| + |a_{12}| \geq |a_{12}|$, entonces $\|F\| = |a_{22}|$

$$\|x'\| = |\alpha| \leq \frac{2|\alpha| + |a_{11}|}{2} = \frac{|a_{22}|}{2} = \frac{\|F\|}{2} .$$

ii. $|a_{22}| = |\alpha| + |a_{12}| > 2|\alpha| + |a_{11}|$, luego $|a_{12}| > |\alpha| + |a_{11}|$ y

$|a_{22}| - |\alpha| = |a_{12}| > |a_{11}|$ entonces $\|F\| = |\alpha| + |a_{12}|$ y se tiene

$\|x'\| = |\alpha| \leq \frac{|\alpha| + |a_{12}|}{2}$ ó $\|x''\| = |a_{22}| - |\alpha| \leq \frac{|\alpha| + |a_{12}|}{2}$, de lo contrario $|a_{22}| = |\alpha| + |a_{22}| - |\alpha| > |\alpha| + |a_{12}| = |a_{22}|$ lo que es una contradicción.

iii. $|a_{22}| \leq 2|\alpha| + |a_{11}| = |\alpha| + |a_{12}|$, luego $|\alpha| + |a_{11}| = |a_{12}| > |a_{11}|$.

(1) Si $\|F\| = |a_{12}|$ i.e. $|a_{12}| \geq |a_{22}|$ entonces $|a_{11}| \geq |a_{22}| - |\alpha|$ y se tiene $\|x'\| = |\alpha| \leq \frac{|a_{12}|}{2}$ ó $\|x''\| = |a_{11}| \leq \frac{|a_{12}|}{2}$, o si no $|\alpha| + |a_{11}| >$ $> \frac{|a_{12}|}{2} + \frac{|a_{12}|}{2} = |a_{12}|$ y contradice la hipótesis (iii).

(2) Si $\|F\| = |a_{22}|$ i.e. $|a_{22}| > |a_{12}|$ entonces $|a_{11}| < |a_{22}| - |\alpha|$ y análogamente $\|x'\| = |\alpha| \leq \frac{|a_{22}|}{2}$ ó $\|x''\| = |a_{22}| - |\alpha| \leq \frac{|a_{22}|}{2}$.

Luego hemos demostrado $\exists\ x \in \{x', x''\} / F(x) = 0$ con $\|x\| \leq \frac{\|F\|}{2}$.

Esto completa la demostración de la existencia de una solución no trivial de F , en R^2 , con grado acotado por $\frac{\|F\|}{2}$.

Para probar que esta cota es optimal, simplemente podemos tomar

$$F(X_1,X_2) = X_1^2 + 2X_1X_2 + (1 - t_1^2 \dots t_d^2)X_2^2$$

sobre $R = k[t_1, \dots, t_d]$, se tiene

$$\det F = -(t_1 \dots t_d)^2 \quad , \qquad \|F\| = 2d$$

luego, F es isótropa sobre R con soluciones minimales dadas por (4)

$$x_{\pm} = (t_1 \cdot \ldots \cdot t_d \mp 1, \pm 1)$$

tal que

$$\|x_{\pm}\| = d = \frac{\|F\|}{2} .$$ $\lrcorner$

Resultados positivos en otros dominios.

Como Corolario se obtienen resultados positivos en una gama más amplia de dominios $(R, |\ |)$ donde R dominio de integridad, $|\ |$ = función grado asociada.

COROLARIO 1. Sea $(R,|\ |)$ dominio euclidiano, y sea $|\ |$ norma euclidiana multiplicativa y que satisface la desigualdad triangular. Sea

$$F(X_1,X_2) = \sum_{1 \leq i,j \leq 2} a_{ij} X_i X_j$$

forma cuadrática binaria, isótropa, sobre R . Entonces existe cota para las soluciones minimales de F dada por

$$\delta = (1 + \sqrt{2})\|F\|$$

Demostración: Sin restricción $a_{11} \cdot a_{22} \neq 0$. Luego $F(\Delta X) = a_{11}\overline{F}(X)$ para todo $X \in K^2$, $K = \mathrm{Quot}(R)$, donde $\overline{F} = \langle 1, -c^2 \rangle$, $c \in \dot{R}$ tal que $-c^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, y $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -a_{12} \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$. Como

$$\overline{X} = (c, 1)$$

solución minimal de $\overline{F}$, se tiene $\Delta\overline{X}$ solución de F

$$\Delta\overline{X} = (c - a_{12}, a_{11})$$

luego, usando las propiedades de la norma $|\ |$

$$\|\Delta\overline{X}\| = \max\{|c - a_{12}|, |a_{11}|\} \leq \max\{|c| + |a_{12}|, |a_{11}|\} \leq |c| + \|F\|$$

como

$$|c|^2 = |c^2| = |a_{11}a_{22} - a_{12}^2| \leq |a_{11}||a_{22}| + |a_{12}|^2 \leq 2\|F\|^2$$

entonces

$$|c| \leq \sqrt{2}\,\|F\| \quad \text{y} \quad \|\Delta\overline{X}\| \leq (1 + \sqrt{2})\|F\|. \qquad \square$$

COROLARIO 2. Sea $(R, |\ |)$ dominio con $|\ |$ = norma ultra métrica. Sea

$$F(X_1, X_2) = \sum_{1 \leq i,j \leq 2} a_{ij}X_iX_j$$

forma cuadrática binaria, isótropa, sobre R. Entonces existe cota para las soluciones minimales de F dada por

$$\delta = \|F\|$$

Demostración: Sin restricción $a_{11} \cdot a_{22} \neq 0$. Análogamente, si $\det F = -c^2$, $c \in \dot{R}$, sabemos existe solución no trivial de F

$$\chi = (c - a_{12}, a_{11})$$

con

$$\|\chi\| = \max\{|c - a_{12}|, |a_{11}|\} \leq \max\{|c|, |a_{12}|, |a_{11}|\} \leq \max\{|c|, \|F\|\}$$

como $-c^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ entonces

$$|c^2| = |c|^2 = |a_{11}a_{22} - a_{12}^2| \leq \max\{|a_{11}||a_{22}|, |a_{12}|^2\} \leq \|F\|^2$$

luego

$$|c| \leq \|F\| \quad \text{y} \quad \|\chi\| \leq \|F\| .$$

$\lrcorner$

Ejemplos.

$(R, |\ |)$ Dominio Euclidiano.

1. $R = \mathbb{Z}[i]$ enteros de Gauss con norma euclidiana

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2. $R = \mathbb{Z}[\omega]$ $\omega^3 = 1$, $\omega \neq 1$ con norma euclidiana

$$|a + b\omega| = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

3. Anillo de enteros de $Q(\sqrt{d})$ para al menos $d = -11, -7, -3, -2, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57, 73.$

$$|a + b\sqrt{d}| = \sqrt{a^2 + db^2}$$

$(R, |\ |)$ Dominio Ultramétrico.

1. $R = \mathbb{Z}_p$ enteros p-ádicos con norma p-ádica $|\ | = |\ |_p$

$(R, |\ |)$ $R = k[t_1, \ldots, t_d]$ car $k \neq 2$, $|\ |$ = grado total.

1. Sea $F(X_1, X_2) = (t+1)^2 X_1^2 + 2t^4(t^2-1)X_1X_2 + (t-1)^2(t^8-(t^2+1)^2)X_2^2$ forma cuadrática sobre $R = k[t]$. Se tiene

$$\det F = -(t^4-1)^2 \quad , \quad \|F\| = 10$$

luego F isótropa y existe $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -t^4(t^2-1) \\ 0 & (t+1)^2 \end{pmatrix}$

tal que

$$F(\Delta X) = (t+1)^2 \overline{F}(X) \quad \text{donde} \quad \overline{F} = \langle 1, -(t^4-1)^2 \rangle$$

entonces

$$\Delta(t^4-1, 1) = (-t^6+2t^4-1, (t+1)^2) \quad \text{con} \quad d_+ = t+1$$

$$\Delta(t^4-1, -1) = (t^6-1, -(t+1)^2) \quad \text{con} \quad d_- = t+1$$

luego hay soluciones minimales de F dadas por

$$X_+ = (t^5-t^4-t^3+t^2-t+1, t+1)$$

$$X_- = (t^5-t^4+t^3-t^2+t-1, t+1)$$

con $\|X_+\| = \|X_-\| = 5 = \dfrac{\|F\|}{2}$

2. Sea $F(X_1,X_2) = (X^2 - Y^2 - Z^2)X_1^2 + (XYZ^2)X_1X_2 + (Y^4X^2 - X^4Y^2)X_2^2$ forma cuadrática sobre $R = \mathbb{Q}[X,Y,Z]$. Se tiene

$$\det F = -c^2 \qquad \text{donde} \quad c = X^3Y - Y^3X - \frac{XYZ^2}{2} \quad , \qquad \|F\| = 6$$

luego F isótropa y existe $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{XYZ^2}{2} \\ 0 & X^2 - Y^2 - Z^2 \end{pmatrix}$ cambio de variables tal que

$$F(\Delta X) = (X^2 - Y^2 - Z^2)\overline{F}(X) \qquad \text{donde} \quad \overline{F} = \langle 1,-c^2 \rangle$$

como sabemos

$$\overline{X} = \left(X^3Y - Y^3X - \frac{XYZ^2}{2} \ , \ 1\right)$$

solución minimal de $\overline{F}$, entonces

$$\Delta\overline{X} = (X^3Y - Y^3X - XYZ^2,\ X^2 - Y^2 - Z^2)$$

solución de F . Como $d = X^2 - Y^2 - Z^2$ se tiene existe solución minimal de F dada por

$$X = (XY,1) \qquad \text{con} \qquad \|X\| = 2 < \frac{\|F\|}{2} \ .$$

§ 2. Estudio del problema para $n = 3$.

El método elemental usado para $n = 2$ no sirve en este caso pues, fundamentalmente, no se tiene una determinación del determinante de una forma isótropa de dimensión 3 como ocurre para formas binarias. Por otro lado, veremos existe cota si $n = 3$ para isotropía débil sobre $\mathbb{R}[t_1, \ldots, t_d]$, mas el problema de encontrar una cota explícitamente es en verdad difícil.

Luego motivados por las simetrías del Teorema de Holzer y la idea de una demostración de Mordell, hemos estudiado:

Validez del teorema de Holzer sobre $k[t]$.

TEORMA 2. Sea $R = k[t]$, k cuerpo en que -1 no es un cuadrado, $|\ | =$ = grado usual. Sea

$$F(X,Y,Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2$$

forma cuadrática diagonal sobre R, de dimensión 3, en su forma normal, i.e. abc libre de cuadrados. Entonces si F es isótropa sobre R, existe solución no trivial (x,y,z) con

$$|x| \leq \frac{|bc|}{2}, \quad |y| \leq \frac{|ac|}{2}, \quad |z| \leq \frac{|ab|}{2}.$$

En la demostración de este resultado necesitaremos un lema que nos muestra que para acotar el grado de una solución de F, basta acotar el grado de una de sus variables en particular, i.e. que al menos una de ellas permanece acotando el grado de las otras dos, en toda solución de la forma. Se tiene entonces

LEMA. Sea $R = k[t]$, car $k \neq 2$, $|\ | =$ grado usual. Sea

$$F = \langle a,b,c \rangle$$

forma cuadrática diagonal sobre $k[t]$ con $a_n, b_m, c_m \in \dot{k}$ coeficientes lider de a,b y c respectivamente. Entonces

$$F \text{ isótropa} / k[t] \Rightarrow \langle a_n, b_m, c_e \rangle \text{ isótropa} / k .$$

Demostración: Sea (x,y,z) una solución no trivial de F sobre R i.e. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ con $x = x_o + x_1t + \ldots + x_rt^r$, $y = y_o + y_1t + \ldots + y_st^s$, $z = z_o + z_1t + \ldots + z_ut^u$ en $k[t]$ donde $x_r, y_s, z_u \in \dot{k}$ son coeficientes lider. De $ax^2 + by^2 = -cz^2$ se tiene $|cz^2| = |ax^2 + by^2| \leq$ $\leq \max\{|ax^2|, |by^2|\}$.

Luego las distintas relaciones entre los grados de las variables de la solución son

(1) $|cz^2| = |by^2| > |ax^2|$ entonces $-c_et^e \cdot z_u^2t^{2u} = b_mt^m \cdot y_s^2t^{2s}$ donde

$e + 2u = m + 2s$, luego $-c_ez_u^2 = b_my_s^2 \Rightarrow \langle b_m, c_e\rangle$ isótropa / k .

(2) $|cz^2| = |ax^2| > |by^2|$ entonces $-c_et^e \cdot z_u^2t^{2u} = a_nt^n \cdot x_r^2t^{2r}$ donde

$e + 2u = n + 2r$, luego $-c_ez_u^2 = a_nx_r^2 \Rightarrow \langle a_n, c_e\rangle$ isótropa / k .

(3) $|cz^2| < |ax^2| = |by^2|$ entonces $-a_nt^n \cdot x_r^2t^{2r} = b_mt^m \cdot y_s^2t^{2s}$ donde

$n + 2r = m + 2s$, luego $-a_nx_r^2 = b_my_s^2 \Rightarrow \langle a_n, b_m\rangle$ isótropa / k .

(4) $|ax^2| = |by^2| = |cz^2|$ entonces $-c_et^e \cdot z_u^2t^{2u} = a_nt^n \cdot x_r^2t^{2r} + b_mt^m \cdot y_s^2t^{2s}$

donde $e + 2u = n + 2r = m + 2s$, luego $-c_ez_u^2 = a_nx_r^2 + b_my_s^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle a_n, b_m, c_e\rangle$ isótropa / k . $\lrcorner$

Luego con las hipótesis del teorema obtenemos como

COROLARIO. No existe soluciones no triviales de F tales que (1), (2) y (3) se den.

Demostración: Observamos por el Lema, si (x,y,z) solución de F

(1) $\Rightarrow$ $|x|$ no acota $|y|,|z| \Rightarrow \langle b_m, c_e\rangle$ isótropa / k

(2) $\Rightarrow$ $|y|$ no acota $|x|,|z| \Rightarrow \langle a_n, c_e\rangle$ isótropa / k

(3) $\Rightarrow$ $|z|$ no acota $|x|,|y| \Rightarrow \langle a_n, b_m\rangle$ isótropa / k

Por simetría supongamos hay soluciones tales que (1) y (2) se dan. Entonces $\langle b_m, c_e\rangle$, $\langle a_n, c_e\rangle$ son isótropas / k , esto implica

$$b_m c_e \equiv -1 (\text{mod } \dot{K}^2)$$

$$a_n c_e \equiv -1 (\text{mod } \dot{K}^2)$$

luego $$a_n b_m \equiv 1 (\text{mod } \dot{K}^2)$$

como $-1 \not\equiv 1 (\text{mod } \dot{K}^2)$ entonces $\langle a_n, b_m\rangle$ no es isótropa / k i.e. no existe solución de F tal que se tenga (3). $\lrcorner$

Luego si somos capaces de acotar al menos una (cualquiera que elijamos) de las variables de una solución, por la cota correspondiente en el Teorema de Holzer, las otras dos desigualdades se obtienen.

<u>Demostración Teorema 2</u>: Por el Corolario supongamos sin restricción $|z|$ acota $|x|$ e $|y|$, en toda solución de F .

Supongamos existe solución (x_0, y_0, z_0) sobre $k[t]$ con $|z_0| > \frac{|ab|}{2}$. Siempre podemos tomar $(x_0, y_0) = 1$. Mostraremos hay otra solución (x, y, z) con $|z| < |z_0|$.

Pongamos

$$x' = x_0 + TX \ , \quad y' = y_0 + TY \ , \quad z' = z_0 + TZ$$

donde $X,Y,Z \in k[t]$ por determinar, $T \neq 0$, tal que (x',y',z') solución no trivial de F y por lo tanto T satisface

$$T\Delta + 2\Delta_o = 0$$

donde $\Delta = aX^2 + bY^2 + cZ^2$, $\Delta_o = ax_oX + by_oY + cz_oZ$.

Luego

$$\begin{aligned} \Delta x' &= x_o\Delta - 2X\Delta_o \\ \Delta y' &= y_o\Delta - 2Y\Delta_o \qquad\qquad (1) \\ \Delta z' &= y_o\Delta - 2Z\Delta_o \end{aligned}$$

Ahora si δ es un divisor común de los tres términos de la derecha de (1) se tiene una solución (x,y,z) sobre $k[t]$ tal que

$$\begin{aligned} \delta x &= x_o\Delta - 2X\Delta_o \\ \delta y &= y_o\Delta - 2Y\Delta_o \qquad\qquad (2) \\ \delta z &= z_o\Delta - 2Z\Delta_o \end{aligned}$$

Se observa, si δ divide a c , como $ax_o^2 + by_o^2 + cz_o^2 = 0$, $(x_o,y_o) = 1$ y a,b,c relativamente primos de a pares, entonces $(\delta,abx_oy_o) = 1$. Luego, para que δ sea divisor común basta que δ divida $Xy_o - Yx_o$ pues así

$$X \equiv Y\,\frac{x_o}{y_o} \pmod{\delta}$$

entonces

$$aX^2 + bY^2 \equiv (ax_o^2 + by_o^2)\,\frac{Y^2}{y_o^2} = -cz_o^2\,\frac{Y^2}{y_o^2} \equiv 0 \pmod{\delta}$$

$$ax_oX + by_oY \equiv (ax_o^2 + by_o^2)\ \frac{Y}{y_o} = -cz_o^2\ \frac{Y}{y_o} \equiv 0(\mathrm{mod}\ \delta)\ .$$

Determinemos ahora $X,Y,Z \in k[t]$ tal que (x,y,z) solución no trivial en $k[t]$ con $|z| < |z_o|$.

Como $k[t]$ Euclidiano, $(x_o,y_o) = 1$, entonces hay $X,Y \in k[t]$ tal que

$$\delta = c = Xy_o - Yx_o\ .$$

De (2) se obtiene

$$-\frac{\delta z}{cz_o} = \left(Z + \frac{ax_oX + by_oY}{cz_o}\right)^2 + \frac{ab}{c^2z_o^2}\ (Xy_o - Yx_o)^2$$

luego

$$-\frac{z}{z_o} = \left(Z + \frac{A}{B}\right)^2 + \frac{ab}{z_o^2} \qquad (3)$$

donde $A = ax_oX + by_oY$ y $B = cz_o$. Luego por división euclidiana hay $q,r \in k[t]$ tal que

$$A = Bq + r \qquad \text{con } |r| < |B|$$

tomando $Z = -q$ se tiene

$$\left|Z + \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{r}{B}\right| < 0$$

y por hipótesis

$$\left|\frac{ab}{z_o^2}\right| < 0$$

entonces de (3) tenemos

$$\left|\frac{z}{z_o}\right| \leq \max\left\{2\left|z+\frac{A}{B}\right|,\ \left|\frac{ab}{z_o^2}\right|\right\} < 0$$

esto es $|z| < |z_o|$.

Luego iterando este proceso encontramos existe solución (x,y,z) , no trivial por construcción, sobre $k[t]$, con $|z| \leq \frac{|ab|}{2}$.

De $|ax^2| \leq |cz^2|$, $|by^2| \leq |cz^2|$ obtenemos $|x| \leq \frac{|bc|}{2}$, $|y| \leq \frac{|ac|}{2}$.

La posible generalización a anillos de polinomios en más de una variable no es inmediata por este método.

Cabe observar que este resultado proporciona una cota $\delta \leq \|F\|$ donde $\|F\| = \max\{|a|, |b|, |c|\}$ es precisamente la cota de Prestel para $n = 3$ sobre $k[t]$.

Existencia de cotas para isotropía débil.

A continuación daremos una demostración cuyas líneas generales me fueron indicadas por el Profesor A. Prestel, durante su visita a la Facultad de Ciencias, a quien agradezco infinitamente por su tiempo y paciencia.

TEOREMA 3. Existe cota para isotropía débil de formas ternarias sobre $R = \mathcal{R}[t_1, \ldots, t_d]$, $\mathcal{R}$ cuerpo real cerrado.

Demostración: Basta demostrarlo para formas diagonales. Luego sea $\rho = \rho_N(C, t_1, \ldots, t_d)$ la forma cuadrática diagonal general de dimensión

3 y grado N sobre R , con C conjunto de coeficientes en $\mathcal{R}$. Entonces ρ débilmente isótropa / R implica existe solución minimal, no trivial, con grado (digamos) $\leq \delta_C$.

Si demostramos existe un $\delta \in \mathbb{N}$, que sirve para todo conjunto de coeficientes C , obtendremos una función cota i.e. $\delta = \delta(N,3)$.

Supongamos lo contrario i.e. que existe, para todo $\delta \in \mathbb{N}$, un conjunto de coeficientes C^{δ} en $\mathcal{R}$ que define $\rho^{\delta} = \rho_N(C^{\delta}, t_1, \ldots, t_d)$ débilmente isótropa / R para la cual toda solución tiene grado $> \delta$.

Luego en $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}^{\mathbb{N}} / D$, ultraproducto de $\mathcal{R}$ respecto a D ultrafiltro no trivial, se tiene conjunto de coeficientes C^* inducido por C^{δ} , que define la forma $\rho^* = \rho_N(C^*, t_1, \ldots, t_d) / \mathcal{R}^*[t_1, \ldots, t_d]$.

Como ρ^{δ} totalmente indefinida sobre R , para todo $\delta \in \mathbb{N}$, pues es débilmente isótropa, entonces vía el ultraproducto se tiene ρ^* totalmente indefinida sobre $\mathcal{R}^*[t_1, \ldots, t_d]$ y por lo tanto, la 2-forma de Pfister $\overline{\rho} = \langle 1 \rangle \perp \langle \det \rho^* \rangle \otimes \rho^*$ satisface $\mathrm{sig}_{P^*}\overline{\rho} = 0$, para todo orden $P^* \subseteq \mathcal{R}^*(t_1, \ldots, t_d)$.

Luego por el Principio Local-Global de Pfister se tiene $\exists\, t \geq 1$ tal que $2^t \times \overline{\rho} = 0$. Cancelando planos hiperbólicos se obtiene $2^t \times \rho^*$ isótropa / $\mathcal{R}^*[t_1, \ldots, t_d]$ y entonces $2^d \times \rho^*$ isótropa / $\mathcal{R}^*[t_1, \ldots, t_d]$, más por hipótesis los grados de las soluciones de $2^d \times \rho^{\delta}$ son no acotados luego $2^d \times \rho^*$ anisótropa / $\mathcal{R}^*[t_1, \ldots, t_d]$. Contradicción. $\square$

De la misma manera hemos podido probar otra afirmación hecha por el Profesor Prestel. Esto es

TEOREMA 4. Existe cota para isotropía débil de las formas de Pfister sobre $\mathcal{R}[t_1, \ldots, t_d]$, $\mathcal{R}$ real cerrado.

Demostración: Basta considerar el siguiente hecho general: Toda forma de Pfister totalmente indefinida sobre F cuerpo formalmente real es de torsión. ⌟

A P E N D I C E   A

En el Capítulo I, § 2., hemos enunciado el resultado de Prestel que muestra la no existencia de una función cota general si el número de varia - bles en el anillo de polinomios es mayor que 1. Para esto Prestel encuentra una familia de formas isótropas de dimensión 16, sobre $\mathbb{R}[X,Y]$, con grado constante y cuyas soluciones crecen infinitamente.

Ha sido muy interesante estudiar este resultado, empleando para ello, sólo herramientas de formas cuadráticas sobre cuerpos formalmente reales [6]. Por esto, incluimos aquí una demostración. En ella se utilizan esencialmente los siguientes hechos:

<u>Principio Local-Global</u>: Sea F cuerpo formalmente real y sea $v : \dot{F} \twoheadrightarrow \Gamma$ valuación con cuerpo residual F_v , car $F_v \neq 2$. Sea q forma cuadrática no singular sobre F con $q_v^{(i)}$, $1 \leq i \leq m$, sus formas residuales sobre F_v . Entonces

(i) q isótropa / $F \Rightarrow q_v^{(i)}$ isótropa / F_v , algún i

(ii) $q_v^{(i)}$ isótropa / F_v , algún i y (F,v) henseliana $\Rightarrow q$ isótropa / F .

DEFINICION. Una forma cuadrática q se dice débilmente isótropa sobre F si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \times q = q \perp \ldots \perp q$, la suma ortogonal de n copias de q, es isótropa sobre F.

TEOREMA A.1. Sea F cuerpo formalmente real, q forma cuadrática no singular sobre F. Entonces

> q indefinida respecto a todo orden arquimediano de F y q débilmente isótropa sobre las henselizaciones de F respecto a valuaciones reales
>
> $\Rightarrow$ q débilmente isótropa sobre F.

Principio de Hasse Débil: Toda forma cuadrática sobre F indefinida respecto a todos los ordenes de F es débilmente isótropa sobre F.

TEOREMA A.2. Sea F cuerpo formalmente real. Entonces son equivalentes

(i) se cumple el Principio de Hasse débil en F.

(ii) Todo q-orden de F es un orden de F.

(iii) Para todo A,B conjuntos de ordenes de F, finitos y disjuntos, existe $a \in \dot{F} / a \in P$, para todo $P \in A$ y $-a \in P$, para todo $P \in B$.

TEOREMA A.3. Sea K/F extensión algebraica real finita sobre F un cuerpo de funciones algebraicas. Entonces (iii) se cumple en $F \Longleftrightarrow$ (iii) se cumple en K.

DEFINICION. Sea $D \subseteq \mathbb{N}$ ultrafiltro no trivial. Sea $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el producto directo de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{N}$. Se define el ultraproducto de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{N}$ como

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / D = \left\{ [(a^m)_{m \in \mathbb{N}}] \,/\, (a^m) \sim (b^m) \Longleftrightarrow \{\nu \,/\, a^\nu = b^\nu\} \in D \right\}$$

PROPOSICION. $\mathbb{R}^*$ es cuerpo real cerrado no arquimediano, con orden $P^* = \left\{a \in \mathbb{R}^* / \{\nu / a^\nu > 0\} \in D\right\}$.

PROPOSICION. Sea $v_o : \dot{K} \twoheadrightarrow \Gamma$ valuación sobre K. Entonces v_o induce valuación sobre el cuerpo de funciones racionales $v : \dot{K}(X) \twoheadrightarrow \Gamma$ definida por $v(\Sigma a_i X^i) = \min \{v_o(a_i)\}$.

TEOREMA (Prestel). Sea $R = \mathbb{R}[X,Y]$. Sean $u = X$, $v = X^2 + mY + Y^2$ polinomios en R, $m \in \mathbb{N}$. Entonces la forma cuadrática

$$F_m = 4 \times \langle u + 1,\ v + 1,\ uv,\ -1 \rangle$$

es isótropa sobre R, para todo $m \in \mathbb{N}$. Y si δ_m es el grado minimal de una solución no trivial de F_m entonces $\{\delta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es no acotado.

Demostración: Primero veamos que efectivamente F_m es isótropa para todo $m \in \mathbb{N}$. Para esto, fijemos $m \in \mathbb{N}$ y sea $K = \mathbb{R}(X,Y)$ cuerpo real. Sea

$$\rho = \langle u + 1,\ v + 1,\ uv,\ -1 \rangle$$

luego ρ es indefinida para todo orden de K. Por Teorema A.1. basta demostrar ρ débilmente isótropa sobre toda henselización respecto a valuaciones reales de K, pues entonces, como toda suma de cuadrados en K es suma de 4 cuadrados se tiene $4 \times \rho$ isótropa sobre K. Sea

$$r : \dot{K} \twoheadrightarrow \Gamma \quad \text{valuación real,} \quad K_r \ \text{cuerpo residual.}$$

Por el Principio Local Global, ρ es débilmente isótropa sobre $(\tilde{K},\tilde{r})$ henselización de (K,r) si alguna forma residual de ρ es débilmente isótropa sobre $\tilde{K}_{\tilde{r}} \cong K_r$.

Encontremos entonces formas residuales de ρ :

Caso 1. $r(X) < 0 \leq r(Y)$. Como $r(v + 1) \geq \min\{r(Y), 2r(X), 0\} = 2r(X)$ entonces $r\left(\frac{v + 1}{X^2}\right) = r(-1) = 0$ luego una forma residual contiene a la forma $\left\langle \overline{\frac{v + 1}{X^2}}, -\overline{1} \right\rangle = \langle \overline{1}, -\overline{1} \rangle$ isótropa / K_r .

Análogamente si $r(Y) < 0 \leq r(X)$, dividiendo por Y^2 .

Caso 2. $r(X) < r(Y) < 0$. Como $r\left(\frac{v + 1}{X^2}\right) = 0$ pues $r\left(\frac{Y}{X}\right) > 0$ y $r\left(\frac{mY}{X^2}\right) > 0$, se tiene una forma residual contiene a $\langle \overline{1}, -\overline{1} \rangle$ isótropa sobre K_r .

Análogamente si $r(Y) < r(X) < 0$.

Caso 3. $r(X) = r(Y) < 0$. Observamos $r(v + 1) = 2r(Y)$ esto es $r\left(\frac{v + 1}{Y^2}\right) = 0$ o de lo contrario $\frac{v + 1}{Y^2} \in M_r$ ideal maximal del anillo de valuación A_r de r , $\frac{1}{Y} \in M_v$ luego $\overline{1} + \left(\frac{\overline{X}}{Y}\right)^2 = 0 \in K_r = A_r / M_r$, contradicción pues K_r es cuerpo real. Luego $2 \times \rho$ tiene una forma residual que contiene a $\left\langle \overline{1} + \left(\frac{\overline{X}}{Y}\right)^2, -\overline{1}, -\overline{1} \right\rangle$ isótropa / K_r .

Caso 4. $r(X), r(Y) \geq 0$. Luego $u, v \in A_r$.

(i) $\overline{u} = 0$. Esto es $r(u) > 0$ luego $r(u + 1) = 0 = r(-1)$ y una forma residual contiene a $\langle \overline{u + 1}, -\overline{1} \rangle = \langle \overline{1}, -\overline{1} \rangle$ isótropa sobre K_r .

(ii) $\overline{v} = 0$. Esto es $r(v) > 0$ luego $r(v + 1) = 0 = r(-1)$ y una forma residual contiene a $\langle \overline{v + 1}, -\overline{1} \rangle = \langle \overline{1}, -\overline{1} \rangle$ isótropa sobre K_r .

(iii) $\overline{u},\overline{v} \neq 0$. Esto es $r(u) = 0 = r(v) = r(uv)$.

Si $\overline{u+1} = 0$, $\overline{v+1} \neq 0$ entonces una forma residual contiene a $\langle \overline{v+1}, \overline{uv}, -\overline{1} \rangle = \langle \overline{v+1}, -\overline{v}, -\overline{1} \rangle$ isótropa sobre K_r .

Si $\overline{u+1} = \overline{v+1} = 0$ entonces una forma residual contiene a $\langle \overline{uv}, -\overline{1} \rangle = \langle (-\overline{1})^2, -\overline{1} \rangle$ isótropa sobre K_r .

Si $\overline{u}, \overline{v}, \overline{u+1}, \overline{v+1} \neq 0$ entonces una forma residual es $\overline{\rho} = \langle \overline{u+1}, \overline{v+1}, \overline{uv}, -\overline{1} \rangle$, indefinida para todo orden de K_r . Como $K_r \cong \mathbb{R}$ ó $K_r \cong L$, donde $L / \mathbb{R}(t)$ extensión real algebraica finita, y se cumple el Principio de Hasse Débil sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}(t)$. Entonces por Teoremas A3 y A2 también se cumple sobre K_r .

Esto es, hemos demostrado ρ débilmente isótropa sobre las henselizaciones reales de K luego $F_m = 4 \times \rho$ isótropa sobre K .

Sea ahora $\mathbb{R}^*$ ultraproducto de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{N}$ respecto a $D \subseteq \mathbb{N}$ ultrafiltro no trivial i.e. D no contiene conjuntos finitos. Sea

$$F_\omega = 4 \times \langle X+1, V+1, XV, -1 \rangle$$

forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^*[X,Y]$ inducida por $\{F_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ donde $V = X^2 + \omega Y + Y^2$, $\omega = [(m)_{m \in \mathbb{N}}] \in \mathbb{R}^*$.

Mostraremos F_ω no es isótropa sobre $\mathbb{R}^*[X,Y]$.

Sea $A^* = \{a \in \mathbb{R}^* / |a| < n$, algún $n \in \mathbb{N}\}$. Se tiene A^* anillo de valuación en $\mathbb{R}^*$. Sea

$$v^* : \dot{\mathbb{R}} \longrightarrow \Gamma$$

valuación asociada donde Γ grupo abeliano totalmente ordenado y con cuerpo residual $\mathbb{R}^*_{v^*} \cong \mathbb{R}$. Luego v^* induce valuaciones

$$v : \dot{\mathbb{R}}^*(X) \twoheadrightarrow \Gamma \quad \text{definida por} \quad v(\Sigma\, a_i X^i) = \min\{v^*(a_i)\}$$

$$w : \dot{\mathbb{R}}^*(X,Y) \twoheadrightarrow \Gamma \quad \text{definida por} \quad w(\Sigma\, p_i(X) Y^i) = \min\{(v(p_i(X)), i)\}$$

donde $\Gamma \times \mathbb{Z}$ se ordena lexicográficamente. Se tiene

$$\mathbb{R}^*(X)_v \cong \mathbb{R}^*(X,Y)_w \cong \mathbb{R}(X) \; . \qquad (*)$$

Encontremos entonces las formas residuales de F_ω . Observamos

$$\begin{aligned} w(-1) &= w(X+1) = (0,0) \in 2(\Gamma \times \mathbb{Z}) \\ w(V+1) &= w(XV) = w(\omega Y) = (v^*(\omega),1) \notin 2(\Gamma \times \mathbb{Z}) \end{aligned} \qquad (**)$$

Luego si $S : \Gamma \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^*(X,Y)$ es una q-sección de w , se tiene $S(w(-1)) = S(w(X+1)) = S(0,0) = 1$ y las formas residuales de F_ω son:

$$F_w^{(1)} = 4 \times \langle X+1, -1 \rangle$$

$$F_w^{(2)} = 4 \times \langle \overline{(V+1)S(w(V+1))}^{-1}, \overline{XVS(w(XV))}^{-1} \rangle.$$

Por $(**)$ y $(*)$ se tiene

$$\begin{aligned} F_w^{(2)} &= 4 \times \langle \overline{(V+1)S(w(\omega Y))}^{-1}, \overline{XVS(w(\omega Y))}^{-1} \rangle \\ &\cong 4 \times \langle \overline{\omega YS(w(\omega Y))}^{-1} \rangle \otimes \langle \overline{\frac{V+1}{\omega Y}}, \overline{\frac{XV}{\omega Y}} \rangle \\ &= 4 \times \langle \overline{\omega YS(w(\omega Y))}^{-1} \rangle \otimes \langle 1, X \rangle \end{aligned}$$

Luego $F_w^{(1)}$ y $F_w^{(2)}$ no son isótropas sobre $\mathbb{R}(X)$ y por el Principio Local Global se tiene F_ω no es isótropa sobre $\mathbb{R}^*(X,Y)$.

Utilizaremos este hecho para demostrar no existe cota para el grado de las soluciones de $\{F_m\}_{m\in\mathbb{N}}$.

Supongamos hay polinomios en $\mathbb{R}[X,Y]$ con grados acotados para todo $m \in \mathbb{N}$

$$g_j^m = \sum_{i=1}^{N} a_{ij}^m M_i \quad , \quad a_{ij}^m \in \mathbb{R} \quad , \quad M_i \text{ monomios en } X \text{ e } Y ,$$

$1 \leq j \leq 16$, tal que $g^m = (g_1^m, \ldots, g_{16}^m)$ es solución no trivial de F_m .

Luego g_j^m , $1 \leq j \leq 16$, definen polinomios en $\mathbb{R}^*[X,Y]$

$$g_j = \sum_{i=1}^{N} [(a_{ij}^m)_{m\in\mathbb{N}}] M_i \quad , \quad [(a_{ij}^m)_{m\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}^*$$

de modo que $g = (g_1, \ldots, g_{16})$ es solución no trivial de F_ω ; contradic - ción, por lo tanto $\{\delta_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es no acotado. Como el grado máximo de los coe ficientes de F_m es $\deg F_m = 3$ y la dimensión $\dim F_m = 16$, para todo $m \in \mathbb{N}$, se tiene no existe función $\delta = \delta(\deg F_m, \dim F_m)$ constante tal que $\delta_m \leq \delta$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

A P E N D I C E   B

Primeramente responderemos una pregunta que surge al estudiar el contraejemplo de Prestel sobre $\mathbb{R}[X,Y]$ y es acerca de la existencia de una función cota respecto, esta vez, a una nueva función grado ∂ en la que los coeficientes de los polinomios intervienen.

Consideraremos $R = \mathbb{R}[t_1, \ldots, t_d]$ y $\partial : R \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $\partial(a) = \max\{e^{\deg(a)}, |a_i|\}$ donde $a_i \in \mathbb{R}$ son los coeficientes de $a \in R$, $\deg$ = grado usual, $e > 1$.

Observamos, si $\{F_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ son las formas del teorema 2 de Prestel entonces $\partial(F_m) = m$, para todo $m \gg 0$.

Se tiene el siguiente resultado:

PROPOSICION. Existe función cota $\delta'(\partial F, \dim F)$ sobre $(R, \partial) \Rightarrow$. Existe función cota $\delta(\deg F, \dim F)$ sobre $(R, \deg)$.

<u>Demostración</u>: Se ve ∂ satisface

1. $\deg(a) \leq \partial(a)$ para todo $a \in R$.
2. $a \in \dot{R} \Rightarrow$ existe $\lambda_a \in \dot{\mathbb{R}} / \partial(\lambda_a^{-1} a) = e^{\deg(a)}$.

Sea F forma isótropa sobre R. Definamos $\partial F = \max\{\partial(a_{ij})\}$ donde a_{ij} son los coeficientes de F. Luego sea $\lambda \in \dot{\mathbb{R}} / \partial(\langle \lambda^{-1} \rangle \otimes F) = e^{\deg F} = \max\{e^{\deg(a_{ij})}\}$ donde $\langle \lambda^{-1} \rangle \otimes F$ es la forma cuadrática sobre R con coeficientes $\lambda^{-1} a_{ij}$. Sea $n = \dim F = \dim \langle \lambda^{-1} \rangle \otimes F$.

Luego por hipótesis hay solución no trivial $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ de $F' = \langle \lambda^{-1} \rangle \otimes F$ con

$$\max\{\partial(x_i)\} \leq \delta'(\partial F', \dim F')$$

pero entonces $x \in R^n$ es solución no trivial de F y satisface

$$\max\{\deg(x_i)\} \leq \max\{\partial(x_i)\} \leq \delta'(e^{\deg F}, \dim F)$$

esto es, existe $\delta(\deg F, \dim F) = \delta'(e^{\deg F}, \dim F)$ sobre $(R, \deg)$. $\lrcorner$

De aquí y el contraejemplo de Prestel se deduce no existe función cota δ sobre $(\mathbb{R}[X,Y], \partial)$.

Luego por la proposición observamos aún queda abierto el problema: Existencia de una función cota $\delta(\partial F, \dim F)$ sobre $(\mathbb{Z}[X,Y], \partial)$.

Ahora bien, preguntarse sobre la existencia de cualquier función $\delta(F)$ que dependa sólo de la forma F sobre el dominio $(R, |\,|)$ que acote sus soluciones minimales, equivale a preguntarse, si es cierto que la forma determina sus ceros, en particular sus ceros minimales respecto a $|\,|$.

Como resulta muy razonable esperar que así sea, el problema es quizás encontrar una regla $|\,|$ con qué medir esta determinación lo más apropiadamente.

Por ejemplo, en el caso de $R = \mathbb{R}[t_1, \ldots, t_d]$ con $d \geq 2$, la función $|\ |$ = grado total no resulta por sí sólo adecuada para medir las formas y sus soluciones. En cambio en el caso de $\mathbb{Z}$ observamos que el valor absoluto si lo es y notamos entonces que tanto las soluciones (i.e. sus coordenadas) como la cota son números, y la relación entre ellos es el orden usual.

Luego, así como podemos estudiar

* Dado F isótropa sobre $R = \mathbb{R}[t_1, \ldots, t_d]$ con $|\ |$ = grado total :
Existe $\delta(F) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x_1, \ldots, x_n \in R$ no todos nulos /
$F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ y $|x_i| \leq \delta(F)$ $i = 1, \ldots, n$.

Podemos hacer el análogo natural al caso $\mathbb{Z}$. Esto es, considerar en $R = \mathbb{R}[t_1, \ldots, t_d]$ un orden P , esto es $P \subseteq R$ tal que $P + P \subseteq P$, $P \cdot P \subseteq P$, $P \cap -P = \{0\}$ y $P \cup -P = R$. Y estudiar entonces

** Dado F isótropa sobre $R = \mathbb{R}[t_1, \ldots, t_d]$ con $P \subseteq R$ un orden:
Existe $\delta_P(F) \in P$, $x_1, \ldots, x_n \in R$ no todos nulos /
$F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ y $|x_i| \underset{P}{\leq} \delta_P(F)$ $i = 1, \ldots, n$

donde $a \underset{P}{\leq} b$ significa $b - a \in P$ y $|a| = a$ si $a \in P$ ó $|a| = -a$ si $a \notin P$.

Este nuevo problema parece muy interesante en sí mismo por ser la manera natural de comparar las soluciones en un dominio ordenado. De hecho a partir de lo estudiado se obtienen en forma inmediata resultados como:

TEOREMA B.1. Sea F isótropa de dimensión 2 sobre $R = \mathbb{R}[t_1, \ldots, t_d]$ y sea $P \subseteq R$ un orden. Entonces existe cota

$$\delta_P(F) = \max\ \{1, \|F\|\ ,\ |\det F|\}\ .$$

TEOREMA B.2. Sea $F(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ isótropa sobre $\mathbb{R}[t]$, abc libre de cuadrados y sea $P \subseteq \mathbb{R}[t]$ un orden. Entonces existe solución no trivial (χ, y, z) sobre $\mathbb{R}[t]$ con

$$\chi^2 \underset{P}{\leq} \max\ \{1,\ |bc|\}$$

$$y^2 \underset{P}{\leq} \max\ \{1,\ |ac|\}$$

$$z^2 \underset{P}{\leq} \max\ \{1,\ |ab|\}\ ,$$

donde los ordenes de $\mathbb{R}(t)$ son:

$$P^{\pm}_{\alpha} = \{(t-\alpha)^k \frac{f}{g} \mid k \in \mathbb{Z}\ ,\ \ f,g \in \mathbb{R}[t]\ ,\ (\pm 1)^k f(\alpha) g(\alpha) > 0\} \cup \{0\}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y

$$P^{\pm}_{\infty} = \left\{ \frac{a_o + \ldots + a_n t^n}{b_o + \ldots + b_m t^m} \mid (\pm 1)^{n-m}\ a_n b_m > 0 \right\} \cup \{0\}\ ,$$

y $P = P^{\pm}_{\alpha} \cap \mathbb{R}[t]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ o bien $P = P^{\pm}_{\alpha} \cap \mathbb{R}[t]$.

Este último resultado generaliza el teorema de Holzer para el dominio ordenado $\mathbb{R}[t]$.

Se observa que * y ** no son en general independientes, por ejemplo, se tiene * ⇒ ** sobre $(\mathbb{R}[t]\ ,\ P_{\infty})$. Luego, desde este nuevo punto de vista, queda abierto el problema de encontrar una cota general sobre el dominio ordenado $(\mathbb{R}[t_1, \ldots, t_d]\ ,\ P)$ con $d \geq 2$.

B I B L I O G R A F I A

[1] J.W.S. Cassels, Bounds for the least solutions of homogeneous quadratic equations. Camb. Phil. Soc. 51 (1955), 262-264.

[2] J.W.S. Cassels, Rational quadratic forms. London and New York (1978).

[3] L. Holzer, Minimal solutions of diophantine equations. Can. J. Math. 2 (1950), 238-244.

[4] L.J. Mordell, On the magnitud of the integer solutions of the equa - tion $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$. J. Number Theory, 1 (1969), 1-3.

[5] A. Prestel, On the size of zeros of quadratic forms over rational function fields. J. reine angew. Math. 378 (1987), 101-112.

[6] A. Prestel, Lectures on formally real fields. Lecture Notes in Math. 1093, Berlin-Heidelberg-New York (1984).

[7] T. Y. Lam, The algebraic theory of quadratic forms. Benjamin, New York (1973).

[8] O. Zariski, P. Samuel, Commutative Algebra. Princeton (1960).

[9] O. Endler, Valuation Theory, Berlin-Heidelberg-New York, (1972).