APLICACIONES SEMI-CUADRATICAS Y CUASI-CUADRATICAS

Tesis

entregada a la

Universidad de Chile

en cumplimiento parcial de los requisitos

para optar al grado de

Magister en Ciencias Matemáticas con mención en Algebra

FACULTAD DE CIENCIAS

por

IVO BASSO BASSO

Septiembre, 1987

Patrocinante: Dra. Alicia Labra J.

Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

I N F O R M E D E A P R O B A C I O N
T E S I S D E M A G I S T E R

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el Candidato

IVO BASSO BASSO

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Matemáticas con mención en Algebra

Patrocinante de Tesis

Dra. Alicia Labra J. ______________________

Comisión Informante de Tesis

Dr. Rolando Pomareda R. ______________________

Dr. César Burgueño M. ______________________

Dr. Gonzalo Riera L. ______________________

I N D I C E

N O T A C I O N E S

$Q(A,M,N)$: A-módulo de las aplicaciones A-cuadráticas de M en N .

$Q_1(A,M,N)$: A-módulo de las aplicaciones semi-cuadráticas de M en N .

$Q_o(A,M,N)$: A-módulo de las aplicaciones cuasi-cuadráticas de M en N .

$F(A,M,N)$: A-módulo de las aplicaciones de $A \times M \times M$ en N que son A-lineales y antisimétricas en la segunda y tercera variable y derivaciones en la primera variable.

$I(A,M,N)$: A-módulo de las aplicaciones de $M \times M$ en N que son bilineales y antisimétricas.

$\mathbb{Z}_p$: Enteros p-ádicos.

I N T R O D U C C I O N

El tema abordado en este trabajo tiene como primer origen un artículo de A.M. Gleason (ver [5]) y dos tésis posteriores de G. Arnaud y F. Barboza realizadas en Montpellier, Francia. (ver [3] y [4]).

Gleason introduce en su artículo los conceptos de forma semi-cuadrática (verifica la ley del paralelógramo) y forma cuasi-cuadrática en especios vectoriales sobre un cuerpo de característica distinta de dos. Fundamentalmente en su trabajo caracteriza las formas cuasi-cuadráticas a través de las derivaciones del cuerpo y de las formas bilineales anti - simétricas sobre el espacio.

C. Arnaud y F. Barboza basados en el artículo mencionado anteriormente, realizan, en parte de cada respectivo trabajo, un estudio más detallado de las formas semi y cuasi-cuadráticas en el caso de módulos, desarrollando otros aspectos no tratados en el artículo de Gleason.

La presente tésis tiene como objetivo principal generalizar algunos resultados para el caso de aplicaciones semi y cuasi-cuadráticas y analizar algunos casos particulares (cuerpos finitos, reales y p-ádicos).

En los dos primeros Capítulos se estudian propiedades generales de dichas aplicaciones y determinadas situaciones en las cuales ellas coinciden con las aplicaciones cuadráticas. Posteriormente se analizan tres cuocientes, obteniendo de uno de ellos (el cuociente entre el módulo de las aplicaciones cuasi-cuadráticas y el módulo de las aplicaciones cuadráticas) una generalización de un resultado fundamental de Gleason. Así el Teorema 3.6 afirma que las aplicaciones cuasi-cuadráticas también pueden ser caracterizadas vía las derivaciones del cuerpo y las aplicaciones bilineales antisimétricas sobre el espacio. No sucede lo mismo con las aplicaciones semi-cuadráticas y no se dispone, al igual que en los trabajos sobre formas, de una herramienta tan poderosa como la anterior para su caracterización; la búsqueda de tal caracterización, en principio para formas, conlleva una natural prolongación del trabajo.

Finalmente en el último Capítulo se analiza la existencia de tales aplicaciones en los casos particulares mencionados; resultan de interés, la obtención de resultados sobre aplicaciones semi-cuadráticas en $\mathbb{R}$ usando la base de Hamel, y el último teorema del trabajo referente a la forma de las aplicaciones cuasi-cuadráticas sobre espacios vectoriales.

C A P I T U L O   I

APLICACIONES SEMI-CUADRATICAS

DEFINICION: Sean M y N A-módulos. Una aplicación $q : M \to N$ se llama semi-cuadrática si verifica:

$$(1.1) \qquad q(x + y) + q(x - y) = 2q(x) + 2q(y) \quad ,$$

para todo x,y en M.

La relación 1.1 se denomina "ley del paralelógramo".

A cada aplicación $q : M \to N$ semi-cuadrática se asociará la aplicación simétrica $\phi : M \times M \to N$ definida por

$$\phi(x,y) = q(x + y) - q(x) - q(y) \ , \quad \text{para todo } x,y \text{ en } M .$$

Observaciones: La aplicación asociada ϕ verifica:

(i) $\quad 2\phi(x,y) = q(x + y) - q(x - y)$, todo x,y en M

(ii) $\quad \phi(x,y) = q(x) + q(y) - q(x - y)$, todo x,y en M .

Para (i) considerar:

$$\phi(x,y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$$

$$2\phi(x,y) = 2q(x + y) - (2q(x) + 2q(y)) ,$$

de donde resulta (i).

Para (ii) considerar (i) y la definición de ϕ .

Ejemplo 1.2. Si $q : M \to N$ es cuadrática entonces q es semi-cuadrática. Considerar:

$$\phi(x,y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$$

y $$\phi(x,-y) = q(x - y) - q(x) - q(y)$$

de donde

$$0 = q(x + y) + q(x - y) - 2q(x) - 2q(y)$$

por ser ϕ bilineal.

De este ejemplo se deduce que si $Q(A,M,N)$ denota el A-módulo de las aplicaciones cuadráticas y $Q_1(A,M,N)$ es el A-módulo de las aplicaciones semi-cuadráticas de M en N , entonces $Q(A,M,N)$ es un submódulo de $Q_1(A,M,N)$.

Ejemplo 1.3. La aplicación $q : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$, donde $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ está considerado como un $\mathbb{Z}$-módulo, definida por $q(x,y) = (1,1)$ para todo x,y en $\mathbb{F}_2$, es semi-cuadrática pero no cuadrática.

Ejemplo 1.4. Sean A anillo conmutativo con unidad tal que existe α_o en A con $2\alpha_o = 0$, M un A-módulo e $y_o \in M$, $y_o \neq 0$, tal que $2y_o = 0$. Entonces

$$q : M \to M$$
$$x \to \alpha_o x + y_o$$

es semi-cuadrática y no cuadrática. Además su aplicación asociada está dada por $\phi(x,y) = y_o$ para todo x,y en M .

Por ejemplo como A y M se puede escoger $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ y $M = M_2\left(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\right)$. $\left(\alpha_o = 3 \text{ y } y_o = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$.

Ejemplo 1.5. Consideremos el anillo conmutativo con unidad

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Big/ a,b \in \mathbb{R} \right\} .$$

Para el A-módulo A , la aplicación

$$q : A \to A \ , \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ -b^2 & a^2 \end{pmatrix}$$

es semi-cuadrática y no cuadrática.

Ejemplo 1.6. Sea A anillo de característica $\neq 2$, tal que existe $\alpha \in A$, $\alpha \neq 0$, $2\alpha = 0$ y $\alpha^2 + \alpha^3 \neq 0$. Sea M un álgebra con unidad e .

La aplicación $q : M \to M$ definida por $q(x) = x^2 + \alpha x$ para todo x en M , es semicuadrática y no cuadrática; en efecto para $\lambda = \alpha$ y $x = e$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
q(\alpha e) &= (\alpha e)^2 + \alpha(\alpha e) \\
&= (\alpha e)(\alpha e) + (\alpha\alpha)e \\
&= \alpha(e\alpha e) + \alpha^2 e \\
&= \alpha(\alpha e e) + \alpha^2 e = \alpha^2 e + \alpha^2 e = 0 .
\end{aligned}
$$

Por otro lado:

$$
\begin{aligned}
\alpha^2 q(e) &= \alpha^2(e^2 + \alpha e) \\
&= \alpha^2(e + \alpha e) = \alpha^2 e + \alpha^3 e = (\alpha^2 + \alpha^3)e \neq 0 .
\end{aligned}
$$

La aplicación asociada a q está dada por $\phi(x,y) = 2xy$ para todo x,y en M y resulta ser bilineal.

Ejemplo 1.7. Sean $A = \mathbb{Z}[i]$ anillo de enteros de Gauss y
$A' = \{a+3bi \,/\, a,b \in \mathbb{Z}\}$ sub-anillo de A.
Claramente A es un A'-módulo. Se define:

$$
\begin{aligned}
&q : A \to A \\
&(x,y) \to (2xy, x^2 - y^2) .
\end{aligned}
$$

Entonces q es A'-semi-cuadrática y no A'-cuadrática.

La aplicación asociada a q es

$$\phi((x,y),(u,v)) = 2(xv + uy, ux - vy)$$

para todo $((x,y),(u,v))$ en $A \times A$.

De los ejemplos anteriores se deduce que:

$$Q(A,M,N) \subsetneq Q_1(A,M,N) .$$

Proposición 1.8. Sea $q : M \to N$ semi-cuadrática, ϕ la aplicación asociada a q y supongamos que $h : N \to N$, $x \to 2x$ es inyectiva. Entonces:

(i) $q(0) = 0$

(ii) $q(2x) = 4q(x)$ para todo x en M

(iii) $q(y) = q(-y)$ para todo y en M

(iv) $q(nx) = n^2 q(x)$ para todo n en $\mathbb{Z}$ y x en M .

Demostración:

i) De $q(0 + 0) + q(0 - 0) = 2q(0) + 2q(0)$ resulta $2q(0) = 4q(0)$, de donde $2q(0) = 0$ y como $h : N \to N$, $x \to 2x$ es inyectiva se tiene que

$q(0) = 0$

ii) De $q(x + x) + q(x - x) = 2q(x) + 2q(x)$ resulta $q(2x) = 4q(x)$ para todo x en M .

iii) En la ley del paralelógramo haciendo $x = -y$ se tiene:

$$q(y + -y) + q(y + y) = 2q(y) + 2q(-y)$$

$$\therefore \quad q(2y) = 2q(y) + 2q(-y)$$

$$4q(y) = 2q(y) + 2q(-y)$$

$$2q(y) = 2q(-y)$$

y así $q(y) = q(-y)$ para todo y en M .

iv) Sea $n \in \mathbb{N}$; por inducción resulta $q(nx) = n^2 q(x)$ para todo x en M .

Si $n \in \mathbb{Z}^-$ se tiene

$$q(nx) = q((-n)(-x)) = (-n)^2 q(-x) = n^2 q(x)$$

y como ya se probó que $q(0) = 0$ entonces $q(nx) = n^2 q(x)$ para todo n en $\mathbb{Z}$ y x en M .

Teorema 1.9. Sean M y N A-módulos, $q : M \to N$ aplicación semi-cuadrática, ϕ la aplicación asociada a q y supongamos que $h : N \to N$, $x \to 2x$ es inyectiva. Entonces:

(i) $\phi(x,x) = 2q(x)$ para todo x en M

(ii) ϕ es bi-aditiva.

Demostración:

(i) Considerando la relación $2\phi(x,y) = q(x + y) - q(x - y)$ para todo x,y en M y haciendo $x = y$ resulta

$$2\phi(x,x) = q(2x) - q(0)$$

$$2\phi(x,x) = 4q(x)$$

$\therefore$ $\phi(x,x) = 2q(x)$, para todo x en M .

(ii) Sean x,y,z en M . Entonces

$$4(\phi(x,z) + \phi(y,z)) = 2q(x + z) - 2q(x - z) + 2q(y + z) - 2q(y - z)$$

Pero

$$2q(x + z) + 2q(y + z) = q(x + y + 2z) + q(x - y)$$

y $\quad 2q(x - z) + 2q(y - z) = q(x + y - 2z) + q(x - y)$

reemplazando ambas expresiones se tiene:

$$\begin{aligned} 4(\phi(x,z) + \phi(y,z)) &= q(x + y + 2z) - q(x + y - 2z) \\ &= 2\phi(x + y, 2z) \end{aligned}$$

$\therefore \quad 2(\phi(x,z) + \phi(y,z)) = \phi(x + y, 2z)$

Si $\quad y = 0 \quad$ resulta $\quad 2\phi(x,z) = \phi(x,2z)$

$\therefore \quad 2(\phi(x,z) + \phi(y,z)) = 2\phi(x + y, z)$

de donde

$$\phi(x,z) + \phi(y,z) = \phi(x + y, z) \quad \text{para todo} \quad x,y,z \quad \text{en} \quad M .$$

Notas: (a) Al ser ϕ bi-aditiva (bajo las hipótesis del Teorema) se tiene que:

$$\phi(nx,y) = n\phi(x,y) = \phi(x,ny) \text{ , para todo } n \text{ en } \mathbb{Z} \text{ y } x,y \text{ en } M$$

es decir ϕ es $\mathbb{Z}$-bilineal.

(b) También bajo el supuesto de la inyectividad de la homotecia de razón 2 y por (a) se deduce que toda aplicación $q : M \to N$ semi-cuadrática es $\mathbb{Z}$- cuadrática.

Corolario: Sean $q : M \to N$ semi-cuadrática, ϕ la aplicación asociada y supongamos que $\underset{x \to 2x}{h : N \to N}$ es inyectiva. Si $\phi(\lambda x,y) = \lambda\phi(x,y)$ todo

λ en A , todo x,y en M , entonces q es cuadrática y ϕ es su aplicación bilineal asociada.

Demostración.

$$2q(\lambda x) = \phi(\lambda x,\lambda x) = \lambda^2\phi(x,x) = 2\lambda^2 q(x) ,$$

de donde $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$, para todo λ en A y x en M .

$\therefore$ q es cuadrática.

Nota: Es claro que una condición necesaria para que la homotecia de razón 2 en N sea inyectiva es que N sea libre y 2 sea regular en A .

Proposición 1.10. Sean M y N dos $\mathbb{F}_2$-espacios vectoriales. Entonces toda aplicación $q : M \to N$ es semi-cuadrática.

Demostración: Si $x \in M$, se tiene que $x + x = 0$, de donde $x = -x$. Así para todo x,y en M ,

$$q(x + y) + q(x - y) = q(x + y) + q(x + y) = 0 .$$

Por otro lado $2q(x) + 2q(y) = 0$. Luego q es semi-cuadrática.

Más generalmente:

Proposición 1.11. Sean M y N A-módulos, A un anillo de característica 2. Entonces toda aplicación $q : M \to N$ es semi-cuadrática.

Demostración: Para todo x en M se tiene $x = -x$ y por lo tanto

$$q(x + y) + q(x - y) = 0 = 2q(x) + 2q(y)$$

para todo x,y en M .

Proposición 1.12. Sean V y V' $\mathbb{F}_p$-espacios vectoriales, p primo, $p \neq 2$. Entonces toda aplicación semi-cuadrática $q : V \to V'$ es cuadrática.

Demostración: Claramente $h : V' \to V'$, $x \to 2x$ es inyectiva de donde por Teorema 1.9 la aplicación ϕ asociada a q resulta ser bi-aditiva y por lo tanto $\mathbb{F}_p$-bilineal. Así, por Corolario, q es cuadrática.

Proposición 1.13. Sean M y N $\mathbb{Z}$-módulos y $h : N \to N$, $x \to 2x$ inyectiva. Entonces toda aplicación semi-cuadrática $q : M \to N$ es cuadrática.

Demostración: Por Teorema 1.9, ϕ es bi-aditiva y por lo tanto $\mathbb{Z}$-bilineal. Aplicando Corolario resulta que q es $\mathbb{Z}$-cuadrática.

Corolario: Si $h : N \to N$, $x \to 2x$ es inyectiva, entonces

$$Q(\mathbb{Z},M,N) = Q_1(\mathbb{Z},M,N) .$$

Proposición 1.14. Sea S una parte multiplicativa de $\mathbb{Z}$ y M,N dos $S^{-1}\mathbb{Z}$-módulos. Si $q : M \to N$ es semi-cuadrática y $h : N \to N$, $x \to 2x$ es inyectiva entonces q es cuadrática.

Demostración: Sean a en $\mathbb{Z}$, s en S y x,y en M.

$$\phi\left(\frac{a}{s}\, x,y\right) = \phi\left(a\cdot\frac{1}{s}\, x,y\right) = a\phi\left(\frac{1}{s}\, x,y\right)$$

pues ϕ es $\mathbb{Z}$-bilineal. Por otro lado

$$s\phi\left(\frac{1}{s}\,x,y\right) = \phi(x,y) \ ,$$

de donde

$$\phi\left(\frac{1}{s}\,x,y\right) = \frac{1}{s}\phi(x,y)$$

Finalmente

$$a\phi\left(\frac{1}{s}\,x,y\right) = a\cdot\frac{1}{s}\,\phi(x,y) = \frac{a}{s}\phi(x,y) \ .$$

Así ϕ es $S^{-1}\mathbb{Z}$-bilineal y luego por Corolario resulta q cuadrática.

Corolario: Aplicando proposición anterior a $\mathbb{Q} = S^{-1}\mathbb{Z}$ se tiene:

$$Q(\mathbb{Q},M,N) = Q_1(\mathbb{Q},M,N)$$

Proposición 1.15. Sean V y V' $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y $q : V \to V'$ una aplicación semi-cuadrática contínua. Entonces q es cuadrática.

Demostración: Es suficiente probar que la aplicación $\phi : V \times V \to V'$ asociada a q verifica

$$\phi(\lambda x,y) = \lambda\phi(x,y) \ , \quad \text{para todo } \lambda \text{ en } \mathbb{R} \text{ y } x,y \text{ en } V \ .$$

Ahora, si $\lambda \in \mathbb{R}$, λ es el límite de una sucesión $(\lambda\ )$ $n \in \mathbb{N}$ de números racionales; sea $\lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda_n$. Como ϕ es contínua

$$\lim_{n\to\infty} (\phi(\lambda x,y) - \phi(\lambda_n x,y))$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\phi(\lambda - \lambda_n)x,y))$$

$$= \phi(0,y) = 0$$

de donde

$$\phi(\lambda x,y) = \lambda\phi(x,y) \text{ , para todo } \lambda \text{ en } \mathbb{R} \text{ y } x,y \text{ en } V .$$

Nota: La existencia de aplicaciones semi-cuadráticas no continuas sobre $\mathbb{R}$ será analizada más adelante.

En resumen hemos visto:

1) Si característica de A es 2 entonces toda aplicación $q : M \to N$ es semi-cuadrática.

2) Si M y N son $\mathbb{F}_p$-espacios vectoriales, p primo, $p \neq 2$, y $q : M \to N$ es semi-cuadrática, entonces q es cuadrática.

3) Si M y N son $\mathbb{Z}$-módulos y $q : M \to N$ semi-cuadráticas entonces q es cuadrática.

4) Si M y N son $S^{-1}\mathbb{Z}$-módulos, S parte multiplicativa de $\mathbb{Z}$ y $q : M \to N$ semi-cuadrática, entonces q es cuadrática.

5) Si M y N son $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales y $q : M \to N$ semi-cuadrática entonces q es cuadrática.

6) Si V y V' son $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y $q : V \to V'$ semi-cuadrática continua entonces q es cuadrática.

Nota: (3) y (4) requieren que $\begin{array}{l} h : N \to N \\ \quad x \to 2x \end{array}$ sea inyectiva.

Proposición 1.16. Sean K cuerpo de característica distinta de 2, V y V' espacios vectoriales sobre K, $\dim V \geq 2$ y $q : V \to V'$ aplicación semi-cuadrática. Son equivalentes:

(i) q es cuadrática

(ii) Si W sub-espacio de V, $\dim W = 2$, $q_{|W} : W \to V'$ es cuadrática.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii).

Si $q : V \to V'$ es cuadrática, la restricción de q a cualquier sub-espacio de V es cuadrática, en particular para los sub-espacios de dim 2.

(ii) $\Rightarrow$ (i).

Sean x,y en V, $x \neq 0$, $y \neq 0$ y consideremos $W = \langle x,y \rangle$. Claramente W es un subespacio de dimensión 2 y por hipótesis

$q_{|W} : W \to V'$ es cuadrática.

Sea a en K. Como q es semi-cuadrática:

$$\begin{aligned}
2\phi(ax,y) &= q(ax + y) - q(ax - y) \\
&= q_{|W}(ax + y) - q_{|W}(ax - y) \\
&= \phi_{|W}(ax,y) + q_{|W}(ax) + q_{|W}(y) - \phi_{|W}(ax,-y) - q_{|W}(ax) - \\
&\qquad - q_{|W}(-y) \\
&= a\phi_{|W}(x,y) + a^2 q_{|W}(x) + q_{|W}(y) + a\phi_{|W}(x,y) - a^2 q_{|W}(x) - \\
&\qquad - q_{|W}(y) \\
&= 2a\phi_{|W}(x,y) ,
\end{aligned}$$

de donde

$$2a\phi_{|W}(x,y) = 2\phi(ax,y)$$

Luego $a\phi_{|W}(x,y) = \phi(ax,y)$.

Así $\phi(ax,y) = a\phi_{|W}(x,y) = a\phi(x,y)$ para todo a en K y esto es verdadero para cada x,y en V . Por lo tanto ϕ es bilineal y así q es cuadrática.

A continuación veremos que es posible definir espacios semi-hiperbólicos y examinar algunas de sus propiedades; necesitaremos previamente la noción de suma ortogonal de módulos semi-cuadráticos.

Usaremos la notación $(M;N;q)$ para denotar los A-módulos M y N provistos de una aplicación $q : M \to N$ semi-cuadrática, y a $(M;N;q)$ lo llamaremos módulo semi-cuadrático.

Definición: Sean (M,N,q) y (M',N,q') módulos semi-cuadráticos. Llamaremos suma ortogonal de ambos módulos al módulo semi-cuadrático $(M \oplus M', N; q \perp q')$, donde $q \perp q' : M \oplus M' \to N$ está definida por

$$(q \perp q')(x,y) = q(x) + q'(y)$$

para todo x en M , y en M' .

Basta probar que $q \perp q'$ es semi-cuadrática; en efecto, para x,x' en M , y,y' en M' se tiene

$$(q \perp q')(x + x',y + y') + (q \perp q')(x - x', y - y')$$

$$= q(x + x') + q'(y + y') + q(x - x') + q'(y - y')$$

$= 2q(x) + 2q(x') + 2q'(y) + 2q'(y')$

$= 2(q \perp q')(x,y) + 2(q \perp q')(x',y')$.

Además la aplicación $\phi_{q\perp q'}$ asociada a $q \perp q'$ está dada por:

$\phi_{q\perp q'} = \phi_q \perp \phi_{q'}$,

donde ϕ_q y $\phi_{q'}$ son las aplicaciones asociadas a q y q' respectiva mente.

Sean M y N dos A-módulos y consideremos el conjunto:

$S(M,N) = \{f \,/\, f : M \to N \text{ aditiva}\} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N)$.

Se define $\begin{array}{l} q : M \oplus S(M,N) \to N \\ \qquad (x,f) \to f(x) \end{array}$ la cual resulta claramente ser una aplicación semi-cuadrática.

El módulo semi-cuadrático $(M \oplus S(M,N),N;q)$ se llama espacio semi-hiperbólico definido por M y N . Se anota por $H(M,N)$.

Sea $q : M \to N$ aplicación semi-cuadrática con ϕ bi-aditiva. Se dice que q es no degenerada si la aplicación aditiva:

$\begin{array}{l} d\phi : M \to S(M,N) \\ \qquad x \to \phi(x,\cdot) \end{array}$ es inyectiva

En el caso de un espacio semi-hiperbólico $H(M,N)$, y como consecuencia de lo anterior, $q : M \oplus S(M,N) \to N$ es no degenerada si $\begin{array}{l} C_M : M \to S(S(M,N),N) \\ \qquad x \to \hat{x} \end{array}$ es inyectiva, donde $\hat{x}(f) = f(x)$ para todo f en $S(M,N)$.

De aquí surge la siguiente definición:

Definición: M es un módulo N-semireflexivo sí y sólo si C_M es inyectiva.

Ejemplo 1.17. Si $A' = \mathbb{Z}[i]$ es el anillo de los enteros de Gauss, $A = \{a + nbi / a,b \in \mathbb{Z}\}$ sub-anillo de A' (n fijo, $n > 1$) y consideramos A' como A-módulo, entonces $q : A' \to A'$ definida por

$$q(x,y) = (2xy, x^2 - n^2y^2)$$

para todo x,y en $\mathbb{Z}$ es A-semi-cuadrática no degenerada y su aplicación asociada está dada por

$$\phi((x,y),(x',y')) = 2(xy' + x'y, xx' - n^2yy')$$

para todo x,x',y,y' en $\mathbb{Z}$ y es bi-aditiva.

Ejemplo 1.18. Sea M un A-módulo simple y N un A-módulo. Entonces M es un módulo N-semireflexivo pues

$$\begin{aligned} C_M : M &\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N),N) \quad \text{es inyectiva.} \\ x &\to \hat{x} \end{aligned}$$

Por ejemplo, $\mathbb{F}_p$, p primo, es un $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$-semireflexivo.

Proposición 1.19. Sea N un A-módulo y M un A-módulo N-semireflexivo. Entonces $S(M,N)$ es un módulo N-semireflexivo.

Demostración: Sabemos que $\begin{aligned} C_M : M &\to S(S(M,N),N) \\ x &\to \hat{x} \end{aligned}$ es inyectiva y probaremos que

$$C_{S(M,N)} : S(M,N) \to S(S(S(M,N),N),N) \quad \text{es inyectiva.}$$
$$g \to \hat{g}$$

Sea $g \in \operatorname{Ker} C_{S(M,N)}$; luego $g \in S(M,N)$ y $C_{S(M,N)}(g) = \bar{0}$.

Como $M \xrightarrow{C_M} S(S(M,N),N) \xrightarrow{C_{S(M,N)}(g)} N$ resulta que

$C_{S(M,N)}(g) \circ C_M = \bar{0}$, es decir

$$\left(C_{S(M,N)}(g) \circ C_M\right)(x) = 0 \quad \text{para todo } x \text{ en } M .$$

Así para todo x en M

$$C_{S(M,N)}(g)(\hat{x}) = 0$$

$$\therefore \quad \hat{g}(\hat{x}) = 0$$

$$\therefore \quad \hat{x}(g) = 0$$

$$\therefore \quad g(x) = 0$$

Luego $g = \bar{0}$.

Así $\operatorname{Ker} C_{S(M,N)} = \{\bar{0}\}$, de donde $C_{S(M,N)}$ es inyectiva y por lo tanto $S(M,N)$ es un módulo N-semireflexivo.

<u>Proposición 1.20</u>. Sean M_1 y M_2 módulos N-semireflexivos. Entonces $M_1 \oplus M_2$ es N-semireflexivo.

<u>Demostración</u>: Consideremos las aplicaciones:

$$C_{M_1} \oplus C_{M_2} : M_1 \oplus M_2 \to S(S(M_1,N),N) \oplus S(S(M_2,N),N)$$

$$\alpha : S(S(M_1,N),N) \oplus S(S(M_2,N),N) \to S(S(M_1,N) \oplus S(M_2,N),N)$$

$$\beta : S(S(M_1,N) \oplus S(M_2,N),N) \to S(S(M_1 \oplus M_2,N),N)$$

donde

$$\alpha : (f,g) \to ((\phi,\rho) \to f(\phi) + g(\rho))$$

y

$$\beta : h \to h \circ \psi$$

siendo ψ el isomorfismo canónico $S(M_1 \oplus M_2,N) \to S(M_1,N) \oplus S(M_2,N)$. Se tiene:

(i) $C_{M_1} \oplus C_{M_2}$ es inyectiva, pues C_{M_1} y C_{M_2} lo son .

(ii) α es inyectiva pues: Sea $(\hat{x},\hat{y}) \in \operatorname{Ker} \alpha$; luego $\alpha(\hat{x},\hat{y}) = 0$ de donde $\alpha(\hat{x},\hat{y})(\phi,\rho) = 0$ para todo ϕ en $S(M_1,N)$ y todo ρ en $S(M_2,N)$.

$$\therefore\ \hat{x}(\phi) + \hat{y}(\rho) = 0$$

$$\therefore\ \hat{x}(\phi) = -\hat{y}(\rho) \qquad \text{para todo } \phi \text{ , para todo } \rho \text{ .}$$

En particular para $\rho = 0$

$$\hat{x}(\phi) = 0 \quad \text{todo } \phi \text{ en } S(M_1,N)$$

$$\therefore\ \hat{x} = 0 \text{ .}$$

Similarmente para $\phi = 0$

$$\hat{y}(\rho) = 0 \quad \text{todo } \rho \text{ en } S(M_2,N)$$

$$\therefore\ \hat{y} = 0$$

$\therefore\ (\hat{x},\hat{y}) = (0,0)$ y así α es inyectiva.

(iii) β es claramente inyectiva. Por lo tanto

$$\beta \circ \alpha \circ (C_{M_1} \oplus C_{M_2}) : M_1 \oplus M_2 \to S(S(M_1 \oplus M_2,N),N)$$

es inyectiva.

Finalmente probaremos que

$$\beta \circ \alpha \circ (C_{M_1} \oplus C_{M_2}) = C_{M_1 \oplus M_2}$$

Para x en M_1 , y en M_2 se tiene

$$C_{M_1 \oplus M_2}(x,y) = \widehat{(x,y)} \quad \text{donde} \quad \widehat{(x,y)}(f) = f(x,y)$$

para todo f en $S(M_1 \oplus M_2,N)$.

Por otro lado

$$(\beta \circ \alpha \circ (C_{M_1} \oplus C_{M_2}))(x,y) = (\beta \circ \alpha)(\hat{x},\hat{y}) = \beta(\alpha(\hat{x},\hat{y}))$$

$$= \beta(\lambda) \quad \text{donde} \quad \lambda(\phi,\rho) = \hat{x}(\phi) + \hat{y}(\rho)$$

$$= \lambda \circ \psi$$

Sea f en $S(M_1 \oplus M_2,N)$

$$\begin{aligned}(\lambda \circ \psi)(f) = \lambda(f_{|M_1}, f_{|M_2}) &= \hat{x}(f_{|M_1}) + \hat{y}(f_{|M_2}) \\ &= f_{|M_1}(x) + f_{|M_2}(y) \\ &= f(x,0) + f(0,y) \\ &= f(x,y) .\end{aligned}$$

Luego $\beta \circ \alpha \circ (C_{M_1} \oplus C_{M_2}) = C_{M_1 \oplus M_2}$ y así $M_1 \oplus M_2$ es un módulo N-semireflexivo.

Proposición 1.21. Sea N un A-módulo y M un A-módulo N-semireflexivo tal que $M = M_1 \oplus M_2$. Entonces M_1 y M_2 son N-semireflexivos.

Demostración: Debemos probar que C_{M_1} y C_{M_2} son inyectivas. Para ello consideremos el diagrama de la proposición anterior:

$$M = M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{C_{M_1} \oplus C_{M_2}} S(S(M_1,N),N) \oplus S(S(M_2,N),N) \xrightarrow{\alpha}$$

$$\to S(S(M_1,N) \oplus S(M_2,N),N) \xrightarrow{\beta} S(S(M_1 \oplus M_2,N),N) .$$

Tenemos que

$$\beta \circ \alpha \circ (C_{M_1} \oplus C_{M_2}) = C_{M_1 \oplus M_2} = C_M$$

donde α,β inyectivas y C_M inyectiva por hipótesis. Por lo tanto $C_{M_1} \oplus C_{M_2}$ es inyectiva y así C_{M_1} y C_{M_2} son inyectivas.

Proposición 1.22. Sea $q : M \to N$ aplicación semi-cuadrática no degenerada. Entonces M es un módulo N-semireflexivo.

Demostración: Como q es no degenerada tenemos que la aplicación aditiva

$$\begin{aligned} d_\rho : M &\to S(M,N) \\ x &\to \rho(x,\cdot) \end{aligned}$$

es inyectiva. Considerando

$$\begin{aligned} {}^t d_\rho : S(S(M,N),N) &\to S(M,N) \\ g &\to g \circ d_\rho \end{aligned}$$

se tiene la situación

$$M \xrightarrow{C_M} S(S(M,N),N) \xrightarrow{{}^t d_\rho} S(M,N)$$

donde debemos probar que C_M es inyectiva. Para todo x en M se tiene:

$$\left({}^t d_\rho \circ C_M\right)(x) = {}^t d_\rho(\hat{x}) = \hat{x} \circ d_\rho \quad .$$

Además para todo y en M :

$$\begin{aligned}(\hat{x} \circ d_\rho)(y) &= \hat{x}(d_\rho(y)) \\ &= (d_\rho(y))(x) \\ &= \rho(y,x) = \rho(x,y) \\ &= (d_\rho(x))(y) \quad .\end{aligned}$$

Luego $\hat{x} \circ d_\rho = d_\rho(x)$ y así ${}^t d_\rho \circ C_M = d_\rho$.

Como d_ρ es inyectiva resulta C_M también inyectiva.

Proposición 1.23. Sean M_1 y M_2 A-módulos. Entonces:

$$H(M_1 \oplus M_2,N) \simeq H(M_1,N) \perp H(M_2,N) \quad .$$

Demostración: Tenemos que:

$$H(M_1,N) = (M_1 \oplus S(M_1,N),N;q_1)$$

con $q_1(x,f) = f(x)$ para todo x en M_1 y f en $S(M_1,N)$.

$$H(M_2,N) = (M_2 \oplus S(M_2,N),N;q_2)$$

con $q_2(y,g) = g(y)$ para todo y en M_2 y g en $S(M_2,N)$.

$$\therefore \quad H(M_1,N) \perp H(M_2,N) = (M_1 \oplus S(M_1,N) \oplus M_2 \oplus S(M_2,N),N;q_1 \perp q_2)$$

Por otro lado:

$$H(M_1 \oplus M_2, N) = (M_1 \oplus M_2 \oplus S(M_1 \oplus M_2, N), N; q) \ .$$

Sabemos que existe un isomorfismo de A-módulos

$$\rho : M_1 \oplus M_2 \oplus S(M_1 \oplus M_2, N) \to M_1 \oplus S(M_1, N) \oplus M_2 \oplus S(M_2, N)$$

de donde debe probarse que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M_1 \oplus M_2 \oplus S(M_1 \oplus M_2, N) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\rho"'] & N \\
M_1 \oplus S(M_1, N) \oplus M_2 \oplus S(M_2, N) \arrow[ur, "q_1 \perp q_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Para todo (x_1, x_2) en $M_1 \oplus M_2$, g en $S(M_1 \oplus M_2, N)$, se tiene

$$[(q_1 \perp q_2) \circ \rho]\big((x_1, x_2), g\big) = (q_1 \perp q_2)\big((x_1, g_{|M_1}), (x_2, g_{|M_2})\big)$$

$$= q_1(x_1, g_{|M_1}) + q_2(x_2, g_{|M_2})$$

y así se obtiene

$$g_{|M_1}(x_1) + g_{|M_2}(x_2)$$

$$= g(x_1, 0) + g(0, x_2) = g(x_1, x_2) \ .$$

Además

$$q\big((x_1, x_2), g\big) = g(x_1, x_2) \ .$$

Luego $(q_1 \perp q_2) \circ \rho = q$ y así

$$H(M_1 \oplus M_2, N) \simeq H(M_1, N) \perp H(M_2, N) .$$

C A P I T U L O   II

APLICACIONES CUASI-CUADRATICAS

Definición 2.1. Sean M y N A-módulos. Una aplicación $q : M \to N$ se llama cuasi-cuadrática si se verifican

(i) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$, para todo λ en A , todo x en M

(ii) $q(x + y) + q(x - y) = 2q(x) + 2q(y)$, para todo x,y en M .

La aplicación simétrica $\phi : M \times M \to N$ definida por

$$\phi(x,y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$$

para todo x,y en M , se llama la aplicación asociada a q .

Si denotamos por $Q_o(A,M,N)$ al conjunto de las aplicaciones cuasi-cuadráticas de M en N , resulta que $Q_o(A,M,N)$ es un A-módulo y además $Q(A,M,N) \subseteq Q_o(A,M,N) \subseteq Q_1(A,M,N)$, inclusiones como sub-módulos.

Ejemplo 2.2. Es claro que toda aplicación cuadrática es cuasi-cuadrática.

Ejemplo 2.3. Consideremos la extensión trascendente $\mathbb{Q}(\pi)$ de $\mathbb{Q}$. Para esta extensión existe una derivación no nula $D : \mathbb{Q}(\pi) \to \mathbb{Q}(\pi)$; definamos

$$q : \mathbb{Q}(\pi)\left(\sqrt{2}\right) \to \mathbb{Q}(\pi)$$

$$a + b\sqrt{2} \to bD(a) - aD(b) \qquad \text{todo } a,b \text{ en } \mathbb{Q}(\pi)$$

q es cuasi-cuadrática, pero la aplicación asociada

$$\phi(a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2}) = bD(c) + dD(a) - cD(b) - aD(d)$$

no es bilineal, es decir q no es cuadrática.

El ejemplo anterior muestra que

$$Q(A,M,N) \subsetneq Q_o(A,M,N) .$$

Ejemplo 2.4. Para $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;/\; a,b \in \mathbb{R} \right\}$ considerado como un A-módulo, la aplicación

$$q : A \to A , \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ -b^2 & a^2 \end{pmatrix}$$

vista en el Capítulo anterior resulta ser semi-cuadrática pero no A-cuasi-cuadrática. De aquí resulta que

$$Q_o(A,M,N) \subsetneq Q_1(A,M,N) .$$

Observación: Si $q : M \to N$ satisface

(i) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$, para todo λ en A , x en M

(ii) ϕ es $\mathbb{Z}$-bilineal

entonces q es cuasi-cuadrática, pues de (i) y (ii) se desprende claramente la Ley del Paralelógramo.

El recíproco no es verdadero y para que se cumpla es necesario agregar que la homotecia de razón 2 en N sea inyectiva; esta condición es indispensable como se puede apreciar en el siguiente ejemplo:

Sea $q : \mathbb{F}_2[x] \to \mathbb{F}_2[x]$ definida por $q(0) = 0$ y $q(p(x)) = 1$ para todo $p(x)$ en $\mathbb{F}_2[x]$, $p(x) \neq 0$. Es claro que $h : \mathbb{F}_2[x] \to \mathbb{F}_2[x]$, la homotecia de razón 2, no es inyectiva y q es cuasi-cuadrática; sin embargo ϕ , la aplicación asociada a q , no es $\mathbb{Z}$-bilineal. Para ello basta escoger los polinomios $x + 1$ y x^2 , y se tiene:

$$\begin{aligned}\phi(x + 1,x^2) &= q(x + 1 + x^2) - q(x + 1) - q(x^2)\\ &= 1\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\phi(x,x^2) + \phi(1,x^2) &= q(x + x^2) - q(x) - q(x^2) + q(1 + x^2)\\ &\quad - q(1) - q(x^2)\\ &= 0\end{aligned}$$

Así, si q es cuasi-cuadrática y se agrega la condición que la homotecia de razón 2 en N sea inyectiva, resulta ϕ bi-aditiva y por lo tanto $\mathbb{Z}$-bilineal. (Pués q es semi-cuadrática con la homotecia inyectiva).

Proposición 2.5. Sea $q : M \to N$ cuasi-cuadrática. Entonces

1) $q(0) = 0$

2) $\phi(x,x) = 2q(x)$ para todo x en M

3) $\phi(ax,x) = a\phi(x,x)$ para todo a en A y x en M

4) $\phi(ax,ay) = a^2\phi(x,y)$ para todo a en A y x,y en M .

Demostración: (1) es evidente, y para (2) se tiene:

$$\begin{aligned}\phi(x,x) &= q(2x) - q(x) - q(x)\\ &= 4q(x) - 2q(x)\\ &= 2q(x) \quad \text{para todo } x \text{ en } M .\end{aligned}$$

(3) resulta de:

$$\begin{aligned}\phi(ax,x) &= q(ax + x) - q(ax) - q(x)\\ &= \left((a+1)^2 - a^2 - 1\right)q(x)\\ &= 2aq(x)\\ &= a\phi(x,x) \quad \text{por } (2) .\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}\phi(ax,ay) &= q(ax + ay) - q(ax) - q(ay)\\ &= a^2\left(q(x + y) - q(x) - q(y)\right)\\ &= a^2\phi(x,y)\end{aligned}$$

para todo a en A y x,y en M , de donde resulta (4).

Nota: Recordemos que si q es una aplicación cuasi-cuadrática, la hipótesis de la inyectividad de la homotecia de razón 2 en N implica la biaditividad de la aplicación ϕ asociada a q .

Proposición 2.6. Si V y V' son $\mathbb{F}_p$-espacios vectoriales, p primo, $p \neq 2$, toda aplicación cuasi-cuadrática es cuadrática.

Demostración: La homotecia de razón 2 en V' es inyectiva y por lo tanto ϕ es bi-aditiva y así $\mathbb{F}_p$-bilineal, de donde q es cuadrática.

Considerando el resultado del Capítulo anterior se tiene que:

$$Q_1(\mathbb{F}_p, V, V') = Q_o(\mathbb{F}_p, V, V') = Q(\mathbb{F}_p, V, V') \ .$$

Proposición 2.7. Sean M y N $\mathbb{Z}$-módulos y la homotecia de razón 2 en N inyectiva. Entonces toda aplicación cuasi-cuadrática $q : M \to N$ es cuadrática.

Demostración: Es claro, pues ϕ es bi-aditiva y por lo tanto $\mathbb{Z}$-bilineal.

Así se tiene:

$$Q_1(\mathbb{Z}, M, N) = Q_o(\mathbb{Z}, M, N) = Q(\mathbb{Z}, M, N) \ .$$

Proposición 2.8. Sea S una parte multiplicativa de $\mathbb{Z}$, M y N dos $S^{-1}\mathbb{Z}$-módulos y supongamos que la homotecia de razón 2 en N es inyectiva. Entonces toda aplicación cuasi-cuadrática es cuadrática.

Demostración: ϕ es bi-aditiva y por lo tanto $\mathbb{Z}$-bilineal. De igual manera que en el Capítulo anterior se puede probar que ϕ es $S^{-1}\mathbb{Z}$-bilineal, de donde q es cuadrática. Así

$$Q_1(S^{-1}\mathbb{Z}, M, N) = Q_o(S^{-1}\mathbb{Z}, M, N) = Q(S^{-1}\mathbb{Z}, M, N)$$

En particular

$$Q_1(\mathbb{Q},M,N) = Q_o(\mathbb{Q},M,N) = Q(\mathbb{Q},M,N) ,$$

donde M y N son $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales.

<u>Nota</u>: En el caso de aplicaciones cuasi-cuadráticas al querer definir espacio cuasi-hiperbólico, la aplicación respectiva resulta ser cuadrática.

C A P I T U L O III

CUOCIENTES

Del hecho que $Q(A,M,N)$ es un sub-módulo de $Q_o(A,M,N)$ y considerando que existen aplicaciones cuasi-cuadráticas no cuadráticas, es interesante estudiar el cuociente

$$Q_o(A,M,N) \big/ Q(A,M,N)$$

Además, y como producto de este análisis, intentaremos establecer algunas situaciones en las cuales

$$Q(A,M,N) \subsetneqq Q_o(A,M,N) .$$

Consideraremos el caso en que la homotecia de razón 2 en N es inyectiva y bajo este supuesto decir que q sea cuasi-cuadrática es equivalente a:

$$q(\lambda x) = \lambda^2 q(x) \ , \quad \text{para todo } \lambda \text{ en } A \text{ , todo } x \text{ en } M$$

y ϕ biaditiva ($\mathbb{Z}$-bilineal).

Así para que una aplicación cuasi-cuadrática sea cuadrática basta que $\phi(\lambda x,y) = \lambda\phi(x,y)$, para todo λ en A , todo x,y en M .

Consideremos una aplicación $q : M \to N$ cuasi-cuadrática; definamos

$$\begin{aligned} \psi_q : A \times M \times M &\to N \\ (\lambda,x,y) &\to \phi(\lambda x,y) - \lambda\phi(x,y) \end{aligned}$$

ψ_q es una aplicación que mide en cuánto q no es cuadrática y es claro que

$$\psi_q = 0 \iff q \text{ es cuadrática.}$$

<u>Proposición 3.1</u>. Sea $q : M \to N$ cuasi-cuadrática y ψ_q la aplicación definida anteriormente. Entonces

a) ψ_q es antisimétrica con respecto a la segunda y tercera variables

b) ψ_q es A-lineal en la segunda y tercera variables

c) ψ_q es una derivación en la primera variable.

<u>Demostración</u>: a) Probaremos que $\psi_q(\lambda,x,y) = -\psi_q(\lambda,y,x)$ para todo λ en A , todo x,y en M .

Como $\phi(\lambda x,x) = \lambda\phi(x,x)$ se tiene:

$$\phi(\lambda(x + y),x + y) = \lambda\phi(x + y,x + y)$$

y aplicando la bi-aditividad de ϕ :

$$\phi(\lambda x,x) + \phi(\lambda x,y) + \phi(\lambda y,x) + \phi(\lambda y,y) =$$

$$\phi\lambda(x,x) + \lambda\phi(x,y) + \lambda\phi(y,x) + \lambda\phi(y,y)$$

y así

$$\phi(\lambda x,y) + \phi(\lambda y,x) = \lambda\phi(x,y) + \lambda\phi(y,x) \qquad (*)$$

Finalmente:

$$\phi(\lambda x,y) - \lambda\phi(x,y) = -[\phi(\lambda y,x) - \lambda\phi(y,x)]$$

$$\therefore \quad \psi_q(\lambda,x,y) = -\psi_q(\lambda,y,x) \ .$$

b) ψ_q es A-lineal en la segunda variable. En la relación (*) reemplacemos λ por λx :

$$\phi(\lambda^2 x,\ y) + \phi(\lambda y,\lambda x) = \lambda\phi(\lambda x,y) + \lambda\phi(y,\lambda x)$$

$$\phi(\lambda^2 x,y) + \lambda^2\phi(y,x) = 2\lambda\phi(\lambda x,y) \ .$$

En esta última relación reemplacemos λ por $\lambda + \mu$. Se tiene:

$$\phi\left((\lambda + \mu)^2 x,y\right) + (\lambda + \mu)^2\phi(x,y) = 2(\lambda+\mu)\phi\left((\lambda + \mu)x,y\right)$$

y ocupando el hecho que ϕ es $\mathbb{Z}$-bilineal y cancelando se obtiene:

$$2\phi(\lambda\mu x,y) + 2\lambda\mu\phi(x,y) = 2\lambda\phi(\mu x,y) + 2\mu\phi(\lambda x,y)$$

y $\qquad \phi(\lambda\mu x,y) - \lambda\phi(\mu x,y) = \mu(\phi(\lambda x,y) - \lambda\phi(x,y))$

o sea $\qquad \psi_q(\lambda,\mu x,y) = \mu\psi_q(\lambda,x,y)$

para todo λ,μ en A , x,y en M .

Como ψ_q es antisimétrica, resulta también ser A-lineal en la tercera variable.

c) ψ_q es una derivación en la primera variable. Sean λ,μ en A y x,y en M ; luego:

$$\begin{aligned}
\psi_q(\lambda+\mu,x,y) &= \phi\big((\lambda+\mu)x,y\big) - (\lambda+\mu)\phi(x,y)\\
&= \phi(\lambda x,y) + \phi(\mu x,y) - \lambda\phi(x,y) - \mu\phi(x,y)\\
&= \psi_q(\lambda,x,y) + \psi_q(\mu,x,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_q(\lambda\mu,x,y) &= \phi(\lambda\mu x,y) - \lambda\mu\phi(x,y)\\
&= \phi(\lambda\mu x,y) - \lambda\phi(\mu x,y) + \lambda\phi(\mu x,y) - \lambda\mu\phi(x,y)\\
&= \psi_q(\lambda,\mu x,y) + \lambda\psi_q(\mu,x,y)\\
&= \mu\psi_q(\lambda,x,y) + \lambda\psi_q(\mu,x,y)\ .
\end{aligned}$$

Denotemos por $F(A,M,N)$ el conjunto formado por las aplicaciones de $A \times M \times M$ en N con las propiedades anteriores, es decir:

(i) Son aplicaciones A-lineales y antisimétricas en la segunda y tercera variables.

(ii) Son derivaciones en la primera variable.

<u>Ejemplo 3.2</u>. Un elemento de $F(A,M,N)$ donde $M = \mathbb{Q}(\pi)\big[\sqrt{2}\big]$ y $N = \mathbb{Q}(\pi)$ son $\mathbb{Q}(\pi)$-espacios vectoriales, está dado por

$$f : \mathbb{Q}(\pi) \times \mathbb{Q}(\pi)\big[\sqrt{2}\big] \times \mathbb{Q}(\pi)\big[\sqrt{2}\big] \to \mathbb{Q}(\pi)$$

con $f(\lambda, a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2}) = D(\lambda)\cdot(ad - bc)$ para todo λ,a,b,c,d en $\mathbb{Q}(\pi)$, con D una derivación de $\mathbb{Q}(\pi)$ en $\mathbb{Q}(\pi)$.

Es claro que $F(A,M,N)$ es un A-módulo y a cada $q : M \to N$ cuasi cuadrática hemos asociado una aplicación ψ_q de $F(A,M.N)$.

Analicemos las propiedades de esta asociación entre los A-módulos $Q_o(A,M,N)$ y $F(A,M,N)$.

Proposición 3.3. $\psi : Q_o(A,M,N) \to F(A,M,N)$ es A-lineal y $\operatorname{Ker}\psi = Q(A,M,N)$.

$$q \to \psi_q$$

Demostración: Probaremos que $\psi_{q+q'} = \psi_q + \psi_{q'}$ para todo q,q' en $Q_o(A,M,N)$.

Sean λ en A , x,y en M

$$\begin{aligned}\psi_{q+q'}(\lambda,x,y) &= \phi_{q+q'}(\lambda x,y) - \lambda\phi_{q+q'}(x,y)\\ &= \phi_q(\lambda x,y) + \phi_{q'}(\lambda x,y) - \lambda\phi_q(x,y) - \lambda\phi_{q'}(x,y)\\ &= \psi_q(\lambda,x,y) + \psi_{q'}(\lambda,x,y)\\ &= (\psi_q + \psi_{q'})(\lambda,x,y) .\end{aligned}$$

Además si $\alpha \in A$ se tiene:

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha q}(\lambda,x,y) &= \phi_{\alpha q}(\lambda x,y) - \lambda\phi_{\alpha q}(x,y)\\ &= \alpha\phi_q(\lambda x,y) - \lambda\alpha\phi_q(x,y)\\ &= \alpha\psi_q(\lambda,x,y) .\end{aligned}$$

Finalmente sea q en $\operatorname{Ker}\psi$; luego $\psi_q \equiv 0$, de donde

$\psi_q(\lambda,x,y) = 0$ para todo λ en A y x,y en M , o sea $\phi(\lambda x,y) - \lambda\phi(x,y) = 0$ para todo λ en A y x,y en M .

Así ϕ es A-bilineal y por lo tanto $q \in Q(A,M,N)$.

Corolario:

$$Q_o(A,M,N)\big/_{Q(A,M,N)} \simeq \psi(Q_o(A,M,N)) \subseteq F(A,M,N) .$$

Además si $F(A,M,N) = 0$ entonces $Q_o(A,M,N) = Q(A,M,N)$.
Resulta interesante examinar alguna condición bajo la cual

$$Q_o(A,M,N)\big/_{Q(A,M,N)} \simeq F(A,M,N) .$$

Proposición 3.4. Si M es un A-módulo libre entonces

$$\psi : Q_o(A,M,N) \to F(A,M,N)$$

es sobreyectiva.

Demostración: Sea f en $F(A,M,N)$; debemos encontrar $q \in Q_o(A,M,N)$ tal que $\psi_q \equiv f$.

Sea $(e_i)_{i\in I}$ base de M . Definamos $\delta : M \times M \to N$ por

$$\delta(x,y) = \sum_{i\in I} f(a_i,e_i,y) , \quad \text{donde } x = \sum_{i\in I} a_ie_i .$$

Para δ se tiene:

(i) Es aditiva en su primera variable. Sean x,x',y en M ;

$$x = \sum_{i\in I} a_ie_i \quad , \quad x' = \sum_{i\in I} a_i'e_i$$

Entonces:

$$\delta(x + x',y) = \sum_{i\in I} f(a_i + a_i',e_i,y)$$

$$= \sum_{i\in I} f(a_i,e_i,y) + \sum_{i\in I} f(a_i',e_i,y) \quad \text{pues } f \text{ es aditiva}$$

$$= \delta(x,y) + \delta(x',y) .$$

(ii) Es A-lineal en su segunda variable. Sean x,y,y' en M ,

$x = \sum_{i\in I} a_i e_i$; entonces

$$\delta(x,y + y') = \sum_{i\in I} f(a_i,e_i,y + y')$$

$$= \sum_{i\in I} f(a_i,e_i,y) + \sum_{i\in I} f(a_i,e_i,y') \quad \text{pues } f \text{ es aditiva en la tercera variable}$$

$$= \delta(x,y) + \delta(x,y') .$$

Además si $\lambda \in A$ se tiene:

$$\delta(x,\lambda y) = \sum_{i\in I} f(a_i,e_i,\lambda y)$$

$$= \sum_{i\in I} \lambda f(a_i,e_i,y) \quad \text{pues } f \text{ es A-lineal en la tercera variable}$$

$$= \lambda\delta(x,y) .$$

Consideremos ahora la aplicación:

$$q : M \to N$$
$$x \to \delta(x,x)$$

Entonces q es cuasi-cuadrática pues para x,y en M se tiene:

$$q(x + y) + q(x - y) = \delta(x + y, x + y) + \delta(x - y, x - y)$$

$$= 2\delta(x,x) + 2\delta(y,y)$$

$$= 2q(x) + 2q(y) .$$

Además si $\lambda \in A$,

$$q(\lambda x) = \delta(\lambda x, \lambda x)$$

$$\delta = \lambda\delta(\lambda x, x) \quad \text{pues } f \text{ es A-lineal en la segunda variable}$$

$$= \lambda \sum_{i\in I} f(\lambda a_i, e_i, x) \quad , \qquad x = \sum_{i\in I} a_i e_i$$

$$= \lambda[\lambda \sum_{i\in I} f(a_i, e_i, x) + \sum_{i\in I} a_i f(\lambda, e_i, x)]$$

$$= \lambda^2 \sum_{i\in I} f(a_i, e_i, x) + \lambda \sum_{i\in I} f(\lambda, a_i e_i, x)$$

$$= \lambda^2 \sum_{i\in I} f(a_i, e_i, x) + \lambda f\left(\lambda, \sum_{i\in I} a_i e_i, x\right)$$

$$= \lambda^2 \sum_{i\in I} f(a_i, e_i, x) + \lambda f(\lambda, x, x)$$. Pero f es antisimétrica

en la segunda y tercera variables, es decir $f(\lambda,x,x) = 0$

$$= \lambda^2\delta(x,x)$$

$$= \lambda^2 q(x)$$

$\therefore$ q es cuasi-cuadrática.

Finalmente resta verificar que $\psi_q \equiv f$. Sean λ en A , x,y en M , $x = \sum_{i\in I} a_i e_i$. Entonces:

$$\psi_q(\lambda,x,y) = \phi_q(\lambda x,y) - \lambda\phi_q(x,y) ,$$

donde ϕ_q es la aplicación asociada a q construída anteriormente.

Pero

$$\phi_q(x,y) = \delta(x,y) + \delta(y,x) .$$

Así

$$\psi_q(\lambda,x,y) = \delta(\lambda x,y) + \delta(y,\lambda x) - \lambda\delta(x,y) - \lambda\delta(y,x) .$$

Pero

$$\delta(y,\lambda x) = \lambda\delta(y,x) .$$

Luego

$$\begin{aligned}
\psi_q(\lambda,x,y) &= \delta(\lambda x,y) - \lambda\delta(x,y) \\
&= \sum_{i\in I} f(\lambda a_i,e_i,y) - \lambda \sum_{i\in I} f(a_i,e_i,y) \\
&= \sum_{i\in I} [f(\lambda a_i,e_i,y) - \lambda f(a_i,e_i,y)] \\
&= \sum_{i\in I} a_i f(\lambda,e_i,y) \\
&= f(\lambda,x,y) .
\end{aligned}$$

Por lo tanto ψ es sobreyectiva.

<u>Corolario</u>: Se ha demostrado que en el caso de M un A-módulo libre

$$Q_o(A,M,N)\big/Q(A,M,N) \simeq F(A,M,N)$$

Así si $F(A,M,N) \neq 0$ se tiene que

$$Q_o(A,M,N) \neq Q(A,M,N) .$$

Ejemplo 3.5. Sean A un dominio de integridad, M un A-módulo de torsión y N un A-módulo sin torsión. Entonces $F(A,M,N) = 0$.

Sean f en $F(A,M,N)$, λ en A y x,y en M . Como M de torsión existen a,b en A , $a \neq 0$, $b \neq 0$, tal que $ax = 0$ y $by = 0$. Luego $f(\lambda,ax,by) = 0$ y $abf(\lambda,x,y) = 0$.

Como $ab \neq 0$ y N sin torsión entonces $f(\lambda,x,y) = 0$ para todo λ en A y x,y en M . Por lo tanto $F(A,M,N) = 0$.

Así para A dominio de integridad, M con torsión y N sin torsión se tiene que:

$$Q_o(A,M,N) = Q(A,M,N) .$$

Como se ha visto anteriormente resulta de gran utilidad el conocimiento del A-módulo $F(A,M,N)$ para tener información acerca de las aplicaciones cuasi-cuadráticas no cuadráticas.

Al respecto es de gran interés el siguiente resultado, donde $\mathrm{Der}\, K$ representa el conjunto de las derivaciones en el cuerpo K y $I(K,V,V')$ representa el conjunto de las aplicaciones bilineales antisimétricas de $V \times V$ en V' , siendo V y V' espacios vectoriales sobre K . Es claro que $\mathrm{Der}\, K$ y $I(K,V,V')$ son ambos espacios vectoriales sobre K .

Teorema 3.6. Sean V y V' espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo K . Entonces:

$$\mathrm{Der}\, K \otimes_K I(K,V,V') \simeq F(K,V,V') .$$

Demostración: Sean d en $\mathrm{Der}\, K$ y g en $I(K,V,V')$; la aplicación:

$$\langle d,g \rangle : K \times V \times V \to V'$$

definida por

$$\langle d,g \rangle (\lambda,x,y) = d(\lambda)\cdot g(x,y)$$

para todo λ en K y x,y en V , es un elemento de $F(K,V,V')$; en efecto para α,β en K y x,x',y en V se tiene:

$$\begin{aligned}\langle d,g \rangle (\alpha + \beta,x,y) &= d(\alpha + \beta)\cdot g(x,y)\\ &= (d(\alpha) + d(\beta))\cdot g(x,y)\\ &= d(\alpha)\cdot g(x,y) + d(\beta)\cdot g(x,y)\\ &= \langle d,g \rangle (\alpha,x,y) + \langle d,g \rangle (\beta,x,y)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\langle d,g \rangle (\alpha\beta,x,y) &= d(\alpha\beta)\cdot g(x,y)\\ &= (\alpha d(\beta) + \beta d(\alpha))\cdot g(x,y)\\ &= \alpha d(\beta)\cdot g(x,y) + \beta d(\alpha)\cdot g(x,y)\\ &= \alpha \langle d,g \rangle (\beta,x,y) + \beta \langle d,g \rangle (\alpha,x,y) ,\end{aligned}$$

es decir $\langle d,g \rangle$ es una derivación en la primera variable. También

$$\langle d,g \rangle (\alpha,x,y) = d(\alpha)\cdot g(x,y)$$

$$= -d(\alpha)\cdot g(y,x)$$

$$= -\langle d,g \rangle (\alpha,y,x)$$

de donde $\langle d,g \rangle$ es antisimétrica en la segunda y tercera variables. Finalmente:

$$\langle d,g \rangle (\alpha,x + x',y) = d(\alpha)\cdot g(x + x',y)$$

$$= d(\alpha)\cdot (g(x,y) + g(x',y))$$

$$= d(\alpha)\cdot g(x,y) + d(\alpha)\cdot g(x',y)$$

$$= \langle d,g \rangle (\alpha,x,y) + \langle d,g \rangle (\alpha,x',y)$$

y $$\langle d,g \rangle (\alpha,\beta x,y) = d(\alpha)\cdot g(\beta x,y)$$

$$= \beta d(\alpha)\cdot g(x,y)$$

$$= \beta \langle d,g \rangle (\alpha,x,y)$$

es decir $\langle d,g \rangle$ es lineal en la segunda variable y a causa de la antisimetría lo es también en la tercera.

Esto nos permite definir la aplicación:

$$\tau : \text{Der } K \times I(K,V,V') \to F(K,V,V')$$
$$(d,g) \to \langle d,g \rangle$$

la cual es bilineal y por lo tanto se prolonga en una única aplicación lineal

$$\bar{\tau} : \text{Der } K \otimes_K I(K,V,V') \to F(K,V,V')$$

dada por

$$\bar{\tau}\left(\sum_i d_i \otimes g_i\right) = \sum_i \langle d_i , g_i \rangle .$$

Para probar el teorema basta demostrar que $\bar{\tau}$ es biyectiva. Como V y V' son de dimensión finita, $I(K,V,V')$ también lo es; sea $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ una base del espacio $I(K,V,V')$.

a) Inyectividad de $\bar{\tau}$.

Como $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ es base de $I(K,V,V')$, existe una única familia $(d_i)_{i=1}^n$ de elementos de $\mathrm{Der}\ K$ tal que si

$z \in \mathrm{Der}\ K \otimes_K I(K,V,V')$ entonces $z = \sum_{i=1}^n d_i \otimes g_i$.

Sea z en $\mathrm{Ker}\ \bar{\tau}$, es decir $\bar{\tau}(z) = 0$. Así

$$\bar{\tau}\left(\sum_{i=1}^n d_i \otimes g_i\right) = 0$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^n \langle d_i , g_i \rangle = 0$$

es decir

$$\sum_{i=1}^n \langle d_i , g_i \rangle (\lambda, x, y) = 0$$

para todo λ en K y x,y en V .

$$\sum_{i=1}^n d_i(\lambda) \cdot g_i(x,y) = 0 \quad \text{para todo } \lambda \text{ en } K \text{ y } x,y \text{ en } V .$$

Para cada λ en K se tiene:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} d_i(\lambda)\ g_i\right)(x,y) = 0 \qquad \text{para todo } x,y \text{ en } V \ ,$$

es decir

$$\sum_{i=1}^{n} d_i(\lambda) g_i = 0$$

y como $\{g_i\}_{i=1}^{n}$ es linealmente independiente, entonces $d_i(\lambda) = 0$ para todo i , $i = 1, \ldots, n$ o sea $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = 0$, de donde $z = 0$ y $\bar{\tau}$ es inyectiva.

b) Sobreyectividad de $\bar{\tau}$.

Sea f en $F(K,V,V')$. Para cada λ en K definamos las aplicaciones:

$$f_\lambda : V \times V \to V' \ , \quad f_\lambda(x,y) = f(\lambda,x,y) \quad \text{para todo } x,y \text{ en } V \ .$$

Es claro que para α,β en K :

$$f_{\alpha+\beta} = f_\alpha + f_\beta \qquad y \qquad f_{\alpha\beta} = \alpha f_\beta + \beta f_\alpha$$

f_λ es bilineal y antisimétrica, de donde para cada λ en K existen únicos $\lambda_1,\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en K tal que $f_\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$.

Además si $f_\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_i$ para β en K , entonces

$$f_{\lambda+\beta} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \beta_i) g_i \qquad y \qquad f_{\lambda\beta} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\beta_i + \beta\lambda_i) g_i \ .$$

Sean $d_i : K \to K$ las aplicaciones definidas por $d_i(\lambda) = \lambda_i$, en donde λ_i es tal que

$$f_\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \ .$$

La aplicación d_i es una derivación en K para cada i ; en efecto, sean λ, β en K y

$$f_\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \quad , \quad f_\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_i \ .$$

Entonces

$$\begin{aligned} d_i(\lambda + \beta) &= \lambda_i + \beta_i \\ &= d_i(\lambda) + d_i(\beta) \end{aligned}$$

pues

$$f_{\lambda+\beta} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \beta_i) g_i$$

y

$$\begin{aligned} d_i(\lambda\beta) &= \lambda \cdot \beta_i + \beta\lambda_i \\ &= \lambda d_i(\beta) + \beta d_i(\lambda) \end{aligned}$$

pues

$$f_{\lambda\beta} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\beta_i + \beta\lambda_i) g_i$$

Finalmente para f en $F(K,V,V')$ consideremos $z = \sum_{i=1}^{n} d_i \otimes g_i$ en $\mathrm{Der}\, K \otimes_K I(K,V,V')$. Luego

$$\bar{\tau}(z) = \bar{\tau}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i \otimes g_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle d_i, g_i \rangle$$

y para λ en K , x,y en V se tiene:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \langle d_i, g_i \rangle\right)(\lambda,x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(\lambda)\cdot g_i(x,y)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i\right)(x,y) = f_\lambda(x,y) = f(\lambda,x,y)$$

de donde $\bar{\tau}$ es sobreyectiva.

Observación: Es importante destacar que la construcción de la aplicación $\langle d,g \rangle$, hecha en el primer párrafo de la demostración del teorema anterior, también es válida para M y N A-módulos; es decir si M y N son A-módulos entonces $\langle d,g \rangle : A \times M \times M \to N$, $(\lambda,x,y) \to d(\lambda)\cdot g(x,y)$ es un elemento de $F(A,M,N)$ para todo d en Der A y g en $I(A,M,N)$.

El cuociente $Q_1(A,M,N)/Q_o(A,M,N)$.

Como $Q_o(A,M,N)$ es un sub-módulo de $Q_1(A,M,N)$ cabe analizar el cuociente

$$Q_1(A,M,N)/Q_o(A,M,N)$$

y de este análisis establecer la existencia de aplicaciones semi-cuadráticas y no cuadráticas.

Si se tiene una aplicación semi-cuadrática $q : M \to N$, para que ella sea cuasi-cuadrática basta que

$$q(\lambda x) = \lambda^2 q(x) \quad \text{para todo } \lambda \text{ en } A \text{ y } x \text{ en } M$$

y de este hecho resulta natural asociar a $q : M \to N$ semi-cuadrática la aplicación

$$\begin{aligned} \beta_q &: A \times M \to N \\ &(\lambda,x) \to q(\lambda x) - \lambda^2 q(x) . \end{aligned}$$

β_q es una aplicación que mide en cuanto q no es cuasi-cuadrática y resulta claro que $\beta_q \equiv 0$ es equivalente a q cuasi-cuadrática.

La siguiente proposición caracteriza a la aplicación β_q .

Proposición 3.7. Sean $q : M \to N$ semi-cuadrática y β_q la aplicación definida anteriormente. Entonces:

a) β_q satisface la ley del paralelógramo en la primera y segunda variables.

b) $\beta_q(ab,x) = \beta_q(a,bx) + a^2\beta_q(b,x)$ para todo a,b en A y x en M .

Demostración: Sean a,b en A y x,y en M

a)
$$\begin{aligned} &\beta_q(a + b,x) + \beta_q(a - b,x) \\ &= q((a + b)x) - (a + b)^2q(x) + q((a - b)x) - (a - b)^2q(x) \\ &= q(ax + bx) + q(ax - bx) - 2a^2q(x) - 2b^2q(x) \\ &= 2q(ax) + 2q(bx) - 2a^2q(x) - 2b^2q(x) \\ &= 2\beta_q(a,x) + 2\beta_q(b,x) . \end{aligned}$$

Además

$$\beta_q(a,x+y) + \beta_q(a,x-y)$$

$$= q(a(x+y)) - a^2q(x+y) + q(a(x-y)) - a^2q(x-y)$$

$$= q(ax+ay) + q(ax-ay) - a^2(q(x+y) + q(x-y))$$

$$= 2q(ax) + 2q(ay) - 2a^2q(x) - 2a^2q(y)$$

$$= 2\beta_q(a,x) + 2\beta_q(a,y)$$

b) $$\beta_q(ab,x) = q(abx) - a^2b^2q(x)$$

$$= q(a(bx)) + a^2q(bx) - a^2q(bx) - a^2b^2q(x)$$

$$= q(a(bx)) - a^2q(bx) + a^2(q(bx) - b^2q(x))$$

$$= \beta_q(a,bx) + a^2\beta_q(b,x)$$

Denotemos por $F_o(A,M,N)$ el conjunto formado por las aplicaciones con las propiedades anteriores, es decir:

a) Cumplen la ley del paralelógramo en la primera y segunda variables.

b) $f(ab,x) = f(a,bx) + a^2f(b,x)$ para todo a,b en A, x en M.

El conjunto $F_o(A,M,N)$ posee claramente una estructura de A-módulo y se ha asociado a cada aplicación semi-cuadrática un elemento de $F_o(A,M,N)$.

Analicemos las propiedades de esta asociación.

<u>Proposición 3.8.</u> $\beta : Q_1(A,M.N) \to F_o(A,M,N)$ es A-lineal y $\operatorname{Ker}\beta = Q_o(A,M,N)$

$$q \to \beta_q$$

Demostración: La linealidad de la aplicación β es clara y si $q \in \operatorname{Ker} \beta$ entonces

$$\beta_q(\lambda,x) = 0 \quad \text{para todo } \lambda \text{ en } A \text{ y } x \text{ en } M$$

de donde $q(\lambda x) - \lambda^2 q(x) = 0$ para todo λ en A, x en M.
Luego q es cuasi-cuadrática, es decir

$$\operatorname{Ker} \beta = Q_o(A,M,N) .$$

Nota: De acuerdo a la proposición anterior se tiene que:

$$Q_1(A,M,N)/Q_o(A,M,N) \simeq \beta(Q_1(A,M,N)) \subseteq F_o(A,M,N)$$

y resulta de interés analizar alguna condición bajo la cual el cuociente se identifique con $F_o(A,M,N)$.

Proposición 3.9. Si M es un A-módulo libre de rango 1 entonces

$$\beta : Q_1(A,M,N) \to F_o(A,M,N)$$
$$q \to \beta_q$$

es sobreyectiva.

Demostración: Sean $\{e\}$ base de M y f en $F_o(A,M,N)$. Definamos para $x = ae$, a en A la aplicación

$$q : M \to N , \qquad q(x) = f(a,e) .$$

Para $x = ae$, $y = be$, a,b en A se tiene que:

$$q(x + y) + q(x - y) = q(ae + be) + q(ae - be)$$

$$= q((a + b)e) + q((a - b)e)$$

$$= f(a + b,e) + f(a - b,e)$$

$$= 2f(a,e) + 2f(b,e)$$

pues f cumple la ley del paralelógramo en la primera variable.

$$= 2q(x) + 2q(y)$$

y así q es semi-cuadrática.

Finalmente probaremos que $\beta_q \equiv f$. Sean b en A , $x = ae$, a en A , entonces:

$$\beta_q(b,x) = q(bx) - b^2q(x)$$

$$= q(bae) - b^2q(ae)$$

$$= f(ab,e) - b^2f(a,e)$$

$$= f(b,ae) + b^2f(a,e) - b^2f(a,e)$$

$$= f(b,ae)$$

$$= f(b,x)$$

Luego $\beta_q \equiv f$ y así β es sobreyectiva.

Corolario: Si M es un A-módulo libre de rango 1 entonces

$$Q_1(A,M,N)/Q_o(A,M,N) \simeq F_o(A,M,N)$$

Analicemos finalmente el cuociente

$$Q_1(A,M,N)/Q(A,M,N) \; .$$

Sea q en $Q_1(A,M,N)$; asociamos a q la aplicación $\gamma_q : A \times M \times M \to N$ definida por $\gamma_q(a,x,y) = \phi(ax,y) - a\phi(x,y)$ para todo a en A y x,y en M , donde ϕ es la aplicación asociada a q . La aplicación γ_q es aditiva en sus tres variables y además satisface:

$$\gamma_q(ab,x,y) = \gamma_q(a,bx,y) + a\gamma_q(b,x,y)$$

para todo a,b en A y x,y en M .

En forma similar al análisis hecho en los cuocientes anteriores, se define $F_1(A,M,N)$ como el conjunto de las aplicaciones $f : A \times M \times M \to N$ tal que

(i) f es aditiva en sus tres variables

(ii) $f(ab,x,y) = f(a,bx,y) + af(b,x,y)$ para todo a,b en A y x,y en M ,

y claramente se tiene que $F_1(A,M,N)$ es un A-módulo.

La aplicación

$$\gamma : Q_1(A,M,N) \to F_1(A,M,N)$$
$$q \to \gamma_q$$

es A-lineal y $\mathrm{Ker}\ \gamma = Q(A,M,N)$.

Hacemos notar que este cuociente es el que menos información interesante proporciona, pues hasta el momento no hay un resultado que permita conocer $F_1(A,M,N)$ en términos de otras estructuras, lo que dificulta encontrar condiciones para la sobreyectividad de γ .

C A P I T U L O   IV

ALGUNOS CASOS PARTICULARES

En este último Capítulo analizaremos la existencia de aplicaciones cuasi-cuadráticas y semi-cuadráticas en cuerpos finitos, en los enteros p-ádicos y en el cuerpo Q_p y finalmente en los números reales. Cuando sea posible y la existencia esté asegurada se determinará la forma que tienen dichas aplicaciones.

(a) Cuerpos finitos.

(i) Aplicaciones semi-cuadráticas.

Consideraremos en esta parte aplicaciones semi-cuadráticas de un cuerpo finito en sí mismo, es decir aplicaciones $q : \mathbb{F}_{p^n} \to \mathbb{F}_{p^n}$, considerando $\mathbb{F}_{p^n}$ como un $\mathbb{F}_{p^n}$-espacio vectorial. El caso $\mathbb{F}_{p^n}$ como $\mathbb{F}_p$-espacio vectorial está cubierto por la Proposición 1.12.

Para simplificar el análisis, distinguiremos 2 casos, según que la característica del cuerpo sea 2 o un primo p distinto de 2.

CASO I : $p = 2$.

Al considerar aplicaciones semi-cuadráticas $q : \mathbb{F}_{2^n} \to \mathbb{F}_{2^n}$, se tiene que por ser el cuerpo de característica 2, toda aplicación es semi-cuadrática, según Proposición 1.11.

CASO II: $p \neq 2$.

A modo de introducción, examinemos en primer lugar las aplicaciones semi-cuadráticas para $p = 3$ y $n = 2$, es decir, $q : \mathbb{F}_{3^2} \to \mathbb{F}_{3^2}$.

Sabemos que $\mathbb{F}_{3^2}$ es una extensión de grado 2 del cuerpo $\mathbb{F}_3$, de donde existe un polinomio irreductible $p(x) \in \mathbb{F}_3[x]$ de grado 2 y tal que los elementos de $\mathbb{F}_{3^2}$ son de la forma $a + b\alpha$, con a,b en $\mathbb{F}_3$ y α tal que $p(\alpha) = 0$.

Sea $q : \mathbb{F}_{3^2} \to \mathbb{F}_{3^2}$ aplicación semi-cuadrática. Como la homotecia de razón 2 en $\mathbb{F}_{3^2}$ es inyectiva, se tiene que:

(i) ϕ es bi-aditiva y por lo tanto $\mathbb{F}_3$-bilineal

(ii) $2q(x) = \phi(x,x)$, para todo x en $\mathbb{F}_{3^2}$.

De (ii),

$$\begin{aligned} 2q(a + b\alpha) &= \phi(a + b\alpha \, , \, a + b\alpha) \, , \quad a,b \text{ en } \mathbb{F}_3 \\ &= \phi(a,a) + \phi(a,b\alpha) + \phi(b\alpha,a) + \phi(b\alpha,b\alpha) \\ &= a^2\phi(1,1) + 2ab\phi(1,\alpha) + b^2\phi(\alpha,\alpha) \end{aligned}$$

finalmente

(*) $q(a + b\alpha) = 2a^2\phi(1,1) + ab\phi(1,\alpha) + 2b^2\phi(\alpha,\alpha)$.

Recíprocamente, al considerar $q : \mathbb{F}_{3^2} \to \mathbb{F}_{3^2}$ definida por la relación (*) resulta sencillo probar que q es semi-cuadrática.

En resumen, las aplicaciones $\mathbb{F}_{3^2}$-semi-cuadráticas de $\mathbb{F}_{3^2}$ en $\mathbb{F}_{3^2}$ son de la forma:

$$q(a + b\alpha) = 2a^2\phi(1,1) + ab\phi(1,\alpha) + 2b^2\phi(\alpha,\alpha)$$

para todo a,b en $\mathbb{F}_3$ y α raíz de $p(x)$.

Si denotamos:

$$\phi(1,1) = t_{00} \ , \quad \phi(1,\alpha) = t_{01} \ \text{ y } \ \phi(\alpha,\alpha) = t_{11} \ ,$$

se obtiene finalmente que q está dada por

$$q(a + b\alpha) = 2a^2t_{00} + abt_{01} + 2b^2t_{11}$$

con a,b en $\mathbb{F}_3$, t_{ij} en $\mathbb{F}_{3^2}$.

Por ejemplo, una aplicación $\mathbb{F}_{3^2}$-semi-cuadrática sobre $\mathbb{F}_{3^2}$ es

$$\begin{aligned} q(a + b\alpha) &= 2a^2\cdot 1 + ab\cdot 2\alpha + 2b^2\cdot 2 \\ &= 2a^2 + b^2 + 2ab\alpha \ . \end{aligned}$$

Además en este caso q no es cuadrática pues

$$q((1 + \alpha)(2 + \alpha)) \neq (1 + \alpha)^2 q(2 + \alpha) \ ,$$

considerando el polinomio irreductible sobre $\mathbb{F}_3$, $p(x) = x^2 + 1$.

Una vez establecida la forma de las aplicaciones $\mathbb{F}_{3^2}$-semi-cuadráticas sobre $\mathbb{F}_{3^2}$, cabe preguntarse: ¿bajo qué condiciones ellas representan aplicaciones cuadráticas?

Considerando que q es semi-cuadrática y la homotecia de razón 2 en $\mathbb{F}_{3^2}$ es inyectiva, según Corolario del Teorema 1.9 basta imponer la condición $\phi(\lambda x,y) = \lambda\phi(x,y)$ para todo λ,x,y en $\mathbb{F}_{3^2}$ para que q resulte cuadrática.

En este caso es suficiente hacer

$$\phi(1,\alpha) = \alpha\phi(1,1) \quad \text{y} \quad \phi(\alpha,\alpha) = \alpha^2\phi(1,1)$$

Así en:

$$\begin{aligned} q(a + b\alpha) &= 2a^2\phi(1,1) + ab\phi(1,\alpha) + 2b^2\phi(\alpha,\alpha) \\ &= 2a^2 t_{00} + abt_{01} + 2b^2 t_{11} \end{aligned}$$

basta escoger

$$\phi(1,\alpha) = \alpha\phi(1,1) = \alpha t_{00}$$

$$\text{y} \quad \phi(\alpha,\alpha) = \alpha^2\phi(1,1) = \alpha^2 t_{00}$$

en donde $t_{00} = \phi(1,1)$ en $\mathbb{F}_{3^2}$ para que q resulte cuadrático.

Notar que de esta manera la aplicación q original se transforma en

$$q(a+b\alpha) = (a+b\alpha)^2 \cdot 2t_{00} \quad ,$$

$t_{00} \in \mathbb{F}_{3^2}$, o mejor aún,

$$q(x) = \lambda x^2 \quad , \qquad \lambda = 2t_{00} \quad , \qquad t_{00} \text{ en } \mathbb{F}_{3^2} \; .$$

En resumen hemos probado que las aplicaciones $\mathbb{F}_{3^2}$-semi-cuadráticas son de la forma

$$q(a+b\alpha) = 2a^2 t_{00} + abt_{01} + 2b^2 t_{11}$$

con a,b en $\mathbb{F}_3$ y t_{ij} en $\mathbb{F}_{3^2}$.

De ellas las aplicaciones $\mathbb{F}_{3^2}$-cuadráticas se obtienen tomando:

$$t_{00} \in \mathbb{F}_{3^2} \; , \quad t_{01} = \alpha t_{00} \quad y \quad t_{11} = \alpha^2 t_{00} \; .$$

Veamos ahora el caso $\mathbb{F}_{p^n}$, $n > 2$.

Se obtiene mediante una sencilla generalización del caso particular anterior. Los elementos de $\mathbb{F}_{p^n}$ son de la forma:

$$a_o + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \; ,$$

donde $a_i \in \mathbb{F}_p$, $i = 1, \ldots, n$ y α es una raíz del polinomio $p(x)$ en $\mathbb{F}_p[x]$, irreductible sobre $\mathbb{F}_p$ y de grado n .

Teorema 4.1. Si p es primo, $p \neq 2$, toda aplicación $q : \mathbb{F}_{p^n} \to \mathbb{F}_{p^n}$, $\mathbb{F}_{p^n}$-semi-cuadrática es de la forma:

$$(*) \quad q(a_o + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}) = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 t_{ii} + \sum_{0\leq i<j\leq n-1} a_i a_j t_{ij} \ ,$$

donde $a_k \in \mathbb{F}_p$, $k = 0,1, \ldots, n-1$, $t_{ij} \in \mathbb{F}_{p^n}$ para todo i,j y λ es tal que $2\lambda \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$.

Demostración: En forma similar al caso particular analizado, si se considera q como $\mathbb{F}_{p^n}$-semi-cuadrática, la aplicación ϕ asociada a q debe ser bi-aditiva (por lo tanto $\mathbb{F}_p$-bilineal) y $2q(x) = \phi(x,x)$ para todo x en $\mathbb{F}_{p^n}$, a causa de la inyectividad de la homotecia de razón 2 en $\mathbb{F}_{p^n}$.

Como $2q(x) = \phi(x,x)$ para todo x en $\mathbb{F}_{p^n}$, se tiene

$$\begin{aligned} &2q(a_o + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}) = \\ &= \phi(a_o + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}, a_o + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}) \\ &= a_o^2\phi(1,1) + a_1^2\phi(\alpha,\alpha) + \ldots + a_{n-1}^2\phi(\alpha^{n-1},\alpha^{n-1}) + 2a_o a_1\phi(1,\alpha) + \ldots \\ &\quad + 2a_o a_{n-1}\phi(1,\alpha^{n-1}) + \ldots + 2a_{n-2}a_{n-1}\phi(\alpha^{n-2},\alpha^{n-1}) \ . \end{aligned}$$

Multiplicando por λ tal que $2\lambda \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} &q(a_o + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}) = \\ &= \lambda a_o^2\phi(1,1) + \ldots + \lambda a_{n-1}^2\phi(\alpha^{n-1},\alpha^{n-1}) + a_o a_1\phi(1,\alpha) + \ldots \\ &\quad + a_o a_{n-1}\phi(1,\alpha^{n-1}) + \ldots + a_{n-2}a_{n-1}\phi(\alpha^{n-2},\alpha^{n-1}) \end{aligned}$$

donde λ es tal que $2\lambda \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$.

Si hacemos

$$\phi(\alpha^i,\alpha^i) = t_{ii} \qquad 0 \leq i \leq n-1$$

y $$\phi(\alpha^i,\alpha^j) = t_{ij} \qquad i \neq j$$

resulta:

$$q(a_o + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}) = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 t_{ii} + \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} a_i a_j t_{ij}$$

donde $a_k \in \mathbb{F}_p$, $k = 0, \ldots, n-1$, $t_{ij} \in \mathbb{F}_{p^n}$, para todo i,j y λ es tal que $2\lambda \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$.

Recíprocamente, la aplicación definida en (*) es claramente $\mathbb{F}_{p^n}$-semi-cuadrática.

Resta por analizar cuales de las aplicaciones anteriores son $\mathbb{F}_{p^n}$-cuadráticas. El teorema enunciado a continuación nos dá una respuesta a este problema.

Teorema 4.2. De las aplicaciones $\mathbb{F}_{p^n}$-semi-cuadráticas del teorema anterior, aquellas que son cuadráticas se obtienen al elegir:

$$t_{ii} = \alpha^{2i} t_{00} \quad , \qquad t_{00} \text{ en } \mathbb{F}_{p^n}$$

$$t_{ij} = \alpha^{i+j} t_{00} \qquad (i \neq j) .$$

Demostración: Como q es semi-cuadrática y la homotecia de razón 2 en $\mathbb{F}_{p^n}$ es inyectiva, según Corolario del Teorema 1.9 basta imponer la condición

$$\phi(\lambda x,y) = \lambda\phi(x,y) \qquad \text{para todo } \lambda,\ x,y \text{ en } \mathbb{F}_{p^n}$$

para que q sea cuadrática. Así

$$t_{ii} = \phi(\alpha^i,\alpha^i) = \alpha^{2i}\phi(1,1) = \alpha^{2i}t_{00}$$

y si $i \neq j$,

$$t_{ij} = \phi(\alpha^i,\alpha^j) = \alpha^{i+j}\phi(1,1) = \alpha^{i+j}\cdot t_{00} .$$

Ejemplo 4.3. En $\mathbb{F}_{5^3}$ las aplicaciones semi-cuadráticas tienen la forma:

$$q(a + b\alpha + c\alpha^2) = 3(a^2t_{00} + b^2t_{11} + c^2t_{22}) + abt_{01} + act_{02} + bct_{12}$$

con t_{ij} en $\mathbb{F}_{5^3}$.

En particular, eligiendo por ejemplo $t_{11} \neq \alpha^2 t_{00}$ se obtiene una aplicación semi-cuadrática pero no cuadrática.

De las aplicaciones anteriores las cuadráticas se obtienen para $t_{ii} = \alpha^{2i}t_{00}$ y $t_{ij} = \alpha^{i+j}t_{00}$, t_{00} en $\mathbb{F}_{5^3}$.

Por ejemplo para $t_{00} = 2$ resulta

$$q(a + b\alpha + c\alpha^2) = (a + b\alpha + c\alpha^2)^2$$

como era de esperar.

(ii) Aplicaciones cuasi-cuadráticas.

Sea K un cuerpo finito de característica p ; luego K es perfecto $(K = K^p)$ y para una derivación $D : K \to K$ se tiene:

$$D(x^p) = px^{p-1}D(x) = 0 \quad \text{para todo } x^p \text{ en } K^p = K \ .$$

Así $D = 0$.

Luego no hay derivaciones no triviales sobre un cuerpo finito y como consecuencia de lo anterior para V y V' K-espacios vectoriales se tiene que:

$$\operatorname{Der} K \otimes_K I(K,V,V') \simeq \{0\}$$

y según Teorema 3.6 se concluye que $F(K,V,V') \simeq \{0\}$, de donde

$$Q(K,V,V') = Q_o(K,V,V')$$

es decir no existen aplicaciones cuasi-cuadráticas no triviales y no cuadráticas sobre K-espacios vectoriales para K cuerpo finito.

(b) Números p-ádicos: $\mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{Q}_p$.

(i) Aplicaciones semi-cuadráticas.

El resultado que se puede exhibir en este punto es el siguiente:

Proposición 4.4. Sean V y V' $\mathbb{Q}_p$-espacios vectoriales, $q : V \to V'$ una aplicación semi-cuadrática. Si q es continua entonces q es cuadrática.

Demostración: Es suficiente probar que la aplicación $\phi : V \times V \to V'$ asociada a q verifica $\phi(\lambda x, y) = \lambda\phi(x,y)$ para todo λ en $\mathbb{Q}_p$, todo x,y en V.

Si λ está en $\mathbb{Q}_p$, λ es el límite de una sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números racionales; sea $\lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda_n$.

Ahora como ϕ es continua,

$$\lim_{n\to\infty} (\phi(\lambda x,y) - \phi(\lambda_n x,y))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \phi((\lambda - \lambda_n)x,y)$$

$$= \phi(0,y) = 0$$

de donde

$$\phi(\lambda x,y) = \lambda\phi(x,y)$$

y así q es cuadrática.

(ii) Aplicaciones cuasi-cuadráticas.

En primer lugar examinaremos las derivaciones en $\mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{Q}_p$ para posteriormente caracterizar las aplicaciones cuasi-cuadráticas.

A una derivación $D : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ la llamaremos entera si $D(\mathbb{Z}_p) \subseteq \mathbb{Z}_p$, es decir aplica enteros sobre enteros. N. Heerema (ver [7]) prueba en su artículo entre otras cosas que:

1. Si D es entera entonces D es continua.
2. Si K es un cuerpo p-ádico con cuerpo residual k y si k es

perfecto entonces K no tiene derivaciones continuas no triviales.

Así en el caso $K = \mathbb{Q}_p$, su cuerpo residual es $k = \mathbb{F}_p$ el cual es perfecto, de donde $\mathbb{Q}_p$ no tiene derivaciones continuas no triviales.

En el caso de $\mathbb{Z}_p$, supongamos que $D : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ es una derivación. Entonces $D' : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$, la extensión de D al cuerpo cuociente, es una derivación y claramente es entera; por lo tanto D' es continua, pero en $\mathbb{Q}_p$ no existen derivaciones continuas no triviales según lo visto anteriormente.
Así no existen derivaciones no triviales en $\mathbb{Z}_p$ y de acuerdo al Teorema 3.6 se ha probado la siguiente proposición:

Proposición 4.5. Sean M y N $\mathbb{Z}_p$-módulos libres de rango finito. Entonces

$$Q_o(\mathbb{Z}_p, M, N) = Q(\mathbb{Z}_p, M, N) .$$

Finalmente analizaremos la existencia de derivaciones en $\mathbb{Q}_p$. Sabemos que no hay derivaciones continuas según el análisis anterior, pero como $\mathbb{Q}_p$ tiene característica cero para μ trascendente sobre $\mathbb{Q}_p$ existe una derivación que no se anula sobre μ (ver [8]), es decir, existen derivaciones en $\mathbb{Q}_p$. De aquí la proposición:

Proposición 4.6. Sean V y V' $\mathbb{Q}_p$-espacios vectoriales. Entonces

$$Q(\mathbb{Q}_p, V, V') \subsetneq Q_o(\mathbb{Q}_p, V, V') .$$

Nota: En el Teorema 4.9, al final del Capítulo, se da un resultado general sobre la forma de las aplicaciones cuasi-cuadráticas en espacios vectoriales de dimensiones finitas sobre un cuerpo cualquiera.

(c) Números reales.

(i) Aplicaciones semi-cuadráticas.

En primer lugar necesitamos caracterizar la forma de las soluciones de la ecuación funcional de Cauchy

$$(*) \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{para todo } x,y \text{ en } \mathbb{R} .$$

En 1821, Cauchy mostró que cualquier función satisfaciendo (*) es racionalmente homogénea, es decir

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \qquad \text{para todo } \lambda \text{ en } \mathbb{Q} \text{ y } x \text{ en } \mathbb{R}$$

y concluyó que si se asume la continuidad de f entonces ella es de la forma

$$f(x) = cx \qquad \text{con } c = f(1) , \quad c \text{ en } \mathbb{R} .$$

En 1905, Hamel construyó un conjunto H, llamado base de Hamel, con la propiedad que cada número real x puede ser representado únicamente en la forma

$$x = \Sigma\, \alpha_i x_i$$

en donde la suma es finita, los α_i son racionales y los x_i son elementos de H.

Así para x en $\mathbb{R}$, $x = \Sigma\, \alpha_i x_i$ se tiene que

$$f(x) = f(\Sigma\, \alpha_i x_i) = \Sigma\, \alpha_i f(x_i)$$

es decir una función aditiva f está completamente determinada por sus valores sobre la base de Hamel. La solución es continua sí y sólo si la razón $\frac{f(x)}{x}$ es constante cuando x recorre H .

De esta forma Hamel resolvió completamente el problema de la existencia de soluciones discontinuas de (*); además estas soluciones son totalmente discontinuas (ver [6]).

Por ejemplo, para x en $\mathbb{R}$,

$$x = r_1 x_1 + \ldots + r_h x_h \quad , \quad r_i \text{ en } \mathbb{Q} \ , \quad x_i \text{ en } H \ ,$$

si se elige en particular

$$f(x_1) = 1 \quad , \quad f(x_2) = \ldots\ldots = f(x_h) = 0$$

resulta una solución discontinua de (*).

Ahora para resolver el problema de la existencia de aplicaciones semi-cuadráticas en $\mathbb{R}$, basta darse una solución f no continua de la ecuación de Cauchy, a partir de la cual es siempre posible construir una aplicación bi-aditiva, simétrica y no homogénea para finalmente definir la aplicación semi-cuadrática $q(x) = \phi(x,x)$, la cual no es cuadrática debido a la no homogeneidad de ϕ .

Ejemplo 4.7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una solución no continua de la ecuación de Cauchy

$$f(x + y) = f(x) + f(y) .$$

Definamos

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

por

$$\phi(x,y) = xf(y) + yf(x) \qquad \text{para todo } x,y \text{ en } \mathbb{R}$$

ϕ es claramente bi-aditiva y simétrica. Para probar la no homogeneidad de ϕ , consideremos que como f no es de la forma $f(x) = xf(1)$, entonces existe $x_o \in \mathbb{R}$, $x_o \neq 0$ tal que

$$f(x_o) \neq x_o f(1) .$$

Así para ϕ se tiene:

$$\phi(x_o,x_o) = x_o f(x_o) + x_o f(x_o) = 2x_o f(x_o) .$$

Por otro lado:

$$x_o^2 \phi(1,1) = 2x_o^2 f(1) .$$

Si ϕ es homogénea en x_o se debe tener:

$$2x_o f(x_o) = 2x_o^2 f(1)$$

de donde

$$f(x_o) = x_o f(1)$$

lo que contradice la elección del elemento x_o .

Finalmente, sea $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $q(x) = \phi(x,x)$ para todo x en $\mathbb{R}$; $q(x)$ es claramente semi-cuadrática debido a la bi-aditividad de ϕ , y no es cuadrática pues para x_o se tiene:

$$q(x_o) = \phi(x_o,x_o)$$

y $$x_o^2 q(1) = x_o^2 \phi(1,1) \; .$$

Si $q(x_o) = x_o^2 q(1)$ entonces $\phi(x_o,x_o) = x_o^2 \phi(1,1)$ lo que contradice la no homogeneidad de ϕ en x_o .

Así $q(x) = \phi(x,x) = 2xf(x)$ es semi-cuadrática y no cuadrática (tampoco es cuasi-cuadrática).

Notemos que la aplicación ψ asociada a q está dada por

$$\psi(x,y) = 2\phi(x,y)$$

ó $$\psi(x,y) = 2(xf(y) + yf(x)) \quad \text{para todo } x,y \text{ en } \mathbb{R} \; .$$

(ii) Aplicaciones cuasi-cuadráticas.

Analizaremos primero el caso general de espacios vectoriales sobre un cuerpo K , para de allí concluir la existencia de aplicacio - nes cuasi-cuadráticas en espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

Sean V,V' espacios vectoriales sobre un cuerpo K . De acuerdo al Corolario de la Proposición 3.4 y como V es libre se tiene que:

$$Q_o(K,V,V')/Q(K,V,V') \simeq F(K,V,V')$$

de donde basta que $F(K,V,V')$ sea distinto de cero para que existan aplicaciones cuasi-cuadráticas no cuadráticas.

Sean $D : K \to K$ una derivación y $B : V \times V \to V'$ una aplicación bilineal antisimétrica; por observación (pág.44), la aplicación

$$f_o : K \times V \times V \to V'$$

dada por

$$f_o(\alpha,x,y) = D(\alpha)\cdot B(x,y)$$

para todo α en K y x,y en V, es un elemento de $F(K,V,V')$.

Como $\psi : Q_o(K,V,V') \to F(K,V,V')$ es una aplicación K-lineal y sobreyectiva, para $f_o \in F(K,V,V')$ existe $q_o : V \to V'$ cuasi-cuadrá tica tal que $\psi(q_o) = f_o$. Así es posible obtener un elemento de $Q_o(K,V,V')$ y para que q_o no sea cuadrática basta elegir $D \neq 0$ y $B \neq 0$, es decir que exista α en K tal que $D(\alpha) \neq 0$ y existan x_o,y_o en V tal que $B(x_o,y_o) \neq 0$. De esta forma se tiene que:

$$\psi(q_o)(\alpha,x_o,y_o) = \phi(\alpha x_o,y_o) - \alpha\phi(x_o,y_o) ,$$

donde ϕ es la aplicación asociada a q_o. Por otro lado:

$$f_o(\alpha,x_o,y_o) = D(\alpha)\cdot B(x_o,y_o)$$

y como $\psi(q_o) = f_o$ se debe tener:

$$\phi(\alpha x_o,y_o) - \alpha\phi(x_o,y_o) = D(\alpha)\cdot B(x_o,y_o) ,$$

pero

$$D(\alpha)\cdot B(x_o,y_o) \neq 0 \ ,$$

de donde

$$\phi(\alpha x_o,y_o) - \alpha\phi(x_o,y_o) \neq 0 \ .$$

Por lo tanto ϕ no es homogénea en α y así q_o no es cuadrática.

Nota: Para que exista B bilineal antisimétrica no nula sobre $V \times V$ se debe tener que $\dim_K V \geq 2$.

Ejemplo 4.8. Sean V y V' espacios vectoriales sobre K , K cuerpo, $\dim_K V = 2$. Sean $D : K \to K$ una derivación no nula y $B : V \times V \to V'$ una aplicación bilineal antisimétrica no nula. Definamos:

$$f : K \times V \times V \to V' \quad \text{por} \quad f(\lambda,x,y) = D(\lambda)\cdot B(x,y)$$

para todo λ en K y x,y en V . Sabemos que $f \in F(K,V,V')$ y determinaremos q en $Q_o(K,V,V')$.

Para x en V , $x = a_1e_1 + a_2e_2$, a_1,a_2 en K y $\{e_1,e_2\}$ base de V , sea:

$$\delta : V \times V \to V'$$

tal que

$$\delta(x,y) = f(a_1,e_1,y) + f(a_2,e_2,y) \ ,$$

o sea

$$\delta(x,y) = D(a_1)\cdot B(e_1,y) + D(a_2)\cdot B(e_2,y)$$

para todo x,y en V .

Finalmente definamos: $q : V \to V'$ por $q(x) = \delta(x,x)$ para todo x en V , y es claro por Proposición 3.4 que q es cuasi-cuadrática; determinemos la forma de q y de su aplicación asociada.

Para x en V , $x = a_1e_1 + a_2e_2$, a_1,a_2 en K se tiene:

$$\begin{aligned}
q(a_1e_1 + a_2e_2) &= \delta(a_1e_1 + a_2e_2, a_1e_1 + a_2e_2) \\
&= D(a_1)B(e_1,x) + D(a_2)\cdot B(e_2,x) \\
&= D(a_1)\cdot B(e_1,a_1e_1 + a_2e_2) + D(a_2)\cdot B(e_2,a_1e_1 + a_2e_2) \\
&= D(a_1)\cdot (B(e_1,a_1e_1) + B(e_1,a_2e_2)) + \\
&\quad + D(a_2)(B(e_2,a_1e_1) + B(e_2,a_2e_2)) \\
&= D(a_1)(a_1B(e_1,e_1) + a_2B(e_1,e_2)) + \\
&\quad + D(a_2)(a_1B(e_2,e_1) + a_2B(e_2,e_2)) \;.
\end{aligned}$$

Pero $B(e_i,e_i) = 0$.

$$= D(a_1)\cdot a_2B(e_1,e_2) + D(a_2)\cdot a_1B(e_2,e_1)$$

Pero $B(e_2,e_1) = -B(e_1,e_2)$

$$\begin{aligned}
&= a_2D(a_1)B(e_1,e_2) - a_1D(a_2)B(e_1,e_2) \\
&= B(e_1,e_2)(a_2D(a_1) - a_1D(a_2))
\end{aligned}$$

haciendo $B(e_1,e_2) = V_o$ en V' se obtiene

$$q(a_1e_1 + a_2e_2) = (a_2D(a_1) - a_1D(a_2))\cdot V_o$$

o mejor aún

$$q(a_1e_1 + a_2e_2) = \begin{vmatrix} D(a_1) & D(a_2) \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \cdot V_o$$

donde $V_o = B(e_1,e_2)$.

La aplicación ϕ asociada a q está dada por:

$$\phi(a_1e_1 + a_2e_2, b_1e_1 + b_2e_2) =$$

$$[a_2D(b_1) - b_1D(a_2) + b_2D(a_1) - a_1D(b_2)] \cdot V_o$$

$$= \left(\begin{vmatrix} D(a_1) & D(a_2) \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D(b_1) & D(b_2) \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \right) \cdot V_o$$

para todo a_1,a_2,b_1,b_2 en K y V_o en V', $V_o = B(e_1,e_2)$.

Con una sencilla generalización del ejemplo y considerando que $F(K,V,V') \simeq \mathrm{Der}\, K \otimes_K I(K,V,V')$ se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 4.9. Sean K un cuerpo, V y V' K-espacios vectoriales de dimensión finita y $\{e_1,e_2, \ldots, e_n\}$ una base de V . Entonces toda aplicación cuasi-cuadrática $q : V \to V'$ es de la forma

$$q\left(\sum_{i=1}^{n} a_ie_i \right) = \sum_{i=i<j=n} \begin{vmatrix} D(a_i) & D(a_j) \\ a_i & a_j \end{vmatrix} \cdot B(e_i,e_j)$$

donde D es una derivación en K y B es una aplicación bilineal antisimétrica de $V \times V$ en V' .

Finalmente, en el caso de V y V' espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, resulta que para $\dim_{\mathbb{R}} V > 1$ existen aplicaciones cuasi-cuadráticas no cuadráticas; este hecho proviene de que para cuerpos de característica cero, cada derivación del cuerpo se anula sobre los números algebraicos, pero si μ es trascendente existe una derivación que no se anula en μ (ver [8]).

R E F E R E N C I A S

[1] ACZEL., Lectures on functional equations and their applications. New York, Academic Press. 1966.

[2] Y. AMICE., Les nombres p-adiques, Presses Universitaires de France, 1975.

[3] C. ARNAUD., Sur les formes semi-quadratiques, thése por obtenir le grade de Docteur de Spécialité (Mathématiques). 1971. Montpellier. France; MR 50, # 7220.

[4] F. BARBOZA., Formes semi-quadratiques et formes quadratiques dans les categories abeliennes, thése pour obtenir le grade de Docteur de 3éme Cycle (Mathématiques). 1979. Montpellier, France.

[5] A.M. GLEASON., The definition of quadratic form, Amer. Math. Monthly 73 (1966), 1049-1056.

[6] J.W. GREEN., W. GUSTIN., Quasiconvex sets, Canada J. Math., Vol. 2, (1950), 489-507.

[7] N. HEEREMA., Derivations on p-adic fields, Transaction A.M.S. 102 (1962).

[8] O. ZARISKI., P. SAMUEL., Commutative Algebra, Vol. 1, Van Nostrand, Princeton, 1958.