Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Soluciones Casi Automórficas de Ecuaciones Diferenciales con Argumento Constante a Trozos

Tesis

entregada a
la Facultad de Ciencias
de la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para obtar al grado de

Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas.

Por

Alan Jhonatan Chávez Obregón

Director de Tesis : Dr. Manuel Pinto Jiménez.

Enero del 2013, Santiago-Chile.

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE MAGÍSTER.

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Alan Jhonatan Chávez Obregón

ha sido aprobada por la comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 23 de Julio del 2012.

Director de Tesis:

Dr. Manuel E. Pinto Jiménez ....

Comisión Evaluadora de la Tesis:

Dr. Gonzalo Robledo Velozo (Presidente). ....

Dra. Verónica Poblete Oviedo ....

Dedicado a:
Julia Obregón Díaz,
a mis seis hermanos.
Especialmente a la memoria de mi Nandito.

Agradecimientos

Hay muchas personas a quienes debo agradecer, no sólo por su apoyo durante mi formación como estudiante de postgrado; sino por sus valorables consejos que me han guiado y aún lo hacen en mi vida.

A la familia Rojas, especialmente a Hugo Linares Rojas por su confianza en mí, su apoyo incondicional y cariño, por haber hecho posible mi viaje a Chile.

Al profesor Dr. Manuel Pinto Jiménez por aceptarme como alumno tesista, por su infinita paciencia y apoyo.

A mis amigos de la Universidad de Chile quienes me han brindado su apoyo en momentos difíciles, especialmente a Patricio Quiroz y Victoria Fernández. A los amigos de la PUC, con quienes he sido compañero de clases, en especial a mi compa' Mauricio Allendes, grande.

A los profesores del postgrado en matemática, quienes me han formado en las sendas de la investigación científica.

A los proyectos Fondecyt 1080034 y 1120709, por la parcial financiciación de la Tesis.

De manera muy especial:

* Al Sr. Alvaro Corvalán Azagra, por su valiosa hospitalidad, quien ha financiado parcialmente la finalización de esta Tesis.

* A la familia Corvalán Cerpa, quienes me han brindado el apoyo inconmensurable en los primeros años de mi estadía en Chile, por su comprensión, estímulos y consejos que me hacen sentir un miembro de su familia.

Índice general

Resumen

En esta tesis abordamos el problema de entregar condiciones suficientes para obtener la existencia y unicidad de la solución casi automórfica para las siguientes ecuaciones:

i) Ecuaciones integrales de convolución.

ii) Ecuaciones integro-diferenciales.

iii) Ecuaciones diferenciales no-autónomas y

iv) Ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos no-autónomas.

En el caso de las ecuaciones integrales de convolución se dan nuevos teoremas que permiten obtener la solución casi automórfica de una ecuación que es de tipo avanzado y retardado. Para estudiar la solución casi automórfica de las ecuaciones diferenciales no-autónomas se emplea la teoría de dicotomía exponencial, la que ayuda a obtener la ecuación integral equivalente en cuya expresión participa una función de Green que depende de dos variables; cuando ésta es Bi-casi automórfica se logra determinar que la única solución es casi automórfica.

Al estudiar la solución casi automórfica compacta de ecuaciones diferenciales, se logra dar condiciones naturales bajo las cuales la función de Green es Bi-casi automórfica compacta. Esto es un hecho relevante ya que no se recurre a las condiciones espectrales de Acquistapace-Terrini (entre otras) [23] para poder obtener esta propiedad. De esa manera se logra probar que una ecuación con matriz de coeficientes casi automórfica compacta y con perturbación casi automórfica compacta entrega bajo condiciones adecuadas una única solución casi automórfica compacta.

Al estudiar las ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos, introducimos a las funciones $\mathbb{Z}$-casi automórficas, que se utilizan para estudiar un sistema neutral autónomo de ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos. Para estudiar el caso no-autónomo seguimos el trabajo realizado por R. Yuan y H. Jialin [54] en el contexto de las funciones casi periódicas, sus resultados son extendidos y mejorados.

Finalmente, se da una aplicación a la existencia y unicidad de la solución casi automórfica para el modelo de Lasota-Wazewska con argumento constante a trozos.

Abstract

In this thesis, we deal with the problem of establishing sufficient conditions which ensure the existence and uniqueness of the almost automorphic solution for the following class of equations:

i) Convolution integral equations.

ii) Integro-differential equations.

iii) Non-autonomous differential equations and

iv) Non-autonomous differential equations with piecewise constant argument.

In the case of the convolution integral equations, we give new theorems ensuring the existence and uniqueness of the almost automorphic solution of an equation which is of advanced and delayed type. In order to obtain the almost automorphic solution of non-autonomous differential equations, we use the theory of exponential dichotomy, which help us to construct the equivalent integral equation whose expression has a Green function that depends of two variables. If the Green function is Bi-almost automorphic we are able to determine that the unique bounded solution is almost automorphic.

When we study the compact almost automorphic solution of differential equations, the property of compact Bi-almost automorphicity appears naturally. This relevant fact allow us to do not use of the spectral conditions of Acquistapace-Terrini (and other hypotesis) [23] for having this property. So, we prove that a differential equation with compact almost automorphic coefficient matrix and with a compact almost automorphic perturbation has a unique compact almost automorphic solution.

When we are dealing with differential equations with piecewise constant argument, we introduce the $\mathbb{Z}$-almost automorphic functions, which are used to study a system of neutral autonomous differential equation with piecewise constant argument. In the non-autonomous case, we follow the work of R. Yuan and H. Jialin [54] made in the almost periodic framework, extending and improving their results.

Finally, we apply our results for obtain the unique almost automorphic solution of the classic Lasota-Wazewska model with piecewise constant argument.

Introducción General, Organización y Contenido de la Tesis.

Las funciones casi automórficas fueron introducidas en el año 1955 por Salomon Bochner en el artículo [7] como un trabajo en Geometría Diferencial, después de introducir éstas funciones S. Bochner en su artículo [9] dice lo siguiente: *we do not know whether almost automorphic functions are genuinely more general than almost periodic function. But we have arrived at a general type of theorem ..., which applies alternatively to almost automorphic functions and almost periodic functions, but which we can fully demonstrate for almost periodic functions only by dealing the case of almost automorphic first.* Este problema de la generalización y contención propia de las funciones casi periódicas en las casi automórficas fue resuelto por W.A Veech el que otorga un ejemplo de función casi automórfica que no es casi periódica aunque el ejemplo que consigue es dentro del grupo de los números enteros y no en los números reales (ver [49]), siguiendo esto S. Bochner en su artículo [10] demuestra que la siguiente función:

$$\phi(n) = sign\cos(2\pi n\theta), n \in \mathbb{Z},\ \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q},$$

es casi automórfica pero no casi periódica; éste ejemplo le había sido concedido por H. Furstenberg. Ahora ya sabemos que las funciones casi automórficas son una generalización de las funciones casi periódicas. Después de introducirlas Bochner se preocupó por estudiar la estructura de ellas, con ese ímpetu obtiene teoremas de convergencia tipo Dini [8].

Clásicamente hay muchas razones para estudiar las funciones casi automórficas, una de ellas es que dada una ecuación diferencial casi periódica ésta puede tener soluciones casi automórficas pero no casi periódicas, este fenómeno fué observado por R. Johnson en [30] el que construye el siguiente ejemplo: Dada la ecuación

$$x' = A(t)x(t) + B(t), \tag{0.0.1}$$

con las siguientes propiedades:

i). $A(t), B(t)$ son límites uniformes de las funciones $A_n(t), B_n(t)$ que son 2^n-periódicas.

ii). $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t A(s)ds = +\infty$

iii). Si ϕ_0 es la solución de (0.0.1) con $\phi_0(0) = 0$, entonces $|\phi_0(t)| \leq 1$, y cuando $n \geq 4$

$$\phi_0(2^n) = \begin{cases} \frac{1}{5}, n \text{ impar} \\ 0, n \text{ par.} \end{cases}$$

Bajo estas hipótesis y utilizando nociones de dinámica topológica R. Johnson muestra que la única solución acotada de la ecuación (0.0.1) es ϕ_0 y ésta es casi automórfica mas no casi periódica. Otros ejemplos interesantes se pueden encontrar en [46]. Otra razón para estudiarlas es que las funciones casi automórficas describen mejor la complejidad de los fenómenos naturales. Recientemente se considera que las funciones casi automórficas son muy importantes para estudiar sistemas dinámicos tanto discretos como continuos; por ejemplo Arno Berger et. al en [6] estudian sistemas dinámicos simbólicos con considerable influencia de conceptos derivados de las funciones casi automórficas.

A diferencia de las funciones casi periódicas, las funciones casi automórficas no pueden ser representados de manera única a través de su serie de Fourier, esto fué observado por W.A. Veech en [49].

Desde que éstas funciones fueron introducidas han tenido un gran desarrollo tanto por su importancia para explicar fenómenos reales como por ser interesantes dentro de la matemática misma, de esta manera se las ha estudiado dentro del grupo aditivo de los enteros, reales y más generalmente, sobre grupos topológicos localmente compactos. Existen varias caracterizaciones de éstas funciones, una de ellas es que coinciden con el espacio de las funciones $N-$Levitan casi periódicas. Para el estudio de ecuaciones diferenciales, integrales o integro-diferenciales la versión clásica de Bochner es la más usual y es la que usaremos. Existen muchos trabajos sobre el estudio de las soluciones casi automórficas para tales ecuaciones, quizás los más representativos sean G.M. N'Guérékata y T. Diagana [20, 35, 36, 37].

Esta tesis está organizada como sigue:

Capítulo 1.

En este capítulo se desarrolla la teoría necesaria para estudiar los dos subsiguientes capítulos. Se dan la definición de función casi automórfica sobre un espacio de Banach en general y se ejemplifica, se muestra que las funciones casi automórficas forman un subespacio de Banach bajo la norma de convergencia uniforme del espacio de las funciones continuas y acotadas. Se puede ver de manera natural que el espacio de las funciones casi-periódicas es un subconjunto de las casi automórficas, la contención propia se establece a través de un ejemplo cuya demostración se puede encontrar en [5]. También se desarrollan lemas de composición los cuales serán utilizados en el capítulo 2 y serán el prototipo para las nuevas clases de funciones que surgen en los capítulos siguientes como las funciones asintóticamente casi automórficas y las funciones casi automórficas compactas. Algunos libros donde se puede encontrar una buena exposición sobre esta materia son los de G.M.N'Guérékata [36, 37] y más recientemente en los trabajos [22, 31, 51].

Capítulo 2.

Este capítulo es motivado principalmente por el artículo [40] de M. Pinto, en la que el autor estudia las soluciones casi peródicas de la siguiente ecuación diferencial neutral:

$$x'(t) = A(t)x(t) + [f(t, x(t), x(h_0(t)))]' + Q(t, x(t), x(h_1(t))),$$

donde $A(\cdot) \in M_{p\times p}(\mathbb{C}^p)$ es una matriz casi periódica, la ecuación homogénea asociada:

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

goza de una dicotomía integrable y las funciones h_0, h_1 son desviaciones adecuadas. En éste mismo artículo el autor estudia las soluciones casi periódicas y pseudo casi periódicas de la siguiente ecuación integral de tipo retardado y avanzado:

$$u(t) = f(t, u(t), u(h_0(t))) + \int_{-\infty}^{t} C_1(t, s, u(s), u(h_1(s)))ds + \int_{t}^{+\infty} C_2(t, s, u(s), u(h_2(s)))ds.$$

En el presente capítulo, estamos interesados en obtener herramientas que nos ayuden a decidir sobre la existencia y unicidad de la solución casi-automórfica de la siguiente ecuación integral de convolución:

$$y(t) = f(t, y(t)) + \int_{-\infty}^{t} C_1(t-s)g_1(s, y(s))ds$$

y de su forma mas general:

$$y(t) = f(t, y(t)) + \int_{-\infty}^{t} C_1(t-s)g_1(s, y(s))ds + \int_{t}^{+\infty} C_2(t-s)g_2(s, y(s))ds,$$

donde $C_1 \in L^1(\mathbb{R}^+), C_2 \in L^1(\mathbb{R}^-)$y f, g_1, g_2 son funciones casi automórficas en un contexto adecuado. Como se puede ver éstas ecuaciones son casos particulares de las estudiadas por M. Pinto.

También estamos interesados en obtener resultados tipo Massera para estas ecuaciones integrales. Los resultados de tipo Massera son análogos (o extensión) del resultado obtenido en la década del 50 por el matemático Uruguayo José Luis Massera en el estudio de soluciones periódicas para sistemas de ecuaciones diferenciales, expresada en forma económica el resultado de Masseta es el siguiente: *Si un sistema tiene una solución acotada, entonces tiene una solución periódica.* Extensiones de éste resultado al caso casi periódico se suelen denominar de tipo Bohr-Neugebauer en el que se asegura que toda solución acotada para un sistema casi periódico es en definitiva casi periódico. En tal sentido mostraremos que una solución acotada para una ecuación integral es casi automórfica.

También estudiamos la existencia y unicidad de la solución mild dentro de un espacio de Banach adecuado, para la ecuación integro-diferencial siguiente:

$$u'(t) = Au(t) + \int_{0}^{t} B(t-s)u(s)ds + g(t, u(t)), \ t \geq 0$$

$$u(0) = x_0.$$

En general, una solución mild para una ecuación diferencial es la solución de una ecuación integral casi-quivalente a la ecuación diferencial original, el hecho de expresar casi-equivalente se debe a que en general una solución para la ecuación integral obtenida puede no ser solución (en el sentido clásico) de la ecuación diferencial original, lo que falla en general es la diferenciabilidad. Simpre una solución clásica es una solución mild, mientras que una solución mild se vuelve clásica si fuera diferenciable. Para pasar de una ecuación diferencial o integro-diferencial a una integral por lo general se utiliza un operador resolvente (siempre que exista), se puede recuerrir a [27, 43] para obtener mayores detalles. En el caso de cuaciones diferenciales en el espacio euclideano suele ocuparse el método de variación de parámetros.

En el estudio de nuestra ecuación integro-diferencial, se generaliza el estudio para la ecuación presentada en [29] y trata una ecuación particular a la dada en [51] pero estudiándola con teoremas que gozan de otras hipótesis.

Este capítulo está también destinado al estudio de la existencia y unicidad de las solución casi automórfica para ecuaciones diferenciales neutrales no-autónomas:

$$x'(t) = A(t)x(t) + [f(t, x(t))]' + g(t, x(t)),$$

así mismo al estudio de la solución casi automórfica compacta de los sistemas:

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t),$$

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t)),$$

Como estas ecuaciones diferenciales son no-autónomas, para su estudio se requiere que la parte homogénea asociada a ellas:

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

cumpla con la condición de dicotomía exponencial y su función de Green asociada sea de Bi-casi automorficidad.

En el contexto de las soluciones casi automórficas compactas se consigue un lema importante el que bajo condiciones naturales otorga la condición de Bi-casi automorficidad compacta de la función de Green sin recurrir a las condiciones espectrales de Acquistapace-Terrini [20, 35], éste constituye un logro significativo en éste capítulo.

Capítulo 3.

Este capítulo está destinado a estudiar las ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos (DEPCA), se logra obtener generalizaciones de teoremas que se ocupan para estudiar las DEPCA's en el marco de las funciones casi periódicas [1, 54]. Se introduce la noción de Bi-casi automorficidad discreta que sirve (junto con la teoría de dicotomía exponencial discreta) para obtener soluciones casi automórficas discretas de ecuaciones en diferencias no autónomas. Cuando se trata de estudiar un sistema de DEPCA autónoma por el método de reducción, nos encontramos con el problema de decidir sobre la casi automorficidad de la función no necesariamente continua $f([t])$, donde f es casi automórfica y $[\cdot]$ es la función parte entera. Como por definición las funciones casi automórficas son continuas, se ve que $f([\cdot])$ no necesariamente es casi automórfica; por ello nos hemos visto en la necesidad de introducir una nueva familia de funciones las que denominamos funciones $\mathbb{Z}$-casi automórficas, éstas nos ayudan a entender a la nueva función $f([\cdot])$ y permite estudiar las DEPCA autónomas por el método de reducción. Además de esto, se logra establecer la importancia de éstas funciones al continuar el estudio de las DEPCA no-autónomas. Finalmente se da una aplicación al estudio de la existencia y unicidad de la solución casi automórfica para el modelo de Lasota-Wazewska con argumento constante a trozos.

Capítulo 1

Preliminares y Resultados Básicos

1.1. Funciones Casi Automórficas.

Definición 1.1.1 *Una función continua $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$, con $\mathbb{X}$ un espacio de Banach (real o complejo) es casi automórfica, si para cualquier sucesión $\{s_n'\} \subset \mathbb{R}$ existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s_n'\}$ tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$:*

$$\tilde{\varphi}(t) := \lim_{n\to+\infty} \varphi(t+s_n)$$

está bien definida y

$$\varphi(t) = \lim_{n\to+\infty} \tilde{\varphi}(t-s_n).$$

Al fijarnos en esta definición debemos especificar un poco más con respecto a los límites y a la función $\tilde{\varphi}$ que se define, ya que a veces uno tiende a pensar que ésta nueva función es un buen candidato para ser casi automórfica.

Observación 1.1.1

i) Los límites en la definición 1.1.1 son puntuales.

ii) Aún si $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ la función límite $\tilde{\varphi}(t)$ no necesariamente es una función continua, pero sí una función medible.

La parte *ii)* es natural ya que el límite puntual de una sucesión de funciones continuas no necesariamente es continua, mas la medibilidad se puede concluir debido a que es el límite de una sucesión de funciones continuas por lo tanto medibles. De esto podemos ver que $\tilde{\varphi}$ no necesariamente es casi automórfica.

Para poder manejar una cantidad sustentable de ejemplos de funciones casi automórficas, debemos al menos mencionar una clase muy importante de funciones que son las funciones casi periódicas.

Las siguientes definiciones son dos formas de decir cuando una función continua es casi-periódica, la equivalencia de éstas se puede encontrar en diferentes textos sobre la materia uno de ellos es por ejemplo el libro de Arlington M. Fink [25] y algunas referencias del texto.

Definición 1.1.2 *(Bochner) Una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ se dice casi periódica si para cualquier sucesión $\{s_n'\} \subset \mathbb{R}$ existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s_n'\}$ tal que se tienen los siguientes límites uniformes :*

$$\tilde{f}(t) := \lim_{n\to+\infty} f(t+s_n),$$

$$f(t) = \lim_{n\to+\infty} \tilde{f}(t-s_n).$$

Definición 1.1.3 *(Convergencia uniforme) Una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ se dice casi periódica si es el límite uniforme de una serie de funciones trigonométricas definidas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{X}$*

Existen muchas propiedades de éstas funciones. Un estudio detallado de las funciones casi periódicas se puede encontrar en las referencias [25, 16, 55] entre otros. Una propiedad importante (entre otras) de las funciones casi periódicas es la siguiente:

Proposición 1.1.1 *Toda función casi periódica es uniformemente continua.*

Una demostración de ésta proposición se puede ver en [25, 16, 55].

Ejemplo 1.1.1

a) Las funciones trigonométricas generalizadas $P : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$, dada por la relación $P(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k t}, a_k \in X, \lambda_k \in \mathbb{R}$, son casi periódicas.

b) Todas las funciones periódicas continuas son casi periódicas.

La parte a) es natural por la definición 1.1.3. b) es consecuencia del teorema de Féjer y ocupando nuevamente la definición 1.1.3.

Se debe hacer notar que no toda función casi periódica es periódica como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1.2 *Sean $a, b \in \mathbb{X} - \{0\}$, entonces la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ definida por:*

$$f(t) = ae^{it} + be^{i\sqrt{2}t},$$

es casi periódica, pero no periódica.

Una mirada a este ejemplo indica que las funciones periódicas (de todos los periodos) no tienen oportunidad de formar un espacio vectorial. También se concluye de éste que la contención de las funciones periódicas continuas en las casi periódicas es propia.
El siguiente ejemplo entrega una vasta cantidad de ejemplos de funciones casi automórficas.

Ejemplo 1.1.3 *Toda función casi periódica es casi automórfica.*

Esto no es difícil de ver ya que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual.

Asi como existen funciones casi periódicas que no son periódicas, también existen funciones casi automórficas que no son casi periódicas, un ejemplo conocido es el siguiente:

Ejemplo 1.1.4 *Sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:*

$$\psi(t) = \sin\left(\frac{1}{2 + \cos(t) + \cos(t\sqrt{2})}\right),$$

entonces ésta es casi automórfica, pero no casi periódica.

De hecho ésta función no es uniformente continua por lo tanto no es casi periódica (proposición 1.1.1). Una demostración de la afirmación en este ejemplo se puede encontrar en el artículo [5] subido al arxiv de Bolis Basit y Hans Günzler.

De éste ejemplo se concluye que las funciones casi automórficas contienen propiamente a las funciones casi periódicas.

Para dar un resumen adecuado de las ideas introducidas en los ejemplos anteriores, se da la siguiente observación:

Observación 1.1.2 *Si denotamos por* $P(\mathbb{R},\mathbb{X}), AP(\mathbb{R},\mathbb{X}), AA(\mathbb{R},\mathbb{X}), BC(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *a los conjuntos de las funciones periódicas continuas, casi periódicas, casi automórficas y las funciones continuas y acotadas, entonces tenemos las siguientes inclusiones:*

$$P(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset AP(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset AA(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset BC(\mathbb{R},\mathbb{X}).$$

En el teorema siguiente se resumen las propiedades que satisfacen las funciones casi automórficas, éstas se emplearán posteriormente y en algunos casos sin hacer mención explícita.

Teorema 1.1.1 *Sea* $f \in AA(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *entonces se verifican las siguientes propiedades:*

1) Si $g \in AA(\mathbb{R},\mathbb{X})$, *entonces* $f+g \in AA(\mathbb{R},\mathbb{X})$

2) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, *entonces* $\alpha f \in AA(\mathbb{R},\mathbb{X})$

3) Sea $a \in \mathbb{R}$ *un número fijo, entonces la función* $f_a(t) := f(t+a)$ *es casi automórfica.*

4) Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $\phi(t) = at+b, a, b \in \mathbb{R}$, *entonces la función compuesta* $f \circ \phi(t) = f(at+b)$ *es casi automórfica.*

5) f *es una función acotada.*

6) si $\tilde{f}$ *es la función límite de* f *como en la definición (1.1.1), entonces* $\tilde{f}$ *es acotada, más aún se tiene la relación:*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} ||f(t)|| = \sup_{t\in\mathbb{R}} ||\tilde{f}(t)||.$$

7) El rango de f, $\Re(f) = \{y \in \mathbb{X} : \exists t \in \mathbb{R} \text{ con } f(t) = y\}$ *es relativamente compacto.*

Demostración. Las demostraciones de los items 1), 2) y 3) son inmediatas de realizar por lo que ellas se omiten. Demostremos los ítems restantes:

4). Por 3), es suficiente mostrar que para la función $\phi(t) = at, a \in \mathbb{R} - \{0\}$, la compuesta $f \circ \phi(t)$ es casi automórfica, ya que para $a = 0$ se vuelve una constante y es inmediata (por definición). Sea $\{s'_n\}$ una sucesión arbitraria de números reales, entonces $\sigma'_n = \phi(s'_n)$ es una sucesión de números reales también, luego por ser f casi automórfica, existe una subsucesión $\{\sigma_n = \phi(s_n)\}$ de $\{\phi(s'_n)\}$ y una función $\tilde{f}$ tal que los siguientes límites se satisfacen:

$$\lim_{n\to+\infty} f(t+\sigma_n) =: \tilde{f}(t),$$

$$\lim_{n\to+\infty} \tilde{f}(t-\sigma_n) = f(t).$$

consideremos $\phi(t) = s$, luego:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} f\circ\phi(t+s_n) &= \lim_{n\to+\infty} f(a(t+s_n)) \\
&= \lim_{n\to+\infty} f(at+as_n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} f(s+\sigma_n) \\
&= \tilde{f}(s) \\
&= \tilde{f}(\phi(t)).
\end{aligned}$$

La demostración de $\lim_{n\to+\infty} \tilde{f}(\phi(t-s_n)) = f\circ\phi(t)$ se hace de manera análoga.

5). Supongamos por el contrario que la función f no es acotada; es decir,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} ||f(t)|| = +\infty,$$

de esto, existe una sucesión $\{s_n'\} \subset \mathbb{R}$ tal que :

$$\lim_{n\to+\infty} ||f(s_n')|| = +\infty. \tag{1.1.1}$$

Pero la función f es casi automórfica, entonces existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s_n'\}$, tal que :

$$\lim_{n\to+\infty} ||f(s_n)|| = ||\tilde{f}(0)||, \tag{1.1.2}$$

donde $\tilde{f}$ es la función definida como en la definición (1.1.1). Pero al realizar transitividad entre (1.1.1) y (1.1.2) se tiene $||\tilde{f}(0)|| = +\infty$ lo cual es imposible. Por lo tanto f es acotada.

6). Sea $\{s_n'\}$ una sucesión arbitraria en $\mathbb{R}$, entonces existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s_n'\}$ tal que se satisfacen las relaciones de la definición (1.1.1); esto es, se tienen los límites puntuales:

$$\lim_{n\to+\infty} f(t+s_n) =: \tilde{f}(t), \tag{1.1.3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \tilde{f}(t-s_n) = f(t). \tag{1.1.4}$$

Dado que en el ítem 5) se demuestra que la función f es acotada, entonces se puede deducir de la relación (1.1.3) que la función $\tilde{f}$ es acotada, pues:
$||\tilde{f}(t)|| = ||\lim_{n\to+\infty} f(t+s_n)|| = \lim_{n\to+\infty} ||f(t+s_n)|| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} ||f(t)|| < +\infty.$

Similarmente por (1.1.4), se tiene:
$||f(t)|| = ||\lim_{n\to+\infty} \tilde{f}(t-s_n)|| = \lim_{n\to+\infty} ||\tilde{f}(t-s_n)|| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} ||\tilde{f}(t)||.$
Por lo tanto:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} ||f(t)|| = \sup_{t\in\mathbb{R}} ||\tilde{f}(t)||.$$

7). Sea $\{y_n'\}$ una sucesión arbitraria en el rango de f, es decir $\{y_n'\} \subset \Re(f)$, por la definición de rango, existe una sucesión de números reales $\{s_n'\}$ tal que la correspondencia siguiente se verifica:

$$y_n' = f(s_n'),$$

pero, al ser f una función casi automórfica, existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s_n'\}$, tal que:

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} f(s_n) = \tilde{f}(0),$$

por lo tanto existe subsucesión $\{y_n\} \subseteq \{y_n'\}$ que converge en $\mathbb{X}$, lo que asegura que el rango de f, $\Re(f)$ es relativamente compacto.□

Observación 1.1.3

i) De los items 1) y 2) podemos concluir que cualquier combinación lineal finita de funciones casi automórficas es casi automórfica. Esto es, las funciones casi automórficas forman un subespacio vectorial de $BC(\mathbb{R};\mathbb{X})$.

ii) Para un espacio de Banach de dimensión finita podemos obtener 4) a partir de 7), ya que ahí toda función de rango relativamente compacto es acotada. Aunque en nuestro trabajo estamos interesados en funciones definidas sobre $\mathbb{C}^p$, se ha demostrado primero el ítem 4) para poder utilizarlo en el ítem 6) también porque se trata de un espacio de Banach $\mathbb{X}$ en general.

En la demostración del ítem 5), precisamente en (1.1.2) se utilizó la continuidad de la norma $||\cdot||$ para poder obtener la relación:

$$\lim_{n\to+\infty}(||\ ||\circ f)(0+s_n) = (||\ ||\circ \tilde{f})(0),$$

esto nos lleva a pensar en que si la composición de una función continua con una casi automórfica es casi automórfica; si esto lo formulamos como una pregunta, la respuesta se da en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.2 *Sea $f \in AA(\mathbb{R},\mathbb{X})$ y considere $\phi : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ una función continua, entonces la compuesta $\phi \circ f$ es casi automórfica.*

Como sabemos todo operador lineal $L : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ es continuo si y sólo si es acotada. Una consecuencia inmediata para éste teorema es el corolario que a continuación se enuncia.

Corolario 1.1.1 *Sea $L : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ un operador lineal y acotado, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ una función casi automórfica, entonces $Lf : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ es casi automórfica.*

Nuestro trabajo también trata de sistemas de ecuaciones no-autónomas sobre el espacio de dimensión finita $\mathbb{C}^p$, por lo que la noción de matriz casi automórfica es necesaria. Enunciamos algunas propiedades que involucran a estas matrices las que se ocuparán en capítulos posteriores (a veces sin hacer mención explícita).

Definición 1.1.4 *Sea $M : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{p\times p}$ una función matricial, con entradas $m_{ij}(t)$. La matriz M, se dice casi automórfica si cada una de sus componentes $m_{ij}(t)$ son casi automórficas.*

La demostración del siguiente teorema se puede realizar utilizando las propiedades dadas en el Teorema 1.1.1.

Teorema 1.1.3 *Sean $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ funciones casi automórficas, entonces $f\cdot h : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ definida por $(f\cdot h)(t) = f(t)h(t)$ es casi automórfica.*

Por este teorema y debido a que $AA(\mathbb{R};\mathbb{C}^p)$ es un espacio vectorial se consigue el siguiente corolario.

Corolario 1.1.2 *Sea $M : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{p\times p}$ una matriz casi automórfica y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^p$ una función casi automórfica, entonces la función $Mf : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^p$ definida por $(Mf)(t) := M(t)f(t)$ es casi automórfica.*

Terminamos esta sección con un contenido que relaciona a sucesiones de funciones y su límite uniforme. Consideremos una sucesión de funciones $\{f_k\}$ tal que converge uniformemente, digamos a f; sabemos que existen propiedades que se transmiten de la sucesión hacia su límite tales como la continuidad, la diferenciabilidad (con alguna hipótesis auxiliar), integrabilidad, etc. Bajo éste contexto el siguiente teorema muestra que la propiedad de ser casi automórfica también es hereditaria bajo límites uniformes, formalmente tenemos:

Teorema 1.1.4 *Considere una sucesión $\{f_k\}$ de funciones casi automórficas que converge uniformemente a una función f, entonces f es casi automórfica.*

Demostración. Sea $\{\eta'_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión arbitraria, como f_1 es casi automórfica existe una subsucesión$\{\eta_{n_1}\} \subset \{\eta'_n\}$ y una función h_1 tal que los siguientes límites puntuales se tienen:

$$\lim_{n\to+\infty} f_1(t+\eta_{n_1}) = h_1(t), \lim_{n\to+\infty} h_1(t-\eta_{n_1}) = f_1(t);$$

del mismo modo por ser f_2 una función casi automórfica, existe una subsucesión $\{\eta_{n_2}\} \subset \{\eta_{n_1}\}$ y una función h_2 tal que los siguientes límites puntuales se tienen:

$$\lim_{n\to+\infty} f_2(t+\eta_{n_2}) = h_2(t), \lim_{n\to+\infty} h_2(t-\eta_{n_2}) = f_2(t);$$

Siguiendo este procedimiento podemos encontrar una subsucesión (diagonal) $\{\eta_n\} \subset \{\eta'_n\}$, tal que puntualmente:

$$\lim_{n\to+\infty} f_j(t+\eta_n) = h_j(t), \lim_{n\to+\infty} h_j(t-\eta_n) = f_j(t), \; j=1,2,\ldots$$

Veamos que esta nueva sucesión $h_j(t)$ es de Cauchy. En efecto, sean $i, j \in \mathbb{N}$ entoces:

$$|h_i(t) - h_j(t)| \quad \leq \quad |h_i(t) - f_i(t+\eta_n)| + |f_i(t+\eta_n) - f_j(t+\eta_n)| + |f_j(t+\eta_n) - h_j(t)|$$

Pero por la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_k\}$ podemos encontrar un número natural M tal que uniformemente (para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$) para todo $i, j \geq M$ se tiene $|f_i(t+\eta_n) - f_j(t+\eta_n)| \leq \frac{\epsilon}{3}$. También puntualmente (para cada $t \in \mathbb{R}$) existe un número natural $N(t,\epsilon)$ tal que $|h_i(t) - f_i(t+\eta_n)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ y $|h_j(t) - f_j(t+\eta_n)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ siempre que $n \geq N(t,\epsilon)$. Por lo tanto:

$$|h_i(t) - h_j(t)| \leq \epsilon.$$

De esto podemos deducir que $\{h_j(t)\}$ es de Cauchy por lo tanto debido a la completitud del espacio $\mathbb{X}$ se concluye que existe una función h tal que h_j converge puntualmente a h.
Afirmación: Los siguientes límites puntuales se satisfacen

$$\lim_{n\to+\infty} f(t+\eta_n) = h(t), \lim_{n\to+\infty} h(t-\eta_n) = f(t).$$

En efecto:

$$|f(t+\eta_n) - h(t)| \quad \leq \quad |f(t+\eta_n) - f_j(t+\eta_n)| + |f_j(t+\eta_n) - h_j(t)| + |h_j(t) - h(t)|$$

como antes por la convergencia uniforme de f_k, la convergencia puntual de las sucesiones $f_j(t+\eta_n)$ y $h_j(t)$ se puede concluir que para n suficientemente grande $|f(t+\eta_n) - h(t)| \leq \epsilon$. Del mismo modo se concluye que $\lim_{n\to+\infty} h(t-\eta_n) = f(t)$. $\square$

Dotemos ahora al espacio vectorial de las funciones casi automórficas de la norma uniforme, esto es: para $f \in AA(\mathbb{R};\mathbb{X})$, se define:

$$||f||_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|.$$

Se puede notar que por el ítem 4) del Teorema 1.1.1 $||f||_\infty$ está bien definifa y además es una norma en el espacio $AA(\mathbb{R};\mathbb{X})$. La principal consecuencia del Teorema 1.1.4 es que el espacio $AA(\mathbb{R};\mathbb{X})$ es un subespacio cerrado de $BC(\mathbb{R};\mathbb{X})$ bajo la topología de la convergencia uniforme, por lo tanto $AA(\mathbb{R};\mathbb{X})$ es un espacio de Banach. Esto es de mucha importancia porque al inducir la métrica uniforme a partir de ésta norma se pueden concluir teoremas de existencia y unicidad de puntos fijos para operadores definidos sobre $AA(\mathbb{R};\mathbb{X})$. Particularmente en nuestro caso a través del teorema de punto fijo de Banach.

1.2. Funciones Casi Automórficas Uniformemente sobre Subconjuntos Compactos.

Debido a que en nuestro trabajo estamos interesados en ecuaciones diferenciales, integrales e íntegro-diferenciales que son no-lineales (o semilineales) es que nos encontramos con más de una expresión de la forma $f(t, x(t)), t \in \mathbb{R}$, dentro de la estructura de tales ecuaciones. Sin entrar a mayores detalles, podemos mencionar algunos ejemplos de ecuaciones en los que aparecen éstas expresiones, en:
En la ecuación diferencial:

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t));$$

en la ecuación integral:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} C(t-s)f(s, y(s))ds,$$

y más aún en la ecuación integro-diferencial:

$$u'(t) = Au(t) + \int_{0}^{t} B(t-s)u(s)ds + f(t, u(t)),\ t \geq 0.$$

Las propiedades de los operadores $A, A(t), B(t), C(t)$, que tengan que ver con el buen planteo de las ecuaciones, regularidad, etc se especificarán en su momento. Lo que apreciamos es que esto motiva la necesidad de estudiar la noción de casi automorficidad para la función $f(t, x(t)), t \in \mathbb{R}$ el cuál se hará en un ámbito general. Por supuesto sólo haremos mención de las propiedades que nos interesan para capítulos posteriores. Una descripción un poco más amplia de ésta la podemos encontrar en [36]. Para el caso de las funciones casi periódicas en [52].

En esta sección estudiaremos sólo las funciones $f(t, x), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{X}$; el estudio de la función compuesta $f(t, x(t)), t \in \mathbb{R}$ y sus consecuencias se hará en la siguiente sección.

Definición 1.2.1 *Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ una función continua, ésta se dice que es casi automórfica en $t \in \mathbb{R}$ sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{X}$, si dada cualquier sucesión de números reales $\{s'_n\}$ y un subconjunto compacto $K \subset \mathbb{X}$, existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s'_n\}$ y una función $\tilde{f}(\cdot, \cdot)$ tal que para cada $t \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in K$ los siguientes límites se satisfacen*

$$\lim_{n \to +\infty} f(t + s_n, x) = \tilde{f}(t, x),$$

$$\lim_{n \to +\infty} \tilde{f}(t - s_n, x) = f(t, x).$$

Observación 1.2.1

i) Notemos que ésta definición indica que la función $\tilde{f}(\cdot, \cdot)$ está bien definida para cada $t \in \mathbb{R}$ y que el límite es uniforme con respecto a cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{X}$.

ii) Denotaremos a este tipo de funciones como $AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$.

En el siguiente Teorema se resumen algunas propiedades de las funciones que están en $AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$, éste es análogo al Teorema 1.1.1 no sólo en su significado sino también en las demostraciones, por lo que ellas se omiten.

Teorema 1.2.1 *Sea $f \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$, entonces tenemos las siguientes propiedades:*

1) Si $g \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$, entonces $f + g \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$

2) Si $c \in \mathbb{R}$, entonces $cf \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$.

3) $\sup_{t\in\mathbb{R}} ||f(t,x)|| = M_x < +\infty$.

4) Si $\tilde{f}(\cdot,\cdot)$ *es la función definida en la definición 1.2.1, entonces* $\sup_{t\in\mathbb{R}} ||\tilde{f}(t,x)|| = N_x < +\infty$.

Observación 1.2.2

i) Los ítems 1) y 2) del Teorema 1.2.1 indican que $AA(\mathbb{R}\times\mathbb{X};\mathbb{X})$ es un espacio vectorial.

1.3. Composición de Funciones Casi Automórficas.

Como ya vimos, el espacio $AA(\mathbb{R};\mathbb{X})$ es de Banach; también es conocido que algunas de las técnicas para el estudio de las soluciones de ecuaciones diferenciales consiste en llevarla a una ecuación integral, de tal manera que el problema se reduzca a encontrar soluciones de una ecuación integral. El método que ocupamos es el mencionado y a menudo definiremos operadores $\Gamma : AA(\mathbb{R};\mathbb{X}) \to AA(\mathbb{R};\mathbb{X})$, uno de los problemas con los que nos encontramos es el de ver que Γ sea un operador bien definido, es decir que sea capaz de llevar funciones casi automórficas en funciones casi automórficas. Para poder salvar éste problema es que desarrollamos lemas de composición, los que serán de utilidad en capítulos posteriores.

Para nuestros intereces reproducimos algunos lemas que se dan en el artículo [22]. Empezamos con la siguiente definición.

Definición 1.3.1 *Sea* $K \subset \mathbb{X}, T \subset \mathbb{R}$, *una función continua* $f : T\times\mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *es uniformemente continua sobre* K *uniformemente para* $t \in T$, *si:*
Para todo $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$, *tal que para todo* $x_1, x_2 \in K$ *con* $||x_1 - x_2|| < \delta$ *y todo* $t \in T$, $||f(t,x_1) - f(t,x_2)|| < \epsilon$.

Denotaremos al conjunto de estas funciones por $C_K(T\times\mathbb{X};\mathbb{X})$.

Lema 1.3.1 *Sea* $y \in AA(\mathbb{R};\mathbb{X}), K = \overline{\{y(t) : t\in\mathbb{R}\}}$ *y* $f \in AA(\mathbb{R}\times\mathbb{X};\mathbb{X}) \cap C_K(\mathbb{R}\times\mathbb{X};\mathbb{X})$, *entonces* $f(\cdot, y(\cdot)) \in AA(\mathbb{R};\mathbb{X})$

Demostración. Sea $\{s_n'\}$ una sucesión arbitraria en $\mathbb{R}$, por ser f e y funciones casi automórficas, existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s_n'\}$ tal que los siguientes límites se tienen:
a) $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t+s_n, x) =: \tilde{f}(t,x),\ t\in\mathbb{R},\ x\in K$.
b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{f}(t-s_n, x) = f(t,x),\ t\in\mathbb{R},\ x\in K$.
c) $\lim\limits_{n\to+\infty} y(t+s_n) =: \tilde{y}(t),\ t\in\mathbb{R}$.
d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{y}(t-s_n) = y(t),\ t\in\mathbb{R}$.
Ahora, la diferencia : $f(t+s_n, y(t+s_n)) - \tilde{f}(t,\tilde{y}(t)) \in \mathbb{X}$ la podemos estimar del siguiente modo:

$$\begin{aligned} ||f(t+s_n, y(t+s_n)) - \tilde{f}(t,\tilde{y}(t))|| &\leq ||f(t+s_n, y(t+s_n)) - f(t+s_n,\tilde{y}(t))|| + \\ &+ ||f(t+s_n,\tilde{y}(t)) - \tilde{f}(t,\tilde{y}(t))|| \end{aligned}$$

de esta última desigualdad, de a) y c), además del hecho que $f \in C_K(\mathbb{R}\times\mathbb{X};\mathbb{X})$ se tiene que para un $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande:

$$||f(t+s_n, y(t+s_n)) - \tilde{f}(t,\tilde{y}(t))|| < \epsilon.$$

esto es, tenemos el siguiente límite puntual:

$$\lim_{n\to+\infty} f(t+s_n, y(t+s_n)) = \tilde{f}(t,\tilde{y}(t)).$$

Para demostrar el otro límite:

$$\lim_{n\to+\infty} \tilde{f}(t-s_n,\tilde{y}(t-s_n)) = f(t,y(t)),$$

se hacen los mismos detalles con la única diferencia que se deben tomar las partes b) y d) (en lugar de a) y c)).□

Observación 1.3.1 *Se puede obtener la misma conclusión de éste Lema cuando f forma parte de una familia mas específica de funciones; esto es, se tiene la siguiente proposición:*

Proposición 1.3.1 *Sea $f \in AA(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$ Lipschitz en la segunda variable, es decir:*

$$||f(t,x)-f(t,y)|| \leq L_f||x-y||, \forall x,y \in \mathbb{X}, t\in\mathbb{R}.$$

Si $y \in AA(\mathbb{R},\mathbb{X})$, entonces $f(\cdot,y(\cdot)) \in AA(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

La verificación de ésta proposición es inmediata ya que la condición de lipschicidad implica continuidad uniforme.

Lema 1.3.2 *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{X}$ y $f \in AA(\mathbb{R}\times\mathbb{X};\mathbb{X})\cap C_K(\mathbb{R}^+\times\mathbb{X};\mathbb{X})$, entonces $f \in C_K(\mathbb{R}\times\mathbb{X};\mathbb{X})$.*

Demostración. Sea $\{s'_n\}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to+\infty} s'_n = +\infty$. Por ser f casi automórfica, existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s'_n\}$ y una función $\tilde{f}(\cdot,\cdot)$ tal que:
a) $\lim_{n\to+\infty} f(t+s_n,x) =: \tilde{f}(t,x), t\in\mathbb{R}, x\in K.$
b) $\lim_{n\to+\infty} \tilde{f}(t-s_n,x) = f(t,x), t\in\mathbb{R}, x\in K.$

Como $f \in C_K(\mathbb{R}^+\times\mathbb{X};\mathbb{X})$, tenemos: para todo $\epsilon > 0, \exists\delta > 0$, tal que si $x_1,x_2 \in K$ con $||x_1-x_2|| < \delta$, entonces para $t \geq 0$ se tiene:

$$||f(t,x_1)-f(t,x_2)|| < \epsilon.$$

Sea ahora $t\in\mathbb{R}$ arbitrario, entonces para n suficientemente grande tenemos $t+s_n \geq 0$, luego:

$$||f(t+s_n,x_1)-f(t+s_n,x_2)|| < \epsilon,$$

tomando límite cuando $n\to+\infty$, obtenemos:

$$||\tilde{f}(t,x_1)-\tilde{f}(t,x_2)|| < \epsilon,$$

esto es $\tilde{f} \in C_K(\mathbb{R}\times\mathbb{X};\mathbb{X})$.
Por esto, para $t\in\mathbb{R}$ tenemos:

$$||\tilde{f}(t-s_n,x_1)-\tilde{f}(t-s_n,x_2)|| < \epsilon,$$

luego tomando límite cuando $n\to+\infty$ vemos que:

$$||f(t,x_1)-ft,x_2)|| < \epsilon. \ \square$$

Ahora se analizará la casi automorficidad de operadores integrales, los que serán muy utilizados en el capítulo 2.

Lema 1.3.3 *Sea $f \in AA(\mathbb{R}\times\mathbb{X};\mathbb{X})$ Lipschitz en la segunda variable y $C \in L^1(\mathbb{R}^+)$, entonces el operador:*

$$(\Gamma y)(t) = \int_{-\infty}^{t} C(t-s)f(s,y(s))ds$$

mapea $AA(\mathbb{R},\mathbb{X})$ en $AA(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Demostración. Como consecuencia de la observación 1.3.1, tenemos que $f(\cdot, y(\cdot)) \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, por lo que si consideramos $\{s_n'\}$ una sucesión arbitraria en $\mathbb{R}$, existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s_n'\}$ tal que los siguientes límites puntuales se satisfacen:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} f(t + s_n, y(t + s_n)) = \tilde{f}(t, \tilde{y}(t)),\ t \in \mathbb{R}.$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \tilde{f}(t - s_n, \tilde{y}(t - s_n)) = f(t, y(t)),\ t \in \mathbb{R}.$

Luego:

$$\Gamma y(t + s_n) = \int_{-\infty}^{t+s_n} C(t + s_n - s) f(s, y(s)) ds.$$

Consideremos ahora el siguiente cambio de variable: $t + s_n - s = w$, entonces la relación integral precedente queda:

$$\Gamma y(t + s_n) = \int_0^{+\infty} C(w) f(t + s_n - w, y(t + s_n - w)) dw$$

pero como $f(\cdot, y(\cdot))$ es una función casi automórfica entonces es acotada, esto es: $\exists M > 0$, tal que $||f(t, y(t))|| \leq M,\ \forall\ t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto se obtiene:

$$||C(w) f(t + s_n - w, y(t + s_n - w))|| \leq ||C(w)|| M,$$

y como $C \in L^1(\mathbb{R}^+)$, el teorema de convergencia dominada de Lebesgue y la parte a) otorgan la igualdad en el siguiente límite puntual:

$$\lim_{n \to +\infty} \Gamma y(t + s_n) = \int_0^{+\infty} C(w) \tilde{f}(t - w, \tilde{y}(t - w)) dw,$$

bajo el cambio de variable $t - w = s$, se tiene:

$$\lim_{n \to +\infty} \Gamma y(t + s_n) = \int_{-\infty}^{t} C(t - s) \tilde{f}(s, \tilde{y}(s)) ds.$$

Definamos el operador:

$$\tilde{\Gamma} y(t) := \int_{-\infty}^{t} C(t - s) \tilde{f}(s, \tilde{y}(s)) ds,$$

con esto tenemos el límite puntual (bien definido por a)):

$$\lim_{n \to +\infty} \Gamma y(t + s_n) = \tilde{\Gamma} y(t).$$

Para demostrar el límite:

$$\lim_{n \to +\infty} \tilde{\Gamma} y(t - s_n) = \Gamma y(t),$$

se procede de manera análoga. $\square$

Al observar la demostración del lema 1.3.3, podemos preguntarnos de manera natural, si existe un resultado análogo a éste para el operador:

$$\Gamma y(t) = \int_t^{+\infty} C(t - s) f(s, y(s)) ds,$$

La respuesta a esta pregunta es afirmativa y se da en el siguiente lema.

Lema 1.3.4 *Sea $f \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$ Lipschitz en la segunda variable y $C \in L^1(\mathbb{R}^-)$, entonces el operador:*

$$\Gamma y(t) = \int_t^{+\infty} C(t - s) f(s, y(s)) ds$$

mapea $AA(\mathbb{R}; \mathbb{X})$ en $AA(\mathbb{R}; \mathbb{X})$.

Demostración. La demostración es análoga a la del lema 1.3.3, por lo que se omite. $\square$.

Como consecuencia de estos lemas y del hecho que las funciones casi automórficas son un espacio vectorial, se consigue el siguiente corolario:

Corolario 1.3.1 *Sean f_1, C_1, f_2, C_2 como en las hipótesis del los lemas 1.3.3 y 1.3.4 respectivamente, entonces el operador:*

$$\Gamma y(t) = \int_{-\infty}^{t} C_1(t-s)f_1(s, y(s))ds + \int_{t}^{+\infty} C_2(t-s)f_2(s, y(s))ds$$

mapea $AA(\mathbb{R};\mathbb{X})$ en $AA(\mathbb{R};\mathbb{X})$.

Capítulo 2

Soluciones Casi Automórficas de Ecuaciones Integrales, Diferenciales e Integro-diferenciales.

En el presente capítulo, estamos interesados en obtener herramientas que nos ayuden a decidir sobre la existencia y unicidad de la solución casi-automórfica de ecuaciones integrales de convolución del tipo:

$$y(t) = f(t, y(t)) + \int_{-\infty}^{t} C_1(t-s)g_1(s, y(s))ds \tag{2.0.1}$$

y de su forma mas general:

$$y(t) = f(t, y(t)) + \int_{-\infty}^{t} C_1(t-s)g_1(s, y(s))ds + \int_{t}^{+\infty} C_2(t-s)g_2(s, y(s))ds, \tag{2.0.2}$$

donde $C_1 \in L^1(\mathbb{R}^+), C_2 \in L^1(\mathbb{R}^-)$y $f, g_1, g_2 \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$.
Estudiaremos existencia y unicidad de la solución mild asintóticamente casi automórfica de ecuaciones integro-diferenciales de la forma:

$$u'(t) = Au(t) + \int_{0}^{t} B(t-s)u(s)ds + g(t, u(t)), \ t \geq 0 \tag{2.0.3}$$

$$u(0) = x_0$$

donde $A : D(A) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, $B(t) : D(B(t)) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, $t \geq 0$ son operadores lineales cerrados, densamente definidos sobre el espacio de Banach $\mathbb{X}$; $D(A) \subset D(B(t))$ para todo $t \geq 0$ y $g(\cdot, \cdot)$ es una función asintóticamente casi automórfica con $x_0 \in \mathbb{X}$.
También estamos interesados en la búsqueda de la solución casi automórfica de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias neutrales:

$$x(t) = A(t)x(t) + [f(t, x(t))]' + g(t, x(t)).$$

donde la parte homogénea no autónoma satisface una condición de dicotomía exponencial y la función de Green asociada es Bi-casi automórfica. Por último asumiendo nuevamente las dos últimas condiciones se obtienen teoremas tipo Massera para la solución casi automórfica y casi automórfica compacta de los sistemas:

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t),$$
$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t)).$$

El estudio de las ecuaciones integrales (2.0.1) y (2.0.2) se realiza a través del análisis de operadores, que se obtienen de ellas de manera natural, es decir se identifica explícitamente un operador Γ y luego se estudia una ecuación operacional:

$$\Gamma u = u.$$

El método para enfrentar el problema es utilizar el teorema del punto fijo de Banach, para ello necesitamos de ciertas condiciones de Lipschitz, las que se traducen en la lipschicidad del operador Γ. Estos operadores de Lipschitz son ya sea globales; esto es, satisfacen alguna condición tipo Lipschitz en todo el espacio de Banach $\mathbb{X}$ y otros operadores que son Lipschitz local, es decir que satisfacen alguna condición tipo Lipschitz en algún subespacio propio del espacio de Banach $\mathbb{X}$.

El presente capítulo se ha dividido en cuatro secciones. En la sección **2.1** se estudia de manera general una ecuación operacional, en **2.2** se exponen resultados para ecuaciones integrales que terminan con algunos teoremas tipo Massera, luego en la sección **2.3** se estudia la ecuación integro-diferencial (2.0.3) para la que se obtiene existencia y unicidad de la solución mild asintóticamente casi automórfica y en la sección **2.4** se estudian respectivamente las solución casi automórfica y casi automórfica compacta para las ecuaciones diferenciales mencionadas.

2.1. Ecuaciones con Operadores.

2.1.1. Resultados Locales.

Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach y $M : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ un operador. En esta subsección obtenemos condiciones que garanticen la existencia y unicidad de la solución para la ecuación operacional:

$$Mu = u. \tag{2.1.4}$$

Plasmamos dos teoremas locales para la ecuación (2.1.4), de esta manera se pretende dar el paso a las ideas de obtener teoremas de nuestro interés concerniente a las ecuaciones integrales planteadas. Iniciamos con el teorema siguiente:

Teorema 2.1.1 *Sea $M : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ un operador, $\varrho > 0$ un número real arbitrario y considere el siguiente conjunto:*

$$\Delta_0 = \{y \in \mathbb{X} : ||y - y_0|| \leq \varrho\},$$

donde $y_0 = M(0)$, con $||y_0|| \leq \varrho$. Suponga que M cumple la siguiente condición de Lipschitz local:

$$||Mx - My|| \leq L_M ||x - y||, \ x, y \in \Delta_0,$$

además que las constantes $L_M, \varrho, ||y_0||_\infty$ satisfagan la siguiente relación:

$$L_M < \frac{\varrho}{\varrho + ||y_0||}.$$

Entonces la ecuación (2.1.4) posee una única solución en el conjunto Δ_0.

Demostración. De las hipótesis podemos notar que el operador M es una contracción, por lo que es suficiente mostrar la inclusión $M(\Delta_0) \subseteq \Delta_0$. En efecto, sea $y \in \Delta_0$, entonces:

$$\begin{aligned} ||M(y) - y_0|| &= ||M(y) - M(0)|| \\ &\leq L_M||y|| \\ &\leq L_M(||y - y_0|| + ||y_0||) \\ &\leq \varrho. \end{aligned}$$

El resultado se sigue del teorema del punto fijo de Banach. □

Otro tratamiento para la ecuación (2.1.4) se establece en el teorema que sigue, la ventaja con respecto al teorema anterior es que acá no necesariamente se exige que el conjunto Δ_0 contenga al elemento neutro del espacio $\mathbb{X}$. Una aplicación de éste teorema en espacios de Banach generalizados se puede ver en [42, Teorema 2].

Teorema 2.1.2 *Sea $M : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ un operador, $\varrho > 0$ un número real arbitrario y el siguiente conjunto:*

$$\Delta_0 = \{y \in \mathbb{X} : ||y - y_0|| \leq \varrho\}$$

donde $y_0 = M(0)$, suponga que M satisface la siguiente condición de Lipschitz local:

$$||Mx - My|| \leq L_M||x - y||, \ x, y \ \in \Delta_0,$$

con $L_M < 1$. Si además consideramos que y_0, My_0, L_M, ϱ satisfacen la relación:

$$0 < \theta = (1 - L_M)^{-1}||My_0 - y_0|| \leq \varrho.$$

Entonces la ecuación (2.1.4) posee una única solución $y \in \Delta_0$.

Demostración. Considere el conjunto

$$\mathfrak{B}(y_0, \theta) = \{z \in \mathbb{X} : ||z - y_0||_\infty \leq \theta\}.$$

Debido a que M es contractivo, sólo queda probar la inclusión $M(\mathfrak{B}(y_0, \theta)) \subseteq \mathfrak{B}(y_0, \theta)$; para esto sea $z \in \mathfrak{B}(y_0, \theta)$, entonces:

$$\begin{aligned} ||Mz - y_0|| &\leq ||Mz - My_0|| + ||My_0 - y_0|| \\ &\leq L_M||z - y_0|| + ||My_0 - y_0|| \\ &\leq \theta, \end{aligned}$$

la última desigualdad se debe a que $\theta(1 - L_M) = ||My_0 - y_0||$. □

2.2. Ecuaciones Integrales

En esta sección se estudia a las ecuaciones integrales (2.0.1) y (2.0.2), se inicia con la ecuación (2.0.1) a través de un teorema que involucra la Lipschicidad global, esto es:

Teorema 2.2.1 *Sean $f, g \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$ funciones Lipschitz globales en la segunda variable, esto es: existen constantes positivas L_f, L_g tal que para todo $x, y \in \mathbb{X}$ tenemos :*

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq L_f||x - y||,$$

$$||g(t, x) - g(t, y)|| \leq L_g||x - y||.$$

y sea $C \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Si $L_f + L_g||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)} < 1$, entonces la ecuación (2.0.1) tiene una única solución $y \in AA(\mathbb{R}; \mathbb{X})$.

Demostración. Consideremos el operador:

$$\begin{aligned} \Gamma : AA(\mathbb{R},\mathbb{X}) &\to AA(\mathbb{R},\mathbb{X}) \\ y &\to \Gamma y(t) = f(t,y(t)) + \int_{-\infty}^{t} C(t-s)g(s,y(s))ds. \end{aligned}$$

De la observación 1.3.1 y del lema 1.3.3 tenemos que Γ está bien definido.
Tomemos dos elementos $y_1, y_2 \in AA(\mathbb{R};\mathbb{X})$, luego:

$$\begin{aligned} ||\Gamma y_1(t) - \Gamma y_2(t)|| &\leq ||f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))|| + \int_{-\infty}^{t} |C(t-s)|||[g(s,y_1(s)) - g(s,y_2(s))]||ds \\ &\leq L_f||y_1 - y_2||_\infty + L_g \int_{-\infty}^{t} |C(t-s)|ds||y_1 - y_2||_\infty \\ &\leq (L_f + L_g||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)})||y_1 - y_2||_\infty. \end{aligned}$$

De esto y por hipótesis podemos notar que Γ es contractivo, por lo tanto la ecuación (2.0.1) tiene una única solución casi automórfica.□

Los siguientes teoremas involucran condiciones de Lipschicidad locales.

En [41, lema 2] se exhiben condiciones para obtener soluciones casi periódicas para el sistema lineal perturbado:

$$w' = B(t)w + f(t) + g(t,w).$$

El teorema siguiente sigue esas ideas para el caso de soluciones casi automórficas relacionado a la ecuación integral (2.0.1). Una diferencia en el procedimiento de la demostración es que en [41] se realiza a través de aproximaciones sucesivas la que también se puede realizar mediante el análisis de un operador, en tal sentido la demostración del teorema siguiente (al utilizar un operador) es más natural.

Teorema 2.2.2 *Sean $f,g \in AA(\mathbb{R}\times\mathbb{X};\mathbb{X})$, $C \in L^1(\mathbb{R}^+)$ y para $\varrho > 0$, considere el conjunto:*

$$\Delta_0 = \{y \in AA(\mathbb{R},\mathbb{X}) : ||y - y_0||_\infty \leq \varrho\},$$

donde:

$$y_0(t) = f(t,0) + \int_{-\infty}^{t} C(t-s)g(s,0)ds.$$

Asuma adicionalmente que $||y_0||_\infty \leq \varrho$ y que existen constantes positivas L_f, L_g tal que:

a) $||f(t,y(t)) - f(t,x(t))|| \leq L_f||y(t) - x(t)||, t \in \mathbb{R}, x,y \in \Delta_0.$

b) $||g(t,y(t)) - g(t,x(t))|| \leq L_g||y(t) - x(t)||, t \in \mathbb{R}, x,y \in \Delta_0.$

c) Las constantes $\varrho, L_f, L_g, ||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)}$ satisfacen la siguiente desigualdad:

$$L_f + L_g||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)} < \frac{\varrho}{\varrho + ||y_0||_\infty}, \tag{2.2.5}$$

entonces la ecuación integral (2.0.1) tiene una única solución en Δ_0.

Demostración. Consideremos el operador:

$$\begin{aligned} \Gamma : AA(\mathbb{R},\mathbb{X}) &\to AA(\mathbb{R},\mathbb{X}) \\ y &\to \Gamma y(t) = f(t,y(t)) + \int_{-\infty}^{t} C(t-s)g(s,y(s))ds. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Por la observación 1.3.1 y el lema 1.3.3 tenemos que Γ es un operador bien definido. Probemos que $\Gamma(\Delta_0) \subseteq \Delta_0$; en efecto, sea $y \in \Delta_0$ luego:

$$\begin{aligned}
||\Gamma y(t) - y_0(t)|| &\leq ||f(t, y(t)) - f(t, 0)|| + \int_{-\infty}^{t} |C(t-s)|||g(s, y(s)) - g(s, 0)||ds \\
&\leq L_f||y||_\infty + L_g||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)}||y||_\infty \\
&\leq (L_f + L_g||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)})(||y - y_0||_\infty + ||y_0||_\infty) \\
&\leq (L_f + L_g||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)})(\varrho + ||y_0||_\infty) \\
&\leq \varrho.
\end{aligned}$$

Ahora probaremos que Γ es un operador contractivo sobre Δ_0. En efecto, sean $y_1, y_2 \in \Delta_0$, luego:

$$\begin{aligned}
||\Gamma y_1(t) - \Gamma y_2(t)|| &\leq ||f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|| + \int_{-\infty}^{t} |C(t-s)|||g(s, y_1(s)) - g(s, y_2(s))||ds \\
&\leq (L_f + L_g||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)})||y_1 - y_2||_\infty.
\end{aligned}$$

De esto y (2.2.5) se sigue que Γ es un operador contractivo, entonces el teorema de punto fijo de Banach asegura que la ecuación integral (2.0.1) tiene una única solución en $AA(\mathbb{R}; \mathbb{X})$. $\square$

Las hipótesis para el teorema siguiente nos ayudan a estudiar la ecuación (2.0.1) de una manera un poco distinta, la diferencia con el anterior es que en lugar de considerar constantes positivas L_f y L_g se utilizan funciones $L_f(\cdot), L_g(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Estos métodos siguen las ideas de H. Ding et. al. [22], quienes estudian ecuaciones integrales con retardo infinito.
Consideremos las siguientes condiciones:

i) $f, g \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$, existen $L_f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ y $L_g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ funciones continuas y acotadas tal que : para todo $r > 0$ y para todo $x, y \in \mathbb{X}$ con $||x||, ||y|| \leq r$ tenemos :

$$||f(t, x) - f(t, y)|| < L_f(r)||x - y||,$$

$$||g(t, x) - g(t, y)|| < L_g(r)||x - y||.$$

ii) $C \in L^1(\mathbb{R}^+)$ y además:

$$\sup_{r>0} \left(r - rL_f(r) - rL_g(r)||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)}\right) > ||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)} \sup_{s\in\mathbb{R}} ||g(s, 0)|| + \sup_{s\in\mathbb{R}} ||f(s, 0)||.$$

Teorema 2.2.3 *Suponga que las condiciones i) y ii) se satisfacen, entonces la ecuación integral (2.0.1) posee una única solución en $AA(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*

Demostración. Consideremos el operador Γ definido en (2.2.6).
1) La buena definición del operador Γ se sigue de la observación 1.3.1 y del lema 1.3.3.

De ii) existe $R > 0$ tal que:

$$R - RL_f(R) - RL_g(R)||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)} > ||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)} \sup_{s\in\mathbb{R}} ||g(s, 0)|| + \sup_{s\in\mathbb{R}} ||f(s, 0)||. \tag{2.2.7}$$

Considere el conjunto cerrado $\Omega = \{w \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{X}) : ||w||_\infty \leq R\}$.

2) Probemos la inclusión $\Gamma(\Omega) \subseteq \Omega$. En efecto, sea $y \in \Omega$ entonces:

$$\begin{aligned}
||\Gamma y(t)|| &\leq ||f(t,y(t))|| + \int_{-\infty}^{t} |C(t-s)|||g(s,y(s))||ds \\
&\leq ||f(t,y(t)) - f(t,0)|| + ||f(t,0)|| + \int_{-\infty}^{t} |C(t-s)|||g(s,y(s)) - g(s,0) + g(s,0)||ds \\
&\leq L_f(R)R + ||f(t,0)|| + \int_{-\infty}^{t} |C(t-s)||(L_g(R)R + ||g(s,0)||)ds \\
&\leq L_f(R)R + \sup_{s\in\mathbb{R}} ||f(s,0)|| + (L_g(R)R + \sup_{s\in\mathbb{R}} ||g(s,0)||)||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)} \\
&\leq R.
\end{aligned}$$

3) Γ tiene un único punto fijo. En efecto: sean $y_1, y_2 \in \Omega$ entonces:

$$\begin{aligned}
||\Gamma y_1(t) - \Gamma y_2(t)|| &\leq ||f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))|| + \int_{-\infty}^{t} |C(t-s)|||g(s,y_1(s)) - g(s,y_2(s)))||ds \\
&\leq L_f(R)||y_1 - y_2||_\infty + L_g(R)||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)}||y_1 - y_2||_\infty \\
&\leq (L_f(R) + L_g(R)||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)})||y_1 - y_2||_\infty.
\end{aligned}$$

Notemos que de la desigualdad (2.2.7) logramos obtener:

$$R - RL_f(R) - RL_g(R)||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)} > 0,$$

también al ser $R > 0$ conseguimos la desigualdad

$$L_f(R) + L_g(R)||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)} < 1,$$

lo cual implica que Γ es contractivo. Por lo tanto, el resultado se sigue del Teorema de punto fijo de Banach. □
Observando la demostración del teorema anterior, podemos obtener el siguiente corolario:

Corolario 2.2.1 *Supongamos que la condición i) se satisface y $L_f(\cdot) = L_f, L_g(\cdot) = L_g$ son constantes positivas y que $C \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Si se satisface la desigualdad:*

$$L_f + L_g||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)} < 1,$$

entonces la ecuación (2.0.1) tiene una única solución casi automórfica.

Demostración. Consideremos el operador Γ definido en (2.2.6). Por las propiedades de las funciones casi automórficas, podemos notar que la siguiente expresión es finita:

$$||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)} \sup_{s\in\mathbb{R}} ||g(s,0)|| + \sup_{s\in\mathbb{R}} ||f(s,0)||.$$

Por hipótesis $1 - (L_f + L_g||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)}) > 0$, luego existe un número positivo R_0 tal que para todo $R \geq R_0$ se tiene:

$$R - RL_f - RL_g||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)} > ||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)} \sup_{s\in\mathbb{R}} ||g(s,0)|| + \sup_{s\in\mathbb{R}} ||f(s,0)||.$$

Siguiendo la demostración del teorema anterior se puede concluir que existe una única solución casi automórfica de la ecuación (2.0.1). □
Este corolario también se podría deducir del Teorema 2.2.1. El procedimiento en el corolario es en cierto sentido tratar de localizar la solución considerando una cota superior para ella.

Una aplicación del Teorema 2.1.2 a la ecuación (2.0.1) se da en el siguiente resultado local.

Teorema 2.2.4 *Sea Γ el operador definido en (2.2.6), considere $\rho > 0$ y el siguiente conjunto:*

$$\Delta_0 = \{y \in AA(\mathbb{R};\mathbb{X}) : ||y - y_0||_\infty \leq \rho\},$$

con:

$$y_0(t) = (\Gamma 0)(t) = f(t,0) + \int_{-\infty}^{t} C(t-s)g(s,0)ds,$$

suponga que se cumple la desigualdad:

$$0 < \theta = (1 - (L_f + L_g||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)}))^{-1}||\Gamma y_0 - y_0||_\infty \leq \rho,$$

con $L_f + L_g||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)} < 1$. Entonces la ecuación (2.0.1) tiene una solución única $y \in AA(\mathbb{R};\mathbb{X})$ que cumple $||y - y_0||_\infty \leq \rho$.

Demostración. La demostración se sigue del Teorema (2.1.2); en efecto, sea

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(y_0, \theta) = \{z \in AA(\mathbb{R};\mathbb{X}) : ||z - y_0|| \leq \theta\}$$

y $z \in \mathfrak{B}(y_0, \theta)$, entonces:

$$\begin{aligned} |(\Gamma z)(t) - y_0(t)| &\leq |(\Gamma z)(t) - (\Gamma y_0)(t)| + |(\Gamma y_0)(t) - y_0(t)| \\ &\leq (L_f + L_g||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)})||z - y_0||_\infty + ||\Gamma y_0 - y_0||_\infty. \end{aligned}$$

Luego se puede identificar la constante de Lipschitz $L_\Gamma = L_f + L_g||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)}$, con lo que se obtiene $\Gamma(\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{B}$. □

En lo que sigue se estudia la ecuación integral mas general dada en (2.0.2), esto es:

$$y(t) = f(t, y(t)) + \int_{-\infty}^{t} C_1(t-s)g_1(s, y(s))ds + \int_{t}^{+\infty} C_2(t-s)g_2(s, y(s))ds.$$

Como la ecuación (2.0.2) es mas general que (2.0.1) los teoremas de existencia y unicidad de la solución para la ecuación (2.0.2) generalizan los dados para la ecuación (2.0.1).
En [18] C. Cuevas y C. Lizama estudian soluciones casi automórficas para ecuaciones integrales con retardo infinito, en este caso dado que nuestras ecuaciones integrales combinan retardo infinito y avance infinito se trata de ecuaciones mas generales que las tratadas por ellos y por lo tanto nuestros métodos estudian de manera particular las ecuaciones que tratan en [18].

Teorema 2.2.5 *Sean $f, g_1, g_2 \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X};\mathbb{X})$, $C_1 \in L^1(\mathbb{R}^+), C_2 \in L^1(\mathbb{R}^-)$, $\varrho > 0$ y considere el conjunto:*

$$\Delta_0 = \{y \in AA(\mathbb{R},\mathbb{X}) : ||y - y_0||_\infty \leq \varrho\}$$

con:

$$y_0(t) = f(t,0) + \int_{-\infty}^{t} C_1(t-s)g_1(s,0)ds + \int_{t}^{+\infty} C_2(t-s)g_2(s,0)ds, \ t \in \mathbb{R}.$$

Asuma adicionalmente que $||y_0||_\infty \leq \varrho$ y las siguientes propiedades:

a) Existen constantes positivas L_f, L_{g_1}, L_{g_2} tal que para todo $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in \Delta_0$:

$$||f(t, y(t)) - f(t, x(t))|| \leq L_f||y(t) - x(t)||,$$

$$||g_1(t, y(t)) - g_2(t, x(t))|| \leq L_{g_1}||y(t) - x(t)||,$$

$$||g_2(t, y(t)) - g_2(t, x(t))|| \leq L_{g_2}||y(t) - x(t)||.$$

b) Las constantes $\varrho, L_f, L_{g_1}, L_{g_2}, ||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)}$ y $||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)}$ satisfacen la siguiente desigualdad:

$$L_f + L_{g_1}||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} + L_{g_2}||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)} < \frac{\varrho}{\varrho + ||y_0||_\infty}. \tag{2.2.8}$$

Entonces la ecuación integral (2.0.2) tiene una única solución casi automórfica en Δ_0.

Demostración. Considere el operador:

$$\begin{aligned} \Gamma : AA(\mathbb{R};\mathbb{X}) &\to AA(\mathbb{R};\mathbb{X}) \\ \Gamma y(t) &= f(t,y(t)) + \int_{-\infty}^{t} C_1(t-s)g_1(s,y(s))ds + \int_{t}^{+\infty} C_2(t-s)g_2(s,y(s))ds. \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Por la observación 1.3.1, los lemas 1.3.3 y 1.3.4 se concluye que Γ es un operador bien definido. Probemos que $\Gamma(\Delta_0) \subseteq (\Delta_0)$; en efecto, sea $y \in \Delta_0$, luego:

$$\begin{aligned} ||\Gamma y(t) - y_0(t)|| &\leq ||f(t,y(t)) - f(t,0)|| + \int_{-\infty}^{t} |C_1(t-s)|||g_1(s,y(s)) - g_1(s,0)||ds \\ &+ \int_{t}^{+\infty} |C_2(t-s)|||g_2(s,y(s)) - g_2(s,0)||ds \\ &\leq (L_f + L_{g_1}||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} + L_{g_2}||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)})||y||_\infty \\ &\leq (L_f + L_{g_1}||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} + L_{g_2}||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)})(||y - y_0||_\infty + ||y_0||_\infty) \\ &\leq \varrho. \end{aligned}$$

También Γ es una contracción en Δ_0, en efecto, sean $y_1, y_2 \in \Delta_0$ entonces:

$$\begin{aligned} ||\Gamma y_1(t) - \Gamma y_2(t)|| &\leq ||f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))|| + \int_{-\infty}^{t} |C_1(t-s)|||g_1(s,y_1(s)) - g_1(s,y_2(s))||ds \\ &+ \int_{t}^{+\infty} |C_2(t-s)|||g_2(s,y_1(s)) - g_2(s,y_2(s))||ds \\ &\leq (L_f + L_{g_1}||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} + L_{g_2}||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)})||y_1 - y_2||_\infty, \end{aligned}$$

debido a la desigualdad (2.2.8) se consigue que Γ es contractivo; luego el teorema de punto fijo de Banach concluye el teorema. $\Box$

Nuevamente como se hizo para el Teorema 2.2.3, se puede realizar la misma reflexión para el siguiente teorema con respecto al Teorema 2.2.5 y lo mismo sobre la generalización a los Teoremas de [22].

Asumamos las siguientes condiciones:

H_1 : $f, g_i \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X};\mathbb{X})$ y existen $L_f, L_{g_i} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ funciones continuas y acotadas tal que: para todo $r > 0$ y para todo $x, y \in \mathbb{X}$, con $||x||, ||y|| \leq r$ tenemos:

$$||f(t,x) - f(t,y)|| \leq L_f(r)||x - y||.$$

$$||g_i(t,x) - g_i(t,y)|| \leq L_{g_i}(r)||x - y||.$$

para $i = 1, 2$.

H_2 : $C_1 \in L^1(\mathbb{R}^+), C_2 \in L^1(\mathbb{R}^-)$ y además:

$$\begin{aligned} \sup_{r>0}(r - rL_f(r) &- rL_{g_1}(r)||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} - rL_{g_2}(r)||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)}) > \\ & ||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} \sup_{s\in\mathbb{R}} ||g_1(s,0)|| + ||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)} \sup_{s\in\mathbb{R}} ||g_2(s,0)|| + \sup_{s\in\mathbb{R}} ||f(s,0)||. \end{aligned}$$

Con esto tenemos el siguente teorema:

Teorema 2.2.6 *Suponga que H_1 y H_2 se satisfacen, entonces la ecuación integral (2.0.2) tiene una única solución casi automórfica.*

Demostración. Consideremos el operador Γ definido en (2.2.9). Por la observación 1.3.1, los lemas 1.3.3 y 1.3.4 se concluye que Γ es un operador bien definido.
Por H_2 existe $R > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} R - RL_f(R) \quad &- \quad RL_{g_1}(R)||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} - RL_{g_2}(R)||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)} > \\ & ||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} \sup_{s\in\mathbb{R}} ||g_1(s,0)|| + ||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)} \sup_{s\in\mathbb{R}} ||g_2(s,0)|| + \sup_{s\in\mathbb{R}} ||f(s,0)||. \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Sea el conjunto cerrado $\Omega_0 = \{y \in AA(\mathbb{R};\mathbb{X}) : ||y||_\infty \leq R\}$. Mostraremos que $\Gamma(\Omega_0) \subseteq \Omega_0$ y que Γ es contractivo, en efecto:
1) Sea $y \in \Omega_0$, luego:

$$\begin{aligned} ||\Gamma y(t)|| \quad &\leq \quad ||f(t,y(t)) - f(t,0) + f(t,0)|| + \int_{-\infty}^{t} |C_1(t-s)|[||g_1(s,y(s)) - g_1(s,0)|| + ||g_1(s,0)||]ds \\ &+ \quad \int_{t}^{+\infty} |C_2(t-s)|[||g_2(s,y(s)) - g_2(s,0)|| + ||g_2(s,0)||]ds \\ &\leq \quad L_f(R)||y||_\infty + ||f(t,0)|| + \int_{-\infty}^{t} |C_1(t-s)|[L_{g_1}(R)||y||_\infty + ||g_1(s,0)||]ds \\ &+ \quad \int_{t}^{+\infty} |C_2(t-s)|[L_{g_2}(R)||y||_\infty + ||g_2(s,0)||]ds \\ &\leq \quad RL_f(R) + \sup_{s\in\mathbb{R}} ||f(s,0)|| + RL_{g_1}(R)||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} + ||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} \sup_{s\in\mathbb{R}} ||g_1(s,0)|| \\ &+ \quad RL_{g_2}(R)||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)} + ||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)} \sup_{s\in\mathbb{R}} ||g_2(s,0)|| \\ &\leq \quad R. \end{aligned}$$

La última desigualdad es justificada por (2.2.10).
2) Sean $y_1, y_2 \in \Omega_0$, luego:

$$\begin{aligned} ||\Gamma y_1(t) - \Gamma y_2(t)|| \quad &\leq \quad ||f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))|| + \int_{-\infty}^{t} |C_1(t-s)|||g_1(s,y_1(s)) - g_1(s,y_2(s))||ds \\ &+ \quad \int_{t}^{+\infty} |C_2(t-s)|||g_2(s,y_1(s)) - g_2(s,y_2(s))||ds \\ &\leq \quad (L_f(R) + ||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)}L_{g_1}(R) + ||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)}L_{g_2}(R))||y_1 - y_2||_\infty. \end{aligned}$$

De la desigualdad (2.2.10) obtenemos

$$R - RL_f(R) - RL_{g_1}(R)||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} - RL_{g_2}(R)||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)} > 0,$$

luego:

$$1 > L_f(R) + ||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)}L_{g_1}(R) + ||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)}L_{g_2}(R).$$

Por lo tanto Γ es un operador contractivo, consecuentemente tiene un único punto fijo.□

Como consecuencia de éste teorema se tiene el siguiente corolario:

Corolario 2.2.2 *Supongamos que H_1 se satisface, con $L_f(\cdot) = L_f, L_{g_1}(\cdot) = L_{g_1}, L_{g_2}(\cdot) = L_{g_2}$ constantes positivas, también que $C_1 \in L^1(\mathbb{R}^+), C_2 \in L^1(\mathbb{R}^-)$, además se cumpla la desigualdad:*

$$L_f + L_{g_1}||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} + L_{g_2}||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)} < 1,$$

entonces la ecuación (2.0.2) tiene una única solución casi automórfica.

Demostración. Consideremos el operador definido en (2.2.9). Por las propiedades de las funciones casi automórficas y la hipótesis, podemos notar que la desigualdad siguiente siempre es cierta:

$$||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} \sup_{s\in\mathbb{R}} ||g_1(s,0)|| + ||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)} \sup_{s\in\mathbb{R}} ||g_2(s,0)|| + \sup_{s\in\mathbb{R}} ||f(s,0)|| < +\infty.$$

También por hipótesis obtenemos que:

$$1 - (L_f + L_{g_1}||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} + L_{g_2}||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)}) > 0,$$

entonces existe un número real positivo R_0 tal que para todo $R \geq R_0$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} R - RL_f - RL_{g_1}||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} - RL_{g_2}||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)} &> ||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} \sup_{s\in\mathbb{R}} ||g_1(s,0)|| + \\ &+ ||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)} \sup_{s\in\mathbb{R}} ||g_2(s,0)|| + \sup_{s\in\mathbb{R}} ||f(s,0)||. \end{aligned}$$

Luego procediendo como en la demostración del Teorema 2.2.6 se puede concluir que la ecuación (2.0.2) tiene una única solución casi automórfica. □

Se termina la presente subsección con una aplicación del Teorema 2.1.2 a la ecuación (2.0.2) a través del siguiente:

Teorema 2.2.7 *Sea Γ el operador definido en (2.2.9), consideremos $\rho > 0$ y el siguiente conjunto:*

$$\Delta_0 = \{y \in AA(\mathbb{R};\mathbb{X}) : ||y - y_0||_\infty \leq \rho\},$$

con:

$$y_0(t) = (\Gamma 0)(t) = f(t,0) + \int_{-\infty}^{t} C_1(t-s)g_1(s,0)ds + \int_{t}^{+\infty} C_2(t-s)g_2(s,0)ds,$$

suponga que se cumple la desigualdad:

$$0 < \theta = \left(1 - (L_f + L_{g_1}||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} + L_{g_2}||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)})\right)^{-1} ||\Gamma y_0 - y_0||_\infty \leq \rho$$

con $L_f + L_{g_1}||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} + L_{g_2}||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)} < 1$. Entonces la ecuación (2.0.2) tiene una solución única $y \in AA(\mathbb{R};\mathbb{X})$ que cumple $||y - y_0||_\infty \leq \rho$.

Demostración. La demostración se sigue del Teorema (2.1.2); en efecto, sea

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(y_0,\theta) = \{z \in AA(\mathbb{R};\mathbb{X}) : ||z - y_0|| \leq \theta\}$$

y $z \in \mathfrak{B}(y_0,\theta)$, entonces:

$$\begin{aligned} ||(\Gamma z)(t) - y_0(t)|| &\leq ||(\Gamma z)(t) - (\Gamma y_0)(t)|| + ||(\Gamma y_0)(t) - y_0(t)|| \\ &\leq (L_f + L_{g_1}||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} + L_{g_2}||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)})||z - y_0||_\infty + ||\Gamma y_0 - y_0||_\infty \\ &\leq \theta. \end{aligned}$$

Luego identificando la constante de Lipschitz $L_\Gamma = L_f + L_{g_1}||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} + L_{g_2}||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)}$, se tiene $\Gamma(\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{B}$. □

2.2.1. Teoremas tipo Massera.

En el Teorema 1.1.1 ítem 5), se demostró que toda función casi automórfica es acotada, de esta forma se obtiene que las soluciones casi automórficas de ecuaciones integrales, integro-diferenciales o diferenciales son acotadas; los resultados tipo Massera (ver [34]) son aquellos que entregan el recíproco a este hecho, es decir bajo condiciones adecuadas se demuestra que soluciones acotadas de Ecuaciones ya sea integrales, diferenciales o una mezcla de estas son (en nuestro caso) casi automórficas. Pero además de la acotación, otra propiedad importante de las funciones casi automórficas, es que su rango es relativamente compacto.
En la presente sección se logra determinar que bajo ciertas condiciones una solución acotada de la ecuación (2.0.1) con rango relativamente compacto es casi automórfica. De manera análoga para la ecuación (2.0.2). Así, para determinar la casi automorficidad de una solución para las ecuaciones integrales mencionadas es suficiente buscar soluciones acotadas con rango relativamente compacto.

Como hecho preliminar se enuncia y demuestra un lema, que en su esencia otorga explícitamente una cota superior para una función positiva mayorada por un operador integral.

Lema 2.2.1 *Sean $D, a, \lambda, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ con v acotada, además $|| \int_{-\infty}^{t} D(t-s)\lambda(s)ds||_\infty = \varrho < 1$, supongamos también que se satisface la desigualdad:*

$$v(t) \leq a(t) + \int_{-\infty}^{t} D(t-s)\lambda(s)v(s)ds, \ t \in \mathbb{R},$$

entonces:

$$v(t) \leq \frac{||a||_\infty}{1-\varrho}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} v(t) = |v(t)| &\leq |a(t)| + |\int_{-\infty}^{t} D(t-s)\lambda(s)v(s)ds| \\ &\leq |a(t)| + |\int_{-\infty}^{t} D(t-s)\lambda(s)ds|||v||_\infty, \end{aligned}$$

luego:

$$||v||_\infty \leq ||a||_\infty + ||\int_{-\infty}^{t} D(t-s)\lambda(s)ds||_\infty ||v||_\infty,$$

de esto se concluye que:

$$v(t) \leq \frac{||a||_\infty}{1-\varrho}. \ \square$$

Para nuestro objetivo (plasmado en el siguiente teorema), se asumirá que la función λ es la constante L_g.

Teorema 2.2.8 *Supongamos que $f, g \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$ son respectivamente L_f y L_g Lipschitz globales, con L_f y L_g constantes positivas, $C \in L^1(\mathbb{R}^+)$ tal que:*

$$\rho = L_f + L_g||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)} < 1.$$

Entonces una solución acotada de la ecuación

$$u(t) = f(t, u(t)) + \int_{-\infty}^{t} C(t-s)g(s, u(s))ds$$

tiene rango relativamente compacto en $\mathbb{X}$ si y sólo si es casi automórfica.

Demostración. La implicación necesaria es inmediata ya que toda función casi automórfica tiene rango relativamente compacto.
Ahora mostremos la suficiencia. Consideremos $\{s_n'''\}$ una sucesión arbitraria en $\mathbb{R}$, luego existe una subsucesión $\{s_n''\} \subseteq \{s_n'''\}$ tal que:
Si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{X}$, se tienen los límites siguientes:

$$\lim_{n \to +\infty} g(t + s_n'', x) =: \tilde{g}(t,x), \; t \in \mathbb{R}, \; \forall x \in K. \tag{2.2.11}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \tilde{g}(t - s_n'', x) = g(t,x), \; t \in \mathbb{R}, \; \forall x \in K.$$

También, existe una subsucesión $\{s_n'\} \subseteq \{s_n''\}$, tal que se tienen los límites :

$$\lim_{n \to +\infty} f(t + s_n', x) = \tilde{f}(t,x), \; t \in \mathbb{R}, \; \forall x \in K. \tag{2.2.12}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \tilde{f}(t - s_n', x) = f(t,x), \; t \in \mathbb{R}, \; \forall x \in K.$$

Supongamos ahora que $u \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ es solución de la ecuación (2.0.1) con rango W, y tomemos $\overline{W} = K$. Luego como $\{u(t + s_n')\}$ es una sucesión en K, por el teorema de Bolzano Weierstrass existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s_n'\}$ tal que la sucesión $\{u(t + s_n)\}$ (subsucesión de $\{u(t + s_n')\}$) es convergente de manera puntual.

Sea $\tilde{u}(t) = \lim_{n \to +\infty} u(t + s_n)$. Consideremos ahora la función:

$$\xi(t) = \tilde{f}(t, \tilde{u}(t)) + \int_{-\infty}^{t} C(t-s)\tilde{g}(s, \tilde{u}(s))ds,$$

luego obtenemos la estimación:

$$\begin{aligned} ||u(t+s_n) - \xi(t)|| \;\; &\leq \;\; ||f(t+s_n, u(t+s_n)) - \tilde{f}(t, \tilde{u}(t))|| + \\ &+ \;\; \int_{-\infty}^{t} |C(t-s)| ||g(s+s_n, u(s+s_n)) - \tilde{g}(s, \tilde{u}(s))|| ds. \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Pero también:

$$\begin{aligned} ||f(t+s_n, u(t+s_n)) - \tilde{f}(t, \tilde{u}(t))|| \;\; &\leq \;\; ||f(t+s_n, u(t+s_n)) - f(t+s_n, \tilde{u}(t))|| + \\ &+ \;\; ||f(t+s_n, \tilde{u}(t)) - \tilde{f}(t, \tilde{u}(t))|| \\ &\leq \;\; L_f ||u(t+s_n) - \tilde{u}(t)|| + ||f(t+s_n, \tilde{u}(t)) - \tilde{f}(t, \tilde{u}(t))|| \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} ||g(s+s_n, u(s+s_n)) - \tilde{g}(s, \tilde{u}(s))|| \;\; &\leq \;\; ||g(s+s_n, u(s+s_n)) - g(s+s_n, \tilde{u}(s))|| + \\ &+ \;\; ||g(s+s_n, \tilde{u}(s)) - \tilde{g}(s, \tilde{u}(s))|| \\ &\leq \;\; L_g ||u(s+s_n) - \tilde{u}(s)|| + ||g(s+s_n, \tilde{u}(s)) - \tilde{g}(s, \tilde{u}(s))||. \end{aligned}$$

Ahora volviendo a (2.2.13), obtenemos:

$$\begin{aligned} ||u(t+s_n) - \xi(t)|| \;\; &\leq \;\; L_g ||u(s+s_n) - \tilde{u}(s)|| + ||g(s+s_n, \tilde{u}(s)) - \tilde{g}(s, \tilde{u}(s))|| + \\ &+ \;\; \int_{-\infty}^{t} |C(t-s)| (L_g ||u(s+s_n) - \tilde{u}(s)|| + ||g(s+s_n, \tilde{u}(s)) - \tilde{g}(s, \tilde{u}(s)||) ds. \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

De esto y por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, obtenemos la convergencia puntual:

$$u(t+s_n) \to \xi(t), \text{cuando } \; n \to +\infty,$$

es decir, por la unicidad de límites $\tilde{u}(t) = \xi(t)$, por lo que $\tilde{u}(t)$ satisface la relación integral siguiente:

$$\tilde{u}(t) = \tilde{f}(t, \tilde{u}(t)) + \int_{-\infty}^{t} C(t-s)\tilde{g}(s, \tilde{u}(s))ds. \tag{2.2.15}$$

Ahora veamos que $||\tilde{u}(t-s_n) - u(t)|| \to 0$, cuando $n \to +\infty$:

$$||\tilde{u}(t-s_n)-u(t)|| \leq ||\tilde{f}(t-s_n, \tilde{u}(t-s_n))-f(t, u(t))||+\int_{-\infty}^{t} |C(t-s)|||\tilde{g}(s-s_n, \tilde{u}(s-s_n))-g(s, u(s))||ds$$

Nuestro objetivo es estimar las diferencias: $||\tilde{f}(t-s_n, \tilde{u}(t-s_n)) - f(t, u(t))||$ y $||\tilde{g}(s-s_n, \tilde{u}(s-s_n)) - g(s, u(s))||$, para ello observemos que como el rango de u es relativamente compacto en $\mathbb{X}$, entonces su límite puntual $\tilde{u}$ también tienen esta propiedad; por lo tanto aplicando nuevamente el teorema de Bolzano Weierstrass a la sucesión $\{\tilde{u}(t-s_n)\}$, podemos ubicar una subsucesión $\{s_l\} \subseteq \{s_n\}$ tal que $\tilde{u}(t-s_l) \to \theta(t)$, puntualmente cuando $l \to +\infty$; luego (cambiando s_l por s_n) obtenemos:

$$\begin{aligned}
||\tilde{f}(t-s_n, \tilde{u}(t-s_n)) - f(t, u(t))|| &\leq ||\tilde{f}(t-s_n, \tilde{u}(t-s_n)) - \tilde{f}(t-s_n, \theta(t))|| + \\
&+ ||\tilde{f}(t-s_n, \theta(t)) - f(t, u(t))|| \\
&\leq ||\tilde{f}(t-s_n, \tilde{u}(t-s_n)) - \tilde{f}(t-s_n, \theta(t))|| + \\
&+ ||f(t, \tilde{u}(t-s_n)) - \tilde{f}(t-s_n, \theta(t))|| + \\
&+ ||f(t, \tilde{u}(t-s_n)) - f(t, u(t))|| \\
&\leq 2L_f||\tilde{u}(t-s_n) - \theta(t)|| + L_f||\tilde{u}(t-s_n) - u(t)|| + \\
&+ ||\tilde{f}(t-s_n, \theta(t)) - f(t, \theta(t))||.
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
||\tilde{g}(s-s_n, \tilde{u}(s-s_n)) - g(s, u(s))|| &\leq ||\tilde{g}(s-s_n, \tilde{u}(s-s_n)) - \tilde{g}(s-s_n, \theta(s))|| + \\
&+ ||\tilde{g}(s-s_n, \theta(s)) - g(s, u(s))|| \\
&\leq ||\tilde{g}(s-s_n, \tilde{u}(s-s_n)) - \tilde{g}(s-s_n, \theta(s))|| + \\
&+ ||g(s, \tilde{u}(s-s_n)) - \tilde{g}(s-s_n, \theta(s))|| + \\
&+ ||g(s, \tilde{u}(s-s_n)) - g(s, u(s))|| \\
&\leq 2L_g||\tilde{u}(s-s_n) - \theta(s)|| + L_g||\tilde{u}(s-s_n) - u(s)|| + \\
&+ ||\tilde{g}(s-s_n, \theta(s)) - g(s, \theta(s))||.
\end{aligned}$$

Por esto se tiene:

$$\begin{aligned}
||\tilde{u}(t-s_n) - u(t)|| &\leq 2L_f||\tilde{u}(t-s_n) - \theta(t)|| + L_f||\tilde{u}(t-s_n) - u(t)|| + ||\tilde{f}(t-s_n, \theta(t)) - f(t, \theta(t))|| + \\
&+ \int_{-\infty}^{t} |C(t-s)|[2L_g||\tilde{u}(s-s_n) - \theta(s)|| + ||\tilde{g}(s-s_n, \theta(s)) - g(s, \theta(s))||]ds + \\
&+ L_g \int_{-\infty}^{t} |C(t-s)|||\tilde{u}(s-s_n) - u(s)||ds,
\end{aligned}$$

Pero $|\tilde{u}(t-s_n) - u(t)| \leq 2||u||_\infty$ entonces nuevamente existe subsucesión $\{s_\tau\} \subseteq \{s_n\}$ tal que $|\tilde{u}(t-s_\tau) - u(t)| \to \eta(t)$ puntualmente cuando $\tau \to +\infty$.

Luego, dado $\epsilon > 0$, existe $N_0(t, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $l \geq N_0$ y por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\eta(t) \leq m_0\epsilon + L_f\eta(t) + L_g \int_{-\infty}^{t} |C(t-s)|\eta(s)ds,$$

con $m_0 = 1 + 2L_f + (1 + 2L_g)||C||_{L^1(\mathbb{R}^+)}$.
Por el lema anterior, tenemos $\eta(t) \leq \frac{m_0 \epsilon}{1-\rho}$, y como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se concluye $||\tilde{u}(t - s_n) - u(t)|| \to 0$, cuando $n \to +\infty$. □

El siguiente teorema extiende el anterior en favor de la ecuación (2.0.2). La demostración es similar por lo que se omite.

Teorema 2.2.9 *Supongamos que L_f, L_{g_1}, L_{g_2} son constantes positivas y $f, g_1, g_2 \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$ son respectivamente L_f, L_{g_1}, L_{g_2} Lipschitz globales, $C_1 \in L^1(\mathbb{R}^+)$ y $C_2 \in L^1(\mathbb{R}^-)$. Además considere que se satisface la desigualdad:*

$$\rho = L_f + L_{g_1}||C_1||_{L^1(\mathbb{R}^+)} + L_{g_2}||C_2||_{L^1(\mathbb{R}^-)} < 1.$$

Entonces una solución acotada de la ecuación

$$u(t) = f(t, u(t)) + \int_{-\infty}^{t} C_1(t-s) g_1(s, u(s)) ds + \int_{t}^{+\infty} C_2(t-s) g_2(s, u(s)) ds$$

tiene rango relativamente compacto en $\mathbb{X}$ si y sólo si es casi automórfica. □

2.3. Ecuaciones Integro-diferenciales.

En esta sección estudiamos la siguiente ecuación integro-diferencial:

$$u'(t) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds + g(t, u(t)), \ t \geq 0 \tag{2.3.16}$$

$$u(0) = x_0, \tag{2.3.17}$$

de la cual se espera obtener una única solución mild asintóticamente casi automórfica. Aquí $A : D(A) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, $B(t) : D(B(t)) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, $t \geq 0$ son operadores lineales cerrados, densamente definidos sobre el espacio de Banach $\mathbb{X}$; $D(A) \subset D(B(t))$ para todo $t \geq 0$ y $g(\cdot, \cdot)$ es una función asintóticamente casi automórfica, $x_0 \in \mathbb{X}$.

Esta ecuación ha sido estudiada en [29] para el caso de soluciones mild asintóticamente casi periódicas y casi periódicas. También se debe recalcar que por la condición inicial envuelta ésta ecuación es un caso particular de la estudiada en [22]. Por lo tanto se presentan nuevos teoremas a los presentrados en [29] y que a la vez vienen a ser casos particulares de [22].

2.3.1. Funciones Asintóticamente Casi Automórficas.

La teoría de las funciones asintóticamente casi automórficas se encuentra resumida en los libros [36, 37] de Gastón M'Guérékata, uno de las artículos autocontenidos y con información importante en lo que se refiere a propiedades de estas funciones, como por ejemplo, que el rango de una función asintóticamente casi automórfica es relativamente compacto entre otras, es [22] de Hui-Sheng Ding et. al. Literalmente una función asintóticamente casi automórfica es aquella que se vuelve casi automórfica para números reales arbitrariamente grandes, para formalizar esto definamos los siguientes conjuntos

$$C_0(\mathbb{R}^+; \mathbb{X}) = \{\phi \in C(\mathbb{R}^+; \mathbb{X}) : \lim_{t \to +\infty} ||\phi(t)|| = 0\},$$

$$C_0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X}; \mathbb{X}) = \{x\phi \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X}; \mathbb{X}) : \lim_{t \to +\infty} ||\phi(t, x)|| = 0, \quad \text{uniformemente}$$
$$\text{sobre subconjuntos compactos de } \mathbb{X}\}.$$

Definición 2.3.1 Una función continua $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{X}$ (respectivamente $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$) es asintóticamente casi automórfica (respectivamente asintóticamente casi automórfica en $t \in \mathbb{R}$ uniformemenete sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{X}$), si $g = f + \phi$, donde $f \in AA(\mathbb{R}; \mathbb{X})$ (respectivamente $f \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$) y $\phi \in C_0(\mathbb{R}^+; \mathbb{X})$ (respectivamente $C_0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$).

Denotemos por $AAA(\mathbb{R}^+; \mathbb{X})$ al conjunto de las funciones asintóticamente casi automórficas y $AAA(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$ al conjunto de las funciones asintóticamente casi automórficas en $t \in \mathbb{R}$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{X}$.

Observación 2.3.1 No es complicado notar que si $\phi \in C_0(\mathbb{R}^+; \mathbb{X})$ (respectivamente $C_0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$), entonces ϕ es acotada (respectivamente acotada sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{X}$).

En el siguiente teorema se resumen algunas propiedades importantes de estas funciones. Las demostraciones de algunas son inmediatas por la que no se realizan, mientras que para su complemento se prefiere seguir una referencia ya que son de naturaleza estándar.

Teorema 2.3.1

1). Si $g \in AAA(\mathbb{R}^+; \mathbb{X})$ entonces g es acotada.

2). El conjunto $AAA(\mathbb{R}^+; \mathbb{X})$ es un subespacio vectorial de $BC(\mathbb{R}^+; \mathbb{X})$.

3). La descomposición de una función asintóticamente casi automórfica es única.

4). El rango de una función asintóticamente casi automórfica es relativamente compacto en $\mathbb{X}$.

La demostración para el ítem 3) se encuentra en [36], mientras que para 4) se encuentra una buena exposición en [22].

A partir del Teorema 1.1.1 ítem 5) y de la observación 2.3.1 podemos complementar un poco a la parte 1) del Teorema 2.3.1; esto es, se puede ver que la expresión:

$$||g|| := \sup_{t \in \mathbb{R}} ||f(t)|| + \sup_{t \in \mathbb{R}^+} ||\phi(t)|| \tag{2.3.18}$$

es finita, esto nos permite avanzar en la estructura del espacio $AAA(\mathbb{R}^+; \mathbb{X})$, lo que se observa en el teorema siguiente.

Teorema 2.3.2 *El espacio vectorial $AAA(\mathbb{R}^+; \mathbb{X})$ es un espacio de Banach, con norma definida por (2.3.18).*

Una demostración de este teorema se encuentra en el libro [37].

Lema 2.3.1 *Sea $f \in C_0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$ entonces f es uniformemente continua sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{X}$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}^+$ (ver definición 1.3.1).*

Demostración. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{X}$, por demostrar dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $||x - y|| < \delta$, entonces $||f(t, x) - f(t, y)|| < \epsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$.
Por definición si $f \in C_0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$, entonces $\lim\limits_{t \to +\infty} ||f(t, x)|| = 0$ uniformemente para $x \in K$, esto signifca que dado $\epsilon > 0$ arbitrario, existe $\mathfrak{D} > 0$ tal que si $t > \mathfrak{D}$ entonces $||f(t, x)|| < \frac{\epsilon}{2}$, con $x \in K$, luego puedo elegir $\delta' = 1$ tal que si $x, y \in K$, con $||x - y|| < 1$ y $t > \mathfrak{D}$ se tiene $||f(t, x) - f(t, y)|| \leq ||f(t, x)|| + ||f(t, y)|| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.
Sólo queda ver que se satisface para $t \in [0, \mathfrak{D}]$. En efecto, como $[0, \mathfrak{D}] \times K$ es compacto y f es

continua entonces podemos ver que f es uniformente continua sobre $[0,\mathfrak{D}]\times K$; esto es, dado $\epsilon>0$, existe $\delta''>0$ tal que si $(t,x),(s,y)\in[0,\mathfrak{D}]\times K$ con $|||(t,x)-(s,y)|||=|t-s|+||x-y||<\delta''$, entonces $||f(t,x)-f(s,y)||<\epsilon$. Luego, si tomamos $x,y\in K$ tal que $||x-y||<\delta''$, se tiene $|||(t,x)-(t,y)|||<\delta''$ para todo $t\in[0,\mathfrak{D}]$, lo que implica $||f(t,x)-f(t,y)||<\epsilon$. Por lo tanto dado $\epsilon>0$, existe $\delta=\text{mín}\{\delta'',1\}$ tal que si $x,y\in K$ con $||x-y||<\delta$, entonces $||f(t,x)-f(t,y)||<\epsilon$ para todo $t\in\mathbb{R}^+$.$\square$

Definición 2.3.2 Una familia $\{R(t):t\geq 0\}$ de operadores lineales continuos sobre $\mathbb{X}$ se llama un operador resolvente para la ecuación (2.3.16) sí, y sólo si:

(R1) $R(0)=I$, es el operador identidad sobre $\mathbb{X}$.

(R2) Para todo $x\in\mathbb{X}$, el operador $t\to R(t)x$ es una función continua sobre $[0,+\infty)$.

(R3) Para todo el operador $t\geq 0$, $R(t)$ es fuertemente continuo sobre $D(A)$, y para todo $y\in D(A)$, el operador $t\to R(t)y$ es continuamente diferenciable y satisface

$$\frac{d}{dt}R(t)y=AR(t)y+\int_0^t B(t-s)R(s)yds=R(t)Ay+\int_0^t R(t-s)B(s)yds,\ t\geq 0,$$

donde $[D(A)]$ denota el dominio $D(A)$ equipado con la norma del gráfico: $|||y|||:=||Ay||+||y||$ donde $||\cdot||$ es la norma en $\mathbb{X}$.
Para mayor detalle sobre resolventes y condiciones para su existencia, se puede recurrir a [27, 43].

Si el operador resolvente $R(\cdot)$ de la ecuación (2.3.16) existe, entonces se puede definir la solución mild de las ecuaciones (2.3.16)-(2.3.17) como sigue:

Definición 2.3.3 Una función $u\in C(\mathbb{R}^+;\mathbb{X})$ se llama una solución mild de las ecuaciones (2.3.16)-(2.3.17) si

$$u(t)=R(t)x_0+\int_0^t R(t-s)g(s,u(s))ds,\ t\geq 0.$$

Definición 2.3.4 (Estabilidad exponencial uniforme). Se dice que el operador resolvente $(R(t))_{t\geq 0}$ tiene estabilidad exponencial uniforme, si existen constantes positivas $M,\delta>0$ tal que para todo $t\geq 0$ se tiene: $||R(t)||\leq Me^{-\delta t}$.

Para nuestro interés el operador resolvente debe satisfacer la siguiente condición:

(A) $(R(t))_{t\geq 0}$ goza de estabilidad exponencial uniforme.

Los lemas siguientes entregan resultados de composición en el espacio de las funciones asintóticamente casi automórficas. Estos responden a la pregunta ¿bajo qúe condiciones la compuesta de funciones asintóticamente casi automórficas es asintóticamente casi automórfica?. Iniciamos con un lema importante sobre inclusiones de rangos.

Lema 2.3.2 *Sea* $g=f+\phi\in AAA(\mathbb{R};\mathbb{X})$ *donde* $f\in AA(\mathbb{R};\mathbb{X}),\phi\in C_0(\mathbb{R}^+;\mathbb{X})$, *entonces* $\overline{\{f(t):t\in\mathbb{R}\}}\subset\overline{\{g(t):t\in\mathbb{R}^+\}}$.

Demostración. Sea $\{s'_n\}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} s'_n = +\infty$, como $f \in AA(\mathbb{R};\mathbb{X})$, existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s'_n\}$ y una función $\tilde{f}$ tal que puntualmente:

$$\lim_{n\to+\infty} f(t+s_n) =: \tilde{f}(t), \quad \lim_{n\to+\infty} \tilde{f}(t-s_n) = f(t).$$

Sea $t \in \mathbb{R}$ un elemento fijo, luego para n suficientemente grande $t+s_n \geq 0$, más aún $t+s_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$, luego como $g(t+s_n) = f(t+s_n) + \phi(t+s_n)$, tomando límites tenemos: $\tilde{f}(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(t+s_n)$, esto es $\overline{\{\tilde{f}(t) : t \in \mathbb{R}\}} \subset \overline{\{g(t) : t \in \mathbb{R}^+\}}$. Pero $\overline{\{\tilde{f}(t) : t \in \mathbb{R}\}} = \overline{\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}}$, luego se conluye que $\overline{\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}} \subset \overline{\{g(t) : t \in \mathbb{R}^+\}}$. □

Lema 2.3.3 *Sea* $u \in AAA(\mathbb{R}^+;\mathbb{X}), K = \overline{\{u(t) : t \in \mathbb{R}\}}$ *y* $g \in AAA(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X};\mathbb{X}) \cap C_K(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X};\mathbb{X})$, *entonces* $g(\cdot, u(\cdot)) \in AAA(\mathbb{R}^+;\mathbb{X})$.

Demostración. Considere $g = f + \phi$ y $u = v + w$, donde $f \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X};\mathbb{X})$, $\phi \in C_0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X};\mathbb{X})$, $v \in AA(\mathbb{R};\mathbb{X})$ y $w \in C_0(\mathbb{R}^+;\mathbb{X})$ entonces:

$$\begin{aligned} g(t,u(t)) &= g(t,u(t)) + g(t,v(t)) - g(t,v(t)) \\ &= g(t,u(t)) + f(t,v(t)) + \phi(t,v(t)) - g(t,v(t)) \\ &= f(t,v(t)) + g(t,u(t)) - g(t,v(t)) + \phi(t,v(t)). \end{aligned}$$

se afirma que $f(\cdot,v(\cdot)) \in AA(\mathbb{R};\mathbb{X})$ y que $g(\cdot,u(\cdot)) - g(\cdot,v(\cdot)) + \phi(\cdot,v(\cdot)) \in C_0(\mathbb{R}^+;\mathbb{X})$, En efecto:

1) Por el teorema 2.3.1 ítem 4) el conjunto $K = \overline{\{u(t) : t \in \mathbb{R}\}}$ es compacto. Ahora, como $f = g - \phi$ y g, ϕ son uniformemente continuas sobre K uniformemente en $t \in \mathbb{R}^+$, tenemos que f también lo es. Además por el lema 2.3.2 tenemos que $K_1 = \overline{\{v(t) : t \in \mathbb{R}\}} \subset \overline{\{u(t) : t \in \mathbb{R}^+\}}$ es un compacto, por lo tanto $f \in C_{K_1}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X};\mathbb{X})$. Ahora en vista del lema 1.3.2, podemos concluir que $f \in C_{K_1}(\mathbb{R} \times \mathbb{X};\mathbb{X})$, de esto el lema 1.3.1 nos permite concluir que $f(\cdot,v(\cdot)) \in AA(\mathbb{R};\mathbb{X})$.

2) No es difícil ver que $\phi(\cdot,v(\cdot)) \in C_0(\mathbb{R}^+;\mathbb{X})$, además el hecho de ser g uniformemente continua sobre K uniformemente para $t \in \mathbb{R}^+$ junto con la igualdad $\|u(t) - v(t)\| = \|w(t)\|$ muestran que $g(\cdot,u(\cdot)) - g(\cdot,v(\cdot)) \in C_0(\mathbb{R}^+;\mathbb{X})$, por lo tanto podemos concluir que $g(\cdot,u(\cdot)) - g(\cdot,v(\cdot)) + \phi(\cdot,v(\cdot)) \in C_0(\mathbb{R}^+;\mathbb{X})$. □

Lema 2.3.4 *Si* $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ *satisface* **(A)** *y* $g \in AAA(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X};\mathbb{X})$ *es una función Lipschitz, entonces para todo* $u \in AAA(\mathbb{R}^+;\mathbb{X})$ *la función:*

$$\tilde{v}(t) := \int_0^t R(t-s)g(s,u(s))ds$$

es asintóticamente casi automórfica.

Demostración. Considere $g = f + \phi$, donde $f \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X};\mathbb{X})$ y $\phi \in C_0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X};\mathbb{X})$ y $u = v + w$ con $v \in AA(\mathbb{R};\mathbb{X}), w \in C_0(\mathbb{R}^+;\mathbb{X})$, luego:

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t) &= \int_0^t R(t-s)f(s,v(s))ds + \int_0^t R(t-s)\vartheta(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^t R(t-s)f(s,v(s))ds - \int_{-\infty}^0 R(t-s)f(s,v(s))ds + \int_0^t R(t-s)\vartheta(s)ds. \end{aligned}$$

Donde $\vartheta(s) = g(s, u(s)) - g(s, v(s)) + \phi(s, v(s))$, que por el teorema anterior está en $C_0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$. Ahora escribimos: $\tilde{v}(t) = T(t) + H(t)$, donde

$$T(t) = \int_{-\infty}^{t} R(t-s)f(s,u(s))ds, \; H(t) = \int_{0}^{t} R(t-s)\vartheta(s)ds - \int_{-\infty}^{0} R(t-s)f(s,v(s))ds.$$

Se afirma que $T(\cdot) \in AA(\mathbb{R}; \mathbb{X})$ y $H(\cdot) \in C_0(\mathbb{R}^+; \mathbb{X})$, en efecto:

1) La demostración que $T(\cdot) \in AA(\mathbb{R}; \mathbb{X})$ es exactamente el lema 1.3.3.

2) Dado $\epsilon > 0$ existe una constante $N > 0$ tal que para todo $t \geq N$ se tiene $\|\vartheta(t)\| < \epsilon$. Sea $t \geq 2N$, entonces:

$$\begin{aligned}
\|H(t)\| &= \| \int_{0}^{\frac{t}{2}} R(t-s)\vartheta(s)ds + \int_{\frac{t}{2}}^{t} R(t-s)\vartheta(s)ds - \int_{-\infty}^{0} R(t-s)f(s,v(s))ds\| \\
&\leq \int_{0}^{\frac{t}{2}} Me^{-\delta(t-s)}\|\vartheta(s)\|ds + M\epsilon\int_{\frac{t}{2}}^{t} e^{-\delta(t-s)}ds + M\int_{-\infty}^{0} e^{-\delta(t-s)}\|f(s,v(s))\|ds \\
&\leq M\|\vartheta\|\int_{0}^{\frac{t}{2}} e^{-\delta(t-s)}ds + M\epsilon\int_{\frac{t}{2}}^{t} e^{-\delta(t-s)}ds + M\|f\|\int_{-\infty}^{0} e^{-\delta(t-s)}ds \\
&\leq \frac{M}{\delta}\|\vartheta\|e^{-\frac{\delta t}{2}} + \frac{M}{\delta}\epsilon + \frac{M}{\delta}\|f\|e^{-\delta t}.
\end{aligned}$$

De esto se concluye que $\lim\limits_{t \to +\infty} H(t) = 0$. $\square$

En los siguientes teoremas se decide la existencia y unicidad de la solución mild asintóticamente casi automórfica de las ecuaciones (2.3.16)-(2.3.17). Estos son parecidos a los presentados en la sección de ecuaciones integrales.

Teorema 2.3.3 *Sean $g \in AAA(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$, $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ el operador resolvente que satisface* (**A**) *y $\varrho > 0$, considere el conjunto:*

$$\Delta_0 = \{y \in AAA(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}) : ||y - y_0||_\infty \leq \varrho\}, \text{ con } y_0(t) = R(t)x_0 + \int_0^t R(t-s)g(s,0)ds.$$

Supongamos que:

a). $||y_0||_\infty \leq \varrho$ y exite $L_g > 0$ tal que:

$$||g(t, y(t)) - g(t, x(t))|| \leq L_g||y(t) - x(t)||, \; y, x \in \Delta_0, t \in \mathbb{R}.$$

y

b). Las constantes L_g, ϱ, M, δ satisfacen la relación:

$$L_g < \frac{\varrho\delta}{M(\varrho + ||y_0||_\infty)}. \tag{2.3.19}$$

Entonces la ecuación (2.3.16)-(2.3.17) tiene una única solución mild asintóticamente casi automórfica .

Demostración. Considere el operador:

$$\begin{aligned}
\Gamma : AAA(\mathbb{R}^+; \mathbb{X}) &\to AAA(\mathbb{R}^+; \mathbb{X}) \\
\Gamma y(t) &= R(t)x_0 + \int_0^t R(t-s)g(s,y(s))ds
\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

se tiene de los lemas 2.3.3 y 2.3.4 que Γ es un operador bien definido. Mostremos que Γ tiene un único punto fijo en Δ_0.

1) Se demostrará la inclusión $\Gamma(\Delta_0) \subseteq \Delta_0$. En efecto, sea $y \in \Delta_0$ entonces:

$$\begin{aligned} ||\Gamma y(t) - y_0(t)|| &\leq \int_0^t |R(t-s)|||g(s,y(s)) - g(s,0)||ds \\ &\leq L_g \int_0^t |R(t-s)|ds||y||_\infty \\ &\leq L_g \frac{M}{\delta}(\varrho + ||y_0||_\infty) \\ &\leq \varrho. \end{aligned}$$

2) Γ es una contracción sobre Ω. Sean $y_1, y_2 \in \Delta_0$ luego:

$$\begin{aligned} ||\Gamma y_1(t) - \Gamma y_2(t)|| &\leq \int_0^t |R(t-s)|||g(s,y_1(s)) - g(s,y_2(s))||ds \\ &\leq L_g \int_0^t |R(t-s)|ds||y_1 - y_2||_\infty \\ &\leq L_g \frac{M}{\delta}||y_1 - y_2||_\infty. \end{aligned}$$

Por (2.3.19) se tiene que el operador Γ es una contracción en Δ_0, por lo que posee un único punto fijo. Esto implica que la ecuación (2.3.16)-(2.3.17) tiene una única solución mild que es asintóticamente casi automórfica . $\Box$

Teorema 2.3.4 *Asuma que $g \in AAA(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$ y satisface la condición de Lipschitz local:*

$$||g(t,x) - g(t,y)|| \leq L_g(r)||x-y|| \tag{2.3.21}$$

para todo $t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{X}$ con $||x||, ||y|| \leq r$, donde $L_g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es una función continua y $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ el operador resolvente que satisface (**A**). *Sea $C = \sup_{t\geq 0} ||g(t,0)||$.*
Si se satisface la desigualdad:

$$\sup_{r>0}(\frac{\delta r}{M} - rL_g(r)) > C + \delta||x_0||, \tag{2.3.22}$$

entonces la ecuación (2.3.16)-(2.3.17) tiene una única solución mild que es asintóticamente casi automórfica.

Demostración. Considere el operador Γ definido en (2.3.20). Se tiene de los lemas 2.3.3 y 2.3.4 que Γ es un operador bien definido.
Por la condición del supremo dado en la expresión (2.3.22), tenemos que existe $S > 0$ tal que:

$$\frac{\delta S}{M} - SL_g(S) > C + \delta||x_0||. \tag{2.3.23}$$

Consideremos el conjunto cerrado $\Omega = \{y \in AAA(\mathbb{R}; \mathbb{X}) : ||y||_\infty \leq S\}$, probemos que Γ posee un único punto fijo en Ω. En efecto:

1) $\Gamma(\Omega) \subseteq \Omega$. Sea $y \in \Omega$, luego:

$$\begin{aligned} ||(\Gamma y)(t)|| &\leq ||R(t)x_0|| + \int_0^t |R(t-s)|||g(s,y(s)) - g(s,0)||ds + \int_0^t |R(t-s)|||g(s,0)||ds \\ &\leq M||x_0|| + SL_g(S)\frac{M}{\delta} + C\frac{M}{\delta} \\ &\leq S. \end{aligned}$$

Donde la última desigualdad se sigue de la expresión (2.3.23).

2) Γ es contractivo en Ω. Sean $y_1, y_2 \in \Omega$, entonces:

$$\begin{aligned}||\Gamma y_1(t) - \Gamma y_2(t)|| &\leq \int_0^t |R(t-s)|||g(s,y_1(s)) - g(s,y_2(s))||ds \\ &\leq L_g(S)\frac{M}{\delta}||y_1 - y_2||_\infty.\end{aligned}$$

Además de la desigualdad (2.3.23) se tiene:

$$\frac{M}{\delta}SL_g(S) < \frac{M}{\delta}(S(L_g(S)) + C + \delta||x_0||_\infty) < S,$$

de esto,

$$\frac{M}{\delta}L_g(S) < 1.$$

Concluimos que Γ posee un único punto fijo en Ω que es la única solución mild asintóticamente casi automórfica de la ecuación (2.3.16)-(2.3.17). □

Como consecuencia a éste Teorema se puede conseguir el siguiente corolario

Corolario 2.3.1 *Asuma que $g \in AAA(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$ y satisface la condición de Lipschitz local:*

$$||g(t,x) - g(t,y)|| \leq L_g||x - y||$$

para todo $t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{X}$ con $||x||, ||y|| \leq r$ *y $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ el operador resolvente que satisface* (**A**). *Si se satisface:*

$$\frac{\delta}{M} > L_g,$$

entonces la ecuación (2.3.16)-(2.3.17) tiene una única solución mild que es asintóticamente casi automórfica.

Una aplicación del Teorema 2.1.2 para la ecuación (2.3.16)-(2.3.17) es el siguiente:

Teorema 2.3.5 *Sea Γ el operador definido en (2.3.20), $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ el operador resolvente que satisface* (**A**) *y $g \in AAA(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$ una función L_g-Lipschitz en la segunda variable. Considere $\rho > 0$ y el conjunto:*

$$\Delta_0 = \{y \in AAA(\mathbb{R}^+; \mathbb{X}) : ||y - y_0||_\infty \leq \rho\},$$

con:

$$y_0(t) = (\Gamma 0)(t) = R(t)x_0 + \int_0^t R(t-s)g(s,0)ds,$$

suponga que se cumple la desigualdad:

$$0 < \theta = (1 - \frac{L_g M}{\delta})^{-1}||\Gamma y_0 - y_0||_\infty \leq \rho,$$

con $\frac{L_g M}{\delta} < 1$. Entonces la ecuación (2.3.16)-(2.3.17) tiene una única solución mild $y \in AAA(\mathbb{R}^+; \mathbb{X})$ que cumple $||y - y_0||_\infty \leq \rho$.

Demostración. La demostración se sigue del Teorema (2.1.2); en efecto, sea

$$\mathfrak{B}(y_0, \theta) = \{z \in AAA(\mathbb{R}^+; \mathbb{X}) : ||z - y_0|| \leq \theta\},$$

consideremos $z \in \mathfrak{B}(y_0, \theta)$, entonces:

$$\begin{aligned}|(\Gamma z)(t) - y_0(t)| &\leq |(\Gamma z)(t) - (\Gamma y_0)(t)| + |(\Gamma y_0)(t) - y_0(t)| \\ &\leq (\frac{L_g M}{\delta})||z - y_0||_\infty + ||\Gamma y_0 - y_0||_\infty. \\ &\leq \theta.\end{aligned}$$

Notemos que de la demostración del ítem 2) del Teorema (2.3.4), se concluye que la constante de Lipschitz para Γ es $L_\Gamma = \dfrac{L_g M}{\delta}$, por lo que es posible obtener $\Gamma(\mathfrak{B}(y_0,\theta)) \subseteq \mathfrak{B}(y_0,\theta)$. $\square$

Este teorema entrega un nuevo tratamiento para la ecuación mas general que se estudia en [22], el enunciado y demostración no la incluimos ya que escapa de nuestros objetivos.

Reciéntemente el autor y M. Pinto están obteniendo aplicaciones de los resultados expuestos en esta sección a ecuaciones integro-diferenciales que modelan la conducción del calor en materiales con memoria [13].

2.4. Ecuaciones Diferenciales

Iniciamos esta sección enunciando el siguiente Teorema

Teorema 2.4.1 *Sea $f \in AA(\mathbb{R};\mathbb{X})$ y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ tal que $F(t) = \int_0^t f(s)ds$. F es casi automórfica sí y sólo sí tiene rango relativamente compacto.* $\square$

Una demostración de éste hecho se puede encontrar en [36, Teorema 2.4.4].
Cuando el espacio de Banach $\mathbb{X}$ es uniformemente convexo la conclusión del Teorema 2.4.1 tiene la siguiente forma: $F(\cdot) \in AA(\mathbb{R};\mathbb{X})$ *sí y sólo sí es acotada*, la demostración se puede ver en [36, Teorema 2.4.6].

En esta sección (y en lo que sigue - salvo que se especifique lo contrario -) nuestro espacio de Banach $\mathbb{X}$ será el espacio euclideano $\mathbb{C}^p, p \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$. Esto implica que en nuestro caso para que la función $F(\cdot)$ sea casi automórfica, es suficiente notar que sea acotada.

Con estas observaciones explayamos nuestros intereces:
En primer lugar nuestro interes es estudiar las soluciones casi automórficas para la ecuación escalar neutral:

$$x'(t) = \alpha x(t) + \beta x'(t) + f(t),$$

para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $, \beta \neq 1$, $f \in AA(\mathbb{R},\mathbb{C})$, las ideas desarrolladas para esta ecuación nos llevarán al estudio de las soluciones casi automórficas para el sistema neutral:

$$x'(t) = Ax(t) + Bx'(t) + f(t),$$

donde, $A, B : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^p$ son operadores lineales con un triangularizador en común, $f \in AA(\mathbb{R},\mathbb{C}^p)$. Luego utilizando la teoría de Dicotomía exponencial, se estudia las soluciones casi automórficas del sistema neutral no autónomo:

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t),$$

como consecuencia de ello se estudia al sistema neutral no-autónomo:

$$x(t) = A(t)x(t) + [h(t,x(t))]' + g(t,x(t)), t \in \mathbb{R}$$

y el sistema neutral autónomo:

$$x'(t) = Ax(t) + [h(t,x(t))]' + g(t,x(t)), t \in \mathbb{R},$$

con h una función diferenciable.

Finalmente se analizan las soluciones casi automórficas compactas de los sistemas Lineal y semilineal siguientes:

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t),$$
$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t)).$$

2.4.1. Ecuación Escalar Neutral.

Estudiemos la siguiente ecuación diferencial escalar neutral:

$$x'(t) = \alpha x(t) + \beta x'(t) + f(t), \tag{2.4.24}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 1$, $f \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Realizando los arreglos adecuados, la ecuación (2.4.24) queda:

$$x'(t) = \frac{\alpha}{1-\beta}x(t) + \frac{1}{1-\beta}f(t),$$

si llamamos $\gamma = \dfrac{\alpha}{1-\beta}$, entonces la ecuación (2.4.24) es:
Para $\alpha \neq 0$:

$$x'(t) = \gamma x(t) + \alpha^{-1}\gamma f(t), \tag{2.4.25}$$

cuyas soluciones son:

i) si $Re(\gamma) \neq 0$.
   Sea $Re(\gamma) < 0$, entonces:

$$x(t) = \alpha^{-1}\gamma \int_{-\infty}^{t} e^{\gamma(t-s)} f(s)ds, \tag{2.4.26}$$

   si $Re(\gamma) > 0$, entonces:

$$x(t) = -\alpha^{-1}\gamma \int_{t}^{+\infty} e^{\gamma(t-s)} f(s)ds. \tag{2.4.27}$$

   Las que, gracias a los lemas 1.3.3 y 1.3.4, podemos garantizar que son casi automórficas.

ii) Si $Re(\gamma) = 0$, llamemos $\theta = Im(\gamma)$ entonces la solución explícita es:

$$x(t) = e^{i\theta t}(C_0 + \frac{\theta}{b}\int_0^t e^{-i\theta s} f(s)ds), \tag{2.4.28}$$

   y observamos que esta solución es casi automórfica sí y sólo sí la integral $\displaystyle\int_0^t e^{-i\theta s} f(s)ds$ es acotada (Teorema 2.4.1 o [36, Teorema 2.4.6]).

Para $\alpha = 0$, la ecuación es:

$$x'(t) = \frac{1}{1-\beta}f(t). \tag{2.4.29}$$

con esto la solución de (2.4.24) es:

$$x(t) = \frac{1}{1-\beta}\int_0^t f(s)ds, \tag{2.4.30}$$

que es casi automórfica sí y sólo sí $\int_0^t f(s)ds$ es acotada (Tereoma 2.4.1 o [36, Teorema 2.4.6]).

En resumen se ha demostrado el siguiente teorema:

Teorema 2.4.2 *Sea $f \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tal que $\beta \neq 1$, si tomamos $\gamma = \frac{\alpha}{1-\beta}$, entonces la solución casi automórfica $x(t)$ de (2.4.24) para $\alpha \neq 0$ tiene la forma:*

i) si $Re(\gamma) \neq 0$, entonces las soluciones están dadas según las ecuaciones (2.4.26) y (2.4.27)

ii) Para $Re(\gamma) = 0$, si $\int_0^t e^{-i\theta s} f(s)ds$ es acotada entonces la solución casi automórfica es:

$$x(t) = e^{i\theta t}(C_0 + \frac{\theta}{b}\int_0^t e^{-i\theta s} f(s)ds),$$

donde $\theta = Im(\gamma)$.

En el caso en que $\alpha = 0$, si $\int_0^t f(s)ds$ es acotada, entonces la solución casi automórfica es:

$$x(t) = \frac{1}{1-\beta}\int_0^t f(s)ds.$$

□

2.4.2. Sistema Neutral.

Consideremos el siguiente sistema neutral de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$x'(t) = Ax(t) + Bx'(t) + f(t), \tag{2.4.31}$$

donde, $A, B : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^p$ son operadores lineales, $f \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{C}^p)$. Supongamos que A, B tengan un común triangularizador $T : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^p$ (lo que se satisface por ejemplo si estos conmutan). Consideremos $x(t)$ una solución acotada de (2.4.31).
Sean:

$$\bar{A} =: T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \alpha_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & \alpha_2 & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_p \end{bmatrix}, \bar{B} := T^{-1}BT = \begin{bmatrix} \beta_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p} \\ 0 & \beta_2 & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_p \end{bmatrix};$$

donde α_j son los valores propios de A y β_j son los valores propios de B que cumplen $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $\beta_j \in \mathbb{C} - \{1\}$ para todo $j \in \{1, 2, \cdots, p\}$.

Consideremos ahora el siguiente cambio de variable:

$$y(t) = T^{-1}x(t), \tag{2.4.32}$$

entonces, derivando y utilizando (2.4.31) tenemos un nuevo sistema en y:

$$\begin{aligned} y'(t) &= T^{-1}x'(t) = T^{-1}[Ax(t) + Bx'(t) + f(t)] \\ &= \bar{A}y(t) + \bar{B}y'(t) + T^{-1}f(t). \end{aligned}$$

Sea $H(t) := T^{-1}f(t) = (h_1(t), h_2(t), \cdots, h_p(t))$, y como T^{-1} es un operador lineal, el corolario 1.1.1 nos asegura que $T^{-1}f(t)$ es casi automórfica. Luego tenemos el siguiente sistema:

$$y'(t) = \bar{A}y(t) + \bar{B}y'(t) + H(t) \tag{2.4.33}$$

la que en su forma expandida es equivalente a:

$$\begin{aligned}
y_1'(t) &= \alpha_1 y_1(t) + \sum_{i=2}^{p} a_{1i} y_i(t) + \beta_1 y_1'(t) + \sum_{i=2}^{p} b_{1i} y_i'(t) + h_1(t)\\
y_2'(t) &= \alpha_2 y_2(t) + \sum_{i=3}^{p} a_{1i} y_i(t) + \beta_2 y_2'(t) + \sum_{i=3}^{p} b_{1i} y_i'(t) + h_2(t)\\
&\vdots\\
y_{p-1}'(t) &= \alpha_{p-1} y_{p-1}(t) + a_{p-1p} y_p(t) + \beta_{p-1} y_{p-1}'(t) + b_{p-1p} y_p'(t) + h_{p-1}(t)\\
y_p'(t) &= \alpha_p y_p(t) + \beta_p y_p'(t) + h_p(t).
\end{aligned}$$

Tomemos la p-ésima ecuación:

$$y_p'(t) = \alpha_p y_p(t) + \beta_p y_p'(t) + h_p(t), \tag{2.4.34}$$

como se trata de una ecuación escalar podemos obtener la solución casi automórfica a través del Teorema 2.4.2. Sea $\tilde{y}_p(t)$ la solución casi automórfica de (2.4.34), entonces:

$$\tilde{y}_p'(t) = \alpha_p \tilde{y}_p(t) + \beta_p \tilde{y}_p'(t) + h_p(t),$$

de esto podemos verificar que :

$$\tilde{y}_p'(t) = \frac{1}{1-\beta_p}(\alpha_p \tilde{y}_p(t) + h_p(t));$$

lo que indica que la función derivada $\tilde{y}_p'(t)$ es casi automórfica, ya que $h_p(t)$ lo es.

Consideremos ahora la $(p-1)$-ésima ecuación:

$$y_{p-1}'(t) = \alpha_{p-1} y_{p-1}(t) + \beta_{p-1} y_{p-1}'(t) + \left[a_{p-1p}\tilde{y}_p(t) + b_{p-1p}\tilde{y}_p'(t) + h_{p-1}(t)\right].$$

Notemos que:

$$z_{p-1}(t) := a_{p-1p}\tilde{y}_p(t) + b_{p-1p}\tilde{y}_p'(t) + h_{p-1}(t)$$

es casi automórfica, nuevamente aplicando el Teorema 2.4.2 obtenemos la solucion casi automórfica $\tilde{y}_{p-1}(t)$ de la ecuación:

$$y_{p-1}'(t) = \alpha_{p-1} y_{p-1}(t) + \beta_{p-1} y_{p-1}'(t) + z_{p-1}(t).$$

Siguiendo este procedimiento podemos obtener la solución casi automórfica $(\tilde{y}_1(t), \tilde{y}_2(t), \cdots, \tilde{y}_p(t))$ del sistema (2.4.33), que bajo el cambio de variable (2.4.32) se obtiene la solución casi automórfica:

$$\tilde{x}(t) = T\tilde{y}(t)$$

del sistema (2.4.31).

En resumen se ha demostrado el siguiente teorema:

Teorema 2.4.3 *Sean $A, B : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^p$ operadores lineales con común triangularizador $T : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^p$, $f \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{C}^p)$ tal que los valores propios de B estan en $\mathbb{C} - \{1\}$, entonces toda solución acotada $x(t)$ del sistema (2.4.31) es casi automórfica.* □

Para ver condiciones bajo las cuales dos operadores conmutan, se puede recurrir al libro [44].El método empleado en la demostración del Teorema 2.4.3 se denomina *método de reducción*, en la referencia [36] se puede ver una descripción para el caso de un sistema lineal no neutral. Este método ha sido ocupado ampliamente en el estudio de ecuaciones diferenciales con retardo.

2.4.3. Sistema Neutral con Dicotomía.

En la presente subsección estamos interesados en estudiar las soluciones casi automórficas de la ecuación diferencial:

$$x' = A(t)x + f(t), \tag{2.4.35}$$

con énfasis en aplicar las ideas a ecuaciones neutrales no-autónomas del siguiente tipo:

$$x' = A(t)x + [h(t,x)]' + g(t,x). \tag{2.4.36}$$

Se asumirá que la parte homogénea asociada a ellas tenga una dicotomía exponencial y adicionalmente que la función de Green asociada sea Bi-casi automórfica. Como consecuencia se establece la solución casi automórfica para la ecuación neutral autónoma:

$$x' = Ax + [h(t,x)]' + g(t,x). \tag{2.4.37}$$

La definición de Bi-casi automórficidad se indica en el trabajo de Ti-Jun Xiao et. al [51] donde es utilizada para determinar existencia y unicidad de la solución mild pseudo-casi automórfica de las siguientes ecuaciones diferenciales no-autónomas de evolución:

$$\begin{aligned} x' &= A(t)x + f(t,x), \\ x' &= A(t)x + f(t, x(t-h)), \\ x' &= A(t)x + f(t, x(\alpha(t, x(t)))), \end{aligned}$$

consideradas sobre un expacio de Banach $\mathbb{X}$, en la que $A(t)$ genera un proceso evolutivo $U(t,s)$ hiperbólico (dicotómico).

Definición 2.4.1 (Bi-casi automórfica) *Sea $f(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}^p$ una función continua, f se dice que es Bi-casi automórfica, si para cualquier sucesión $\{s'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ existe una subsucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{s'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que los siguientes límites puntuales se tienen:*

$$\lim_{n\to+\infty} f(t+s_n, s+s_n) =: g(t,s),$$
$$\lim_{n\to+\infty} g(t-s_n, s-s_n) = f(t,s).$$

La definición que sigue es sobre dicotomía exponencial, para ello necesitamos escribir el sistema homogéneo involucrado en las ecuaciones precedentes, esto es :

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.4.38}$$

Definición 2.4.2 (Dicotomía exponencial) *Sea $\Phi(\cdot)$ una matriz fundamental de la ecuación (2.4.38), entonces (2.4.38) tiene una dicotomía exponencial con parámetros (α, K, P), si existen constantes $K \geq 1, \alpha > 0$ y una proyección P ($P^2 = P$) tal que $|G(t,s)| \leq Ke^{-\alpha|t-s|}, t, s \in \mathbb{R}$, donde la matriz de Green $G(\cdot,\cdot)$ está dada por:*

$$G(t,s) := \begin{cases} \Phi(t)P\Phi^{-1}(s), t \geq s \\ -\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s), t < s. \end{cases}$$

Existen muchos libros sobre la teoría de dicotomías, algunos de ellos son las referencias [12, 17, 33].

Para ver condiciones que aseguran que la función de Green es Bi-casi automórfica se puede recurrir a [20, 35, 51] y algunas de sus referencias.

El primer teorema donde se utilizan las definiciones de Bi-casi automorficidad y la de dicotomía exponencial es el siguiente:

Teorema 2.4.4 *Sea $f \in AA(\mathbb{R};\mathbb{C}^r)$, suponga que el sistema homogéneo (2.4.38) tiene una (α,K,P)-dicotomía exponencial con función de Green Bi-casi automórfica. Entonces la única solución acotada de (2.4.35) es casi automórfica.*

Demostración. Sea $G(t,s)$ la función de Green asociada a (2.4.38), entonces $|G(t,s)| \leq Ke^{-\alpha|t-s|}$, $t,s \in \mathbb{R}$. Por fórmula de variación de parámetros la única solución acotada de (2.4.35) es:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s)ds,$$

con cota $||x||_\infty \leq \frac{2K}{\alpha}||f||_\infty$. Se afirma que x es casi automórfica, en efecto: sea $\{s''_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión arbitraria, por ser f casi automórfica, existe una subsucesión $\{s'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{s''_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ y una función g tal que los siguientes límites puntuales se satisfacen:

$$\lim_{n\to+\infty} f(t+s_n) =: g(t),$$

$$\lim_{n\to+\infty} g(t-s_n) = f(t).$$

También, al ser la función de Green $G(t,s)$ Bi-casi automórfica, existe una subsucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{s'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y una función $\Delta(\cdot,\cdot)$ tal que los siguientes se tienen:

$$\lim_{n\to+\infty} G(t+s_n, s+s_n) =: \Delta(t,s);\ t,s \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta(t-s_n, s-s_n) = G(t,s);\ t,s \in \mathbb{R}.$$

Luego:

$$\begin{aligned} x(t+s_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t+s_n,s)f(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t+s_n,s+s_n)f(s+s_n)ds \end{aligned}$$

pero:

$$|G(t+s_n,s+s_n)| \leq Ke^{-\alpha|t-s|};\ t,s \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto debido al teorema de convergencia dominada de Lebesgue obtenemos:

$$\lim_{n\to+\infty} x(t+s_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(t,s)g(s)ds =: v(t).$$

Ahora:

$$\begin{aligned} v(t-s_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(t-s_n,s)g(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(t-s_n,s-s_n)g(s-s_n)ds \end{aligned} \qquad (2.4.39)$$

y como $\Delta(t-s_n,s-s_n) = \lim_{m\to+\infty} G(t-s_n+s_m, s-s_n+s_m)$, entonces:

$$\begin{aligned} |\Delta(t-s_n,s-s_n)| &= \lim_{m\to+\infty} |G(t-s_n+s_m,s-s_n+s_m)| \\ &\leq Ke^{-\alpha|t-s|},\ t,s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

luego $|\Delta(t-s_n,s-s_n)| \leq Ke^{-\alpha|t-s|}, t,s \in \mathbb{R}$, nuevamente el teorema de convergencia dominada de Lebesgue en la ecuación (2.4.39) otorga la igualdad:

$$\lim_{n\to+\infty} v(t-s_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s)ds.\ \square$$

Como se había mencionado, las ideas del teorema anterior se rescatan en favor del estudio de la ecuación neutral (2.4.36); como se verá en la demostración, también son necesarias los conocimientos de la sección de ecuaciones integrales.

Teorema 2.4.5 *Suponga que para la ecuación (2.4.36) se satisfacen las siguientes hipótesis:*

a. La ecuación homogénea (2.4.38) tiene una (α,K,P)-dicotomía exponencial con función de Green Bi-casi automórfica.

b. $g,h \in AA(\mathbb{R}\times\mathbb{C}^p;\mathbb{C}^p)$ tal que para todo $x,y \in AA(\mathbb{R};\mathbb{C}^p)$ con $||x||_\infty \leq R$; $||y||_\infty \leq R$:

$$|h(t,x(t)) - h(t,y(t))| \leq L_h||x-y||_\infty, t\in\mathbb{R},$$

$$|g(t,x(t)) - g(t,y(t))| \leq L_g||x-y||_\infty, t\in\mathbb{R}.$$

c. Se tiene la desigualdad:

$$L_h + \frac{2K}{\alpha}(L_g + ||A||_\infty L_h) < 1.$$

Entonces la ecuación diferencial neutral (2.4.36) tiene una única solución $y \in AA(\mathbb{R};\mathbb{C}^p)$.

Demostración. Dado que :

$$L_h + \frac{2K}{\alpha}(L_g + ||A||_\infty L_h) < 1,$$

se tiene:

$$0 < 1 - (L_h + \frac{2K}{\alpha}(L_g + ||A||_\infty L_h)).$$

Como $g,h \in AA(\mathbb{R}\times\mathbb{C}^p;\mathbb{C}^p)$ se tiene que son uniformemente acotadas con respecto a la variable real, de esto podemos encontrar un número real $R_0 > 0$ tal que para todo $R \geq R_0$ se cumpla la desigualdad:

$$R - R(L_h + \frac{2K}{\alpha}(L_g + ||A||_\infty L_h)) \geq \frac{2K}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{R}}|g(t,0)| + (\frac{2K}{\alpha}||A||_\infty + 1)\sup_{t\in\mathbb{R}}|h(t,0)|.$$

Tomemos ahora el conjunto cerrado $\mathfrak{B}(0,R) = \{y \in AA(\mathbb{R};\mathbb{C}^p) : ||y||_\infty \leq R\}$. Sea $G(t,s)$ la función de Green asociada a (2.4.38). Por fórmula de variación de parámetros, de la ecuación (2.4.36) obtenemos la ecuación integral siguiente:

$$x(t) = h(t,x(t)) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)[g(s,x(s)) + A(s)h(s,x(s))]ds, \tag{2.4.40}$$

por lo que toda solución de (2.4.40) es solución de (2.4.36).

Consideremos el operador:

$$\begin{aligned}\Gamma : AA(\mathbb{R},\mathbb{C}^p) &\rightarrow AA(\mathbb{R},\mathbb{C}^p)\\ w &\rightarrow \Gamma w(t) = h(t,w(t)) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)[g(s,w(s)) + A(s)h(s,w(s))]ds\end{aligned}$$

1) El operador Γ está bien definido debido a los lemas de composición y al Teorema 2.4.4.

2) Solución única.

Mostremos primeramente que $\Gamma(\mathfrak{B}(0,R)) \subseteq \mathfrak{B}(0,R)$. En efecto, sea $y \in \mathfrak{B}(0,R)$ entonces:

$$
\begin{aligned}
|(\Gamma y)(t)| &\leq |h(t,y(t))| + \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)||[g(s,y(s)) + A(s)h(s,y(s))]| \\
&\leq L_h||y||_\infty + \sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t,0)| + \frac{2K}{\alpha}(L_g||y||_\infty + ||A||_\infty L_h||y||_\infty) + \\
&+ \frac{2K}{\alpha}(\sup_{s\in\mathbb{R}} |g(s,0)| + ||A||_\infty \sup_{s\in\mathbb{R}} |h(s,0)|) \\
&\leq RL_h + R\frac{2K}{\alpha}(L_g + ||A||_\infty L_h) + (\frac{2K}{\alpha}||A||_\infty + 1)\sup_{s\in\mathbb{R}} |h(s,0)| \\
&+ \frac{2K}{\alpha}\sup_{s\in\mathbb{R}} |g(s,0)| \\
&\leq R.
\end{aligned}
$$

Sean ahora $x, y \in \mathfrak{B}(0,R)$, entonces:

$$
\begin{aligned}
|(\Gamma x)(t) - (\Gamma y)(t)| &\leq |h(t,x(t)) - h(t,y(t))| + \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)||g(s,x(s)) + A(s)h(s,x(s))|ds - \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)||g(s,y(s)) + A(s)h(s,y(s))|ds \\
&\leq L_h||x-y||_\infty + \frac{2K}{\alpha}(L_g||x-y||_\infty + ||A||_\infty L_h||x-y||_\infty) \\
&\leq (L_h + \frac{2K}{\alpha}(L_g + ||A||_\infty L_h))||x-y||_\infty.
\end{aligned}
$$

De esto y de la hipótesis (item c) se llega a determinar que Γ es un operador contractivo en $\mathfrak{B}(0,R)$, luego por el teorema de punto fijo de Banach existe una única solución de (2.4.40) y por lo tanto para (2.4.36). □

Como consecuencia de éste teorema se estudia en el siguiente corolario la ecuación neutral (2.4.37). Se denota por $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ el espectro del operador A, pero como en nuestro caso estamos trabajando en $\mathbb{C}^p$, $\sigma(A)$ denotará al conjunto de los valores propios de A. Con $Re\sigma(A)$ se denota la parte real de los elementos de $\sigma(A)$.

Corolario 2.4.1 *Consideremos el sistema neutral (2.4.37), con $A \in M_p(\mathbb{C}^p)$ una matriz constante y asuma que:*

i. $Re\sigma(A) \neq 0$; h, g satisfacen la hipótesis b) del Teorema 2.4.5.

ii. Se satisface el ítem c) del mismo teorema para K, α a especificar.

Entonces, existe $R > 0$ tal que la ecuación (2.4.37) tiene una única solución y casi automórfica que satisface $||y|| \leq R$.

Demostración. Dado que $Re\sigma(A) \neq 0$, entonces existe dicotomía exponencial para la ecuación homogénea $x' = Ax$, con matriz fundamental $X(t) = e^{At}$ y función de Green:

$$
G(t,s) = \begin{cases} e^{A(t-s)}P, & t \geq s, \\ -e^{A(t-s)}Q, & t < s. \end{cases} \tag{2.4.41}
$$

con $P^2 = P$, $P + Q = I$ y $Re\sigma(AP) < 0$, $Re\sigma(AQ) > 0$, además $|G(t,s)| \leq Ke^{-\alpha|t-s|}, t, s \in \mathbb{R}$ (K, α son las constantes que se consideran en ii). La solución de (2.4.37) es la solución de la ecuación integral:

$$\begin{aligned} x(t) &= h(t, x(t)) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)\Theta(s, x(s))ds \qquad (2.4.42) \\ &= h(t, x(t)) + \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)} P\Theta(s, x(s))ds - \\ &- \int_{t}^{+\infty} e^{A(t-s)} Q\Theta(s, x(s))ds, \end{aligned}$$

donde $\Theta(s, y(s)) = Ay(s) + g(s, y(s))$.
Definamos el operador:

$$\begin{aligned} \Gamma : AA(\mathbb{R}; \mathbb{C}^p) &\to AA(\mathbb{R}; \mathbb{C}^p) \qquad (2.4.43) \\ \Gamma x(t) &= h(t, x(t)) + \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)} P\Theta(s, x(s))ds - \\ &- \int_{t}^{+\infty} e^{A(t-s)} Q\Theta(s, x(s))ds. \end{aligned}$$

1) Gracias a la observación (1.3.1) y a los lemas 1.3.3 y 1.3.4 el operador Γ está bien definido.

2) Si ponemos $f(t, x(t)) = Ax(t), C_1(t-s) = e^{A(t-s)}P, C_2(t-s) = -e^{A(t-s)}Q, g_1(t, x(t)) = g_2(t, x(t)) = \Theta(t, x(t))$, la demostración de existencia y unicidad de la solución para la ecuación (2.4.37) se sigue del Teorema 2.2.5. □

Observación 2.4.1 Notemos que en la ecuación integral (2.4.42), la función de Green (2.4.41) es Bi-casi automórfica, entonces tomando el operador:

$$\begin{aligned} \Gamma : AA(\mathbb{R}; \mathbb{C}^p) &\to AA(\mathbb{R}; \mathbb{C}^p) \\ \Gamma x(t) &= h(t, x(t)) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)\Theta(s, y(s))ds, \end{aligned}$$

podemos concluir el corolario como el Teorema 2.4.5.

2.4.4. Soluciones Casi Automórficas Compactas.

Las funciones casi automórficas compactas son funciones que contienen a las casi periódicas y estan contenidas en las casi automórficas. El estudio de ecuaciones diferenciales que tengan soluciones casi automórficas compactas se remonta al trabajo de A.M. Fink [26] en el cual históricamente es la primera vez que aparecen esta clase de funciones. Reciéntemente, B. de Andrade y C. Cuevas han estudiado soluciones casi automórficas compactas de la siguiente ecuación:

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t))$$

sobre un espacio de Banach, donde A es un operador tipo Hille-Yosida.

Debido a que las ecuaciones en esta sección tienen parte homogénea no-autónoma, el estudio de ellas se vuelve un poco más complicada. En la sección anterior habíamos notado que para encontrar la solución casi automórfica uno de los requisitos es que la matriz de Green sea Bi-casi automórfica, para determinar esto varios autores consideran que es una consecuencia de las condiciones de Acquistapace-Terrini (entre otras) [4, 23, 35, 51], pero estas condiciones no son sencillas de verificar. Por ello necesitamos en nuestro contexto un resultado que asegure la Bi-casi automorficidad sin ocupar las condiciones de Acquistapace-Terrini. Efectivamente en esta sección este hecho se consigue y la demostración sigue algunas ideas encontradas en el caso casi-periódico.

Para presentar este resultado recordemos que la ecuación (2.4.38) es el sistema siguiente:

$$x'(t) = A(t)x(t).$$

Este resultado principal se enuncia bajo un lema, al que hemos bautizado como *Lema Fundamental*, ya que en su demostración arriban sucesiones de ecuaciones diferenciales y de matrices fundamentales las que nos ayudarán a estudiar en el siguiente capítulo a las ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos. El lema se enuncia como sigue:

Lema 2.4.1 *Supongamos que el sistema (2.4.38) tiene una (α, K, P) dicotomía exponencial con matriz fundamental $\Phi(t), \Phi(0) = I$ y que la matriz $A(t)$ es casi automórfica compacta, esto es: Dado una sucesión arbitraria $\{s_n'\} \subset \mathbb{R}$ existe una subsuseción $\{s_n\} \subseteq \{s_n'\}$ tal que los siguientes límites son uniformes sobre subconjuntos compactos de la recta real*

$$\lim_{n\to+\infty} A(t+s_n) = B(t), \quad \lim_{n\to+\infty} B(t-s_n) = A(t). \tag{2.4.44}$$

Entonces la ecuación:

$$y'(t) = B(t)y(t). \tag{2.4.45}$$

tiene una dicotomía exponencial. Más aún la función de Green asociada a (2.4.38) es Bi-casi automórfica compacta.

Este lema se aprovechará para obtener soluciones casi automórficas compactas de las ecuaciones siguientes:

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \ t \in \mathbb{R} \tag{2.4.46}$$

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t)), \ t \in \mathbb{R} \tag{2.4.47}$$

donde $A(\cdot)$ sea casi automórfica compacta, $f(\cdot)$ una función casi automórfica compacta y que $f(\cdot, x(\cdot))$ sea casi automórfica compacta a la que le adicionamos condiciones adecuadas.

Antes de realizar la demostración del lema, especifiquemos la definición de función casi automórfica compacta y de algunas de sus propiedades.

Definición 2.4.3 *Una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$, es casi automórfica compacta, si para cualquier sucesión de números reales $\{s_n'\}$ existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s_n'\}$ y una función $\tilde{f}$ tal que los siguientes límites son uniformes sobre subconjuntos compactos de la recta real:*

$$\lim_{n\to+\infty} f(t+s_n) =: \tilde{f}(t), \quad \lim_{n\to+\infty} \tilde{f}(t-s_n) = f(t).$$

Denotemos a este conjunto por $AA_C(\mathbb{R};\mathbb{X})$. Notemos que por definición se tiene $AA_C(\mathbb{R};\mathbb{X}) \subset AA(\mathbb{R};\mathbb{X})$.

Como se hizo en el Capítulo 1 para las funciones casi automórficas, se puede mostrar que $AA_C(\mathbb{R};\mathbb{X})$ es un subespacio vectorial cerrado de $BC(\mathbb{R};\mathbb{X})$ equipado con la norma del supremo. Esto nos permite resumir una propiedad importante de estas funciones en el siguiente teorema:

Teorema 2.4.6 *El espacio vectorial $AA_C(\mathbb{R};\mathbb{X})$ es un espacio de Banach equipado con la norma del supremo.* □

Para estudiar la ecuación semilineal (2.4.47). necesitamos la siguiente definición.

Definición 2.4.4 *Una función continua $f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, es casi automórfica compacta en $t \in \mathbb{R}$ si para cada $x \in \mathbb{X}$ y para cualquier sucesión de números reales $\{s'_n\}$ existen una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s'_n\}$, una función $\tilde{f}$ tal que los siguientes límites son uniformes sobre subconjuntos compactos de la recta real:*

$$\lim_{n\to+\infty} f(t+s_n,x) =: \tilde{f}(t,x), \quad \lim_{n\to+\infty} \tilde{f}(t-s_n,x) = f(t).$$

Denotemos a este conjunto por $AA_C(\mathbb{R}\times\mathbb{X};\mathbb{X})$.

También es necesario el siguiente lema de composición

Lema 2.4.2 *Sea $f \in AA_C(\mathbb{R}\times\mathbb{X};\mathbb{X})$ una función Lipschitz en la segunda variable y $u \in AA_C(\mathbb{R};\mathbb{X})$, entonces la función compuesta $f(\cdot,u(\cdot))$ es casi automórfica compacta.*

Demostración. Consideremos L_f la constante de Lipschitz. Sea $\{s'_n\}$ una sucesión arbitraria de números reales y $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ un subconjunto compacto, por hipótesis existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s'_n\}$ tal que los siguientes límites uniformes se satisfacen:

a). $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t+s_n,x) =: \tilde{f}(t,x), \quad t\in\mathcal{A}, x\in\mathbb{X},$

b). $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{f}(t-s_n,x) = f(t,x), \quad t\in\mathcal{A}, x\in\mathbb{X},$

c). $\lim\limits_{n\to+\infty} u(t+s_n) =: \tilde{u}(t), \quad t\in\mathcal{A},$

d). $\lim\limits_{n\to+\infty} : \tilde{u}(t-s_n) = u(t), \quad t\in\mathcal{A}.$

Luego:

$$||f(t+s_n,u(t+s_n)) - \tilde{f}(t,\tilde{u}(t))|| \leq L_f||u(t+s_n)-\tilde{u}(t)|| + ||f(t+s_n,\tilde{u}(t)) - \tilde{f}(t,\tilde{u}(t))||.$$

Des esto, de a) y c) se puede notar que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t+s_n,u(t+s_n)) = \tilde{f}(t,\tilde{u}(t))$ uniformemente para $t\in\mathcal{A}$. La demostración del límite $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{f}(t-s_n,\tilde{u}(t-s_n)) = f(t,u(t))$ se hace de manera similar. □

Este lema tiene una versión mas general que evita condiciones de Lipschitz y en su lugar se requiere: que f sea casi automórfica compacta en $t\in\mathbb{R}$ sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{X}$ y que la familia $\{f(t,\cdot), t\in\mathbb{R}\}$ sea equicontinua, para mayor detalle se puede recurrir a [28].

Demostración del lema 2.4.1. Consideremos $\Phi(t)$ una matriz fundamental de (2.4.38) y la función de Green asociada:

$$G(t,s) := \begin{cases} \Phi(t)P\Phi^{-1}(s), t\geq s \\ -\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s), t<s. \end{cases} \tag{2.4.48}$$

Sea $\{s''_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión arbitraria. Considere la ecuación:

$$x'(t) = A(t+s''_n)x,$$

cuya matriz fundamental es $\Phi_n(t) = \Phi(t+s''_n)\Phi^{-1}(s''_n)$. Tome las siguientes matrices:

$$P_n = \Phi(s''_n)P\Phi^{-1}(s''_n),$$
$$Q_n = \Phi(s''_n)Q\Phi^{-1}(s''_n);$$

dnde $Q = I - P$, entonces tenemos que $|P_n| \leq K$ y $|Q_n| \leq K$ por lo que el teorema de Bolzano Weierstrass asegura la existencia de una subsucesión $\{s_n^{'}\} \subseteq \{s_n^{''}\}$ tal que:

$$\lim_{n\to+\infty} \Phi(s_n^{'})P\Phi^{-1}(s_n^{'}) = \lim_{n\to+\infty} P_n = P_0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \Phi(s_n^{'})Q\Phi^{-1}(s_n^{'}) = \lim_{n\to+\infty} Q_n = Q_0.$$

Notemos que $P_0^2 = P_0$ y $P_0+Q_0 = I$. Sin pérdida de generalidad podemos obtener una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s_n^{'}\}$ tal que sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ se satisface (2.4.44), $\lim_{n\to+\infty} \Phi_n(t) = \Psi(t)$ y $\Phi_n^{-1}(t)$ converge a $\Psi^{-1}(t)$, con $\Psi(t)$ una matriz fundamental de (2.4.45) (para ver esto se puede recurrir al apéndice); note que $\Psi(0) = I$. De esto y tomando límite para $n \to +\infty$ en las siguientes expresiones:

$$|\Phi_n(t)P_n\Phi_n^{-1}(s)| = |\Phi(t+s_n)P\Phi^{-1}(s+s_n)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, t \geq s,$$

$$|\Phi_n(t)Q_n\Phi_n^{-1}(s)| = |\Phi(t+s_n)Q\Phi^{-1}(s+s_n)| \leq Ke^{-\alpha(s-t)}, s > t,$$

obtenemos la estimación

$$|\Psi(t)P_0\Psi^{-1}(s)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, t \geq s,$$

$$|\Psi(t)Q_0\Psi^{-1}(s)| \leq Ke^{-\alpha(s-t)}, s > t,$$

Esto es, la ecuación homogénea (2.4.45) tiene una dicotomía exponencial con función de Green:

$$\tilde{G}(t,s) := \begin{cases} \Psi(t)P_0\Psi^{-1}(s), t \geq s \\ -\Psi(t)Q_0\Psi^{-1}(s), t < s. \end{cases} \tag{2.4.49}$$

Probemos ahora que la función de Green $G(\cdot,\cdot)$ es Bi-casi automórfica. En efecto, tenemos lo siguiente:

$$G(t+s_n, s+s_n) := \begin{cases} \Phi_n(t)P_n\Phi_n^{-1}(s), t \geq s \\ -\Phi_n(t)Q_n\Phi_n^{-1}(s), t < s \end{cases} \tag{2.4.50}$$

y uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tenemos: $\lim_{n\to+\infty} G(t+s_n, s+s_n) = \tilde{G}(t,s)$. Ahora probemos que existe una subsucesión $\{\xi_n\} \subseteq \{s_n\}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} \tilde{G}(t-\xi_n, s-\xi_n) = G(t,s)$. Veamos, desde que $\Psi(t)$ es una matriz fundamental de (2.4.45) y considerando la ecuación:

$$z'(t) = B(t-s_n)z,$$

podemos ver que su matriz fundamental es $\Psi_n(t) = \Psi(t-s_n)\Psi^{-1}(-s_n)$. Realizando el procedimiento anterior obtenemos una sucesión de matrices:

$$P_{1,n} = \Psi(-s_n)P_0\Psi^{-1}(-s_n),$$

$$Q_{1,n} = \Psi(-s_n)Q_0\Psi^{-1}(-s_n)$$

que son acotadas por K, entonces podemos obtener una subsucesión $\{\xi_n\} \subseteq \{s_n\}$ tal que:

$$\lim_{n\to+\infty} \Psi(-\xi_n)P_1\Psi^{-1}(-\xi_n) = \lim_{n\to+\infty} P_{1,n} = \tilde{P}_1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \Psi(-\xi_n)Q_1\Psi^{-1}(-\xi_n) = \lim_{n\to+\infty} Q_{1,n} = \tilde{Q}_1$$

con $\tilde{P}_1^2 = \tilde{P}_1$, $\tilde{P}_1+\tilde{Q}_1 = I$, además uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$: $\lim_{n\to+\infty} B(t-\xi_n) = A(t)$, $\lim_{n\to+\infty} \Psi_n(t) = \Upsilon(t)$, $\lim_{n\to+\infty} \Psi_n^{-1}(t) = \Upsilon^{-1}(t)$; donde $\Upsilon(t)$ es una matriz fundamental de (2.4.38), note que $\Upsilon(0) = I$. Pero también existe una matriz invertible C tal que $\Upsilon(t) = \Phi(t)C$, y como $\Upsilon(0) = \Phi(0) = I$, se consigue que $C = I$ y por lo tanto $\Upsilon(t) = \Phi(t)$. Por otro lado sabemos que la matriz proyección para una dicotomía exponencial es única, entonces $\tilde{P}_1 = P, \tilde{Q}_1 = Q$, de esto como:

$$\tilde{G}(t-\xi_n, s-\xi_n) := \begin{cases} \Psi_n(t)P_{1,n}\Psi_n^{-1}(s), t \geq s \\ -\Psi_n(t)Q_{1,n}\Psi_n^{-1}(s), t < s \end{cases} \tag{2.4.51}$$

obtenemos :

$$\lim_{n\to+\infty} \tilde{G}(t-\xi_n, s-\xi_n) = G(t,s),$$

sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. □

Una mirada a esta demostración nos permite afirmar que la función de Green $G(t,s)$ es Bi-casi automórfica compacta.

Ahora estamos en posición de aplicar el lema fundamental en la demostración de los dos teoremas que siguen. Primero se enuncia y demuestra el teorema que asegura que la solución acotada de (2.4.46) es casi automórfica compacta. Recordemos que la ecuación (2.4.46) tiene la forma:

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t).$$

Teorema 2.4.7 *Supongamos que $A(t)$ es una matriz casi automórfica compacta y que la parte homogénea de (2.4.35) tenga una (α, K, P) dicotomía exponencial, además que $f \in AA_C(\mathbb{R};\mathbb{C}^p)$. Entonces la única solución acotada de (2.4.35) es casi automórfica compacta.*

Demostración. Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental de la parte homogénea de (2.4.35) y $G(t,s)$ su matriz de Green asociada. Por la fórmula de variación de parámetros podemos ver que la única solución acotada de (2.4.35) es de la forma:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s)ds.$$

Probemos que ésta solución es casi automórfica compacta. En efecto, de la demostración del lema (2.4.1) podemos notar que la función de Green $G(t,s)$ es Bi-casi automórfica compacta y como $f \in AA_C(\mathbb{R};\mathbb{C}^p)$ podemos asegurar que dada cualquier sucesión $\{s'_n\} \subset \mathbb{R}$ existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s'_n\}$ tal que, sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ los siguientes límites son uniformes:

$$\lim_{n\to+\infty} G(t+s_n, s+s_n) =: \tilde{G}(t,s), \quad \lim_{n\to+\infty} \tilde{G}(t-s_n, s-s_n) = G(t,s);$$

y sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ uniformemente se tiene:

$$\lim_{n\to+\infty} f(t+s_n) =: \tilde{f}(t), \quad \lim_{n\to+\infty} \tilde{f}(t-s_n) = f(t).$$

Sea $a > 0$ un número arbitrario positivo, consideremos el conjunto compacto $A = [-a,a]$ y definamos la función:

$$\tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}(t,s)\tilde{f}(s)ds.$$

En primer lugar se puede ver que dado $\epsilon > 0$, existe L_ϵ suficientemente grande, tal que para $T \geq L_\epsilon$ se tiene $\int_T^{+\infty} e^{-\alpha u}du < \epsilon$. Consideremos $t \in A$ y $L = L_\epsilon + a$, luego:

$$\begin{aligned} |x(t+s_n) - \tilde{x}(t)| &= |\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(G(t+s_n, s+s_n)f(s+s_n)ds - \tilde{G}(t,s)\tilde{f}(s)\Big)\, ds| \\ &\leq \int_{-L}^{+L} |G(t+s_n, s+s_n)f(s+s_n)ds - \tilde{G}(t,s)\tilde{f}(s)|ds + \\ &+ \int_{-\infty}^{-L} |G(t+s_n, s+s_n)f(s+s_n)ds - \tilde{G}(t,s)\tilde{f}(s)|ds + \\ &+ |\int_{L}^{+\infty} |G(t+s_n, s+s_n)f(s+s_n)ds - \tilde{G}(t,s)\tilde{f}(s)|ds. \end{aligned}$$

Pero además podemos conseguir las siguientes estimaciones:

$$\int_{-L}^{+L} |G(t+s_n, s+s_n)f(s+s_n)ds - \tilde{G}(t,s)\tilde{f}(s)|ds \leq$$

$$\int_{-L}^{+L} \Big(|G(t+s_n, s+s_n) - \tilde{G}(t,s)||f(s+s_n)| + |\tilde{G}(t,s)||f(s+s_n) - \tilde{f}(s)| \Big) ds \leq$$

$$||f||_\infty \int_{-L}^{+L} |G(t+s_n, s+s_n) - \tilde{G}(t,s)|ds + \int_{-L}^{+L} |\tilde{G}(t,s)||f(s+s_n) - \tilde{f}(s)|ds.$$

También, como $-a \leq t \leq a$, para $s \leq -L = -(L_\epsilon + a) < -a \leq t$, tenemos:

$$|G(t,s)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \ |\tilde{G}(t,s)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}.$$

Así, se puede ver que para n suficientemente grande:

$$\int_{-L}^{+L} |(G(t+s_n, s+s_n)f(s+s_n)ds - \tilde{G}(t,s)\tilde{f}(s)|ds \leq 2L||f||_\infty \epsilon + \frac{2K}{\alpha}\epsilon.$$

y :

$$\int_{-\infty}^{-L} |G(t+s_n, s+s_n)f(s+s_n)ds - \tilde{G}(t,s)\tilde{f}(s)|ds \leq$$

$$2K||f||_\infty \int_{-\infty}^{-L} e^{-\alpha(t-s)}ds = 2K||f||_\infty \int_{t+L}^{+\infty} e^{-\alpha u}du \leq 2K||f||_\infty \epsilon.$$

Del mismo modo, para $s > L = L_\epsilon + a > a \geq t$ se tiene:

$$|G(t,s)| \leq Ke^{-\alpha(s-t)}, \ |\tilde{G}(t,s)| \leq Ke^{-\alpha(s-t)},$$

con esto:

$$\int_{L}^{+\infty} |G(t+s_n, s+s_n)f(s+s_n)ds - \tilde{G}(t,s)\tilde{f}(s)|ds \leq$$

$$2K||f||_\infty \int_{L}^{+\infty} e^{-\alpha(s-t)} = 2K||f||_\infty \int_{L-t}^{+\infty} e^{-\alpha u}du \leq 2K||f||_\infty \epsilon.$$

Por lo tanto se concluye que :

$$\lim_{n\to+\infty} x(t+s_n) = \tilde{x}(t).$$

Para demostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{x}(t-s_n) = x(t)$ se procede del mismo modo. □

En lo que sigue se establece un resultado sobre existencia y unicidad de la solución casi automórfica compacta para la ecuación (2.4.47). En la demostración se utiliza el teorema anterior y el lema de composición 2.4.2.

Teorema 2.4.8 *Supongamos que $A(t)$ es una matriz casi automórfica compacta y que la parte homogénea de (2.4.35) tenga una (α, K, P) dicotomía exponencial, además que $f \in AA_C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p; \mathbb{R}^p)$ es una función L_f Lipschitz en la segunda variable. Si se satisface la relación $L_f < \frac{1}{2}\frac{\alpha}{K}$, entonces la ecuación (2.4.36) tiene una única solución casi automórfica compacta.*

Demostración. Sea $G(t,s)$ la función de Green asociada a la ecuacioón (2.4.38). Por fórmula de variación de parámetros podemos notar que la ecuación (2.4.36) es equivalente a la ecuación integral:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) f(s, x(s)) ds,$$

por lo tanto la única solución de ésta ecuación integral es solución de la ecuación diferencial (2.4.36). Definamos el operador:

$$\begin{aligned} \Gamma : AA_C(\mathbb{R};\mathbb{C}^p) &\to AA_C(\mathbb{R};\mathbb{C}^p) \\ x(t) &\to \Gamma x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) f(s,x(s)) ds. \end{aligned}$$

Por el lema de composición 2.4.2 y el Teorema 2.4.7 podemos notar que Γ es un operador bien definido. Sean $y_1, y_2 \in AA_C(\mathbb{R};\mathbb{C}^p)$, entonces:

$$\begin{aligned} |\Gamma y_1(t) - \Gamma y_2(t)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)||f(s,y_1(s)) - f(s,y_2(s))| ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)| L_f |y_1(s) - y_2(s)| ds \\ &\leq \frac{2K}{\alpha} L_f ||y_1 - y_2||_\infty. \end{aligned}$$

Por la hipótesis se puede ver que Γ es contractivo, por lo tanto existe una única solución casi automórfica compacta para la ecuación (2.4.36). $\square$

Capítulo 3

Soluciones Casi Automórficas de Ecuaciones Diferenciales con Argumento Constante a Trozos.

Una ecuación diferencial con argumento constante a trozos (DEPCA), es una ecuación con argumento discontinuo del siguiente tipo:

$$x'(t) = g(t, x(t), x([t])),$$

donde $[\cdot]$ indica la función parte entera. El estudio de las DEPCA se inició en el año 1983 con los trabajos de S.M.Shah y J. Wiener [47], posteriormente en 1984 K.L. Cooke y J. Wiener en [19] estudiaron DEPCA con retardo. Debido a su importancia en aplicaciones a ciertos modelos biomédicos [11], a fenómenos físicos [2] (y algunas referencias en ella) las DEPCA han tenido un significativo desarrollo [38, 39]. De esta manera muchos resultados sobre existencia, unicidad, acotabilidad, periodicidad, casi periodicidad, pseudo casi periodicidad, estabilidad, etc de las soluciones para estas ecuaciones se han desarrollado. Reciéntemente desde el año 2006 se empezó a analizar la casi automorficidad de la solución de las DEPCA [21, 48], por lo que se considera un área aún poco explorada.

Nuestro objetivo principal en éste capítulo es estudiar la existencia y unicidad de la solución casi automórfica para la siguiente DEPCA:

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)x([t]) + f(t, x(t), x([t])), \tag{3.0.1}$$

donde $A(t) \in M_{p\times p}(\mathbb{R})$, $B(t) \in M_{p\times p}(\mathbb{R})$ son matrices casi automórficas y $f \in BC(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p; \mathbb{R}^p)$ una función casi automórfica que cumple una cierta condición de Lipschicidad. El estudio se realizará utilizando la teoría de dicotomía exponencial [17] y el teorema del punto fijo de Banach. El motivo para estudiar la ecuación (3.0.1) es que en la literatura sólo existe el estudio de las soluciones casi periódicas para esta ecuación [54]; soluciones casi periódicas y pseudo casi periódicas con retardo para una ecuación un poco más general [1, 53]. En el ámbito de las ecuaciones casi automórficas Nguyen Van Minh y Tran Tat Dat en [48] dan condiciones espectrales para obtener soluciones casi automórficas de la ecuación diferencial autónoma siguiente:

$$x'(t) = Ax([t]) + f(t),$$

sobre un espacio de Banach con A un operador acotado y f una función casi automórfica, la misma linea sigue William Dimbour en [21] para la ecuación no-autónoma:

$$x'(t) = A(t)x([t]) + f(t),$$

sobre un espacio de Banach de dimensión finita, con $A(t)$ y $f(t)$ un operador y una función casi automórfica respectivamente. De esta manera se puede notar que el estudio casi automórfico de nuestra ecuación particularmente trata el de [48] y [21] en el caso de un espacio de Banach de dimensión finita, también cabe recalcar que no se sabe de otros trabajos análogos al que se presenta acá para dimensión finita.

Las DEPCA son ecuaciones diferenciales híbridas, esto es, gozan de la estructura de sistemas dinámicos continuos sobre intervalos de la forma $]n, n+1[, n \in \mathbb{Z}$ y de sistemas dinámicos discretos sobre $\mathbb{Z}$. La continuidad de la solución de una DEPCA (ver Definición 3.0.5) obliga a tener una fórmula de recursividad en cada punto de $\mathbb{Z}$ para que de esa forma se logre pasar de un intervalo a su consecutivo. Para obtener la mencionada fórmula de recursividad debemos enfrentar el estudio de las soluciones casi automórficas discretas para ciertas ecuaciones en diferencias, como la ecuación no-autónoma siguiente:

$$x(n+1) = D(n)x(n) + h(n), n \in \mathbb{Z}, \tag{3.0.2}$$

donde $D(n) \in M_{p\times p}$ es una matriz casi automórfica discreta y h es una sucesión casi automórfica discreta. Para estudiar la ecuación (3.0.2) introducimos la noción de sucesión Bi-casi automórfica discreta la que unirá fuerzas con la versión discreta de la teoría de dicotomía exponencial. En [3] D. Araya et al. estudian las soluciones casi automórficas discretas de la ecuación autónoma $x(n+1) = Dx(n) + h(n)$ sobre un espacio de Banach.

En el capítulo 1, cuando estudiamos las funciones casi automórficas, se introdujo la siguiente función como un ejemplo de esta clase:

$$\phi(t) = \sin\left(\frac{1}{2 + \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)}\right), t \in \mathbb{R}. \tag{3.0.3}$$

Como se puede ver (y por definición de casi automorficidad) ésta es una función continua; luego, cabe preguntarse ¿qué se puede afirmar sobre la función $\phi([t])$?.

En primer lugar notamos que si $f(t)$ es una función real, continua y no constante, la función $f([t])$ es discontinua. Con esto en mente podemos responder a la interrogante, mediante las siguientes apreciaciones para $\phi([t])$:

i) La función $\phi([t])$ no es casi automórfica, pues no es continua.

ii) Las discontinuidades se dan en los números enteros.

iii) Por la acotación de ϕ, los límites laterales en cada $n \in \mathbb{Z}$ siempre existen.

En el siguiente gráfico se da una apreciación visual de lo que se argumenta:

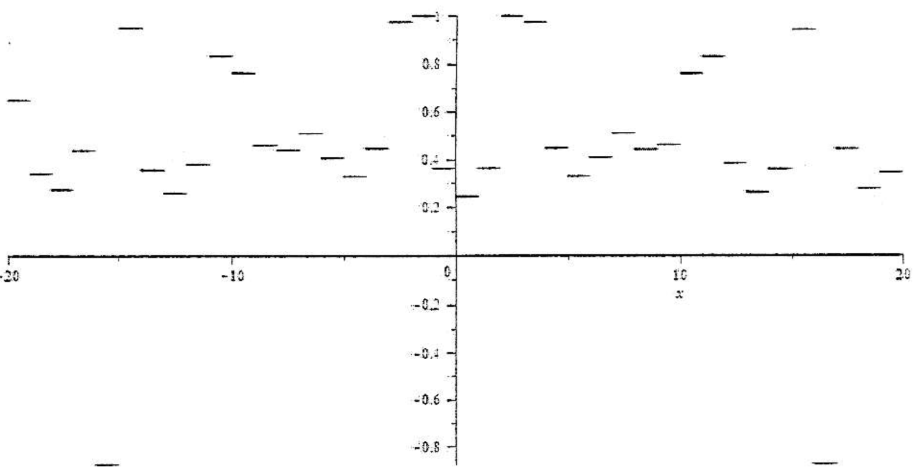

Fig. 1. $\phi([t]) = \sin\left(\dfrac{1}{2+\cos([t])+\cos(\sqrt{2}[t])}\right)$, $t \in [-20, 20]$.

Estas consideraciones salieron a la vista, cuando tratamos de estudiar la solución casi automórfica de la siguiente ecuación escalar:

$$x'(t) = \alpha x(t) + \beta x([t]) + g(t), \tag{3.0.4}$$

para $g(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2([t])$ con f_1, f_2 casi automórficas y α, β números complejos con alguna restricción. Debido a que en la ecuación (3.0.4) la perturbación no es casi automórfica, cabe realizarse la siguiente pregunta: ¿Cómo seguir con el estudio de las soluciones casi automórficas para esta ecuación?. Para dar una respuesta a esta pregunta, se introduce la noción de función $\mathbb{Z}$-casi automórfica (esto con la ayuda de las tres observaciones previas), análogo al concepto introducido en el ámbito de las funciones casi periódicas por E.Ait Dads y L. Lachimi en [1]. Ellos habían observado el mismo fenómeno en el ámbito de las funciones casi periódicas, es decir decidir la casi periodicidad de la función compuesta $f(t, x(t), x([t]))$, para $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ una función casi periódica sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ y $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ casi periódica. Esta función compuesta es considerada en una DEPCA que se estudia en [54], pero al no precisarse la definición de casi periodicidad de ésta nueva función no se logra aclarar por ejemplo si los ϵ-periodos tomados en cuenta para demostrar la casi-periodicidad de la solución de su ecuación están considerados en los números enteros o reales, lo que lleva a cuestionarnos sobre el buen planteo de la ecuación y regularidad de la solución.

Definitivamente, el concepto de las funciones $\mathbb{Z}$-casi automórficas alivian los problemas análogos que alumbran para las DEPCA's casi automórficas tratadas en éste capítulo. Estas nos ayudarán a entender a la función $\phi([t])$, estudiar mejor la ecuación (3.0.4) y se las aprovechará en el estudio (a través del método de reducción) de la solución casi automórfica de un sistema autónomo de DEPCA. Además de esto, veremos mas adelante que es suficiente considerar estas funciones para estudiar las soluciones casi automórficas de las DEPCA no-autónomas.

Este capítulo está dividido en 5 secciones que se distribuyen como sigue:
En la sección **3.1** se dan los preliminares sobre funciones $\mathbb{Z}$-casi automórficas.
En la sección **3.2** se desarrolla la teoría necesaria sobre ecuaciones casi automórficas en diferencias.
En la sección **3.3** se estudian las soluciones casi automórficas de la siguiente DEPCA escalar:

$$x'(t) = \alpha x(t) + \beta x([t]) + f(t); \tag{3.0.5}$$

y utilizando el método de reducción se estudia el siguiente sistema:

$$x'(t) = Ax(t) + Bx([t]) + f(t). \tag{3.0.6}$$

En la sección **3.4** se estudia la existencia y unicidad de la solución casi automórfica de los dos sistemas no-autónomos de DEPCA siguientes:

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)x([t]) + f(t); \tag{3.0.7}$$

y el sistema de DEPCA no-lineal:

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)x([t]) + f(t, x(t), x([t])). \tag{3.0.8}$$

Como aplicación, en la sección **3.5** se ocupan los resultados de las secciones previas en el estudio de la existencia y unicidad de la solución casi automórfica para el modelo de Lasota-Wazewska con argumento constante a trozos.

Básicamente, nuestras hipótesis serán que la función $f(\cdot)$ y las funciones matriciales $A(\cdot), B(\cdot)$ sean casi automórficas, además de considerarse la versión discreta de la noción de Bi-casi automorficidad. Al estudiar las soluciones casi automórficas del sistema (3.0.8) necesitamos asumir como hipótesis adicional una condición de δ-Lipschicidad sobre la función f, la que se establece como sigue:

$\triangle$).(**δ-Lipschitz**) Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ una función y $\delta > 0$, f es δ-Lipschitz, si:

$$|f(t, x, y) - f(t, z, w)| \leq \delta(|x - z| + |y - w|), \ \forall (t, x, y); (t, z, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p.$$

Antes de seguir con el contenido de éste capítulo necesitamos mencionar lo que se entiende por solución de una DEPCA, ésta se especifica en la siguiente definición:

Definición 3.0.5 Una función $x(t)$ es una solución de una DEPCA en el intervalo I, si satisface lo siguiente:

i) $x(t)$ es continua en todo I.

ii) $x(t)$ es diferenciable en todo I, excepto posiblemente en los puntos $n \in I \cap \mathbb{Z}$ donde debe existir una derivada lateral.

iii) $x(t)$ satisface la ecuación en todo el intervalo $(n, n+1), n \in \mathbb{Z}$ y también la satisface con la derivada a la derecha para cada $n \in \mathbb{Z}$.

3.1. Preliminares sobre Funciones $\mathbb{Z}$-Casi Automórficas.

En esta sección especificamos la definición de función $\mathbb{Z}$-Casi Automórfica y se presentan algunas de sus propiedades; para ello necesitamos tener como ambiente el siguiente subconjunto de las funciones acotadas:

$BR(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p : f$ *es acotada, continua en* $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ *y tiene límites laterales finitos en* $\mathbb{Z}\}$.

Definición 3.1.1 *Una función $f \in BR(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$, se dice que es una función $\mathbb{Z}$-casi automórfica si para cualquier sucesión de números enteros $\{s'_n\} \subset \mathbb{Z}$ existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s'_n\}$ tal que los límites puntuales siguientes se satisfacen:*

$$\lim_{n \to +\infty} f(t + s_n) =: \tilde{f}(t), \quad \lim_{n \to +\infty} \tilde{f}(t - s_n) = f(t), t \in \mathbb{R}.$$

Observación 3.1.1

i) Denotaremos a este subconjunto de las funciones acotadas como $\mathbb{Z}AA(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)$.

ii) Se puede ver que si $f \in \mathbb{Z}AA(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)$ entonces es localmente integrable.

Algunas propiedades importantes para este tipo de funciones las enunciamos como lemas. Entre algunas de las consecuencias de estos lemas es que el conjunto $\mathbb{Z}AA(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)$ es no vacío.

Lema 3.1.1 *Si f es una función casi automórfica, entonces $f([\cdot]) \in \mathbb{Z}AA(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)$.*

Demostración. Sea $\{s'_n\} \subset \mathbb{Z}$ una sucesión arbitraria, entonces existe un subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s'_n\}$ y una función $\tilde{f}$ tal que los siguientes límites puntuales se satisfacen:

$$\lim_{n\to+\infty} f(t+s_n) =: \tilde{f}(t), \quad \lim_{n\to+\infty} \tilde{f}(t-s_n) = f(t), t \in \mathbb{R}.$$

Luego puntualmente tenemos :

$$\lim_{n\to+\infty} f([t+s_n]) = \lim_{n\to+\infty} f([t]+s_n) = \tilde{f}([t]),$$

$$\lim_{n\to+\infty} \tilde{f}([t-s_n]) = \lim_{n\to+\infty} \tilde{f}([t]-s_n) = f([t]),$$

esto es $f([\cdot])$ está en $ZAA(\mathbb{R},\mathbb{R}^p)$. □

Lema 3.1.2 *Sea $f \in AA(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^p)$ y Lipschitz en la segunda variable, $\psi \in \mathbb{Z}AA(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)$, entonces $f_\psi : t \to f(\cdot,\psi(\cdot)) \in \mathbb{Z}AA(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)$.*

Demostración. sea δ la constante de Lipschitz, como $\psi \in \mathbb{Z}AA(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)$ es acotada, entonces su rango es relativamente compacto, esto es $K = \overline{\{\psi(t), t \in \mathbb{R}\}}$ es compacto. Sea $\{s'_n\} \subset \mathbb{Z}$ una sucesión arbitraria, entonces existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s'_n\}$ tal que los límites siguientes se satisfacen:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t+s_n,x) =: \tilde{f}(t,x), \; x \in K.$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{f}(t-s_n,x) = f(t,x), \; x \in K.$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \psi(t+s_n) =: \tilde{\psi}(t), t \in \mathbb{R}.$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{\psi}(t-s_n) = \psi(t), t \in \mathbb{R}.$

Luego obtenemos:

$$\begin{aligned} |f(t+s_n,\psi(t+s_n)) - \tilde{f}(t,\tilde{\psi}(t))| &\le |f(t+s_n,\psi(t+s_n)) - f(t+s_n,\tilde{\psi}(t))| + \\ &+ |f(t+s_n,\tilde{\psi}(t)) - \tilde{f}(t,\tilde{\psi}(t))| \\ &\le \delta|\psi(t+s_n) - \tilde{\psi}(t)| + |f(t+s_n,\tilde{\psi}(t)) - \tilde{f}(t,\tilde{\psi}(t))| \end{aligned}$$

De esto, de la parte a) y de la parte c) se consigue que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t+s_n,\psi(t+s_n)) = \tilde{f}(t,\tilde{\psi}(t))$. La demostración del límite $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{f}(t-s_n,\tilde{\psi}(t-s_n)) = f(t,\psi(t))$ se realiza de manera análoga. □

Lema 3.1.3 *Sea $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ una función δ-Lipschitz casi automórfica, ψ una función casi automórfica , entonces $g_\psi : t \to f(t,\psi(t),\psi([t]))$ está en $\mathbb{Z}AA(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)$.*

Demostración. La demostración de este lema es similar a la anterior, por lo que la omitimos. □

Antes de tratar a las DEPCA, necesitamos estudiar las ecuaciones en diferencias (o también denominadas ecuaciones discretas), ésto se desarrolla en la siguiente sección.

3.2. Ecuaciones Casi Automórficas en Diferencias.

En esta sección nos encargaremos de obtener la solución casi automórfica discreta para los siguientes sistemas:

$$x(n+1) = Ax(n) + f(n), \; n \in \mathbb{Z}, \tag{3.2.9}$$

$$x(n+1) = C(n)x(n) + f(n), \; n \in \mathbb{Z}, \tag{3.2.10}$$

donde $A \in M_{p\times p}$ es una matriz constante, $C(n)$ y f son una matriz y una función casi automórfica discreta respectivamente. El sistema (3.2.9) es ampliamente estudiado en [3] en su forma mas general, es decir sobre un espacio de Banach $\mathbb{X}$ y con A un operador lineal, también en el mismo trabajo se estudia un sistema discreto semilineal. Por esto para el estudio de las soluciones casi automórficas discretas de la ecuación autónoma (3.2.9) sólamente enunciaremos los resultados importantes. Nuestra prioridad se basa en la ecuación no-autónoma (3.2.10) ya que no ha sido estudiada en la literatura para el caso de soluciones casi automórficas discretas. Para la versión casi periódica se puede ver [54, 55]. Es importante notar que en [3] hay un estudio detallado de las funciones casi automórficas discretas; por lo que, para mayores detalles sobre éste tópico se puede recurrir a él.

Precisamos la definición de función casi automórfica discreta:

Definición 3.2.1 *Una función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ con $\mathbb{X}$ un espacio de Banach, se dirá que es casi automórfica discreta, si para cualquier sucesión $\{s_n'\} \subset \mathbb{Z}$, existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s_n'\}$, tal que los siguientes límites puntuales se satisfacen:*

$$\lim_{n\to+\infty} f(k+s_n) =: \tilde{f}(n), \; k \in \mathbb{Z},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \tilde{f}(k-s_n) = f(n), \; k \in \mathbb{Z}.$$

Observación 3.2.1 *Denotaremos a este conjunto como $AA_d(\mathbb{Z}, \mathbb{X})$, el cual con la norma del supremo es un espacio de Banach, ver [3].*

En el presente capítulo se define de manera análoga a la Bi-casi automorficidad continua la versión de Bi-casi automorficidad discreta, ésta se expresa en la siguiente:

Definición 3.2.2 *Una función $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ con $\mathbb{X}$ un espacio de Banach, se dirá que es Bi-casi automórfica discreta, si para cualquier sucesión $\{s_n'\} \subset \mathbb{Z}$, existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s_n'\}$, tal que los siguientes límites puntuales se satisfacen:*

$$\lim_{n\to+\infty} f(k+s_n, m+s_n) =: \tilde{f}(k,m), \; k,m \in \mathbb{Z},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \tilde{f}(k-s_n, m-s_n) = f(k,m), \; k,m \in \mathbb{Z}..$$

Como se hizo notorio en el capítulo anterior, la teoría de dicotomía exponencial para el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales no-autónomas casi automórficas fué muy importante, particularmente para obtener la solución dependiendo de la función de Green y para estimar la acotabilidad de tal solución. La siguiente definición tiene que ver con la versión discreta de dicotomía exponencial.

Considere que $C(n), n \in \mathbb{Z}$ de la ecuación (3.2.10) es invertible y sea $Y(n), n \in \mathbb{Z}$ una matriz fundamental del sistema siguiente:

$$x(n+1) = C(n)x(n), n \in \mathbb{Z}. \tag{3.2.11}$$

Definición 3.2.3 *La ecuación (3.2.11) tiene una dicotomía exponencial con parámetros* (α, K, P), *si existen constantes positivas* α, K *y una proyección* P *tal que*

$$|G_d(m,n)| \leq Ke^{-\alpha|m-n|}, m, n \in \mathbb{Z}$$

donde $G_d(m,n)$ *es la función de Green discreta que toma la expresión:*

$$G_d(m,n) := \begin{cases} Y(m)PY^{-1}(n), m \geq n \\ -Y(m)(I-P)Y^{-1}(n), m < n. \end{cases}$$

En lo que sigue se estudian las ecuaciones en diferencias (3.2.9) y (3.2.10). Comenzamos por estudiar la ecuación (3.2.9) para el caso escalar mediante el siguiente teorema:

Teorema 3.2.1 *Sea* $f \in AA_d(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^p)$ *y consideremos que la ecuación en diferencias (3.2.9) sea escalar con* $A = \lambda$ *un número complejo fuera del círculo unidad. Entonces, la única solución casi automórfica de (3.2.9) tiene la forma:*

$$x(n) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{0} \lambda^{-k} f(k+n-1), & |\lambda| < 1, \\ \displaystyle-\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{-(k+1)} f(n+k), & |\lambda| > 1, \end{cases}$$

más aún, se tiene:

$$|x(n)| \leq \kappa(\lambda)||f||_\infty, \ \forall n \in \mathbb{Z};$$

donde:

$$\kappa(\lambda) := \begin{cases} (1-|\lambda|)^{-1}, & |\lambda| < 1, \\ (|\lambda|-1)^{-1}, & |\lambda| > 1. \end{cases}$$

Una demostración para éste teorema se puede encontrar en [3, Teorema 3.1].

El método de reducción aplicado al caso continuo en el Teorema (2.4.3), nos invita a obtener como corolario del Teorema 3.2.1 lo siguiente:

Corolario 3.2.1 *Sea* $f \in AA_d(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^p)$, *y supongamos que la matriz* A *del sistema (3.2.9) tiene valores propios fuera del círculo unidad, entonces dicho sistema tiene una única solución casi automórfica discreta.*

Un método que permite determinar condiciones necesrias y sufientes para que los autovalores de la matriz A se encuentren fuera del círculo unidad es el algoritmo de Schur-Cohn.

El teorema que sigue es el resultado principal de esta sección, el teorema da condiciones bajo las cuales se asegura que hay una única solución acotada casi automórfica del sistema discreto no-autónomo (3.2.10).

Teorema 3.2.2 *Sea $f \in AA_d(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^p)$ y supongamos que la ecuación en diferencias (3.2.11) tiene una (α,K,P)-dicotomía exponencial con función de Green $G_d(\cdot,\cdot)$ Bi-casi automórfica discreta. Entonces, la única solución casi automórfica de (3.2.10) tiene la forma:*

$$x(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} G_d(n, k+1)f(k), \ n \in \mathbb{Z}$$

y está uniformemente acotada por:

$$|x(n)| \leq K(1+e^{-\alpha})(1-e^{-\alpha})^{-1}||f||_\infty, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. La demostración de que la función $x(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} G_d(n, k+1)f(k), \ n \in \mathbb{Z}$ es la única solución acotada de la ecuación discreta (3.2.10) se puede ver en [55, Teorema 5.7]. Mostraremos que ésta solución es casi automórfica discreta. En efecto, consideremos una sucesión arbitraria $\{s'_n\} \subset \mathbb{Z}$, luego existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s'_n\}$ tal que los siguientes límites puntuales se satisfacen:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} f(m+s_n) =: \tilde{f}(m), m \in \mathbb{Z}$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{f}(m-s_n) = f(m), m \in \mathbb{Z}$,

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} G_d(m+s_n, l+s_n) =: \tilde{G}_d(m,l), m, l \in \mathbb{Z}$,

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{G}_d(m-s_n, l-s_n) = G_d(m,l), m, l \in \mathbb{Z}$.

Luego:

$$\begin{aligned} x(n+s_n) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} G_d(n+s_n, k+1)f(k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} G_d(n+s_n, k+1+s_n)f(k+s_n). \end{aligned}$$

De esto, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue y los ítems a) y c) se concluye que:

$$\lim_{n\to\infty} x(n+s_n) = \tilde{x}(n),$$

donde

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{G}_d(n, k+1)\tilde{f}(k).$$

Para demostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{x}(n-s_n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} G_d(n, k+1)f(k) = x(n)$$

se procede de manera análoga. □

3.3. Soluciones Casi Automórficas para las DEPCA (3.0.5) y (3.0.6).

Antes de iniciar con el tratamiento de las ecuaciones mencionadas necesitamos un lema preliminar sobre sucesiones de números reales, éste se describe como sigue:

Lema 3.3.1 *Sea $\{s''_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión arbitraria, entonces existe una subsucesión $\{s'_n\} \subset \{s''_n\}$ tal que $s'_n = \eta'_n + t'_n$ con $\eta'_n \in \mathbb{Z}$ y $t'_n \in [0,1[$; además $\lim\limits_{n\to\infty} t'_n = t_0$ para algún $t_0 \in [0,1]$.*

Demostración. Consideremos $\eta_n^{''}$ la parte entera de la sucesión, esto es $\eta_n^{''} = [s_n^{''}]$ y sea $t_n^{''} = s_n^{''} - \eta_n^{''}$ la parte decimal, entonces $s_n^{''} = \eta_n^{''} + t_n^{''}$. Además, como $t_n^{''} \in [0,1[$ existe una subsucesión $\{t_n'\} \subseteq \{t_n^{''}\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n' = t_0$ para algún $t_0 \in [0,1]$, es decir existe una subsucesión $\{s_n'\} \subseteq \{s_n^{''}\}$ tal que $s_n' = \eta_n' + t_n'$. $\square$

Este lema se utilizará oportunamente en la demostración de algunos teoremas que se darán en el futuro.

Consideremos ahora la ecuación (3.0.5), podemos notar que por la fórmula de variación de parámetros la solución de ésta DEPCA en el intervalo $[n, n+1[$ se representa en forma integral por:

$$x(t) = e^{\alpha(t-n)}x(n) + \int_n^t e^{\alpha(t-s)}\beta x(n)ds + \int_n^t e^{\alpha(t-n)}f(s)ds \tag{3.3.12}$$

que integrando obtenemos la expresión:

$$x(t) = [e^{\alpha(t-n)} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t-n)} - 1)]x(n) + \int_n^t e^{\alpha(t-s)}f(s)ds. \tag{3.3.13}$$

Por continuidad de la solución, haciendo $t \to (n+1)^-$, obtenemos la siguiente ecuación discreta:

$$x(n+1) = cx(n) + h(n), n \in \mathbb{Z}; \tag{3.3.14}$$

donde

$$c = e^{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha} - 1),$$

$$h(n) = \int_n^{n+1} e^{\alpha(n+1-s)}f(s)ds,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 3.3.1 *Supongamos que $f \in \mathbb{Z}AA(\mathbb{R};\mathbb{C})$, entonces la función discreta $h(n)$ es casi automórfica, además si $|c| \neq 1$, entonces la ecuación (3.3.14) tiene una única solución casi automórfica discreta $x(n)$.*

Demostración. Sea $\{s_k'\} \subset \mathbb{Z}$ una sucesión arbitraria, como f es $\mathbb{Z}$-casi automórfica, existe una subsucesión $\{\eta_k\} \subset \{s_k'\}$ tal que para cada $s \in \mathbb{R}$ se tienen los siguientes límites:

$$\lim_{k\to+\infty} f(s+\eta_k) =: \tilde{f}(s),\ \lim_{k\to+\infty} \tilde{f}(s-\eta_k) = f(s).$$

Consideremos la siguiente sucesión:

$$\tilde{h}(n) = \int_n^{n+1} e^{\alpha(n+1-s)}\tilde{f}(s)ds.$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned}
|h(n+\eta_k) - \tilde{h}(n)| &= |\int_{n+\eta_k}^{n+\eta_k+1} e^{\alpha(n+1+\eta_k-s)}f(s)ds - \int_n^{n+1} e^{\alpha(n+1-s)}\tilde{f}(s)ds| \\
&= |\int_n^{n+1} e^{\alpha(n+1-s)}f(s+\eta_k)ds - \int_n^{n+1} e^{\alpha(n+1-s)}\tilde{f}(s)ds| \\
&\leq \int_n^{n+1} |e^{\alpha(n+1-s)}[f(s+\eta_k) - \tilde{f}(s)]|ds
\end{aligned}$$

De esto, por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se consigue:

$$\lim_{k\to+\infty} h(n+\eta_k) = \tilde{h}(n),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Se procede del mismo modo para la demostración de la igualdad:

$$\lim_{k\to+\infty}\tilde{h}(n-\eta_k)=h(n),\ n\in\mathbb{Z}.$$

La existencia y unicidad de la solución casi automórfica discreta se sigue de coordinar con el Teorema 3.2.1. □

En el siguiente Teorema veremos que para determinar si una solución acotada y casi automórfica discreta es solución casi automórfica de la ecuación (3.0.5) es suficiente considerar a la función f en el conjunto $\mathbb{Z}AA(\mathbb{R};\mathbb{C})$, esto sucede debido a que en la demostración se hacen argumentos de cambios de variable y de esa manera se transfieren sucesiones de números enteros a la función f mas no sucesiones reales. El teorema es como sigue:

Teorema 3.3.2 *Sea x una solución acotada de la ecuación (3.0.5) con $f\in\mathbb{Z}AA(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Entonces x es casi automórfica si y sólo si $x(n)$ es casi automórfica discreta.*

Demostración. Si x es una solución casi automórfica entonces restringiendo x a $\mathbb{Z}$ se consigue ver que $x(n)$ es casi automórfica discreta.

Para demostrar la otra implicación, escribamos la solución (3.3.13) de la siguiente manera:

$$x(t)=[e^{\alpha(t-[t])}+\frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t-[t])}-1)]x([t])+\int_{[t]}^{t}e^{\alpha(t-s)}f(s)ds. \tag{3.3.15}$$

Esta solución cuando f está en $\mathbb{Z}AA(\mathbb{R};\mathbb{C})$ se puede ver que está bien definida como consecuencia de la observación 3.1.1. La demostración de la casi automorficidad se hará en varios pasos.

Primero. Consideremos una sucesión arbitraria $\{s'_n\}\subset\mathbb{Z}$, entonces existe una subsucesión $\{\eta_k\}\subset\{s'_n\}$, funciones $\tilde{f}$ y ν tal que para cada $t\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}$ tenemos los siguientes límites:

$$\lim_{k\to+\infty}f(t+\eta_k)=\tilde{f}(t),\ \lim_{k\to+\infty}\tilde{f}(t-\eta_k)=f(t),$$

$$\lim_{k\to+\infty}x(n+\eta_k)=\nu(n),\ \lim_{k\to+\infty}\nu(n-\eta_k)=x(n).$$

Consideremos la siguiente función:

$$y(t)=[e^{\alpha(t-[t])}+\frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t-[t])}-1)]\nu([t])+\int_{[t]}^{t}e^{\alpha(t-s)}\tilde{f}(s)ds.$$

No es difícil verificar que para cada $t\in\mathbb{R}$ se tienen los siguientes límites:

$$\lim_{k\to+\infty}x(t+\eta_k)=y(t),\ \lim_{k\to+\infty}y(t-\eta_k)=x(t).$$

Por ejemplo para el primer límite, observemos que al tener $\eta_k\in\mathbb{Z}$, entonces:

$$x(t+\eta_k)=[e^{\alpha(t-[t])}+\frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t-[t])}-1)]x([t]+\eta_k)+\int_{[t]}^{t}e^{\alpha(t-s)}f(s+\eta_k)ds.$$

Luego,

$$\begin{aligned}|x(t+\eta_k)-y(t)| &\le |e^{\alpha(t-[t])}+\frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t-[t])}-1)]\,(x([t]+\eta_k)-\nu([t]))\,|+\\ &+\ |\int_{[t]}^{t}e^{\alpha(t-s)}\left(f(s+\eta_k)-\tilde{f}(s)\right)ds|.\end{aligned}$$

Luego el límite se sigue debido a que $x([t]+\eta_k)\to\nu([t]),n\to+\infty$ y por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue, pues $f(s+\eta_k)\to\tilde{f}(s),n\to+\infty$. El esquema para verificar el segundo límite es el mismo.

Segundo. Consideremos una sucesión $\{s'_n\} \subset \mathbb{R}$ arbitraria. Entonces, por el Lema 3.3.1 existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s'_n\}$ de la forma $s_n = \xi_n + t_n$ con $\xi_n \in \mathbb{Z}$, $t_n \in [0,1[$ y $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0 \in [0,1]$, además podemos tomar $\{\xi_n\}$ para el cual los límites puntuales del primer paso se satisfacen.

Afirmación: $\lim_{n\to+\infty} x(t+t_n+\xi_n) = y(t+t_0)$. En efecto:
1) Si $t+t_0$ no es entero. Entonces, para n suficientemente grande tenemos $[t+t_n] = [t+t_0]$ y con esto $x([t+t_n]) = x([t+t_0])$. Luego, se consigue:

$$\lim_{n\to+\infty} x([t+t_n+\xi_n]) = \lim_{n\to+\infty} x([t+t_0]+\xi_n) = \nu([t+t_0]),$$

también:

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\alpha(t+t_n+\xi_n-[t+t_n+\xi_n])} = e^{\alpha(t+t_0-[t+t_0])}.$$

Consideremos ahora $\epsilon > 0$ arbitrario, entonces para n suficientemente grande se tiene $[t+t_n] = [t+t_0]$, $|t_n - t_0| < \epsilon$ y $|f(t+\xi_n) - \tilde{f}(t)| < \epsilon$, con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{[t+t_n+\xi_n]}^{t+t_n+\xi_n} e^{\alpha(t+t_n+\xi_n-s)} f(s)ds - \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} e^{\alpha(t+t_0-s)}\tilde{f}(s)ds\right| \\
\leq & \left|\int_{[t+t_n]}^{t+t_n} e^{\alpha(t+t_n-s)} f(s+\xi_n)ds - \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} e^{\alpha(t+t_n-s)} f(s+\xi_n)ds\right| \\
+ & \left|\int_{[t+t_0]}^{t+t_0} e^{\alpha(t+t_n-s)} f(s+\xi_n)ds - \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} e^{\alpha(t+t_0-s)}\tilde{f}(s)ds\right| \\
\leq & \int_{t+t_0}^{t+t_n} |e^{\alpha(t+t_n-s)} f(s+\xi_n)|ds + \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} |e^{\alpha(t+t_n-s)} f(s+\xi_n) - e^{\alpha(t+t_0-s)}\tilde{f}(s)|ds \\
\leq & (2||f||_\infty + 1)\epsilon.
\end{aligned}$$

Considerando éstos hechos y la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
&|x(t+s_n) - y(t+t_0)| \leq \Big| \left(e^{\alpha(t+t_n-[t+t_n])} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t+t_n-[t+t_n])} - 1)\right) x([t+t_n]+\xi_n) - \\
- & \left(e^{\alpha(t+t_0-[t+t_0])} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t+t_0-[t+t_0])} - 1)\right)\nu([t+t_0])\Big| + \\
+ & \left|\int_{[t+t_n+\xi_n]}^{t+t_n+\xi_n} e^{\alpha(t+t_n+\xi_n-s)} f(s)ds - \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} e^{\alpha(t+t_0-s)}\tilde{f}(s)ds\right| \\
\leq & \left|\left(e^{\alpha(t+t_n-[t+t_n])} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t+t_n-[t+t_n])})\right) - \left(e^{\alpha(t+t_0-[t+t_0])} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t+t_0-[t+t_0])})\right)\right| ||x||_\infty + \\
+ & \left|e^{\alpha(t+t_0-[t+t_0])} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t+t_0-[t+t_0])} - 1)||x([t+t_n]+\xi_n) - \nu([t+t_0])\right| + \\
+ & \left|\int_{[t+t_n+\xi_n]}^{t+t_n+\xi_n} e^{\alpha(t+t_n+\xi_n-s)} f(s)ds - \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} e^{\alpha(t+t_0-s)}\tilde{f}(s)ds\right|,
\end{aligned}$$

es factible concluir que dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces:

$$|x(t+s_n) - y(t+t_0)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Note que el primer sumando es menor que $\frac{\epsilon}{3}$ debido a la acotación de x.
2) Si $t+t_0 \in \mathbb{Z}$. En este caso nos concentraremos en dos opciones.

2.1) Si $\{t_n\}$ es decreciente se procede como en el caso anterior.

2.2) Si $\{t_n\}$ no es decreciente, entonces $[t+t_n] = t+t_0-1$, luego:

$$
\begin{aligned}
x(t+t_n+\xi_n) &= (e^{\alpha(t_n-t_0+1)}+\frac{\beta}{\alpha}e^{\alpha(t_n-t_0+1)}-1)x(t+t_0-1+\xi_n)\\
&+ \int_{t+t_0-1+\xi_n}^{t+t_n+\xi_n} e^{\alpha(t+t_n+\xi_n-s)}f(s)ds.
\end{aligned}
$$

Naturalmente se tienen los siguientes límites:

$$\lim_{n\to\infty} x(t+t_0-1+\xi_n)=\nu(t+t_0-1),\ \lim_{n\to\infty} e^{\alpha(t_n-t_0+1)}=e^{\alpha}.$$

También si $\epsilon>0$ es arbitrario y n suficientemente grande se consigue:

$$\left|\int_{t+t_0-1+\xi_n}^{t+t_n+\xi_n} e^{\alpha(t+t_n+\xi_n-s)}f(s)ds-\int_{t+t_0-1}^{t+t_0} e^{\alpha(t+t_0-s)}\tilde{f}(s)ds\right|<(2\|f\|_\infty+1)\epsilon.$$

Como $t+t_0\in\mathbb{Z}$, por definición de la solución en los números enteros (ecuación (3.3.14)), tenemos:

$$x(t+t_0+\xi_n)=\left(e^{\alpha}+\frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha}-1)\right)x(t+t_0-1+\xi_n)+\int_{t+t_0-1+\xi_n}^{t+t_0+\xi_n} e^{\alpha(t+t_0+\xi_n-s)}f(s)ds,$$

luego es posible concluir el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} x(t+t_n+\xi_n)=\lim_{n\to\infty} x(t+t_0+\xi_n)=y(t+t_0).$$

Además, como toda sucesión convergente de números reales se puede analizar como una de dos subsucesiones monótonas se concluye la afirmación.

Para realizar la demostración del límite $\lim_{n\to\infty} y(t+t_0-s_n)=x(t)$ se procede de manera análoga.
□

Observación 3.3.1 *Dado que toda función casi automórfica es $\mathbb{Z}$-casi automórfica (Lema 3.1.1), el teorema anterior es válido al considerar $f\in AA(\mathbb{R};\mathbb{C})$ y la demostración es la misma.*

Como es natural cabe preguntarse si el teorema precedente es válido para un sistema de DEPCA, la respuesta a esto es afirmativa. El teorema que sigue otorga condiciones necesarias y suficientes para obtener la solución casi automórfica de un sistema DEPCA. Consideraremos a la función f dentro del espacio de las funciones casi automórficas y acá se hará notorio una agradable aplicación del teorema anterior.

Teorema 3.3.3 *Consideremos $f\in AA(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)$ y supongamos que las matrices A,B del sistema (3.0.6) conmutan, sean $\alpha_i,\beta_i, i\in\{1,2,\cdots,p\}$ los valores propios de A y B respectivamente, además para cada i estos cumplen la relación $|e^{\alpha_i}+\frac{\beta_i}{\alpha_i}(e^{\alpha_i}-1)|\neq 1$, . Sea x una solución acotada de (3.0.6) entonces x es casi automórfica si y sólo si $x(n), n\in\mathbb{Z}$ es casi automórfica discreta.*

Demostración. Debido a que las matrices A,B conmutan, existe un común triangularizador T. Sean:

$$\bar{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\alpha_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p}\\ 0 & \alpha_2 & a_{22} & \cdots & a_{2p}\\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_p\end{bmatrix},\bar{B}=T^{-1}BT=\begin{bmatrix}\beta_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p}\\ 0 & \beta_2 & b_{22} & \cdots & b_{2p}\\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_p\end{bmatrix};$$

donde α_i son los valores propios de A y β_i son los valores propios de B que cumplen $|e^{\alpha_i}+\frac{\beta_i}{\alpha_i}(e^{\alpha_i}-1)|\neq 1$ para todo $i\in\{1,2,\cdots,p\}$.

Consideremos el siguiente cambio de variable: $y(t) = T^{-1}x(t)$. Entonces, derivando y utilizando el sistema original tenemos un nuevo sistema en y:

$$\begin{aligned} y'(t) &= T^{-1}x'(t) = T^{-1}[Ax(t) + Bx([t]) + f(t)] \\ &= \bar{A}y(t) + \bar{B}y([t]) + T^{-1}f(t). \end{aligned}$$

Sea $T^{-1}f(t) = H(t) = (h_1(t), h_2(t), \cdots, h_p(t))$, y como T^{-1} es operador lineal, el corolario 1.1.1 nos asegura que $T^{-1}f(t)$ es casi automórfica. Luego tenemos el siguiente sistema:

$$y'(t) = \bar{A}y(t) + \bar{B}y([t]) + H(t) \tag{3.3.16}$$

la que en su forma expandida es equivalente a:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \alpha_1 y_1(t) + \sum_{i=2}^{p} a_{1i}y_i(t) + \beta_1 y_1([t]) + \sum_{i=2}^{p} b_{1i}y_i([t]) + h_1(t) \\ y_2'(t) &= \alpha_2 y_2(t) + \sum_{i=3}^{p} a_{1i}y_i(t) + \beta_2 y_2([t]) + \sum_{i=3}^{p} b_{1i}y_i([t]) + h_2(t) \\ &\vdots \\ y_{p-1}'(t) &= \alpha_{p-1}y_{p-1}(t) + a_{p-1p}y_p(t) + \beta_{p-1}y_{p-1}([t]) + b_{p-1p}y_p([t]) + h_{p-1}(t) \\ y_p'(t) &= \alpha_p y_p(t) + \beta_p y_p([t]) + h_p(t). \end{aligned}$$

Tomemos la p-ésima ecuación:

$$y_p'(t) = \alpha_p y_p(t) + \beta_p y_p([t]) + h_p(t),$$

como se trata de una ecuación escalar y por la Observación 3.3.1, podemos obtener la solución como para la ecuación (3.0.5). Por el Teorema anterior sea $\tilde{y}_p(t)$ la solución casi automórfica.

Consideremos ahora la $(p-1)$-ésima ecuación:

$$y_{p-1}'(t) = \alpha_{p-1}y_{p-1}(t) + \beta_{p-1}y_{p-1}([t]) + [a_{p-1p}\tilde{y}_p(t) + b_{p-1p}\tilde{y}_p([t]) + h_{p-1}(t)].$$

Por el Lema 3.1.1 $\tilde{y}_p([t])$ es $\mathbb{Z}$-casi automórfica, por ello la función

$$z_{p-1}(t) = a_{p-1p}\tilde{y}_p(t) + b_{p-1p}\tilde{y}_p([t]) + h_{p-1}(t)$$

es $\mathbb{Z}$-casi automórfica. Nuevamente como en el Teorema 3.3.2 obtenemos la solución casi automórfica $\tilde{y}_{p-1}(t)$ de la ecuación:

$$y_{p-1}'(t) = \alpha_{p-1}y_{p-1}(t) + \beta_{p-1}y_{p-1}([t]) + z_{p-1}(t).$$

Siguiendo este procedimiento podemos obtener la solución casi automórfica $(\tilde{y}_1(t), \tilde{y}_2(t), \cdots, \tilde{y}_p(t))$ del sistema (3.3.16), que bajo el cambio de variable realizado se obtiene la solución casi automórfica:

$$\tilde{x}(t) = T\tilde{y}(t). \ \Box$$

Cabe mencionar que en [14] los autores estudian un poco más a las funciones $\mathbb{Z}$-casi automórficas, obteniendo nuevos resultados y además responden a la pregunta natural ¿cuándo una función $\mathbb{Z}$-casi automórfica es casi automórfica?, la respuesta a ésta interrogante permite relajar la condición $|e^{\alpha_i} + \frac{\beta_i}{\alpha_i}(e^{\alpha_i} - 1)| \neq 1$ del Teorema 3.3.3 y así mejorar el resultado.

3.4. Soluciones Casi Automórficas de las DEPCA (3.0.7) y (3.0.8).

Esta sección es la principal del presente capítulo, los resutados se basan en la definición de dicotomía exponencial dada por G. Papaschinopoulos [38]. Algunas condiciones para obtener dicotomía exponencial de ecuaciones en diferencias se puede ver en [39].
Para la definición de dicotomía exponencial es necesario tener en cuenta la ecuación:

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)x([t]); \tag{3.4.17}$$

donde $[\cdot]$ indica la función parte entera.
Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental de la ecuación:

$$x'(t) = A(t)x(t). \tag{3.4.18}$$

Si $n \leq t < n+1$, por la fórmula de variación de parámetros la solución de (3.0.7) es:

$$x(t) = \Phi(t)[\Phi^{-1}(n) + \int_n^t \Phi^{-1}(u)B(u)du]x(n) + \Phi(t)\int_n^t \Phi^{-1}(u)f(u)du \tag{3.4.19}$$

y por continuidad, si hacemos $t \to (n+1)^-$, obtenemos la siguiente ecuación en diferencias:

$$x(n+1) = \Phi(n+1)[\Phi^{-1}(n) + \int_n^{n+1} \Phi^{-1}(u)B(u)du]x(n) + \Phi(n+1)\int_n^{n+1} \Phi^{-1}(u)f(u)du. \tag{3.4.20}$$

Es decir la ecuación discreta:

$$x(n+1) = C(n)x(n) + h(n), n \in \mathbb{Z}, \tag{3.4.21}$$

donde:

$$C(n) = \Phi(n+1)[\Phi^{-1}(n) + \int_n^{n+1} \Phi^{-1}(u)B(u)du],$$

$$h(n) = \Phi(n+1)\int_n^{n+1} \Phi^{-1}(u)f(u)du.$$

Consideremos ahora su parte homogénea

$$x(n+1) = C(n)x(n), n \in \mathbb{Z}. \tag{3.4.22}$$

Asumiremos que $C(n)$ es invertible.

Definición 3.4.1 *La ecuación (3.4.17) tiene una dicotomía exponencial, si la ecuación en diferencias (3.4.22) tiene una dicotomía exponencial.*

Definición 3.4.2 *La ecuación (3.4.17) tiene una β-dicotomía exponencial, si la ecuación en diferencias (3.4.22) tiene una dicotomía exponencial y además su función de Green es Bi-casi automórfica discreta.*

Sea $A(\cdot)$ una matriz casi automórfica, entonces como es natural dada cualquier sucesión $\{s'_n\} \subset \mathbb{R}$ existe una subsucesión $\{s_n\} \subset \{s'_n\}$ y una matriz $\tilde{A}(\cdot)$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} A(t+s_n) =: \tilde{A}(t), \ \lim_{n\to\infty} \tilde{A}(t-s_n) = A(t),$$

a veces nos referimos a la matriz $\tilde{A}$ diciendo que está en el "Hull space"de A.
En la demostración del lema 2.4.1, se notó que dada una sucesión $\{s_n\} \subset \mathbb{R}$ y considerando la ecuación:

$$x'(t) = A(t + s_n)x,$$

se obtiene la sucesión de matrices fundamentales:

$$\Phi_n(t) = \Phi(t + s_n)\Phi^{-1}(s_n), \tag{3.4.23}$$

donde Φ es una matriz fundamental de la ecuación $x'(t) = A(t)x$.
Del mismo modo, al considerar la ecuación:

$$z'(t) = \tilde{A}(t - s_n)z,$$

se obtuvo la sucesión de matrices fundamentales

$$\Psi_n(t) = \Psi(t - s_n)\Psi^{-1}(-s_n), \tag{3.4.24}$$

donde Ψ es una matriz fundamental de la ecuación $z'(t) = B(t)z$.
En lo que sigue $A(t), B(t)$ serán matrices casi automórficas y la función f casi automórfica, salvo que explícitamente se diga lo contrario.
Con estos preliminares podemos enunciar y demostrar el lema siguiente, que viene a jugar un rol preponderante dentro del estudio de las DEPCA (3.0.7) y (3.0.8).

Lema 3.4.1 *supongamos que $\Phi(\cdot)$ es la matriz fundamental de la parte homogénea de (3.0.7) y Ψ la matriz fundamental de la ecuación asociada en el "Hull space"de A, entonces exist $k_0 > 0$ tal que se satisface lo siguiente:*

a) $|\Psi(t)\Psi^{-1}(u)| = |\Phi(t)\Phi^{-1}(s)| \leq k_0, \; 0 < t - s \leq l.$

b) $|\Psi_n(t)\Psi_n^{-1}(s)| = |\Phi_n(t)\Phi_n^{-1}(s)| \leq k_0' \; 0 < t - s \leq l.$

c) Dado $\epsilon > 0$, entonces $|\Phi_n(t)\Phi_n^{-1}(s) - \Psi(t)\Psi^{-1}(s)| \leq \epsilon k_0', \; 0 < t-s \leq l$, para n suficientemente grande, donde $\Phi_n(t)$ es la matriz fundamental (3.4.23).

d) Dado $\epsilon > 0$, entonces $|\Psi_n(t)\Psi_n^{-1}(s) - \Phi(t)\Phi^{-1}(s)| \leq \epsilon k_0', \; 0 < t-s \leq l$, para n suficientemente grande, donde $\Psi_n(t)$ es la matriz fundamental (3.4.24).

Demostración. En primeras lineas demostremos que si $\Phi(t)$ es matrix fundamental de $x'(t) = A(t)x(t)$, entonces la matriz $\Phi^{-1}(t)$ es matriz fundamental de la ecuación adjunta $x'(t) = -x(t)A(t)$, en efecto:
Como $\Phi(t)\Phi^{-1}(t) = I$ derivando obtenemos

$$0 = \frac{d}{dt}(\Phi(t)\Phi^{-1}(t)) = \frac{d}{dt}(\Phi(t)).\Phi^{-1}(t) + \Phi(t).\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}(t))$$

Luego

$$\Phi(t).\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}(t)) = -\frac{d}{dt}(\Phi(t)).\Phi^{-1}(t) = -A(t)\Phi(t).\Phi^{-1}(t) = -A(t),$$

de esta última igualdad se tiene $\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}(t)) = -\Phi^{-1}(t)A(t)$, esto concluye lo deseado.

a) Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental de la parte homogénea de (3.0.7), entonces $\Phi^{-1}(t)$ es matriz fundamental de la respectiva ecuación adjunta, luego obtenemos:

$$\Phi^{-1}(t) = I - \int_0^t \Phi^{-1}(u)A(u)du$$

$$\Phi^{-1}(s) = I - \int_0^s \Phi^{-1}(u)A(u)du$$

de esto conseguimos:

$$\Phi^{-1}(s) - \Phi^{-1}(t) = \int_s^t \Phi^{-1}(u)A(u)du,$$

multiplicando por $\Phi(t)$ se tiene:

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(s) = I + \int_s^t \Phi(t)\Phi^{-1}(u)A(u)du.$$

Entonces $|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)| \leq |I| + \int_s^t |\Phi(t)\Phi^{-1}(u)||A||_\infty du$, ahora por el lema de Gronwall-Bellman obtenemos :

$$|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)| \leq |I| \leq |I|e^{||A||_\infty(t-s)} \leq |I|e^{||A||_\infty l} = k_0$$

Del mismo modo se puede conseguir $|\Psi(t)\Psi^{-1}(u)| \leq |I|e^{||\tilde{A}||_\infty l} = k_0 = |I|e^{||A||_\infty l} = k_0$.

b) Como en la demostración del lema (2.4.1) se tiene que $\Phi_n(t)$ es la matriz fundamental de la ecuación $x'(t) = A(t+\xi_n)x(t)$, luego $\Phi_n^{-1}(t)$ es la matriz fundamental de la ecuación asociada $x'(t) = -x(t)A(t+\xi_n)$, de esto y siguiendo el procedimiento del inciso a), obtenemos para n suficientemente grande:

$$|\Phi_n(t)\Phi_n^{-1}(s)| \leq k_0^{'}.$$

Análogamente $|\Psi_n(t)\Psi_n^{-1}(s)| \leq k_0^{'}$.

c) Sea $\Psi(t)$ la matriz fundamental de la ecuación en el "Hull space de A", i.e de la ecuación $x'(t) = \tilde{A}(t)x(t)$, entonces $\Psi^{-1}(t)$ es la matrix fundamental de la ecuación adjunta $x'(t) = -x(t)\tilde{A}(t)$, de esto obtenemos las siguientes igualdades:

$$\Psi(t)\Psi^{-1}(s) = I - \int_s^t \Psi(t)\Psi^{-1}(u)\tilde{A}(u)du$$

$$\Phi_n(t)\Phi_n^{-1}(s) = I - \int_s^t \Phi_n(t)\Phi_n^{-1}(u)A(u+\xi_n)du$$

luego:

$$\begin{aligned}
|\Phi_n(t)\Phi_n^{-1}(s) - \Psi(t)\Psi^{-1}(s)| &\leq \int_s^t |\Phi_n(t)\Phi_n^{-1}(u)A(u+\xi_n) - \Psi(t)\Psi^{-1}(u)\tilde{A}(u)|du \\
&\leq \int_s^t |\Psi(t)\Psi^{-1}(u)||A(u+\xi_n) - \tilde{A}(u)|du + \\
&+ \int_s^t |\Phi_n(t)\Phi_n^{-1}(u) - \Psi(t)\Psi^{-1}(u)|||A||_\infty du,
\end{aligned}$$

pero además de la parte *a*) se obtiene $|\Psi(t)\Psi^{-1}(u)| \leq |I|e^{||A||_\infty l} = k_0$, luego, dado $\epsilon > 0$ y n suficientemente grande $|A(u+\xi_n) - \tilde{A}(u)| < \epsilon$. De ésto conseguimos:

$$|\Phi_n(t)\Phi_n^{-1}(s) - \Psi(t)\Psi^{-1}(s)| \leq lk_0\epsilon + \int_s^t |\Phi_n(t)\Phi_n^{-1}(u) - \Psi(t)\Psi^{-1}(u)|||A||_\infty du$$

y por el lema de Gronwall-Bellman, se consigue:

$$|\Phi_n(t)\Phi_n^{-1}(s) - \Psi(t)\Psi^{-1}(s)| \leq lk_0\epsilon e^{||A||_\infty l}.$$

d) La demostración sigue el mismo procedimiento que para *c*). □

Teorema 3.4.1 *Sea $f \in \mathbb{Z}AA(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)$, $\Phi(t)$ una matriz fundamental de la ecuación: (3.4.18), entonces se tiene lo siguiente :*

a .- la matriz $h_1(n) = \Phi(n+1)\Phi^{-1}(n)$ es casi automórfica discreta.

b .- la matriz $h_2(n) = \Phi(n+1)\int_n^{n+1}\Phi^{-1}(u)f(u)du$ es casi automórfica discreta.

Demostración.

a Sea $\{s_n'\} \subset \mathbb{Z}$ una sucesión arbitraria, entonces existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s_n'\}$ tal que como en la demostración del lema(2.4.1) tenemos:

$$\begin{aligned} h_1(m+s_n) &= \Phi(m+1+s_n)\Phi^{-1}(m+s_n) \\ &= \Phi(m+1+s_n)\Phi^{-1}(s_n)\Phi(s_n)\Phi^{-1}(m+s_n) \\ &= \Phi_n(m+1)\Phi_n^{-1}(m). \end{aligned}$$

Sea Ψ una matriz fundamental de la ecuación $y' = \tilde{A}(t)y$, con $\tilde{A}(\cdot) \in \mathfrak{H}(\mathrm{A})$ el "Hull space" de A. Consideremos la siguiente sucesión: $\tilde{h}_1(m) = \Psi(m+1)\Psi^{-1}(m)$, entonces tenemos:

$$|h_1(m+s_n) - \tilde{h}_1(m)| = |\Phi_n(m+1)\Phi_n^{-1}(m) - \Psi(m+1)\Psi^{-1}(m)|$$

luego en vista del lema 3.4.1, se puede concluir el límite:

$$\lim_{n\to+\infty} h_1(m+s_n) = \tilde{h}_1(m).$$

Del mismo modo se concluye el límite $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{h}_1(m-s_n) = h_1(m)$

b Sea $\{s_n'\} \subset \mathbb{Z}$ una sucesión arbitraria, entonces existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s_n'\}$ tal que los siguientes límites puntuales se tienen sobre la recta real:

$$\lim_{n\to+\infty} f(u+s_n) = \tilde{f}(u), \quad \lim_{n\to+\infty} \tilde{f}(u-s_n) = f(u).$$

Luego,

$$\begin{aligned} h_2(m+s_n) &= \int_{m+s_n}^{m+s_n+1} \Phi(m+1+s_n)\Phi^{-1}(u)f(u)du \\ &= \int_m^{m+1} \Phi(m+1+s_n)\Phi^{-1}(u+s_n)f(u+s_n)du \\ &= \int_m^{m+1} \Phi(m+1+s_n)\Phi^{-1}(s_n)\Phi(s_n)\Phi^{-1}(u+s_n)f(u+s_n)du \\ &= \int_m^{m+1} \Phi_n(m+1)\Phi_n^{-1}(u)f(u+s_n)du, \end{aligned}$$

por el Lema (3.4.1) y el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue podemos concluir:

$$\lim_{n\to+\infty} h_2(m+s_n) = \int_m^{m+1} \Psi(m+1)\Psi(u)\tilde{f}(u)du := \tilde{h}_2(m).$$

Para demostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{h}_2(m-s_n) = h_2(m)$ se procede de manera análoga. $\square$

Observación 3.4.1 *En el lema anterior si consideraramos a la función f dentro del espacio de las funciones casi automórficas discretas el resultado es válido y la demostración es invariante bajo este cambio.*

Teorema 3.4.2 *Sean $A(t), B(t)$ matrices casi automórficas, $f \in \mathbb{Z}AA(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)$. Considere $x(t)$ una solución acotada de (3.0.6), entonces $x(t)$ es casi automórfica si y sólo si $x(n)$ es casi automórfica discreta.*

Demostración. Sea $x(t)$ una solución casi automórfica, entonces la restricción a $\mathbb{Z}$ es discreta casi automórfica.
Para demostrar la otra implicación, escribamos la solución (3.4.19) de la siguiente manera (equivalente):

$$x(t) = \Phi(t)[\Phi^{-1}([t]) + \int_{[t]}^{t} \Phi^{-1}(u)B(u)du]x([t]) + \Phi(t)\int_{[t]}^{t} \Phi^{-1}(u)f(u)du. \tag{3.4.25}$$

La demostración se realizará en varios pasos.

Primero. Sea $\{s_n^{'}\}$ una sucesión de números enteros, entonces existe una subsucesión $\{\eta_n\} \subseteq \{s_n^{'}\}$, una función $\omega(\cdot)$, matrices $\tilde{A}(t), \tilde{B}(t)$ tal que los siguientes límites puntuales se tienen:

$$\lim_{n\to+\infty} A(t+s_n) = \tilde{A}(t), \quad \lim_{n\to+\infty} \tilde{A}(t-s_n) = A(t), t \in \mathbb{R};$$
$$\lim_{n\to+\infty} B(t+s_n) = \tilde{B}(t), \quad \lim_{n\to+\infty} \tilde{B}(t-s_n) = B(t), t \in \mathbb{R};$$
$$\lim_{n\to+\infty} f(t+s_n) = \tilde{f}(t), \quad \lim_{n\to+\infty} \tilde{f}(t-s_n) = f(t), t \in \mathbb{R};$$
$$\lim_{n\to+\infty} x(m+s_n) = \omega(m), \quad \lim_{n\to+\infty} \omega(m-s_n) = x(m), m \in \mathbb{Z}.$$

Sea $\Psi(\cdot)$ la matriz fundamental de la ecuación homogénea no autónoma en el "Hull space" de A, consideremos la siguiente función:

$$y(t) = \Psi(t)[\Psi^{-1}([t]) + \int_{[t]}^{t} \Psi^{-1}(u)\tilde{B}(u)du]\omega([t]) + \Psi(t)\int_{[t]}^{t} \Psi^{-1}(u)\tilde{f}(u)du.$$

Luego, obtenemos:

$$\begin{aligned}
x(t+\eta_n) &= \Phi(t+\eta_n)[\Phi^{-1}([t]+\eta_n) + \int_{[t]+\eta_n}^{t+\eta_n} \Phi^{-1}(u)B(u)du]x([t]+\eta_n) \\
&+ \Phi(t+\eta_n)\int_{[t]+\eta_n}^{t+\eta_n} \Phi^{-1}(u)f(u)du. \\
&= \Phi(t+\eta_n)[\Phi^{-1}([t]+\eta_n) + \int_{[t]}^{t} \Phi^{-1}(u+\eta_n)B(u+\eta_n)du]x([t]+\eta_n) \\
&+ \Phi(t+\eta_n)\int_{[t]}^{t} \Phi^{-1}(u+\eta_n)f(u+\eta_n)du.
\end{aligned}$$

Sea ahora $\epsilon > 0$ arbitrario, entonces para n suficientemente grande y en vista del Lema 3.4.1 conseguimos las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned}
1). \quad | \quad & x(t+\eta_n) - y(t)| = |\Phi(t+\eta_n)[\Phi^{-1}([t]+\eta_n) + \int_{[t]}^{t} \Phi^{-1}(u+\eta_n)B(u+\eta_n)du]x([t]+\eta_n) - \\
- \quad & \Psi(t)[\Psi^{-1}([t]) + \int_{[t]}^{t} \Psi^{-1}(u)\tilde{B}(u)du]\omega([t])| \\
\leq \quad & |\Phi_n(t)\Phi_n^{-1}([t])x([t]+\eta_n) - \Phi_n(t)\Phi_n^{-1}([t])\omega([t])| + \\
+ \quad & |\Phi_n(t)\Phi_n^{-1}([t])\omega([t]) - \Psi(t)\Psi^{-1}([t])\omega([t])| + \\
+ \quad & |\int_{[t]}^{t} (\Phi_n(t)\Phi_n^{-1}(u)B(u+\eta_n) - \Phi_n(t)\Phi_n^{-1}(u)\tilde{B}(u))du x([t]+\eta_n)| \\
+ \quad & \int_{[t]}^{t} |\Phi_n(t)\Phi_n^{-1}(u)||x([t]+\eta_n) - \omega([t])|du||B||_\infty + \\
+ \quad & \int_{[t]}^{t} |\Phi_n(t)\Phi_n^{-1}(u) - \Psi(t)\Psi^{-1}(u)|du||B||_\infty||\omega||_\infty \\
\leq \quad & (k_0^{'} + ||\omega||_\infty k_0^{'} + k_0^{'}||x||_\infty + (k_0^{'} + ||\omega||_\infty)||B||_\infty)\epsilon.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2). \quad & |\ \Phi(t+\eta_n)\int_{[t]}^{t}\Phi^{-1}(u+\eta_n)f(u+\eta_n)du - \Psi(t)\int_{[t]}^{t}\Psi^{-1}(u)\tilde{f}(u)du| \\
\leq & \int_{[t]}^{t}|\Phi_n(t)\Phi_n^{-1}(u)||f(u+\eta_n)-\tilde{f}(u)|du + \int_{[t]}^{t}|\Phi_n(t)\Phi_n^{-1}(u)-\Psi(t)\Psi^{-1}(u)|||f||_\infty du \\
\leq & (k_0^{'}+k_0^{'}||f||_\infty)\epsilon.
\end{aligned}$$

De esto podemos conseguir que $\lim\limits_{n\to\infty} x(t+\eta_n)=y(t)$, del mismo modo se puede ver que $\lim\limits_{n\to\infty} y(t-\eta_n)=x(t)$.

Segundo. Consideremos una sucesión $\{s_n'\}\subset\mathbb{R}$ arbitraria, entonces por el lema 3.3.1 existe una subsucesión $\{s_n\}\subseteq\{s_n'\}$ de la forma $s_n=\xi_n+t_n$ con $\xi_n\in\mathbb{Z}$, $t_n\in[0,1[$ y $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=t_0\in[0,1]$, además podemos tomar $\{\xi_n\}$ para el cual los límites puntuales del primer paso se satisfacen.

Afirmación: $\lim\limits_{n\to+\infty} x(t+t_n+\xi_n)=y(t+t_0)$, en efecto:
1).Si $t+t_0$ no es entero. Entonces para n suficientemente grande tenemos que $[t+t_n]=[t+t_0]$ implica $x([t+t_n])=x([t+t_0])$, además:

$$\begin{aligned}
i). \quad & |\ \Phi_n(t+t_n)\Phi_n^{-1}([t+t_n])x([t+t_n+\xi_n])-\Psi(t+t_0)\Psi^{-1}([t+t_0])\omega([t+t_0])| \\
\leq & |\Phi_n(t+t_n)\Phi_n^{-1}([t+t_n])||x([t+t_n+\xi_n])-\omega([t+t_0])|+ \\
+ & |\Phi_n(t+t_n)\Phi_n^{-1}([t+t_n])-\Psi(t+t_0)\Psi^{-1}([t+t_0])||\omega([t+t_0])| \\
\leq & (k_0+||x||_\infty k_0')\epsilon.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ii). \quad & |\ \int_{[t+t_n]}^{t+t_n}\Phi_n(t+t_n)\Phi_n^{-1}(u)B(u+\xi_n)du.x([t+t_n]+\xi_n)- \\
- & \int_{[t+t_0]}^{t+t_0}\Psi(t+t_0)\Phi^{-1}(u)\tilde{B}(u)du.\omega([t+t_0])| \\
\leq & |\int_{[t+t_n]}^{t+t_n}\Phi_n(t+t_n)\Phi_n^{-1}(u)B(u+\xi_n).(x([t+t_n]+\xi_n)-\omega([t+t_0]))|+ \\
+ & ||\int_{[t+t_n]}^{t+t_n}\Phi_n(t+t_n)\Phi_n^{-1}(u)B(u+\xi_n)du-\int_{[t+t_0]}^{t+t_0}\Psi(t+t_0)\Phi^{-1}(u)\tilde{B}(u)du||x||_\infty \\
\leq & \int_{[t+t_n]}^{t+t_n}du.k_0'||B||_\infty|x([t+t_n]+\xi_n)-\omega([t+t_0])|+ \\
+ & |\int_{[t+t_n]}^{t+t_n}\Phi_n(t+t_n)\Phi_n^{-1}(u)B(u+\xi_n)du-\int_{[t+t_0]}^{t+t_0}\Psi(t+t_0)\Phi^{-1}(u)\tilde{B}(u)du||x||_\infty \\
\leq & k_0'||B||_\infty\epsilon+(|\int_{[t+t_n]}^{t+t_n}\Phi_n(t+t_n)\Phi_n^{-1}(u)B(u+\xi_n)du- \\
- & \int_{[t+t_0]}^{t+t_0}\Phi_n(t+t_n)\Phi_n^{-1}(u)B(u+\xi_n)du|+ \\
+ & \int_{[t+t_0]}^{t+t_0}|\Phi_n(t+t_n)\Phi_n^{-1}(u)||B(u+\xi_n)-\tilde{B}(u)|du+ \\
+ & \int_{[t+t_0]}^{t+t_0}|\Phi_n(t+t_n)\Phi_n^{-1}(u)-\Psi(t+t_0)\Psi^{-1}(u)|||B||_\infty du)||x||_\infty \\
\leq & k_0'||B||_\infty\epsilon+(k_0'||B||_\infty\epsilon+k_0'\epsilon+k_0'||B||_\infty\epsilon)||x||_\infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iii). \quad & \left| \int_{[t+t_n]}^{t+t_n} \Phi_n(t+t_n)\Phi_n^{-1}(u)f(u+\xi_n)du - \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} \Psi(t+t_0)\Psi^{-1}(u)\tilde{f}(u)du \right| \\
\leq & \left| \int_{[t+t_n]}^{t+t_n} \Phi_n(t+t_n)\Phi_n^{-1}(u)f(u+\xi_n)du - \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} \Phi_n(t+t_n)\Phi_n^{-1}(u)f(u+\xi_n)du \right| + \\
+ & \left| \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} (\Phi_n(t+t_n)\Phi_n^{-1}(u)f(u+\xi_n) - \Psi(t+t_0)\Psi^{-1}(u)\tilde{f}(u))du \right| \\
\leq & \ k_0'||f||_\infty\epsilon + k_0'\epsilon + k_0'||f||_\infty\epsilon.
\end{aligned}$$

De esto se puede concluir el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} x(t+t_n+\xi_n) = \lim_{n\to\infty} x(t+t_0+\xi_n) = y(t+t_0).$$

2).Si $t+t_0 \in \mathbb{Z}$. Para esto nos concentraremos en dos casos:

2.1).Si $\{t_n\}$ es decreciente se procede como en el caso anterior.

2.2).Si $\{t_n\}$ no es decreciente, entonces $[t+t_n] = t+t_0-1$, luego para n suficientemente grande, conseguimos como en los pasos i),ii) y iii) lo siguiente:

$$\begin{aligned}
i'). \quad & |\ \Phi_n(t+t_n)\Phi_n(t+t_0-1)x(t+t_0-1+\xi_n) - \Psi(t+t_0)\Psi^{-1}(t+t_0-1)\omega(t+t_0-1+\xi_n)| \\
\leq & \ (k_0 + ||x||_\infty k_0')\epsilon. \\
ii'). \quad & \left| \int_{t+t_0-1}^{t+t_n} \Phi_n(t+t_n)\Phi_n^{-1}(u)B(u+\xi_n)du x(t+t_0+\xi_n) - \right. \\
- & \left. \int_{t+t_0-1}^{t+t_0} \Psi(t+t_0)\Phi^{-1}(u)\tilde{B}(u)du.\omega(t+t_0-1) \right| \\
\leq & \ k_0'||B||_\infty\epsilon + (k_0'||B||_\infty\epsilon + k_0'\epsilon + k_0'||B||_\infty\epsilon)||x||_\infty. \\
iii'). \quad & \left| \int_{t+t_0-1}^{t+t_n} \Phi_n(t+t_n)\Phi_n^{-1}(u)f(u+\xi_n)du - \int_{t+t_0-1}^{t+t_0} \Psi_n(t+t_0)\Psi_n^{-1}(u)\tilde{f}(u)du \right. \\
\leq & \ k_0'||f||_\infty\epsilon + k_0'\epsilon + k_0'||f||_\infty\epsilon.
\end{aligned}$$

Luego, dado que $t+t_0 \in \mathbb{Z}$, la ecuación (3.4.21) nos entrega la siguiente forma explícita para la expresión $x(t+t_0+\xi_n)$:

$$x(t+t_0+\xi_n) = C(t+t_0+\xi_n-1)x(t+t_0+\xi_n-1) + h(t+t_0+\xi_n-1),$$

con

$$C(t+t_0+\xi_n-1) = \Phi(t+t_0+\xi_n)[\Phi^{-1}(t+t_0+\xi_n-1) + \int_{t+t_0+\xi_n}^{t+t_0+\xi_n} \Phi^{-1}(u)B(u)du],$$

$$h(t+t_0+\xi_n-1) = \Phi(t+t_0+\xi_n)\int_{t+t_0+\xi_n-1}^{t+t_0+\xi_n} \Phi^{-1}(u)f(u)du$$

Por lo tanto podemos concluir los siguientes límites:

$$\lim_{n\to\infty} x(t+t_n+\xi_n) = \lim_{n\to\infty} x(t+t_0+\xi_n) = y(t+t_0).$$

De esto y como toda sucesión convergente en los números reales se puede analizar como una de dos subsucesiones monótonas se concluye la afirmación.

Para realizar la demostración $\lim_{n\to\infty} y(t+t_0-s_n) = x(t)$ se procede de manera análoga. □

Teorema 3.4.3 *Sean $A(t), B(t)$ matrices casi automórficas, $f \in \mathbb{Z}AA(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)$ y suponga que (3.4.17) tenga una β-dicotomía exponencial. Entonces (3.0.7) tiene una única solución casi automórfica.*

Demostración. Conocemos que la solución $x(t)$ de (3.0.7) que es acotada se escribe como la expresión integral (3.4.19) (en $[n, n+1[$), lo cual otorga la ecuación en diferencias (3.4.20) la que equivale a la ecuación (3.4.21), por el Teorema 3.4.1 ésta es una ecuación casi automórfica. Por la propiedad de β-dicotomía exponencial (3.4.21) tiene una dicotomía exponencial con función de Green Bi-casi automórfica discreta. Así, el Teorema 3.2.2 nos asegura que (3.4.20) tiene una única solución acotada $\tilde{x}(n)$ que es casi automórfica discreta, de esta manera como $x(n) = \tilde{x}(n)$ el Teorema (3.4.2) nos asegura que $x(t)$ es casi automórfica.
Para demostrar la unicidad supongamos que existe otra solución $y(t)$ de (3.0.7), entonces ésta satisface (3.4.20), luego $y(n) = x(n) = \tilde{x}(n)$ (unicidad de la solución discreta), de esto y debido a la representación integral se sigue que las soluciones coinciden en toda la recta, lo cual es contradictorio. □

Observación 3.4.2 *Los dos teoremas anteriores son válidos cuando consideramos a la función f dentro del espacio de las funciones casi automórficas, el motivo por el que se ha considerado a la función dentro de las funciones $\mathbb{Z}$-casi automórficas es por su aplicación en la demostración en el teorema que sigue, el cual soluciona a la ecuación (3.0.8).*

Antes de presentar el teorema para la ecuación (3.0.8), podemos notar que mediante la fórmula de variación de parámetros la representación integral de la solución sobre el intervalo $[n, n+1[$ es de la siguiente forma:

$$x(t) = \phi(t)[\phi^{-1}(n) + \int_n^t \phi^{-1}(u)B(u)du]x(n) + \phi(t)\int_n^t \phi^{-1}(u)f(u, x(u), x(n))du. \tag{3.4.26}$$

y que tomando el límite $t \to (n+1)^-$ da la siguiente ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \Phi(n+1)[\Phi^{-1}(n) + \int_n^{n+1} \Phi^{-1}(u)B(u)du]x(n) + \\ &+ \Phi(n+1)\int_n^{n+1} \Phi^{-1}(u)f(u, x(u), x(n))du. \end{aligned} \tag{3.4.27}$$

Lema 3.4.2 *Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ una función δ-Lipschitz casi automórfica y ψ una función casi automórfica, entonces la sucesión $\Phi(n+1)\int_n^{n+1} \Phi^{-1}(u)f(u, \psi(u), \psi(n))du$ es casi automórfica discreta.*

Demostración. Debido al Teorema (3.4.1) es suficiente ver que la función $g_\psi : t \to f(t, \psi(t), \psi([t]))$ está en $\mathbb{Z}AA(\mathbb{R}; \mathbb{R}^p)$; pero esto es una consecuencia del lema (3.1.3). □

Teorema 3.4.4 *Sean $A(t), B(t)$ matrices casi automórficas, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ una función δ-Lipschitz casi automórfica. Supongamos además que (3.4.17) tenga una β-dicotomía exponencial con parámetros (α,K,P), entonces existe un $\delta^* > 0$ tal que si $\delta < \delta^*$ la ecuación (3.0.8) tiene una única solución casi automórfica.*

Demostración. Sea $\psi \in AA(\mathbb{R}; \mathbb{R}^p)$ y considere la ecuación diferencial:

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)x([t]) + f(t, \psi(t), \psi([t])), \tag{3.4.28}$$

ya sabemos que en $[n, n+1)$ la solución de esta ecuación está dada por:

$$x_\psi(t) = \Phi(t)[\Phi^{-1}(n) + \int_n^t \Phi^{-1}(u)B(u)du]x_\psi(n) + \Phi(t)\int_n^t \Phi^{-1}(u)f(u, \psi(u), \psi(n))du$$

y que cuando $t \to (n+1)^-$, se tiene:

$$x_\psi(n+1) = C(n)x_\psi(n) + h_\psi(n), \; n \in \mathbb{Z}, \tag{3.4.29}$$

donde:

$$C(n) = \Phi(n+1)[\Phi^{-1}(n) + \int_n^{n+1} \Phi^{-1}(u)B(u)du],$$

$$h_\psi(n) = \Phi(n+1)\int_n^{n+1} \Phi^{-1}(u)f(u,\psi(u),\psi(n))du.$$

Consideremos el siguiente operador:

$$\begin{aligned}\Gamma: \; AA(\mathbb{R};\mathbb{R}^p) & \to AA(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)\\ \psi \quad & \to (\Gamma\psi)(t) = \Phi(t)[\Phi^{-1}(n) + \int_n^t \Phi^{-1}(u)B(u)du]x_\psi(n) + \\ & + \Phi(t)\int_n^t \Phi^{-1}(u)f(u,\psi(u),\psi(n))du.\end{aligned}$$

Este operador está bien definido ya que por el Teorema (3.4.3) si $\psi \in AA(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)$, entonces $\Gamma\psi$ es la única solución casi automórfica de la ecuación diferencial (3.4.28).

Como $x_\psi(n), n \in \mathbb{Z}$ es solución casi automórfica discreta de la ecuación (3.4.29), el Teorema 3.2.2 nos da la forma explícita de ésta solución, mas aún otorga la siguiente cota:

$$||x_\psi|| \leq K(1+e^{-\alpha})(1-e^{-\alpha})^{-1}||h_\psi||_\infty. \tag{3.4.30}$$

Consideremos ahora dos elementos $\psi_1, \psi_2 \in AA(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)$, luego obtenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}|\Gamma\psi_1(t) - \Gamma\psi_2(t)| & \leq |\Phi(t)[\Phi^{-1}(n) + \int_n^t \Phi^{-1}(u)B(u)du](x_{\psi_1}(n) - x_{\psi_2}(n))| + \\ & + |\Phi(t)\int_n^t \Phi^{-1}(u)(f(u,\psi_1(u),\psi_1(n)) - f(u,\psi_2(u),\psi_2(n)))du| \\ & \leq (k_0 + ||B||_\infty k_0)|x_{\psi_1}(n) - x_{\psi_2}(n))| + k_0\delta\int_n^t (|\psi_1(u) - \psi_2(u)| + |\psi_1(n) - \psi_2(n)|)du \\ & \leq (1+||B||_\infty)k_0||x_{\psi_1} - x_{\psi_2}||_\infty + 2k_0\delta||\psi_1 - \psi_2||_\infty.\end{aligned}$$

Pero la desigualdad (3.4.30) nos da la siguiente cota para $||x_{\psi_1} - x_{\psi_2}||_\infty$:

$$||x_{\psi_1} - x_{\psi_2}||_\infty \leq K(1+e^{-\alpha})(1-e^{-\alpha})^{-1}||h_{\psi_1} - h_{\psi_2}||_\infty,$$

pero en vista a la expresión que se tiene para h_ψ se consigue definitivamente la siguiente cota:

$$||x_{\psi_1} - x_{\psi_2}||_\infty \leq K(1+e^{-\alpha})(1-e^{-\alpha})^{-1}k_0\delta||\psi_1 - \psi_2||_\infty.$$

Por lo tanto obtenemos:

$$|\Gamma\psi_1(t) - \Gamma\psi_2(t)| \leq (1+||B||_\infty)k_0^2K(1+e^{-\alpha})(1-e^{-\alpha})^{-1}\delta||\psi_1 - \psi_2||_\infty + 2k_0\delta||\psi_1 - \psi_2||_\infty,$$

luego, se consigue lo siguiente:

$$||\Gamma\psi_1 - \Gamma\psi_2||_\infty \leq \left((1+||B||_\infty)k_0^2K(1+e^{-\alpha})(1-e^{-\alpha})^{-1} + 2k_0\right)\delta||\psi_1 - \psi_2||_\infty,$$

De esto observamos que existe $\delta^* = \dfrac{1}{(1+||B||_\infty)k_0^2K(1+e^{-\alpha})(1-e^{-\alpha})^{-1} + 2k_0}$, entonces para todo $\delta < \delta^*$ el operador Γ es un operador contractivo, luego la conclusión se sigue del Teorema de punto fijo de Banach. □

3.5. Aplicación al Modelo de Lasota-Wazewska con Argumento Constante a Trozos.

El modelo de Lasota-Wasewska es una ecuación diferencial autónoma que tiene la siguiente forma:

$$x'(t) = -\delta x(t) + pe^{-\gamma x(t-\tau)}, t \geq 0,$$

la que fué utilizada por Wazewska-Czyzewska & Lasota [50] para describir la sobrevivencia de los glóbulos rojos en la sangre de un animal. En esta ecuación $x(t)$ describe el número de glóbulos rojos en el tiempo t, $\delta > 0$ es la probabilidad de muerte de un glóbulo rojo; p, γ son constantes positivas relacionadas con la producción de glóbulos rojos por unidad de tiempo y τ es el tiempo necesario para producir un glóbulo rojo.

En esta sección, estamos interesados en obtener la solución casi automórfica de la siguiente DEPCA:

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + p(t)f(x([t])), \tag{3.5.31}$$

donde $\delta(\cdot), p(\cdot)$ son funciones casi automórficas positivas y $f(\cdot)$ es una función continua, acotada y γ-Lipschitz. Además se supondrá que se satisface la siguiente condición:

D) $0 < \delta_- = \inf\limits_{s \in \mathbb{R}} \delta(s)$.

Específicamente se establece el siguiente resultado.

Teorema 3.5.1 *Existe $\gamma_0 > 0$ tal que para todo $\gamma < \gamma_0$ la ecuación (3.5.31) tiene una única solución casi automórfica.*

Observación 3.5.1

a). En la ecuación (3.5.31), podemos notar que cuando se trata de la expresión explícita $f(x) = e^{-\alpha x}, \alpha > 0$ estamos estudiando la ecuación de Lasota-Wazewska; si $f(x) = xe^{-\alpha x}, \alpha > 0$ se trata del modelo de Nicholson, mientras que para $f(x) = \dfrac{-\mu x}{x+k}, \mu, k > 0$ se trata del modelo de Michaelis-Menten (describe la velocidad de reacción de reacciones enzimáticas). Para estos casos particulares se puede aplicar el Teorema 3.5.1.

b). Cuando consideramos $f(x) = x\left(\theta - \left(\frac{x}{b}\right)^k\right), \theta, b, k > 0$ es el modelo de Gilpin-Ayala, en el caso en que $f(x) = x\left(\dfrac{\theta}{1+x^n} - \rho\right), \theta, \rho, n > 0$ se trata del modelo de Mackey-Glass (utilizable en la producción de glóbulos blancos). Note que cuando $k = 1$ el modelo de Gilpin-Ayala se vuelve la ecuación logística. En este caso, es posible obtener resultados análogos al Teorema 3.5.1, pero con distinto estudio. Se puede notar que localmente éstos modelos cumplen las condiciones generales impuestas sobre f.

La versión casi periódica de la ecuación (3.5.31) es estudiada en [24]. La demostración del Teorema 3.5.1 será consecuencia de la teoría desarrollada en la sección anterior y de los siguientes preliminares.

Sea $\psi(t)$ una función real casi automórfica y consideremos la ecuación:

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + p(t)f(\psi([t])). \tag{3.5.32}$$

Dentro del intervalo $[n, n+1), n \in \mathbb{N}$ la solución para la ecuación (3.5.32) está dada por:

$$x(t) = \exp\left(-\int_n^t \delta(s)ds\right) x(n) + f(\psi(n)) \int_n^t \exp\left(-\int_u^t \delta(s)ds\right) p(u)du$$

y por la continuidad de la solución de una DEPCA, tomando el límite $n \to (n+1)^-$ obtenemos la ecuación:

$$x(n+1) = \exp\left(-\int_n^{n+1} \delta(s)ds\right) x(n) + f(\psi(n)) \int_n^{n+1} \exp\left(-\int_u^{n+1} \delta(s)ds\right) p(u)du,$$

la que se puede escribir como la siguiente ecuación en diferencias:

$$x(n+1) = C(n)x(n) + g(n), \qquad (3.5.33)$$

donde:

$$C(n) := \exp\left(-\int_n^{n+1} \delta(s)ds\right),$$

$$g(n) := f(\psi(n)) \int_n^{n+1} \exp\left(-\int_u^{n+1} \delta(s)ds\right) p(u)du.$$

Lema 3.5.1 *La ecuación (3.5.33) es discreta casi automórfica.*

Demostración. Debido a que la función f es continua, podemos concluir que la compuesta $f(\psi(n))$ es casi automórfica discreta. Se sigue del Teorema 3.4.1 que $C(n)$ y $\int_n^{n+1} \exp\left(-\int_u^{n+1} \delta(s)ds\right) p(u)du$ son casi automórficas discretas, por lo que $g(n)$ también lo es. □

Lema 3.5.2 *La ecuación (3.5.33) tiene una única solución que es casi automórfica discreta.*

Demostración. Observemos que debido a la condición **D**) se tiene que la ecuación homogénea asociada a la ecuación (3.5.33) goza de dicotomía exponencial, consecuentemente la solución de la ecuación discreta es:

$$x_\psi(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} G_d(n, k+1)g(k),$$

donde

$$G_d(n, k+1) := \prod_{j=k+1}^{n} C(j) = \prod_{j=k+1}^{n} \exp\left(-\int_j^{j+1} \delta(s)ds\right) = \exp\left(-\int_{k+1}^{n+1} \delta(s)ds\right)$$

es la matriz de Green discreta asociada.
La unicidad de la solución se sigue de [55, Teorema 5.7]. De acuerdo al Teorema 3.2.2, para probar que ésta solución es casi automórfica discreta, sólo queda ver que la función de Green es Bi-casi automórfica discreta. En efecto, Sea $\{\xi_i'\}$ una sucesión arbitraria de números enteros, por ser $\delta(\cdot)$ casi automórfica, existe una subsucesión $\{\xi_i\} \subseteq \{\xi_i'\}$ y una función $\tilde{\delta}$ tal que los siguientes límites puntuales se satisfacen:

$$\lim_{i \to +\infty} \delta(s + \xi_i) = \tilde{\delta}(s), \quad \lim_{i \to +\infty} \tilde{\delta}(s - \xi_i) = \delta(s).$$

Luego:

$$\begin{aligned} G_d(n+\xi_i, k+1+\xi_i) &= \exp\left(-\int_{k+1+\xi_i}^{n+1+\xi_i} \delta(s)ds\right) \\ &= \exp\left(-\int_{k+1}^{n+1} \delta(s+\xi_i)ds\right). \end{aligned}$$

De esto y por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se consigue:

$$\lim_{i\to+\infty} G_d(n+\xi_i, k+1+\xi_i) = \exp\left(-\int_{k+1}^{n+1} \tilde{\delta}(s)ds\right) =: \tilde{G}_d(n, k+1).$$

La demostración del límite $\lim_{i\to+\infty} \tilde{G}_d(n-\xi_i, k+1-\xi_i) = G_d(n, k+1)$ se realiza de manera similar. Por esto se concluye que la función de Green es Bi-casi automórfica discreta y por lo tanto que la única solución de la ecuación (3.5.33) es casi automórfica discreta. □

Lema 3.5.3 *Sea $x_\psi(t)$ una solución acotada de la ecuación (3.5.32). Entonces, $x_\psi(t)$ es casi automórfica sí y sólo sí la sucesión $x_\psi(n)$ es casi automórfica discreta.*

Demostración. La demostración se sigue del Teorema 3.4.2. □

Debido a la demostración del Lema 3.5.2 podemos ver que la ecuación homogénea de (3.5.33) tiene una β-dicotomía exponencial. De esta manera la conclusión del Teorema 3.5.1 se consigue utilizando el lema 3.5.2, de la misma forma que para el Teorema 3.4.4.

Corolario 3.5.1 *El modelo de Lasota-Wazewska (ec. (3.5.31) con $f(x) = e^{-\alpha x}, \alpha > 0$), tiene una única solución casi automórfica.*

Apéndice.

Complemento a la demostración del Lema 2.4.1.

Este apéndice se genera para realizar la demostración de algunas lineas del Lema2.4.1, esto se realiza de manera separada debido a que ocuparemos otros teoremas que no hemos incluido en el cuerpo de la tesis.
Sea $A(\cdot) \in M_{p\times p}(\mathbb{R})$ una matriz casi automórfica compacta, sea $\{s''_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión arbitraria, entonces existe una subsucesión $\{s'_n\} \subseteq \{s''_n\}$ y una matriz $B(\cdot)$ tal que:

$$\lim_{n\to+\infty} A(t+s'_n) = B(t), \quad \lim_{n\to+\infty} B(t-s'_n) = A(t).$$

Sea $\Phi(\cdot)$ una matriz fundamental de la ecuación:

$$x'(t) = A(t)x(t),$$

y sea la ecuación:

$$x'(t) = A(t+s'_n)x(t), \tag{3.5.34}$$

cuya matriz fundamental es $\Phi_n(t) = \Phi(t+s'_n)\Phi^{-1}(s'_n)$. Consideremos la ecuación:

$$x'(t) = B(t)x(t). \tag{3.5.35}$$

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente lema:

Lema 3.5.4 *Existe una subsucesión $\{s_n\} \subseteq \{s'_n\}$ tal que sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ se tiene $\lim_{n\to+\infty} \Phi_n(t) = \Psi(t)$, y $\lim_{n\to+\infty} \Phi_n^{-1}(t) = \Psi^{-1}(t)$, con $\Psi(t)$ una matriz fundamental de (3.5.35).*

Antes de iniciar la demostración enunciemos los teoremas a utilizar, éstos son de naturaleza estándar por lo que su demostración se puede encontar en varios libros, como por ejemplo en [32, 45].

Teorema 3.5.2 *(Arzelà-Ascoli) Considere una sucesión de funciones de variable real (f_n) definida sobre un intervalo compacto $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si ésta sucesión es uniformemente acotada y equicontinua, entonces existe una subsucesión $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ que converge uniformemente.*

Observación 3.5.2 Si las derivadas de una sucesión de funciones son uniformemente acotadas, entonces por el teorema del valor intermedio se puede ver que la sucesión original satisface las hipótesis del teorema de Arzelà-Ascoli.

Teorema 3.5.3 *Considere una sucesión de funciones diferenciables (f_n). Si $f_n \to f$ puntualmente y $f'_n \to g$ uniformemente sobre el intervalo compacto $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, entonces f es diferenciable y $f' = g$ en $[a,b]$.*

Demostración del Lema 3.5.4. Sea $a \in R^{+}$, es suficiente considerar el intervalo compacto $C = [-a, a]$ ya que todos son equivalentes. La demostración se seguirá en varios pasos.

Primero: Como para todo $n \in \mathbb{N}, \Phi_n(0) = I$, y al ser Φ_n matriz fundamental de (3.5.34), se consigue por integración directa:

$$\Phi_n(t) = I + \int_0^t A(u + s'_n)\Phi_n(u)du,$$

pero al ser $A(\cdot)$ una matriz casi automórfica, ésta es acotada. Sea M su cota superior. Aplicando el lema de Gronwall-Bellman, tenemos:

$$|\Phi_n(t)| \leq |I|e^{Mt}$$

y sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ se puede ver que Φ_n es uniformemente acotado.

Segundo: Como

$$\Phi'_n(t) = A(t + s'_n)\Phi_n(t), n \in \mathbb{N}, t \in C, \tag{3.5.36}$$

entonces la sucesión de derivadas es uniformemente acotado en C, luego por la observación 3.5.2 y en virtud del teorema de Arzelà-Ascoli Φ_n tiene una subsucesión $\tilde{\Phi}_n$ (i.e existe subsucesión asociada $\{s_n\} \subseteq \{s'_n\}$) que es uniformemente convergente. Pongamos $\tilde{\Phi}_n \to \Psi$, $n \to +\infty$.

Tercero: Como esta subsucesión satisface (3.5.36) entonces:

$$\tilde{\Phi}'_n(t) = A(t + s_n)\tilde{\Phi}_n(t), n \in \mathbb{N}, t \in C, \tag{3.5.37}$$

y por tanto $\tilde{\Phi}'_n$ es uniformemente convergente en C. Esto implica de acuerdo al Teorema 3.5.3 que $\tilde{\Phi}'_n \to \Psi'$.

Cuarto: Para ver que Ψ es matriz fundamental de (3.5.35), primero notemos que $\Psi(0) = I$ ahora sólo queda tomar el límite en la ecuación (3.5.37). Por esto existe $\Psi^{-1}(t), t \in C$.

Ahora probemos que $\lim_{n \to +\infty} \Phi_n^{-1}(t) = \Psi^{-1}(t)$.
No es difícil notar que la matriz Φ_n^{-1} satisface la siguiente ecuación:

$$x'(t) = -x(t)A(t + s_n).$$

Nuevamente por integración directa tenemos:

$$\Phi_n^{-1}(t) = I - \int_0^t \Phi_n^{-1}(u)A(u + s_n)du,$$

del mismo modo:

$$\Psi^{-1}(t) = I - \int_0^t \Psi^{-1}(u)B(u)du,$$

y por el lema de Gronwall-Bellman:

$$||\Psi^{-1}||_\infty \leq |I|e^{||B||_\infty a},$$

luego:

$$\begin{aligned}
|\Phi_n^{-1}(t) - \Psi^{-1}(t)| &\leq \int_0^t |\Psi^{-1}(u)B(u) - \Phi_n^{-1}(u)A(u + s_n)|du \\
&\leq \int_0^t |\Psi^{-1}(u) - \Phi_n^{-1}(u)|du||A||_\infty \\
&+ \int_0^t |A(u + s_n) - B(u)|du||\Psi^{-1}||_\infty,
\end{aligned}$$

luego, dado $\epsilon > 0$, existe $N_0 > 0$ tal que para $n > N_0$ se tiene:

$$|\Phi_n^{-1}(t) - \Psi^{-1}(t)| < \epsilon||\Psi^{-1}||_\infty a + \int_0^t |\Psi^{-1}(u) - \Phi_n^{-1}(u)|du||A||_\infty,$$

por el lema de Gronwall-Bellman, obtenemos:

$$|\Phi_n^{-1}(t) - \Psi^{-1}(t)| < \epsilon||\Psi^{-1}||_\infty a e^{||A||_\infty a}. \square$$

Bibliografía

[1] E.Ait Dads and L. Lhachimi: *Pseudo almost periodic solutions for equations with piecewise constant argument*, J. Math. Anal. Appl., 371 (2010), 842-854.

[2] M.U.Akhmet, D. Arugaslan and E. Yilmaz: *Method of Lyapunov functions for differential equations with piecewise constant delay*, J. Comp. Appl. Math., 235 (2011), 4554-4560.

[3] D. Araya, R. Castro and C. Lizama: *Almost automorphic solutions of difference equations*, Adv. Difference Eq., (2009), article id 591380, 1-15.

[4] M. Baroun, S. Boulite, G.M. N'Guérékata and L. Maniar: *Almost automorphic of semilinear parabolic evolution equations*, Elec. J. Diff. Eq., 60 (2008), 1-9.

[5] B. Basit and H. Hünzler: *Spectral criteria for solutions of evolution equations and comments on reduced spectra*, arXiv:1006.2169v2 [math.FA], 2010.

[6] A. Berger, S. Siegmund and Y. Yi: *On almost automorphic dynamics in symbolic lattices*. Erg. Th. Dyn. Syst., 24 (2004), 677-696.

[7] S. Bochner: *Curvature and Betti numbers in real and complex vector bundles*, Universitá e Politecnico de Torino, Rendiconti del Seminario Matematico, 15 (1955-1956), 225-253.

[8] S. Bochner: *Uniform convergence of monotone sequences of functions*, Proc. Nati. Acad. Sci. USA. 47 (1961), 582-585.

[9] S. Bochner: *A new approach to almost periodicity*, Proc. Nati. Acad. Sci., 48 (1962), 2039-2043.

[10] S. Bochner: *Continuous mappings of almost automorphic and almost periodic functions*, Proc. Nati. Acad. Sci., 52 (1964), 907-910.

[11] S.Busenberg and K.L. Cooke: *Models of vertically transmitted diseases with sequential continuous dynamics*, V.Lakshmikanthan (Ed.),Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences, Academic Press, New York, (1982), 179-187.

[12] J.L Daleckiî and M.G. Kreîn: *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Spaces*, Trans.lations of Mathematical Monographs. (43) 1974 (Traducido del Ruso).

[13] A. Chávez and M. Pinto: *Almost automorphic solutions to integral equations of advanced and delayed type and applications*. In progress.

[14] A. Chávez and M. Pinto: *Almost automorphic solutions of autonomous differential equations with piecewise constant argument*. In progress.

[15] A. Chávez and M. Pinto: *Almost automorphic solutions of non-autonomous differential equations with piecewise constant argument*. In progress.

[16] C. Corduneanu: *Almost Periodic Functions*, John Wiley and Sons, New York. 1968.

[17] W.Coppel: *Dichotomies in Stability Theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol 629, Springer, Berlin 1978.

[18] C. Cuevas and C. Lizama: *Almost automorphic solutions to integral equations on the line*, Semigroup Forum., 79 (2009), 461-472.

[19] K.L.Cooke and J.Wiener: *Retarded differential equations with piecewise constant delays*, J. Math. Anal. Appl., 99 (1984), 265-297.

[20] T. Diagana: *Pseudo-almost automorphic solutions to some classes of nonautonomous partial evolution equations*, Differential. Eq. & Appl., 1 (4) (2009), 561-582.

[21] W. Dimbour: *Almost automorphic solutions for differential equations with piecewise constant argument in a Banach space*, Non. Anal., 74 (2011), 2351-2357.

[22] H.S. Ding, T.J. Xiao and J. Liang: *Asymptotically almost automorphic solutions for some integrodifferential equations with nonlocal initial conditions*, J. Math. Anal. Appl. 338 (2008), 141-151.

[23] H.S. Ding, W. Long and G.M. N'Guérékata: *Almost automorphic solutions of nonautonomous evolution equations*, Non. Anal., 70 (2009), 4158-4164.

[24] Q. Feng and R. Yuan: *On the Lasota-Wazewska model with piecewise constant argument*, Acta Math. Scientia, 2 (26) (2006), 371-378.

[25] A.M. Fink: *Almost Periodic Differential Equations*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 377. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.

[26] A.M. Fink: *Almost automorphic and almost periodic solutions which minimize functionals*, Tôhoku Math. J., 20 (1968), 323-332.

[27] R.C. Grimmer: *Resolvent operators for integral equations in a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc., 273 (1982), 333-349.

[28] H. Henríquez and C. Lizama: *Compact almost automorphic solutions to integral equations with infinite delay*, Non. Anal., Series A, Th. Meth. Appl., 12 (71) (2009), 6029-6037.

[29] E. Hernández and J.P.C. Dos Santos: *Asymptotically almost periodic and almost periodic solutions for a class of partial integrodifferential equations*, Elec. J. Diff. Eq.,38 (2006), 1-8.

[30] R.A. Johnson: *A linear almost periodic equation with an almost automorphic solution*, Proc. Amer. Math. Soc., 2 (82) (1981), 199-205.

[31] J. Liang, J. Zhang and T.-J. Xiao: *Composition of pseudo almost automorphic and asymptotically almost automorphic functions*, J. Math. Anal. Appl., 340 (2008), 1493-1499.

[32] E.L. Lima: *Análisis Real*, Vol I. ed. IMPA, Rio de Janeiro (1989).

[33] J.L. Massera and J.J. Schäffer: *Linear Differential Equations and Function Spaces*, Academic Press., 1966.

[34] J.L. Massera: *The existence of periodic solutions of systems of differential equations*, Duke Math. J., 4 (17) (1950), 457-475.

[35] G.M. Mophou and G.M. N'Guérékata: *Almost automorphic solutions of neutral functional differential equations*, Elec. J. Diff. Eq., 69 (2010), 1-8.

[36] G.M.N'Guérékata: *Almost Automorphic and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces*, Kluwer Acad/Plenum, New York-Boston-Moscow-London, 2001.

[37] G.M.N'Guérékata: *Topics in Almost Automorphy*, Springer Science + Business Media, New York-Boston-Dordrecht-London-Moscow, 2005.

[38] G. Papaschinopoulos: *Exponential dichotomy, topological equivalence and structural stability for differential equations with piecewise constant argument*, Analysis 14 (1994), 239-247.

[39] G. Papaschinopoulos: *On asymptotic behavior of the solution of a class of perturbed differential equations with piecewise constant argument and variable coefficients*,J. Math. Anal. Appl. 185 (1994), 490-500.

[40] M. Pinto: *Pseudo-almost periodic solutions of neutral integral and differential equations and applications*, Non. Anal., 72 (2010), 4377-4383.

[41] M. Pinto and G. Robledo: *Cauchy matrix for linear almost periodic systems and some consequences*, Non. Anal., 74 (2011), 5426-5439.

[42] M. Pinto, G. Robledo and V. Torres: *Linear attraction in quasi-linear difference systems*, J. Difference. Equa. Appl. 5 (17) (2011), 765-778.

[43] Jan Prüss: *Evolutionary Integral Equations and Applications*, Monographs in Mathematics, 87. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.

[44] Heydar Radjavi and Peter Rosenthal: *Simultaneous Triangularization*, Springer. 2000.

[45] W. Rudin: *Principios de Análisis Matemático*, Libros McGraw Hill de Mexico. 1980.

[46] W. Shen and Y. Yi: *Almost automorphic and almost periodic dynamics in skew-product semifows III: Applications to Differential Equations*, Mem. Am. Math. Soc. 647 (136) (1998), 57-93.

[47] S.M. Shah and J. Wiener: *Advanced differential equations with piecewise constant argument deviations*, Int. J. Math. & Math. Sci. 4 (6) (1983), 671-703.

[48] N.Van Minh and T.Tat Dat: *On the almost automorphy of bounded solutions of differential equations with piecewise constant argument*, J. Math. Anal. Appl., 326 (2007), 165-178.

[49] W. A. Veech: *Almost automorphic functions*, Proc. Nati. Acad. Sci., 49 (1963), 462-464.

[50] M. Wazewska-Czyzewska and A. Lasota: *Mathematical problems of the red-blood cell system*, Ann. Polish Math. Soc. Ser. III, Appl. Math. 6 (1976), 23-40.

[51] T.J.Xiao, X.X.Zhu and J.Liang: *Pseudo-almost automorphic mild solutions to nonautonomous differential equations and applications*, Non. Anal., 70 (2009), 4079-4085.

[52] T. Yoshizawa: *Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions*, Appl. Math. Sci., 14, Springer-Verlag, New York - Heidelberg, 1975.

[53] R. Yuan: *The existence of almost periodic solutions of retarded differential equations with piecewise constant argument*, Non. Anal., 48 (2002), 1013-1032.

[54] R.Yuan and H.Jialin: *The existence of almost periodic solutions for a class of differential equations with piecewise constant argument*, Non. Anal. Theory, Meth. & Appl., 8 (28) (1997), 1439-1450.

[55] Ch. Zhang: *Almost Periodic Type Functions and Ergodicity*, Science Press, Beijing; Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.