



4-FC
8-11
'66
↓

CONDICIONES DE ESTABILIDAD PARA ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETARDO TIPO WRIGHT

Tesis
Entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magister en Ciencias Matemáticas

Facultad de Ciencias

por

Gonzalo Ricardo Robledo Veloso
Diciembre, 2000
Director de Tesis: **Dr. Sergei Trofimchuk**



FACULTAD DE CIENCIAS UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACION TESIS DE MAGISTER

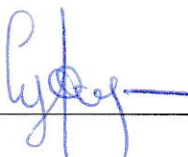
Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el candidato

GONZALO RICARDO ROBLEDO VELOSO

Ha sido aprobada por la Comisión de evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magister en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 21 de diciembre del 2000.

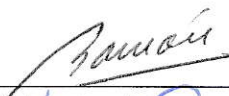
Director de Tesis:

Dr. Sergei Trofimchuk



Comisión evaluadora de la Tesis


Dr. Rodrigo Bamón



Dr. Nicolás Yus



Dr. Carlos Lizama



Dr. Claudio Cuevas





AGRADECIMIENTOS

Es un placer agradecer al profesor Sergei Trofimchuk el haber sido mi director de Tesis y su apoyo en momentos muy difíciles de este año. Gracias por tantas y tantas cosas.

Con respecto a esta tesis, también quiero agradecer a los profesores Eduardo Liz de la Universidad de Vigo (España) , Istvan Györi de la Universidad de Veszprem (Hungría) y al doctor Julio Yañez del Departamento de Física por su lectura paciente de las versiones preliminares y sus comentarios, también a Pablo Cabello por su gran ayuda en el capítulo 4.

A Patricia Lopez, Susana Bustamante y Simón Cancino les agradezco su amistad y el soportarme todos estos años.

Agradezco al departamento de Matemáticas de la Universidad de Chile por sus becas de arancel, en particular al profesor Manuel Pinto y a Santiago Andrews por muchas cosas. Por último agradezco a FONDECYT pues el trabajo de esta tesis fue parcialmente financiado por el proyecto FONDECYT 8990013.



LISTA DE MATERIAS

ABSTRACT	1
INTRODUCCION	2
Capítulo 1. PRELIMINARES	3
1. Conceptos Básicos	3
2. La ecuación de Wright Clásica	8
3. La derivada Schwarziana	10
4. Condiciones de estabilidad del tipo 3/2	13
Capítulo 2. RESULTADO PRINCIPAL	15
1. Ecuaciones tipo Wright y sus propiedades	15
2. Existencia de atractor global compacto	17
3. Lemas preparatorios	19
4. Funciones auxiliares	20
5. Caso A: $-f'(0) \in (0, \sqrt[3]{2})$	23
6. Caso B: $-f'(0) \in [\sqrt[3]{2}, \frac{3}{2})$	24
Capítulo 3. EJEMPLOS	27
1. Modelos de población	27
2. Otras ecuaciones	30
Capítulo 4. ALGUNOS RESULTADOS NUMERICOS	33
1. Ecuación $x'(t) = -ph \tanh(x(t-1))$	33
2. Ecuación $x'(t) = -ph \arctan(x(t-1))$	34



LISTA DE FIGURAS

Tipos de funciones que satisfacen hipótesis (H)

- 1.1 a) Monótona, $f''(0) > 0$, sin puntos de inflexión
- 1.2 b) Monótona, $f''(0) \geq 0$, un punto de inflexión no positivo
- 1.3 c) Monótona, $f''(0) \leq 0$, un punto de inflexión no negativo
- 1.4 d) Unimodal con máximo, $f''(0) > 0$, dos puntos de inflexión
- 1.5 e) Unimodal con máximo, $f''(0) < 0$, dos puntos de inflexión
- 1.6 f) Unimodal con mínimo, $f''(0) < 0$, dos puntos de inflexión
- 1.7 g) Unimodal con mínimo, $f''(0) > 0$, dos puntos de inflexión
- 1.8 h) Unimodal con mínimo, $f''(0) > 0$, un punto de inflexión

Soluciones numéricas de la ecuación $x'(t) = -ph \tanh(x(t-1))$

- 4.1 Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -1$
- 4.2 Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -1.3$
- 4.3 Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -1.5$
- 4.4 Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -1.5705$
- 4.5 Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -1.8$
- 4.6 Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -2$

Soluciones numéricas de la ecuación $x'(t) = -ph \arctan(x(t-1))$

- 4.7 Gráfico de $x(t)$ para $f'(0) = -1$
- 4.8 Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -1.3$
- 4.9 Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -1.5$
- 4.10 Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -1.5705$
- 4.11 Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -1.8$
- 4.12 Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -2$

ABSTRACT

ABSTRACT: We prove that all solutions of the scalar delay differential equation

$$x'(t) = f(x(t-1)),$$

satisfy $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ once f is such that:

- i) $xf(x) < 0$ for all $x \neq 0$, and $-f'(0) \in (0, 3/2]$.
- ii) f is unimodal or $f'(x) < 0$ for all $x \in \mathbb{R}$.
- iii) The Schwarzian derivative of f is negative and f is bounded from below.

RESUMEN: Demostramos que todas las soluciones de la ecuación diferencial escalar con retardo

$$x'(t) = f(x(t-1)),$$

satisfacen $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ cuando f es tal que:

- i) $xf(x) < 0$ para todo $x \neq 0$ y $-f'(0) \in (0, 3/2]$.
- ii) f is unimodal o $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- iii) La derivada Schwarziana de f es negativa y f es acotada inferiormente.

INTRODUCCION

En el Capítulo 1 se introducen definiciones y resultados de la teoría de ecuaciones diferenciales con retardo. Llamaremos *ecuación de tipo Wright* como todas aquellas de la forma

$$x'(t) = f(x(t-1))$$

donde la función f satisface ciertas hipótesis (que denotaremos como hipótesis **(H)**).

Estas ecuaciones generalizan la ecuación de Wright.

$$x'(t) = p(e^{-x(t-1)} - 1), \quad p > 0,$$

que ha sido estudiada extensamente en la literatura matemática. Hacemos además una breve revisión de ciertos resultados y conjeturas sobre la ecuación de Wright.

Finalmente, se revisan algunos temas como la derivada Schwarziana y las condiciones de estabilidad del tipo 3/2.

En el Capítulo 2 se demuestra el resultado principal de la tesis y con ello se generaliza el resultado obtenido por Wright en [24].

En el Capítulo 3 se consideran algunos modelos biológicos definidos en términos de ecuaciones diferenciales con retardo que pueden transformarse en ecuaciones tipo Wright y se verá que con el resultado principal se mejoran los resultados obtenidos en trabajos anteriores.

El Capítulo 4 consiste en un breve estudio numérico de las soluciones de algunas ecuaciones tipo Wright.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1. Conceptos básicos

En esta sección presentamos algunas definiciones y resultados de la teoría de la estabilidad para ecuaciones diferenciales con retardo que serán empleados con regularidad en las secciones siguientes. Las referencias utilizadas para dichos conceptos de estabilidad son los libros de Bellman y Cooke [2, Sección 11.4] y Hale [5, Sección 10].

Inicialmente, consideraremos ecuaciones con retardo del tipo

$$(1.1.1) \quad x'(t) = g(x(t-1)),$$

donde la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un cero en el origen y $g \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En lo sucesivo denotaremos por C al espacio de Banach $C([-1, 0], \mathbb{R})$ con la norma $\|\gamma\| = \max_{s \in [-1, 0]} |\gamma(s)|$, denotaremos como $x(t, \gamma)$ a la solución única de la ecuación (1.1.1) con la condición inicial

$$x(s, \gamma) = \gamma(s), \quad s \in [-1, 0],$$

donde $\gamma \in C$. Notemos además que $x(t) \equiv 0$ es una solución trivial de la ecuación (1.1.1) puesto que $g(0) = 0$.

DEFINICION 1.1 (Estabilidad). La solución $x(t) \equiv 0$ de la ecuación (1.1.1) es **(localmente) estable** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para toda función inicial $\psi \in C$ con la propiedad $\|\psi\| < \delta$ se verifica que $|x(t, \psi)| < \varepsilon$ para todo $t > 0$.

DEFINICION 1.2 (Estabilidad Asintótica). La solución $x(t) \equiv 0$ de (1.1.1) es **(localmente) asintóticamente estable** si se cumplen las siguientes condiciones

- i) La solución $x(t) \equiv 0$ es (localmente) estable.
- ii) Existe $\delta > 0$ tal que para toda condición inicial $\psi \in C$ con la propiedad $\|\psi\| < \delta$ se verifica

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, \psi) = 0.$$

Notemos que en las definiciones de estabilidad recién vistas se consideran solo condiciones iniciales cercanas a 0. En lo sucesivo entenderemos por *estabilidad local* estos dos tipos de estabilidad. Existe además otro tipo de comportamiento asintótico que carece de tal restricción.

DEFINICION 1.3 (Atractividad Global). La solución $x(t) \equiv 0$ de la ecuación (1.1.1) será denotada como **globalmente atractiva** si para toda solución $x(t, \gamma)$ de la ecuación (1.1.1) se verifica que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, \gamma) = 0.$$

1.1. Estabilidad local asintótica de la solución $x(t) \equiv 0$. En esta sección veremos algunas condiciones suficientes para la estabilidad (local) asintótica de la solución $x(t) \equiv 0$ de la ecuación (1.1.1).

Un desarrollo de Mac Laurin con resto de Lagrange para la función g muestra que

$$g(u) = g'(0)u + \frac{1}{2}g''(\theta)u^2, \quad \theta \in (0, u).$$

Por lo tanto, la ecuación (1.1.1) puede entenderse como una ecuación del tipo

$$x'(t) + ax(t-1) = h(x(t-1)), \quad a = -g'(0), \quad h(x) = O(x^2),$$

lo que constituye (en un entorno del origen) una perturbación de la ecuación lineal

$$(1.1.2) \quad u'(t) + au(t-1) = 0, \quad a = -g'(0).$$

El teorema de Poincaré – Lyapunov [2, Cap. 11.2] (en el contexto de ecuaciones diferenciales con retardo) permitirá demostrar que el comportamiento de las soluciones de la ecuación (1.1.1) está bien aproximado por el comportamiento de las soluciones de la ecuación (1.1.2) cuando la condición inicial es arbitrariamente pequeña (en norma), esto posibilitará encontrar condiciones suficientes para la estabilidad local de la solución $x(t) \equiv 0$ de la ecuación (1.1.1).

PROPOSICION 1.1 (Teorema de Poincaré – Lyapunov). *Supongamos que toda solución de la ecuación (1.1.2) tiende a cero cuando $t \rightarrow +\infty$. Entonces existen $\delta > 0$, $\lambda > 0$ y $p > 0$ tales que para toda condición inicial $\gamma \in C$ con $\|\gamma\| < \delta$, la solución $x(t, \gamma)$ de la ecuación (1.1.1) verifica la desigualdad*

$$|x(t, \gamma)| \leq p \|\gamma\| e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

La demostración del teorema es una generalización de la efectuada en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Una consecuencia inmediata de la Proposición 1.1 consiste en que el estudio de la estabilidad de la solución $x(t) \equiv 0$ para la ecuación (1.1.2) permite obtener condiciones suficientes para la *estabilidad* de la solución $x(t) \equiv 0$ de la ecuación (1.1.1).

1.2. Soluciones de la ecuación lineal asociada. En esta sección se encontrarán condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de la solución $x(t) \equiv 0$ de la ecuación (1.1.2), se emplearán la transformada de Laplace y su inversa.

LEMA 1.1. *Para toda solución $u(t)$ de la ecuación (1.1.2) se verifica la desigualdad $|u(t)| \leq Me^{|a|t}$ para todo $t \geq 0$, donde $M > m = \max_{s \in [-1, 0]} |u(s)|$. Es decir, las soluciones de la ecuación lineal son de orden exponencial.*

DEMOSTRACIÓN. Es obvio que para todo $t \in [0, 1]$ se verifican las desigualdades

$$|u(t)| \leq m(1 + |a|t) \leq me^{|a|t}.$$

Además, integrando la ecuación (1.1.2) sobre el intervalo $(1, t)$ se obtiene la desigualdad

$$|u(t)| \leq me^{|a|} + \int_0^{t-1} |a||u(s)|ds \leq me^{|a|} + |a| \int_0^t |u(s)|ds \quad \text{para todo } t > 1.$$

Luego, por el lema de Gronwall se obtiene la desigualdad

$$|u(t)| \leq me^{|a|} e^{|a|t}$$

para todo $t > 1$ y se concluye que $u(t)$ es de orden exponencial. \square

Una consecuencia directa del lema 1.1 es que $u'(t)$ también es de orden exponencial (basta observar que $|u'(t)| \leq |a||u(t-1)|$), por lo tanto, la ecuación (1.1.2) puede resolverse (al menos formalmente) con el uso de la transformada de Laplace.

Multiplicando la ecuación (1.1.2) por e^{-st} (donde $s \in \mathbb{C}$ es tal que $\operatorname{Re} s > |a|$) e integrando sobre el intervalo $(0, +\infty)$ se tiene la ecuación

$$\int_0^{\infty} u'(t)e^{-st} dt + a \int_0^{\infty} u(t-1)e^{-st} dt = 0.$$

Denotemos $u(s) = \gamma(s)$ para todo $s \in [-1, 0]$, integrando por partes la primera integral y realizando un cambio de variable en la segunda, se calcula la transformada de Laplace de $u(t) = u(t, \gamma)$:

$$(1.1.3) \quad \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \frac{h(s)}{s + ae^{-s}}, \quad h(s) = \gamma(0) - ae^{-s} \int_{-1}^0 \gamma(t)e^{-st} dt.$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace [22], se obtiene finalmente una solución de la ecuación (1.1.2), esto es

$$(1.1.4) \quad u(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{e^{st} h(s) ds}{s + ae^{-s}}.$$

Notemos que $c > |a|$ es una cota superior para las partes reales de las raíces de la ecuación característica

$$(1.1.5) \quad s + ae^{-s} = 0$$

y que la integral dada por la fórmula (1.1.4) está bien definida (consultar [2, pag.7]).

El siguiente lema caracteriza las propiedades de las raíces de la ecuación (1.1.5) y permitirá un cálculo más explícito de la fórmula (1.1.4).

LEMA 1.2. *Si $a > 0$ entonces todas las raíces $s = \alpha + i\beta$ de la ecuación (1.1.5) tienen las siguientes propiedades:*

- i) *Si $a > e^{-1}$ todas las raíces son pares conjugados del tipo $s_{\pm k} = \alpha_k \pm i\beta_k$ donde $k = 0, 1, 2, \dots$ y $2k\pi < \beta_k < (2k+1)\pi$.*
- ii) *Las raíces $\alpha_0 \pm i\beta_0$ son reemplazadas por la raíz doble $s = -1$ cuando $a = e^{-1}$ y por dos raíces reales distintas y negativas para $0 < a < e^{-1}$.*
- iii) *$\alpha_k > \alpha_{k+1}$ para todo $k = 0, 1, \dots$. Además $\alpha_k \leq -\ln(4k)$ para todo $k \geq 1$ y finalmente se cumple que si $0 < a < \pi/2$, todas las raíces tienen parte real negativa.*

DEMOSTRACIÓN. i) Al considerar $s = \alpha + i\beta$, la ecuación (1.1.5) es equivalente al sistema de ecuaciones

$$(1.1.6) \quad \alpha = -ae^{-\alpha} \cos \beta,$$

$$(1.1.7) \quad \beta = ae^{-\alpha} \sin \beta.$$

Si $\beta > 0$, entonces $a > 0$ implica $\sin \beta > 0$, por lo tanto todas las raíces de la ecuación (1.1.5) que tengan parte imaginaria positiva pertenecen a conjuntos de la

forma $2k\pi < \beta < [2k+1]\pi$ ($k = 0, 1, \dots$). De las ecuaciones (1.1.6) y (1.1.7) se puede establecer la ecuación

$$(1.1.8) \quad a = \beta e^{-\beta \cot \beta} \csc \beta.$$

Definamos la función $F(t) = t \csc t e^{-t \cot t}$ y notemos que $F(t) > 0$ cuando $2k\pi < t < [2k+1]\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), además se tiene que

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{(1 - t \cot t)^2 + t^2}{t} > 0$$

y entonces $F(t)$ es creciente en todo intervalo del tipo $(2k\pi, [2k+1]\pi)$, veáse además que

$$\lim_{t \rightarrow 2k\pi+} F(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow (2k+1)\pi-} F(t) = +\infty, \quad k = 1, 2, \dots$$

Por lo tanto, para todo entero positivo k existe sólo un valor $\beta \in (2k\pi, [2k+1]\pi)$ que es solución de la ecuación (1.1.8), llamaremos a este valor β_k . Para el caso $k = 0$ notemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0+} F(t) = e^{-1}, \quad \lim_{t \rightarrow \pi-} F(t) = +\infty.$$

Por lo tanto, existe sólo un valor $\beta \in (0, \pi)$ que es solución de la ecuación (1.1.8), llamaremos a este valor β_0 .

Luego, se tiene que para todo subconjunto de la forma $(2k\pi < \text{Im } s < [2k+1]\pi)$ ($k = 0, 1, \dots$) existe sólo una raíz del tipo $\alpha_k + i\beta_k$. Notemos que las raíces $\alpha_k + i\beta_k$ son simples, en efecto, si suponemos lo contrario, se tienen las ecuaciones

$$s + ae^{-s} = 0, \quad 1 - ae^{-s} = 0$$

y por lo tanto se deducen las igualdades $s = -1$ y $a = e^{-1}$, obteniendo una contradicción.

Si consideramos $\beta < 0$, la demostración es análoga.

ii) Consideremos la siguiente formulación equivalente de la ecuación (1.1.5)

$$(1.1.9) \quad a = -se^s.$$

Definamos la función $G(t) = -te^t$ y notemos que $G(t) > 0$ para todo $t < 0$, además la función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1)$ tiene un máximo (igual a e^{-1}) en $s = -1$ y es decreciente en $(-1, 0)$. Además $G(-\infty) = G(0) = 0$. Por lo tanto la ecuación (1.1.9) tiene dos raíces reales cuando $a \in (0, e^{-1})$, una raíz doble $s = -1$ cuando $a = e^{-1}$ y no tiene raíces reales cuando $a > e^{-1}$.

iii) Notemos que la ecuación (1.1.7) implica que

$$\alpha = \ln(a(\sin \beta)/\beta) \leq \ln(a)$$

y por lo tanto, si $0 < a \leq 1$, es claro que $\alpha < 0$. Entonces sólo consideraremos el rango $a \in (1, \pi/2)$. A partir de las ecuaciones (1.1.6) y (1.1.7) se obtiene la ecuación

$$\beta^2 = a^2 e^{-2\alpha} - \alpha^2$$

Definamos la función $V(t) = a^2 e^{-2t} - t^2$, además notemos que la derivada $V'(t) = -e^{-2t}(2a^2 + 2te^{2t})$, por lo tanto $V(t)$ es decreciente si $a^2 > 1/(2e)$. En particular, $V(t)$ es decreciente cuando $a \in (1, \pi/2)$.

Como $\beta_{k+1}^2 > \beta_k^2$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ y $V(t)$ es decreciente, se tiene que $\alpha_k > \alpha_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.

A partir de las ecuaciones (1.1.6) y (1.1.7) también puede deducirse la ecuación

$$(1.1.10) \quad \alpha = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{a^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right).$$

si $\beta_k \in (2k\pi, [2k+1]\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) se tienen las desigualdades

$$\alpha_k \leq \ln \left(\frac{a}{\beta_k} \right) \leq \ln \left(\frac{1}{4k} \right) < -1$$

y eso prueba que $\alpha_k < 0$ si $k \geq 1$.

Sólo resta demostrar que $\alpha_0 < 0$. Si suponemos que $\alpha_0 \geq 0$, la ecuación (1.1.6) implica que $\beta_0 \in [\pi/2, \pi)$ y la ecuación (1.1.7) implica la desigualdad $\beta_0 \leq a < \pi/2$ obteniendo una contradicción. \square

El lema 1.2 tiene un papel clave en la demostración del siguiente resultado que enunciamos sin demostrar

PROPOSICION 1.2. *Sea $\{s_{\pm k}\}$ una sucesión de las raíces de la ecuación (1.1.5) tal que las partes reales de $s_{\pm k}$ están ordenadas en forma decreciente, consideremos además que $a \in (0, \pi/2)$. Entonces, para cada $\gamma \in C$ se cumple la igualdad*

$$u(t, \gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res} \left(s_{\pm k}, \frac{e^{st} h(s)}{s + ae^{-s}} \right), \quad t > 1$$

$$\text{donde } h(s) = \gamma(0) - ae^{-s} \int_{-1}^0 \gamma(t) e^{-st} dt.$$

La serie converge uniformemente en todo intervalo del tipo $[t_0, +\infty)$ (donde $t_0 > 1$), además se verifica que $u(t, \gamma) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

La idea básica de la demostración (consultar [2, cap. 4]) consiste en construir una sucesión C_l de contornos cerrados simples en el plano complejo de modo que contengan a todas las raíces de la ecuación (1.1.5) cuando $l \rightarrow +\infty$. De esta forma, por el teorema del residuo se tiene que

$$(1.1.11) \quad \lim_{l \rightarrow +\infty} \oint_{C_l} \frac{e^{st} h(s) ds}{s + ae^{-s}} = 2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res} \left(s_{\pm k}, \frac{e^{st} h(s)}{s + ae^{-s}} \right).$$

La existencia de la sucesión s_k se deduce del lema 1.2 (sección *iii*). También supondremos que para valores arbitrariamente grandes de l , el contorno C_l interseca a la recta $\operatorname{Re} s = c$ en los puntos $c \pm iT(l)$ (donde c es la constante definida en la ecuación (1.1.4) y $T(l) \rightarrow +\infty$ cuando $l \rightarrow +\infty$).

Denotaremos además por C_{l-} (respectivamente C_{l+}) a la parte C_l que se encuentra a la izquierda (respectivamente derecha) de la recta $\operatorname{Re} s = c$. Luego, se tiene la identidad

$$(1.1.12) \quad \oint_{C_l} \frac{e^{st} h(s) ds}{s + ae^{-s}} = \int_{C_{l-}} \frac{e^{st} h(s) ds}{s + ae^{-s}} + \int_{C_{l+}} \frac{e^{st} h(s) ds}{s + ae^{-s}}.$$

Las propiedades de la sucesión C_l y la analiticidad de $\frac{e^{st} h(s) ds}{s + ae^{-s}}$ en la región $\operatorname{Re} s \geq c$ permitirán demostrar las igualdades

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{C_{l-}} \frac{e^{st} h(s) ds}{s + ae^{-s}} = 0, \quad \int_{C_{l+}} \frac{e^{st} h(s) ds}{s + ae^{-s}} = \int_{c-iT(l)}^{c+iT(l)} \frac{e^{st} h(s) ds}{s + ae^{-s}},$$

finalmente, reemplazando estos resultados en las ecuaciones (1.1.11) y (1.1.12) se obtienen las igualdades

$$u(t, \gamma) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT(l)}^{c+iT(l)} \frac{e^{st} h(s) ds}{s + ae^{-s}} = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res} \left(s_{\pm k}, \frac{e^{st} h(s)}{s + ae^{-s}} \right).$$

Como el lema 1.2 indica que todos los polos son simples en el caso $a \neq e^{-1}$ y que s_0 es un polo de orden 2 en el caso $a = e^{-1}$, bastará demostrar la convergencia de la serie cuando s_k es un polo simple (es decir, cuando $k \geq 1$).

Como el residuo correspondiente al polo simple $s_{\pm k}$ viene dado por

$$\operatorname{Res} \left(s_{\pm k}, \frac{e^{st} h(s)}{s + ae^{-s}} \right) = \frac{e^{s_{\pm k} t} h(s_{\pm k})}{1 - ae^{-s_{\pm k}}}$$

y además, por el lema 1.2 (sección *iii*) se tiene que $\operatorname{Re} s_{\pm k} = \alpha_k \leq -\ln(4k)$, todo esto permite demostrar las desigualdades

$$\left| \operatorname{Res} \left(s_{\pm k}, \frac{e^{st} h(s)}{s + ae^{-s}} \right) \right| \leq \|\gamma\| \left(\frac{e^{\alpha_k t} + |a|e^{\alpha_k(t-1)}}{|a|e^{-\alpha_k} - 1} \right) \leq \frac{\|\gamma\|(1 + |a|)}{(4k)^{t-1}(4|a|k - 1)}.$$

para todo $k \geq k_0 > (4|a|)^{-1}$.

Como la serie

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\|\gamma\|(1 + |a|)}{(4k)^{t-1}(4|a|k - 1)}$$

converge uniformemente sobre todo intervalo de la forma $[t_0, +\infty)$ (donde $t_0 > 1$), se tiene que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res} \left(s_{\pm k}, \frac{e^{st} h(s)}{s + ae^{-s}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{s_{\pm k} t} h(s_{\pm k})}{1 - ae^{-s_{\pm k}}}$$

converge uniformemente sobre todo intervalo de la forma $[t_0, +\infty)$ (donde $t_0 > 1$). Finalmente como $\operatorname{Re} s_k < 0$ para todo k se concluye que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, \gamma) = 0.$$

2. La ecuación de Wright clásica

La ecuación de Wright es una ecuación diferencial con retardo que tiene aplicaciones en teoría de números y biología matemática, cuyo origen está asociado a la ecuación logística de Verhulst (1845)

$$(1.2.1) \quad N'(t) = \beta N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right),$$

que modela el crecimiento (decrecimiento) de una población $P(t)$ en el tiempo. Aquí se supone que $P'(t)$ es directamente proporcional a $P(t)$ y que la constante de proporcionalidad viene dada por la diferencia (positiva) entre las tasas de natalidad $\beta(t)$ y mortalidad $\delta(t)$. Es decir

$$N'(t) = (\beta(t) - \delta(t))N(t).$$

Se considera además como hipótesis que la tasa de natalidad $\beta(t)$ depende linealmente del tamaño de la población ($\beta(t) = \beta_0 - \beta_1 N(t)$, $\beta_i > 0$, $i = 0, 1$) y que la tasa de mortalidad es constante ($\delta(t) = \delta_0 < \beta_0$). Por lo tanto, si definimos $K = \beta_0 - \delta_0/\beta_1$ y $\beta = \beta_0 - \delta_0$, el crecimiento (decrecimiento) de la población viene

dado por la ecuación (1.2.1).

Posteriormente (1948) Hutchinson [7] considera que la tasa de natalidad también depende del tiempo ($\tau = q$) que la especie tarda en desarrollar su capacidad reproductiva, es decir $\beta(t) = \beta_0 - \beta_1 P(t - q)$, obteniendo así la ecuación diferencial con retardo

$$(1.2.2) \quad N'(t) = \beta N(t) \left(1 - \frac{N(t - q)}{K} \right)$$

Introduciendo el cambio de variable $y(t) = \frac{N(tq)}{K} - 1$ y definiendo $p = \beta q$, la ecuación (1.2.2) se transforma en la ecuación de Wright (1955):

$$(1.2.3) \quad y'(t) = -py(t - 1)[1 + y(t)].$$

Wright demostró [24, pág. 67] el siguiente resultado de atractividad global para la ecuación (1.2.3)

PROPOSICION 1.3 (Teorema 3/2 de Wright). *Si $0 < p \leq \frac{3}{2}$ entonces toda solución de la ecuación (1.2.3) tiene la propiedad*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t, \gamma) = 0,$$

para toda condición inicial $\gamma \in C$ tal que $\gamma(s) > -1$, $s \in [-1, 0]$.

Se puede realizar el cambio de variable $x(t) = -\ln(1 + y(t))$ transformando la ecuación (1.2.3) en la ecuación

$$(1.2.4) \quad x'(t) = p(e^{-x(t-1)} - 1).$$

Notemos que la ecuación lineal asociada a (1.2.4) en una vecindad del origen es la ecuación

$$x'(t) + px(t - 1) = 0.$$

Wright señala que las cotas $0 < p \leq \frac{37}{24}$ y $0 < p \leq 1.567$ posiblemente sean condiciones suficientes de atractividad global; la cercanía de estas cotas a $\frac{\pi}{2} \cong 1.570796$ sugiere que el rango de atractividad global podría llegar a ser $p < \frac{\pi}{2}$ así que las condiciones de estabilidad local serían iguales a las de atractividad global.

CONJETURA 1 (Conjetura de Wright). *Si $p \in (0, \frac{\pi}{2})$ entonces toda solución de la ecuación (1.2.4) tiene la propiedad*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, \gamma) = 0,$$

para toda condición inicial $\gamma \in C$.

La conjetura 1 ha sido objeto de numerosos trabajos (ver por ejemplo, [3],[6] y [11]). Diversos autores (por ejemplo, Mallet Paret [14] y Walther [23]) intentan una formulación mas general de la ecuación (1.2.4), con esta idea se retomará el estudio de la ecuación (1.1.1) donde la función g tendrá las siguientes propiedades que designaremos **(H1)** y **(H2')**:

(H1) $tg(t) < 0$ para todo $t \neq 0$ y $g'(0) < 0$.

(H2') $g(t) \geq \alpha > -\infty \forall t \in \mathbb{R}$ y $g(t)$ es estrictamente decreciente

Es sencillo verificar que la función $p(e^{-x} - 1)$ tiene las propiedades **(H1)** y **(H2')**, la idea de varios trabajos ha consistido en estudiar la conjetura de Wright

dentro de este contexto más general. En tal dirección, Walther [23] construye ejemplos de ecuaciones que satisfacen las propiedades **(H1)** y **(H2')**, $-g'(0) \in (0, \pi/2)$ y en las que sin embargo la solución $x(t) \equiv 0$ no es globalmente atractiva. Trabajos posteriores han refinado las hipótesis **(H1)** y **(H2')** en muchos sentidos, en nuestro caso haremos uso de la derivada Schwarziana (ver la sección siguiente) y generalizaremos **(H2')** considerando el caso unimodal.

Sea $f \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, diremos que f verifica las hipótesis **(H)** cuando cumple la hipótesis **(H1)** y también las hipótesis adicionales:

(H2) $f(t) > \alpha > -\infty \forall t \in \mathbb{R}$ y tiene a lo más un punto crítico $x^* \in \mathbb{R}$, el cual es un extremo local.

(H3) f tiene derivada Schwarziana negativa $(Sf)(x) < 0$ para todo $x \neq x^*$.

Estas hipótesis definen una familia de ecuaciones diferenciales con retardo que generalizan la ecuación (1.2.4).

3. La derivada Schwarziana

DEFINICION 1.4. La derivada Schwarziana de una función f en un punto x tal que $f'(x) \neq 0$ está definida como

$$(Sf)(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

EJEMPLO 1.1. la derivada Schwarziana de $f(x) = p(e^{-x} - 1)$ es $(Sf)(x) = -1/2$.

El uso de la derivada Schwarziana en la teoría de sistemas dinámicos unidimensionales (consultar [17]) permite demostrar que –bajo ciertas hipótesis– la estabilidad local implica la estabilidad global (nótese la analogía con la Conjetura 1):

PROPOSICION 1.4. Sea $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$, $f \in C^3[a, b]$ decreciente o con a lo más un punto crítico $x^* \in [a, b]$. Si f tiene un único punto fijo $x_2 \in [a, b]$ que es localmente asintóticamente estable y $(Sf)(x) < 0$ para todo $x \in [a, b] \setminus \{x^*\}$, entonces x_2 es el atractor global de f .

Los siguientes lemas serán de utilidad en las secciones posteriores.

LEMA 1.3. Si $(Sf)(x) < 0$ entonces $f'(x)$ no tiene máximos locales negativos ni tampoco mínimos locales positivos.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f'(x)$ tiene un máximo local en x_0 tal que $f'(x_0) < 0$. Entonces se tiene que $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \leq 0$, por lo tanto $(Sf)(x_0) \geq 0$ y así obtenemos una contradicción. Por lo tanto, no existen máximos locales negativos.

La inexistencia de mínimos locales positivos se demuestra análogamente. \square

LEMA 1.4. Supongamos que (Sf) y (Sg) existen. Cuando $f \circ g$ está bien definida se tiene que

$$(S(f \circ g))(x) = (Sf)(g(x))(g'(x))^2 + (Sg)(x).$$

DEMOSTRACIÓN. Es inmediata. \square

El conjunto de funciones que satisface las hipótesis **(H)** puede subdividirse en dos subconjuntos: las funciones estrictamente decrecientes y las funciones con un

extremo local. En ambos casos puede realizarse un estudio completo acerca de la concavidad y convexidad de la función f .

LEMA 1.5. *Si $(Sf) < 0$ y además $f'(x)$ no cambia de signo para todo $x \in (a, b)$, entonces f tiene a lo más un punto de inflexión en (a, b) .*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad consideraremos el caso $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, supongamos que en el intervalo (a, b) existen dos puntos de inflexión $x_a < x_b$, por **(H3)** se tiene que x_a y x_b son mínimos locales de $f'(x)$.

La continuidad de f' implica la existencia de un máximo $x_c \in (x_a, x_b)$ donde $f'(x_c) < 0$, lo que contradice el lema 1.3.

La demostración para el caso $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ es análoga a la anterior. □

LEMA 1.6. *Si f satisface **(H)** y $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces se verifican las siguientes propiedades:*

- a) *Si $f''(0) \geq 0$ entonces $f''(x) > 0$ para todo $x > 0$.*
- b) *Si $f''(0) \leq 0$ entonces $f''(x) < 0$ para todo $x < 0$.*

DEMOSTRACIÓN. a) Notemos primero que no pueden existir puntos x_d con la propiedad $f''(x_d) = 0$ que no sean de inflexión, ello implicaría que $f'''(x_d) = 0$ obteniendo una contradicción con **(H3)**.

Supongamos que $f''(0) \geq 0$ y que existe un punto de inflexión $x_a \geq 0$, entonces por el lema 1.5 se tiene que $f''(x) < 0$ para todo $x \in (x_a, +\infty)$.

Un desarrollo de Taylor en torno a x_a permite demostrar la desigualdad

$$f(x) = f(x_a) + f'(x_a)(x - x_a) + f''(\theta)(x - x_a)^2 \leq f(x_a) + f'(x_a)(x - x_a), \quad \theta \in (x_a, x),$$

luego, si $x \rightarrow +\infty$ se obtiene una contradicción con **(H2)**.

b) Supongamos que $f''(0) < 0$ y que existe un único punto de inflexión $x_a < 0$, entonces por el lema 1.5 se tiene que $f''(x) < 0$ para todo $x \in (x_a, +\infty)$, con argumentos similares al caso a) se obtiene una contradicción. □

COMENTARIO 1.1. Los lemas 1.5 y 1.6 permiten concluir que existen tres tipos de funciones (representados en las figuras **a**), **b**) y **c**)) que satisfacen las hipótesis **(H)** y además $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tal clasificación se realiza considerando la ubicación del punto de inflexión. En lo sucesivo denotaremos (cuando exista) por x_a al único punto de inflexión de f . Los casos en que $f''(0) = 0$ podrán ser vistos como el caso límite de alguno de los tres casos anteriores.

LEMA 1.7. *Si f satisface las hipótesis **(H)** y además tiene un extremo local x^* , entonces tiene a lo más dos puntos de inflexión.*

DEMOSTRACIÓN. El lema 1.5 implica que f' tiene a lo más un punto de inflexión los intervalos $(-\infty, x^*)$ y $(x^*, +\infty)$ respectivamente. Por lo tanto, basta demostrar que x^* no es punto de inflexión.

Supongamos que x^* es un punto de inflexión y como $y = f(x^*)$ es la recta tangente a f en el punto x^* , entonces, como x^* es un punto de inflexión, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(x^*)$ para todo $x \in (x^* - \delta, x^*)$ y $f(x) < f(x^*)$ para todo

$x \in (x^*, x^* + \delta)$ (o viceversa), contradiciendo de esta forma la definición de x^* como un extremo local. \square

COMENTARIO 1.2. El lema 1.7 permiten concluir que existen cinco tipos de funciones (representados en las figuras **d**), **e**), **f**) **g**) y **h**) que satisfacen las hipótesis **(H)** y además tienen un punto crítico, tal clasificación se realiza considerando la ubicación de los puntos de inflexión y el extremo local. En lo sucesivo denotaremos (cuando existan) por x_a al menor (o único) punto de inflexión de f , x_b será el mayor punto de inflexión de f y x^* será el punto crítico. Los casos en que $f''(0) = 0$ podrán ser vistos como el caso límite de alguno de los cinco casos anteriores.

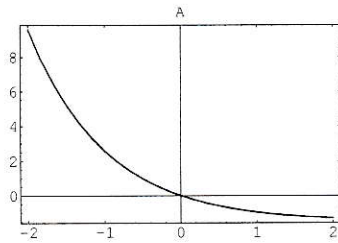


FIGURA 1.1. **a**) Monótona, $f''(0) > 0$, sin puntos de inflexión

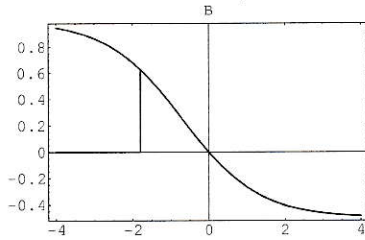


FIGURA 1.2. **b**) Monótona, $f''(0) \geq 0$, un punto de inflexión no positivo

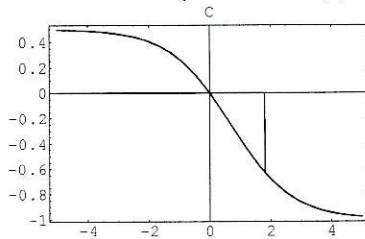


FIGURA 1.3. **c**) Monótona, $f''(0) \leq 0$, un punto de inflexión no negativo

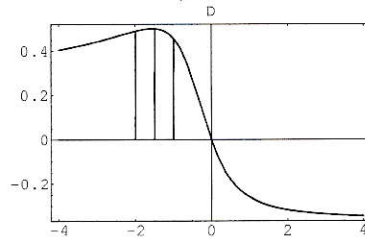
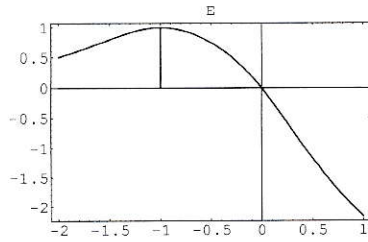
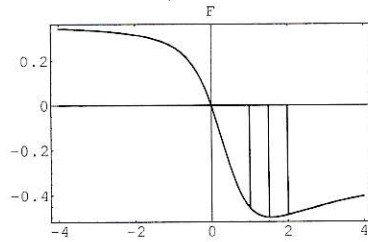
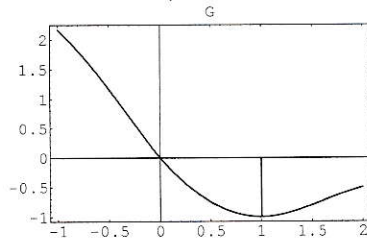
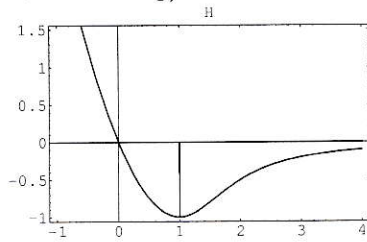


FIGURA 1.4. **d**) Unimodal con máximo, $f''(0) > 0$, dos puntos de inflexión

FIGURA 1.5. e) Unimodal con máximo, $f''(0) < 0$, dos puntos de inflexiónFIGURA 1.6. f) Unimodal con mínimo, $f''(0) < 0$, dos puntos de inflexiónFIGURA 1.7. g) Unimodal con mínimo, $f''(0) > 0$, dos puntos de inflexiónFIGURA 1.8. h) Unimodal con mínimo, $f''(0) > 0$, un punto de inflexión

4. Condiciones de estabilidad del tipo 3/2

Con posterioridad al trabajo de Wright, se desarrolló una serie de resultados que generalizan el teorema 3/2 de Wright. En primer lugar, Sugie [21] considera la ecuación no autónoma

$$(1.4.1) \quad y'(t) = -r(t)[1 + y(t)]y(t-1), \quad t \geq 0,$$

donde $r: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ es una función continua y demuestra que si $r(t) \leq r < 3/2$ entonces la solución $y(t) \equiv 0$ es uniformemente estable.

La ecuación (1.4.1) también ha sido estudiada por So y Yu (ver [18] y [19]) quienes demuestran que las hipótesis

$$(1.4.2) \quad \int_{t-1}^t r(s) ds \leq 3/2, \quad t \geq 1$$

$$(1.4.3) \quad \int_0^\infty r(s) ds = \infty,$$

son suficientes para la atractividad global de la solución $y(t) \equiv 0$.

Estas hipótesis también son empleadas por Miyazaki, Matsunaga y Hara [15] quienes en un contexto diferente estudian la ecuación

$$(1.4.4) \quad x'(t) = r(t)f(x(t-1)),$$

donde la función r satisface las hipótesis (1.4.2) y (1.4.3) y la función f cumple la desigualdad

$$(1.4.5) \quad |f(x)| < |x|, \quad x \neq 0.$$

También se demuestra que las hipótesis (1.4.2), (1.4.3) y (1.4.5) implican la atractividad global de la solución $x(t) \equiv 0$ de la ecuación (1.4.4).

Finalmente, es interesante destacar también que existe un criterio $3/2$ para una familia de ecuaciones diferenciales de naturaleza diferente a las que hemos considerado. Se trata del conocido *criterio $3/2$ de Yorke* [9], [27] que fue generalizado recientemente en [8], donde se pueden encontrar otras referencias relacionadas.

RESULTADO PRINCIPAL

1. Ecuaciones tipo Wright y sus propiedades

DEFINICION 2.1 (Ecuación tipo Wright). Diremos que toda ecuación diferencial de la forma

$$(2.1.1) \quad x'(t) = f(x(t-1)),$$

donde f verifica las hipótesis **(H)** es de tipo Wright.

El siguiente teorema generaliza el Teorema 3/2 de Wright.

TEOREMA 2.1 (Resultado Principal). *Supongamos que $0 < -f'(0) \leq 3/2$ y que se verifican las hipótesis **(H)**. Entonces la solución trivial $x(t) \equiv 0$ de la ecuación (2.1.1) es globalmente atractiva.*

El siguiente lema señala que varias propiedades de la ecuación (1.2.4) también son ciertas para las ecuaciones tipo Wright (consultar [5, pág. 156] y [24]).

LEMA 2.1. *Dada una condición inicial $\gamma \in C$ y una solución $x(t, \gamma)$ de la ecuación tipo Wright (2.1.1), esta verifica las siguientes propiedades*

- i) *Si existe $T \geq 0$ tal que $x(t, \gamma) \geq 0$ para todo $t > T$, entonces $x(t, \gamma) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.*
- ii) *Definamos $q = \min_{s \in [-1, 0]} \gamma(s)$, $Q = \max_{s \in [-1, 0]} \gamma(s)$ y $\kappa = \min\{q, 0\} + \alpha$ (donde $f(t) > \alpha$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\alpha < 0$). Entonces, para todo $t > -1$ se cumplen las siguientes desigualdades*

$$\kappa < x(t, \gamma) < \max\{0, Q\} + \max_{u \in [\kappa, 0]} f(u).$$

- iii) *Si γ no cambia de signo en $[-1, 0]$, entonces los ceros de $x(t, \gamma)$ (cuando existen) son simples y la distancia entre dos ceros consecutivos es mayor que 1.*

DEMOSTRACIÓN. i) Como $x(t, \gamma)$ es decreciente sobre $(T+1, +\infty)$ y acotada inferiormente, existe el límite $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, \gamma) = c \geq 0$. Si $c = 0$ no hay nada que demostrar, supondremos entonces que $c > 0$ y por lo tanto, $x(T+1, \gamma) \geq x(t, \gamma) \geq c > 0$ para todo $t > T+1$.

Al integrar la ecuación (2.1.1) sobre el intervalo $(T+2, +\infty)$ se tiene

$$x(t, \gamma) - x(T+2, \gamma) = \int_{T+1}^{t-1} f(x(s, \gamma)) ds \leq \left[\max_{s \in [c, x(T+1, \gamma)]} f(s) \right] (t-1+T)$$

y por tanto $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, \gamma) = -\infty$, obteniendo una contradicción con $c > 0$.

ii) Integrando la ecuación (2.1.1) sobre el intervalo $[0, t] \subset [0, 1]$ se obtienen las desigualdades

$$x(t) \geq \min\{0, q\} + \int_0^t f(\gamma(s-1)) ds > \kappa.$$

Ahora demostraremos que esta desigualdad se verifica además para todo $t > 1$, supongamos que existe un número $\tau = \inf\{t > 1 \mid x(t, \gamma) = \kappa\}$. Luego, si integramos la ecuación (2.1.1) sobre el intervalo $(\tau - 1, \tau)$ se obtiene

$$\kappa - x(\tau - 1, \gamma) = \int_{\tau-1}^{\tau} f(x(s-1)) ds > \alpha,$$

lo que a su vez implica la desigualdad $x(\tau - 1, \gamma) < 0$ y por lo tanto $x(t, \gamma)$ es creciente en $t = \tau$, contradiciendo la definición de τ . Finalmente se tiene que $\kappa < x(t, \gamma)$ para todo $t > -1$.

Luego, integrando la ecuación (2.1.1) sobre el intervalo $[0, t] \subset [0, 1]$ se tienen las desigualdades

$$x(t, \gamma) \leq \max\{0, Q\} + \max_{u \in [q, 0]} f(u) < \max\{0, Q\} + \max_{u \in [\kappa, 0]} f(u).$$

Ahora demostraremos que esta desigualdad es cierta para todo $t > 1$, supongamos que existe un número $\tau' = \inf\{t > 1 \mid x(t, \gamma) = \max\{0, Q\} + \max_{u \in [\kappa, 0]} f(u)\}$.

Luego, si integramos la ecuación (2.1.1) sobre el intervalo $(\tau' - 1, \tau')$ se obtiene

$$\max\{0, Q\} + \max_{u \in [\kappa, 0]} f(u) - x(\tau' - 1, \gamma) = \int_{\tau'-1}^{\tau'} f(x(s-1)) ds < \max_{u \in [\kappa, 0]} f(u),$$

lo que a su vez implica la desigualdad $x(\tau' - 1, \gamma) > 0$ y por lo tanto $x(t, \gamma)$ es decreciente en $t = \tau'$, contradiciendo la definición de τ . Finalmente se tiene que $x(t, \gamma) \leq \max\{0, Q\} + \max_{u \in [\kappa, 0]} f(u)$ para todo $t > -1$.

iii) Denotemos por u_n la sucesión (monótona creciente) de los ceros de $x(t, \gamma)$, procederemos por inducción.

Supongamos que $u_0 > 0$ (el primer cero de $x(t, \gamma)$) no es simple, entonces se tiene que $x'(u_0) = 0$ y por lo tanto $u_0 - 1$ es un cero de $x(t, \gamma)$ contradiciendo la definición de u_0 , además se tiene que $x(t) > 0$ para todo $t \in [u_0 - 1, u_0]$ y por lo tanto $x'(t) < 0$ para todo $t \in (u_0, u_0 + 1)$ lo que implica $u_1 - u_0 > 1$.

Por hipótesis de inducción u_0, u_1, \dots, u_k son ceros simples de $x(t, \gamma)$ y además $u_j - u_{j-1} > 1$ para todo $j = \{0, 1, 2, \dots, k\}$. Ahora tenemos que demostrar que u_{k+1} también es un cero simple y la desigualdad $u_{k+1} - u_k > 1$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x(t, \gamma) > 0$ para todo $t \in (u_{k-1}, u_k)$, esto implica las desigualdades $x'(t) < 0$ para todo $t \in (u_k, u_k + 1)$ y $u_{k+1} - u_k > 1$.

Si suponemos que u_{k+1} no es una raíz simple, entonces con razonamientos similares a los anteriores se tiene que $u_{k+1} - 1 \in (u_k, u_{k+1})$ también es raíz de $x(t, \gamma)$ lo que contradice la definición de u_{k+1} . \square

La demostración del resultado principal se realizará en dos etapas consecutivas.

A) Se demostrará la existencia de una cota superior M y una cota inferior m que no dependen de las condiciones iniciales, tales que

$$m \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t, \gamma) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t, \gamma) \leq M.$$

Esto requerirá revisar algunos conceptos y resultados de la teoría de sistemas dinámicos.

- B) Se demostrará que si $-f'(0) \in (0, 3/2]$, entonces $m = M = 0$. Esto requerirá introducir funciones auxiliares y demostrar algunos lemas preparatorios.

2. Existencia de atractor global compacto

Dada una condición inicial $\gamma \in C$, sabemos que la aplicación $F(t)\gamma(s) = x(t+s, \gamma)$ con $s \in [-1, 0]$, define un semiflujo continuo sobre C . Aquí $x(t, \gamma)$ es la solución de la ecuación (2.1.1) con la condición inicial

$$x(s, \gamma) = \gamma(s), \quad s \in [-1, 0].$$

El objetivo de esta sección consiste en demostrar la existencia de un conjunto $A \subset C$ invariante ($F(t)A = A$ para $t \geq 0$) y compacto tal que para toda condición inicial $\gamma \in C$ se cumple que $d(F(t)\gamma, A) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$, donde d es la distancia entre dos conjuntos cualesquiera $A, B \subset C$ definida como $d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\|$.

A continuación escribiremos algunas definiciones y resultados de la teoría de sistemas dinámicos (semiflujos), la referencia básica será el libro de Hale [6, Capítulo 3].

DEFINICION 2.2. Dado un semiflujo continuo $F(t) : C \rightarrow C$, se dice que un conjunto $D \subset C$ atrae al conjunto E cuando $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(F(t)E, D) = 0$.

DEFINICION 2.3 (semiórbita positiva de un conjunto). Dado un conjunto $E \subset C$, la **semiórbita positiva** de E bajo $F(t)$ se define como

$$(2.2.1) \quad \Omega^+(E) = \{F(t)E, t \geq 0\}.$$

DEFINICION 2.4 (conjunto ω -límite de un conjunto). Para todo conjunto $B \subset C$, el conjunto ω -límite se define como

$$(2.2.2) \quad \omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \text{Cl} \bigcup_{t \geq s} F(t)B$$

DEFINICION 2.5. Un semiflujo $F(t)$ es **condicionalmente completamente continuo** si existe $t_1 > 0$ tal que para todo $t \geq t_1$ y todo conjunto acotado $B \subset C$ para el cual $\{F(s)B, 0 \leq s \leq t\}$ es acotado, se tiene que $F(t)(B)$ es precompacto. Un semiflujo $F(t)$, $t \geq 0$, es **completamente continuo** si es condicionalmente completamente continuo y para todo $t \geq 0$, el conjunto $\{F(s)B, 0 \leq s \leq t\}$ es acotado si B es acotado.

DEFINICION 2.6. Un semiflujo es **puntualmente disipativo** si existe un conjunto acotado $B \subset C$ que atrae a todo punto de C .

DEFINICION 2.7. Un conjunto $A \subset C$ invariante bajo un semiflujo $F(t)$ es **maximal compacto invariante** si todo conjunto compacto e invariante bajo el semiflujo está contenido en A .

DEFINICION 2.8. Un conjunto invariante A es un **atractor global** si A es un conjunto maximal compacto e invariante que atrae a todo conjunto acotado $B \subset C$.

El siguiente resultado, que enunciamos sin demostrar (consultar [6, sección 3.4]) permitirá demostrar que el semiflujo asociado a la ecuación (2.1.1) tiene un atractor global.

TEOREMA 2.2. Si existe $t_1 \geq 0$ tal que el semiflujo $F(t) : C \rightarrow C$ es completamente continuo para $t > t_1$ y es puntualmente disipativo, entonces existe un atractor global A .

TEOREMA 2.3. El semiflujo asociado a la ecuación (2.1.1) tiene un atractor global A .

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 2.2 basta con demostrar que el semiflujo asociado a la ecuación (2.1.1) es completamente continuo y puntualmente disipativo.

Por el lema 2.1 (parte ii) se tiene que para todo conjunto acotado B , la órbita $\{F(t)B, t \geq 0\}$ es un conjunto uniformemente acotado, definiremos

$$K = \sup\{|\psi| \mid \psi \in \Omega^+(B)\}.$$

Además, el conjunto $\{F(t)B, t \geq 1 = t_1\}$ es equicontinuo, en efecto, si escogemos cualquier $\gamma \in B$ se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / [\max_{|u| < K} |f(u)|]$ tal que $|s' - s''| < \delta$ implica $|F(t)\gamma(s') - F(t)\gamma(s'')| < \varepsilon$. Finalmente, por teorema de Arzelá–Ascoli se tiene que $\{F(t)B, t \geq 1\}$ es precompacto. Por lo tanto, el semiflujo $F(t)$ es completamente continuo.

Ahora demostraremos que el semiflujo $F(t)$ es puntualmente disipativo. Escogemos cualquier función $\gamma \in C$ y en primer lugar suponemos que $x(t, \gamma)$ no cambia de signo a partir de cierto número positivo, entonces por el lema 2.1 se verifica que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, \gamma) = 0$ y por lo tanto para todo $\delta > 0$ existe $T(\delta, \gamma) > 0$ tal que $\|F(t)\gamma\| < \delta$ para todo $t > T(\delta, \gamma)$.

En segundo lugar supondremos que el conjunto de los cambios de signo de $x(t, \gamma)$ no es acotado y tomaremos una sucesión creciente de mínimos locales t_k de $x(t, \gamma)$ tales que $x'(t_k, \gamma) = x(t_k - 1, \gamma) = 0$. Luego, integrando la ecuación (2.1.1) sobre el intervalo $(t_k - 1, t_k)$ se verifica que para todo mínimo local

$$x(t_k) = \int_{t_k-2}^{t_k-1} f(x(u))du > \alpha$$

Ahora demostraremos que $\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t, \gamma) \geq \alpha$, si suponemos lo contrario esto implica que existe algún número $T_0 > 1 + t_0$ tal que $x(T_0, \gamma) = \alpha$, como T_0 no puede ser un mínimo y $x(t, \gamma)$ no puede ser creciente en T_0 se tiene que $x(t, \gamma)$ es monotonamente decreciente en $(T_0, +\infty)$ obteniendo una contradicción con el lema 2.1 (parte i). Por lo tanto $\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t, \gamma) \geq \alpha$.

Ahora construimos una sucesión creciente de máximos locales t'_k de $x(t, \gamma)$ tales que $x'(t'_k, \gamma) = x(t'_k - 1, \gamma) = 0$ luego, integrando la ecuación (2.1.1) sobre el intervalo $(t'_k - 1, t'_k)$ se verifica que para todo máximo local

$$x(t'_k) = \int_{t'_k-2}^{t'_k-1} f(x(u))du < \max_{u \in [\alpha, 0]} f(u) = \lambda.$$

Ahora demostraremos que $\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t, \gamma) \leq \lambda$, si suponemos lo contrario esto implica que existe algún número $T'_0 > 1 + t'_0$ tal que $x(T'_0, \gamma) = \lambda$, como T'_0 no puede ser un máximo local y $x(t, \gamma)$ no puede ser decreciente en T'_0 se tiene que $x(t, \gamma)$ es monotonamente creciente en $(T'_0, +\infty)$ obteniendo una contradicción con el lema 2.1 (parte i). Por lo tanto $\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t, \gamma) \leq \lambda$.

Finalmente, tenemos que la bola de centro cero y radio $r = \max\{|\alpha|, \lambda\}$ atrae a todo punto $\gamma \in C$. \square

Definamos $m = \min_{\beta \in \mathcal{A}} \min_{t \in [-1, 0]} \beta(t)$ y $M = \max_{\beta \in \mathcal{A}} \max_{t \in [-1, 0]} \beta(t)$. Por lo tanto para demostrar el teorema 2.1 será suficiente demostrar la igualdad $M = m = 0$ cuando $-f'(0) \in (0, 3/2]$. En lo sucesivo supondremos las desigualdades $m < 0 < M$ y obtendremos una contradicción.

3. Lemas preparatorios

Definamos los conjuntos

$$K_{a,b} = \{y \in C^3(\mathbb{R}) : y \text{ satisface } \mathbf{(H1)}, \mathbf{(H2)}, y'(0) = a, y''(0) = 2b > 0, \\ (Sy)(x) \leq 0 \text{ para todo } x \neq x^*\}$$

Consideremos también la función racional lineal $r: (ab^{-1}, \infty) \rightarrow (-a^2b^{-1}, \infty)$ definida por

$$r(x, a, b) = \frac{a^2x}{a - bx},$$

Sea $K_{a,b}^+$ (respectivamente, $K_{a,b}^-$) la restricción de los elementos de $K_{a,b}$ al intervalo $(0, +\infty)$ (respectivamente a $(ab^{-1}, 0]$). Denotaremos por r^+ y r^- las restricciones de $r(\cdot, a, b)$ a los intervalos $[0, +\infty)$ y $(ab^{-1}, 0]$ respectivamente. Las siguientes propiedades son elementales:

- i) $r'''(x) < 0$ para todo x .
- ii) La función inversa de $r(x)$ es $r^{-1}(x, a, b) = \rho(x, a, b) = ax/(a^2 + bx)$.
- iii) La ecuación $r(x, a, b) = -x$ tiene dos soluciones: $x_1 = 0$ y $x_2 = (a + a^2)/b$.
- iv) $r^+ \in K_{a,b}^+$, $r^- \in K_{a,b}^-$, $(Sr)(x) \equiv 0$ y $r(x, a, b) \rightarrow -a^2b^{-1}$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

El próximo lema tendrá un papel crucial en el resto de la demostración.

LEMA 2.2. *Para todo $y \in K_{a,b}$ tal que $(Sy)(x) < 0$ para $x \neq x^*$, se tiene $r(x, a, b) < y(x)$ cuando $x > 0$. Además $r(x, a, b) > y(x)$ para todo $x \in (ab^{-1}, 0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $f''(0) > 0$ basta considerar los casos **a)** y **b)** cuando f es monótona y los casos **d)**, **g)** y **h)** cuando f tiene un punto crítico.

Dado $y \in K[a, b]$ cualquiera, definimos $Y(x) = y''(x)/y'(x)$ y notemos que $(Sy)(x) = Y'(x) - (1/2)Y^2(x)$. Como y tiene derivada Schwarziana negativa verificamos que $Y(x)$ satisface la desigualdad diferencial (tipo Riccati) $Y'(x) - (1/2)Y^2 < 0$.

Sean $r(x) = r(x, a, b)$ y $R = r''/r'$, como r es una función racional tenemos que $(Sr)(x) = R'(x) - (1/2)R^2(x) = 0$. Así se obtiene un sistema

$$Y'(x) < (1/2)Y^2(x), \quad R(0) = Y(0), \\ R'(x) = (1/2)R^2(x), \quad R(0) = Y(0).$$

Usando resultados de comparación (revisar por ejemplo [12, Teorema 1.10.1]), se obtiene que $R(x) > Y(x)$ (en los casos **a)**, **b)** y **d)**) para todo $x > 0$. Ahora, integrando R e Y sobre el intervalo $(0, x)$, se obtiene la desigualdad $r'(x) < y'(x)$. Integrando nuevamente r' e y' sobre el intervalo $(0, x)$, se obtiene la desigualdad $r(x) < y(x)$ para todo $x > 0$. En los casos **g)** y **h)** se emplean los mismos argumentos para demostrar la desigualdad $r(x) < y(x)$ para todo $x \in (0, x^*)$. Ahora, como r es estrictamente decreciente y la función y alcanza su mínimo en x^* , resulta clara la desigualdad $r(x) < y(x)$ cuando $x \geq x^*$.

Ahora, los argumentos previos nos permiten probar que $r'(x) < y'(x)$ y $r(x) > y(x)$ para todo $x \in (ab^{-1}, 0)$ en los casos **a)** y **h)**, donde y no tiene puntos de inflexión negativos.

La demostración en los casos **b)** y **g)** (un punto de inflexión negativo) es levemente distinta si el punto de inflexión c_1 de y pertenece al intervalo $(ab^{-1}, 0)$. En este caso, podemos emplear los argumentos anteriores para demostrar las desigualdades $r'(x) < y'(x)$ y $r(x) > y(x)$ para todo $x \in [c_1, 0)$. Luego, por argumentos de convexidad,

$$r(x) > r(c_1) + r'(c_1)(x - c_1) > y(c_1) + y'(c_1)(x - c_1) > y(x)$$

para todo $x \in (ab^{-1}, c_1)$.

Finalmente, el caso **d)** (dos puntos de inflexión negativos) puede ser estudiado análogamente tomando en cuenta que r es estrictamente decreciente sobre $(ab^{-1}, 0)$, mientras que y alcanza su máximo en x^* . \square

COROLARIO 2.1. *Si f verifica las hipótesis **(H)** y $f''(0) < 0$, entonces f es acotada en \mathbb{R} .*

DEMOSTRACIÓN. Se tiene por hipótesis que f está acotada inferiormente, sólo falta demostrar la acotación superior.

Si la función f tiene un máximo local (caso **e)**) la demostración es obvia. En los casos restantes (casos **c)** y **f)**) el lema 1.6 implica que $f''(x) < 0$ para todo $x < 0$.

Es fácil verificar que la función $-f(-x) \in K_{[f'(0), -f''(0)/2]}$ y por el lema 2.2 se tiene que para todo $x > 0$ se verifica

$$-f(-x) > \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f'(0)^2 x}{2f'(0) + f''(0)x} = \frac{2f'(0)^2}{f''(0)}$$

y ahora es claro que f también es acotada superiormente. \square

4. Funciones auxiliares

A la función racional $r(x, a, b)$ le asignaremos los valores $a = f'(0)$, $2b = f''(0) > 0$, denotemos $\mu = ab^{-1} = 2f'(0)/f''(0)$ y con esto se define la función $r : (\mu, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$(2.4.1) \quad r(x) = r(x, f'(0), f''(0)/2) = \frac{2f'(0)^2 x}{2f'(0) - f''(0)x}.$$

También definimos las funciones continuas $A, B : (\mu, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $D : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$(2.4.2) \quad A(x) = x + r(x) + \frac{1}{r(x)} \int_x^0 r(s) ds \quad \text{para } x \neq 0 \quad \text{y} \quad A(0) = 0.$$

$$(2.4.3) \quad B(x) = \frac{1}{r(x)} \int_{-r(x)}^0 r(s) ds \quad \text{para } x \neq 0, \quad \text{y} \quad B(0) = 0.$$

$$(2.4.4) \quad D(x) = \begin{cases} A(x) & \text{si } r(x) < -x, \\ B(x) & \text{si } r(x) \geq -x. \end{cases}$$

A partir de la función $r(x, a, b)$ y definiendo $\nu = 2A'(0)/A''(0)$ se construye la función racional lineal $R : (\nu, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$(2.4.5) \quad R(x) = r(x, A'(0), A''(0)/2) = \frac{2A'(0)^2 x}{2A'(0) - A''(0)x}.$$

Notemos que $A'(0) = f'(0) + 1/2$, $A''(0) = f''(0)(1 + (6f'(0))^{-1})$.

Es sencillo verificar que $f'(0) < -1/6$ implica $(\nu, +\infty) \subset (\mu, +\infty)$ y que $A(x_2) = B(x_2)$, donde $r(x_2) = -x_2 < 0$. También $B'(0) = -(r'(0))^2/2 = -(f'(0))^2/2$. En los siguientes lemas se demostraran otras propiedades de las funciones A , B , D y R .

LEMA 2.3. Si $f'(0) < -1$ entonces $A'(x) < 0$ y $(SA)(x) < 0$ para todo $x \in (\mu, x_2)$

DEMOSTRACIÓN. Como $r(x_2) = -x_2$, la hipótesis $f'(0) < -1$ implica que $x_2 > 0$ y $-xr(x) < r^2(x)$ para todo $x \in (\mu, x_2) \setminus 0$. Entonces

$$\int_x^0 r(t)dt \leq -xr(x) < r^2(x) \quad \text{y} \quad A'(x) = r'(x) \left(1 - \frac{\int_x^0 r(t)dt}{r^2(x)} \right) < 0, \quad x \neq 0.$$

Usando la hipótesis, también se tiene que $A'(0) = r'(0) + 1/2 < 0$ y luego, integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} A(x) &= r(x) + \frac{xr(x) + \int_x^0 r(t)dt}{r(x)} = r(x) + \frac{xr(x) + \int_{r(x)}^0 v d\rho(v)}{r(x)} \\ &= r(x) + \frac{1}{r(x)} \int_0^{r(x)} \rho(v)dv = G(r(x)), \end{aligned}$$

donde $r^{-1}(v) = \rho(v)$ y $G(z) = z + \int_0^1 \rho(vz)dv$.

Por un lado, el lema 1.4 implica que

$$(SA)(x) = (SG)(r(x))(r'(x))^2 + (Sr)(x) = (SG)(r(x))(r'(x))^2$$

y por lo tanto, sólo hay que demostrar que $(SG)(r(x)) < 0$. Por otro lado, $A'(x) < 0$ sí y sólo sí $G'(r(x)) > 0$, en consecuencia bastará demostrar que $(SG)(r(x)) < 0$ cuando $G'(r(x)) > 0$. Tomando en cuenta que $\rho'''(z) < 0$ cuando $z = r(x)$ y considerando $z = r(x)$, tenemos que

$$G'''(z) = \int_0^1 v^3 \rho'''(vz)dv < 0,$$

lo que implica

$$SG(r(x)) = \frac{G'''(z)}{G'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{G''(z)}{G'(z)} \right)^2 < 0.$$

□

LEMA 2.4. Si $f'(0) < -1$ entonces $(A(x) - R(x))x > 0$ para todo $x \in (\nu, x_2) \setminus 0$.

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que $R(x) = r(x, A'(0), A''(0)/2)$ y aplicar los lemas 2.2 y 2.3. □

LEMA 2.5. $m > D(M)$ y $m > r(-r(M)/2)$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $r(M) \leq -M$ (es decir, $D(M) = A(M)$), entonces se tiene que el número $t_1 = M/r(M) \in [-1, 0]$ y la función $x(t) = r(M)t$ ($t \in [t_1, t_1 + 1]$) es solución del problema de valores iniciales

$$(2.4.6) \quad x'(t) = r(x(t-1)), \quad x(s) = M, \quad s \in [t_1 - 1, t_1]$$

Sea $z(t) = z(t, \beta)$ ($\beta \in \mathcal{A}$) una solución de la ecuación (2.1.1) tal que $z(1) = m$ y $z(0) = 0$. Es claro que $M = x(t) \geq z(t)$ para todo $t \in [t_1 - 1, t_1]$. Además, demostraremos que $x(t) \geq z(t)$ para todo $t \in [t_1, 0]$.

Si suponemos lo contrario, se tiene la existencia de $t_* \in [t_1, 0)$ tal que $x(t_*) = z(t_*)$ y $x(t) \geq z(t)$ para todo $t \in [t_1 - 1, t_*]$. Además demostraremos que se verifica la desigualdad

$$(2.4.7) \quad z'(t) > x'(t) \quad \text{para todo } t \in [t_*, t_* + 1].$$

Distinguiremos dos casos: si $z(t-1) > 0$, por el lema 2.2 se obtienen las desigualdades $x'(t) = r(x(t-1)) \leq r(z(t-1)) < f(z(t-1)) = z'(t)$. En otro caso se tiene que $z(t-1) \leq 0$, entonces $z'(t) = f(z(t-1)) \geq 0 > r(x(t-1)) = x'(t)$.

Integrando sobre el intervalo $(t_*, 0)$, se sigue de la desigualdad (2.4.7) que $z(t_*) < x(t_*)$ y se obtiene una contradicción.

Entonces $x(t) \geq z(t)$ para $t \in [t_1, 0)$, luego se obtienen las desigualdades

$$\begin{aligned} m = z(1) &= \int_0^1 f(z(s-1)) ds > \int_0^1 r(x(s-1)) ds = \\ &= \int_{-1}^{t_1} r(M) ds + \int_{t_1}^0 r(x(u)) du = M + r(M) + \int_{t_1}^0 r(r(M)u) du = A(M). \end{aligned}$$

En el caso general (no necesariamente $r(M) \leq -M$), probaremos la desigualdad

$$(2.4.8) \quad f(z(t)) > r(r(M)t), \quad \text{para todo } t \in (-1, 0).$$

En primer lugar, se demostrará que $z'(t) > r(M)$ para todo $t \in (-1, 0)$. Si $z(t-1) > 0$ entonces, por el lema 2.2, $z'(t) = f(z(t-1)) > r(z(t-1)) \geq r(M)$. En el caso $z(t-1) \leq 0$, también tenemos lo mismo: $z'(t) = f(z(t-1)) \geq 0 > r(M)$. Luego

$$z(t) = - \int_t^0 z'(s) ds < - \int_t^0 r(M) ds = r(M)t, \quad t \in (-1, 0).$$

Para obtener (2.4.8) basta notar que $f(z(t)) > r(z(t)) > r(r(M)t)$ si $z(t) > 0$ y $f(z(t)) \geq 0 > r(r(M)t)$ si $z(t) \leq 0$.

Ahora, por la desigualdad (2.4.8) se obtiene

$$m = z(1) = \int_0^1 f(z(s-1)) ds > \int_0^1 r(r(M)(s-1)) ds = B(M).$$

Finalmente, por la convexidad de r , la desigualdad de Jensen permite demostrar que

$$m > B(M) = \frac{1}{r(M)} \int_{-r(M)}^0 r(s) ds \geq r(-r(M)/2).$$

□

Como una consecuencia del lema anterior veremos que la función $r(x)$ está bien definida en $x = m$.

COROLARIO 2.2. Si $f'(0) \in [-1.5, 0)$ y $f''(0) > 0$, entonces $m > \mu$.

DEMOSTRACIÓN. Por el lema 2.5 y la monotonía de r se tiene que

$$m \geq r(-r(M)/2) > \lim_{x \rightarrow +\infty} r(-r(x)/2) = \frac{(f'(0))^3}{f''(0)(1-f'(0))}.$$

Como $f''(0) > 0$, basta notar que para todo número $f'(0) \in (-2, 0)$ se verifica la desigualdad

$$\frac{(f'(0))^3}{f''(0)(1-f'(0))} \geq \frac{2f'(0)}{f''(0)} = \mu.$$

Por lo tanto $r(m)$ está bien definido. \square

LEMA 2.6. Si $f'(0) \in [-1.5, 0)$, entonces $r(m) > M$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\theta \in \mathcal{A}$ tal que $y(t) = y(t, \theta)$ satisface $y(1) = M$ y además $y'(1) = y(0) = 0$. En primer lugar veáse que cuando $y(s) \geq 0$ se cumple que $f(y(s)) \leq 0 < r(m)$. En el caso $y(s) < 0$ se verifican las desigualdades $f(y(s)) < r(y(s)) \leq r(m)$. Luego

$$M = y(1) = \int_0^1 f(y(s-1)) ds < \int_0^1 r(m) ds = r(m).$$

\square

5. Caso A: $-f'(0) \in (0, \sqrt[3]{2})$

Obviamente, en toda esta sección supondremos que $-f'(0) \in (0, \sqrt[3]{2})$ si es que explícitamente no se dice lo contrario. Los resultados anteriores permitirán una sencilla demostración del Teorema 2.1

5.1. Demostración del Teorema 2.1.

DEMOSTRACIÓN. Obtendremos una contradicción si suponemos que $m < 0 < M$. Para esto, definamos la función creciente $\sigma : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ como

$$\sigma(x) = r \circ r(-r(x)/2).$$

Notese que un razonamiento similar al efectuado en la demostración del corolario 2.2 muestra que para todo $x \geq 0$ se verifica que

$$r(-r(x)/2) > \lim_{x \rightarrow +\infty} r(-r(x)/2) = \frac{(f'(0))^3}{f''(0)(1-f'(0))} \geq \frac{2f'(0)}{f''(0)} = \mu$$

cuando $-f'(0) \in (0, 2)$ y por lo tanto σ está bien definida en $[0, +\infty)$.

Caso i) $f''(0) > 0$:

Por la monotonía decreciente de r , los lemas 2.5, 2.6 y el corolario 2.2 se obtienen las desigualdades $M < r(m) \leq r(r(-r(M)/2)) = \sigma(M)$.

Ahora veremos que $\sigma(M) < M$ cuando $M > 0$: notemos que σ es una función racional lineal, tiene una asíntota horizontal, además tiene un punto fijo en el origen y es cóncava en $[0, +\infty)$. Esto implicará en virtud de $-f'(0) \in (0, \sqrt[3]{2})$ la desigualdad $\sigma(x) < |f'(0)|^3/2|x < x$ para todo $x > 0$ y por lo tanto se tiene que $\sigma(M) < M$.

De las desigualdades $M \leq \sigma(M) < M$ se concluye que $M = \sigma(M) = 0$ además, por el lema 2.5 se concluye que $0 > m \geq D(M) = 0$ y por lo tanto $M = m = 0$, la contradicción.

Caso ii) $f''(0) < 0$:

Con el cambio de variable $y = -x$ la ecuación (2.1.1) se transforma en la ecuación

$$(2.5.1) \quad y'(t) = g_1(y(t-1)), \quad g_1(x) = -f(-x).$$

Es fácil notar que $g''(0) > 0$ y el corolario 2.1 implica que g cumple las hipótesis **(H)**, por lo que podemos aplicar la primera parte de la demostración a la ecuación (2.5.1) y considerarla como en el Caso i) si es que suponemos $m < 0 < M$.

Caso iii) $f''(0) = 0$:

En este caso se tiene que $x = 0$ es un punto de inflexión y $(f(x) - f'(0)x)x > 0$ si $x \neq 0$. Luego, usando la función $r(x) = f'(0)x$ en vez de la función racional

definida para $f''(0) > 0$, se demuestra con similares argumentos a los usados en el lema 2.5 que $m > (f'(0) + 1/2)M$ y $M < (f'(0) + 1/2)m$ si $m < 0 < M$, de hecho, estas desigualdades son los casos límite de $m > A(M)$ y $M < A(m)$. Finalmente, $M > 0$ y $-f'(0) \in (0, -1.5]$ implican que $M < (f'(0) + 1/2)^2 M \leq M$ obteniendo una contradicción. \square

6. Caso B: $-f'(0) \in [\sqrt[3]{2}, 3/2]$

Obviamente, en toda esta sección supondremos que $-f'(0) \in [\sqrt[3]{2}, 3/2]$ si es que explícitamente no se dice lo contrario.

LEMA 2.7. Si $-f'(0) \in [1.04, 1.6]$ entonces $B(x) > R(x)$ para todo $x > x_2$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar notemos que $B(x) = \tilde{B}(-r(x))$ y $R(x) = \tilde{R}(-r(x))$, donde

$$\tilde{B}(u) = \int_0^1 r(zu) du = \frac{\zeta}{u\theta} \left(u - \frac{1}{\theta} \ln(1 + \theta u) \right),$$

y

$$\tilde{R}(u) = R(\rho(-u)) = \frac{-2(\zeta + 1/2)^2 u}{(2\zeta + 1)\zeta + 2/3\theta u},$$

con $\zeta = f'(0)$, $\theta = -f''(0)/(2f'(0)) > 0$ y $\rho(x) = r^{-1}(x)$. Entonces $B(x) - R(x) > 0$ para $x \in (x_2, +\infty)$ si y sólo si $\tilde{B}(u) - \tilde{R}(u) > 0$, $u = r(x)$ con $\theta u + \zeta = s \in [-1, 0]$. Finalmente, $\tilde{B}(u) - \tilde{R}(u) > 0$ es equivalente a la desigualdad

$$\frac{\zeta}{s - \zeta} (s - \zeta - \ln(1 + s - \zeta)) + \frac{2(\zeta + 1/2)^2 (s - \zeta)}{(2\zeta + 1)\zeta + (2/3)(s - \zeta)} > 0,$$

donde $s \in [-1, 0]$ y $-\zeta \in [1.04, 1.6]$. \square

COROLARIO 2.3. Si $-f'(0) \in [1.04, 1.6]$, entonces $D(x) > R(x)$ para todo $x > 0$

DEMOSTRACIÓN. Cuando $x \in (0, x_2)$ se tiene que $D(x) = A(x) > R(x)$ por el lema 2.4 y en el caso de que $x \geq x_2$ se tiene que $D(x) = B(x) > R(x)$ por el lema 2.7. \square

COROLARIO 2.4. Si $f'(0) \in [-1.5, -1.04]$ entonces $m > \nu$.

DEMOSTRACIÓN. Como $-A(0) = -(f'(0) + 0.5) \leq 1$ para $f'(0) \geq 3/2$, por el lema 2.5 y el corolario 2.3 se tienen las desigualdades

$$m > D(M) > R(M) \geq R(+\infty) = -A'(0)\nu \geq \nu.$$

Por lo tanto $R(m)$ está bien definida. \square

LEMA 2.8. Si $-f'(0) \in [1.04, 1.5]$, entonces $M < R(m)$.

DEMOSTRACIÓN. Si $-f'(0) > 1$ entonces $r(m) > -m$, de lo cual se sigue que $t_2 = m(r(m))^{-1} \in (-1, 0]$. Luego, $x(t) = r(m)t$ con $t \in [t_2, t_2 + 1]$, es la solución del problema de valores iniciales $x(s) = m$, $s \in [t_2 - 1, t_2]$ para la ecuación (2.4.6). Ahora solo basta argumentar de igual forma que en el lema 2.5 para obtener la desigualdad $M < A(m)$. Finalmente, por el lema 2.4 y corolario 2.4 se obtienen las desigualdades $M < A(m) < R(m)$ donde $f'(0) \in [-1.5, -1.04]$. \square

6.1. Demostración del Teorema 2.1.

DEMOSTRACIÓN. Obtendremos una contradicción si suponemos que $m < 0 < M$, definamos la función creciente $H : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ como

$$H(x) = R \circ R(x)$$

En efecto, con un razonamiento similar al efectuado en la demostración del corolario 2.4 se tiene que cuando $f'(0) \in [-1.5, -1.04]$ se verifica la desigualdad $0 > R(x) \geq R(+\infty) = -A'(0)\nu \geq \nu$ para todo $x \geq 0$ y por lo tanto la función H está bien definida en $[0, +\infty)$.

Caso i) $f''(0) > 0$:

Por la monotonía decreciente de R , los lemas 2.5, 2.8 y el corolario 2.2 se tiene la desigualdad $M < H(M)$.

Como $H(x) \leq x$ para todo $x > 0$ siempre y cuando $H'(0) = (R'(0))^2 \leq 1$ (o bien $-f'(0) \in (0, 3/2]$), podemos concluir que $H(M) \leq M$.

De las desigualdades $M < H(M) \leq M$ se concluye que $M = H(M) = 0$, después, por el lema 2.5 se tiene que $m > 0$ y se obtiene una contradicción.

Caso ii) $f''(0) < 0$:

con el cambio de variable $y = -x$ la ecuación 2.1.1 se transforma en la ecuación

$$(2.6.1) \quad z'(t) = g_1(z(t-1)), \quad g_1(x) = -f(-x).$$

Es fácil notar que $g''(0) > 0$ y el corolario 2.1 implica que g cumple las hipótesis **(H)**, por lo que podemos aplicar la primera parte de la demostración a la ecuación (2.6.1) y considerarla como en el Caso i) si es que suponemos $m < 0 < M$.

Caso iii) $f''(0) = 0$:

En este caso se tiene que $x = 0$ es un punto de inflexión y $(f(x) - f'(0)x)/x > 0$ si $x \neq 0$. Luego, usando la función $r(x) = f'(0)x$ en vez de la función racional definida para $f''(0) > 0$, se demuestra con similares argumentos a los usados en el lema 2.5 que $m > (f'(0) + 1/2)M$ y $M < (f'(0) + 1/2)m$ si $m < 0 < M$, de hecho, estas desigualdades son los casos límite de $m > A(M)$ y $M < A(m)$. Finalmente, $M > 0$ y $-f'(0) \in (0, -1.5]$ implican que $M < (f'(0) + 1/2)^2 M \leq M$ obteniendo una contradicción. \square

CAPÍTULO 3

EJEMPLOS

1. Modelos de población

Veremos algunos modelos biológicos de dinámica de poblaciones que generalizan la ecuación (1.2.2) en tanto consideran casos donde la tasa de crecimiento poblacional *per cápita* $P'(t)/P(t)$ no depende linealmente del tamaño de la población $P(t-h)$ (hipótesis de Verhulst–Hutchinson) y que sin embargo pueden transformarse en ecuaciones tipo Wright.

1.1. Modelo Food–Limited. En 1963 el ecólogo F.E. Smith, al estudiar el crecimiento de la población de la mosca *Daphina Magna* observó que la tasa de crecimiento *per cápita* $P'(t)/P(t)$ no dependía linealmente de $P(t)$. Basándose en sus datos experimentales, sugirió que la relación entre $P'(t)/P(t)$ y $P(t)$ venía regulada por la función

$$h(x) = \frac{k-x}{k+cp x}, \quad k, c, p > 0.$$

Lo que da lugar, si es que consideramos los efectos del retardo, a la siguiente generalización de la ecuación (1.2.2)

$$(3.1.1) \quad y'(t) = py(t) \frac{k-y(t-h)}{k+cpy(t-h)}, \quad y(s) = \gamma(s) > 0, \quad s \in [-h, 0],$$

que se conoce con el nombre de *food limited model* y ha sido estudiada por Gopalsamy, Kulenovic y Ladas (consultar [4]). Se puede demostrar que toda solución de la ecuación (3.1.1) verifica la propiedad $y(t, \gamma) > 0$ para todo $t > -h$. En efecto, si integramos la ecuación (3.1.1) sobre el intervalo $[0, t] \subset [0, 1]$ se verifica

$$y(t) = y(0) \exp \left(p \int_0^t \frac{k - \gamma(s-h)}{k + cp\gamma(s-h)} ds \right)$$

y por lo tanto se tiene que $y(t) > 0$ para todo $t \in [-h, 1]$ y luego procedemos recursivamente.

Ahora, con el cambio de variable $y = k(1+z)$ se obtiene la ecuación

$$(3.1.2) \quad z'(t) = -p(1+z(t)) \frac{z(t-h)}{1+cp(1+z(t-h))}, \quad z(s) = \gamma(s) > -1, \quad s \in [-h, 0],$$

notemos que cuando $c = 0$ se tiene la ecuación (1.2.3).

Con el cambio de variable $x(t) = -\ln(1+z(th))$ podemos transformar la ecuación (3.1.2) en la ecuación tipo Wright

$$(3.1.3) \quad x'(t) = \frac{ph[e^{-x(t-1)} - 1]}{1 + cpe^{-x(t-1)}}.$$

En efecto, la función

$$f(x) = \frac{ph[e^{-x} - 1]}{1 + cpe^{-x}}$$

verifica trivialmente **(H1)** y **(H2)**, además $f(x)$ es siempre decreciente y tiene un punto de inflexión en $x_a = \ln(cp)$ (cuando $cp < 1$ se tiene el caso **b**) y cuando $cp > 1$ se tiene el caso **c**). Como f es la composición de una función racional lineal (derivada schwarziana nula) con e^{-x} (cuya derivada schwarziana es $-1/2$), el lema 1.4 implica que $(Sf)(x) < 0$.

Gopalsamy, Kulenovic y Ladas [4] demuestran que si $ph < e^{-ph}$ entonces la solución $z(t) \equiv 0$ de la ecuación (3.1.2) es globalmente atractiva.

So y Yu [19] mejoran la cota de estabilidad global y demuestran que si $ph \leq \frac{3}{2}$ entonces la solución $z(t) \equiv 0$ de la ecuación (3.1.2) es globalmente atractiva.

Por otro lado, el teorema 2.1 indica que la desigualdad $ph \leq \frac{3}{2}(1 + cp)$ es condición suficiente para que la solución $x(t) \equiv 0$ de la ecuación (3.1.3) sea un atractor global, con lo cual se mejoran las cotas superiores de estabilidad obtenidas en [4] y [19].

Una generalización de la ecuación (3.1.1) ha sido estudiada por Qian [16]

$$(3.1.4) \quad y'(t) = py(t) \frac{k - y^n(t-h)}{k + cpy^n(t-h)}, \quad y(s) = \gamma(s) > 0, \quad s \in [-h, 0],$$

donde $c, h > 0$ y $n \geq 2$.

Con razonamientos similares al caso anterior se puede demostrar que todas las soluciones de la ecuación (3.1.4) son positivas, Luego el cambio de variable $z(t) = -\ln y(th)$ transforma la ecuación (3.1.4) en

$$z'(t) = ph \frac{e^{-nz(t-1)} - k}{k + cpe^{-nz(t-1)}},$$

finalmente, con el cambio de variable $nz = nx - \ln k$ se obtiene la ecuación tipo Wright

$$(3.1.5) \quad x'(t) = ph \frac{e^{-nx(t-1)} - 1}{1 + cpe^{-nx(t-1)}}.$$

Qian [16] (considerando el caso autónomo) demuestra que la desigualdad $\frac{nph}{1+cp} \leq 1$ es condición suficiente para que la solución $y(t) \equiv \sqrt[n]{k}$ de la ecuación (3.1.4) sea globalmente atractiva.

Por otro lado, el teorema 2.1 indica que la desigualdad $\frac{nph}{1+cp} \leq 3/2$ es condición suficiente para que la solución $x(t) \equiv 0$ de la ecuación (3.1.5) sea un atractor global, con lo que se mejora la cota de estabilidad obtenida en [16].

1.2. Modelos con efecto Allee. Los estudios del biólogo W.C. Allee [1] consideran la influencia de ciertos “efectos sociales” en el comportamiento demográfico de especies con alguna conducta cooperativa. Para estas poblaciones, la tasa de crecimiento *per cápita* $P'(t)/P(t)$ no es monótona con respecto a $P(t)$ sino que sólo se mantiene creciente hasta cierto límite, donde la población $P(t)$ alcanza un valor crítico (máximo) y a partir del cual comienza a decrecer. Este comportamiento de la tasa de crecimiento *per cápita* de la población es conocido como *efecto Allee* y el

ejemplo más sencillo viene dado por la ecuación

(3.1.6)

$$z'(t) = z(t) \left[1 - \frac{z(t-h)}{k} \right] (p + qz(t-h)), \quad z(s) = \gamma(s) > 0, \quad s \in [-h, 0],$$

donde $p > 0$ y $q > 0$, notemos que cuando $q = 0$ se obtiene una ecuación del tipo (1.2.2).

Notemos que existen dos soluciones constantes no negativas $z(t) \equiv 0$, $z(t) \equiv k$ y una solución constante negativa $z(t) \equiv -\frac{p}{q}$. Es fácil verificar que todas las soluciones del problema de valores iniciales (3.1.6) son positivas, tan solo basta integrar la ecuación sobre el intervalo $[0, t] \subset [0, 1]$ y verificar que

$$z(t) = z(0) \exp \left(\int_0^t \left[1 - \frac{\gamma(s-h)}{k} \right] (p + q\gamma(s-h)) ds \right) > 0.$$

El cambio de variable $z = ke^{-y}$, transforma la ecuación (3.1.6) en la ecuación

$$y'(t) = -[1 - e^{-y(t-h)}](p + qKe^{-y(t-h)})$$

ahora, el cambio de variable $x(t) = y(th)$ conduce a la ecuación tipo Wright

$$(3.1.7) \quad x'(t) = -h \left[p + (qk - p)e^{-x(t-1)} - qk(e^{-x(t-1)})^2 \right].$$

En efecto, la función

$$f(x) = -h \left[p + (qk - p)e^{-x} - qk(e^{-x})^2 \right]$$

verifica las hipótesis **(H1)** y **(H2)**, además $f(x)$ tiene un punto crítico positivo (mínimo) en $x^* = \ln \left(\frac{2qk}{qk-p} \right)$ y un único punto de inflexión positivo en $x_a = \ln \left(\frac{4qk}{qk-p} \right)$ cuando $qk - p > 0$ (caso **h**) y es estrictamente decreciente sin puntos de inflexión cuando $qk - p < 0$ (caso **a**). Como f es composición de una función cuadrática con la función $e^{-x} - 1$ (ambas con derivada schwarziana negativa), por el lema 1.4, f también cumple **(H3)**.

Ladas y Gopalsamy (consultar, [11, pags. 143-146]) demuestran que todas las soluciones del problema de valores iniciales (3.1.6) tienen la propiedad

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = k,$$

cuando se cumple la siguiente condición:

$$(3.1.8) \quad \left[Lk + qk(e^{Lkh} - 1) \right] e^{Lkh} h < 1,$$

donde $L = q + \frac{p}{k}$.

Por el teorema 2.1 se verifica que la desigualdad

$$(3.1.9) \quad Lkh = \left(q + \frac{p}{k} \right) hk \leq \frac{3}{2}$$

es condición suficiente para la atractividad global de la solución trivial $x(t) \equiv 0$ de la ecuación (3.1.7). Obviamente (3.1.9) es mejor que (3.1.8).

2. Otras ecuaciones

Consideremos la ecuación (consultar [5, sección 30])

(3.2.1)

$$y'(t) = -py(t-h)\{1-y(t)\}\{1+y(t)\}, \quad p > 0, \quad -1 < y(s) < 1, \quad s \in [-1, 0].$$

Notemos que toda solución del problema de valores iniciales (3.2.1) se encuentra acotada por -1 y 1 . En efecto, integrando la ecuación (3.2.1) sobre el intervalo $[0, t) \subset [0, 1]$ se tiene que

$$\frac{1+y(t)}{1-y(t)} = \frac{1+y(0)}{1-y(0)} \exp\left(-2p \int_0^t \gamma(s-h)ds\right) > 0,$$

si suponemos que existe $t_0 \in (0, 1]$ tal que $y(t_0) > 1$ o $y(t_0) < -1$ se tiene que $(1+y(t_0))/(1-y(t_0)) < 0$ obteniendo una contradicción. Luego se procede recursivamente para el caso $t > 1$.

Notemos que el cambio de variable

$$x(t) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y(th)}{1-y(th)} \right), \quad -1 < y < 1,$$

transforma la ecuación (3.2.1) en una del tipo Wright

$$(3.2.2) \quad x'(t) = -ph \tanh(x(t-1)).$$

En efecto, la función $f(x) = -\tanh(x)$ verifica trivialmente las propiedades **(H1)** y **(H2)** (caso límite de **c**) y como $f(x)$ es la composición de una función racional lineal (derivada schwarziana nula) con la función e^{-2x} (derivada schwarziana nula), se tiene por el lema 1.4 que $(Sf)(x) < 0$.

Por el teorema 2.1 se verifica que la desigualdad $ph \leq 3/2$ es condición suficiente para la atractividad global de la solución trivial $x(t) \equiv 0$ de la ecuación (3.2.2).

Para $p > 0$, consideremos la ecuación

$$(3.2.3) \quad y'(t) = -py(t-h)\{1-\sin y(t)\}\{1+\sin y(t)\}$$

con la condición inicial

$$-\frac{\pi}{2} < y(s) = \gamma(s) < \frac{\pi}{2} \quad s \in [-1, 0].$$

Notemos que toda solución del problema de valores iniciales (3.2.3) se encuentra acotada por $-\pi/2$ y $\pi/2$. En efecto, integrando la ecuación (3.2.3) sobre el intervalo $[0, t) \subset [0, 1]$ se tiene que

$$y(t) = \arctan \left(y(0) - p \int_0^t \gamma(s-h)ds \right)$$

y claramente toda solución se encuentra acotada por $-\pi/2$ y $\pi/2$ para todo $t \in [0, 1]$. El razonamiento para $t > 1$ es análogo.

El cambio de variable $x(t) = \tan(y(th))$ transforma la ecuación (3.2.3) en la ecuación tipo Wright

$$(3.2.4) \quad x'(t) = -ph \arctan(x(t-1)).$$

En efecto, la función $f(x) = -\arctan(x)$ verifica trivialmente las propiedades **(H1)** y **(H2)** (caso límite de **c**) y su derivada Schwarziana puede calcularse explícitamente

$$(Sf)(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2} < 0.$$

Por el teorema 2.1 se verifica que la desigualdad $ph \leq 3/2$ es condición suficiente para la atractividad global de la solución trivial $x(t) \equiv 0$ de la ecuación (3.2.4).

ALGUNOS RESULTADOS NUMERICOS

En esta sección se realiza un estudio numérico de las ecuaciones (3.2.2) y (3.2.4). Utilizamos el método de Runge-Kutta de cuarto orden con magnitud de paso $h = 0.1$.

1. Ecuación $x'(t) = -ph \tanh(x(t-1))$

Consideraremos la condición inicial $\gamma(s) = 3, s \in [-1, 0]$, tomaremos algunos valores de $-f'(0)$ entre 1 y 2 y construiremos los gráficos $x(t)v/st$ (izquierda) y $x'(t)v/sx(t)$ (derecha).

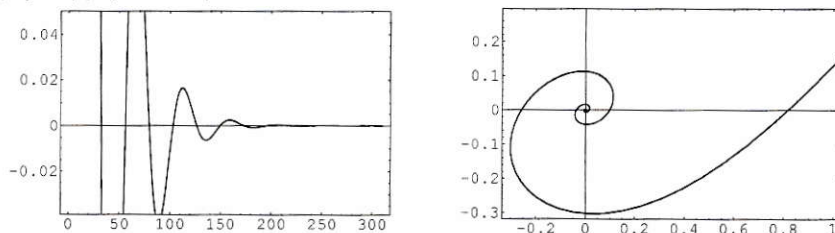


FIGURA 4.1. Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -1$

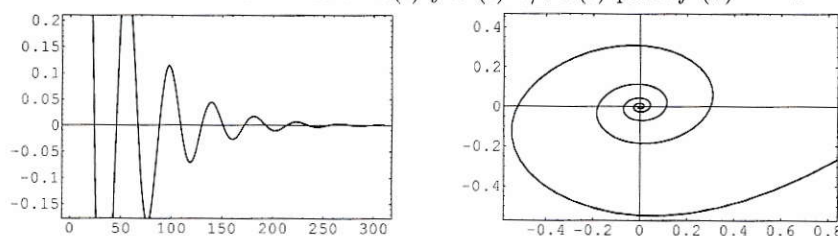


FIGURA 4.2. Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -1.3$

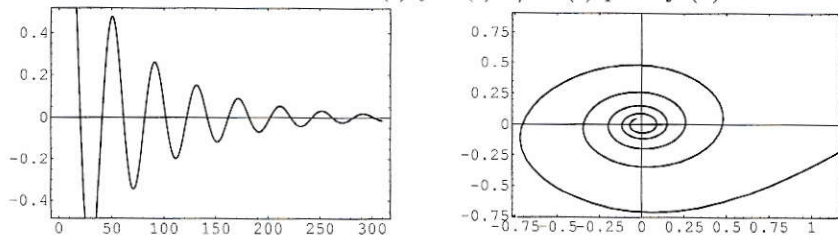
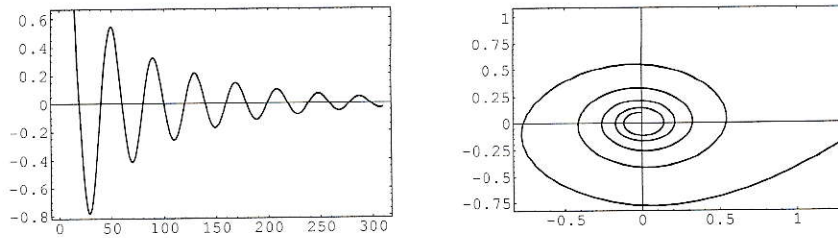
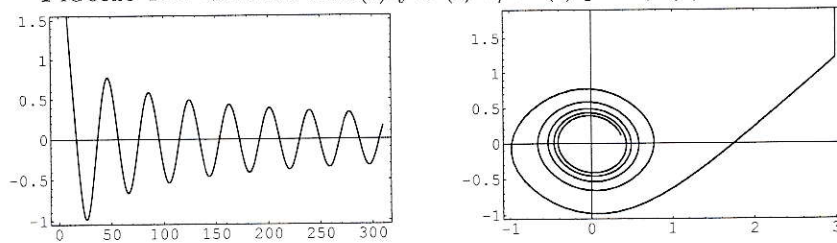
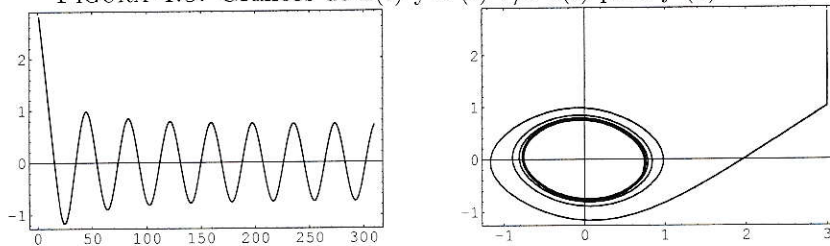
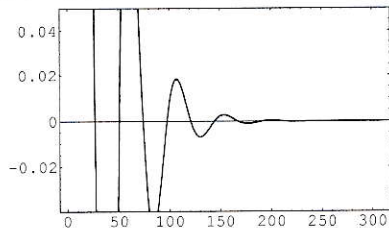


FIGURA 4.3. Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -1.5$

FIGURA 4.4. Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -1.5705$ FIGURA 4.5. Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -1.8$ FIGURA 4.6. Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -2$

2. Ecuación $x'(t) = -ph \arctan(x(t-1))$

Consideraremos la condición inicial $\gamma(s) = 3$ $s \in [-1, 0]$, tomaremos algunos valores de $-f'(0)$ entre 1 y 2 y construiremos los gráficos $x(t)v/st$ (izquierda) y $x'(t)v/sx(t)$ (derecha).

FIGURA 4.7. Gráfico de $x(t)$ para $f'(0) = -1$

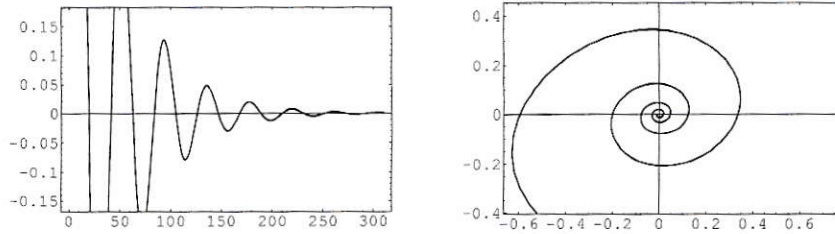


FIGURA 4.8. Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -1.3$

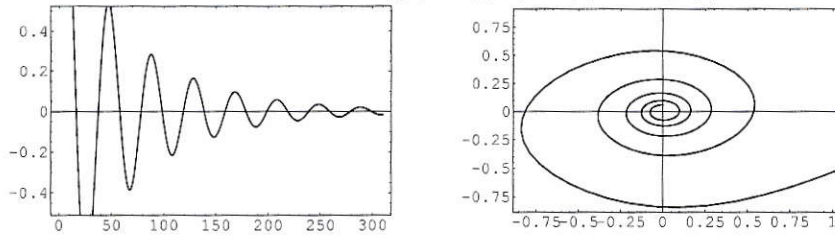


FIGURA 4.9. Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -1.5$

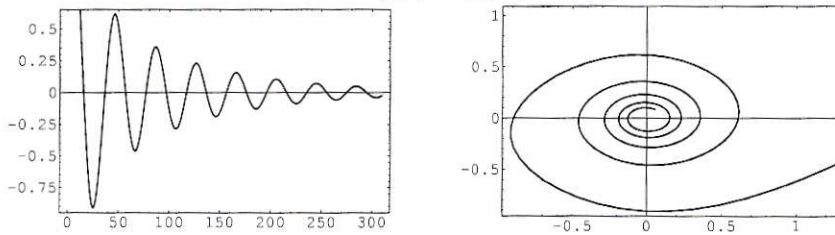


FIGURA 4.10. Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -1.5705$

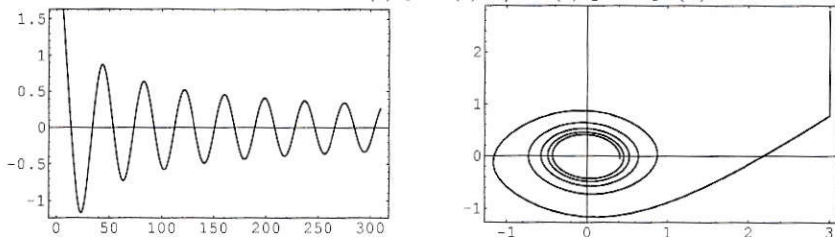


FIGURA 4.11. Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -1.8$

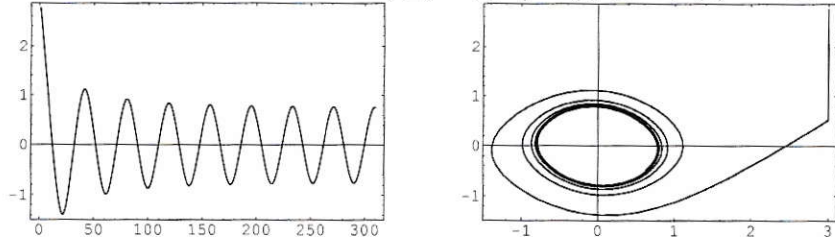


FIGURA 4.12. Gráficos de $x(t)$ y $x'(t)$ v/s $x(t)$ para $f'(0) = -2$

Bibliografía

- [1] W.C. Allee. 1933. *Animal aggregations: a study in general sociology*, Chicago University Press.
- [2] R. Bellman y K. Cooke. 1963 *Differential Difference Equations*, Mathematics in Science and engineering, Volume 6, Academic Press, New York.
- [3] K. Gopalsamy. 1986. *On the global attractivity in a generalized delay-logistic equation*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **100**:183-192.
- [4] K. Gopalsamy, M. Kulenovic y G. Ladas. 1988. *Time lags in a "food-limited" population model*, Applicable Analysis **31**:255-237.
- [5] J. K. Hale. 1971. *Functional Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Volume 3, Springer Verlag, New York.
- [6] J. K. Hale. 1988. *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Mathematical Surveys and Monographs, **25**, A.M.S., Providence, Rhode Island.
- [7] G. E. Hutchinson. 1948 *Circular causal systems in ecology*, Ann. New York Acad. Sci. **50**:221-246.
- [8] A. Ivanov, E. Liz, S. Trofimchuk. 1999 *Halanay inequality, Yorke 3/2 stability criterion, and differential equations with maxima*, University of Ballarat, Australia, Research Report 40/99.
- [9] V. Kolmanovskii y A. Myshkis. 1999. *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*, Mathematics and its Applications, Vol. 463, Kluwer Academic Publishers.
- [10] T. Krisztin. 1991. *On stability properties for one-dimensional functional differential equations*, Funkcialaj **34**:241-256.
- [11] Y. Kuang. 1993. *Delay Differential Equations With applications in population dynamics*, Mathematics in Science and engineering, Vol. 191, Academic Press, New York.
- [12] V. Lakshmikantham y S. Leela. 1960. *Differential and Integral inequalities, Theory and applications*, Volume I, Academic Press, New York.
- [13] E. Liz, M. Pinto, G. Robledo, V. Tkachenko y S. Trofimchuk, *Wright type delay differential equations with negative Schwarzian* (Submitted)
- [14] J. Mallet-Paret. 1988. *Morse decomposition for delay-differential equations*, J. Differential equations **72**:270-315.
- [15] H. Matsunaga, R. Miyazaki and T. Hara. 1999. *Global attractivity results for nonlinear delay differential equations*, J. Math. An. Appl. **234**:77-90.
- [16] Ch. Qian. 1996. *Global Attractivity in nonlinear delay differential equations*, J. Math. An. Appl. **197**:529-547.
- [17] A. N. Sharkovsky, S. F. Kolyada, A. G. Sivak y V.V.Fedorenko. 1997. *Dynamics of one-dimensional maps*, Kluwer Academic Publishers.
- [18] J. So y J. Yu. 1995. *Global attractivity for a population model with time delay*, Proc. Am. Math. Soc. **123**:2687-2694.
- [19] J. So y J. Yu. 1995. *Global stability for a general population model with time delays*, Fields institute communications **21**:447-457.
- [20] J. So, J. Yu y M. Po-Chen. 1996. *Asymptotic stability for scalar delay differential equations*, Funkcialaj **39**:1-17.
- [21] J. Sugie. 1992. *On the stability for a population growth equation with time delay*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.A **120**:179-184.
- [22] D. V. Widder. 1946. *The Laplace Transform*, Princeton University Press.
- [23] H-O. Walther. 1978. *A theorem on the amplitudes of Periodic solutions of Differential Delay Equations with applications to Bifurcation*, J. Differential Equations **29**:396-404.

- [24] E. M. Wright. 1955. *A non linear difference-differential equation*, J. Reine Agnew. Math. **194**:66-87.
- [25] T. Yoneyama. 1987. *On the 3/2 stability theorem for one-dimensional delay-differential equations*, J. Math. An. Appl. **125**:161-173.
- [26] T. Yoneyama. 1992. *The 3/2 stability for one-dimensional delay-differential equations with unbounded delay*, J. Math. An. Appl. **165**:133-143.
- [27] J.A. Yorke. 1970. *Asymptotic stability for one dimensional differential-delay equations*, J. Differential Equations **7**:189-202.
- [28] J. Yu. 1996. *Asymptotic stability for nonautonomous scalar neutral differential equations*, J. Math. An. Appl. **203**:850-860.