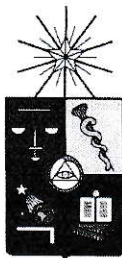


UCH-FC
MAG-M
D973
C-1



Sobre fractales en el plano

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias Matemáticas
Facultad de Ciencias

por

Léa Dusollier

Marzo, 2015

Directores de Tesis: **Dr. Rodrigo Bamón**
Dra. Anita Rojas

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Léa Dusollier

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 17 de Marzo de 2015.

Directores de Tesis

Dr. Rodrigo Bamón


Dra. Anita Rojas

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Nicolás Libedinsky

Dr. Álvaro Castañeda

Bamón

Ausente (permiso académico)

ARS

ACAC

Agradecimientos

Soy profundamente agradecida a todas las personas que han participado en mi formación académica, desde mis profesores de enseñanza básica hasta los profesores del departamento. Estos últimos me han enseñado, cada uno a su manera, pero sobretodo crean en conjunto un ambiente grato de aprendizaje, donde el apoyo y la preocupación por los estudiantes son principales.

Agradezco al profesor Rodrigo Bamón por toda su ayuda, y sobretodo por su paciencia y rigurosidad.

Les doy las gracias también a los profesores Nicolás Libedinsky y Álvaro Castañeda por su interés y tiempo dedicado en evaluar la tesis.

Gracias a Santiago Andrews por siempre saludar en la mañana con buen humor, por ayudar con la maldita fotocopidora que se come las hojas, por soplarme dónde puedo encontrar los profesores que necesito ver.

No podría haber hecho el programa sin Felipe Leigh. Gracias por ayudarme a entender Python, gracias por tu comprensión y apoyo diario, gracias por esas infinitas conversaciones que suelen perder pie y cabeza, gracias por tu amor.

A mis amigos y a mis compañeros pasados y presentes, de matemáticas y JGM en general: gracias por los momentos de estudio, de carrete y también más serios. Agradezco especialmente la camaradería y el apoyo entre la gente de matemáticas.

Agradezco infinitamente a mis padres y mi hermana. Merci pour votre préoccupation constante, pour votre appui en toutes circonstances, pour vos conseils, pour toujours être présents même á travers la distance. Je vous aime très, très fort.

Índice

Resumen	1
Abstract	2
Introducción	3
1. Preliminares	7
1.1. Resultados de topología general	7
1.2. Definición de $(\mathcal{K}(M), D)$	11
1.3. Sistema Iterativo de Funciones (SIF)	17
1.4. Notaciones	20
1.5. Medidas exteriores	22
2. Definición y obtención de un fractal en el plano	30
2.1. Auto semejanza	31
2.2. Dimensión	31
2.3. Ejemplos sencillos de cálculo de dimensión	38
3. Relaciones de orden entre las dimensiones	41

	VI
3.1. Enunciado de teoremas y lema técnico	41
3.2. Demostración de los teoremas	43
3.3. Demostración del lema técnico	50
3.4. Otros resultados y ejemplos	53
4. Ejemplos conocidos de fractales	61
4.1. Conjunto de Cantor	61
4.2. Curva de Koch	63
4.3. Triángulo de Sierpiński	65
5. Otros ejemplos	68
5.1. Una modificación de la curva de Koch	68
5.2. Modificación I del triángulo de Sierpiński	70
5.3. Sierkoch y Kochpiński	72
5.4. Diamantes de Lévy y una modificación de éstos	77
5.5. Embalse	81
A. Rapidez de convergencia de un fractal	84
B. Un programa para visualizar fractales en el plano	86
Referencias	92

Índice de figuras

4.1. Obtención del conjunto de Cantor a partir de $B = [0, 1]$	62
4.2. Séptima aproximación de la curva de Koch.	64
4.3. Un abierto de Moran del SIF de la curva de Koch.	65
4.4. Octava aproximación del triángulo de Sierpiński.	66
4.5. Un abierto de Moran del SIF del triángulo de Sierpiński.	67
5.1. Cuarta aproximación de la curva de Koch modificada con reflexiones en torno al eje de las abscisas.	69
5.2. Subdivisión de un triángulo equilátero en 16 triángulos semejantes. . .	70
5.3. Cuarta aproximación del compacto límite del SIF Modificación I de Sierpiński.	71
5.4. Séptima aproximación de la Modificación II del triángulo de Sierpiński.	73
5.5. Tercera aproximación de Sierkoch.	75
5.6. Tercera aproximación de Kochpiński.	76
5.7. Primera iteración del SIF de los Diamantes de Lévy.	77
5.8. Séptima aproximación del compacto límite Diamantes de Lévy.	78
5.9. Subdivisión de un trapecio en cuatro trapecios semejantes.	78
5.10. Subdivisión de un trapecio en dieciséis trapecios semejantes.	79

5.11. Cuarta aproximación del compacto límite de la modificación de los Diamantes de Lévy.	80
5.12. Primera iteración de Embalse.	82
5.13. Séptima aproximación del compacto límite Embalse.	83
A.1. Séptima aproximación de la curva de Koch.	85

Resumen

En esta tesis, estudiamos los fractales en el plano que resultan ser compactos límites de un Sistema Iterativo de Funciones. Trabajamos principalmente con Sistemas Iterativos de Funciones compuestos de funciones contractivas homogéneas, y que cumplen la condición de conjunto abierto de Moran.

El primer capítulo corresponde a la parte teórica, donde son recopilados conceptos fundamentales de topología, espacios métricos y teoría de la medida, así como otros resultados que usaremos después. A continuación, tenemos un capítulo donde introducimos nociones importantes para nuestro tema de estudio, como la noción de fractal, autosemejanza y tres distintos conceptos de dimensión. Luego dedicamos un capítulo a estudiar las relaciones entre estos conceptos de dimensión. Estos conceptos son ejemplificados en un capítulo posterior, con tres fractales conocidos. Y en el capítulo siguiente, presentamos otros ejemplos de fractales, donde ponemos en práctica todo lo aprendido en la primera parte de esta tesis. Para terminar, introducimos un programa en lenguaje Python; éste nos permite graficar aproximaciones de un fractal en muy poco tiempo y de manera sencilla.

Abstract

In this thesis, we study the fractals contained in the plane which are limit compacts of an Iterated Function System. We principally work with Iterated Function System composed by homogenous contraction mappings, and that satisfy the Moran's open set condition.

The first chapter corresponds to the theoretical part, where many fundamental concepts of topology, metric spaces and measure theory are compiled, also others results that we are going to use later. Then, we have a chapter where we introduce important notions for our study subject, such as the notion of fractal, self-similarity and three different concepts of dimension. Then we devote a chapter to study the relationships between these concepts of dimension. Those concepts are exemplified in a posterior chapter, with three known fractals. In the next chapter, we present other examples of fractals, where we put everything we have learned in the first part of the thesis into practice. To finish, we introduce a Python language script; this one will let us plot fractal's approximations in a very fast and simply way.

Introducción

El término ‘fractal’ fue acuñado en 1975 por el matemático Benoît B. Mandelbrot. Él exponía una ‘teoría de rugosidad’, y afirmaba que algunos patrones de la naturaleza son tan irregulares y fragmentados que la geometría euclidiana es incapaz de describirlos; decía que la existencia de aquellos patrones nos desafía a estudiar la morfología de lo clasificado como ‘amorfo’ por Euclides.

Un fractal es un objeto matemático que no posee dimensión entera, y es autosemejante. Solemos entender geoméricamente que una dimensión es una línea, que dos dimensiones son un plano, tres un objeto con volumen... Pero hay líneas que forman superficies y una superficie doblada irregularmente puede formar un volumen. La segunda característica que define un objeto como fractal, la autosemejanza, se refiere a que a toda escala, el fractal anida infinitas copias de él mismo; su estructura básica se repite en todas las escalas. Es por eso que si comparamos dos representaciones de un mismo fractal pero a distintas escalas, nos es imposible determinar cuál contiene al otro, o siquiera cuál es de escala mayor.

Es posible encontrar ejemplos de fractales en la naturaleza; una parte de un helecho, un pedazo de un brócoli romanescus y un trozo minúsculo de una costa siguen siendo

un helecho, un brócoli romanescus y una costa, respectivamente. Estos ejemplos de fractales mencionados son sólo algunos de todos los existentes.

En esta tesis estudiaremos un tipo de fractales que se encuentran contenidos en el plano, por lo que, como veremos, su dimensión será inferior a 2. Estos objetos no se pueden dibujar a mano alzada, ni con regla ni compás, más bien son el límite de procesos recursivos. Para tener una representación de un fractal, es necesario ingresar el patrón de repetición en un computador, y dejar que éste realice una cierta cantidad de iteraciones y grafique; se obtiene así una aproximación del fractal. Es por ello que implementaremos un programa, utilizando el lenguaje Python.

En la primera parte, el lector puede referirse a cualquier texto de topología general, como por ejemplo [10].

A partir de un espacio métrico completo (M, ρ) presentaremos $(\mathcal{K}(M), D)$, el espacio de los subconjuntos compactos de M con la métrica de Hausdorff D . Luego, tomaremos una cantidad finita de funciones contractivas $f_i : M \rightarrow M$, con $i \in \{1, \dots, n\}$ y $n \in \mathbb{N}$, que llamaremos Sistema Iterativo de Funciones (SIF). Definiremos un operador $\phi : \mathcal{K}(M) \rightarrow \mathcal{K}(M)$ por $\phi(A) = \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} f_i(A)$ para cada $A \in \mathcal{K}(M)$. Además, dado $A \in \mathcal{K}(M)$, si definimos $A_1 = \phi(A)$ y $A_{m+1} = \phi(A_m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$ probaremos que el límite $K = \lim_{m \rightarrow \infty} A_m$ siempre existe, es único, y es independiente del conjunto inicial A ; nos referiremos a K como el compacto límite del SIF.

A partir de la segunda sección, y durante todo el resto de la tesis, trabajaremos

con el espacio métrico \mathbb{R}^2 dotado de la métrica euclidiana. Para ello, consideraremos compactos en el plano y la métrica de Hausdorff definida en el conjunto $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$.

Presentaremos la definición formal de un fractal en el plano, por lo que necesitaremos los conceptos de autosemejanza y dimensión. Definiremos además diferentes conceptos de dimensión de un compacto: de semejanza del SIF que lo define, de Minkowski-Bouligand y de Hausdorff-Besicovitch. Luego, estudiaremos la condición de conjunto abierto de Moran; si un SIF compuesto por funciones contractivas homogéneas cumple esta condición, las tres dimensiones ya mencionadas de su compacto límite coinciden. La demostración de este hecho será visto en el capítulo 3.

Luego trabajaremos con tres fractales conocidos: el conjunto de Cantor, la curva de Koch y el triángulo de Sierpiński. En cada uno de ellos comprobaremos que son autosemejantes, verificaremos si cumplen la condición de conjunto abierto de Moran, y calcularemos sus distintas dimensiones.

La intención de esta sección es familiarizarse con los conceptos, y practicar antes de trabajar con un fractal nuevo o más complejo.

En el último capítulo de esta tesis, presentamos otros ejemplos de fractales. Verificaremos que el SIF, del cual son compacto límite, se compone de funciones contractivas homogéneas y cumple la condición de conjunto abierto de Moran. Calcularemos las dimensiones de estos compactos, y comprobaremos que son autosemejantes. Los ejemplos a estudiar serán primero modificaciones sencillas de los SIF de la curva de Koch y del triángulo de Sierpiński, luego crearemos unas combinaciones de éstos

mediante composición de funciones. Para el cuarto ejemplo, presentaremos un SIF de poco interés para esta tesis, los Diamantes de Lévy, puesto que no cumple la condición de conjunto abierto de Moran; pero lo modificaremos de manera conveniente. Y finalmente, presentamos un fractal personal, llamado Embalse. Este fractal tiene la particularidad de no haber sido creado inspirándose en otro ya existente, sino que fue ideado observando un paisaje: un embalse al pie de tres montañas.

Terminamos con un programa computacional que nos entrega una representación gráfica de las aproximaciones de un fractal; para ello adoptaremos el lenguaje Python y trabajaremos en varias etapas. La primera, es la obtención del SIF. Esto se hará leyendo un archivo ya existente, o bien adquiriendo la información a partir del usuario. Luego, en la segunda etapa se procede a realizar iteraciones para obtener los puntos a graficar. Y finalmente, se entrega los puntos graficados.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Resultados de topología general

En esta sección recordaremos definiciones y resultados de topología general que se pueden estudiar en cualquier texto de cátedra, como por ejemplo [10].

Empezamos con la propiedad de compacidad, pues en esta tesis trabajaremos con subconjuntos compactos del plano.

Definición 1.1.1 *Dado X un conjunto, se dice que una colección \mathcal{F} de subconjuntos de X es un **recubrimiento** de X si la unión de los elementos de \mathcal{F} es igual a X . Dados T un espacio topológico y \mathcal{F} un recubrimiento de T , se dice que \mathcal{F} es un **recubrimiento abierto** de T si sus elementos son subconjuntos abiertos de T .*

Definición 1.1.2 *Dado T un espacio topológico, se dice que T es **compacto** si todo recubrimiento abierto \mathcal{F} de T contiene una subcolección finita que también recubre a T .*

Enunciamos ahora algunos resultados conocidos sobre compacidad que usaremos más tarde en la demostración del Teorema 1.3.2.

- (i) Sean T un espacio topológico, $n \in \mathbb{N}$ y $A_i \subseteq T$ compacto para $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es compacto.
- (ii) Sean T y S unos espacios topológicos, $f : T \longrightarrow S$ una función continua y $A \subseteq T$ compacto. Entonces $f(A)$ es compacto.

La demostración del siguiente teorema se encuentra en [10, p. 170].

Teorema 1.1.3 *Sea T un espacio topológico compacto, y sea \mathcal{C} una colección de subespacios cerrados de T tal que la intersección finita de elementos de \mathcal{C} es no vacía. Entonces*

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$$

Ahora introduciremos el concepto de espacio de Hausdorff y presentaremos un resultado fundamental de la topología.

Definición 1.1.4 *Dado T un espacio topológico, se dice que T es un **espacio de Hausdorff** si para todo par de puntos distintos $t, t' \in T$ existen V_t vecindad de t y $V_{t'}$ vecindad de t' tales que*

$$V_t \cap V_{t'} = \emptyset$$

La demostración del siguiente teorema se encuentra en [10, p. 167].

Teorema 1.1.5 *Sea T un espacio topológico compacto, y sea S un espacio topológico de Hausdorff. Entonces, si $f : T \longrightarrow S$ es una función biyectiva y continua, f es homeomorfismo.*

Las siguientes notaciones y definiciones nos permiten presentar equivalencias a la propiedad de compacidad en un espacio métrico.

Notación 1.1.6 Sea (M, ρ) un espacio métrico. Sea $m \in M$, y sea $r > 0$. Denotaremos por $B(m, r)$ la bola abierta de radio r centrada en m . Es decir,

$$B(m, r) = \{x \in M : \rho(x, m) < r\}$$

Definición 1.1.7 Dado (M, ρ) un espacio métrico, se dice que M es **completo** si toda sucesión de Cauchy converge.

Definición 1.1.8 Dado (M, ρ) un espacio métrico, se dice que M es **totalmente acotado** si para todo $\epsilon > 0$ existe $A \subseteq M$ finito tal que $\{B(a, \epsilon) : a \in A\}$ es un recubrimiento de M .

La demostración del siguiente teorema está en [11, p. 199].

Teorema 1.1.9 Sea (M, ρ) un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- (i) M es compacto.
- (ii) M es completo y totalmente acotado.
- (iii) Toda sucesión infinita en M tiene una subsucesión convergente.

Procedemos a introducir conceptos y resultados necesarios para la definición de un Sistema Iterativo de Funciones.

Definición 1.1.10 Una **función contractiva** definida en un espacio métrico (M, ρ) es una función $f : M \rightarrow M$ tal que existe $r \in (0, 1)$ con

$$\rho(f(u), f(v)) \leq r \cdot \rho(u, v) \quad \forall u, v \in M$$

Al mínimo valor de $r \in (0, 1)$ que satisface la relación anterior lo denominaremos **razón de contracción de f** .

Si la función contractiva f es inyectiva, diremos que es **contractiva regular**; en caso contrario, diremos que es **contractiva singular**.

Definición 1.1.11 Dados (M, ρ) un espacio métrico, $f : M \rightarrow M$ una función contractiva y r su razón de contracción, se dice que f es **contractiva homogénea** si satisface

$$\rho(f(m), f(m')) = r \cdot \rho(m, m') \quad \forall m, m' \in M$$

El corolario siguiente es una consecuencia del Teorema 1.1.5 debido a que toda función contractiva es continua, y que todo espacio métrico es de Hausdorff.

Corolario 1.1.12 Sean (M, ρ) un espacio métrico compacto y $f : M \rightarrow M$ una función contractiva regular. Entonces $f : M \rightarrow f(M)$ es un homeomorfismo.

La demostración del principio de contracción de Banach se encuentra en [11, p. 216].

Teorema 1.1.13 Toda función contractiva f definida en un espacio métrico (M, ρ) no vacío y completo, posee un único punto fijo x_0 . Más aún, para todo $x \in M$ tenemos

$$f^m(x) \rightarrow x_0 \text{ si } m \rightarrow \infty$$

donde f^m representa la m -ésima composición de f para cada $m \in \mathbb{N}$.

El siguiente lema será utilizado en una demostración futura (Teorema 3.1.3). Antes debemos recordar la siguiente definición.

Definición 1.1.14 *Dado (M, ρ) un espacio métrico, definimos el **diámetro** de M como*

$$\text{diam}(M) = \sup\{\rho(m, m') : m, m' \in M\}$$

La primera parte de la demostración del siguiente lema se demuestra con topología general, utilizando la continuidad de f ; la demostración de la segunda parte es inmediata.

Lema 1.1.15 *Sea (M, ρ) un espacio métrico. Sea $f : M \rightarrow M$ una función contractiva homogénea con razón de contracción r . Sea $U \subseteq M$. Entonces:*

$$(i) \quad f(\overline{U}) = \overline{f(U)}$$

$$(ii) \quad \text{diam}(f(U)) = r \cdot \text{diam}(U)$$

La definición a continuación será utilizada en la siguiente sección, cuando definamos $(\mathcal{K}(M), D)$ para (M, ρ) espacio métrico.

Definición 1.1.16 *Dado (M, ρ) un espacio métrico, para $A \subseteq M$ y $r > 0$ definimos la **r -vecindad abierta de A** como*

$$V_r(A) = \{m \in M : \rho(a, m) < r \text{ para algún } a \in A\}$$

1.2. Definición de $(\mathcal{K}(M), D)$

A partir de un espacio métrico (M, ρ) , definiremos el espacio de los subconjuntos compactos de M , denotado por $\mathcal{K}(M)$, con una métrica particular: la métrica de

Hausdorff D . Esta sección es importante, pues en esta tesis trabajaremos con el espacio métrico $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^2), D)$.

Definición 1.2.1 Dado (M, ρ) un espacio métrico, definimos

$$\mathcal{K}(M) = \{A \subseteq M : A \text{ compacto}\}$$

A $\mathcal{K}(M)$ le asociamos la **métrica de Hausdorff** D , definida como

$$D : \mathcal{K}(M) \times \mathcal{K}(M) \longrightarrow \mathbb{R} : (A, B) \mapsto \inf\{r > 0 : A \subseteq V_r(B), B \subseteq V_r(A)\}$$

Teorema 1.2.2

- (i) D es una métrica en $\mathcal{K}(M)$.
- (ii) Si (M, ρ) es un espacio métrico completo, $(\mathcal{K}(M), D)$ también es completo.

Demostración

- (i) Notemos primero que se cumple $D(A, B) \geq 0 \forall A, B \in \mathcal{K}(M)$, por definición de D .

Además, es inmediato ver que $D(A, B) = D(B, A) \forall A, B \in \mathcal{K}(M)$, pues $\inf\{r : A \subseteq V_r(B), B \subseteq V_r(A)\} = \inf\{r : B \subseteq V_r(A), A \subseteq V_r(B)\}$.

Dado $A \in \mathcal{K}(M)$, para todo $a \in A$ existe trivialmente el mismo elemento $a \in A$ tal que $\rho(a, a) = 0$. Luego $A \subseteq V_r(A) \forall r > 0$. Así, $D(A, A) = 0$.

Sean $A, B \in \mathcal{K}(M)$ tales que $D(A, B) = 0$. Probaremos que $A = B$. Si fuese

cierto que $A \neq B$, podemos suponer sin pérdida de generalidad la existencia de $a \in A$ tal que $a \notin B$. Entonces, para todo $b \in B$ existe $\epsilon_b > 0$ tal que $a \notin B(b; \epsilon_b)$. Luego $\mathcal{F} = \{B(b; \frac{\epsilon_b}{2}) : b \in B\}$ es un recubrimiento abierto de B , el cual recordamos que es compacto. Por lo tanto existe $C \subseteq B$ finito tal que $B \subseteq \bigcup_{c \in C} B(c; \frac{\epsilon_c}{2})$. Definimos entonces $\epsilon = \min \{\frac{\epsilon_c}{2} : c \in C\} > 0$.

Dado $b \in B$ existe $c \in C$ tal que $b \in B(c; \frac{\epsilon_c}{2})$, y como $a \notin B(c; \epsilon_c)$, tenemos por desigualdad triangular

$$\epsilon_c \leq \rho(a, c) \leq \rho(a, b) + \rho(b, c) \leq \rho(a, b) + \frac{\epsilon_c}{2}$$

Luego $\rho(a, b) \geq \epsilon \forall b \in B$. Esto contradice el hecho que $D(A, B) = 0$. Luego necesariamente $A = B$.

Probaremos ahora la desigualdad triangular para D . Sean $A, B, C \in \mathcal{K}(M)$. Tomemos $a \in A$ cualquiera. Luego existen $b_a \in B$ tal que $\rho(a, b_a) \leq D(A, B)$, y $c_{b_a} \in C$ tal que $\rho(b_a, c_{b_a}) \leq D(B, C)$.

Entonces, por desigualdad triangular tenemos

$$\rho(a, c_{b_a}) \leq \rho(a, b_a) + \rho(b_a, c_{b_a}) \leq D(A, B) + D(B, C)$$

Como a es arbitrario, deducimos que $A \subseteq V_{D(A,B)+D(B,C)}(C)$, y análogamente tenemos $C \subseteq V_{D(A,B)+D(B,C)}(A)$. Luego, por definición de ínfimo tenemos $D(A, C) \leq D(A, B) + D(B, C)$.

- (ii) Tomemos $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de Cauchy en $\mathcal{K}(M)$. Probemos que converge a un subconjunto compacto de M .



De hecho, veamos que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge al siguiente conjunto:

$$A = \{a : \text{existe una sucesión } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ con } a_n \in A_n \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } a_n \longrightarrow a\}$$

Veamos primero que $A \neq \emptyset$. Debemos probar que existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en M , convergente, tal que $a_n \in A_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Debido a que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe una sucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ creciente tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple $D(A_n, A_m) < \frac{1}{2^k} \forall n, m \geq n_k$.

Sea $x_{n_1} \in A_{n_1}$ cualquiera. Sea $x_{n_2} \in A_{n_2}$ tal que $\rho(x_{n_1}, x_{n_2}) < \frac{1}{2^1}$. Recursivamente, dado $k \in \mathbb{N}$ existe $x_{n_{k+1}} \in A_{n_{k+1}}$ tal que $\rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}$. Luego $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en M con $x_{n_k} \in A_{n_k} \forall k \in \mathbb{N}$.

Definamos ahora $n_0 = 0$. Y para cada n que satisface $n_{k-1} < n \leq n_k$ elijamos $a_n \in A_n$ tal que $\rho(a_n, x_{n_k}) \leq D(A_n, A_{n_k})$. Notemos que, debido a que $x_{n_k} \in A_{n_k}$, tenemos $\rho(a_{n_k}, x_{n_k}) \leq D(A_{n_k}, A_{n_k}) = 0$, por lo que $a_{n_k} = x_{n_k}$.

Vamos a chequear ahora que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en M .

Dado $\epsilon > 0$, existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_{n_k}, x_{n_l}) < \frac{\epsilon}{3}$ si $n_k, n_l \geq M_1$. También existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que $D(A_p, A_q) < \frac{\epsilon}{3}$ si $p, q \geq M_2$. Entonces, dados $n, m \geq \max\{M_1, M_2\}$, sean n_k, n_l tales que $n_{k-1} < n \leq n_k$ y $n_{l-1} < m \leq n_l$.

Luego

$$\begin{aligned} \rho(a_n, a_m) &\leq \rho(a_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_{n_l}) + \rho(x_{n_l}, a_m) \\ &\leq D(A_n, A_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_{n_l}) + D(A_{n_l}, A_m) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Entonces $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en M tal que $a_n \in A_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Como M es completo, existe $a \in M$ límite de la sucesión y $a \in A$. Por lo tanto

hemos probado que $A \neq \emptyset$.

Demostremos ahora que A es el límite de la sucesión de Cauchy $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Sea $\epsilon > 0$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $D(A_n, A_m) < \frac{\epsilon}{2} \forall n, m > N$.

Probaremos que $D(A_n, A) < \epsilon \forall n \geq N$.

Sea $n \geq N$ cualquiera. Basta probar que $A_n \subseteq V_\epsilon(A)$ y $A \subseteq V_\epsilon(A_n)$.

Probemos primero que $A \subseteq V_\epsilon(A_n)$. Sea $a \in A$. Debemos probar que existe $b \in A_n$ tal que $\rho(a, b) < \epsilon$. Sea $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sucesión con $a_k \in A_k \forall k$ y $a_k \rightarrow a$. Sea $k > N$ tal que $\rho(a_k, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Como $D(A_k, A_n) < \frac{\epsilon}{2}$, sea $b \in A_n$ tal que $\rho(a_k, b) < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces $\rho(a, b) \leq \rho(a, a_k) + \rho(a_k, b) < \epsilon$.

Probemos ahora $A_n \subseteq V_\epsilon(A)$. Sea $b \in A_n$. Debemos probar que existe $a \in A$ tal que $\rho(a, b) < \epsilon$. Elijamos enteros $k_1 = n < k_2 < \dots$ tales que $D(A_{k_j}, A_{k_{j+1}}) < \frac{\epsilon}{2^j} \forall m \geq k_j, \forall j \in \mathbb{N}$. Luego definamos una sucesión $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ con $b_k \in A_k$ como sigue: para $k < n$, elijamos $b_k \in A_k$ arbitrariamente. Para $k = n$, elijamos $b_n = b$. Y para $k_j < k \leq k_{j+1}$, elijamos $b_k \in A_k$ tal que $\rho(b_{k_j}, b_k) < \frac{\epsilon}{2^j}$. Entonces $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy por construcción, y tiene límite, digamos a . Luego $a \in A$, y $\rho(b, a) \leq \epsilon$ porque

$$\begin{aligned} \rho(b, a) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \rho(b_{k_j}, b_{k_{j+1}}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^j} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Luego $b \in V_\epsilon(A)$ y esto prueba que $A_n \subseteq V_\epsilon(A)$.

Entonces tenemos $D(A, A_n) < \epsilon$ si $n \geq N$. Por lo tanto $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A .

Falta demostrar que A es compacto. Para ello, veremos que es completo y totalmente acotado, por teorema 1.1.9.

Veamos que A es completo. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en A . Como M es completo, sabemos que existe $a \in M$ límite de la sucesión.

Probaremos que $a \in A$.

Por definición de A , sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $(a_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ con $a_{n,k} \in A_k \forall k \in \mathbb{N}$ y con límite a_n .

Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(a_{1,n_1}, a_1) < 1$. De manera recursiva, para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $n_k > n_{k-1}$ tal que $\rho(a_{k,n_k}, a_k) < \frac{1}{k}$.

Luego

$$\rho(a_{k,n_k}, a) \leq \rho(a_{k,n_k}, a_k) + \rho(a_k, a) \forall k \in \mathbb{N}$$

Esto implica que el límite de la sucesión $(a_{k,n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es a . Además, por ser convergente sabemos que es de Cauchy. Luego, tal como lo hicimos para probar que A no es vacío, es posible construir una sucesión de Cauchy $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $b_n \in A_n \forall n \in \mathbb{N}$, y tal que $b_{n_k} = a_{k,n_k} \forall k \in \mathbb{N}$. Tenemos así que $a \in A$, y luego que A es completo.

Probemos a continuación que A es totalmente acotado. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq V_{\frac{\epsilon}{4}}(A_n)$. Como A_n es totalmente acotado, existe un conjunto $B \subseteq A_n$, con $\#B \in \mathbb{N}$, tal que $A_n \subseteq \bigcup_{b \in B} B\left(b, \frac{\epsilon}{4}\right)$. Definamos $B' = \{b \in B : B(b, \frac{\epsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset\}$. Para cada $b \in B'$ tomemos algún $y_b \in B(b, \frac{\epsilon}{2}) \cap A$.

Probemos que $A \subseteq \bigcup_{b \in B'} B(y_b, \epsilon)$.

Sea $a \in A$. Como $a \in V_{\frac{\epsilon}{4}}(A_n)$, tomemos $x \in A_n$ tal que $\rho(a, x) \leq \frac{\epsilon}{4}$. Entonces sea $b \in B$ tal que $\rho(x, b) < \frac{\epsilon}{4}$, por lo que

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, x) + \rho(x, b) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}$$

Luego $b \in B'$. Tomemos $y_b \in B(b, \frac{\epsilon}{2}) \cap A$. Entonces

$$\rho(a, y_b) \leq \rho(a, b) + \rho(b, y_b) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Entonces hemos probado que para cada $a \in A$ existe $b \in B'$ tal que $a \in B(y_b, \epsilon)$.

Luego $A \subseteq \bigcup_{b \in B'} B(y_b, \epsilon)$ como queríamos demostrar. □

1.3. Sistema Iterativo de Funciones (SIF)

Si bien en la sección anterior presentamos el espacio donde trabajaremos, ahora introducimos las herramientas principales a utilizar. Todo fractal a estudiar en esta tesis será obtenido con un Sistema Iterativo de Funciones o como escribiremos de ahora en adelante, SIF.

Definición 1.3.1 *Un Sistema Iterativo de Funciones (SIF) en un espacio métrico (M, ρ) es un conjunto finito de funciones contractivas regulares (f_1, \dots, f_n) , con $n \in \mathbb{N}$ y $f_i : M \rightarrow M \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Llamaremos al conjunto de razones de contracción (r_1, \dots, r_n) **lista de razones del SIF**. A un tal sistema le asociamos la siguiente función en $\mathcal{K}(M)$:*

$$\phi : \mathcal{K}(M) \rightarrow \mathcal{K}(M) : A \mapsto \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} f_i(A)$$

A continuación presentamos dos resultados los cuales probaremos un poco más adelante.

Teorema 1.3.2 *Sea (M, ρ) un espacio métrico completo y (f_1, \dots, f_n) , con $n \in \mathbb{N}$, un SIF en M . Entonces la función $\phi : \mathcal{K}(M) \rightarrow \mathcal{K}(M)$ es contractiva.*

Notemos que por el principio de contracción de Banach (ver Teorema 1.1.13) tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.3.3 *La función asociada $\phi : \mathcal{K}(M) \rightarrow \mathcal{K}(M)$ posee un único punto fijo K . En este contexto decimos que K es el único conjunto compacto invariante (i.e. $\phi(K) = K$) para el SIF. También decimos que K es el compacto límite del SIF, pues dado $A \subseteq M$ no vacío y compacto, se tiene que*

$$\phi^m(A) \rightarrow K \text{ si } m \rightarrow \infty.$$

Lema 1.3.4 *Sea (M, ρ) un espacio métrico y sea (f_1, \dots, f_n) , con $n \in \mathbb{N}$, un SIF. Sea $\phi : \mathcal{K}(M) \rightarrow \mathcal{K}(M)$ la función asociada al SIF. Sea $U \subseteq M$ abierto, acotado y no vacío tal que $f_i(U) \subseteq U \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces*

$$\phi^m(\overline{U}) \subseteq \phi^{m-1}(\overline{U}) \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Además, si K es el compacto límite del SIF, $K \subseteq \overline{U}$.

Ahora procedemos a demostrar los resultados.

Demostración del Teorema 1.3.2 Notemos primero que ϕ está bien definida.

De hecho, el conjunto imagen de un compacto bajo una función continua es compacto, y la unión finita de compactos es un conjunto compacto. Luego si $A \in \mathcal{K}(M)$, se cumple $\phi(A) \in \mathcal{K}(M)$.

Ahora demostraremos que ϕ es una función contractiva.

Sea (r_1, \dots, r_n) la lista de razones del SIF. Sea

$$\bar{r} = \max\{r_i : i \in \{1, \dots, n\}\} \in (0, 1)$$

Probemos que

$$D(\phi(A), \phi(B)) \leq \bar{r} \cdot D(A, B) \quad \forall A, B \in \mathcal{K}(M)$$

Entonces, vamos a probar que para todo $A, B \in \mathcal{K}(M)$ se cumple $\phi(A) \subseteq V_{\bar{r} \cdot D(A, B)}(\phi(B))$ y $\phi(B) \subseteq V_{\bar{r} \cdot D(A, B)}(\phi(A))$.

Sean $A, B \in \mathcal{K}(M)$.

Probemos $\phi(A) \subseteq V_{\bar{r} \cdot D(A, B)}(\phi(B))$. Para $x \in \phi(A)$, por definición tenemos $x = f_i(x')$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$ y cierto $x' \in A$.

Luego, sea $y' \in B$ tal que $\rho(x', y') \leq D(A, B)$. Pero debido a que f_i es contractiva, el punto $y = f_i(y') \in \phi(B)$ cumple $\rho(x, y) \leq r_i \cdot \rho(x', y') \leq \bar{r} \cdot D(A, B)$.

Como x es arbitrario, concluimos que $\phi(A) \subseteq V_{\bar{r} \cdot D(A, B)}(\phi(B))$.

De manera análoga deducimos que $\phi(B) \subseteq V_{\bar{r} \cdot D(A, B)}(\phi(A))$.

Por lo tanto ϕ es una función contractiva, y su razón de contracción es a lo sumo \bar{r} .

□

Demostración del Lema 1.3.4 Probaremos usando inducción sobre m . Demostremos primero que $\phi(\bar{U}) \subseteq \bar{U}$. Sea $v \in \phi(\bar{U})$. Probemos que $B(v, \epsilon) \cap U \neq \emptyset \forall \epsilon > 0$.

Sean $u \in \bar{U}$ e $i \in \{1, \dots, n\}$ tales que $f_i(u) = v$. Sea $\epsilon > 0$. Sea $u' \in B\left(u, \frac{\epsilon}{r_i}\right) \cap U$.

Como

$$\rho(f_i(u), f_i(u')) \leq r_i \cdot \rho(u, u')$$

y $f_i(U) \subseteq U$, tenemos $f(u') \in B(v, \epsilon) \cap U$.

Por lo tanto $\phi(\bar{U}) \subseteq \bar{U}$.

Sea ahora $m \in \mathbb{N}$ tal que $\phi^m(\bar{U}) \subseteq \phi^{m-1}(\bar{U})$. Entonces

$$\phi^{m+1}(\bar{U}) = \phi(\phi^m(\bar{U})) \subseteq \phi(\phi^{m-1}(\bar{U})) = \phi^m(\bar{U})$$

Luego, hemos probado por inducción que

$$\phi^m(\bar{U}) \subseteq \phi^{m-1}(\bar{U}) \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Ahora, como

$$K = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi^m(\bar{U}),$$

tenemos

$$K \subseteq \phi^m(\bar{U}) \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Y en particular

$$K \subseteq \bar{U}$$

□

1.4. Notaciones

Sea (f_1, \dots, f_n) , con $n \in \mathbb{N}$, un SIF cuya lista de razones es (r_1, \dots, r_n) . Denotaremos por I al conjunto de subíndices del SIF, es decir:

$$I = \{1, \dots, n\}$$

Sea $m \in \mathbb{N}$. Denotaremos por I^m al conjunto de las m -tuplas de elementos de I .

$$I^m = \{(i_1, \dots, i_m) : i_j \in I \forall j \in \{1, \dots, m\}\}$$

Denotaremos por $I^{(*)}$ al conjunto de todas las m -tuplas, cualquier $m \in \mathbb{N}$. Es decir,

$$I^{(*)} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} I^m$$

Denotaremos por I^ω al conjunto de las sucesiones con elementos en I .

Ahora, dado $\vec{i} = (i_1, \dots, i_m) \in I^{(*)}$, algún $m \in \mathbb{N}$, tenemos varias notaciones:

$$|\vec{i}| = m$$

$$\vec{i}^- = (i_1, \dots, i_{m-1})$$

$$\vec{i}|_k = (i_1, \dots, i_k) \forall k \leq m \text{ (análogamente si } \vec{i} \in I^\omega)$$

$$[\vec{i}] = \{\vec{j} \in I^\omega : j|_{|\vec{i}|} = \vec{i}\}$$

$$r_{\vec{i}} = \prod_{k \in \{1, \dots, m\}} r_{i_k}$$

$$f_{\vec{i}} = f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_m}$$

Dado también $\vec{j} = (j_1, \dots, j_k)$, algún $k \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\vec{i}\vec{j}$ a la concatenación de ambas sucesiones:

$$\vec{i}\vec{j} = (i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_k)$$

Introducimos también las siguientes notaciones:

$$\underline{r} = \min\{r_i : i \in I\}$$

$$\bar{r} = \max\{r_i : i \in I\}$$

Además, para todo $A \subseteq I^{(*)}$ finito definimos su altura como

$$\text{Alt}(A) = \max\{|\vec{i}| : i \in A\}$$

1.5. Medidas exteriores

En esta sección recordaremos la definición de medida exterior, y un teorema acerca de la medida exterior asociada a una función. Esta materia se aplicará más adelante, en el capítulo de relaciones de orden entre las dimensiones. Además, presentaremos un resultado de medida de Lebesgue.

Definición 1.5.1 *Dado X un conjunto, $\mathcal{P}(X)$ indica los subconjuntos de X . Una **medida exterior** en X es una función $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ que satisface simultáneamente las siguientes propiedades:*

$$(i) \quad \mu(\emptyset) = 0$$

$$(ii) \quad \text{Si } A \subseteq B \subseteq X, \text{ entonces } \mu(A) \leq \mu(B).$$

$$(iii) \quad \text{Dado } \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X), \text{ se cumple } \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i).$$

La demostración del siguiente teorema se encuentra en [4, p. 134].

Teorema 1.5.2 *Sea X un conjunto, y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un recubrimiento de X . Sea $C : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ una función cualquiera. Entonces existe una única medida exterior μ en X que satisface simultáneamente las siguientes propiedades.*

$$(i) \quad \mu(A) \leq C(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$$(ii) \quad \text{Dada } \eta \text{ medida exterior sobre } X \text{ tal que } \eta(A) \leq C(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \text{ se cumple}$$

$$\eta(B) \leq \mu(B) \quad \forall B \subseteq X.$$

Como consecuencia del teorema recién presentado, destacamos que tal medida exterior μ se define de la siguiente manera.

Definición 1.5.3 *Dados X un conjunto, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un recubrimiento de X y una función cualquiera $C : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, se define la **medida exterior μ asociada a C** como*

$$\mu(B) = \inf \left\{ \sum_{A \in \mathcal{D}} C(A) : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{A} \text{ recubrimiento numerable de } B \right\} \forall B \subseteq X$$

A continuación presentamos un lema, el cual motivó esta sección y nos será de gran utilidad más tarde para demostrar el Teorema 3.1.3.

Lema 1.5.4 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Sean $r_i \in (0, 1)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces:*

(i) *Existe $s \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\sum_{i \in \{1, \dots, n\}} r_i^s = 1$$

(ii) *Sea*

$$C : \left\{ \left[\vec{i} \right] : \vec{i} \in I^{(*)} \right\} \rightarrow [0, \infty] : \left[\vec{i} \right] \mapsto r_{\vec{i}}^s$$

Sea μ la medida exterior asociada a la función C . Luego

$$\mu(I^\omega) = 1$$

Demostración

(i) Definamos

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} r_i^x$$

Notemos primero que g es una función continua.

Además,

$$g'(x) = \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} \ln(r_i) \cdot r_i^x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

porque $r_i < 1 \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Luego g es estrictamente decreciente.

También, debido a que $r_i < 1 \forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 < 1$.

Por otro lado, tenemos $g(0) = n \geq 1$.

Por lo tanto, por el Teorema del valor intermedio, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{i \in \{1, \dots, n\}} r_i^s = 1$$

(ii) Recordemos que

$$\mu(I^\omega) = \inf \left\{ \sum_{\vec{i} \in J} r_i^s : J \subseteq I^{(*)}, I^\omega = \bigcup_{\vec{j} \in J} [\vec{j}] \right\}$$

Notemos que

$$I^\omega = \bigcup_{i \in I} [i]$$

y

$$\sum_{i \in I} r_i^s = 1$$

Por lo que $\mu(I^\omega) \leq 1$. Luego, para probar $1 \leq \mu(I^\omega)$, demostraremos que

$$1 \leq \sum_{\vec{j} \in J} r_j^s$$

para todo $J \subseteq I^{(*)}$ tal que $I^\omega = \bigcup_{\vec{j} \in J} [\vec{j}]$.

Sea entonces $J \subseteq I^{(*)}$ arbitrario, tal que $I^\omega = \bigcup_{\vec{j} \in J} [\vec{j}]$.

Notemos que para todos $\vec{i}, \vec{j} \in I^{(*)}$, se cumple

$$[\vec{i}\vec{j}] \subseteq [\vec{i}]$$

Entonces, sin riesgo de pérdida de generalidad supondremos que para todo $\vec{j} \in J$ no existe $\vec{i} \in I^{(*)}$ tal que $\vec{j}\vec{i} \in J$. En otras palabras, para todos $\vec{i}, \vec{j} \in J$ se cumple $[\vec{i}] \cap [\vec{j}] = \emptyset$.

Demostremos que con esta suposición J es finito, y haremos la demostración mediante inducción sobre $\text{Alt}(J)$.

Probemos que J es finito, es decir, $\#J < \infty$. Definimos entonces los siguientes conjuntos para cada $m \in \mathbb{N}$.

$$J_m = \left\{ \vec{j} \in J : |\vec{j}| \leq m \right\}$$

$$B_m = \left\{ \vec{i} \in I^m : [\vec{i}] \cap [\vec{j}] = \emptyset \forall \vec{j} \in J_m \right\}$$

Si $B_m = \emptyset$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces J es finito. Supongamos el caso contrario, es decir, $B_m \neq \emptyset \forall m \in \mathbb{N}$.

Definamos ahora para cada $m \in \mathbb{N}$ el siguiente conjunto.

$$\tilde{B}_m = \left\{ \vec{i} \in B_m : \forall k > m \exists \vec{k} \in B_k \text{ tal que } [\vec{k}] \subseteq [\vec{i}] \right\}$$

Vamos a probar primero que si para algún $m \in \mathbb{N}$ sucede $\tilde{B}_m = \emptyset$, J es finito.

Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{B}_m = \emptyset$, entonces para todo $\vec{i} \in B_m$ existe $l_{\vec{i}} > m$ tal que

$$[\vec{l}] \cap [\vec{i}] = \emptyset \forall \vec{l} \in B_{l_{\vec{i}}}$$

Entonces se cumple

$$[\vec{i}] \subseteq \bigcup_{\vec{j} \in J_{l_{\vec{i}}}} [\vec{j}]$$

Notemos que $\#B_m \leq n^m$, por lo que existe $l = \max\{l_{\vec{i}} : \vec{i} \in B_m\}$. Luego tenemos

$$\bigcup_{\vec{i} \in B_m} [\vec{i}] \subseteq \bigcup_{\vec{j} \in J_l} [\vec{j}]$$

Pero entonces sucede

$$\begin{aligned} I^\omega &= \bigcup_{\vec{j} \in J} [\vec{j}] \\ &= \left(\bigcup_{\vec{j} \in J_m} [\vec{j}] \right) \cup \left(\bigcup_{\vec{i} \in B_m} [\vec{i}] \right) \\ &\subseteq \left(\bigcup_{\vec{j} \in J_m} [\vec{j}] \right) \cup \left(\bigcup_{\vec{j} \in J_l} [\vec{j}] \right) \end{aligned}$$

Como $J_m \subseteq J_l$, tenemos $J = J_l$ si $\tilde{B}_m = \emptyset$. Así, $B_l = \emptyset$, contradiciendo el hecho que $B_m \neq \emptyset \forall m \in \mathbb{N}$.

Supongamos entonces que

$$\tilde{B}_m \neq \emptyset \forall m \in \mathbb{N}$$

Veamos que bajo esta suposición existe $\vec{i} \in I^\omega$ que no es cubierto por J .

Vamos a probar ahora que, dado $m \in \mathbb{N}$, para todo $\vec{i} \in \tilde{B}_m$ existe $i \in I$ tal que $\vec{i}i \in \tilde{B}_{m+1}$. Sean entonces $m \in \mathbb{N}$ e $\vec{i} \in \tilde{B}_m$. Denotemos por B el siguiente conjunto, el cual sabemos que no es vacío por definición de \tilde{B}_m .

$$B = \left\{ \vec{k} \in B_{m+1} : [\vec{k}] \subseteq [\vec{i}] \right\}$$

Vamos a probar por contradicción que $B \cap \tilde{B}_{m+1} \neq \emptyset$. Si $B \cap \tilde{B}_{m+1} = \emptyset$, para

todo $\vec{k} \in B$ existe $l_{\vec{k}} > m + 1$ tal que

$$[\vec{l}] \cap [\vec{k}] = \emptyset \quad \forall \vec{l} \in B_{l_{\vec{k}}}$$

Sea $l'' = \max\{l_{\vec{k}} : \vec{k} \in B\}$. Entonces tenemos la siguiente situación, la cual es una contradicción porque $\vec{i} \in \tilde{B}_m$:

$$[\vec{l}] \cap [\vec{i}] = \emptyset \quad \forall \vec{l} \in B_{l''}$$

Por lo tanto existe $\vec{k} \in \tilde{B}_{m+1}$ tal que $[\vec{k}] \subseteq [\vec{i}]$. Como $|\vec{k}| = m + 1 = |\vec{i}| + 1$, necesariamente $\vec{k}^- = \vec{i}$. Luego efectivamente existe $i \in I$ tal que $\vec{i}i = \vec{k} \in \tilde{B}_{m+1}$.

Ahora vamos a probar que

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{\vec{i} \in \tilde{B}_m} [\vec{i}] \neq \emptyset$$

Como $\tilde{B}_1 \neq \emptyset$, sea $i_1 \in I$ tal que $i_1 \in \tilde{B}_1$. Luego sea $i_2 \in I$ tal que $(i_1, i_2) \in \tilde{B}_2$. Entonces construimos de manera recursiva una sucesión $\vec{i} = (i_m)_{m \in \mathbb{N}} \in I^\omega$, tal que $\vec{i}|_m \in \tilde{B}_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$, de la siguiente manera: para $\vec{i}|_m = (i_1, i_2, \dots, i_m) \in \tilde{B}_m$, existe $i_{m+1} \in I$ tal que $\vec{i}|_{m+1} = \vec{i}|_m i_{m+1} \in \tilde{B}_{m+1}$. Luego \vec{i} no se encuentra recubierto por J , lo cual es contradictorio.

Por lo tanto no es posible que $B_m \neq \emptyset \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

Entonces J es necesariamente finito.

Ahora que ya sabemos que J es finito, tiene sentido hablar de su altura. Recordemos que estamos suponiendo

$$[\vec{i}] \cap [\vec{j}] = \emptyset \quad \forall \vec{i}, \vec{j} \in J$$

Luego probaremos por inducción sobre $\text{Alt}(J)$ que

$$1 = \sum_{\vec{j} \in J} r_{\vec{j}}^s$$

Si $\text{Alt}(J) = 1$, debido a que estamos trabajando con un recubrimiento de I^ω tenemos $J = I$. Luego

$$1 = \sum_{i \in I} r_i^s = \sum_{\vec{j} \in J} r_{\vec{j}}^s$$

Supongamos ahora que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $\text{Alt}(J) = m$ se cumple

$$1 = \sum_{\vec{j} \in J} r_{\vec{j}}^s$$

Sea entonces J tal que $\text{Alt}(J) = m + 1$. Luego

$$J = J_m \cup J'$$

donde

$$J' = \{\vec{j} \in J : |\vec{j}| = m + 1\}$$

Notemos que dado $\vec{j} \in J'$, se cumple $\vec{j}^- \cdot i \in J' \forall i \in I$. Entonces tenemos

$$r_{\vec{j}^-}^s = r_{\vec{j}^-}^s \cdot \sum_{i \in I} r_i^s = \sum_{i \in I} r_{\vec{j}^- \cdot i}^s$$

Por lo que

$$\sum_{\vec{j} \in J'} r_{\vec{j}}^s = \sum_{\substack{\vec{j}^- \\ \vec{j} \in J'}} r_{\vec{j}^-}^s$$

Sea entonces

$$J'' = \{\vec{j}^- : \vec{j} \in J'\}$$

Luego tenemos que

$$I^\omega = \bigcup_{\vec{j} \in J_m \cup J''} [\vec{j}]$$

y

$$\sum_{\vec{j} \in J} r_{\vec{j}}^s = \sum_{\vec{j} \in J_m \cup J''} r_{\vec{j}}^s$$

Como $\text{Alt}(J'') = m$, se cumple $\text{Alt}(J_m \cup J'') = m$. Entonces por hipótesis inductiva tenemos

$$1 = \sum_{\vec{j} \in J} r_{\vec{j}}^s$$

Por lo tanto hemos probado que $\mu(I^\omega) = 1$.

□

En el siguiente lema presentamos un resultado de teoría de la medida, específicamente de medida de Lebesgue. Si el lector lo desea, puede ver una parte de la demostración en [8], y el resto en [9, p. 64].

Lema 1.5.5 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función contractiva homogénea con razón de contracción r . Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ Lebesgue- medible. Entonces*

$$\mathcal{L}^2(f(A)) = r^2 \cdot \mathcal{L}^2(A)$$

Recordando que la medida de Lebesgue de $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y acotado representa su área, tenemos:

$$\text{Área}(f(U)) = r^2 \cdot \text{Área}(U)$$

Capítulo 2

Definición y obtención de un fractal en el plano

De ahora en adelante nuestro espacio de trabajo será \mathbb{R}^2 asociado a la métrica euclidiana. Estudiaremos los compactos que resultan ser límite de un SIF.

A continuación presentamos una definición para los objetos que estudiaremos en esta tesis, la cual nos permitirá decidir qué compactos límite de un SIF serán llamados ‘fractal’, y cuáles no.

Definición 2.0.6 *Decimos que $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ es un **fractal** si es autosemejante y su dimensión de Minkowski-Bouligand es fraccionaria.*

Veremos ahora las definiciones de autosemejanza y dimensión; para esta última estudiaremos tres conceptos de dimensión. La dimensión de semejanza del SIF es apreciada por ser la más sencilla de calcular, la dimensión de Minkowski-Bouligand nos permite caracterizar los fractales y la dimensión de Hausdorff-Besicovitch es presentada por ser una medida exterior presente en la mayoría de los textos de estudio.

2.1. Autosemejanza

Definición 2.1.1 Dado $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$, se dice que es **autosemejante** si para todo $x \in K$ y toda vecindad V de x , existe $L \subseteq V \cap K$ con $x \in L$ y L homeomorfo a K .

Proposición 2.1.2 Si $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ es límite de un SIF cuyas funciones son contracciones regulares, entonces K es autosemejante.

Más aún, si las funciones que componen el SIF son contracciones regulares afines, los homeomorfismos que permiten que K sea autosemejante son isomorfismos afines.

Demostración Sea (f_1, \dots, f_n) , con $n \in \mathbb{N}$, un SIF compuesto por contracciones regulares, y sea (r_1, \dots, r_n) su lista de razones.

Sea K su compacto límite. Sea $x \in K$, y sea U vecindad de x tal que $x \in U \subseteq K$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \cap K \subseteq U$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{r}^m \cdot \text{diam}(K) < \epsilon$, y sea $\vec{i} \in I^m$ tal que $x \in f_{\vec{i}}(K)$. Como $\text{diam}(f_{\vec{i}}(K)) \leq \bar{r}^m \cdot \text{diam}(K)$, se tiene que $f_{\vec{i}}(K) \subseteq B(x, \epsilon) \cap K$. Notemos que por el Corolario 1.1.12 todas las funciones que componen el SIF son homeomorfismos en su conjunto de llegada, y que la composición de homeomorfismos es un homeomorfismo. Luego K es homeomorfo a $L = f_{\vec{i}}(K) \subseteq U$.

Por lo tanto K es autosemejante.

□

2.2. Dimensión

Heurísticamente hablando, la dimensión de un subconjunto de \mathbb{R}^2 indica la cantidad de parámetros necesarios para describirlo, o describir cómo se podría desplazar de

manera continua uno de sus puntos sin salir del conjunto.

Un conjunto con una cantidad finita de puntos no tiene dispersión, pues son puntos aislados. Se dice que tal conjunto tiene dimensión cero.

Si un conjunto sólo precisa de un parámetro para describirlo, como es el caso de una línea o un círculo, diremos que es de dimensión 1.

Ahora, si necesitamos dos parámetros para describir un conjunto, diremos que su dimensión es 2. Por ejemplo, toda bola abierta de \mathbb{R}^2 tiene dimensión 2.

Como veremos, no siempre existe una cantidad entera de parámetros para describir un subconjunto del plano. En este caso, hablamos de **dimensión fraccionaria**.

Presentamos a continuación tres conceptos de dimensión, que aplicaremos a compactos en el plano: la dimensión de semejanza del SIF, y las dimensiones de Minkowski-Bouligand y de Hausdorff-Besicovitch de su compacto límite.

(a) **Dimensión de semejanza**

Esta dimensión se define para los SIF; veremos con el Ejemplo 3.4.4 que un mismo compacto puede ser compacto límite de varios SIF distintos, los cuales pueden tener distintas dimensiones de semejanza. Recalcamos entonces que esta dimensión es una propiedad del SIF y no de su compacto límite.

Para la siguiente definición, la existencia del número real D_S es asegurada por la primera parte de la Proposición 1.5.4.

Definición 2.2.1 *Dado (f_1, \dots, f_n) un SIF, con $n \in \mathbb{N}$, y (r_1, \dots, r_n) su lista de razones, su **dimensión de semejanza** es aquel real positivo D_S que*

satisface

$$\sum_{i \in \{1, \dots, n\}} r_i^{D_S} = 1$$

La siguiente proposición no se demostrará, puesto que es inmediato despejar D_S en la siguiente ecuación

$$n \cdot r^{D_S} = 1$$

Proposición 2.2.2 Sea (f_1, \dots, f_n) , con $n \in \mathbb{N}$, un SIF tal que

$$r_i = r \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Entonces

$$D_S = \frac{\ln(n)}{\ln(r^{-1})}$$

(b) Dimensión de Minkowski-Bouligand

Definición 2.2.3 Dados $A \subset \mathbb{R}^2$ acotado y $\epsilon > 0$, se define $N_\epsilon(A)$ como la menor cantidad de conjuntos con diámetro a lo sumo ϵ que recubren a A . Notemos que $N_\epsilon(\emptyset) = 0$. Entonces las dimensiones de Minkowski-Bouligand inferior y superior son, respectivamente:

$$\underline{D}_{MB}(A) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln N_\epsilon(A)}{-\ln \epsilon}$$

$$\overline{D}_{MB}(A) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln N_\epsilon(A)}{-\ln \epsilon}$$

Si coinciden, el valor común es la **dimensión de Minkowski-Bouligand** de A , también llamada comúnmente **dimensión de conteo de cajas**:

$$D_{MB}(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln N_\epsilon(A)}{-\ln \epsilon}$$

Proposición 2.2.4 Sean $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ tales que $A \subseteq B$. Entonces

$$\overline{D_{MB}}(A) \leq \overline{D_{MB}}(B)$$

En particular, dado que para todo $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ existe $R \subseteq \mathbb{R}^2$ rectángulo tal que $A \subseteq R$, con el Ejemplo 2.3.2 concluiremos que para todo $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ se cumple $\overline{D_{MB}}(A) \in [0, 2]$.

Demostración Sea $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$, y sea $\epsilon > 0$. Probemos que $N_\epsilon(A) < \infty$. Sea $\{B(a, \frac{\epsilon}{2}) : a \in A\}$ recubrimiento abierto de A . Como A es compacto, existe $B \subseteq A$, con $\#B \in \mathbb{N}$, tal que $\{B(b, \frac{\epsilon}{2}) : b \in B\}$ recubre a A . Entonces

$$N_\epsilon(A) < \infty \quad \forall \epsilon > 0 \quad \forall A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$$

Sean ahora $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ tales que $A \subseteq B$, y sea $\epsilon > 0$. Como $N_\epsilon(A) \leq N_\epsilon(B)$, tenemos

$$0 \leq \frac{\ln N_\epsilon(A)}{-\ln \epsilon} \leq \frac{\ln N_\epsilon(B)}{-\ln \epsilon}$$

Luego

$$0 \leq \overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln N_\epsilon(A)}{-\ln \epsilon} \leq \overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln N_\epsilon(B)}{-\ln \epsilon}$$

Por lo tanto hemos probado que $\overline{D_{MB}}(A) \leq \overline{D_{MB}}(B)$.

□

(c) Dimensión de Hausdorff-Besicovitch

Definición 2.2.5 Dados $A \subset \mathbb{R}^2$ acotado, $\epsilon \in (0, \infty)$ y $0 \leq p < \infty$, denotamos por $\mathcal{R}_\epsilon(A)$ al conjunto de los recubrimientos numerables \mathcal{A} de A , tales que

$$\text{diam}(A_j) \leq \epsilon \forall A_j \in \mathcal{A}.$$

Se define

$$\mathcal{M}(A, p, \epsilon) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} (\text{diam}(A_j))^p : \{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\epsilon(A) \right\}$$

Notemos que $0 < \epsilon < \eta \implies \mathcal{M}(A, p, \epsilon) \geq \mathcal{M}(A, p, \eta)$. Esto es debido a que todo recubrimiento en $\mathcal{R}_\epsilon(A)$ también pertenece a $\mathcal{R}_\eta(A)$.

Luego para cada $p \in [0, \infty)$, tenemos la siguiente función:

$$\mathcal{M}_p : \mathcal{K}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow [0, \infty] : A \mapsto \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{M}(A, p, \epsilon) = \sup_{\epsilon > 0} \mathcal{M}(A, p, \epsilon)$$

El siguiente teorema, junto a su corolario, serán demostrados posteriormente.

Teorema 2.2.6 Sean $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ y $0 < s < t < \infty$. Si $\mathcal{M}_s(A) < \infty$, entonces $\mathcal{M}_t(A) = 0$. También, si $\mathcal{M}_t(A) > 0$ entonces $\mathcal{M}_s(A) = \infty$.

Corolario 2.2.7 Dado $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$, existe un único valor $s_A \in [0, \infty]$ tal que

$$\mathcal{M}_p(A) = \begin{cases} \infty, & p < s_A \\ 0, & p > s_A \end{cases}$$

Definición 2.2.8 Dado $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$, su **dimensión de Hausdorff-Besicovitch** $D_{HB}(A)$ es el único valor $D_{HB} \in [0, \infty]$ tal que

$$\mathcal{M}_p(A) = \begin{cases} \infty & p \in [0, D_{HB}) \\ 0 & p \in (D_{HB}, \infty) \end{cases}$$

Como en esta tesis trabajaremos con subconjuntos compactos de \mathbb{R}^2 , en la siguiente proposición presentamos una característica importante. Una parte de ella se volverá a demostrar de otra forma más adelante (ver Teorema 3.1.1). La demostración de esta proposición se realizará al final de la sección.

Proposición 2.2.9 Sean $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ tales que $A \subseteq B$. Entonces

$$D_{HB}(A) \leq D_{HB}(B)$$

Más aún, como para todo $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ existe un rectángulo $R \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $A \subseteq R$, por el Ejemplo 2.3.2 concluiremos que $D_{HB}(A) \in [0, 2]$.

Procedemos ahora a demostrar las afirmaciones anteriores.

Demostración del Teorema 2.2.6 Sea $\epsilon > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(A, t, \epsilon) &= \inf_{A \in \mathcal{R}_\epsilon(A)} \sum_{A_j \in A} (\text{diam}(A_j))^t \\ &\leq \inf_{A \in \mathcal{R}_\epsilon(A)} \sum_{A_j \in A} \epsilon^{t-s} (\text{diam}(A_j))^s \\ &= \epsilon^{t-s} \mathcal{M}(A, s, \epsilon) \end{aligned}$$

Luego, si $\mathcal{M}_s(A) \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_t(A) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{M}(A, t, \epsilon) \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \{ \epsilon^{t-s} \mathcal{M}(A, s, \epsilon) \} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{t-s} \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{M}(A, s, \epsilon) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\mathcal{M}_s(A) < \infty$, entonces $\mathcal{M}_t(A) = 0$.

Por otro lado, si $\mathcal{M}_t(A) > 0$, no es posible que $\mathcal{M}_s(A) < \infty$ ya que probamos que aquello implicaría $\mathcal{M}_t(A) = 0$. Luego $\mathcal{M}_s(A) = \infty$.

□

Demostración del Corolario 2.2.7 La demostración será hecha en dos pasos. Probemos primero la unicidad. Sean $s_A < s'_A$ tales que cumplen lo enunciado. Luego para $p \in (s_A, s'_A)$ tenemos $\mathcal{M}_p(A) = 0$ pues $p > s_A$, y $\mathcal{M}_p(A) = \infty$ porque $p < s'_A$. Contradicción. Luego, si existe s_A , es único.

Ahora probemos la existencia.

Si $\mathcal{M}_p(A) = \infty \forall p \in [0, \infty)$, entonces $s_A = \infty$.

Si $\mathcal{M}_p(A) = 0 \forall p \in [0, \infty)$, entonces $s_A = 0$.

Si existe $q \in [0, \infty)$ tal que $\mathcal{M}(A, q) \notin \{0, \infty\}$, $\mathcal{M}_p(A) = 0 \forall p > q$ porque $\mathcal{M}(A, q) < \infty$. Y por otro lado, $\mathcal{M}_p(A) = \infty \forall p < q$ pues $\mathcal{M}(A, q) > 0$. Entonces $s_A = q$.

□

Demostración de la Proposición 2.2.9 Sean $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ tales que $A \subseteq B$. Sean $\epsilon \in (0, \infty)$ y $p \in [0, \infty)$. Como todo recubrimiento de B es recubrimiento de A , se cumple $0 \leq \mathcal{M}(A, p, \epsilon) \leq \mathcal{M}(B, p, \epsilon)$. Luego tenemos

$$0 \leq \mathcal{M}_p(A) \leq \mathcal{M}_p(B)$$

Entonces si $p > D_{HB}(B)$, $\mathcal{M}_p(B) = 0$ y luego se tiene $\mathcal{M}_p(A) = 0$.

Por lo tanto $D_{HB}(A) \leq D_{HB}(B)$.

□

2.3. Ejemplos sencillos de cálculo de dimensión

Vamos a calcular las dimensiones, presentadas en la sección anterior, de un segmento y de un rectángulo. Notaremos que el largo del segmento, o el área del rectángulo, no influye en su dimensión.

Ejemplo 2.3.1 Consideremos el segmento $S = [0, l] \times \{0\}$ con $l > 0$.

Para calcular una de sus dimensiones de semejanza, notemos que es el límite del siguiente SIF.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x, y) \\ f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x, y) + \left(\frac{l}{2}, 0\right) \end{aligned}$$

Luego la dimensión de semejanza de este SIF es $D_S = 1$, pues $(\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^1 = 1$.

Calculemos su dimensión de Minkowski-Bouligand. Sea $\epsilon > 0$. Sea $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $k_\epsilon - 1 < \frac{l}{\epsilon} \leq k_\epsilon$. Luego $N_\epsilon(S) = k_\epsilon$. Entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(k_\epsilon)}{\ln(\frac{k_\epsilon}{l})} \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(N_\epsilon(S))}{-\ln(\epsilon)} < \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(k_\epsilon)}{\ln(\frac{k_\epsilon - 1}{l})}$$

Como $k_\epsilon \rightarrow \infty$ cuando $\epsilon \rightarrow 0^+$, y

$$\lim_{k_\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\ln(k_\epsilon)}{\ln(\frac{k_\epsilon}{l})} = \lim_{k_\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\ln(k_\epsilon)}{\ln(\frac{k_\epsilon - 1}{l})} = 1$$

tenemos $D_{MB}(S) = 1$.

Veamos ahora su dimensión de Hausdorff-Besicovitch. Dado $\epsilon > 0$, sea k_ϵ como

antes. Sea $p \in (0, \infty)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(S, p, \epsilon) &= \inf \left\{ \sum_i^{\infty} (\text{diam}(S_i))^p : \{S_i\}_i \in \mathcal{R}_\epsilon(S) \right\} \leq \left(\frac{l}{k_\epsilon} \right)^p \cdot k_\epsilon \\ &= k_\epsilon^{1-p} \cdot l^p \end{aligned}$$

Si $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} k_\epsilon^{1-p} = 0$, es decir, $p > 1$, $\mathcal{M}_p(S) = 0$. Si por el contrario $p < 1$, tenemos $\mathcal{M}_p(S) = \infty$.

Por lo tanto $D_{HB}(S) = 1$.

Ahora calcularemos las tres dimensiones de un rectángulo cualquiera.

Ejemplo 2.3.2 Consideremos $R = [0, u] \times [0, v]$, para ciertos $u, v > 0$.

Calculemos primero una dimensión de semejanza. Para ello, notemos que este compacto es el conjunto invariante del SIF definido por las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x, y) \\ f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x, y) + \left(0, \frac{v}{2}\right) \\ f_3 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x, y) + \left(\frac{u}{2}, 0\right) \\ f_4 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x, y) + \left(\frac{u}{2}, \frac{v}{2}\right) \end{aligned}$$

Luego la dimensión de semejanza de este SIF es $D_S = 2$, pues $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$.

Calculemos ahora su dimensión de Minkowski-Bouligand. Sea $\epsilon > 0$, y sean $k_\epsilon, l_\epsilon \in \mathbb{N}$ tales que $k_\epsilon - 1 < \frac{u}{\epsilon} \leq k_\epsilon$ y $l_\epsilon - 1 < \frac{v}{\epsilon} \leq l_\epsilon$.

Luego $N_\epsilon(R) = k_\epsilon \cdot l_\epsilon$. Entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(k_\epsilon \cdot l_\epsilon)}{\ln\left(\sqrt{\frac{k_\epsilon \cdot l_\epsilon}{u \cdot v}}\right)} < \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(N_\epsilon(A))}{-\ln(\epsilon)} < \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(k_\epsilon \cdot l_\epsilon)}{\ln\left(\sqrt{\frac{k_\epsilon - 1}{u}} \cdot \sqrt{\frac{l_\epsilon - 1}{v}}\right)}$$

Como $k_\epsilon \rightarrow \infty$ y $l_\epsilon \rightarrow \infty$ cuando $\epsilon \rightarrow 0^+$, y además

$$\lim_{\substack{k_\epsilon \rightarrow \infty \\ l_\epsilon \rightarrow \infty}} \frac{\ln((k_\epsilon - 1) \cdot (l_\epsilon - 1))}{\ln\left(\sqrt{\frac{k_\epsilon \cdot l_\epsilon}{u \cdot v}}\right)} = \lim_{\substack{k_\epsilon \rightarrow \infty \\ l_\epsilon \rightarrow \infty}} \frac{\ln(k_\epsilon \cdot l_\epsilon)}{\ln\left(\sqrt{\frac{k_\epsilon - 1}{u}} \cdot \sqrt{\frac{l_\epsilon - 1}{v}}\right)} = 2$$

tenemos $D_{MB}(R) = 2$.

Calculemos su dimensión de Hausdorff-Besicovitch. Dado $\epsilon > 0$, sean k_ϵ y l_ϵ como antes. Sea $0 \leq p < \infty$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(R, p, \epsilon) &= \inf \left\{ \sum_i^\infty (\text{diam}(R_i))^p : \{R_i\}_i \in \mathcal{R}_\epsilon(R) \right\} \leq \left(\sqrt{\frac{u \cdot v}{k_\epsilon \cdot l_\epsilon}} \right)^p \cdot k_\epsilon \cdot l_\epsilon \\ &= (k_\epsilon \cdot l_\epsilon)^{1 - \frac{p}{2}} \cdot (\sqrt{u \cdot v})^p \end{aligned}$$

Si $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (k_\epsilon \cdot l_\epsilon)^{1 - \frac{p}{2}} = 0$, es decir, $p > 2$, $\mathcal{M}_p(R) = 0$. Pero si por el contrario $p < 2$, tenemos $\mathcal{M}_p(R) = \infty$.

Por lo tanto $D_{HB}(R) = 2$.



Capítulo 3

Relaciones de orden entre las dimensiones

En este capítulo estudiaremos una relación de desigualdad entre las dimensiones presentadas en el capítulo anterior, y también veremos unas condiciones suficientes para que las tres dimensiones coincidan. Las demostraciones serán apoyadas por lemas técnicos. Además, ejemplificaremos cada situación, por lo que este capítulo resultará ser uno de los más largos de la tesis.

3.1. Enunciado de teoremas y lema técnico

El primer teorema a presentar describe la relación entre las tres dimensiones que hemos introducido en el capítulo anterior.

Teorema 3.1.1 *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto límite de un SIF. Sea D_S la dimensión de semejanza del SIF. Entonces se cumple*

$$0 \leq D_{HB}(K) \leq \underline{D}_{MB}(K) \leq \overline{D}_{MB}(K) \leq D_S$$

A continuación vamos a ver dos condiciones tales que, juntas, son suficientes para que la dimensión de semejanza de un SIF y la dimensión de Hausdorff-Besicovitch de su compacto límite coincidan.

Definición 3.1.2 Dado un SIF (f_1, \dots, f_n) , con $n \in \mathbb{N}$, se dice que cumple la **Condición de conjunto abierto de Moran** cuando existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ no vacío y acotado tal que cumple de manera simultánea las siguientes propiedades:

$$i) f_i(U) \cap f_j(U) = \emptyset \text{ para } i \neq j$$

$$ii) \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} f_i(U) \subseteq U$$

Un tal conjunto U se llama **conjunto abierto de Moran** del SIF.

Teorema 3.1.3 Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto límite de un SIF cuyas funciones son contractivas homogéneas, y que cumple la condición de conjunto abierto de Moran. Sea D_S la dimensión de semejanza del SIF. Entonces se cumple

$$D_{HB}(K) = D_S$$

Ahora presentamos un lema técnico, necesario para demostrar los teoremas.

Lema 3.1.4 Sea (f_1, \dots, f_n) , con $n \in \mathbb{N}$, un SIF que cumple la condición de conjunto abierto de Moran. Sean (r_1, \dots, r_n) su lista de razones, K su compacto límite, D_S su dimensión de semejanza y U un abierto de Moran. Sea $0 < C \leq 1$, y sea $A \subseteq K$. Definimos los siguientes conjuntos:

$$P(C) = \{\vec{i} \in I^{(*)} : \text{diam}(f_{\vec{i}}(U)) < C \cdot \text{diam}(U) \leq \text{diam}(f_{\vec{i}^-}(U))\}$$

$$Q_C(A) = \left\{ \vec{i} \in P(C) : \overline{f_{\vec{i}}(U)} \cap A \neq \emptyset \right\}$$

Notemos antes de seguir que, por el Lema 1.1.15, el conjunto $P(C)$ se puede escribir de manera equivalente como

$$P(C) = \{ \vec{i} \in I^{(*)} : r_{\vec{i}} < C \leq r_{\vec{i}-} \}$$

Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.

$$(i) \sum_{\vec{i} \in P(C)} (r_{\vec{i}})^{D_S} = 1$$

$$(ii) A \subseteq \bigcup_{\vec{i} \in Q_C(A)} \overline{f_{\vec{i}}(U)}$$

3.2. Demostración de los teoremas

A continuación vamos a probar los teoremas asumiendo el Lema 3.1.4; éste será demostrado posteriormente (ver página 50).

Demostración del Teorema 3.1.1 Por definición tenemos $\underline{D}_{MB}(K) \leq \overline{D}_{MB}(K)$. Además, hemos probado anteriormente (Proposición 2.2.9) que $0 \leq D_{HB}(K)$. Luego quedan dos desigualdades por demostrar: $D_{HB}(K) \leq \underline{D}_{MB}(K)$ y $\overline{D}_{MB}(K) \leq D_S$.

Probemos que $D_{HB}(K) \leq \underline{D}_{MB}(K)$. Por ahora, anotemos $m = \underline{D}_{MB}(K)$. Vamos a probar que $\mathcal{M}_m(K) < \infty$. Esto implica que $D_{HB}(K) \leq m$. De hecho, probaremos que $\mathcal{M}(K, m, \epsilon) \leq 1 \forall \epsilon \in (0, 1)$.

Como

$$\inf \left\{ \frac{\ln(N_{\delta}(K))}{\ln(\frac{1}{\delta})} : 0 < \delta < \epsilon \right\}$$

es decreciente con ϵ creciente, se cumple

$$\inf \left\{ \frac{\ln(N_\delta(K))}{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)} : 0 < \delta < \epsilon \right\} \leq m \quad \forall \epsilon > 0$$

Entonces, dado $\epsilon \in (0, 1)$, existe $0 < \delta_\epsilon < \epsilon$ tal que

$$\frac{\ln(N_{\delta_\epsilon}(K))}{\ln\left(\frac{1}{\delta_\epsilon}\right)} \leq m$$

Como $\ln\left(\frac{1}{\delta_\epsilon}\right) > 0$, esto es equivalente a

$$N_{\delta_\epsilon}(K) \cdot \delta_\epsilon^m \leq 1$$

Entonces

$$\mathcal{M}(K, m, \epsilon) \leq N_{\delta_\epsilon}(K) \cdot \delta_\epsilon^m \leq 1$$

Luego $D_{HB}(K) \leq \underline{D}_{MB}(K)$.

Probemos ahora $\overline{D}_{MB}(K) \leq D_S$. Por ahora, anotemos $s = D_S$.

Debido a que

$$\sup \left\{ \frac{\ln(N_\delta(K))}{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)} : 0 < \delta < \epsilon \right\}$$

es creciente con ϵ creciente, tenemos

$$\overline{D}_{MB}(K) \leq \sup \left\{ \frac{\ln(N_\delta(K))}{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)} : 0 < \delta < \epsilon \right\} \quad \forall \epsilon > 0$$

Luego para cada $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta_\epsilon < \epsilon$ tal que

$$\overline{D}_{MB}(K) \leq \frac{\ln(N_{\delta_\epsilon}(K))}{\ln\left(\frac{1}{\delta_\epsilon}\right)}$$

Vamos a probar que existe $q > 0$ tal que para cada uno de estos δ_ϵ se cumple

$$\frac{\ln(N_{\delta_\epsilon}(K))}{\ln\left(\frac{1}{\delta_\epsilon}\right)} \leq \left(1 + \frac{\ln(q)}{\ln\left(\frac{1}{\delta_\epsilon}\right)}\right) \cdot s$$

Así tendremos

$$\overline{D_{MB}}(K) \leq \overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{\ln(q)}{\ln\left(\frac{1}{\delta_\epsilon}\right)}\right) \cdot s = s$$

Sea (r_1, \dots, r_n) , con $n \in \mathbb{N}$, la lista de razones del SIF. Sea $\epsilon \in (0, \text{diam}(K)]$ y su correspondiente $0 < \delta_\epsilon < \epsilon$.

Sea $P\left(\frac{\delta_\epsilon}{\text{diam}(U)}\right)$. Sea $\vec{i} \in P\left(\frac{\delta_\epsilon}{\text{diam}(U)}\right)$. Por la primera parte del Lema 3.1.4, y debido a que

$$r \cdot \frac{\delta_\epsilon}{\text{diam}(U)} \leq r_{\vec{i}}$$

la cardinalidad del conjunto $P\left(\frac{\delta_\epsilon}{\text{diam}(U)}\right)$ es a lo sumo

$$t = \left(r \cdot \frac{\delta_\epsilon}{\text{diam}(U)}\right)^{-s}$$

Además, por la segunda parte del Lema 3.1.4, se necesita a lo más t conjuntos con diámetro a lo sumo δ_ϵ para recubrir a K . Sea $q = \frac{\text{diam}(U)}{r} > 0$. Luego

$$\frac{\ln(N_{\delta_\epsilon}(K))}{\ln\left(\frac{1}{\delta_\epsilon}\right)} \leq \left(1 + \frac{\ln(q)}{\ln\left(\frac{1}{\delta_\epsilon}\right)}\right) \cdot s$$

Por lo tanto, hemos probado que $\overline{D_{MB}}(K) \leq s = D_S$.

□

Demostración del Teorema 3.1.3 Sea (f_1, \dots, f_n) , con $n \in \mathbb{N}$, un SIF compuesto por funciones contractivas homogéneas. Sea (r_1, \dots, r_n) su lista de razones, y sea K su compacto límite.

Del Teorema 3.1.1 sabemos que $D_{HB}(K) \leq D_S$; luego probaremos $D_S \leq D_{HB}(K)$. Así tendremos $D_{HB}(K) = D_S$.

Sea $s = D_S$ la dimensión de semejanza del SIF. Vemos que basta probar que existe una constante $q_0 > 0$ tal que

$$q_0 \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} (\text{diam}(A_j))^s \quad \forall \{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\epsilon(K), \quad \forall \epsilon > 0 \quad (\text{a})$$

Así, se tiene que $q_0 \leq \mathcal{M}(K, s, \epsilon) \quad \forall \epsilon > 0$. Luego tendremos $0 < \mathcal{M}_s(K)$ porque $\mathcal{M}_s(K) = \sup\{\mathcal{M}(K, s, \epsilon) : \epsilon > 0\}$. Esto implica $D_S \leq D_{HB}(K)$, por definición de $D_{HB}(K)$.

Probemos (a). Sea U un abierto de Moran del SIF. Dado $\emptyset \neq A \subseteq K$, tenemos

$$P \left(\frac{\text{diam}(A)}{\text{diam}(U)} \right) = \left\{ \vec{i} \in I^{(*)} : \text{diam}(f_{\vec{i}}(U)) < \text{diam}(A) \leq \text{diam}(f_{\vec{i}^-}(U)) \right\}$$

Para $C = \frac{\text{diam}(A)}{\text{diam}(U)}$, escribamos $Q(A) = Q_C(A)$. Es decir,

$$Q(A) = \left\{ \vec{i} \in P \left(\frac{\text{diam}(A)}{\text{diam}(U)} \right) : \overline{f_{\vec{i}}(U)} \cap A \neq \emptyset \right\}$$

Veamos que existe una constante $q > 0$ tal que $\#Q(A) \leq q$, independientemente del conjunto A .

Notemos que $f_{\vec{i}}(U) \subseteq B(a, 2 \cdot \text{diam}(A))$, cual sea $a \in A$ y para todo $\vec{i} \in Q(A)$. Luego

$$\sum_{\vec{i} \in Q(A)} \text{Área}(\overline{f_{\vec{i}}(U)}) \leq \pi \cdot (2 \cdot \text{diam}(A))^2$$

pues U es un abierto de Moran y los $f_{\vec{i}}(U)$, con $\vec{i} \in Q(A)$, son disjuntos dos a dos. Como $\text{Área}(\overline{f_{\vec{i}}(U)}) = \text{Área}(f_{\vec{i}}(U)) \forall \vec{i} \in Q(A)$, por el Lema 1.5.5 y recordando la definición de $P\left(\frac{\text{diam}(A)}{\text{diam}(U)}\right)$, tenemos

$$\left(\frac{\text{diam}(A) \cdot r}{\text{diam}(U)}\right)^2 \cdot \text{Área}(U) \leq (r_{\vec{i}})^2 \cdot \text{Área}(U) = \text{Área}(f_{\vec{i}}(U))$$

Entonces

$$\#Q(A) \leq \frac{4 \cdot \pi \cdot (\text{diam}(U))^2}{r^2 \cdot \text{Área}(U)}$$

Notemos que

$$q = \frac{4 \cdot \pi \cdot (\text{diam}(U))^2}{r^2 \cdot \text{Área}(U)} > 0$$

es independiente del conjunto A . Hemos probado entonces que existe $q > 0$ tal que

$$\#Q(A) \leq q \forall A \subseteq K$$

Veamos que para todo $\vec{i} \in I^\omega$ existe un único $x_{\vec{i}} \in K$ tal que $\bigcap_{l \in \mathbb{N}} f_{\vec{i}|_l}(\overline{U}) = \{x_{\vec{i}}\}$. Sea $\vec{i} \in I^\omega$. Tenemos entonces $(f_{\vec{i}|_l}(\overline{U}))_{l \in \mathbb{N}}$ sucesión decreciente de subconjuntos de K cerrados y no vacíos. Luego por el Teorema 1.1.3 se cumple

$$f_{\vec{i}}(\overline{U}) = \bigcap_{l \in \mathbb{N}} f_{\vec{i}|_l}(\overline{U}) \neq \emptyset$$

Además, dado $l \in \mathbb{N}$ se cumple $\text{diam}(f_{\vec{i}|_l}(\overline{U})) = r_{\vec{i}|_l} \cdot \text{diam}(\overline{U})$ por la segunda parte del Lema 1.1.15. Y como $\lim_{l \rightarrow \infty} r_{\vec{i}|_l} = 0$, no existen $x, y \in f_{\vec{i}}(\overline{U})$ con $x \neq y$. Por lo tanto $f_{\vec{i}}(\overline{U}) = \{x_{\vec{i}}\}$, con $x_{\vec{i}} \in \mathbb{R}^2$. Pero como $f_{\vec{i}}(\overline{U}) = f_{\vec{i}}(K)$, tenemos $x_{\vec{i}} \in K$.

Definamos ahora

$$h : I^\omega \longrightarrow K : \vec{i} \mapsto x_{\vec{i}}$$

Notemos que h está bien definida, pues para todo $\vec{i} \in I^\omega$ y todo U abierto de Moran se cumple $f_{\vec{i}}(\overline{U}) = f_{\vec{i}}(K)$.

Por otro lado, debido a que $K = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi^m(\overline{U})$, tenemos que h es epiyectiva.

A continuación vamos a probar que para todo $A \subseteq K$ se cumple

$$\mu(h^{-1}(A)) \leq \frac{q}{(\text{diam}(U))^s} \cdot (\text{diam}(A))^s$$

donde μ es la medida exterior asociada a

$$C : \left\{ \left[\vec{i} \right] : \vec{i} \in I^{(*)} \right\} \longrightarrow [0, \infty] : \left[\vec{i} \right] \mapsto r_{\vec{i}}^s$$

Sea $A \subseteq K$. Por la segunda parte del Lema 3.1.4, y por la primera parte del Lema 1.1.15, sabemos

$$A \subseteq \bigcup_{\vec{i} \in Q(A)} f_{\vec{i}}(\overline{U})$$

Notemos además que

$$h^{-1}(A) \subseteq \bigcup_{\vec{i} \in Q(A)} \left[\vec{i} \right]$$

Esto es debido a que para todo $\vec{j} \in I^\omega$ tal que $h(\vec{j}) = x_{\vec{j}} \in A$, para todo $l \in \mathbb{N}$ se cumple $x_{\vec{j}} \in f_{\vec{j}|_l}(\overline{U})$. Luego existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\vec{j}|_l \in Q(A)$, y entonces tenemos $\vec{j} \in \left[\vec{j}|_l \right] \subseteq \bigcup_{\vec{i} \in Q(A)} \left[\vec{i} \right]$.

Como μ es la medida exterior asociada a la función C tenemos

$$\begin{aligned} \mu(h^{-1}(A)) &\leq \mu \left(\bigcup_{\vec{i} \in Q(A)} \left[\vec{i} \right] \right) \\ &\leq \sum_{\vec{i} \in Q(A)} \mu \left(\left[\vec{i} \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\vec{i} \in Q(A)} C \left(\left[\vec{i} \right] \right) \\ &= \sum_{\vec{i} \in Q(A)} r_{\vec{i}}^s \end{aligned}$$

Por la segunda parte del Lema 1.1.15, y porque $\#Q(A) \leq q$, se cumple

$$\begin{aligned} \mu(h^{-1}(A)) &\leq \frac{1}{(\text{diam}(U))^s} \cdot \sum_{\vec{i} \in Q(A)} (\text{diam}(f_{\vec{i}}(U)))^s \\ &< \frac{1}{(\text{diam}(U))^s} \cdot \sum_{\vec{i} \in Q(A)} (\text{diam}(A))^s \\ &\leq \frac{q}{(\text{diam}(U))^s} \cdot (\text{diam}(A))^s \end{aligned}$$

Recordemos que queremos probar (a). Sea $\epsilon > 0$, y sea $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\epsilon(K)$ arbitrario.

Sin riesgo de pérdida de generalidad supondremos que $A_j \subseteq K \forall j \in \mathbb{N}$.

Como

$$h^{-1}(K) = h^{-1} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} h^{-1}(A_j)$$

y por lo recién probado, tenemos

$$\begin{aligned} \mu(h^{-1}(K)) &= \mu \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} h^{-1}(A_j) \right) \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(h^{-1}(A_j)) \\ &\leq \frac{q}{(\text{diam}(U))^s} \cdot \sum_{j \in \mathbb{N}} (\text{diam}(A_j))^s \end{aligned}$$

Sea $q_0 = \frac{(\text{diam}(U))^s}{q}$. Entonces, como $h^{-1}(K) = I^\omega$ y por el Lema 1.5.4 sabemos

que $\mu(I^\omega) = 1$, tenemos finalmente

$$q_0 \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} (\text{diam}(A_j))^s$$

Luego hemos probado (a) porque $q_0 > 0$.

Por lo tanto $D_{HB}(K) \leq D_S$.

□

3.3. Demostración del lema técnico

A continuación procedemos a demostrar el lema técnico.

Demostración del Lema 3.1.4

(i) Dado $C \leq \rho \leq 1$, definamos

$$P_\rho(C) = \{\vec{i} : \rho \cdot r_{\vec{i}} < C \leq \rho \cdot r_{\vec{i}^-}\}$$

y probemos que se cumple

$$\sum_{\vec{i} \in P_\rho(C)} (\rho \cdot r_{\vec{i}})^s = \rho^s \quad \forall C \leq \rho \leq 1 \quad (\text{b})$$

Notemos que $P_1(C) = P(C)$.

Ahora, para probar la afirmación (b), dado $C \leq \rho \leq 1$ vamos a considerar la altura de $P_\rho(C)$:

$$\text{Alt}(P_\rho(C)) = \text{máx}\{|\vec{i}| : \vec{i} \in P_\rho(C)\}$$

Notemos primero que $P_\rho(C)$ es finito, pues existe $m_\rho \in \mathbb{N}$ tal que $\rho \cdot \bar{r}^{m_\rho} < C$, y luego $\text{Alt}(P_\rho(C)) \leq m_\rho$.

Notemos además que, para $C \leq \rho' < \rho \leq 1$, se cumple

$$\text{Alt}(P_{\rho'}(C)) \leq \text{Alt}(P_{\rho}(C))$$

Probemos (b) por inducción sobre $\text{Alt}(P_{\rho}(C))$.

Si $\text{Alt}(P_{\rho}(C)) = 1$, como es el caso cuando $\rho = C$, tenemos $P_{\rho}(C) = I$ y entonces

$$\sum_{\vec{i} \in P_{\rho}(C)} (\rho \cdot r_{\vec{i}})^s = \rho^s \cdot \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} r_i^s = \rho^s$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que (b) se cumple para todo $C \leq \rho \leq 1$ con $\text{Alt}(P_{\rho}(C)) \leq m$.

Probemos (b) suponiendo que $\text{Alt}(P_{\rho}(C)) = m + 1$. Entonces

$$I = I_0 \cup I_1$$

donde

$$I_0 = \{i \in I : \rho \cdot r_i < C\}$$

y

$$I_1 = \{i \in I : C \leq \rho \cdot r_i\}$$

Afirmamos entonces

$$P_{\rho}(C) = I_0 \cup \left(\bigcup_{i \in I_1} iP_{\rho \cdot r_i}(C) \right) \quad (c)$$

donde $iP_{\rho \cdot r_i}(C) = \{i\vec{j} : \vec{j} \in P_{\rho \cdot r_i}(C)\} \forall i \in I_1$.

Vamos a probar (c). Probemos primero que $P_{\rho}(C) \subseteq I_0 \cup \left(\bigcup_{i \in I_1} iP_{\rho \cdot r_i}(C) \right)$.

Sea $\vec{i} \in P_{\rho}(C)$ cualquiera. Si $|\vec{i}| = 1$, entonces $\vec{i} = i_1 \in I_0$. Y si $|\vec{i}| \geq 2$, entonces $\vec{i} = (i_1, \dots, i_l)$, algún $l \in \mathbb{N}$, con $i_1 \in I_1$ y $(i_2, \dots, i_l) \in P_{\rho \cdot r_{i_1}}(C)$. Luego

$$\vec{i} \in i_1 P_{\rho \cdot r_{i_1}}(C).$$

Probemos ahora que $I_0 \cup \left(\bigcup_{i \in I_1} i P_{\rho \cdot r_i}(C) \right) \subseteq P_\rho(C)$. Si $i \in I_0$, tenemos entonces $\vec{i} = i \in P_\rho(C)$. En cambio, si $i\vec{j} \in i P_{\rho \cdot r_i}(C)$ con $i \in I_1$ y $\vec{j} \in P_{\rho \cdot r_i}(C)$, se cumple $i\vec{j} \in P_\rho(C)$. Hemos probado así la afirmación (c).

Afirmamos también

$$\text{Alt}(P_{\rho \cdot r_i}(C)) < \text{Alt}(P_\rho(C)) \quad \forall i \in I \quad (d)$$

Probemos (d). Sea $i \in I_1$, y sea $\vec{j} \in P_{\rho \cdot r_i}(C)$ tal que $|\vec{j}| = \text{Alt}(P_{\rho \cdot r_i}(C))$.

Entonces

$$\rho \cdot r_i \cdot r_{\vec{j}} < C \leq \rho \cdot r_i \cdot r_{\vec{j}^-}$$

Luego $i\vec{j} \in P_\rho(C)$, y entonces

$$\text{Alt}(P_{\rho \cdot r_i}(C)) = |\vec{j}| < |i\vec{j}| \leq \text{Alt}(P_\rho(C))$$

Ahora que hemos probado (d), podemos terminar la demostración del lema.

Por la afirmación (c) tenemos

$$\sum_{\vec{i} \in P_\rho(C)} (\rho \cdot r_{\vec{i}})^s = \sum_{i \in I_0} (\rho \cdot r_i)^s + \sum_{i \in I_1} r_i^s \left(\sum_{\vec{j} \in P_{\rho \cdot r_i}(C)} (\rho \cdot r_{\vec{j}})^s \right)$$

Y como $\text{Alt}(P_{\rho \cdot r_i}(C)) \leq m \quad \forall i \in I_1$,

$$\sum_{\vec{i} \in P_\rho(C)} (\rho \cdot r_{\vec{i}})^s = \sum_{i \in I_0} (\rho \cdot r_i)^s + \sum_{i \in I_1} r_i^s \cdot \rho^s = \rho^s$$

Y con esto terminamos la demostración de esta parte del lema.

- (ii) Sea $a \in A$. Como $A \subseteq K$, y K es el compacto límite del SIF, existe $\vec{i} \in I^\omega$ tal que $a \in f_{\vec{i}}(\bar{U})$.

Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\vec{i}|_k \in P(C)$ por lo que, junto a la primera parte del Lema 1.1.15, se concluye que $a \in \overline{f_{\vec{i}|_k}(U)}$.

Luego $A \subseteq \bigcup_{\vec{i} \in Q_C(A)} \overline{f_{\vec{i}}(U)}$ debido a la arbitrariedad de a .

□

3.4. Otros resultados y ejemplos

A partir de la hipótesis del Teorema 3.1.3 se desprende el siguiente resultado.

Proposición 3.4.1 *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto límite de un SIF compuesto por funciones homogéneas, y sea s su dimensión de semejanza. Entonces*

$$0 < \mathcal{M}_s(K) < \infty$$

Para demostrar la Proposición 3.4.1, es necesario el siguiente lema.

Lema 3.4.2 *Sean $m \in \mathbb{N}$ y $A \subset \mathbb{R}$ tal que $\#A \in \mathbb{N}$. Sea*

$$A^m = \{\vec{a} = (a_1, \dots, a_m) : a_j \in A \forall j \in \{1, \dots, m\}\}$$

Entonces se cumple

$$\sum_{\vec{a} \in A^m} a_1 \cdot a_2 \cdots a_m = \left(\sum_{a \in A} a \right)^m$$

Demostración Sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que $\#A \in \mathbb{N}$. Probaremos este lema mediante inducción sobre m . Como el caso $m = 1$ es claro, pasemos al paso inductivo. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ con $\#A = m$ cumple

$$\sum_{\vec{a} \in A^m} a_1 \cdot a_2 \cdots a_m = \left(\sum_{a \in A} a \right)^m$$

Entonces, sea $A \subseteq \mathbb{R}$ con $\#A = m + 1$. Luego

$$\begin{aligned}
 \sum_{\vec{a} \in A^{m+1}} a_1 \cdot a_2 \cdots a_m \cdot a_{m+1} &= \sum_{\substack{\vec{a} \in A^m \\ a \in A}} a_1 \cdot a_2 \cdots a_m \cdot a \\
 &= \sum_{\vec{a} \in A^m} \left(a_1 \cdot a_2 \cdots a_m \cdot \left(\sum_{a \in A} a \right) \right) \\
 &= \left(\sum_{a \in A} a \right)^m \cdot \left(\sum_{a \in A} a \right) \\
 &= \left(\sum_{a \in A} a \right)^{m+1}
 \end{aligned}$$

□

Demostración de la Proposición 3.4.1 De la demostración del Teorema 3.1.3, rescatamos que $0 < \mathcal{M}_s(K)$.

Ahora demostraremos que $\mathcal{M}_s(K) < \infty$. Recordemos que

$$\mathcal{M}_s(K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{M}(K, s, \epsilon)$$

Sea $\epsilon > 0$. Vamos a probar que $\mathcal{M}(K, s, \epsilon) \leq (\text{diam}(K))^s$. Entonces tendremos $\mathcal{M}_s(K) < \infty$.

Construyamos un recubrimiento en $\mathcal{R}_\epsilon(K)$. Sea (r_1, \dots, r_n) la lista de razones del SIF, y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bar{r}^m \cdot \text{diam}(K) \leq \epsilon$$

Luego

$$\text{diam}(f_{\vec{r}_i}(K)) \leq \epsilon, \quad \forall \vec{r}_i \in I^m$$

Como K es el compacto invariante del SIF, tenemos

$$K = \bigcup_{\vec{i} \in I^m} f_{\vec{i}}(K)$$

Entonces, ocupando el Lema 3.4.2 tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(K, s, \epsilon) &\leq \sum_{\vec{i} \in I^m} [\text{diam}(f_{\vec{i}}(K))]^s \\ &= \sum_{\vec{i} \in I^m} r_{\vec{i}}^s \cdot (\text{diam}(K))^s \\ &= \left(\sum_{i \in I} r_i^s \right)^m \cdot (\text{diam}(K))^s \\ &= 1^m \cdot (\text{diam}(K))^s \end{aligned}$$

Luego hemos probado

$$\mathcal{M}(K, s, \epsilon) \leq (\text{diam}(K))^s \quad \forall \epsilon > 0$$

Por lo tanto $\mathcal{M}_s(K) < \infty$.

□

A continuación veremos dos ejemplos de SIF que muestran que las condiciones en el SIF dadas por la hipótesis del Teorema 3.1.3 son necesarias simultáneamente.

El primer ejemplo es un SIF cuyas funciones no son todas contractivas homogéneas, y que cumple la condición de conjunto abierto de Moran. Veremos que su dimensión de semejanza y la dimensión de Hausdorff-Besicovitch de su compacto límite no coinciden.

Ejemplo 3.4.3 Sean

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{3} \cdot (x, y) + \left(\frac{2}{3}, 0\right)$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{2}\right)$$

Es inmediato ver que f_1 es una función contractiva homogénea con razón de contracción $\frac{1}{3}$.

Veamos que la función f_2 es contractiva con razón de contracción distinto a $\frac{1}{3}$.

Primero, notemos que para $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ cualesquiera se cumple

$$\begin{aligned} \|f_2(x, y) - f_2(x', y')\| &= \left\| \left(\frac{1}{3} \cdot (x - x'), \frac{1}{2} \cdot (y - y') \right) \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \|(x, y) - (x', y')\| \end{aligned}$$

Por lo que f_2 es una función contractiva, con razón de contracción $r_2 \leq \frac{1}{2}$.

Segundo, notemos que para $(0, 2), (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ tenemos

$$\|f_2(0, 2) - f_2(0, 1)\| > \frac{1}{3} \cdot \|(0, 2) - (0, 1)\|$$

por lo que f_2 no puede tener razón de contracción $\frac{1}{3}$.

Finalmente, veamos que f_2 no es función contractiva homogénea; para los puntos $(2, 0), (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ tenemos

$$\|f_2(2, 0) - f_2(1, 0)\| = \frac{1}{3} \cdot \|(2, 0) - (1, 0)\|$$

Veamos que el SIF cumple la condición de conjunto abierto de Moran.

Sea $U = (0, 1) \times (0, 1)$. Notemos que $f_1(U) = \left(\frac{2}{3}, 1\right) \times \left(0, \frac{1}{3}\right)$ y $f_2(U) = \left(0, \frac{1}{3}\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Luego U es un abierto de Moran del SIF.

Calculemos ahora la dimensión de Hausdorff-Besicovitch del compacto límite K de este SIF. Sean $A = [0, 1] \times \{0\}$ compacto inicial, y $\phi : \mathcal{K}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ la función asociada al SIF. Sea K el compacto límite del SIF, y recordemos que

$$K = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi^m(A)$$

Notemos que $\phi(A) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \{0\} \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \times \{0\}$, que $f_1(x, 0) = \left(\frac{x+2}{3}, 0\right)$ y que $f_2(x, 0) = \left(\frac{x}{3}, 0\right) \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces, el compacto límite de este SIF es el conjunto de Cantor, que estudiaremos en la sección 4.1. Tal como veremos más tarde (página 63) su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es

$$D_{HB}(K) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \simeq 0.63 \in (0, 1)$$

Pero debido a que la dimensión de semejanza del SIF es aquel real s que satisface $\left(\frac{1}{3}\right)^s + r_2^s = 1$, y $r_2 \neq \frac{1}{3}$, se tiene $D_{HB}(K) \neq s$.

El siguiente ejemplo consiste en un SIF compuesto por funciones contractivas homogéneas, y que no cumple la condición de conjunto abierto de Moran. Veremos que la dimensión de semejanza de este SIF y la dimensión de Hausdorff-Besicovitch de su compacto límite no coinciden.

Ejemplo 3.4.4 Al SIF (f_1, f_2, f_3) del triángulo de Sierpiński, definido en la sección 4.3, le agregaremos una función f_4 contractiva homogénea tal que no modifica el compacto límite, y tal que el nuevo SIF (f_1, f_2, f_3, f_4) no cumple la condición de

conjunto abierto de Moran. El SIF queda entonces así:

$$\begin{aligned} f_1: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x, y) \\ f_2: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x, y) + \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ f_3: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x, y) + \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \\ f_4: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \mapsto \frac{1}{4} \cdot (x, y) \end{aligned}$$

Claramente todas estas funciones son contractivas homogéneas.

Probemos que este SIF no cumple la condición de conjunto abierto de Moran. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y acotado. Para que se cumpla $f_4(U) \subseteq U$, para todo $u \in U$ es necesario que se cumpla $\frac{1}{4} \cdot u \in U$. Además, es necesario que exista $u' \in U$ tal que $\frac{1}{2} \cdot u = u'$, para que así $f_1(U) \subseteq U$. Pero entonces, $f_4(u) = f_1(u')$. Entonces se cumple $f_4(U) \subseteq f_1(U)$. Por lo tanto U no puede ser abierto de Moran del SIF.

Consideremos como compacto inicial A , el triángulo equilátero con base $[0, 1] \times \{0\}$ y vértice opuesto a ésta el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Tenemos $f_4(A) \subseteq f_1(A)$, luego el compacto límite es el triángulo de Sierpiński, el cual veremos (página 67) que tiene dimensión de Hausdorff-Besicovitch $D_{HB} = \frac{\ln 3}{\ln 2}$. Sin embargo, la dimensión de semejanza es aquel real D_S tal que

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{D_S} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{D_S} = 1$$

Por lo tanto, la dimensión de semejanza de este SIF no coincide con la dimensión de Hausdorff-Besicovitch de su compacto límite.

Presentamos ahora otro resultado.

Proposición 3.4.5 *Si un SIF compuesto por funciones abiertas cumple la condición de conjunto abierto de Moran, y un abierto de Moran contiene al compacto límite K del SIF, entonces K es totalmente desconexo.*

Demostración Sea (f_1, \dots, f_n) , con $n \in \mathbb{N}$, un SIF compuesto por funciones abiertas y que cumple la condición de conjunto abierto de Moran. Sea K su compacto límite, y sea U abierto de Moran tal que $K \subseteq U$. Sean $l_1, l_2 \in K$ con $l_1 \neq l_2$. Demostraremos que existen dos abiertos disjuntos $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ tales que $l_1 \in U_1$ y $l_2 \in U_2$. Así, K no puede tener un subconjunto conexo con más de un elemento.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bar{r}^m \cdot \text{diam}(U) < \frac{d(l_1, l_2)}{2}$$

Sea $\vec{i} \in I^m$ tal que $l_1 \in f_{\vec{i}}(K)$. Entonces como $K \subseteq U$, tenemos $\text{diam}(K) \leq \text{diam}(U)$ y $l_1 \in f_{\vec{i}}(U)$. Luego

$$\text{diam}(f_{\vec{i}}(U)) \leq \bar{r}^m \cdot \text{diam}(U) < \frac{d(l_1, l_2)}{2}$$

Sea $\vec{j} \in I^m$ tal que $l_2 \in f_{\vec{j}}(K)$. Entonces tenemos $U_1 = f_{\vec{i}}(U)$ y $U_2 = f_{\vec{j}}(U)$ abiertos porque las funciones que componen el SIF son abiertas, y disjuntos debido a que U es un abierto de Moran.

Por lo tanto K es totalmente desconexo.

□

Veamos a continuación un SIF, compuesto por funciones abiertas, que cumple la condición de conjunto abierto de Moran pero que no posee abierto de Moran que

contiene al compacto límite. Veremos que dicho compacto no es totalmente disconexo.

Ejemplo 3.4.6 *Este fractal se llama triángulo de Sierpiński, y lo introducimos con más detalle en la sección 4.3. Adelantamos las funciones que componen el SIF.*

$$\begin{aligned} f_1: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x, y) \\ f_2: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x, y) + \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ f_3: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x, y) + \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \end{aligned}$$

Por el momento, basta mencionar que cumple la condición de conjunto abierto de Moran, puesto que lo demostraremos más adelante (página 66).

Trabajamos con el compacto inicial que consiste en el triángulo equilátero con base $[0, 1] \times \{0\}$ y vértice opuesto a ésta el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Debido a que los puntos $(0, 0)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pertenecen al triángulo de Sierpiński, y a que $f_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = f_3(0, 0)$, no existe abierto de Moran que contiene al compacto límite.

Consideremos el conjunto

$$T = \left\{ \left(x, \sqrt{3} \cdot x \right) : x \in \left[0, \frac{1}{2} \right] \right\}$$

Notemos que está contenido en el compacto inicial ya mencionado, y que además satisface

$$T = f_1(T) \cup f_3(T)$$

por lo que T es un subconjunto del triángulo de Sierpiński. Luego este último no puede ser totalmente disconexo puesto que T es conexo y posee más de un punto.

Capítulo 4

Ejemplos conocidos de fractales

A continuación expondremos tres fractales conocidos. Comprobaremos que son autosemejantes, verificaremos que cumplen la condición de conjunto abierto de Moran y calcularemos sus distintas dimensiones. Esta sección sirve de práctica antes de trabajar en fractales más complejos.

4.1. Conjunto de Cantor

Este es un ejemplo de fractal en la recta real.

Tomemos el intervalo $[0, 1]$, que llamaremos B . Éste se divide en tres partes iguales, se remueve el segmento central abierto en sus extremos y se obtiene B_1 . De manera sucesiva, B_m se obtiene realizando el mismo proceso a cada uno de los intervalos de B_{m-1} . Notemos que $B_m \subset B_{m-1} \forall m \in \mathbb{N}$. El **conjunto de Cantor** es

$$C = \lim_{m \rightarrow \infty} B_m = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} B_m$$

La figura 4.1 ilustra las primeras aproximaciones del conjunto de Cantor a partir de $B = [0, 1]$.

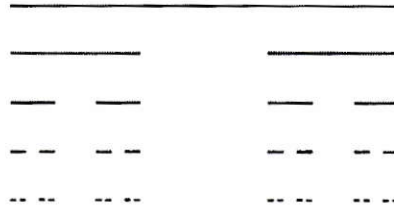


Figura 4.1: Obtención del conjunto de Cantor a partir de $B = [0, 1]$.

El SIF que describe el proceso es (f_1, f_2) definido como:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{3} \\ f_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$\phi : \mathcal{K}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^2) : A \mapsto f_1(A) \cup f_2(A)$$

Notemos que en la explicación anterior definimos el conjunto de Cantor como

$$C = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi^m(B)$$

Luego el conjunto de Cantor C es el compacto límite del SIF (f_1, f_2) . Es autosemejante porque ambas funciones son contractivas regulares, por la Proposición 2.1.2.

Veamos ahora que cumple la condición de conjunto abierto de Moran. Tomaremos como abierto $U = (0, 1)$. Como $f_1(U) = (0, \frac{1}{3})$ y $f_2(U) = (\frac{2}{3}, 1)$, tenemos $f_1(U) \cap f_2(U) = \emptyset$ y $\phi(U) \subseteq U$. Por lo tanto, el conjunto de Cantor cumple la condición de conjunto abierto de Moran.

Calculemos la dimensión de semejanza del SIF. Debido a que la lista de razones de contracción del SIF que define el conjunto de Cantor es $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, la dimensión de semejanza de este SIF es el número real D_S tal que

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{D_S} + \left(\frac{1}{3}\right)^{D_S} = 1$$

Por lo tanto, la dimensión de semejanza del SIF es

$$D_S = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \simeq 0.63 \in (0, 1)$$

Como además f_1 y f_2 son ambas funciones contractivas homogéneas, por el Teorema 3.1.3 las dimensiones de Hausdorff-Besicovitch y de Minkowski-Bouligand del compacto límite coinciden con la dimensión de semejanza del SIF. Luego la dimensión de Minkowski-Bouligand del conjunto de Cantor es fraccionaria, y entonces este conjunto es un fractal.

4.2. Curva de Koch

Presentamos el siguiente SIF.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{3} \cdot (x, y) \\ f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto R_{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{3} \cdot (x, y) \right) + \left(\frac{1}{3}, 0 \right) \\ f_3 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto R_{-\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{3} \cdot (x, y) \right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \\ f_4 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{3} \cdot (x, y) + \left(\frac{2}{3}, 0 \right) \end{aligned}$$

Notemos que $R_\theta(\vec{v})$ indica la rotación del vector \vec{v} alrededor del origen del plano en un ángulo θ , y también que cada función es contractiva homogénea con razón de

contracción $\frac{1}{3}$.

El compacto límite de este SIF anterior es conocido como la **curva de Koch** K , el cual notamos que es autosemejante por la Proposición 2.1.2, puesto que las funciones del SIF son contracciones regulares. La figura 4.3 representa la séptima aproximación de este compacto.

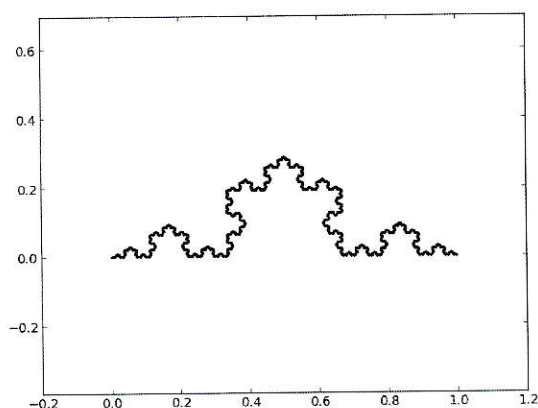


Figura 4.2: Séptima aproximación de la curva de Koch.

Veamos que el SIF cumple la condición de conjunto abierto de Moran. Tomaremos como abierto U el interior del triángulo isósceles de ángulos basales $\frac{\pi}{6}$, con base $[0, 1] \times \{0\}$ y cuyo vértice opuesto a ésta es $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$. Entonces ϕ transforma U en el interior de cuatro triángulos isósceles más pequeños, todos disjuntos y contenidos en U . En la figura 4.3, el triángulo gris es U , y la zona negra es $\phi(U)$. Como cada triángulo negro es la representación de $f_i(U)$, algún $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, concluimos que la curva de Koch cumple la condición de conjunto abierto de Moran.

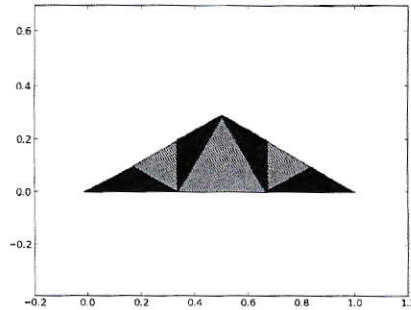


Figura 4.3: Un abierto de Moran del SIF de la curva de Koch.

Calculemos la dimensión de semejanza del SIF. Ésta es el siguiente número real.

$$D_S = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \simeq 1.26 \in (1, 2)$$

Recordemos que las cuatro funciones de este SIF son contractivas homogéneas. Luego por Teorema 3.1.3 la dimensión de Minkowski-Bouligand de la curva de Koch es fraccionaria. Concluimos entonces que la curva de Koch es un fractal.

4.3. Triángulo de Sierpiński

Sea (f_1, f_2, f_3) el siguiente SIF.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x, y) \\ f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x, y) + \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ f_3 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x, y) + \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \end{aligned}$$

El **triángulo de Sierpiński** es el compacto límite S de dicho SIF. La figura 4.4 representa la octava aproximación del compacto límite de este SIF.

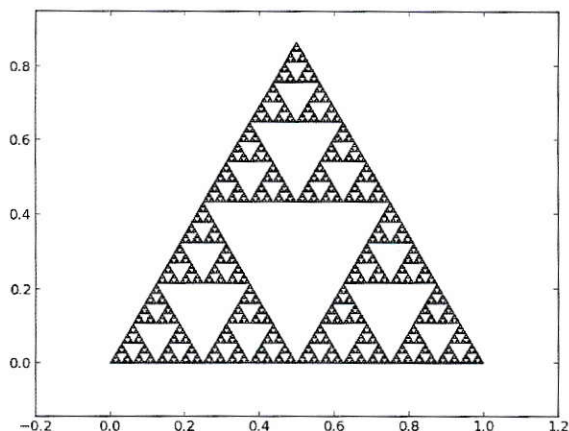


Figura 4.4: Octava aproximación del triángulo de Sierpiński.

Notemos que el triángulo de Sierpiński es un conjunto autosemejante porque cada función que compone el SIF es contracción regular, por la Proposición 2.1.2.

Veamos que este SIF cumple la condición de conjunto abierto de Moran. Consideremos como abierto U el interior del triángulo equilátero con base $[0, 1] \times \{0\}$ y vértice opuesto a ésta el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Notemos que la función asociada al SIF ϕ transforma U en la unión disjunta de tres triángulos equiláteros más pequeños, cada uno correspondiente al conjunto imagen $f_i(U)$, con cierto $i \in \{1, 2, 3\}$. Como además estos triángulos se encuentran contenidos en U , el triángulo de Sierpiński cumple la

condición de conjunto abierto de Moran. La figura 4.5 ilustra la situación; U es el triángulo descrito por el contorno exterior, y $\phi(U)$ es la zona de color negro.

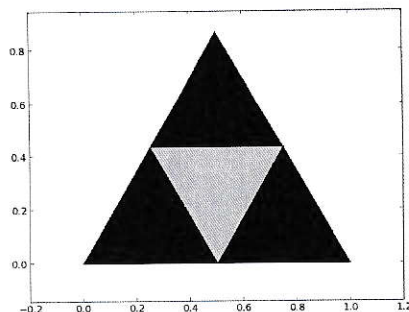


Figura 4.5: Un abierto de Moran del SIF del triángulo de Sierpiński.

Calculemos la dimensión de semejanza del SIF. Debido a que la lista de razones de contracción del SIF que define el triángulo de Sierpiński es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, su dimensión de semejanza es el siguiente número real D_S .

$$D_S = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq 1.58 \in (1, 2)$$

Por lo tanto, como las funciones de este SIF son contractivas homogéneas, el Teorema 3.1.3 nos indica que la dimensión Minkowski-Bouligand del compacto límite coincide con la dimensión de semejanza del SIF, por lo que es fraccionaria.

Entonces el triángulo de Sierpiński es un fractal.

Capítulo 5

Otros ejemplos

5.1. Una modificación de la curva de Koch

A continuación haremos una modificación simple de la curva de Koch. Al SIF ya estudiado, le agregaremos cuatro funciones que resultan de la composición de una función del SIF usual de la curva de Koch, con una reflexión respecto al eje de abscisas. Entonces, el SIF queda así:

$$\begin{aligned}f_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{3} \cdot (x, y) \\f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto R_{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{3} \cdot (x, y) \right) + \left(\frac{1}{3}, 0 \right) \\f_3 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto R_{-\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{3} \cdot (x, y) \right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \\f_4 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{3} \cdot (x, y) + \left(\frac{2}{3}, 0 \right) \\f_5 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{3} \cdot (x, -y) \\f_6 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto R_{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{3} \cdot (x, -y) \right) + \left(\frac{1}{3}, 0 \right) \\f_7 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto R_{-\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{3} \cdot (x, -y) \right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2\sqrt{3}} \right) \\f_8 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{3} \cdot (x, -y) + \left(\frac{2}{3}, 0 \right)\end{aligned}$$

Todas las funciones que componen este SIF son contracciones regulares, por lo que el compacto límite es autosemejante debido a la Proposición 2.1.2.

La figura 5.1 representa la cuarta aproximación del compacto límite de este SIF.

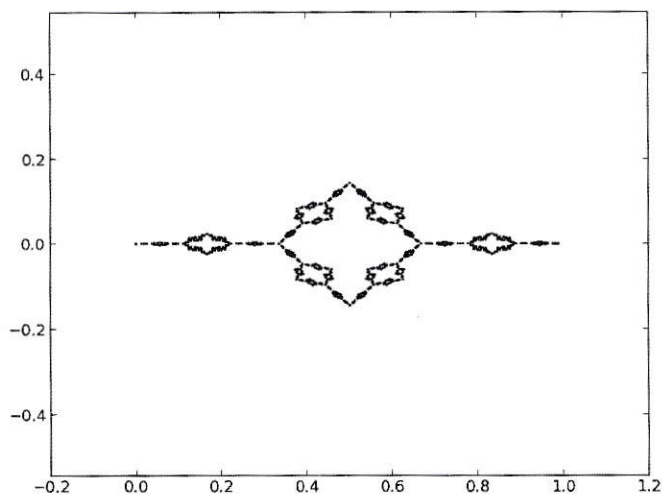


Figura 5.1: Cuarta aproximación de la curva de Koch modificada con reflexiones en torno al eje de las abscisas.

Además, la unión de un abierto de Moran de la curva de Koch con su reflexión respecto al eje de las abscisas, es un abierto de Moran para este SIF. Por lo tanto, la dimensión de Minkowski-Bouligand del compacto límite y la dimensión de semejanza de este SIF coinciden, por Teorema 3.1.3.

Debido a que todas las funciones que componen el SIF son funciones contractivas

homogéneas con razón de contracción $\frac{1}{3}$, este valor es

$$D_S = \frac{\ln(8)}{\ln(3)} \simeq 1.89 \in (1, 2)$$

Entonces el compacto límite de este SIF es un fractal.

5.2. Modificación I del triángulo de Sierpiński

Recordando que el SIF cuyo compacto límite es el triángulo de Sierpiński subdivide un triángulo equilátero de lado 1 en cuatro pequeños triángulos y conserva tres de éstos (figura 4.5), a continuación haremos algo similar. Vamos a subdividir el mismo triángulo en dieciséis triángulos equiláteros, de lado $\frac{1}{4}$, y conservaremos 10 de éstos. La figura 5.2 representa de color negro los triángulos a conservar.

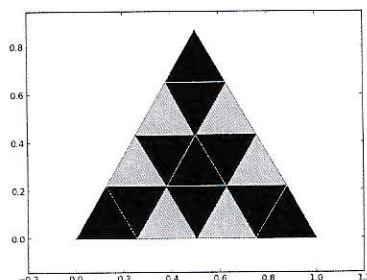


Figura 5.2: Subdivisión de un triángulo equilátero en 16 triángulos semejantes.

A continuación presentamos un SIF que corresponde a la situación recién ilustrada.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{4} \cdot (x, y) \\ f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{4} \cdot (x, -y) + \left(\frac{1}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \\ f_3 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{4} \cdot (x, -y) + \left(\frac{3}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_4 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{4} \cdot (x, -y) + \left(\frac{5}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8}\right) \\
 f_5 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{4} \cdot (x, y) + \left(\frac{3}{4}, 0\right) \\
 f_6 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{4} \cdot (x, -y) + \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \\
 f_7 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{4} \cdot (x, y) + \left(\frac{3}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8}\right) \\
 f_8 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{4} \cdot (x, -y) + \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \\
 f_9 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{4} \cdot (x, -y) + \left(\frac{3}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) \\
 f_{10} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{4} \cdot (x, y) + \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)
 \end{aligned}$$

La figura 5.3 representa su cuarta aproximación.

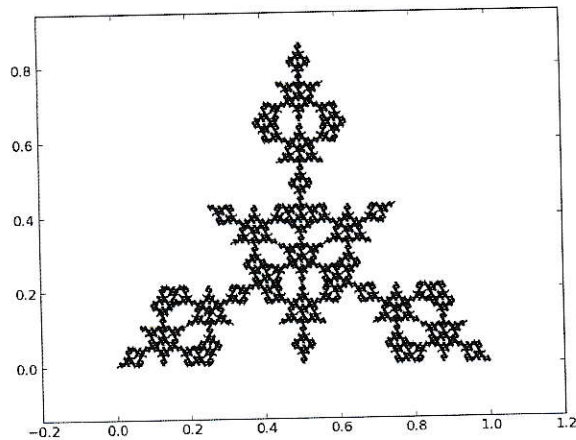


Figura 5.3: Cuarta aproximación del compacto límite del SIF Modificación I de Sierpiński.

Notemos que todas estas funciones son contracciones regulares, por lo que el compacto límite es autosemejante tal como lo indica la Proposición 2.1.2.

Además, es inmediato ver que el interior del triángulo equilátero original, de lado 1, es un abierto de Moran de este SIF; luego por Teorema 3.1.3, y también debido a que la razón de contracción de cada una de estas funciones contractivas homogéneas es $\frac{1}{4}$, sabemos que las dimensiones de Hausdorff-Besicovitch y de Minkowski-Bouligand del compacto límite tienen el siguiente valor:

$$D_S = \frac{\ln(10)}{\ln(4)} \simeq 1.66 \in (1, 2)$$

Luego el compacto límite es un fractal.

5.3. Sierkoch y Kochpiński

1. Sierkoch

El compacto límite del SIF a presentar será denominado **Sierkoch**, puesto que es la composición de dos SIF: una modificación del SIF cuyo compacto límite es el triángulo de Sierpiński, y el SIF de la curva de Koch.

Recordemos el SIF del triángulo de Sierpiński, visto en la sección 4.3. Definimos las siguientes funciones, donde las dos primeras corresponden a las dos primeras funciones del SIF del triángulo de Sierpiński, y la tercera posee una pequeña modificación. Llamaremos este SIF como **Modificación II de Sier-**

piński.

$$\begin{aligned}
 f_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x, y) \\
 f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x, y) + \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \\
 f_3 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x, y) + \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{12} \right)
 \end{aligned}$$

El objetivo de dicha modificación es que este nuevo SIF tenga el mismo abierto de Moran que el SIF de la curva de Koch. Recordemos que el SIF del triángulo de Sierpiński subdivide un triángulo equilátero; este SIF subdivide el triángulo isósceles de ángulos basales $\frac{\pi}{6}$, con base el segmento $[0, 1] \times \{0\}$ y vértice opuesto a ésta el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

La figura 5.4 es una representación de la séptima aproximación del compacto límite de este SIF.

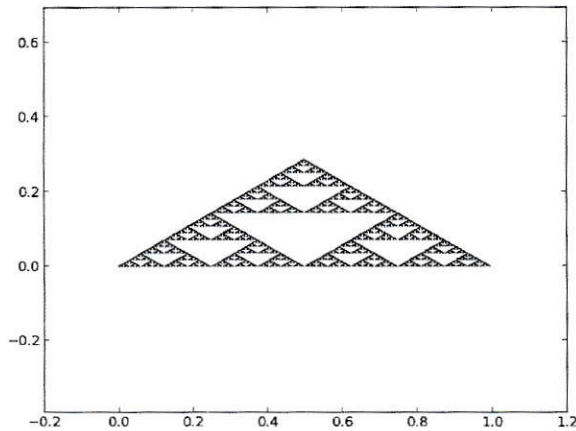


Figura 5.4: Séptima aproximación de la Modificación II del triángulo de Sierpiński.

Notemos que las funciones de este SIF son contractivas homogéneas con razón de contracción $\frac{1}{2}$. Además, este SIF cumple la condición de conjunto abierto de Moran, pues por construcción el interior del triángulo isósceles con ángulos basales $\frac{\pi}{6}$ es un abierto de Moran, base $[0, 1] \times \{0\}$ y vértice opuesto a ésta $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

Sea ahora (g_1, g_2, g_3, g_4) el SIF cuyo compacto límite es la curva de Koch, visto en la sección 4.2. Ya vimos que estas funciones son contractivas homogéneas con razón de contracción $\frac{1}{3}$. Además, el SIF cumple la condición de conjunto abierto de Moran, ya que el interior del mismo triángulo isósceles descrito más arriba es uno de sus abiertos de Moran.

Entonces, creamos un SIF de 12 funciones $h_{i,j}$, donde para $i \in \{1, 2, 3\}$ y $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ la función $h_{i,j} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es de la forma

$$h_{i,j} = f_i \circ g_j$$

Notemos que la composición de dos funciones contractivas regulares es una función contractiva regular, por lo que Sierkoch es autosemejante por la Proposición 2.1.2.

En la figura 5.5 observamos el gráfico de la tercera aproximación de Sierkoch.

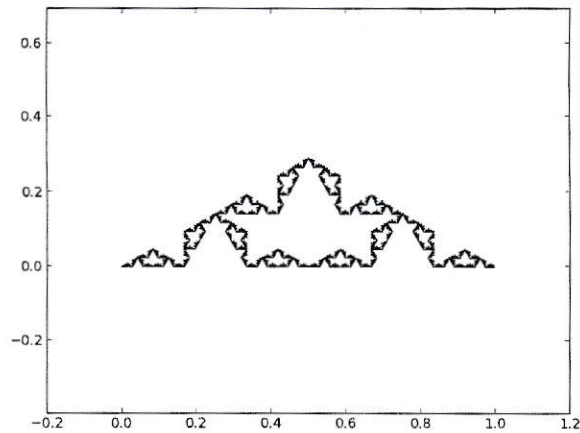


Figura 5.5: Tercera aproximación de Sierkoch.

Por otro lado, este SIF cumple la condición de conjunto abierto de Moran; el interior del triángulo isósceles ya descrito es un abierto de Moran de este SIF. Luego, para conocer la dimensión de Minkowski-Bouligand de su compacto límite, podemos calcular la dimensión de semejanza del SIF debido al Teorema 3.1.3. Como la razón de contracción de cada función $h_{i,j}$, con $i \in \{1, 2, 3\}$ y $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, es

$$r_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

su dimensión de semejanza D_S es:

$$D_S = \frac{\ln(12)}{\ln(6)} \simeq 1.39 \in (1, 2)$$

Entonces Sierkoch es un fractal.

2. Kochpiński

Vamos a presentar un SIF resultante de la composición del SIF de la curva de Koch y del SIF del triángulo de Sierpiński modificado como lo indicado en la página 73. El compacto límite será denominado **Kochpiński**.

Sea (g_1, g_2, g_3, g_4) el SIF cuyo compacto límite es la curva de Koch, visto en la sección 4.2. Sea también (f_1, f_2, f_3) el SIF del triángulo de Sierpiński modificado como lo indicado en la página 73. Construimos entonces un SIF compuesto por 12 funciones $k_{i,j}$ contractivas homogéneas, cuya razón de contracción es $\frac{1}{6}$. Cada función $k_{i,j} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $j \in \{1, 2, 3\}$, es de la forma

$$k_{i,j} = g_i \circ f_j$$

La figura 5.6 representa la tercera aproximación de Kochpiński.

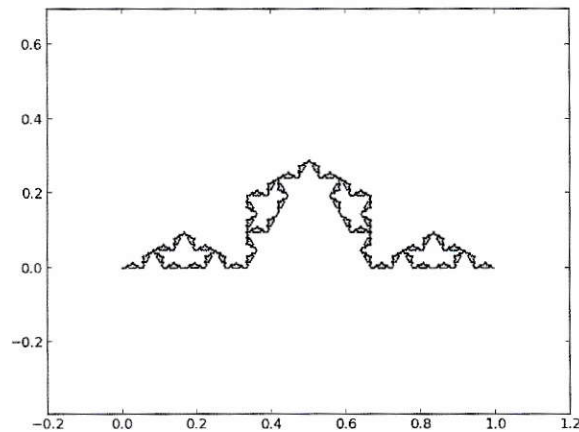


Figura 5.6: Tercera aproximación de Kochpiński.

Al igual que Sierkoch, el compacto Kochpiński es autosemejante, cumple la condición de conjunto abierto de Moran y es de dimensión de Minkowski-Bouligand

$$D_S = \frac{\ln(12)}{\ln(6)} \simeq 1.39 \in (1, 2)$$

Luego Kochpiński es un fractal, pero de aspecto diferente a Sierkoch.

5.4. Diamantes de Lévy y una modificación de éstos

Presentamos a continuación un fractal conocido como **Diamantes de Lévy**, el cual es una modificación del SIF de la curva de Koch. Si bien este fractal no resulta interesante en esta tesis por no cumplir la condición de conjunto abierto de Moran, nos inspiramos en él para crear un SIF que cumple la hipótesis del Teorema 3.1.3. El SIF de los Diamantes de Lévy parte de un trapecio cuya base mide 1 y el resto de sus lados $\frac{1}{2}$. Luego, pega tres copias del trapecio original contraído a una razón $\frac{1}{2}$ en cada lado no basal. La figura 5.7 representa la situación.

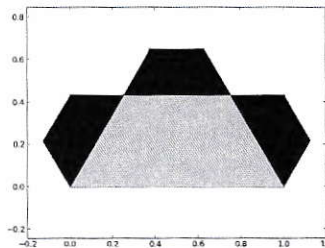


Figura 5.7: Primera iteración del SIF de los Diamantes de Lévy.

La figura 5.8 representa la séptima aproximación de los Diamantes de Lévy.

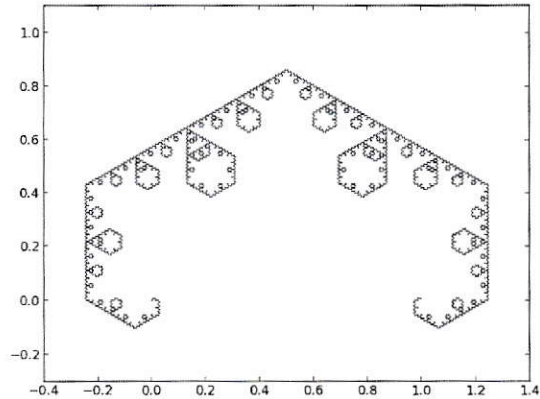


Figura 5.8: Séptima aproximación del compacto límite Diamantes de Lévy.

Notemos que un trapecio, de base 1 y con lados no basales de largo $\frac{1}{2}$, se puede subdividir en cuatro trapecios de base $\frac{1}{2}$ y lados no basales de largo $\frac{1}{4}$; la figura 5.9 ilustra esta situación.

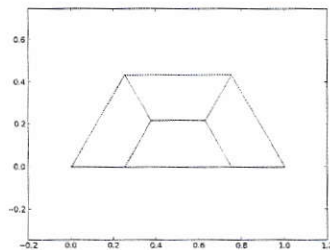


Figura 5.9: Subdivisión de un trapecio en cuatro trapecios semejantes.

Entonces, vamos a subdividir el trapecio original, de base 1, en 16 trapecios de base $\frac{1}{4}$, y conservaremos 10 de ellos. La figura 5.10 representa de color negro los trapecios a conservar.

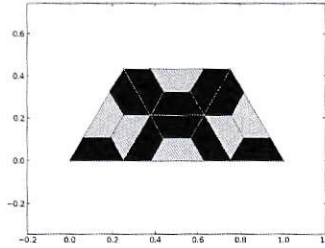


Figura 5.10: Subdivisión de un trapecio en dieciséis trapecios semejantes.

A continuación presentamos un SIF que corresponde a la situación descrita anteriormente.

$$\begin{aligned}
 f_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{4} \cdot (x, y) \\
 f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto R_{-\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{4} \cdot (x, y) \right) + \left(\frac{3}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \\
 f_3 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto R_{\pi} \left(\frac{1}{4} \cdot (x, y) \right) + \left(\frac{5}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \\
 f_4 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto R_{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{4} \cdot (x, y) \right) + \left(\frac{3}{4}, 0 \right) \\
 f_5 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{4} \cdot (x, y) \right) + \left(\frac{3}{4}, 0 \right) \\
 f_6 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto R_{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{4} \cdot (x, y) \right) + \left(\frac{3}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \\
 f_7 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto R_{-\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{4} \cdot (x, y) \right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_8 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{4} \cdot (x, y)\right) + \left(\frac{3}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8}\right) \\
 f_9 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto R_{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{4} \cdot (x, y)\right) + \left(\frac{5}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8}\right) \\
 f_{10} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto R_{-\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{4} \cdot (x, y)\right) + \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)
 \end{aligned}$$

Notemos primero que cada función del SIF es una contracción regular, por lo que por la Proposición 2.1.2 el compacto límite es autosemejante.

La cuarta aproximación del compacto límite de este SIF es representada en la figura 5.11.

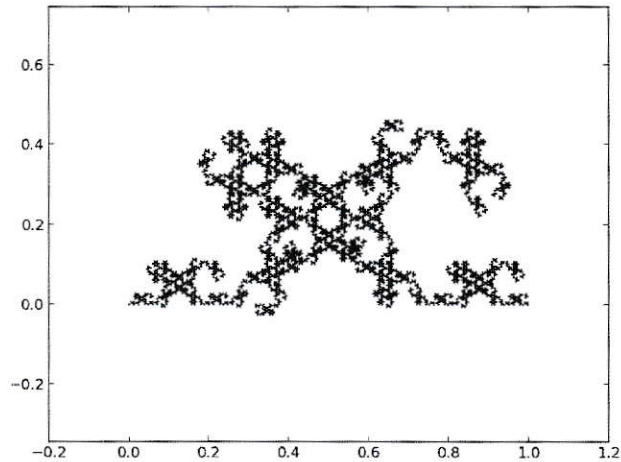


Figura 5.11: Cuarta aproximación del compacto límite de la modificación de los Diamantes de Lévy.

Por otro lado, el interior del trapecio original, aquel con base 1 y lados no basales $\frac{1}{2}$, es claramente un abierto de Moran del SIF. Resulta entonces sencillo calcular la dimensión de Minkowski-Bouligand del compacto límite, puesto que coincide con la dimensión de semejanza del SIF. Como la razón de contracción de cada función que compone el SIF es $\frac{1}{4}$, la dimensión de semejanza es:

$$D_S = \frac{\ln(10)}{\ln(4)} \simeq 1.66 \in (1, 2)$$

Por lo tanto obtuvimos un fractal.

5.5. Embalse

A continuación presentamos el siguiente SIF. Su compacto límite se llama **Embalse**, debido a que su SIF fue inspirado en el paisaje de tres montañas y su reflejo en el agua.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{4} \cdot (x, -y) \\ f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x, -y) + \left(\frac{1}{4}, 0 \right) \\ f_3 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{4} \cdot (x, -y) + \left(\frac{3}{4}, 0 \right) \\ f_4 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x, y) + \left(\frac{1}{4}, \frac{-\sqrt{3}}{4} \right) \end{aligned}$$

Como las cuatro funciones son contracciones regulares, ya sabemos por la Proposición 2.1.2 que el compacto límite es autosemejante.

La figura 5.12 ilustra cómo el SIF transforma un conjunto compuesto por cuatro triángulos equiláteros, uno de lado 1, otro de lado $\frac{1}{2}$ y dos de lado $\frac{1}{4}$. La primera

iteración es la zona de color negro.

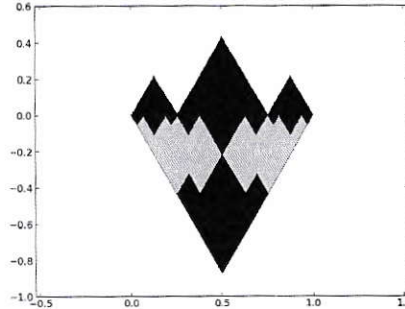


Figura 5.12: Primera iteración de Embalse.

Por otro lado, el interior de la figura inicial, aquella compuesta por los cuatro triángulos equiláteros, es un abierto de Moran de este SIF. Como además cada función es contractiva homogénea, podemos ocupar el Teorema 3.1.3. Luego la dimensión de Minkowski-Bouligand del compacto límite y la dimensión de semejanza de este SIF coinciden con la solución de la siguiente ecuación.

$$\frac{2}{2^x} + \frac{2}{4^x} = 1$$

Entonces la dimensión de Minkowski-Bouligand de Embalse es:

$$D_S = \frac{\ln(1 + \sqrt{3})}{\ln(2)} \simeq 1.45 \in (1, 2)$$

Por lo tanto, Embalse es un fractal.

La figura 5.13 representa su séptima aproximación.

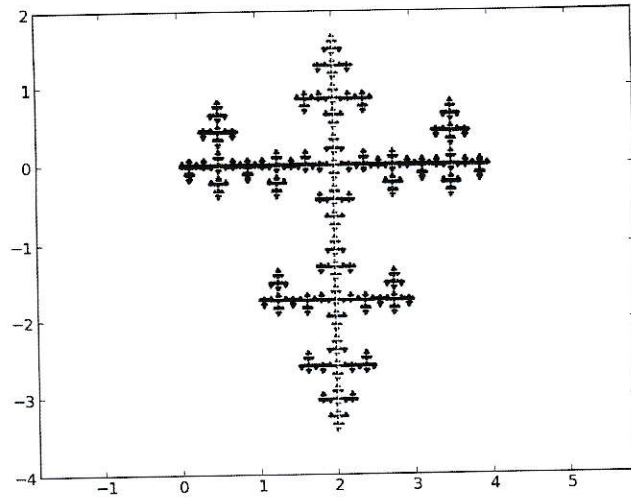


Figura 5.13: Séptima aproximación del compacto límite Embalse.

Apéndice A

Rapidez de convergencia de un fractal

Si queremos conocer un fractal graficando una de sus aproximaciones, tiene sentido preguntarse cuántas iteraciones debemos hacer para obtener una buena aproximación.

Sea ϕ la función asociada al SIF, y sea $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$. Para $m \in \mathbb{N}$, denotaremos por $A_m = \phi^m(A)$ la m -ésima iteración. Como ϕ es una función contractiva, sea $r \in (0, 1)$ su razón de contracción. Entonces se cumple

$$D(A_{m+1}, A_m) < r^m \cdot D(A_1, A) \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Sea K el compacto límite del SIF. Para $m \in \mathbb{N}$, la distancia de Hausdorff entre A_m y K se encuentra aproximada de la siguiente manera:

$$D(A_m, K) \leq \sum_{j=0}^{\infty} D(A_{m+j}, A_{m+j+1}) < \sum_{j=0}^{\infty} r^{m+j} \cdot D(A_1, A) = r^m \cdot \frac{D(A_1, A)}{1-r}$$

Sea $\epsilon > 0$. Luego si queremos saber cuántas iteraciones necesitamos para obtener una aproximación con error menor a ϵ de K , buscamos $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > \frac{\ln\left(\frac{D(A_1, A)}{\epsilon \cdot (1-r)}\right)}{-\ln(r)}$$

A modo de ejemplo, recordemos que la razón de contracción de la función asociada al SIF de la curva de Koch, $\phi : \mathcal{K}(M) \rightarrow \mathcal{K}(M)$, es a lo más $\bar{r} = \frac{1}{3}$. Más aún, si tomamos los subconjuntos del plano $X = \{(0, 0)\}$ e $Y = \{(1, 0)\}$, vemos que $D(\phi(X), \phi(Y)) = \frac{1}{3} \cdot D(X, Y)$, por lo que la razón de contracción de ϕ es $\bar{r} = \frac{1}{3}$. Entonces, si tomamos $A = \{(0, 0)\}$ como conjunto inicial, tenemos $D(A, \phi(A)) = \frac{2}{3}$. Luego, si queremos tener una aproximación de la curva de Koch con error menor a $\epsilon = 0.001$, basta elegir $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > \frac{\ln(0.001)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \simeq 6.29$$

Podemos apreciar la séptima aproximación de la curva de Koch en la figura A.1.

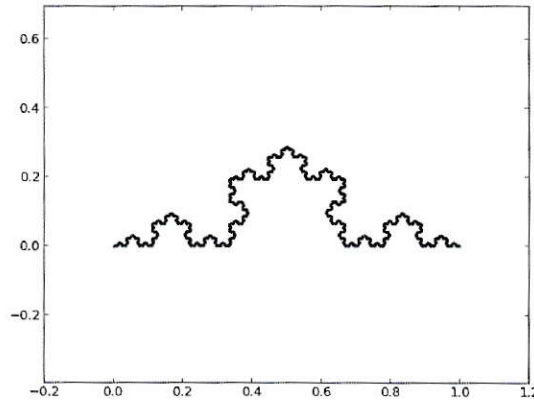


Figura A.1: Séptima aproximación de la curva de Koch.

Apéndice B

Un programa para visualizar fractales en el plano

Para visualizar gráficamente una aproximación de un fractal, desarrollamos un programa que grafica una cantidad finita de iteraciones de un SIF. Para realizar este programa, usamos el lenguaje Python. Nos fue de gran utilidad para estudiar diferentes SIF, y nos proporcionó todas las figuras que necesitamos presentar en esta tesis.

El programa contiene fundamentalmente dos partes. En la primera, el computador se informa de las funciones que componen el SIF; lo puede hacer preguntándole al usuario, o leyendo la información de un archivo `.txt`. Y la segunda consiste en iterar el punto $(0, 0)$ la cantidad de veces indicada por el usuario; luego entrega un gráfico con la aproximación del compacto límite.

(a) Definición del SIF (incorporación de datos)

Creamos dos clases: ‘funciones’ y ‘archivo’. Cada elemento de la primera puede averiguar las coordenadas de las funciones, ya sea preguntándole al usuario, o bien leyendo un archivo. Además, una vez que se le ha informado sus coor-

denadas, la función puede aplicarse a cualquier punto del plano. La segunda clase permite crear un archivo de texto nuevo y escribir información en él. Así, cada SIF trabajado con el programa está respaldado en la misma carpeta que se encuentra el archivo con el código. En el archivo de texto, la información de una función del SIF consiste en tres líneas. La primera línea contiene la enumeración de la función, la cual empieza en cero. Y las dos siguientes, consisten en las dos coordenadas de la función.

```
#!/usr/bin/env python
import math
import random
import matplotlib.pyplot as plt
class funciones():
    def __init__(self,a):
        self.name=("f"+str(a))
    def aplicar(self,x,y):
        h=eval(self.coord1)
        m=eval(self.coord2)
        return(h,m)
    def preguntar(self):
        self.coord1=raw_input("Primera coordenada: ")
        self.coord2=raw_input("Segunda coordenada: ")
    def leer(self,a,b):
        self.coord1=a
        self.coord2=b
class archivo():
    def __init__(self,a):
        self.name=a
    def grabar(self,a,b,c):
        arch=open(self.name+".txt","a")
        arch.write(a+"\n"+b+"\n"+c+"\n")
        arch.close
```

Luego, el usuario debe indicar si trabajará con un SIF antiguo o con uno que no se encuentra en la carpeta contenedora del archivo con el código.

```
opciones=raw_input("Bienvenido. ¿Desea trabajar con un conjunto de
funciones ya existente (\n e \n) o crear uno nuevo (\n n \n)?\n")
while opciones!="n" and opciones!="e":
```

```

opciones=raw_input("Desea trabajar con un conjunto
iterativo de funciones ya existente (\\"e\\") o crear
uno nuevo (\\"n\\")?\n")

```

Cuando el usuario decide ingresar un nuevo SIF, le preguntamos por el nombre para crear un archivo de texto. A continuación procedemos a averiguar la cantidad de funciones.

```

if opciones=="n":
    nomb=raw_input("Ingrese un nombre para el conjunto
iterativo de funciones.\n")
    w=0
    while w<1:
        try:
            arch=open(nomb+".txt","r")
            arch.close()
            nomb=raw_input("Nombre ya existente .
Ingrese otro.\n")
        except IOError:
            w=w+1
    n=raw_input("Ingrese , con digitos , la cantidad de
funciones.\n")
    w=0
    while w<1:
        try:
            n=int(n)
            if n>0:
                w=w+1
            else:
                n=raw_input("Ingrese , con digitos ,
la cantidad de funciones.\n")
        except ValueError:
            n=raw_input("Ingrese , con digitos , la
cantidad de funciones.\n")

```

Entonces le pedimos al usuario que ingrese la información de las funciones, y la grabamos en el archivo recién creado.

```

q=0
f=[]
for a in range(q,n):
    print "\nFuncion , a , "\n"

```



```

f.append("f"+str(a))
f[a]= funciones(a)
f[a].preguntar()
archivo(nomb).grabar("f"+str(a),f[a].coord1,f[a].
    coord2)
q=q+1

```

Sin embargo, si el usuario nos pide abrir un archivo ya existente, lo buscamos en la carpeta contenedora del archivo con el código, y registramos las coordenadas de las funciones.

```

else:
    nomb=raw_input(" Ingrese el nombre del conjunto de
        funciones a trabajar.\n")
    w=0
    while w<1:
        try:
            archinomb=open(nomb+".txt","r")
            n=0
            f=[]
            linea=archinomb.readline()
            while linea!="":
                f.append("f"+str(n))
                f[n]=funciones(n)
                linea=archinomb.readline()
                coord1=linea
                linea=archinomb.readline()
                coord2=linea
                f[n].leer(coord1,coord2)
                n=n+1
                linea=archinomb.readline()
            w=w+1
        except IOError:
            nomb=raw_input(" Ingrese el nombre del
                conjunto de funciones a trabajar.\n")

```

(b) Iteración y gráfica del SIF

Una vez que estamos informados de las funciones que componen el SIF, preguntamos por el grado de aproximación a realizar.

```

aa=0
while aa<1:
    m=raw_input("Ingrese , con digitos , el grado de
                aproximacion: ")
    w=0
    while w<1:
        try:
            m=int(m)
            w=w+1
        except ValueError:
            m=raw_input("Ingrese , con digitos , el
                        grado de aproximacion: ")

```

Luego construimos el conjunto de puntos a graficar.

```

l=[(0.0,0.0)]
s=0
while s<m:
    ll=[]
    t=0
    while t<len(l):
        u=0
        while u<n:
            w=f[u].aplicar(l[t][0],l[t][1])
            ll.append(w)
            u=u+1
        t=t+1
    l=ll
    s=s+1

```

Y finalmente, entregamos el gráfico de la aproximación del compacto límite del SIF.

```

ll=[]
s=0
while s<len(l):
    ll.append(l[s][0])
    s=s+1

```

```

l2=[]
s=0
while s<len(l):
    l2.append(l[s][1])
    s=s+1
plt.scatter(l1, l2, s=0.25,color='black')
plt.axis('equal')
plt.show()

```

Ahora, el usuario tiene la posibilidad de graficar otra aproximación o bien salir completamente del programa.

```

q=raw_input("Desea otra aproximacion?_(\s\, \n\)\n")
while q!="s" and q!="n":
    q=raw_input("Desea otra aproximacion?_(\s\, \n\)\n")
if q=="n":
    aa=aa+1
else:
    pass

```

Referencias

- [1] Barich, Katie; *Proving completeness of the Hausdorff induced metric space*, Whitman College.
- [2] Barnsley, Michael; *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc. (1988).
- [3] Cohn, Donald; *Measure theory*, Birkhäuser (1980).
- [4] Edgar, Gerald; *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer Science+Business Media (2008).
- [5] Falconer, Kenneth; *Fractal Geometry*, John Wiley & Sons Ltd. (2003).
- [6] Helmberg, Gilbert; *Getting Acquainted with Fractals*, Walter de Gruyter (2007).
- [7] Halmos, Paul R.; *Measure theory*, Springer-Verlag New York Inc. (1974)
- [8] Hutchinson, John E.; *Fractals and Self Similarity*, Indiana University Mathematics Journal, **30**, 713 – 747 (1981).
- [9] Lang, Serge; *Real Analysis*, Addison-Wesley (1983).
- [10] Munkres, James R.; *Topology a first course*, 2^a ed, Prentice Hall (2000).

- [11] Royden, Hasley L. and Fitzpatrick, Patrick; *Real Analysis, Fourth Edition*, Pearson Education Asia Limited and China Machine Press (2010).