

265?
0.1

Homeomorfismos Periódicos del Bitoro

Tesis entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los
requisitos para optar al grado de
Magister en Ciencias con Mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias

Jan Kiwi Krauskopf

Julio 1992

Director de Tesis: Dr. Rodrigo Bamón



Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Informe de Aprobación
Tesis de Magister

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el Candidato:

Jan Kiwi Krauskopf

ha sido aprobado por la Comisión Informante de Tesis como requisito de Tesis para optar al grado de Magister en Ciencias Matemáticas.

Director de Tesis:

Dr. Rodrigo Bamón

Comisión Informante de Tesis:

Dr. Víctor Cortés

Dr. Víctor Guíñez

Dr. Manuel Pinto

Dr. Nicolás Yus

Bamón
.....
Cortés
.....
Guíñez
.....
Pinto
.....
Yus
.....



*A mis Padres
y hermanos*



Agradecimientos

A Rodrigo Bamón, por haber mantenido siempre abierta la puerta de su oficina donde me esperaba un mundo de preguntas y entretenciones, de entusiasmo, paciencia y trabajo; lo que no sólo me ha motivado momentáneamente, sino que ha despertado en mí la ambición de ser un "Matemático".

A Jean Marc Gambaudo, Víctor Guíñez, Gonzalo Riera y Nicolás Yus por haberme proporcionado material e información que han resultado ser de fundamental importancia para el desarrollo de este trabajo. Además, agradezco su paciencia y excelente disposición para sostener conversaciones que siempre han sido muy interesantes y provechosas para mí.

A la Comisión Informante, Víctor Guíñez, Víctor Cortés, Manuel Pinto y Nicolás Yus, por las valiosas observaciones, correcciones y comentarios que me han hecho como producto de la lectura de este trabajo.

A los Profesores del Departamento, que desde temprana edad me han formado, ayudado y estimulado en mis estudios.

A los Profesores del "Grupo" de Sistemas Dinámicos de los que he recibido el apoyo e incentivo necesario para iniciarme en este área de las Matemáticas.

A mi familia por haberme enseñado a contar, leer y escribir, a aprender y a tratar de pensar. Por haberme dado un ambiente lleno de preguntas e inquietudes, de compañía y de apoyo.

A mis compañeros y amigos de dentro y fuera de la Universidad, por haberme acompañado, de distintas formas y en distintos momentos de mi carrera. Ellos han sido muchas veces el punto de apoyo fundamental para seguir adelante en mis estudios.

A Roberto Aravire, Miguel Kiwi, José Rogan y Héctor Vega por la ayuda latex-computacional que ha facilitado la escritura de este trabajo.

Para la realización de mis estudios ha sido de importancia el financiamiento de CONICYT.



Contenidos

Tabla de Contenidos	v
Introducción	1
1 Homeomorfismos de superficies	3
1.1 Homeomorfismos de Superficies	5
1.1.1 <i>Definiciones preliminares</i>	6
1.1.2 <i>Foliaciones medibles y homeomorfismos pseudo-Anosov</i>	7
1.1.3 <i>Clasificación de Thurston</i>	10
1.2 Contexto Analítico	11
1.2.1 <i>Definiciones</i>	11
1.2.2 <i>Foliaciones medibles y diferenciales cuadráticas</i>	13
1.2.3 <i>Aplicaciones de Teichmüller</i>	16
1.2.4 <i>Aplicaciones cuasi-conformes</i>	17
2 Mapping Class Group	21
2.1 Grupos de Trenzas	21
2.1.1 <i>Definiciones</i>	22
2.1.2 <i>Presentación de un grupo</i>	25
2.1.3 <i>Presentación de $\mathcal{B}_n(D^2)$ y $\mathcal{B}_n(S^2)$</i>	25
2.2 Mapping Class Group	28
2.2.1 <i>Definiciones</i>	28
2.2.2 <i>Presentación de $\mathcal{M}_n(D^2)$ y $\mathcal{M}_n(S^2)$</i>	30
2.2.3 <i>Presentación del Mapping Class Group del Bitoro</i>	34
3 Homeomorfismos del Bitoro	45
3.1 Proyección y levantamiento	45
3.1.1 <i>Proyección de homeomorfismos</i>	46
3.1.2 <i>Levantamiento de homeomorfismos</i>	49
3.1.3 <i>Clasificación de Thurston, $\mathcal{M}(T_2)$ y $\mathcal{M}_6(S^2)$</i>	51
3.2 Homeomorfismos periódicos de la Esfera	52
3.2.1 <i>Rotaciones y permutaciones</i>	52

3.2.2	<i>Homeomorfismos periódicos de la esfera con seis agujeros . . .</i>	54
3.3	Homeomorfismos periódicos de T_2	62
3.3.1	<i>Homeomorfismo $R_{1/6}$</i>	63
3.3.2	<i>Homeomorfismo $R_{1/5}$</i>	65
3.3.3	<i>Homeomorfismo $R_{1/4}$</i>	66
3.3.4	<i>Clasificación</i>	67
4	Criterios algebraicos y algoritmos de decisión	70
4.1	Criterios Algebraicos	71
4.1.1	<i>Acción en la Homología</i>	71
4.1.2	<i>Ejemplos de Penner</i>	72
4.1.3	<i>Problema de Realización de Nielsen</i>	75
4.1.4	<i>Problemas de palabras, conjugación, e isomorfismo</i>	76
4.1.5	<i>Problemas de palabras y conjugación en $\mathcal{B}_n(D^2)$</i>	77
4.1.6	<i>Procedimientos finitos en $\mathcal{M}_n(D^2)$</i>	82
4.2	Procedimiento finito en $\mathcal{M}(T_2)$	88
4.2.1	<i>Desde $\mathcal{M}_6(S^2)$ a K</i>	89
4.2.2	<i>Método de Reidemeister-Schreier</i>	91
4.2.3	<i>Desde K a $\mathcal{M}_5(D^2)$</i>	94
4.2.4	<i>Procedimiento finito en $\mathcal{M}(T_2)$</i>	95
4.2.5	<i>Problema de palabras y periodicidad en $\mathcal{M}(T_2)$</i>	97
	Bibliografía	100

Introducción

W.P. Thurston [27] demostró que todo homeomorfismo de una superficie se puede deformar, a través de una isotopía, a un homeomorfismo periódico o, a uno pseudo-Anosov o, a uno reducible. Además, si dos homeomorfismos periódicos o pseudo-Anosov son isotópicos, ellos son topológicamente conjugados entre sí

En este trabajo estudiamos algunos problemas que se desprenden de esta clasificación. Se consideran, en particular, homeomorfismos del bitoro y los siguientes dos asuntos relacionados:

(i) Clasificación módulo conjugación topológica de los homeomorfismos periódicos (Teorema 3.4).

(ii) Obtención de un procedimiento algebraico finito mediante el cual dada una clase de isotopía de homeomorfismos (la que se especifica a través de una palabra escrita en los generadores), se determina a que tipo de la clasificación de Thurston corresponde (Teorema 4.9).

Para obtener estos resultados se utiliza, a su vez, otro resultado de esta tesis (Teoremas 3.1, 3.2 y Proposición 3.1), a saber, que la clasificación de Thurston se comporta bien, en cierto sentido, con respecto a la 2-proyección ramificada (6 puntos de ramificación) del bitoro sobre la esfera.

Más específicamente:

(i) Probamos que existen exactamente 18 clases de conjugación topológica de homeomorfismos periódicos del bitoro y exhibimos explícitamente representantes de cada una.

(ii) Trasladamos el problema de determinar el tipo de una clase de isotopía de homeomorfismos del bitoro, a determinar el tipo de una clase de isotopía de homeomorfismos del disco con 5 agujeros. Posteriormente, se aplica un procedimiento finito que decide el tipo de una clase de isotopía de homeomorfismos del disco con n agujeros, encontrado por Benardete, Gutierrez y Nitecki [5].

El contenido de esta tesis se ordena como se indica a continuación:

En el Capítulo 1, introducimos la clasificación de Thurston desde un punto de vista topológico y también, desde un punto de vista analítico.

En el Capítulo 2, estudiamos el grupo formado por las clases de isotopía de homeomorfismos de una superficie, a este grupo se le denomina *Mapping Class Group*. En particular, vemos la relación existente entre los *grupos de trenzas* del disco y de la esfera, con el *Mapping Class Group* del disco agujereado y de la esfera agujereada. También estudiamos la relación existente entre el *Mapping Class Group* del bitoro y el de la esfera con 6 agujeros.

En el Capítulo 3, demostramos que los homeomorfismos periódicos y pseudo-Anosov del bitoro se *proyectan* a homeomorfismos periódicos y pseudo-Anosov de la esfera con 6 agujeros, e inversamente, los homeomorfismos periódicos y pseudo-Anosov de la esfera con 6 agujeros se *levantan* a homeomorfismos periódicos y pseudo-Anosov del bitoro. Caracterizamos los homeomorfismos periódicos de la esfera con 6 agujeros y obtenemos una clasificación topológica de los homeomorfismos periódicos del bitoro.

En el Capítulo 4, estudiamos algunos criterios algebraicos y procedimientos finitos conocidos que, dada una clase de isotopía nos dan información acerca del caso al que dicha clase corresponde. Y encontramos un procedimiento finito que, dado un elemento en el *Mapping Class Group* del bitoro, determina a que caso de la clasificación de Thurston pertenece.

Los trabajos de Thurston [27], Bers [6], Birman [7] y Benardete, Gutierrez y Nitecki [5]; constituyen una referencia general para los contenidos aquí presentados. Además, en la Bibliografía, hacemos un listado de literatura relacionada con los problemas aquí tratados.

Introduction

W.P. Thurston [27] proved that every surface homeomorphism can be deformed, through an isotopy, to a periodic one or, to a pseudo-Anosov one or, to a reducible one. Also, if two periodic or pseudo-Anosov homeomorphisms are isotopic, then they are topological conjugates.

In this work we study some questions which stem from this classification. In particular, we consider homeomorphisms of the bitori and the two following problems:

(i) To classify the periodic homeomorphisms of the bitori, up to topological conjugacy (Theorem 3.4).

(ii) To find a finite procedure, that given an isotopy class, specified by a word written in the generators, decides in which case of the Thurston classification scheme we find ourselves (Theorem 4.9).

We obtain these results on the basis of another one, also derived in this thesis (Theorems 3.1, 3.2 and Proposition 3.1). In effect, the Thurston classification is well behaved, in some sense, under a ramified covering projection of the bitori over the sphere.

More precisely:

(i) We prove that there are exactly 18 classes of topological conjugacy of periodic homeomorphisms of the bitori. Also, we exhibit a representative element of each class.

(ii) We establish an equivalence between the determination of the Thurston type to which an isotopy class of homeomorphisms of the bitori belongs, with the problem of deciding the Thurston type of an isotopy class of homeomorphisms of the 5 punctured disc. Next, a finite procedure that decides on the Thurston type of an isotopy class of homeomorphisms of the n punctured disc is applied. This latter procedure was discovered by Benardete, Gutierrez and Nitecki [5].

This Thesis is organized as follows:

In Chapter 1, we introduce Thurston's classification both from a topological and an analytical point of view.

In Chapter 2 we study the group formed by the isotopy classes of surface homeomorphisms. This group is called the *Mapping Class Group*. In particular, we analyze the relationship between the *Braid Groups* of the disc and the sphere, with the Mapping Class Group of the punctured disc and the punctured sphere, respectively. Also, we study the relationship between the Mapping Class Group of the bitori and the one of the 6 punctured sphere.

In Chapter 3, we prove that the periodic and pseudo-Anosov homeomorphisms can be *projected* to homeomorphisms of the 6 punctured sphere. These projections are proved to be periodic and pseudo-Anosov homeomorphisms of the 6 punctured sphere. Conversely, periodic and pseudo-Anosov homeomorphisms *lift* to periodic and pseudo-Anosov homeomorphisms of the bitori. Moreover, we characterize the periodic homeomorphisms of the 6 punctured sphere and obtain a topological classification of the periodic homeomorphisms of the bitori.

In Chapter 4, we study some known algebraic criteria, and finite procedures that, given an isotopy class, provide us with some information about the Thurston type of the given class. Finally, we establish a finite procedure which, given an element of the Mapping Class Group of the bitori, decides on the Thurston type of the given element.

The contributions of Thurston [27], Bers [6], Birman [7] and Benardete, Gutierrez and Nitecki [5] are the main references for the contents covered here. Some papers, relevant to the problems treated in this Thesis, are listed in the Bibliography.

Capítulo 1

Homeomorfismos de superficies

W. P. Thurston [27] generalizó a cualquier superficie, una clasificación conocida para los homeomorfismos del toro, la cual pasamos a describir.

El toro T_1 puede ser considerado como el espacio cociente del plano euclideo \mathbb{R}^2 por el reticulado \mathbb{Z}^2 :

$$T_1 \cong \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$$

donde \cong denota que ambos espacios topológicos son homeomorfos.

Consideremos la proyección:

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^2 &\rightarrow T_1 \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

Decimos que un homeomorfismo F de \mathbb{R}^2 *preserva fibras* con respecto a p si la imagen de dos puntos equivalentes son dos puntos equivalentes (i.e. $x - y \in \mathbb{Z}^2 \Rightarrow F(x) - F(y) \in \mathbb{Z}^2$).

Un homeomorfismo F de \mathbb{R}^2 que preserve fibras con respecto a p induce un homeomorfismo f de T_1 , de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f : T_1 &\rightarrow T_1 \\ [x] &\mapsto [F(x)] \end{aligned}$$

En tal caso decimos que f es la *proyección* de F y, resulta que todo homeomorfismo del toro es la proyección de un homeomorfismo del plano que preserva fibras.

Mas aún, todo homeomorfismo del toro se puede “deformar” mediante una *isotopía* a la proyección de una aplicación lineal del plano.

Las aplicaciones lineales del plano que preservan fibras son los elementos del grupo lineal $GL_2(\mathbb{Z})$, representados por matrices con coeficientes enteros y determinante ± 1 . Un elemento A de $GL_2(\mathbb{Z})$ preserva orientación si y sólo si $\det A = 1$ (i.e. $A \in SL_2(\mathbb{Z})$). Notaremos por f_A a la proyección de A .

El polinomio característico $pc(A)$, de una aplicación $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ es:

$$pc(A)(t) = t^2 - \text{traza}(A)t + 1$$

y los valores propios λ y λ^{-1} de A satisfacen una y sólo una de las siguientes posibilidades:

- (i) λ y λ^{-1} son complejos conjugados ($\text{traza}(A) = 0, 1$ o, -1)
- (ii) λ y λ^{-1} son ambos $+1$ o -1 ($\text{traza}(A) = \pm 2$)
- (iii) λ y λ^{-1} son reales distintos ($|\text{traza}(A)| > 2$)

En el caso (i) se demuestra que A es una matriz tal que $A^{12} = I$, de donde, el homeomorfismo del toro f_A es *periódico*.

En el caso (ii) A tiene un subespacio invariante que se proyecta a una curva cerrada simple c homotópicamente no trivial. De donde, la curva c es invariante bajo f_A y decimos que f_A es *reducible*.

Ejemplo: La aplicación lineal,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tiene como subespacio invariante al eje x , cuya proyección al toro es una curva cerrada invariante bajo f_A .

Por último, en el caso (iii) elegimos $|\lambda| > 1 > |\lambda^{-1}|$, y consideremos los subespacios propios V_λ y $V_{\lambda^{-1}}$. Sea $\overline{\mathcal{F}}^u$ (resp. $\overline{\mathcal{F}}^s$) la *foliación* de \mathbb{R}^2 cuyas *hojas* son

las rectas paralelas a V_λ (resp. $V_{\lambda^{-1}}$). Se verifica que la imagen de una hoja de $\overline{\mathcal{F}}^u$ es una hoja de $\overline{\mathcal{F}}^u$ y lo mismo sucede para la foliación $\overline{\mathcal{F}}^s$. Además, la aplicación A “expande” en un factor λ en la dirección de $\overline{\mathcal{F}}^u$ y “contrae” en un factor λ^{-1} en la dirección de $\overline{\mathcal{F}}^s$.

Al proyectar las foliaciones $\overline{\mathcal{F}}^u$ y $\overline{\mathcal{F}}^s$, obtenemos un par de foliaciones transversales \mathcal{F}^u y \mathcal{F}^s . Cada una de las hojas de estas foliaciones son densas en el toro. A este tipo de foliaciones se les denomina *foliaciones irracionales* del toro. La imagen bajo f_A de las hojas de \mathcal{F}^u (resp. \mathcal{F}^s) son hojas de \mathcal{F}^u (resp. \mathcal{F}^s), es decir, estas foliaciones son *invariantes* por f_A . Además, el homeomorfismo f_A “expande” en un factor λ en la dirección de las hojas de \mathcal{F}^u y “contrae” en un factor λ^{-1} en la dirección de las hojas de \mathcal{F}^s , de donde f_A es diferenciable e *hiperbólico* en todo T_1 . A este tipo de “homeomorfismos” del toro se les denomina *difeomorfismos Anosov*. (Ref. [9] pág. 1-2, [24] pág 172)

Ejemplo: La aplicación lineal,

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 3 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

tiene valores propios $-4 \pm \sqrt{15}$. Los subespacios propios son rectas que pasan por el origen con pendiente $\frac{6 \mp \sqrt{15}}{3}$ y se proyectan a hojas densas en el toro.

En este capítulo hacemos una exposición de algunos aspectos de la clasificación de Thurston. En la sección 1 enunciamos con precisión el Teorema de clasificación. En la sección 2 estudiamos la clasificación de Thurston en un contexto analítico.

1.1 Homeomorfismos de Superficies

W.P. Thurston [27] clasificó los homeomorfismos de superficies demostrando que todo homeomorfismo es isotópico a uno *periódico* o, a uno *reducible* o, a uno *pseudo-Anosov*. En esta sección nos abocaremos a enunciar este resultado en forma más precisa.

1.1.1 Definiciones preliminares

Una *superficie cerrada* S es una variedad topológica S , de dimension 2, compacta y conexa. Decimos que un espacio topológico S es una *superficie agujereada* si S es homeomorfo a una superficie cerrada \tilde{S} menos n puntos, a dichos puntos se les denomina *agujeros* de \tilde{S} . Decimos que un espacio topológico S es una *superficie con borde* si S es homeomorfo a una superficie cerrada \tilde{S} menos n discos abiertos. Por último, decimos que S es una *superficie* si S es una superficie cerrada o, una superficie agujereada o, una superficie con borde.

Además, toda superficie cerrada orientable es homeomorfa a la esfera S^2 o, a un g -toro T_g . (Ref. [16])

En el conjunto $\mathcal{H}(S)$ de los homeomorfismos de S , la *isotopía* es una relación de equivalencia definida por:

Definición 1.1 *Dados $f, g \in \mathcal{H}(S)$, decimos que f es isotópico a g ($f \sim g$) si existe un camino de homeomorfismos entre f y g . Más precisamente, f es isotópico a g si existe una aplicación continua:*

$$\begin{aligned} H : I \times S &\rightarrow S & I &= [0, 1] \\ (t, x) &\mapsto H(t, x) \end{aligned}$$

tal que:

- (i) $H(0, \cdot) = f(\cdot)$,
- (ii) $H(t, \cdot) \in \mathcal{H}(S) \quad \forall t \in I$ y,
- (iii) $H(1, \cdot) = g(\cdot)$.

La isotopía respeta la composición de funciones en $\mathcal{H}(S)$, es decir, si $f, g, h \in \mathcal{H}(S)$ y $f \sim g$, entonces, $f \circ h \sim g \circ h$.

Decimos que un homeomorfismo f de S es *periódico* si existe un entero k tal que $f^k = id_S$.

Definición 1.2 *Decimos que un homeomorfismo $f \in \mathcal{H}(S)$ es reducible si existe una colección $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_k\}$ de curvas cerradas simples, disjuntas, no homotópicas entre*

si, no homotópicas a un borde y no homotópicas a un punto; tal que:

$$f(\{c_1 \cup \dots \cup c_k\}) = \{c_1 \cup \dots \cup c_k\}$$

Si f es un homeomorfismo reducible, el estudio de la dinámica de f en S , se “reduce” a estudiar la dinámica de f en las componentes de $S - \{c_1 \cup \dots \cup c_k\}$.

Ejemplo: Supongamos que f es un homeomorfismo del bitoro T_2 tal que, $f(c_1) = c_1$, donde c_1 es la curva de la figura 1.1.

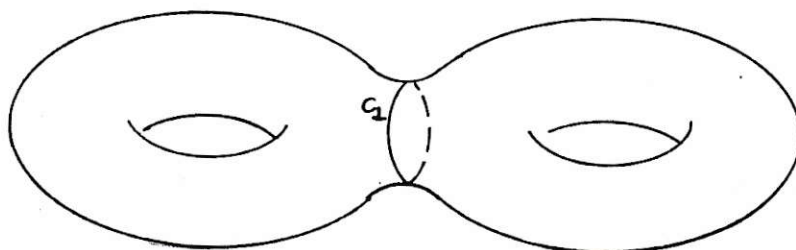


Figura 1.1:

Entonces $T_2 - \{c_1\}$ es la unión disjunta de dos toros agujereados T_1 y T'_1 . f induce por restricción una permutación de las componentes T_1 y T'_1 , existiendo las siguientes dos posibilidades:

- (i) $f(T_1) = T_1$ y $f(T'_1) = T'_1$ o,
- (ii) $f(T_1) = T'_1$ y $f(T'_1) = T_1$.

En el caso (i) para estudiar la dinámica de f basta con estudiar la restricción de f a cada una de las componentes T_1 y T'_1 . En el caso (ii) estudiamos la dinámica de f^2 restringida a T_1 (o T'_1).

1.1.2 Foliaciones medibles y homeomorfismos pseudo-Anosov

El primero en introducir el concepto de foliaciones medibles en superficies fue W. Thurston. Este tipo de foliaciones juega un rol importante en su teoría y se definen como sigue (Ref. [27], [26], [14]):

Definición 1.3 Decimos que $\mathcal{F} = (F, \{V_j, \phi_j\}_{j \in J})$ es una foliación medible de S si:

(i) F es una foliación de S por hojas de dimensión 1, con un número finito de singularidades y cada singularidad tiene tres o más separatrices. La foliación F es, en coordenadas locales en torno a las singularidades, una de las foliaciones inducidas por la diferencial cuadrática $z^k dz^2$, donde $k \geq 1$ (ver subsección 1.2.2 y figura 1.2).

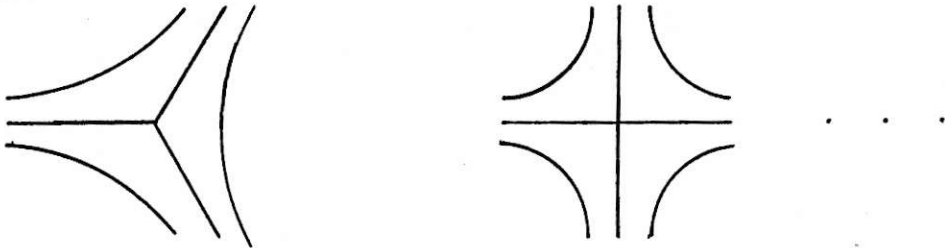


Figura 1.2:

Además, si S es una superficie agujereada la foliación F tiene “singularidades” con una o más separatrices en los agujeros de S . La foliación F es, en coordenadas locales en torno a los agujeros, una de las foliaciones inducidas por la diferencial cuadrática $z^k dz^2$, donde $k \geq -1$ (ver subsección 1.2.2 y figura 1.3).

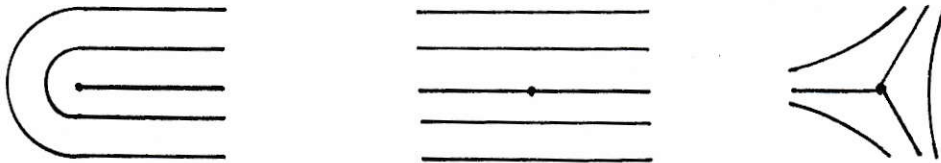


Figura 1.3:

Por último, si S es una superficie con borde, cada componente del borde de S es una hoja de F y F tiene al menos una singularidad en cada componente del borde de S .

(ii) $\{V_j\}_{j \in J}$ es un recubrimiento abierto de S salvo en las singularidades de F ,

(iii) $\phi_j : V_j \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo con su imagen, y la imagen de las hojas de F son rectas horizontales en \mathbb{R}^2 ,

(iv) Si $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, entonces, el cambio de coordenadas es de la forma:

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x, y) = (y(x, y), c \pm y)$$

donde c es una constante.

Observamos que la condición (iv) dice que los cambios de coordenadas preservan la y -distancia entre los puntos. De esta forma las foliaciones medibles inducen una *medida transversal*:

Si α es una curva simple en S y \mathcal{F} es una foliación medible, definimos a $\int_\alpha \mathcal{F}$ como la variación total de la coordenada y de α , medida localmente con respecto a cualquier carta $\{V_j, \phi_j\}$.

Decimos que $\mathcal{F}_1 = \lambda \mathcal{F}_2$, si \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 son dos foliaciones medibles que coinciden como foliaciones y, para toda curva cerrada simple α se tiene que:

$$\int_\alpha \mathcal{F}_1 = \lambda \int_\alpha \mathcal{F}_2$$

Además, los homeomorfismos actúan sobre las foliaciones medibles. Si f es un homeomorfismo de S , y $\mathcal{F} = (F, \{V_j, \phi_j\}_{j \in J})$ es una foliación medible de S , entonces la foliación medible $f(\mathcal{F})$ está dada por:

$$f(\mathcal{F}) := (f(F), \{f(V_j), \phi_j \circ f^{-1}\}_{j \in J})$$

Definición 1.4 Decimos que un homeomorfismo f de S es *pseudo-Anosov* si existe $\lambda > 1$ y un par de foliaciones medibles transversales \mathcal{F}^s y \mathcal{F}^u tales que:

$$f(\mathcal{F}^s) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{F}^s$$

$$f(\mathcal{F}^u) = \lambda \mathcal{F}^u$$

Esta definición coincide con la idea de que los homeomorfismos pseudo-Anosov dejan invariante un par de foliaciones transversales \mathcal{F}^s y \mathcal{F}^u , “expandiendo” en un factor λ las hojas de \mathcal{F}^u y “contrayendo” en un factor $1/\lambda$ las hojas de \mathcal{F}^s . Resulta que \mathcal{F}^s y \mathcal{F}^u no tienen hojas cerradas y se verifica que cada una de las hojas

de estas foliaciones son densas en la superficie. Los homeomorfismos pseudo-Anosov son diferenciables e hiperbólicos salvo en las singularidades de las foliaciones invariantes. Estos homeomorfismos pseudo-Anosov (Ref. [27], [26], [14], [9]), generalizan los homeomorfismos Anosov ya conocidos en el toro, los cuales pueden ser vistos (ahora) como homeomorfismos pseudo-Anosov que no tienen singularidades. Esta situación no es posible en superficies con característica de Euler no nula.

1.1.3 Clasificación de Thurston

A continuación damos una versión del Teorema de clasificación demostrado por W.P. Thurston ([27] Teorema 4).

Teorema 1.1 (Thurston) *Sea S una superficie con característica de Euler negativa y f un homeomorfismo de S . Entonces se satisface una y sólo una de las siguientes:*

- (i) *f es isotópico a un homeomorfismo periódico f' o,*
- (ii) *f es isotópico a un homeomorfismo pseudo-Anosov f' o,*
- (iii) *f es isotópico a un homeomorfismo reducible y f no es isotópico a un homeomorfismo periódico.*

Además, en los casos (i) y (ii) el representante f' de la clase de isotopía es único salvo conjugación topológica isotópica a la identidad.

Decimos que dos homeomorfismos f y g son *topológicamente conjugados* si existe un homeomorfismo h tal que $f \circ h = h \circ g$. En tal caso decimos que h es una *conjugación topológica* entre f y g .

Observamos que los homeomorfismos periódicos pueden ser reducibles. En efecto, la identidad siempre es un homeomorfismo periódico y reducible.

Estamos particularmente interesados en estudiar los homeomorfismos de superficies orientables que preservan orientación. Las superficies orientables con característica de Euler no negativa son el toro T_1 , el cilindro, el disco D^2 , y la esfera S^2 . Para el caso del toro ya vimos que existe una clasificación equivalente a la de Thurston. En el disco y la esfera todo homeomorfismo que preserva orientación es isotópico a la identidad. En el cilindro todo homeomorfismo que preserva orientación

es isotópico a la identidad o a un homeomorfismo de período 2, que intercambia los bordes del cilindro (Ref. [7] Teoremas 4.4 y 4.5). Concluimos que, salvo en el toro, en superficies con característica de Euler positiva todo homeomorfismo es isotópico a uno periódico. Mas aún, en superficies con característica de Euler estrictamente positiva no existen homeomorfismos pseudo-Anosov.

1.2 Contexto Analítico

L. Bers (1978) dio una demostración analítica para el Teorema de clasificación. En particular, L. Bers probó que dicha clasificación aparece como solución de un problema extremal, para aplicaciones cuasi-conformes, que enunciaremos al final de esta sección (Ref. [6]).

1.2.1 Definiciones

En esta sección nos referimos a superficies cerradas o agujereadas, orientables, y a homeomorfismos que preservan orientación.

Definición 1.5 Si S es una superficie cerrada, decimos que $X = (S, \{U_j, z_j\}_{j \in J})$ es una superficie de Riemann cerrada si:

- (i) $\{U_j\}_{j \in J}$ es un recubrimiento abierto de la superficie S ,
- (ii) $z_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}$ es un homeomorfismo con su imagen y ,
- (iii) los cambios de coordenadas $z_i \circ z_j^{-1}$ son funciones analíticas con inversa analítica.

En una superficie agujereada S consideramos las estructuras analíticas que, en torno a cada agujero, son localmente equivalentes a un disco agujereado. Es decir, en torno a cada agujero existe una vecindad V y una función de V en $\{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| < 1\}$, holomorfa con inversa holomorfa. Este tipo de estructuras analíticas son la restricción a S de una superficie de Riemann cerrada $X = (\tilde{S}, \{U_j, z_j\}_{j \in J})$, donde $\tilde{S} = S - \{p_1, \dots, p_n\}$. En tal caso decimos que X es una superficie de Riemann agujereada (en $\{p_1, \dots, p_n\}$).

Se dice que un homeomorfismo σ entre una superficie S y una superficie de Riemann $X = (S', \{U_j, z_j\}_{j \in J})$ es una *estructura conforme* en S . Una estructura conforme dota a la superficie S de una estructura analítica $(S, \{\sigma^{-1}(U_j), \sigma^{-1} \circ z_j\}_{j \in J})$, y denotamos por (S, σ) a dicha superficie de Riemann.

Sea X una superficie de Riemann, si $f : X \rightarrow X$ es una aplicación holomorfa con inversa holomorfa, decimos que f es un *automorfismo* de X , o una *transformación conforme* de X . Los automorfismos de una superficie de Riemann forman un grupo denotado $Aut X$.

Si X es una superficie con característica de Euler negativa, entonces $Aut X$ es un grupo finito. De donde, todo elemento de este grupo es de orden finito, es decir, un homeomorfismo periódico. (Ref. [13])

Inversamente, dado un homeomorfismo periódico f de una superficie S existe una estructura conforme σ tal que $f : (S, \sigma) \rightarrow (S, \sigma)$ es un automorfismo. (Ref. [6] Teorema 1).

Proposición 1.1 *Sea S una superficie con característica de Euler negativa y f un homeomorfismo de S . Entonces:*

f es periódico si y sólo si existe una estructura conforme σ tal que $f : (S, \sigma) \rightarrow (S, \sigma)$ es un automorfismo.

En superficies como la esfera de Riemann, donde la característica de Euler es positiva, existen muchos automorfismos (transformaciones de Moebius) que no son periódicos.

En superficies de Riemann con característica de Euler negativa, si un automorfismo f es isotópico con la identidad, entonces $f = id$. De donde, en estos casos, el único homeomorfismo periódico en la clase de isotopía de la identidad es la identidad. (Ref. [13], [6]).

Así, hemos visto que la contraparte analítica para los homeomorfismos periódicos son las transformaciones conformes. Las foliaciones medibles y los homeomorfismos pseudo-Anosov también tienen su contraparte analítica.

1.2.2 Foliaciones medibles y diferenciales cuadráticas

Sea $X = (S, \{U_j, z_j\}_{j \in J})$ una superficie de Riemann y, consideremos una función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Supongamos que los dominios de z_i y z_j se intersectan, y escribamos $f_i = f \circ z_i^{-1}$ y $f_j = f \circ z_j^{-1}$. Usualmente se considera a z_i y z_j como variables complejas. Si hacemos esto y diferenciamos $f_i(z_i)$ y $f_j(z_j)$ obtenemos la siguiente invariancia:

$$f'_i dz_i = f'_j dz_j$$

en $U_i \cap U_j$. Si bien la “derivada” de f no es independiente de la coordenada, si lo es su “diferencial” $df = f' dz_i$.

Las *diferenciales cuadráticas* son una generalización de la diferencial de una función y se definen como sigue (Ref. [6] sección 2, [21] IV.1.4):

Definición 1.6 Sea $X = (S, \{U_j, z_j\}_{j \in J})$ una superficie de Riemann, una colección $\varphi = \{\varphi_j\}$ de funciones se denomina *diferencial cuadrática holomorfa* (resp. *meromorfa*) si:

- (i) $\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa (resp. meromorfa) y,
- (ii) Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces,

$$\varphi_i dz_i^2 = \varphi_j dz_j^2$$

en $U_i \cap U_j$.

Usualmente escribimos, con cierto abuso de notación, $\varphi = \varphi(z) dz^2 = \varphi(z_i) dz_i^2$.

En una superficie de Riemann cerrada, estudiaremos las diferenciales cuadráticas holomorfas. En una superficie de Riemann agujereada estudiaremos las diferenciales cuadráticas meromorfas cuyos polos son simples y coinciden con agujeros de la superficie.

Dada una diferencial cuadrática φ holomorfa o, meromorfa con polos simples; decimos que $p \in X$ es un *punto regular* de φ si $\varphi(p) \neq 0$ y; decimos que p es un *punto singular* si $\varphi(p) = 0$ o si p es un polo de φ .

Estas diferenciales pueden ser reescritas de forma más sencilla, en un nuevo sistema de coordenadas analítico $\{V_i, w_i\}$ para X denominado *parametros naturales* de φ (Ref. [21] IV.6):

Si V_i es una vecindad de puntos regulares de φ se tiene que

$$\varphi(z)dz^2 = dw_i^2$$

en V_i .

Si V_i contiene un punto singular p de φ se tiene que $w_i(p) = 0$ y

$$\varphi(z)dz^2 = \left(\frac{n+2}{2}\right)w_i^n dw_i^2$$

en V_i , donde n es el orden de p .

Además, si el abierto $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ es una vecindad de puntos regulares, entonces el cambio de coordenadas $w_i \circ w_j^{-1}$ tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} w_i \circ w_j^{-1} : w_j(V_i \cap V_j) &\rightarrow w_i(V_i \cap V_j) \\ w &\mapsto \pm w + c \end{aligned}$$

donde c es una constante compleja.

Si escribimos $w = x + iy$ y $c = a + ib$, entonces

$$w_i \circ w_j^{-1}(x, y) = (\pm x + a, \pm y + b)$$

De donde, el cambio de coordenadas preserva la y -distancia y la x -distancia entre puntos regulares.

Decimos que una curva regular $\gamma : I \rightarrow X$ es una *línea recta* de la diferencial cuadrática φ si

$$\arg(\varphi(z(t))z'(t)^2) = \theta = \text{constante}$$

Cuando $\theta = 0$ decimos que γ es una *línea horizontal* y cuando $\theta = \pi$ decimos que γ es una *línea vertical*. Una *trayectoria horizontal* (resp. *vertical*) es una línea horizontal (resp. vertical) maximal.

Las trayectorias horizontales de una diferencial cuadrática φ inducen una foliación de X por hojas de dimension 1, salvo en las singularidades de φ (idem. para las trayectorias verticales).

Escribimos φ en sus parametros naturales $\{V_i, w_i\}$. Si V_i es una vecindad de puntos regulares, se verifica que, la imagen bajo w_i de las trayectorias horizontales (resp. verticales) son rectas horizontales (resp. verticales) del plano w .

Si p es un punto singular de orden n , entonces las trayectorias horizontales y verticales inducen un par de foliaciones transversales con una singularidad en p , que tiene $n + 2$ separatrices (figura 1.4).

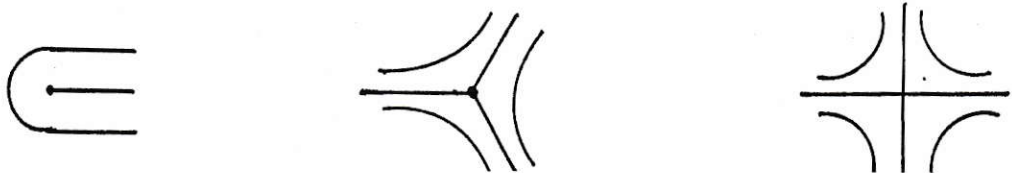


Figura 1.4: Trayectorias horizontales. Izquierda $n = -1$,
centro $n = 1$, derecha $n = 2$

Los cambios de coordenadas preservan la y -distancia y la x -distancia entre los puntos los puntos regulares. De donde, si φ es una diferencial cuadrática holomorfa en una superficie de Riemann cerrada $X = (S, \{V_i, w_i\})$, entonces las trayectorias horizontales y las trayectorias verticales de φ son un par de foliaciones medibles en S .

Si $X = (S, \{V_i, w_i\})$ es una superficie de Riemann agujereada y φ es una diferencial cuadrática meromorfa cuyos polos son simples y coinciden con agujeros de X , entonces, las trayectorias horizontales y las trayectorias verticales de φ son un par de foliaciones medibles en la superficie agujereada S .

Inversamente, J. Hubbard y H. Masur (1979) demostraron que: dado un par de foliaciones medibles transversales en una superficie S , existe una estructura conforme σ en S y una diferencial cuadrática φ en (S, σ) tal que, las trayectorias horizontales y verticales de φ coinciden con este par de foliaciones transversales. (Ref. [18], [6] sección 9)

Así, estudiar los homeomorfismos pseudo-Anosov de una superficie S es equivalente a estudiar homeomorfismos que llevan las trayectorias horizontales (resp. verticales) de una diferencial cuadrática φ , en trayectorias horizontales (resp. verticales) de dicha diferencial cuadrática, donde φ es una diferencial cuadrática en alguna superficie de Riemann (S, σ) .

Este tipo de homeomorfismos corresponde a un caso particular de las aplicaciones conocidas como *aplicaciones de Teichmüller*.

1.2.3 Aplicaciones de Teichmüller

Definición 1.7 Sean X, Y superficies de Riemann. Decimos que un homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación de Teichmüller si:

- (i) f es diferenciable salvo en un número finito de puntos $\{s_1, \dots, s_n\}$ y,
- (ii) existe una diferencial cuadrática holomorfa φ en X (si X es una superficie agujereada admitimos diferenciales cuadráticas meromorfas con polos simples en algunos agujeros de X) y un número k , $0 < k < 1$ tal que:

$$\frac{\partial_{\bar{z}} f d\bar{z}}{\partial_z f dz} = k \frac{|\varphi(z) dz^2|}{\varphi(z) dz^2}$$

en $X - \{s_1, \dots, s_n\}$.

Teorema 1.2 Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación de Teichmüller determinada por el par (φ, k) . Entonces existe una única diferencial cuadrática holomorfa ψ en Y (posiblemente con polos en los agujeros de Y) con las siguientes propiedades:

(i) Si φ tiene un cero de orden n en p , entonces ψ tiene un cero de orden n en $f(p)$,

(ii) Si $z = x + iy$ es el parametro natural de φ en un punto regular p ($z(p) = 0$) y $z' = x' + iy'$ es el parametro natural de ψ en p ($z'(p) = 0$), entonces f en coordenadas se escribe:

$$f(x, y) = \left(\lambda x, \frac{1}{\lambda} y \right)$$

donde $\lambda = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}$ y,

(iii) f^{-1} es una aplicación de Teichmüller definida por el par $(-\psi, k)$.

Para mayor información relativa a aplicaciones de Teichmüller ver [1], [6], [21].

A la diferencial cuadrática ψ del Teorema se le denomina *diferencial cuadrática final* de f , a φ se le denomina *diferencial cuadrática inicial* de f .

Concluimos que una aplicación de Teichmüller $f : X \rightarrow X$ con diferencial cuadrática inicial φ igual a su diferencial cuadrática terminal, es un homeomorfismo pseudo-Anosov. Las foliaciones medibles transversales invariantes son las trayectorias horizontales y las trayectorias verticales de φ .

Inversamente, todo par de foliaciones medibles transversales tiene asociado una diferencial cuadrática. Y se verifica que dado un pseudo-Anosov f de S existe una estructura conforme σ tal que $f : (S, \sigma) \rightarrow (S, \sigma)$ es una aplicación de Teichmüller con diferencial cuadrática inicial igual a su diferencial cuadrática final.

Proposición 1.2 *Sea f un homeomorfismo de S . Entonces:*

f es un homeomorfismo pseudo-Anosov si y sólo si existe una estructura conforme σ en S tal que $f : (S, \sigma) \rightarrow (S, \sigma)$ es una aplicación de Teichmüller con diferencial cuadrática inicial igual a su diferencial cuadrática final.

Las aplicaciones de Teichmüller aparecen como solución de un problema extremal para aplicaciones cuasi-conformes.

1.2.4 Aplicaciones cuasi-conformes

Consideremos una función diferenciable $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, con dominio $D \subset \mathbb{C}$ y la transformación afin:

$$\begin{aligned} A : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \zeta &\mapsto f(z) + \partial_z f(z)(\zeta - z) + \partial_{\bar{z}} f(z)(\bar{\zeta} - \bar{z}) \end{aligned}$$

donde $z \in D$. La transformación A lleva círculos centrados en z a elipses centradas en $f(z)$.

Si f es analítica en torno a z (i.e. $\partial_{\bar{z}}f(z) = 0$), con derivada no nula (i.e. $\partial_z f(z) \neq 0$), entonces A lleva círculos en círculos. En general, si f es una función analítica con inversa analítica, A lleva círculos en círculos. Las transformaciones holomorfas con inversa holomorfa se denominan *aplicaciones conformes* y tienen la propiedad que la transformación afin A preserva ángulos y es una traslación compuesta con una homotecia.

Si una aplicación diferenciable no es conforme, podemos medir cuanto se desvía de una aplicación conforme en torno a un punto z a través de la razón entre los largos del eje mayor y del eje menor de la elipse en torno a $f(z)$. A dicha razón se le denomina *dilatación* de f en torno a z , la notaremos $K(f)(z)$, y se verifica la siguiente identidad:

$$K(f)(z) = \frac{|\partial_z f(z)| + |\partial_{\bar{z}} f(z)|}{|\partial_z f(z)| - |\partial_{\bar{z}} f(z)|}$$

Observamos que la dilatación es un número que varía entre 1 e ∞ . Cuando $K(f)(z) = 1$, f es conforme en torno a z , y entre mayor es $K(f)(z)$ más se desvía f de ser conforme.

Para medir la desviación en todo el dominio D , decimos que el supremo de la dilatación en torno a cada punto de D es la *dilatación* de f en D , y la denotamos por $K(f)$.

$$K(f) := \sup_{z \in D} K(f)(z)$$

Ahora consideremos una aplicación diferenciable $f : X \rightarrow Y$, donde X e Y son superficies de Riemann, definimos la dilatación de f en torno a $x \in X$, como la dilatación de f escrita en las coordenadas de X e Y . Y la dilatación de f en X es el supremo de las dilataciones en cada punto.

Para homeomorfismos de superficies de Riemann se puede definir la dilatación de forma que generalize las definiciones anteriores.

Decimos que un homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ es una *aplicación cuasi-conforme* si la dilatación $K(f)$ de f en X es finita.

La dilatación de una aplicación depende de la estructura analítica en cuestión. Consideremos una superficie S y una aplicación $f : S \rightarrow S$. A la superficie S se le puede dotar de muchas estructuras analíticas. Elijamos arbitrariamente un par de estructuras conformes σ, τ y consideremos a f como una aplicación entre las superficies de Riemann (S, σ) y (S, τ) :

$$f : (S, \sigma) \rightarrow (S, \tau)$$

La dilatación de f con respecto a las estructuras σ y τ será denotada por $K_{\sigma, \tau}(f)$ y si $\sigma = \tau$ notaremos $K_{\sigma}(f)$.

Un problema extremal es, dado una aplicación cuasi-conforme $f : X \rightarrow Y$, determinar si existe una aplicación f' que minimice la dilatación en la clase de isotopía de f . Este problema fue resuelto por Teichmüller en 1940–1943 (Ref. [1], [21], [6]).

Teorema 1.3 (Teichmüller) *Dada una aplicación cuasi-conforme $f : X \rightarrow Y$, existe una única aplicación f' que minimiza la dilatación en la clase de isotopía de f . Además f' es una aplicación conforme o una aplicación de Teichmüller.*

Se dice que una aplicación f es *extremal* si f es una aplicación conforme o de Teichmüller.

El problema extremal propuesto y resuelto por L. Bers plantea si dado un homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ existe una aplicación cuasi-conforme f' isotópica a f y una estructura conforme σ en S tal que:

$$K_{\sigma}(f') \leq K_{\tau}(g)$$

para todo homeomorfismo g isotópico a f , y para toda estructura conforme τ en S . Es decir, se pretende minimizar la dilatación recorriendo todos los homeomorfismos en la clase de isotopía de f y todas las estructuras conformes de S . Dicho problema extremal lo llamaremos el *problema absolutamente extremal* para f (Ref. [6])

Teorema 1.4 (Bers) *Dado un homeomorfismo $f : S \rightarrow S$. El problema absolutamente extremal para f tiene solución si y sólo si existe una estructura conforme σ y*

un homeomorfismo f' isotópico a f tal que

$$f' : (S, \sigma) \rightarrow (S, \sigma)$$

es una aplicación conforme o, es una aplicación de Teichmüller con diferencial cuadrática inicial igual a su diferencial cuadrática final.

Además, el problema absolutamente extremal no tiene solución si y sólo si f es isotópico a un homeomorfismo reducible y no es isotópico a un homeomorfismo periódico.

La contraparte topológica de las aplicaciones conformes son los homeomorfismos periódicos (Proposición 1.1) y la contraparte topológica de las aplicaciones de Teichmüller (con diferencial cuadrática inicial igual a su diferencial cuadrática final) son los homeomorfismos pseudo-Anosov (Proposición 1.2). De donde, el Teorema anterior es equivalente al Teorema de clasificación de Thurston.

Capítulo 2

Mapping Class Group

Todo homeomorfismo del toro, que preserva orientación, es isotópico a la proyección de una aplicación lineal del plano en $SL_2(\mathbb{Z})$. Así, el grupo lineal especial $SL_2(\mathbb{Z})$ representa el conjunto de clases de isotopía de los homeomorfismos del toro y decimos que $SL_2(\mathbb{Z})$ es el *Mapping Class Group* del toro. En este Capítulo estudiaremos el *Mapping Class Group* del bitoro $\mathcal{M}(T_2)$.

En 1970 Joan Birman [7] encontró una presentación para el *Mapping Class Group* del bitoro demostrando que este grupo está relacionado con el *Mapping Class Group* de la esfera con 6 agujeros, para el cual ya se conocía una presentación desde 1934 (Magnus).

Los *Mapping Class Group* de la esfera agujereada y del disco agujereado están relacionados con los *grupos de trenzas* introducidos por Emil Artin en 1925 [3].

Este Capítulo se divide en 2 secciones. En la sección 1 nos abocamos al estudio de los *grupos de trenzas* del disco y de la esfera. En la sección 2 estudiamos las presentaciones de los *Mapping Class Group* del disco agujereado, de la esfera agujereada y del bitoro.

2.1 Grupos de Trenzas

El concepto de *grupos de trenzas del plano euclideo* fue introducido por Artin en 1925 [3] y fue posteriormente generalizado a cualquier superficie demostrando

ser particularmente importante en el estudio de homeomorfismos de superficies.

2.1.1 Definiciones

Consideremos una superficie S y n puntos distintos p_1, \dots, p_n .

Definición 2.1 Una n -trenza f es una colección $\{f_1, \dots, f_n\}$ de n caminos en S , tal que:

$$\begin{aligned} (i) \quad f_i(0) &= p_i \\ f_i(1) &= p_{\pi_f(i)} \text{ cierto } \pi_f \in \Sigma_n \\ (ii) \quad f_i(t) &\neq f_j(t) \quad \forall t \in I \text{ si } i \neq j \end{aligned}$$

donde Σ_n es el grupo de permutaciones de n símbolos.

Al camino f_i se le denomina la i -ésima cuerda de f .

Dada una trenza $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ denotaremos por \mathcal{A}_i al gráfico de la i -ésima cuerda de f . \mathcal{A}_i es la imagen del intervalo por la función a_i , donde:

$$\begin{aligned} a_i : I &\rightarrow S \times I \\ t &\mapsto (f_i(t), t) \end{aligned}$$

La condición (ii) de la definición asegura que los gráficos de f_1, \dots, f_n son disjuntos. Al “gráfico” de una n -trenza f se le denomina n -trenza geométrica y se nota por \mathcal{A}_f ; es decir, $\mathcal{A}_f := \mathcal{A}_1 \cup \dots \cup \mathcal{A}_n$.

Ahora consideremos dos n -trenzas $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ y $g = \{g_1, \dots, g_n\}$, el producto de caminos se extiende a las trenzas definiendo

$$f \cdot g := \{f_1 \cdot g_{\pi_f(1)}, \dots, f_n \cdot g_{\pi_f(n)}\}$$

Con esta operación el conjunto de n -trenzas resulta ser un grupo.

La homotopía de caminos también se extiende, respetando el producto, a una relación de equivalencia en el conjunto de n -trenzas.

Definición 2.2 Sean f y g dos n -trenzas. Se dice que f es homotópica (\sim) a g , si existe un camino \mathcal{H}_s de n -trenzas entre f y g . Es decir, existe una aplicación:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} : I \times I &\rightarrow S \times \cdots \times S \\ (s, t) &\mapsto (\mathcal{H}_1(s, t), \dots, \mathcal{H}_n(s, t))\end{aligned}$$

tal que:

(i) $\mathcal{H}_s = \{\mathcal{H}_1(s, t), \dots, \mathcal{H}_n(s, t)\}$ es una trenza.

(ii) $\mathcal{H}_i : I \times I \rightarrow M$ es una homotopía de caminos entre f_i y g_i relativa a los extremos.

Definición 2.3 Al grupo formado por las clases de homotopía de n -trenzas se le denomina grupo de n -trenzas de S y se nota por $\mathcal{B}_n(S)$.

Una n -trenza f tiene asociada una permutación de n símbolos, π_f . Dicha permutación es invariante bajo homotopías de trenzas. Luego, la aplicación:

$$\begin{aligned}\pi : \mathcal{B}_n(S) &\rightarrow \Sigma_n \\ [f] &\mapsto \pi_f\end{aligned}$$

está bien definida. Mas aún, π resulta ser un homomorfismo de grupos (en Σ_n consideramos la multiplicación de permutaciones, de izquierda a derecha).

También observamos que si S es una superficie conexa, $\mathcal{B}_n(S)$ es independiente (salvo isomorfismo) de la elección de los puntos p_1, \dots, p_n .

El concepto de grupos de trenzas fue generalizado por D. Dahm (1962) y D. Goldsmith (1972) al concepto de grupos de movimientos de una subvariedad en una variedad (Ref. [7] pág. 10). Esta generalización nos será de utilidad para mostrar la relación existente de los grupos de trenzas del disco y de la esfera con los homeomorfismos de dichas superficies.

Definición 2.4 Sea M una variedad compacta, N una subvariedad de M (no necesariamente conexa) y $\mathcal{H}(M)$ el grupo de homeomorfismos de M , dotado de la topología compacto-abierto.

(i) Un movimiento d , de N en M , es un camino $d : I \rightarrow \mathcal{H}(M)$ tal que $d(0) = id_M$ y $d(1)(N) = N$.

(ii) Un movimiento d , se dice estacionario, si $d(t)(N) = N$ para todo $t \in I$.

(iii) Dados dos movimientos c y d , definimos el producto:

$$cd := c \cdot d'$$

donde $d'(t) = d(t) \circ c(1)$ (la traslación de d) y, la operación de la derecha es la multiplicación usual de caminos.

(iv) Definimos al inverso d^{-1} del movimiento d , como el inverso del camino d en $\mathcal{H}(M)$ trasladado de manera tal que su punto inicial sea id_M , i.e. $d^{-1}(t) := d(1-t) \circ d^{-1}(1)$.

(v) Decimos que dos movimientos c y d , son equivalentes si $c^{-1}d$ es homotópico módulo sus extremos a un movimiento estacionario (como caminos en $\mathcal{H}(M)$).

El conjunto de clases de equivalencia de movimientos de N en M , con la multiplicación inducida por el producto de movimientos, es un grupo, denominado grupo de movimientos de N en M y denotado por $Mov_N(M)$.

Dado un movimiento d de n puntos distintos en una superficie, si restringimos el movimiento d a dichos puntos, obtenemos una colección de n caminos que forman una n -trenza.

Proposición 2.1 Sea S una superficie, y $N = \{p_1, \dots, p_n\}$ n puntos distintos en S , entonces:

$$\begin{aligned} \Psi : Mov_N(S) &\rightarrow \mathcal{B}_n(S) \\ [d] &\mapsto [d(\cdot)(p_1), \dots, d(\cdot)(p_n)] \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos.

2.1.2 Presentación de un grupo

Más adelante encontraremos una *presentación* para los grupos de trenzas del disco $\mathcal{B}_n(D^2)$ y de la esfera $\mathcal{B}_n(S^2)$ así como para otros grupos relacionados con el estudio de homeomorfismos de superficies. Es por este motivo que a continuación precisaremos lo que se entiende por la *presentación de un grupo* (Ref. [22] pág 87):

Definición 2.5 Sea F un grupo libre con base X , R un subconjunto de F y, $N_c(R)$ la clausura normal de R en F (i.e. el menor subgrupo normal de F que contiene a R). Decimos que $\langle X; R \rangle$ es una *presentación de un grupo* G , si $G \cong F/N_c(R)$

Usualmente se dice que los elementos de X son los *generadores* de G y los elementos de R son las *relaciones que definen a G* .

Ejemplo: El grupo fundamental del bitoro $\Pi_1(T_2)$, admite la siguiente presentación:

$$\langle a, b, c, d; aba^{-1}b^{-1}dcd^{-1}c^{-1} \rangle$$

Es decir, $\Pi_1(T_2) \cong \langle a, b, c, d \rangle / N_c(aba^{-1}b^{-1}dcd^{-1}c^{-1})$.

También escribimos: $\Pi_1(T_2) \cong \langle a, b, c, d / aba^{-1}b^{-1}dcd^{-1}c^{-1} = 1 \rangle$. Equivalentemente decimos que, $\Pi_1(T_2)$ admite la siguiente presentación:

generadores: a, b, c, d

relaciones: $aba^{-1}b^{-1} = cdc^{-1}d^{-1}$

2.1.3 Presentación de $\mathcal{B}_n(D^2)$ y $\mathcal{B}_n(S^2)$

Artin encontró una presentación para el grupo de trenzas del plano $\mathcal{B}_n(D^2)$, al que también se le denomina *grupo de trenzas clásico* o *grupo de trenzas de Artin* (Ref. [3], [7] 1.4). Posteriormente, Fadell y Van Buskirk (1962) encontraron una presentación para el grupo de trenzas de la esfera $\mathcal{B}_n(S^2)$ (Ref. [12], [7] 1.5).

Representamos a $D^2 \times I$ por un cilindro en \mathbb{R}^3 y a las trenzas geométricas en D^2 por su proyección en el plano yz (figura 2.1).

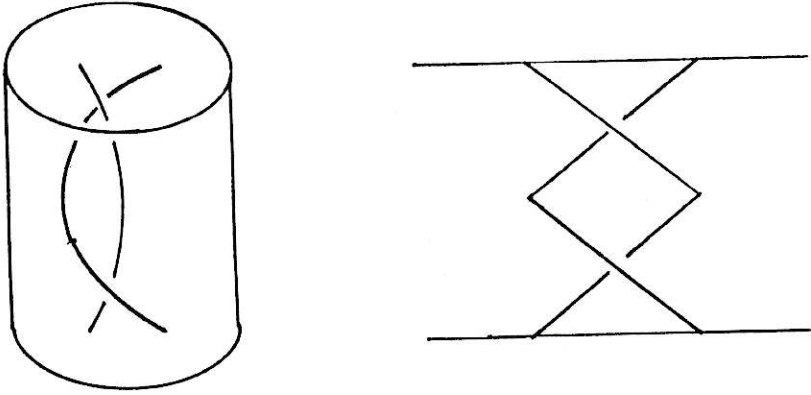
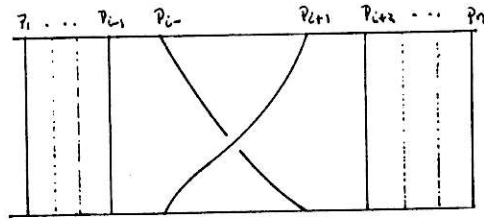


Figura 2.1:

Consideremos las trenzas $\sigma_i \in \mathcal{B}_n(D^2)$ (donde $1 \leq i \leq n - 1$) representadas geoméricamente en la figura 2.2.

Figura 2.2: σ_i

Gráficamente (por ejemplo figura 2.3) podemos observar que:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \end{aligned}$$

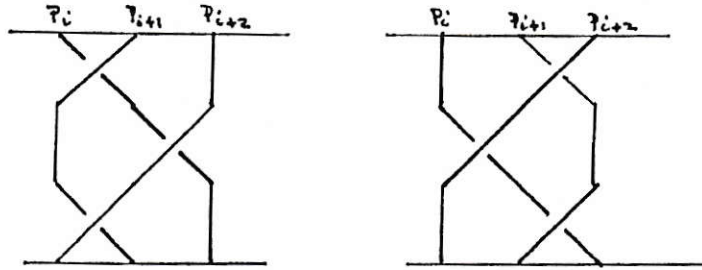


Figura 2.3: $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$ (izq.) $\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ (der.).

Teorema 2.1 (Artin) *El grupo de trenzas $\mathcal{B}_n(D^2)$ admite la siguiente presentación:*

generadores: $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$

relaciones:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{si } |i - j| \geq 2$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

Para estudiar el grupo de trenzas de S^2 representamos a $S^2 \times I$ por la región comprendida entre dos esferas concéntricas contenidas en \mathbb{R}^3 , con centro en el origen. Las trenzas geométricas en S^2 son representadas por su proyección en el plano yz .

Consideremos las trenzas $\delta_i \in \mathcal{B}_n(S^2)$ (donde $1 \leq i \leq n - 1$) representadas geoméricamente en la figura 2.4.

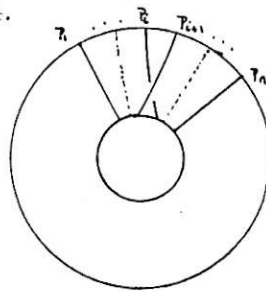


Figura 2.4: δ_i

Al igual que en el disco:

$$\delta_i \delta_j = \delta_j \delta_i \quad \text{si } |i - j| \geq 2$$

$$\delta_i \delta_{i+1} \delta_i = \delta_{i+1} \delta_i \delta_{i+1}$$

Sin embargo, al representar geoméricamente (figura 2.5) la trenza

$$\delta = \delta_1 \dots \delta_{n-2} \delta_{n-1}^2 \delta_{n-2} \dots \delta_1$$

concluimos que $\delta = 1$.

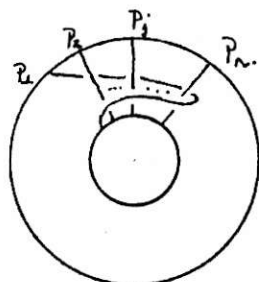


Figura 2.5: δ

Teorema 2.2 (Fadell y Van Buskirk) *El grupo de trenzas $B_n(S^2)$ admite la siguiente presentación:*

generadores: $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$

relaciones:

$$\delta_i \delta_j = \delta_j \delta_i \quad \text{si } |i - j| \geq 2$$

$$\delta_i \delta_{i+1} \delta_i = \delta_{i+1} \delta_i \delta_{i+1}$$

$$\delta_1 \dots \delta_{n-2} \delta_{n-1}^2 \delta_{n-2} \dots \delta_1 = 1$$

2.2 Mapping Class Group

2.2.1 Definiciones

Sea S una superficie orientable y $\mathcal{H}^+(S)$ el grupo formado por los homeomorfismos de S que preservan orientación. En $\mathcal{H}^+(S)$, la isotopía es una relación de equivalencia que respeta la composición (definición 1.1). De donde, el conjunto de clases de isotopía de homeomorfismos que preservan orientación, dotado con el producto inducido por la composición de funciones en $\mathcal{H}^+(S)$, es un grupo.

Definición 2.6 Al grupo formado por las clases isotopía de $\mathcal{H}^+(S)$ se le denomina *Mapping Class Group* de S .

Basados en el hecho de que el *Mapping Class Group* es un invariante topológico de S , usaremos la siguiente notación:

Si S es una superficie cerrada orientable, entonces S es homeomorfa a S^2 o a T_g . En tal caso denotaremos al *Mapping Class Group* de S por $\mathcal{M}(S^2)$ o $\mathcal{M}(T_g)$, según corresponda.

Si S es una superficie agujereada y orientable, entonces S es homeomorfa a S^2 o a T_g con n agujeros. En tal caso denotaremos al *Mapping Class Group* de S por $\mathcal{M}_n(S^2)$ o $\mathcal{M}_n(T_g)$, según corresponda.

El *Mapping Class Group* de una superficie S con borde, obtenida a partir de una superficie cerrada \tilde{S} menos n discos abiertos, resulta ser isomorfo al *Mapping Class Group* de la superficie agujereada S' obtenida a partir de la superficie \tilde{S} menos n agujeros.

Consideremos una superficie compacta \tilde{S} y n puntos distintos $\{p_1, \dots, p_n\}$. Todo homeomorfismo de $\tilde{S} - \{p_1, \dots, p_n\}$ se extiende por continuidad a un único homeomorfismo de \tilde{S} que permuta p_1, \dots, p_n . Inversamente, todo homeomorfismo de \tilde{S} que deja fijo al conjunto $\{p_1, \dots, p_n\}$, induce a través de su restricción, un homeomorfismo en $\tilde{S} - \{p_1, \dots, p_n\}$.

De la misma forma, las isotopías en $\tilde{S} - \{p_1, \dots, p_n\}$, se extienden a isotopías en \tilde{S} relativas a $\{p_1, \dots, p_n\}$ y, estas últimas inducen por restricción, isotopías en $\tilde{S} - \{p_1, \dots, p_n\}$.

Sea $\mathcal{H}^+(\tilde{S}, \{p_1, \dots, p_n\})$ el grupo formado por los homeomorfismos de \tilde{S} que fijan al conjunto $\{p_1, \dots, p_n\}$. Dos elementos f y g en $\mathcal{H}^+(\tilde{S}, \{p_1, \dots, p_n\})$ son *isotópicos* si existe un camino de homeomorfismos en $\mathcal{H}^+(\tilde{S}, \{p_1, \dots, p_n\})$ entre f y g , en tal caso también decimos que f y g son *isotópicos relativo a* (o *módulo*) $\{p_1, \dots, p_n\}$.

Así, estudiar la clases de isotopía en $\mathcal{H}^+(\tilde{S}, \{p_1, \dots, p_n\})$ es equivalente a estudiar la clases de isotopía en la superficie \tilde{S} agujereada.

2.2.2 Presentación de $\mathcal{M}_n(D^2)$ y $\mathcal{M}_n(S^2)$

En lo que sigue nos abocaremos a encontrar una presentación para el *Mapping Class Group* $\mathcal{M}_n(D^2)$ del disco D^2 con n agujeros y para el *Mapping Class Group* $\mathcal{M}_n(S^2)$ de la esfera S^2 con n agujeros. El primero en encontrar una presentación de $\mathcal{M}_n(S^2)$ fue Magnus en 1934.

Para mayores referencias acerca de los resultados que resumimos a continuación ver [7] 4.1 y 4.2, [5].

Como las propiedades de la esfera y del disco son similares, los procedimientos para encontrar las presentaciones de $\mathcal{M}_n(D^2)$ y $\mathcal{M}_n(S^2)$ son similares. En esta subsección consideramos a $S = D^2 \cup S^2$.

A continuación expondremos la relación existente entre el grupo de trenzas de S y el *Mapping Class Group* de S con agujeros. En particular, se construye un epimorfismo de $\mathcal{B}_n(S)$ a $\mathcal{M}_n(S)$, e identificando su núcleo, se obtiene una presentación de $\mathcal{M}_n(S)$.

Para construir este epimorfismo, primero consideramos el grupo de movimientos de $N = \{p_1, \dots, p_n\}$ en S . Observamos que, dado un movimiento d de N en S , $d(1)$ es un homeomorfismo en $\mathcal{H}^+(S, \{p_1, \dots, p_n\})$. Además, un movimiento estacionario e es una isotopía, relativa a $\{p_1, \dots, p_n\}$, entre id_S y $e(1)$.

Proposición 2.2

$$\begin{aligned} \Phi : Mov_N(S) &\rightarrow \mathcal{M}_n(S) \\ [d] &\mapsto [d(1)] \end{aligned}$$

es un (anti)-epimorfismo de grupos.

DEMOSTRACIÓN: Si dos movimientos d y d' son equivalentes, entonces existe un movimiento estacionario con punto final $d(1) \circ (d'(1))^{-1}$, dicho movimiento es una isotopía, relativa a $\{p_1, \dots, p_n\}$, entre id_S y $d(1) \circ (d'(1))^{-1}$. Por lo tanto, Φ está bien definida.

Φ es un (anti)-homomorfismo, pues:

$$\Phi([c][d]) = \Phi([cd]) = [cd(1)] = [d(1) \circ c(1)] = \Phi([d])\Phi([c])$$

Dado un homeomorfismo $h \in \mathcal{H}^+(S, \{p_1, \dots, p_n\})$, h es isotópico (en S) a la id_S . La isotopía es un movimiento en $Mov_N(S)$, cuya imagen por Φ es $[h]$, por lo tanto, Φ es un (anti)-epimorfismo. \square

En la sección anterior (Proposición 2.1), mostramos que:

$$\begin{aligned} \Psi : Mov_N(S) &\rightarrow \mathcal{B}_n(S) \\ [d] &\mapsto [d(\cdot)(p_1), \dots, d(\cdot)(p_n)] \end{aligned}$$

es un isomorfismo. De este hecho y de la Proposición anterior obtenemos que:

$$\Phi' := \Phi \circ \Psi^{-1}$$

es un epimorfismo de $\mathcal{B}_n(S)$ en $\mathcal{M}_n(S)$.

Teorema 2.3 *Sea*

$$\begin{aligned} \Phi' : \mathcal{B}_n(S) &\rightarrow \mathcal{M}_n(S) \\ \delta &\mapsto \Phi \circ \Psi^{-1}(\delta) \end{aligned}$$

donde Φ es el epimorfismo de la Proposición anterior y Ψ el isomorfismo de la Proposición 2.1.

(i) Si $S = D^2$, entonces, $\ker \Phi' = \text{centro de } \mathcal{B}_n(D^2) = \langle (\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^n \rangle$

(ii) Si $S = S^2$, entonces, $\ker \Phi' = \text{centro de } \mathcal{B}_n(S^2) = \langle (\delta_1 \dots \delta_{n-1})^n \rangle$. En

este caso se tiene que: $(\delta_1 \dots \delta_{n-1})^{2n} = 1$

Corolario 2.1 $\mathcal{M}_n(D^2)$ admite la siguiente presentación:

generadores: $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$

relaciones:

$$\begin{aligned} \rho_i \rho_j &= \rho_j \rho_i && \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \rho_i \rho_{i+1} \rho_i &= \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \\ (\rho_1 \dots \rho_{n-1})^n &= 1 \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\rho_i := \Phi'(\sigma_i)$ y aplicamos el Primer Teorema de isomorfismo de grupos. \square

Corolario 2.2 (Magnus) $\mathcal{M}_n(S^2)$ admite la siguiente presentación:

generadores: w_1, \dots, w_{n-1}

relaciones:

$$\begin{aligned} w_i w_j &= w_j w_i && \text{si } |i - j| \geq 2 \\ w_i w_{i+1} w_i &= w_{i+1} w_i w_{i+1} \\ w_1 \dots w_{n-2} w_{n-1}^2 w_{n-2} \dots w_1 &= 1 \\ (w_1 \dots w_{n-1})^n &= 1 \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $w_i := \Phi'(\delta_i)$ y aplicamos el Primer Teorema de isomorfismo de grupos. \square

Además, podemos encontrar explícitamente un representante de las clases $\rho_i \in \mathcal{M}_n(D^2)$ y $w_i \in \mathcal{M}_n(S^2)$. Nos restringiremos al caso del disco.

Sea D_i un disco en D^2 que contiene en su interior a p_i y p_{i+1} (y no contiene otro elemento $\{p_1, \dots, p_n\}$). Parametrizaremos a D_i en coordenadas polares:

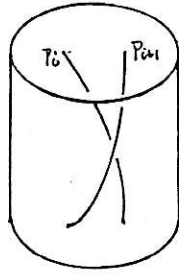
$$D_i = \{(r, \theta) / 0 \leq r \leq 1 \text{ y } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

de tal forma que: $p_i = (3/4, \pi)$ y $p_{i+1} = (3/4, 0)$

Consideremos el movimiento d_i , de $\{p_1, \dots, p_n\}$ en S^2 , definido por:

$$d_i(t)(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin D_i \\ (r, \theta + 4\pi t(1-r)) & \text{si } x = (r, \theta) \in D_i \\ & \text{y } 1/2 \leq r \leq 1 \\ (r, \theta + 2\pi t) & \text{si } x = (r, \theta) \in D_i \\ & \text{y } 0 \leq r \leq 1/2 \end{cases}$$

Si analizamos la trenza $\{d_i(\cdot)(p_1), \dots, d_i(\cdot)(p_n)\}$, esta resulta ser el representante canónico de $\sigma_i \in \mathcal{B}_n(D^2)$ (figura 2.6).

Figura 2.6: σ_i

Por lo tanto,

$$\Psi([d_i]) = \sigma_i$$

y obtenemos un representante de $\rho_i \in \mathcal{M}_n(D^2)$, pues:

$$\rho_i = \Phi'(\sigma_i) = \Phi \circ \Psi^{-1}(\sigma_i) = \Phi([d_i]) = [d_i(1)]$$

Ahora, consideremos el anillo $A_i \subset D_i$ definido por:

$$A_i = \{(r, \theta) / 1/2 \leq r \leq 1 \text{ y } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

resulta que:

$$d_i(1)(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin A_i \\ (r, \theta - 4\pi r) & \text{si } x = (r, \theta) \in A_i \end{cases}$$

Definición 2.7 Sea c un curva cerrada simple en una superficie orientada S . Sea A_c un anillo que contiene a la curva c (un cuello en torno a c). Parametrizamos A_c en coordenados polares: $A_c = \{(r, \theta) / 1/2 \leq r \leq 1 \text{ y } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$; de tal forma que, $c = \{(3/4, \theta) / 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ y la orientación inducida por las coordenadas coincida con la orientación de S .

Diremos que el homeomorfismo d_c , definido por:

$$d_c(x) := \begin{cases} x & \text{si } x \notin A_c \\ (r, \theta - 4\pi r) & \text{si } x = (r, \theta) \in A_c \end{cases}$$

es un twist de Dehn en torno a la curva c .

Observamos que la clase de isotopía de un twist de Dehn es independiente de la elección del anillo y de su parametrización. Mas aún, si dos curvas son isotópicas, los twist de Dehn asociados son homeomorfismos isotópicos ([7] pág. 165-167).

Geoméricamente un twist de Dehn d_c , en torno a una curva c , es la aplicación que en el anillo A_c “le da una vuelta completa a la circunferencia interna del anillo”, y se extiende al resto de la superficie, a través de la identidad (figura 2.7).

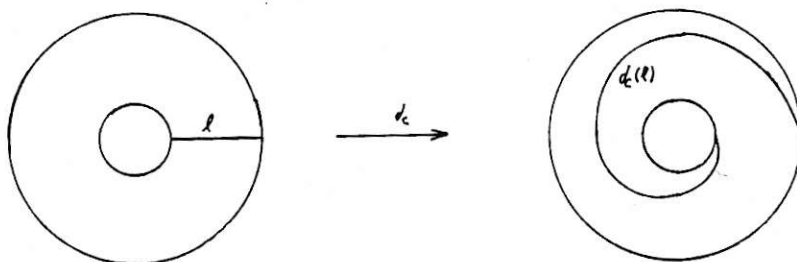


Figura 2.7: Twist de Dehn d_c

Los generadores $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ de $\mathcal{M}_n(D^2)$ corresponden a clases de isotopía en $D^2 - \{p_1, \dots, p_n\}$ de los twist de Dehn $d_1(1), \dots, d_{n-1}(1)$. Donde $d_i(1)$ es un twist de Dehn en torno a la curva c_i que contiene a p_i y p_{i+1} , este twist de Dehn tiene la particularidad de que intercambia los puntos p_i y p_{i+1} .

De forma similar se verifica que los generadores w_1, \dots, w_{n-1} de $\mathcal{M}_n(S^2)$ corresponden a clases de isotopía en $S^2 - \{p_1, \dots, p_n\}$ de los twist de Dehn $d_1(1), \dots, d_{n-1}(1)$. Donde $d_i(1)$ es un twist de Dehn en torno a la curva c_i que contienen a p_i y p_{i+1} ($d_i(1)$ intercambia los puntos p_i y p_{i+1}).

2.2.3 Presentación del Mapping Class Group del Bitoro

En 1970, Joan Birman encontró una presentación de $\mathcal{M}(T_2)$. Esta presentación se obtiene considerando a T_2 como un 2-recubrimiento ramificado de la esfera. Levantando y proyectando homeomorfismos e isotopías adecuadamente se establece un epimorfismo de $\mathcal{M}(T_2)$ en $\mathcal{M}_6(S^2)$, obteniéndose así una presentación de $\mathcal{M}(T_2)$.

Consideremos a T_2 incrustado en \mathbb{R}^3 , de tal forma que sea simétrico con respecto a los planos yz y xy (figura 2.8) y la involución i definida por:

$$\begin{aligned} i : T_2 &\rightarrow T_2 \\ (x, y, z) &\mapsto (-x, y, -z) \end{aligned}$$

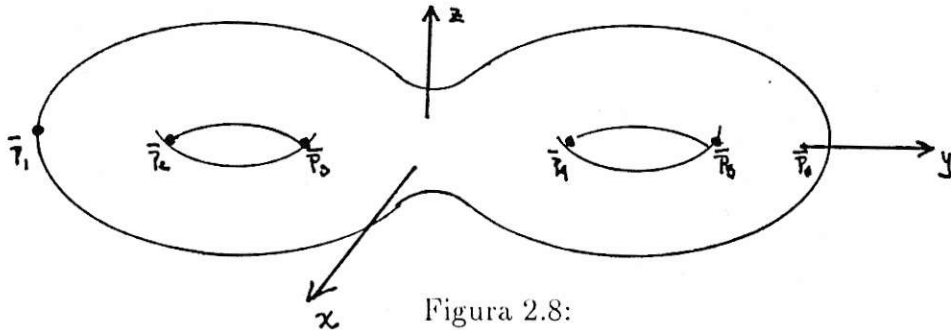


Figura 2.8:

Esta involución corresponde a una rotación en π en torno al eje y . Además, i tiene 6 puntos fijos, $\overline{p}_1, \dots, \overline{p}_6$ (la intersección de T_2 con el eje y).

El espacio cociente $T_2 / \langle i \rangle$ es homeomorfo a la esfera y la proyección

$$\begin{aligned} p : T_2 &\rightarrow S^2 \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

es un recubrimiento ramificado de S^2 , donde los puntos de ramificación son $\overline{p}_1, \dots, \overline{p}_6$. Denotaremos por p_1, \dots, p_6 a la proyección de dichos puntos.

Decimos que un homeomorfismo H de T_2 *preserva fibras* si conmuta con la involución i . Si un homeomorfismo H de T_2 *preserva fibras*, entonces H se proyecta a un homeomorfismo h de S^2 , donde:

$$\begin{aligned} h : S^2 &\rightarrow S^2 \\ [x] &\mapsto [H(x)] \end{aligned}$$

o en forma equivalente $h(p(x)) := p(H(x))$. Observamos que tal h deja fijo al conjunto $\{p_1, \dots, p_6\}$. Al homeomorfismo h lo llamaremos, *proyección de H*.

Inversamente si $h \in \mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_6\})$, entonces existe un homeomorfismo H de T_2 que preserva fibras y que su proyección es h . Al homeomorfismo H lo llamaremos, *levantamiento* de h .

A un homeomorfismo de T_2 que preserva fibras y que su proyección es la identidad en S^2 , se le denomina *transformación de recubrimiento*. Las únicas transformaciones de recubrimiento (en este caso) son la identidad id_{T_2} y la involución i .

Dado $h \in \mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_6\})$, su levantamiento es único salvo transformaciones de recubrimiento, por lo tanto, todos los posibles levantamientos de h son H y $H \circ i$.

A continuación daremos una demostración analítica de la presentación de $\mathcal{M}(T_2)$ encontrada por Joan Birman mediante argumentos topológicos [7] (pág. 183–189). Esta demostración analítica, si bien es posible que se encuentre en la literatura, surgió al estudiar la clasificación de Thurston desde un punto de vista analítico (Sección 1.2). En particular, utilizaremos el Teorema de Tichmüller (Teorema 1.3) y la Proposición 1.1.

La involución i es un homeomorfismo periódico, luego existe una estructura conforme σ tal que $i : (T_2, \sigma) \rightarrow (T_2, \sigma)$ es un automorfismo, de período 2 y con 6 puntos fijos (Proposición 1.1).

Definición 2.8 *Decimos que una superficie de Riemann (T_g, σ) es hiperelíptica si existe un automorfismo j de (T_g, σ) de período 2, con $2g + 2$ puntos fijos.*

Si (T_g, σ) es una superficie hiperelíptica y j es la involución de la definición, decimos que j es una *involución hiperelíptica*.

Dada una superficie hiperelíptica X con involución hiperelíptica j se tiene que j conmuta con todos los automorfismos de X y j es el único automorfismo con $2g + 2$ puntos fijos.

En el caso del bitoro se tiene que toda superficie de Riemann (T_2, σ) es hiperelíptica. Mas aún, si j_σ es la involución hiperelíptica de (T_2, σ) y j_τ es la involución hiperelíptica de (T_2, τ) ; entonces $j_\sigma \sim j_\tau$. Es decir, todas las involuciones hiperelípticas del bitoro son isotópicas entre si. (Ref. [16], [13] III.7)

Para encontrar una presentación de $\mathcal{M}(T_2)$ primero demostraremos que en cada clase de isotopía existe un homeomorfismo que preserva fibras.

Lema 2.1 *Dado un elemento D en $\mathcal{M}(T_2)$, existe un representante H_D , de la clase D , que preserva fibras.*

DEMOSTRACIÓN: Sea σ estructura conforme en T_2 , elegida de manera que

$$i : (T_2, \sigma) \rightarrow (T_2, \sigma)$$

sea un automorfismo (Proposición 1.1). Como i es de período 2, con 6 puntos fijos, se tiene que i es la involución hiperelíptica de (T_2, σ) .

Sea H_D un homeomorfismo que minimiza la dilatación en la clase D . El Teorema de Teichmüller (Teorema 1.3) nos asegura que tal H_D existe, y mas aún, es único.

Consideremos $j := H_D \circ i \circ H_D^{-1}$. Puesto que j es topológicamente conjugada a i , j es periódica, de período 2 y con 6 puntos fijos. Por lo tanto, j es hiperelíptica en alguna estructura analítica de T_2 , de donde, j es isotópica a i ; ya que, todas las involuciones hiperelípticas de T_2 son isotópicas entre sí. Entonces $i \sim j = H_D \circ i \circ H_D^{-1}$, de donde, $i \circ H_D \circ i \sim H_D$. Como, i es conforme $K(i \circ H_D \circ i) = K(H_D)$ y por unicidad extremal (Teorema 1.3) $i \circ H_D \circ i = H_D$. Con esto, H_D preserva fibras. \square

Consideremos la *aplicación* Ω definida por:

$$\begin{aligned} \Omega : \mathcal{M}(T_2) &\rightarrow \mathcal{M}_6(S^2) \\ [H] &\mapsto [h] \end{aligned}$$

donde H preserva fibras y h es su proyección.

Del Lema anterior se concluye que el “dominio” de Ω es todo $\mathcal{M}(T_2)$. Para demostrar que esta bien definida probaremos el próximo Lema y Teorema. Pero antes algunas observaciones:

Al igual que en la demostración del Lema, sea σ una estructura conforme en T_2 tal que i es un automorfismo de (T_2, σ) (la Proposición 1.1 asegura la existencia).

La proyección $\mathbf{p} : (T_2, \sigma) \rightarrow S^2$ induce en S^2 una única estructura analítica τ , tal que la proyección sea analítica. Mas aún, en una vecindad de los puntos regulares del recubrimiento, \mathbf{p} es conforme y, en los puntos de ramificación \mathbf{p} tiene ceros de orden 2 ([2] II.4).

Decimos que U_j es una vecindad de recubrimiento si: \mathbf{p}/U_j es un homeomorfismo con su imagen o, U_j contiene un punto de ramificación \bar{p}_i y $\mathbf{p}/U_j - \{\bar{p}_i\}$ es un dos recubrimiento de su imagen.

En (T_2, σ) elegimos un sistemas de coordenadas $\{U_j, z_j\}$ donde U_j es una vecindad de recubrimiento. En (S^2, τ) elegimos un sistema de coordenadas $\{\mathbf{p}(U_j), w_j\}$. Hacemos estas elecciones de manera tal que \mathbf{p} escrito en coordenadas sea:

$$\mathbf{p}(z) = \begin{cases} z & \text{si } U \cap \{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_6\} = \emptyset \\ z^2 & \text{si no} \end{cases}$$

donde por abuso de notación eliminamos los subíndices.

Lema 2.2 *Sea g un homeomorfismo extremal en (S^2, τ) agujereada en $\{p_1, \dots, p_6\}$. Sea G su levantamiento a (T_2, σ) . Entonces G es extremal en (T_2, σ) .*

DEMOSTRACIÓN: Si g es extremal entonces, g es un transformación conforme o g es una aplicación de Teichmüller (Teorema 1.3).

Si g es conforme, su levantamiento G también lo es, y por lo tanto, G es extremal.

Si g es una aplicación de Teichmüller, entonces:

$$\frac{\partial_{\bar{w}} g d\bar{w}}{\partial_w g dw} = k \frac{|\varphi dw^2|}{\varphi dw^2}$$

donde $\varphi = \varphi(w)dw^2$ es una diferencial cuadrática meromorfa, de hecho holomorfa en $S^2 - \{p_1, \dots, p_6\}$ y, posiblemente, con polos (simples) en algunos agujeros de S^2 .

Levantamos φ a una diferencial cuadrática holomorfa $\bar{\varphi}$, definida por:

$$\bar{\varphi}(z)dz^2 := \varphi(\mathbf{p}(z))(d(\mathbf{p}(z)))^2$$

entonces:

$$\bar{\varphi}(z)dz^2 = \begin{cases} \varphi(z)dz^2 & \text{si } U \cap \{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_6\} = \emptyset \\ \varphi(z^2)4z^2dz^2 & \text{si no} \end{cases}$$

Como G es el levantamiento de g : $g(p(z)) = p(G(z))$

de donde,

$$\begin{aligned} g(z) &= G(z) & \text{si } U \cap \{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_6\} = \emptyset \\ g(z^2) &= G(z)^2 & \text{si no} \end{aligned}$$

aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \partial_z g \circ p(z) &= \partial_w g(p(z)) \cdot \partial_z p(z) \\ \partial_{\bar{z}} g \circ p(z) &= \partial_{\bar{w}} g(p(z)) \cdot \partial_{\bar{z}} \bar{p}(z) \end{aligned}$$

obtenemos:

$$\frac{\partial_{\bar{z}} G d\bar{z}}{\partial_z G dz} = k \frac{|\bar{\varphi} dz^2|}{\bar{\varphi} dz^2}$$

de donde, G es un aplicación de Teichmüller y, por lo tanto, extremal. \square

Las isotopías en S^2 , relativas a $\{p_1, \dots, p_6\}$, se levantan a isotopías en T_2 . Si h y g son isotópicos, módulo $\{p_1, \dots, p_6\}$, entonces H es isotópico a G , o H es isotópico a $G \circ i$, donde H es un levantamiento de h y G es un levantamiento de g .

Teorema 2.4 (Birman) *Sea H un homeomorfismo de T_2 que preserva fibras e isotópico a id_{T_2} . Entonces, su proyección h es un homeomorfismo de S^2 isotópico a id_{S^2} , módulo $\{p_1, \dots, p_6\}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea g extremal en la clase de isotopía de h , entonces, uno de los levantamientos de g es isotópico a H , sea G tal levantamiento. G es extremal (Lema anterior), pero la única aplicación extremal en la clase de H es la id_{T_2} , por lo tanto, $G = id_{T_2}$ y $g = id_{S^2}$. \square

Corolario 2.3 Sea Ω la aplicación definida por:

$$\begin{aligned}\Omega : \mathcal{M}(T_2) &\rightarrow \mathcal{M}_6(S^2) \\ [H] &\mapsto [h]\end{aligned}$$

donde H es un homeomorfismo de T_2 que preserva fibras y h es su proyección. Entonces:

- (i) Ω es un epimorfismo y,
- (ii) $\ker \Omega = \langle [i] \rangle$.

DEMOSTRACIÓN: Ω está bien definida, por el Teorema 2.4 si $H \sim G$ entonces $h \sim g$. Además el Lema 2.2 nos asegura que el dominio de Ω es todo $\mathcal{M}(T_2)$. Por otra parte, es un homomorfismo de grupos, pues, la proyección de la composición es igual a la proyección de las composiciones. Es epyectiva; pues, $[H] \in \Omega^{-1}([h])$. Por último, si la proyección de H es isotópica a id_{S^2} entonces, levantando isotopías, H es isotópico a id_{T_2} o a i . \square

Recordemos (subsección 2.2.2) que $\mathcal{M}_6(S^2)$ tiene la siguiente presentación:
generadores: w_1, \dots, w_5
relaciones:

$$\begin{aligned}w_i w_j &= w_j w_i && \text{si } |i - j| \geq 2 \\ w_i w_{i+1} w_i &= w_{i+1} w_i w_{i+1} \\ w_1 w_2 w_3 w_4 w_5^2 w_4 w_3 w_2 w_1 &= 1 \\ (w_1 \dots w_5)^6 &= 1\end{aligned}$$

A partir del Corolario concluimos que $\mathcal{M}(T_2)$ es generado por

$$D_1, \dots, D_5, [i]$$

donde $D_i \in \Omega^{-1}(w_i)$.

Además, $[i]^2 = 1$ y $[i] D_i = D_i [i]$.

Para obtener un conjunto completo de relaciones entre estos generadores debemos “levantar” las relaciones de $\mathcal{M}_6(S^2)$ a $\mathcal{M}(T_2)$. Por ejemplo:

$$w_i w_j = w_j w_i$$

se levanta a una y sólo una de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} D_i D_j &= D_j D_i \\ \text{o } D_i D_j &= D_j D_i [i] \end{aligned}$$

Para discriminar cual de las dos relaciones es la correcta estudiaremos mas detalladamente a los generadores de $\mathcal{M}(T_2)$. Veremos que podemos elegir a D_1, \dots, D_5 de manera que correspondan a clases de isotopía de twist de Dehn.

Consideremos las curvas c_1, \dots, c_5 en T_2 como en la figura 2.9.

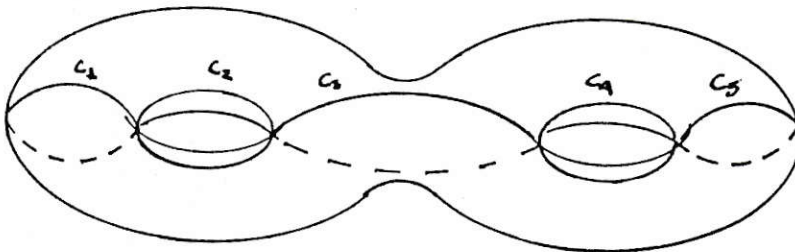


Figura 2.9:

donde c_1, c_3, c_5 son la intersección del plano yz con T_2 y c_2, c_4 son la intersección del plano xy con T_2 .

Consideremos el anillo A_{c_1} que contiene a la curva c_1 y que es invariante bajo i , es decir $i(A_{c_1}) = A_{c_1}$. Parametizamos a A_{c_1} en coordenadas polares: $A_{c_1} = \{(r, \theta) / 1/2 \leq r \leq 1 \text{ y } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$; de tal forma que, $c_1 = \{(3/4, \theta) / 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ y la aplicación i se escriba:

$$\begin{aligned} i/A_{c_1} : A_{c_1} &\rightarrow A_{c_1} \\ (r, \theta) &\mapsto (3/2 - r, -\theta) \end{aligned}$$

Sea t_1 twist de Dehn en torno a c_1 :

$$t_1(x) := \begin{cases} x & \text{si } x \in T_2 - A_{c_1} \\ (r, \theta - 4\pi r) & \text{si } x = (r, \theta) \in A_{c_1} \end{cases}$$

de donde t_1 conmuta con i , es decir, preserva fibras.

Se puede verificar que la proyección de t_1 pertenece a la clase w_1 en $\mathcal{M}_6(S^2)$. Identicamente construimos twists de Dehn t_2, \dots, t_5 en torno a las curvas c_2, \dots, c_5 que se proyectan a los generadores w_2, \dots, w_5 de $\mathcal{M}_6(S^2)$.

Elegimos $D_i := [t_i] \in \Omega^{-1}(w_i)$ y teniendo explícitamente representantes calculamos la acción de D_i en la homología.

La 1-homología $H_1(T_2)$ es el grupo abeliano generado por la clase de homología de las curvas a, b, c, d (figura 2.10), es decir:

$$H_1(T_2) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle \times \langle d \rangle \cong \mathbb{Z}^4$$

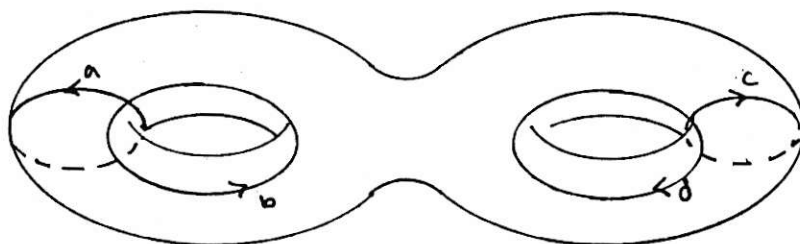


Figura 2.10:

La acción de D_i en $H_1(T_2)$ se denota por D_{i*} y es representada por una matriz 4×4 con coeficientes enteros. Calculando, obtenemos:

$$D_{1*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_{2*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{3*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_{4*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{5*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [i]_* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorema 2.5 (Birman) $\mathcal{M}(T_2)$ admite la siguiente presentación:

generadores: D_1, D_2, D_3, D_4, D_5

relaciones

$$D_i D_j = D_j D_i \quad \text{si } |i - j| \geq 2$$

$$D_i D_{i+1} D_i = D_{i+1} D_i D_{i+1}$$

$$(D_1 D_2 D_3 D_4 D_5^2 D_4 D_3 D_2 D_1)^2 = 1$$

$$(D_1 D_2 D_3 D_4 D_5)^6 = 1$$

$$D_i (D_1 D_2 D_3 D_4 D_5^2 D_4 D_3 D_2 D_1) = (D_1 D_2 D_3 D_4 D_5^2 D_4 D_3 D_2 D_1) D_i$$

DEMOSTRACIÓN: Sean F y G grupos definidos por:

$$F = \langle D_1, \dots, D_5, [i]; [i]^2 = 1, D_i [i] = [i] D_i \rangle$$

$$G = \langle w_1, \dots, w_5 \rangle$$

y las aplicaciones $\bar{\Omega}, \pi_1, \pi_2$ definidas por:

$$\bar{\Omega}: F \rightarrow G$$

$$D_i \mapsto w_i$$

$$[i] \mapsto 1$$

$$\begin{array}{ll}
\pi_1 : F \rightarrow \mathcal{M}(T_2) & \pi_2 : G \rightarrow \mathcal{M}_6(S^2) \\
D_i \mapsto D_i & w_i \mapsto w_i \\
[i] \mapsto [i] &
\end{array}$$

Entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
F & \xrightarrow{\bar{\Omega}} & G \\
\pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\
\mathcal{M}(T_2) & \xrightarrow{\Omega} & \mathcal{M}_6(S^2)
\end{array}$$

Sea R el conjunto de relaciones que definen a $\mathcal{M}_6(S^2)$. Entonces, $\ker \pi_2 = N_c(R)$ y se verifica que $\ker \pi_1 = N_c(\bar{\Omega}^{-1}(R) \cap \ker \pi_1)$. La acción en la homología de los elementos de $\bar{\Omega}^{-1}(R)$ que pertenecen a $\ker \pi_1$ es igual a la identidad. Calculando, se obtiene que $\bar{\Omega}^{-1}(R) \cap \ker \pi_1$ es el siguiente conjunto de relaciones:

$$\begin{aligned}
D_i D_j &= D_j D_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\
D_i D_{i+1} D_i &= D_{i+1} D_i D_{i+1} \\
D_1 D_2 D_3 D_4 D_5^2 D_4 D_3 D_2 D_1 [i] &= 1 \\
(D_1 D_2 D_3 D_4 D_5)^6 &= 1
\end{aligned}$$

de la tercera relación obtenemos que $[i] = D_1 D_2 D_3 D_4 D_5^2 D_4 D_3 D_2 D_1$, reemplazando esta igualdad en las relaciones arriba descritas y en la definición de F obtenemos el conjunto de relaciones que definen a $\mathcal{M}(T_2)$. \square

Capítulo 3

Homeomorfismos del Bitoro

Al considerar el bitoro como un recubrimiento ramificado de la esfera, J. Birman demostró que el *Mapping Class Group* del bitoro está relacionado con el *Mapping Class Group* de la esfera con 6 agujeros.

En el Capítulo anterior dimos una demostración analítica de esta idea. En este Capítulo probaremos que estudiar la clasificación de Thurston en el bitoro es, en cierto sentido, “equivalente” a estudiarla en la esfera con seis agujeros (sección 1).

De donde, analizando los homeomorfismos periódicos de la esfera con 6 agujeros (sección 2) obtenemos una clasificación topológica (salvo conjugación topológica) de los homeomorfismos periódicos del bitoro (sección 3).

3.1 Proyección y levantamiento

En el Capítulo anterior probamos que las aplicaciones extremales preservan fibras y, por lo tanto, se proyectan a homeomorfismos de la esfera con 6 agujeros. Ahora veremos que los homeomorfismos periódicos y pseudo-Anosov (absolutamente extremales) del bitoro también se “proyectan” a transformaciones periódicas y pseudo-Anosov de la esfera con 6 agujeros.

3.1.1 Proyección de homeomorfismos

Consideremos la involución $i : T_2 \rightarrow T_2$, y la proyección $p : T_2 \rightarrow S^2$, como en el Capítulo anterior (subsección 2.2.3). Sea σ una estructura analítica de T_2 tal que, $i : (T_2, \sigma) \rightarrow (T_2, \sigma)$ es una transformación conforme (Proposición 1.1).

Teorema 3.1 *Sea $G : T_2 \rightarrow T_2$ un homeomorfismo periódico. Entonces existe un homeomorfismo $G' : T_2 \rightarrow T_2$ tal que:*

- (i) G' es topológicamente conjugado a G ,
- (ii) G' es isotópico a G y,
- (iii) G' preserva fibras con respecto a p .

Además, la proyección $g' : (S^2, \{p_1, \dots, p_6\}) \rightarrow (S^2, \{p_1, \dots, p_6\})$ de G' es periódica.

DEMOSTRACIÓN: Como G es periódica existe una estructura analítica τ tal que $G : (T_2, \tau) \rightarrow (T_2, \tau)$ es una transformación conforme (Proposición 1.1). Sea j_τ la involución hiperelíptica de (T_2, τ) de modo que, G conmuta con j_τ (2.2.3). Sea $H : (T_2, \tau) \rightarrow (T_2, \sigma)$ la aplicación cuasi-conforme extremal en la clase de isotopía de id_{T_2} . Entonces $i \circ H \circ j_\tau \sim H$ y $K_{\tau, \sigma}(i \circ H \circ j_\tau) = K_{\tau, \sigma}(H)$. Aplicando el Teorema de unicidad extremal (Teorema 1.3), obtenemos que $i \circ H \circ j_\tau = H$. De donde, $G' := H \circ G \circ H^{-1}$ conmuta con i y G' es isotópica a G .

Además, G' es periódica pues, es topológicamente conjugada a G . Así, la proyección g' de G' es periódica. \square

Teorema 3.2 *Sea $G : T_2 \rightarrow T_2$ un homeomorfismo pseudo-Anosov. Entonces existe un homeomorfismo $G' : T_2 \rightarrow T_2$ tal que:*

- (i) G' es topológicamente conjugado a G ,
- (ii) G' es isotópico a G y,
- (iii) G' preserva fibras con respecto a p .

Además, la proyección $g' : (S^2, \{p_1, \dots, p_6\}) \rightarrow (S^2, \{p_1, \dots, p_6\})$ de G' es pseudo-Anosov.

DEMOSTRACIÓN: Como G es pseudo-Anosov existe una estructura conforme τ en T_2 tal que, $G : (T_2, \tau) \rightarrow (T_2, \tau)$ es una aplicación de Teichmüller con diferencial cuadrática inicial $\bar{\varphi}$ y diferencial cuadrática final $\bar{\varphi}$ (Proposición 1.2).

Sea j_τ la involución hiperelíptica de (T_2, τ) . Con argumentos similares a la demostración del Lema 2.1, se verifica que G conmuta con j_τ . Al igual que en la demostración del Teorema anterior, sea $H : (T_2, \tau) \rightarrow (T_2, \sigma)$ la aplicación cuasi-conforme extremal en la clase de isotopía de id_{T_2} . De donde $i \circ H \circ j_\tau = H$. El homeomorfismo $G' := H \circ G \circ H^{-1}$ conmuta con la involución i , es decir preserva fibras. Además, G' es isotópico y topológicamente conjugado a G . Probaremos que la proyección g' de G' es pseudo-Anosov.

El espacio cociente $T_2 / \langle j_\tau \rangle$ es homeomorfo a S^2 . Sea $p_\tau : T_2 \rightarrow S^2$ la proyección canónica. Denotaremos por $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_6$ a los puntos fijos de j_τ y por q_1, \dots, q_6 a la proyección de dichos puntos. Así, p_τ es un recubrimiento de la esfera ramificado en $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_6$.

Definimos g , la proyección de G via p_τ , por:

$$\begin{aligned} g : (S^2, \{q_1, \dots, q_6\}) &\rightarrow (S^2, \{q_1, \dots, q_6\}) \\ p_\tau(x) &\mapsto p_\tau(G(x)) \end{aligned}$$

Definimos h , la proyección de H via p_τ, p , por:

$$\begin{aligned} h : (S^2, \{q_1, \dots, q_6\}) &\rightarrow (S^2, \{p_1, \dots, p_6\}) \\ p_\tau(x) &\mapsto p(H(x)) \end{aligned}$$

h está bien definida y es un homeomorfismo, pues $i \circ H \circ j_\tau = H$.

Concluimos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} T_2 & \xleftarrow{H} & T_2 & \xrightarrow{G} & T_2 & \xrightarrow{H} & T_2 \\ p \downarrow & & p_\tau \downarrow & & \downarrow p_\tau & & \downarrow p \\ S^2 & \xleftarrow{h} & S^2 & \xrightarrow{g} & S^2 & \xrightarrow{h} & S^2 \end{array}$$

De donde, $g' = h \circ g \circ h^{-1}$. Para demostrar que g' es pseudo-Anosov en S^2 con agujeros p_1, \dots, p_6 , basta verificar que g es pseudo-Anosov en S^2 con agujeros q_1, \dots, q_6 . De hecho, h es una conjugación topológica entre g' y g que lleva los agujeros $\{q_1, \dots, q_6\}$ a los agujeros $\{p_1, \dots, p_6\}$.

Dotando a la esfera agujereada la estructura analítica inducida por la proyección de (T_2, τ) demostraremos que g es una aplicación de Teichmüller con diferencial cuadrática inicial igual a la diferencial cuadrática final.

$\bar{\varphi}$ se escribe en parametros naturales de la siguiente forma:

$$\bar{\varphi}(z_i) = \frac{n_i + 2}{2} z_i^{n_i} dz_i^2$$

donde $z_i : U_i \subset T_2 \rightarrow \mathbb{C}$. Elegimos las vecindades U_i de tal forma que estas sean vecindades de recubrimiento y, si $\bar{q}_k \in U_i$, entonces $z_i(\bar{q}_k) = 0$.

La involución j_τ conmuta con G , el par de foliaciones transversales inducidas por $\bar{\varphi}$ son invariantes bajo G , por lo tanto, alrededor de los puntos fijos de j_τ hay una simetría de orden par. Luego, si $\bar{q}_k \in U_i$, n_i es par ($n_i \geq 0$). Además se verifica que $j_\tau(z_i(x)) = -z_i(x)$, en vecindades de los puntos de ramificación $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_6$.

Definimos en S^2 un sistema de coordenadas para la estructura analítica inducida por τ de la siguiente forma:

$$w_i(\mathbf{p}_\tau(x)) = \begin{cases} z_i(x) & \text{si } U_i \cap \{\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_6\} = \emptyset \\ z_i^2(x) & \text{si no} \end{cases}$$

en éstas coordenadas \mathbf{p}_τ se escribe:

$$\mathbf{p}_\tau(z) = \begin{cases} z & \text{si } U \cap \{\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_6\} = \emptyset \\ z^2 & \text{si no} \end{cases}$$

donde por abuso de notación eliminamos los subíndices.

Definimos φ , la proyección de la diferencial cuadrática $\bar{\varphi}$, por:

$$\varphi(w)dw^2 := \bar{\varphi}(z)dz^2$$

resulta que:

$$\varphi(w)dw^2 = \begin{cases} \frac{n+2}{2}w^n dw^2 & \text{si } \mathbf{p}_\tau(U) \cap \{q_1, \dots, q_6\} = \emptyset \\ \frac{n+2}{2} \frac{w^{n/2}}{w} dw^2 & \text{si no} \end{cases}$$

de donde, φ es una diferencial cuadrática meromorfa en S^2 , holomorfa en $S^2 - \{q_1, \dots, q_6\}$, y posiblemente, con polos (simples) en algunos agujeros.

El homomorfismo g satisface la siguiente ecuación:

$$g(\mathbf{p}_\tau(z)) = \mathbf{p}_\tau(G(z))$$

aplicando la regla de la cadena, obtenemos:

$$\frac{\partial_{\bar{w}} g d\bar{w}}{\partial_w g dw} = k \frac{|\varphi dw^2|}{\varphi dw^2}$$

de donde, g es una aplicación de Teichmüller con diferencial cuadrática inicial φ .

La diferencial cuadrática final de G es $\bar{\varphi}$, es decir, la diferencial cuadrática inicial de G^{-1} es $-\bar{\varphi}$. Repitiendo el mismo procedimiento, se verifica que g^{-1} es una aplicación de Teichmüller con diferencial cuadrática inicial $-\varphi$. Por lo tanto, g es pseudo-Anosov. \square

3.1.2 Levantamiento de homeomorfismos

Inversamente, los homeomorfismos periódicos y pseudo-Anosov de la esfera con 6 agujeros se levantan a homeomorfismos periódicos y pseudo-Anosov del bitoro.

Proposición 3.1 *Sea f un homeomorfismo en $\mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_6\})$ y, sea F un levantamiento de f .*

(i) *Si f es un homeomorfismo periódico de $S^2 - \{p_1, \dots, p_6\}$, entonces F es un homeomorfismo periódico de T_2 .*

(ii) *Si f es un homeomorfismo pseudo-Anosov de $S^2 - \{p_1, \dots, p_6\}$, entonces F es un homeomorfismo pseudo-Anosov de T_2 .*

DEMOSTRACIÓN: (i) Si $f^n = id_{S^2}$, entonces, F^n es una transformación de recubrimiento. Por lo tanto, $F^n = id_{T_2}$ o $F^n = i$; en el segundo caso $F^{2n} = id_{T_2}$.

(ii) Sean \mathcal{F}^s y \mathcal{F}^u las foliaciones medibles transversales asociadas al pseudo-Anosov f . Más precisamente:

$$\mathcal{F}^s = \{F^s, \{V_i, \phi_i\}\} \quad \mathcal{F}^u = \{F^u, \{W_i, \psi_i\}\}$$

donde elegimos las vecindades V_i y W_i de tal forma que estas sean vecindades de recubrimiento. Además, existe $\lambda > 1$, tal que:

$$f(\mathcal{F}^s) = 1/\lambda \mathcal{F}^s \quad f(\mathcal{F}^u) = \lambda \mathcal{F}^u$$

Definimos:

$$\bar{F}^s := \mathbf{p}^{-1}(F^s) \quad \bar{F}^u := \mathbf{p}^{-1}(F^u)$$

Se verifica que \bar{F}^s y \bar{F}^u son foliaciones transversales de T_2 , donde sus puntos singulares tienen al menos 3 separatrices. Pues, dado $x \in T_2$ distinguimos los siguientes casos:

– Si x es un punto regular del recubrimiento \mathbf{p} , entonces en una vecindad de x , \bar{F}^s y \bar{F}^u son, , módulo homeomorfismo, del mismo tipo que F^s y F^u en $[x]$.

– Si x es un punto de ramificación del recubrimiento \mathbf{p} , entonces, $[x]$ es un agujero de S^2 ; y por lo tanto las foliaciones F^s y F^u tienen al menos una separatriz en dicho punto. Como los puntos de ramificación de \mathbf{p} son de multiplicidad 2, el número de separatrices de x es el doble que el número de separatrices en $[x]$. De donde, x es un punto regular de \bar{F}^s y \bar{F}^u o x es un punto singular de \bar{F}^s y \bar{F}^u con al menos 4 separatrices.

Ahora levantaremos el sistema de coordenadas de F^s a un sistema de coordenadas de \bar{F}^s :

Consideremos en T_2 el cubrimiento por vecindades $\{U_{i_k}\}$ donde $\mathbf{p}^{-1}(V_i) = U_{i_1} \cup U_{i_2}$. Definimos las coordenadas $\bar{\phi}_{i_k} : U_{i_k} \rightarrow \mathbb{R}^2$ por,

$$\bar{\phi}_{i_k} := \phi_i \circ \mathbf{p}$$

Se verifica que $\bar{\mathcal{F}}^s := \{\bar{F}^s, \{U_{i_k}, \bar{\phi}_{i_k}\}\}$ es una foliación medible. De la misma forma levantamos las coordenadas de \mathcal{F}^u y, obtenemos una foliación medible $\bar{\mathcal{F}}^u$.

Dada una hoja h de $\overline{\mathcal{F}}^s$ la subdividimos en segmentos h_1, \dots, h_n de manera tal que para cada i , h_i y $F(h_i)$ estén contenidos (cada uno) en alguna vecindad de recubrimiento. Proyectando y posteriormente levantando los segmentos y el homeomorfismo F , se demuestra que la foliación es invariante bajo F .

De la misma forma si α es una curva en T_2 la subdividimos en segmentos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, de forma tal que cada segmento y su preimagen bajo F estén contenidos en vecindades de recubrimiento. Entonces:

$$\int_{\alpha_i} \overline{\mathcal{F}}^s = \int_{p(\alpha_i)} \mathcal{F}^s = \lambda \int_{f^{-1}(p(\alpha_i))} \mathcal{F}^s = \lambda \int_{F^{-1}(\alpha_i)} \overline{\mathcal{F}}^s = \frac{1}{\lambda} \int_{\alpha_i} F(\overline{\mathcal{F}}^s),$$

$$\int_{\alpha_i} \overline{\mathcal{F}}^u = \int_{p(\alpha_i)} \mathcal{F}^u = \frac{1}{\lambda} \int_{f^{-1}(p(\alpha_i))} \mathcal{F}^u = \frac{1}{\lambda} \int_{F^{-1}(\alpha_i)} \overline{\mathcal{F}}^u = \lambda \int_{\alpha_i} F(\overline{\mathcal{F}}^u),$$

de donde:

$$\int_{\alpha} \overline{\mathcal{F}}^s = \frac{1}{\lambda} \int_{\alpha} F(\overline{\mathcal{F}}^s),$$

$$\int_{\alpha} \overline{\mathcal{F}}^u = \lambda \int_{\alpha} F(\overline{\mathcal{F}}^s)$$

por lo tanto, F es pseudo-Anosov. \square

3.1.3 Clasificación de Thurston, $\mathcal{M}(T_2)$ y $\mathcal{M}_6(S^2)$

El Teorema de Clasificación de homeomorfismos dice que dada una clase en el *Mapping Class Group* de una superficie, existe un homeomorfismo en dicha clase que es periódico, o pseudo-Anosov, o reducible no periódico. Hemos demostrado que los homeomorfismos periódicos y pseudo-Anosov del bitoro se proyectan, salvo isotopía, a homeomorfismos periódicos y pseudo-Anosov de la esfera con 6 agujeros; e inversamente la Proposición anterior nos asegura que dichas transformaciones se levantan adecuadamente. Concluimos que estudiar la clasificación de Thurston en $\mathcal{M}(T_2)$ es "equivalente" a estudiarla en $\mathcal{M}_6(S^2)$.

Recordemos (subsección 2.2.3) que la aplicación:

$$\begin{aligned}\Omega : \mathcal{M}(T_2) &\rightarrow \mathcal{M}_6(S^2) \\ [H] &\mapsto [h]\end{aligned}$$

donde H preserva fibras y h es su proyección, es un epimorfismo de grupos.

Teorema 3.3 Sean $D \in \mathcal{M}(T_2)$ y $W \in \mathcal{M}_6(S^2)$ tales que $D \in \Omega^{-1}(W)$. Entonces:

(i) D contiene un homeomorfismo periódico si y sólo si W contiene un homeomorfismo periódico.

(ii) D contiene un homeomorfismo pseudo-Anosov si y sólo si W contiene un homeomorfismo pseudo-Anosov.

(iii) D contiene un homeomorfismo reducible no periódico si y sólo si W contiene un homeomorfismo reducible no periódico.

DEMOSTRACIÓN: (i) se obtiene a partir del Teorema 3.1 y Proposición 3.1 (parte (i)). (ii) se obtiene a partir del Teorema 3.2 y la Proposición 3.1 (parte (ii)). (iii) se obtiene a partir de (i), (ii) y el Teorema de clasificación (Teorema 1.1). \square

3.2 Homeomorfismos periódicos de la Esfera

Hemos visto que los homeomorfismos periódicos del bitoro están estrechamente relacionados con los homeomorfismos periódicos de la esfera. Kerékjártó (1919) y Eilenberg [10] (1934) caracterizaron los homeomorfismos periódicos de la esfera, en particular, demostraron que dichas transformaciones son topológicamente conjugadas a una rotación. En esta sección estudiaremos este resultado y las implicaciones que tiene en el estudio de los homeomorfismos periódicos de la esfera agujereada. Por su relación con los homeomorfismos del bitoro, será de nuestro particular interés analizar detalladamente los homeomorfismos periódicos de la esfera con 6 agujeros.

3.2.1 Rotaciones y permutaciones

Consideremos a S^2 incrustada en \mathbb{R}^3 donde:

$$S^2 = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Denotaremos por r_θ a una rotación en un ángulo $2\pi\theta$, en torno al eje z .

En 1919, M. B. von Kerékjártó demostró que los homeomorfismos periódicos de la esfera son conjugados a rotaciones. La demostración original de Kerékjártó contenía algunos errores posteriormente corregidos por S. Eilenberg (1934) [10]. A continuación damos una demostración distinta a la de Kerékjártó y Eilenberg.

Lema 3.1 (Kerékjártó y Eilenberg) *Todo homeomorfismo periódico $f : S^2 \rightarrow S^2$ es topológicamente conjugado a una rotación r_θ .*

DEMOSTRACIÓN: Si f es periódica, entonces existe una estructura conforme τ en S^2 tal que $f : (S^2, \tau) \rightarrow (S^2, \tau)$ es una aplicación conforme. La única superficie de Riemann homeomorfa a la esfera es la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, luego, $\tau(S^2) = \hat{\mathbb{C}}$. De donde, $\tau \circ f \circ \tau^{-1}$ es un automorfismo de $\hat{\mathbb{C}}$, es decir, una transformación de Moebius. Las transformaciones de Moebius de orden finito son conjugadas (via algún homeomorfismo h) a $s_\theta(z) := e^{2\pi i\theta}z$, donde θ es racional. Sea Π la proyección estereográfica, concluimos que:

$$\Pi^{-1} \circ h \circ \tau \circ f \circ \tau^{-1} \circ h^{-1} \circ \Pi = r_\theta$$

□

Observamos que el concepto de “rotación” en S^2 no es un concepto puramente topológico, necesitamos de sistemas de coordenadas para poder definirlo. Kerékjártó probó que los homeomorfismos periódicos son el concepto topológico equivalente a las rotaciones (en ángulo racional).

Consideremos a la esfera S^2 agujereada en $\{p_1, \dots, p_n\}$. Estudiar los homeomorfismos de la esfera agujereada es equivalente a estudiar los homeomorfismos de la esfera que fijan al conjunto $\{p_1, \dots, p_n\}$ (restringiendo o extendiendo homeomorfismos). Al conjunto de homeomorfismos de S^2 , que preservan orientación, y que dejan fijo al conjunto $\{p_1, \dots, p_n\}$ lo denotamos por $\mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_n\})$.

Decimos que dos homeomorfismos $f, g \in \mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_n\})$ son *topológicamente conjugados* si existe un homeomorfismo $h \in \mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_n\})$ tal que $f = h \circ g \circ h^{-1}$.

Un homeomorfismo $f \in \mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_n\})$ induce una permutación de n símbolos π_f definida por:

$$\pi_f(j) := k \text{ si } f(p_j) = p_k$$

Corolario 3.1 *Sea $f \in \mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_n\})$ un homeomorfismo periódico, distinto de la identidad, y π_f su permutación asociada. Entonces:*

- (i) π_f deja a lo más 2 símbolos fijos,
- (ii) π_f es producto de ciclos del mismo largo,
- (iii) el orden de π_f divide a $n - 2, n - 1$ o n y,
- (iv) el período de f es igual al orden de π_f .

DEMOSTRACIÓN:(i) Si f es periódica ($\neq id_{S^2}$), entonces f es topológicamente conjugada (en S^2) a una rotación. De donde, f tiene exactamente 2 puntos fijos y a lo más ambos puntos pertenecen a $\{p_1, \dots, p_n\}$.

(ii) Si π_f no es producto de ciclos del mismo largo, entonces una potencia de f deja fijos 3 o más puntos, pero no deja fijo punto a punto todo el conjunto $\{p_1, \dots, p_n\}$, lo que es una contradicción pues una potencia de f deja 2 puntos fijos o deja fijo cada punto de S^2 .

(iii) y (iv) se obtienen a partir de (ii). \square

Observamos que estos resultados constituyen una extensión a la esfera de los argumentos utilizados por Benardete, Gutierrez y Nitecki ([5] secciones 7,8) en el caso del disco. Además, el corolario anterior también se puede obtener a partir de resultados de Gillette y Van Buskirk [17] que caracterizan los elementos de orden finito de $\mathcal{M}_n(S^2)$.

3.2.2 Homeomorfismos periódicos de la esfera con seis agujeros

Hemos visto que todo homeomorfismo periódico del bitoro es conjugado a uno que se proyecta a un homeomorfismo periódico de la esfera con seis agujeros. En lo que sigue daremos una clasificación de los homeomorfismos periódicos de S^2 con 6 agujeros, y en la próxima sección levantaremos dicha clasificación a T_2 .

Dado un homeomorfismo $f \in \mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_6\})$ periódico, distinto de la identidad, hay 3 posibilidades:

- (i) π_f deja 2 símbolos fijos o,
- (ii) π_f deja 1 símbolo fijo o,
- (iii) π_f no deja símbolos fijos.

En las siguientes tres proposiciones analizaremos cada uno de estos casos. Pero antes, observemos que el tipo de permutación (i), (ii) o (iii) asociada a un homeomorfismo periódico es invariante bajo conjugación, ya que la aplicación:

$$\begin{aligned} \Pi : \mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_6\}) &\rightarrow \Sigma_6 \\ f &\mapsto \pi_f \end{aligned}$$

es un epimorfismo de grupos (en Σ_6 consideramos la composición de permutaciones de derecha a izquierda).

Proposición 3.2 Sea $f \in \mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_6\})$ un homeomorfismo periódico tal que π_f fija 2 símbolos. Consideramos a S^2 incrustado en \mathbb{R}^3 :

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

donde: $p_1 = (0, 0, 1)$, $p_2 = (0, -1, 0)$, $p_3 = (1, 0, 0)$, $p_4 = (0, 1, 0)$, $p_5 = (-1, 0, 0)$, y $p_6 = (0, 0, -1)$.

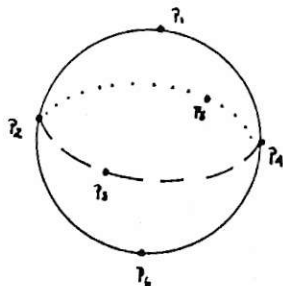


Figura 3.1:

- a) Si π_f es un ciclo de largo 4, entonces f es topológicamente conjugada a la rotación $r_{1/4}$, en $\pi/2$ en torno al eje z .
- b) Si π_f es producto de 2 ciclos de largo 2, entonces f es topológicamente conjugada a la rotación $r_{1/2}$, en π en torno al eje z .

DEMOSTRACIÓN: a) Si $\pi_f = (i_1 \ i_2 \ i_3 \ i_4)$, sea $\tau \in \Sigma_6$ definida por $\tau(i_k) := k + 1$, entonces $\tau \circ \pi_f \circ \tau^{-1} = (2 \ 3 \ 4 \ 5)$. Consideremos $h_1 \in \mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_6\})$ tal que $\pi_{h_1} = \tau$, entonces $\pi_{h_1 \circ f \circ h_1^{-1}} = (2 \ 3 \ 4 \ 5)$.

La aplicación $h_1 \circ f \circ h_1^{-1} \in \mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_6\})$ es periódica y, por lo tanto, es topológicamente conjugada en S^2 a una rotación r , en torno al eje z ; sea $h_2 \in \mathcal{H}^+(S^2)$ tal conjugación.

No necesariamente h_2 es una conjugación en $\mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_6\})$, en lo que sigue demostraremos que podemos “corregir” tal conjugación de forma tal de construir una en $\mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_6\})$.

La conjugación h_2 lleva los puntos fijos de $h_1 \circ f \circ h_1^{-1}$ en los puntos fijos de r , a decir, $h_2(\{p_1, p_6\}) = \{p_1, p_6\}$. Además, $\{p_2, \dots, p_5\}$ es una órbita de período 4 de $h_1 \circ f \circ h_1^{-1}$ y, por lo tanto, $h_2(\{p_2, \dots, p_5\})$ es una órbita de período 4 de la rotación r , de donde r es una rotación en $-\pi/2$ o en $\pi/2$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que es una rotación en $\pi/2$ (conjugando por una rotación en π en torno al eje x).

Notaremos por $r_{1/4}$ a dicha rotación y, construiremos un homeomorfismo h_3 que conmuta con $r_{1/4}$ y que lleva $h_2(\{p_2, \dots, p_5\})$ a $\{p_2, \dots, p_5\}$. Así quedará demostrado que $h_3 \circ h_2 \circ h_1$ es una conjugación topológica en $\mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_6\})$, entre f y $r_{1/4}$.

Usaremos en S^2 coordenadas complejas, via proyección estereográfica. Así, por ejemplo: $p_1 = \infty$, $p_2 = -1$, $p_3 = -i$, $p_4 = 1$, $p_5 = i$, $p_6 = 0$.

La rotación $r_{1/4}$ se escribe en coordenadas $r_{1/4}(z) = e^{i\pi/2}z$ y,

$$h_2(\{p_2, \dots, p_5\}) = \{\alpha p_2, \dots, \alpha p_5\}$$

para cierto $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$. Entonces definimos a la conjugación h_3 por $h_3(z) := z/\alpha$.

b) Demostraremos esta parte de la proposición siguiendo las mismas ideas de la demostración de a).

Si $\pi_f = (i_1 \ i_2)(i_3 \ i_4)$, entonces existe $h_1 \in \mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_6\})$ tal que $\pi_{h_1 \circ f \circ h_1^{-1}} = (2 \ 4)(3 \ 5)$.

Sea $h_2 \in \mathcal{H}^+(S^2)$ tal que $r := h_2 \circ h_1 \circ f \circ h_1^{-1} \circ h_2^{-1}$ es una rotación en torno

al eje z . Entonces, $h_2(\{p_2, p_4\})$ es una órbita de período 2 de r , y por lo tanto r es una rotación en π en torno al eje z ; denotamos por $r_{1/2}$ a dicha rotación.

Al igual que en la demostración de a) usaremos coordenadas complejas y tenemos la siguiente situación:

$$\begin{aligned} h_2(\{p_1, p_6\}) &= \{p_1, p_6\} \\ h_2(\{p_2, p_4\}) &= \{\alpha p_2, \alpha p_4\} \quad \alpha \in \mathbb{C} - \{0\} \\ h_2(\{p_3, p_5\}) &= \{\beta p_3, \beta p_5\} \quad \beta \in \mathbb{C} - \{0\} \end{aligned}$$

Ahora definimos $h_3(z) := z/\alpha$, h_3 conmuta con $r_{1/2}$ y tenemos:

$$\begin{aligned} h_3 \circ h_2(\{p_1, p_2, p_4, p_6\}) &= \{p_1, p_2, p_4, p_6\} \\ h_3 \circ h_2(\{p_3, p_5\}) &= \{\gamma p_3, \gamma p_5\} \quad \gamma \in \mathbb{C} - \{0\} \end{aligned}$$

Distinguimos dos casos: $|\gamma| \neq 1$ o $|\gamma| = 1$

Caso 1: Si $|\gamma| \neq 1$ (figura 3.2).

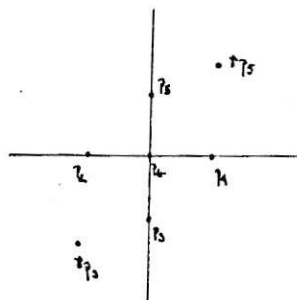


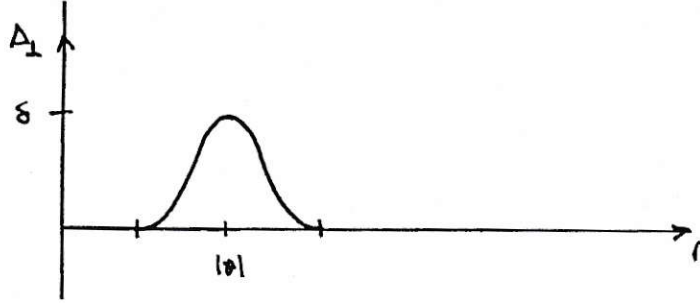
Figura 3.2:

Sea δ el ángulo entre γp_5 y p_5 , sin pérdida de generalidad, $-\pi/2 < \delta < \pi/2$. Consideremos coordenadas polares en $\hat{\mathbb{C}}$. Definimos $h_4 \in \mathcal{H}^+(S^2)$ por:

$$h_4(r, \theta) := (r, \theta + \Delta_1(r))$$

donde Δ_1 es una función continua tal que:

$$\Delta_1(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } |r - |\gamma|| > \epsilon \\ \delta & \text{si } r = |\gamma| \end{cases}$$

Figura 3.3: Δ_1

y ϵ es un real positivo tal que $|1 - |\gamma|| > \epsilon$ (figura 3.3).

Se verifica que h_4 es un homeomorfismo que conmuta con $r_{1/2}$ y:

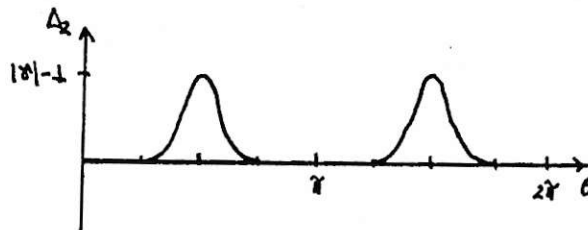
$$\begin{aligned} h_4 \circ h_3 \circ h_2(\{p_1, p_2, p_4, p_6\}) &= \{p_1, p_2, p_4, p_6\} \\ h_4 \circ h_3 \circ h_2(\{p_3, p_5\}) &= \{|\gamma|p_3, |\gamma|p_5\} \end{aligned}$$

Ahora definimos $h_5 \in \mathcal{H}^+(S^2)$ por:

$$h_5(r, \theta) := (r + \Delta_2(\theta), \theta)$$

donde Δ_2 es una función continua, π periódica tal que (figura 3.4):

$$\Delta_2(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \theta \leq \pi/4 \text{ o } 3\pi/4 \leq \theta \leq \pi \\ |\gamma| - 1 & \text{si } \theta = \pi/2 \end{cases}$$

Figura 3.4: Δ_2

Se verifica que h_5 es un homeomorfismo que conmuta con $r_{1/2}$, además $h_5 \circ h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1 \in \mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_6\})$ es una conjugación topológica entre f y $r_{1/2}$.

Caso 2: Si $|\gamma| = 1$ (figura 3.5).

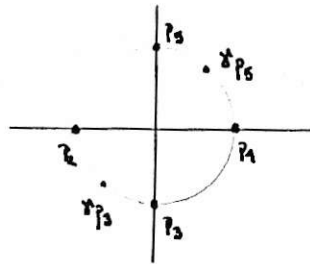


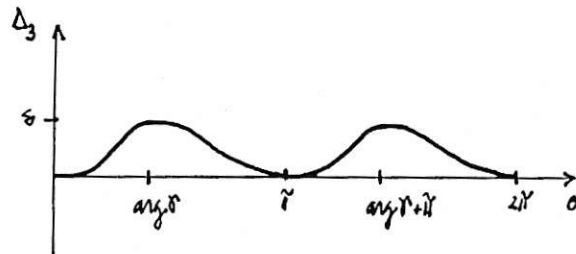
Figura 3.5:

Sea δ el ángulo entre γp_5 y p_5 , sin pérdida de generalidad, $-\pi/2 < \delta < \pi$. Definimos $h_4 \in \mathcal{H}^+(S^2)$ por:

$$h_4(r, \theta) := (r, \theta + \Delta_3(\theta))$$

donde Δ_3 es una función diferenciable, π periódica, $\Delta_3'(\theta) > -1$, tal que (figura 3.6):

$$\Delta_3(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta = 0 \text{ o } \theta = \pi \\ \delta & \text{si } \theta = \arg \gamma \end{cases}$$

Figura 3.6: Δ_3

Se verifica que tal Δ_3 existe, que h_4 es un homeomorfismo y, que h_4 conmuta con $r_{1/2}$. Mas aún, $h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1 \in \mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_6\})$ es una conjugación topológica entre f y $r_{1/2}$. \square

Las próximas proposiciones caracterizan los homeomorfismos periódicos de S^2 con 6 agujeros cuya permutación asociada deja 1 o 0 símbolos fijos. Las demostraciones de estas proposiciones están basadas en el mismo tipo de argumentos que la anterior.

Proposición 3.3 Sea $f \in \mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_6\})$ un homeomorfismo periódico tal que π_f fija un símbolo. Consideramos a S^2 incrustado en \mathbb{R}^3 :

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

donde: $p_1 = (0, 0, 1)$, $p_j = (\cos 2\pi(j-1)/5, \sin 2\pi(j-1)/5, 0)$ si $j = 2, 3, 4, 5, 6$.

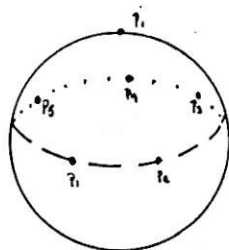


Figura 3.7:

Entonces f es topológicamente conjugada a una rotación $r_{k/5}$, en $2\pi k/5$ en torno al eje z , para algún $k = 1, 2, 3, 4$.

Proposición 3.4 Sea $f \in \mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_6\})$ un homeomorfismo periódico tal que π_f no fija símbolos. Consideramos a S^2 incrustado en \mathbb{R}^3 :

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

donde: $p_j = (\cos 2\pi j/6, \sin 2\pi j/6, 0)$ si $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

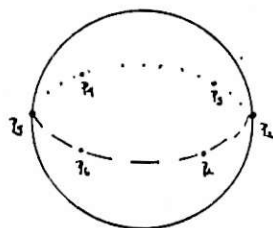


Figura 3.8:

- Si π_f es un ciclo de largo 6, entonces f es topológicamente conjugada a la rotación $r_{1/6}$, en $\pi/3$ en torno al eje z .
- Si π_f es producto de 2 ciclos de largo 3, entonces f es topológicamente conjugada a la rotación $r_{1/3}$, en $2\pi/3$ en torno al eje z .

c) Si π_f es producto de 3 ciclos de largo 2, entonces f es topológicamente conjugada a la rotación $r_{1/2}$, en π en torno al eje z .

A partir de las proposiciones anteriores podemos clasificar, módulo conjugación topológica, los homeomorfismos periódicos de la esfera con seis agujeros. Con este objetivo definimos los siguientes homeomorfismos τ_0 , τ_1 y τ_2 :

Consideremos a S^2 incrustada en \mathbb{R}^3 donde:

$$S^2 = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

con agujeros $\{p_1, \dots, p_6\}$.

Sea τ_0 un homeomorfismo de S^2 tal que

$$\tau_0(p_j) = (\cos 2\pi j/6, \sin 2\pi j/6, 0)$$

si $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Sea τ_1 un homeomorfismo de S^2 tal que:

$$\tau_1(p_1) = (0, 0, 1), \tau_1(p_j) = (\cos 2\pi(j-1)/5, \sin 2\pi(j-1)/5, 0)$$

si $j = 2, 3, 4, 5, 6$.

Sea τ_2 un homeomorfismo de S^2 tal que:

$$\tau_2(p_1) = (0, 0, 1), \tau_2(p_2) = (0, -1, 0), \tau_2(p_3) = (1, 0, 0),$$

$$\tau_2(p_4) = (0, 1, 0), \tau_2(p_5) = (-1, 0, 0), \text{ y } \tau_2(p_6) = (0, 0, -1).$$

Corolario 3.2 Sea $f \in \mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_6\})$ un homeomorfismo periódico. Entonces f es topológicamente conjugado a uno y sólo uno de los 10 siguientes:

(i) id_{S^2}

(ii) $\tau_2^{-1} \circ r_{1/4}^k \circ \tau_2$, donde $k = 1, 2$

(iii) $\tau_1^{-1} \circ r_{1/5}^k \circ \tau_1$, donde $k = 1, 2, 3, 4$

(iv) $\tau_0^{-1} \circ r_{1/6}^k \circ \tau_0$, donde $k = 1, 2, 3$

donde r_θ es una rotación en $2\pi\theta$ en torno al eje z .

3.3 Homeomorfismos periódicos de T_2

En esta sección levantaremos los homeomorfismos periódicos de la esfera con seis agujeros y obtendremos una clasificación de los homeomorfismos periódicos del bitoro.

Lema 3.2 Sean $f, g \in \mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_6\})$ y $F, G \in \mathcal{H}^+(T_2)$ levantamientos de f, g respectivamente.

Si f es topológicamente conjugado a g , entonces F es topológicamente conjugado a G o, F es topológicamente conjugado a $G \circ i$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $h \in \mathcal{H}^+(S^2, \{p_1, \dots, p_6\})$ tal que $h^{-1} \circ f \circ h \circ g^{-1} = id_{S^2}$. Sea $H \in \mathcal{H}^+(T_2)$ un levantamiento de h ; entonces, $H^{-1} \circ F \circ H \circ G^{-1}$ es una transformación de recubrimiento. De donde $H^{-1} \circ F \circ H = G \circ H^{-1} \circ F \circ H = G \circ i$. \square

Concluimos que todo homeomorfismo periódico del bitoro es topológicamente conjugado al levantamiento de una “rotación” de la esfera. Aplicando el Teorema 3.1, el Corolario 3.2 y el Lema 3.2 obtenemos el siguiente Corolario:

Corolario 3.3 Sea $F \in \mathcal{H}^+(T_2)$ un homeomorfismo periódico del bitoro. Entonces F es topológicamente conjugado a alguno de los siguientes 20 homeomorfismos:

- (i) id_{T_2}, i
- (ii) $R_{1/4}^k, R_{1/4}^k \circ i$ donde $k = 1, 2$
- (iii) $R_{1/5}^k, R_{1/5}^k \circ i$ donde $k = 1, 2, 3, 4$
- (iv) $R_{1/6}^k, R_{1/6}^k \circ i$ donde $k = 1, 2, 3$

donde $R_{1/4}$ es un levantamiento de $\tau_2^{-1} \circ r_{1/4} \circ \tau_2$, $R_{1/5}$ es un levantamiento de $\tau_1^{-1} \circ r_{1/5} \circ \tau_1$, $R_{1/6}$ es un levantamiento de $\tau_0^{-1} \circ r_{1/6} \circ \tau_0$, i es la involución de T_2 .

Observamos que entre estos representantes puede existir algunos que sean topológicamente conjugados entre sí. Ya que, si dos homeomorfismos de T_2 que preservan fibras son topológicamente conjugados, sus proyecciones no necesariamente son conjugadas en la esfera con agujeros. A continuación encontraremos explícitamente los representantes del corolario anterior y veremos que existen dos pares de dichos

homeomorfismos que son topológicamente conjugados en T_2 . Concluimos que existen exactamente 18 clases de conjugación de homeomorfismos periódicos del bitoro.

En lo que sigue presentaremos explícitamente a $R_{1/4}$, $R_{1/5}$ y $R_{1/6}$. La demostración de que los homeomorfismos buscados son los que presentaremos a continuación, es por inspección.

Consideremos a T_2 incrustado en \mathbb{R}^3 como en la figura 3.9, donde los puntos $\{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_6\}$ son la intersección de T_2 con el eje y .

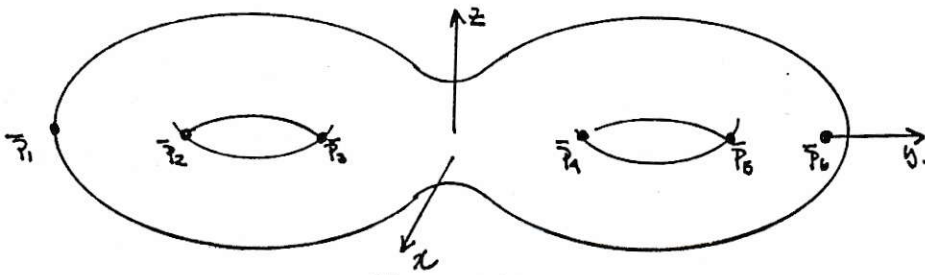


Figura 3.9:

3.3.1 Homeomorfismo $R_{1/6}$

Consideramos las curvas $a, a', b, b', c, c', d, d', e, e', f, f'$ como en la figura 3.10.

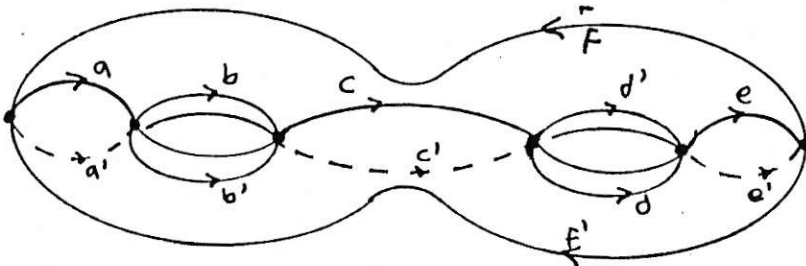


Figura 3.10:

Cortamos a T_2 por esta familia de curvas y obtenemos 4 “hexágonos” H_1, H_2, H_3, H_4 . Es decir, consideramos al bitoro como la unión (con identificaciones) de estos hexágonos (figura 3.11).

Resulta que la aplicación $R_{1/6}$ lleva hexágonos en hexágonos; de forma que la imagen de un vértice es un vértice y la imagen de un lado es un lado. Además $R_{1/6}$ respeta las identificaciones entre los lados de los hexágonos:

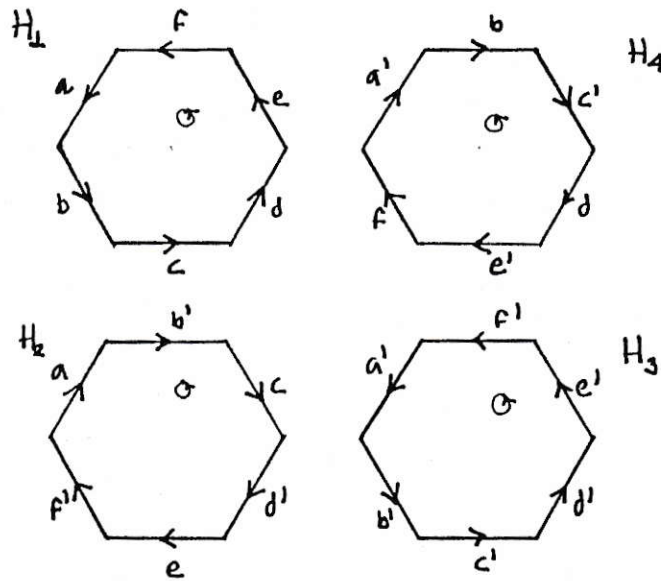


Figura 3.11: La orientación inducida por T_2 en H_i es representada por círculos orientados

- (i) En H_1 : $R_{1/6}$ es una rotación de H_1 en $2\pi/6$.
- (ii) En H_2 : $R_{1/6}$ es la función que lleva a H_2 en H_4 de forma que la imagen de a es a' , compuesta con una rotación de H_4 en $-2\pi/6$.
- (iii) En H_3 : $R_{1/6}$ es una rotación de H_3 en $2\pi/6$.
- (iv) En H_4 : $R_{1/6}$ es la composición de la función que lleva a H_4 en H_2 de forma que la imagen de a' es a , con una rotación de H_2 en $-2\pi/6$.

Observamos que el signo del ángulo de las rotaciones es con respecto a la orientación en H_i .

Este homeomorfismo tiene 2 puntos fijos, una órbita de período 2 y, todo el resto de las órbitas son de período 6.

En torno a cada punto fijo p de una transformación periódica R hay un disco invariante. La restricción de R a dicho disco es una rotación en un ángulo $2\pi\theta$, donde $0 \leq \theta < 1$ y θ es racional. Decimos que el *número de rotación* de R en torno a p es θ . El conjunto de números de rotación en torno a los puntos fijos de un homeomorfismo periódico es invariante bajo conjugación. Por ejemplo, el número de rotación de $R_{1/6}$ en torno a cada punto fijo es $1/6$.

Para un homeomorfismo periódico: el período, el número de puntos fijos, el número de órbitas de cada período y, los números de rotación; son invariantes bajo

conjugaciones topológicas. Ocuparemos estos invariantes para determinar cuando dos representantes de las aplicaciones periódicas de T_2 pertenecen a distintas clases de conjugación.

Para encontrar $R_{1/6}^k$ donde $k = 2, 3$ y $R_{1/6}^k \circ i$ donde $k = 1, 2, 3$ basta con saber como actúa i en los hexágonos:

- (i) En H_1 : i lleva H_1 a H_3 de forma que la imagen de a es a' .
- (ii) En H_2 : i lleva H_2 a H_4 de forma que la imagen de a es a' .
- (iii) En H_3 : i lleva H_3 a H_1 de forma que la imagen de a' es a .
- (iv) En H_4 : i lleva H_4 a H_2 de forma que la imagen de a' es a .

3.3.2 Homeomorfismo $R_{1/5}$

Consideremos las curvas $x, x', b, b', c, c', d, d', e, e'$ como en la figura 3.12.

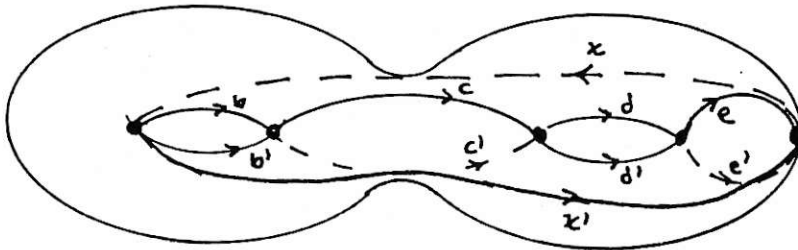


Figura 3.12:

Cortamos a T_2 por esta familia de curvas y obtenemos 2 "pentágonos" P_1, P_2 y un "decágono" D . Es decir, consideramos al bitoro como la unión (con identificaciones) de P_1, P_2 y D (figura 3.13).

Resulta que la aplicación $R_{1/5}$ es en cada uno de estos n -ángulos una rotación.

- (i) En P_1 : $R_{1/5}$ es una rotación de P_1 en $2\pi/5$.
- (ii) En P_2 : $R_{1/5}$ es una rotación de P_2 en $2\pi/5$.
- (iii) En D : $R_{1/5}$ es una rotación de D en $4\pi/5$.

Este homeomorfismo tiene 3 puntos fijos y, todo el resto de las órbitas son de período 5.

Los números de rotación en torno a los puntos fijos son $1/5, 1/5, 2/5$.

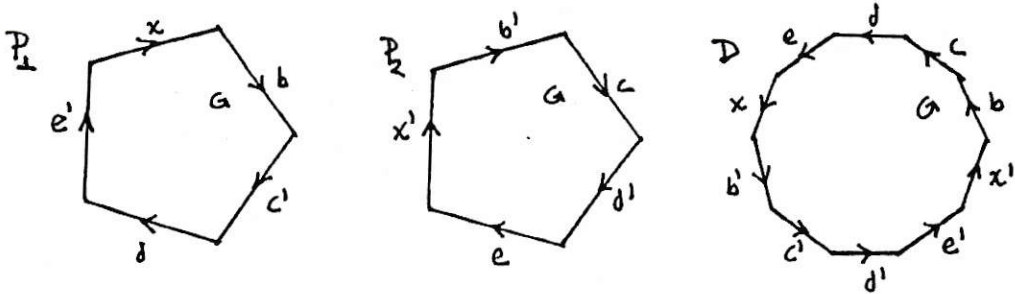


Figura 3.13: La orientación inducida por T_2 en P_i y D es representada por círculos orientados

Para encontrar $R_{1/5}^k$ donde $k = 2, 3, 4$ y $R_{1/5}^k$ o i donde $k = 1, 2, 3, 5$ basta con saber como actúa i en los n -ágonos:

- (i) En P_1 : i lleva P_1 a P_2 de forma que la imagen de x es x' .
- (ii) En P_2 : i lleva P_2 a P_1 de forma que la imagen de x' es x .
- (iii) En D : i es una rotación en D en un ángulo π .

3.3.3 Homeomorfismo $R_{1/4}$

Consideremos las curvas $x, x', b, b', c, c', d, d'$ como en la figura 3.14.

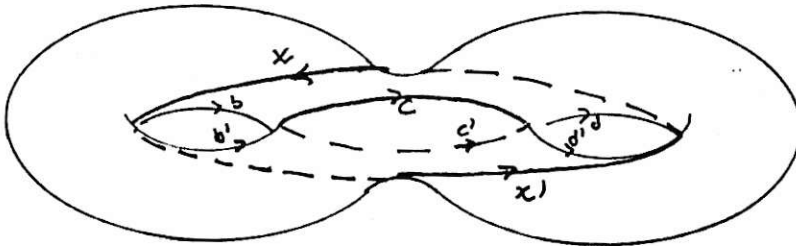


Figura 3.14:

Cortamos a T_2 por esta familia de curvas y obtenemos 2 “octógonos” O_1, O_2 . Es decir, consideramos al bitoro como la unión (con identificaciones) de O_1, O_2 (figura 3.15).

Resulta que la aplicación $R_{1/4}$ es en cada uno de estos octógonos una rotación.

- (i) En O_1 : $R_{1/4}$ es una rotación de O_1 en $2\pi/8$.
- (ii) En O_2 : $R_{1/5}$ es una rotación de P_2 en $2\pi/8$.

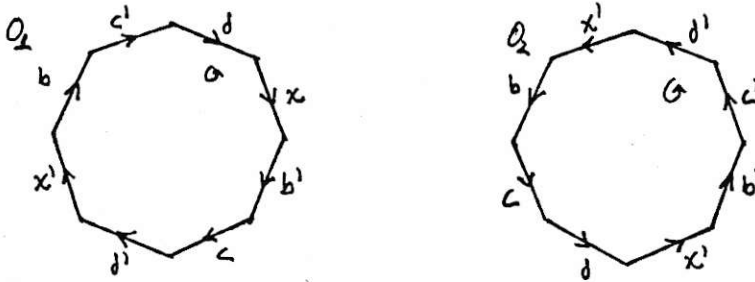


Figura 3.15: La orientación inducida por T_2 en O_i es representada por círculos orientados

Este homeomorfismo tiene período 8, 2 puntos fijos, 1 órbita de período 4 y todo el resto de las órbitas son de período 8.

Los números de rotación en torno a los puntos fijos son: $1/8$ y $3/8$.

Para encontrar $R_{1/4}^k$ para $k = 2$ y $R_{1/4}^k \circ i$ para $k = 1, 2$ basta con saber como actúa i en los octógonos:

- (i) En O_1 : i es una rotación en O_1 en un ángulo π .
- (ii) En O_2 : i es una rotación en O_2 en un ángulo π .

3.3.4 Clasificación

Con el objeto de determinar si existen representantes que son conjugados entre sí, calculamos los invariantes topológicos de los 20 homeomorfismos en consideración (Tabla 2.1).

Se verifica que $R_{1/6}^3$ y $R_{1/6}^3 \circ i$ tiene los mismos invariantes topológicos y resulta que $R_{1/6}^3$ y $R_{1/6}^3 \circ i$ son topológicamente conjugadas a través de un homeomorfismo j que es la rotación en torno al eje x en un ángulo π .

El otro par de homeomorfismos que tienen los mismos invariantes son $R_{1/4}^2$ y $R_{1/4}^2 \circ i$. También se verifica que estos son topológicamente conjugados, donde la conjugación es el homeomorfismo j .

Homeomorfismo	período	# Puntos Fijo	# Rotación
id_{T_2}	1	–	–
i	2	6	$1/2, \dots, 1/2$
$R_{1/6}$	6	2	$1/6, 1/6$
$R_{1/6}^2$	3	4	$1/3, 1/3, 2/3, 2/3$
$R_{1/6}^3$	2	2	$1/2, 1/2$
$R_{1/6} \circ i$	6	2	$5/6, 5/6$
$R_{1/6}^2 \circ i$	6	0	–
$R_{1/6}^3 \circ i$	2	2	$1/2, 1/2$
$R_{1/5}$	5	3	$1/5, 1/5, 2/5$
$R_{1/5}^2$	5	3	$2/5, 2/5, 4/5$
$R_{1/5}^3$	5	3	$3/5, 3/5, 1/5$
$R_{1/5}^4$	5	3	$4/5, 4/5, 3/5$
$R_{1/5} \circ i$	10	1	$3/10$
$R_{1/5}^2 \circ i$	10	1	$1/10$
$R_{1/5}^3 \circ i$	10	1	$9/10$
$R_{1/5}^4 \circ i$	10	1	$7/10$
$R_{1/4}$	8	2	$1/8, 3/8$
$R_{1/4}^2$	4	2	$1/4, 3/4$
$R_{1/4} \circ i$	8	2	$5/8$
$R_{1/4}^2 \circ i$	4	2	$1/4, 3/4$

Tabla 2.1

Teorema 3.4 Sea $F \in \mathcal{H}^+(T_2)$ un homeomorfismo periódico, entonces, F es topológicamente conjugado a uno y sólo uno de los siguientes 18 homeomorfismos:

- (i) id_{T_2}, i
- (ii) $R_{1/6}^k$ donde $k = 1, 2, 3$; $R_{1/6}^k \circ i$ donde $k = 1, 2$
- (iii) $R_{1/5}^k, R_{1/5}^k \circ i$ donde $k = 1, 2, 3, 4$
- (iv) $R_{1/4}^k$ donde $k = 1, 2, R_{1/4} \circ i$

Para escribir la clase de isotopía de estos homeomorfismos en terminos de los generadores de $\mathcal{M}(T_2)$ basta con analizar los homeomorfismos $R_{1/4}, R_{1/5}, R_{1/6}, i$. Lo mismo sucede si queremos calcular los valores propios de la acción en la homología.

f	$[f]$	val. prop. $[f]_*$
i	$D_1 D_2 D_2 D_3 D_4 D_5^2 D_4 D_3 D_2 D_1$	$-1, -1, -1, -1$
$R_{1/4}$	$D_5^2 D_4 D_3 D_2 [i]$	$\pm e^{\pm i\pi/4}$
$R_{1/5}$	$D_5 D_4 D_3 D_2 [i]$	$e^{\pm i2\pi/5}, e^{\pm i4\pi/5}$
$R_{1/6}$	$D_1 D_2 D_3 D_4 D_5 [i]$	$\pm e^{\pm i\pi/6}$

Capítulo 4

Criterios algebraicos y algoritmos de decisión

El *Mapping Class Group* del toro es representado por el grupo lineal especial $SL_2(\mathbb{Z})$. Calculando la traza de un elemento de $SL_2(\mathbb{Z})$ sabemos si esta clase de isotopía contiene homeomorfismos periódicos, reducibles o Anosov .

En general, dado un elemento del *Mapping Class Group* $\mathcal{M}(S)$ de una superficie S , queremos saber a que caso de la clasificación de Thurston corresponde. Si un elemento $D \in \mathcal{M}(S)$ contiene un homeomorfismo periódico decimos que D es una *clase periódica*, si contiene un homeomorfismo pseudo-Anosov decimos que D es una *clase pseudo-Anosov* y, si contiene un homeomorfismo reducible decimos que D es una *clase reducible*.

Entenderemos por *criterio algebraico* a un conjunto de invariantes algebraicos de una clase de isotopía, que nos dan alguna información acerca del tipo de clase que se trata.

Entenderemos por *procedimiento finito* a un algoritmo que dado un elemento cualquiera D de $\mathcal{M}(S)$, escrito como producto de los generadores de $\mathcal{M}(S)$, decide en un número finito de pasos el tipo de la clase D en cuestion. (i.e. si D es una clase periódica o, pseudo-Anosov o, reducible no periódica)

En la sección 1, estudiamos algunos criterios algebraicos y procedimientos finitos conocidos. En la sección 2 redujimos el problema de encontrar un procedimiento

finito para $\mathcal{M}(T_2)$ a $\mathcal{M}_5(D^2)$. Este resultado, en conjunto con el procedimiento finito encontrado por Benardete, Gutierrez y Nitecki [5] para el *Mapping Class Group* $\mathcal{M}_n(D^2)$ del disco agujereado, constituye un procedimiento finito para $\mathcal{M}(T_2)$.

4.1 Criterios Algebraicos

En esta sección analizaremos algunos criterios algebraicos y procedimientos finitos conocidos. Para encontrar criterios algebraicos se estudia la relación entre invariantes algebraicos de un clase de isotopía y la clasificación de Thurston. Uno de los invariantes algebraicos con el cual ya hemos trabajado es la acción en la 1-homología.

4.1.1 Acción en la Homología

Dado un elemento $D \in \mathcal{M}(S)$, este tiene asociado (functorialmente) una acción D_* en la 1-homología de S , $H_1(S)$.

La 1-homología de una superficie orientable de género g con n agujeros es isomorfa a \mathbb{Z}^{2g+n-1} , de donde podemos considerar a D_* como un elemento de $SL(2g+n-1, \mathbb{Z})$; es decir, matrices con coeficientes enteros y determinante 1 (la razón por la cual el determinante es 1 es que las matrices deben ser invertibles y los homeomorfismos en D preservan orientación).

En este contexto, si D contiene un homeomorfismo periódico, de período k , entonces $D^k = 1$ y $D_*^k = I$, donde I es la matriz identidad. Concluimos que si D_* no es “periódica”, entonces D no es una clase periódica.

Proposición 4.1 *Sea $D \in \mathcal{M}(S)$ y $D_* \in SL(m, \mathbb{Z})$ la acción de D en $H_1(S)$. Sea $pc(D)(\lambda)$ el polinomio característico de D_* .*

Si $pc(D)(\lambda)$ es irreducible en \mathbb{Z} , no tiene raíces de la unidad como ceros y no es un polinomio en λ^k para cualquier entero $k > 1$, entonces D es una clase pseudo-Anosov.

Esta Proposición aparece enunciada y demostrada por Casson y Bleiler en [9] pág 75–77.

Ejemplo: Consideremos en $\mathcal{M}(T_2)$ el elemento D , donde:

$$D = D_1 D_3 D_5^2 D_2^{-1} D_4^{-1} D_1 D_2 D_3 D_4 D_5^2 D_4 D_3 D_2 D_1$$

Calculamos la acción de D en la homología multiplicando las matrices descritas en 2.2.3 y obtenemos el polinomio característico:

$$pc(D)(\lambda) = \lambda^4 + 9\lambda^3 + 21\lambda^2 + 9\lambda + 1$$

Aplicando el Criterio de Eisentein, se verifica que es irreducible y, también se puede verificar que no tiene raíces de la unidad como ceros. De donde, satisface las hipótesis de la proposición y concluimos que D es una clase pseudo-Anosov.

Si bien este criterio es rápido de aplicar, ofrece algunas limitaciones, sólo funciona para distinguir algunos casos en que la clase de isotopía contiene homeomorfismos pseudo-Anosov.

A partir de la acción en la homología no se puede concluir que una clase es periódica o que una clase es reducible. En efecto, Thurston demostró que en toda superficie existen pseudo-Anosov que actúan trivialmente en la homología ([27] pág 431). Posteriormente, Papadopoulos probó que dado un homeomorfismo f existe un pseudo-Anosov g , tal que, la acción en la homología de f y g son iguales ([23] Teorema 2).

Volviendo a nuestro ejemplo, observamos que aplicando las relaciones entre los generadores de $\mathcal{M}(T_2)$ (Teorema 2.4), obtenemos:

$$D^2 = D_1 D_3 D_5^2 D_2^{-1} D_4^{-1} D_1 D_3 D_5^2 D_2^{-1} D_4^{-1}$$

D^2 también es una clase pseudo-Anosov y corresponde a un caso particular de una familia de ejemplos conocidos como los ejemplos de Penner.

4.1.2 Ejemplos de Penner

R.C. Penner [25] construyó una familia de ejemplos de homeomorfismos pseudo-Anosov que generaliza una construcción realizada por Thurston ([27] Teorema 7).

A continuación expondremos una versión de los ejemplos de Penner para el caso de una superficie S compacta. (para mayores detalles referirse a [25])

Consideremos dos familias \mathcal{C} y \mathcal{D} de curvas cerradas simples en S , disjuntas, no homóticas entre si, ni homotópicamente triviales, tales que:

(i) $S - \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ es unión disjunta de discos.

(ii) Ninguno de los discos de $S - \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ tiene por frontera la unión de un arco de una curva de \mathcal{C} y de un arco de una curva de \mathcal{D} .

Un subconjunto conexo de una curva c se denomina *arco de c* . La condición (ii) quiere decir que graficamente no ocurre lo descrito en la figura 4.1.

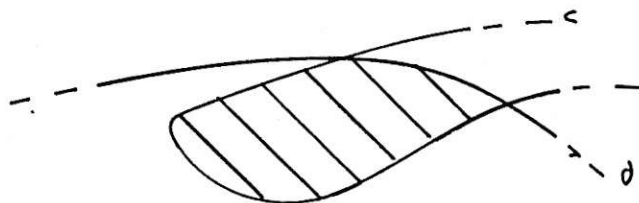


Figura 4.1:

Teorema 4.1 (Penner) *Sea S una superficie compacta, consideremos dos familias de curvas \mathcal{C} y \mathcal{D} que satisfacen las condiciones (i) y (ii) anteriormente descritas. Consideremos el semigrupo $R(\mathcal{C}^+, \mathcal{D}^-)$ generado por los twist de Dehn $\{t_c^{+1}/c \in \mathcal{C}\} \cup \{t_d^{-1}/d \in \mathcal{D}\}$.*

Si $t \in R(\mathcal{C}^+, \mathcal{D}^-)$ y cada t_c^{+1} , t_d^{-1} ocurre al menos una vez en t , entonces, t es isotópico a un homeomorfismo pseudo-Anosov.

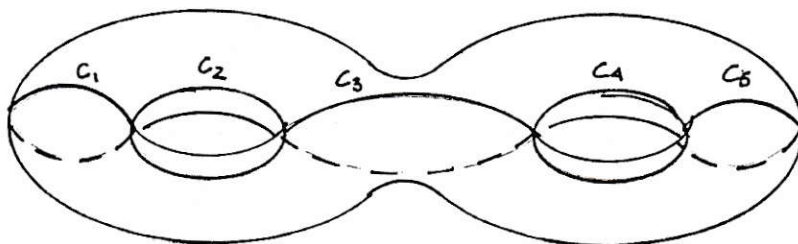


Figura 4.2:

Ejemplo: Consideremos en T_2 las familias de curva $\mathcal{C} = \{c_1, c_3, c_5\}$ y $\mathcal{D} = \{c_2, c_4\}$ como en la figura 4.2, entonces

$$t = t_{c_1}^{+20} t_{c_1}^{+1} t_{c_2}^{-10} t_{c_5}^{+18} t_{c_4}^{-1}$$

es isotópico a pseudo-Anosov.

Concluimos que este criterio es simple de aplicar en un elemento de $\mathcal{M}(T_2)$ escrito como producto de los generadores de este grupo:

Corolario 4.1 Sea $D = D_{i_n}^{\epsilon_n} \dots D_{i_1}^{\epsilon_1}$ un elemento de $\mathcal{M}(T_2)$ ($1 \leq i_j \leq 5$ y $\epsilon_j = +1, -1$). Si:

- (i) $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y,
- (ii) Se satisface una de las dos condiciones siguientes:

$$\epsilon_j = \begin{cases} +1 & \text{si } j \text{ es impar} \\ -1 & \text{si } j \text{ es par} \end{cases}$$

$$\epsilon_j = \begin{cases} -1 & \text{si } j \text{ es impar} \\ +1 & \text{si } j \text{ es par} \end{cases}$$

Entonces D es una clase pseudo-Anosov.

Observamos que estos no son los únicos ejemplos de Penner en T_2 , pues las colecciones \mathcal{C} y \mathcal{D} pueden ser elegidas de múltiples formas:

Ejemplo: Considerar $\mathcal{C} = \{x, c\}$ y $\mathcal{D} = \{b, d\}$ como en la figura 4.3.

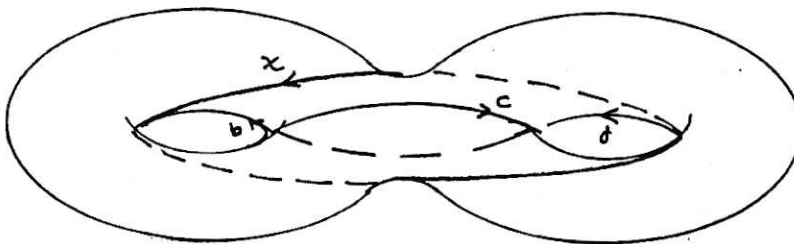


Figura 4.3:

Recordemos que en 3.3.3 cuando construimos los homeomorfismos periódicos del bitoro, “cortamos” a T_2 a lo largo de estas curvas y obtuvimos 2 “octógonos”, concluimos que este par de familias de curvas satisface las condiciones del Teorema de Penner y

$$t = t_x^2 \circ t_b^{-1} \circ t_c^{20} \circ t_d^{-1}$$

es isotópico a un homeomorfismo pseudo-Anosov.

Por último, observamos que los ejemplos de Penner (recorriendo todas las posibles colecciones \mathcal{C} y \mathcal{D}) no son todos los homeomorfismos pseudo-Anosov de una superficie ([25] pág 195). Sin embargo, si h es pseudo-Anosov, entonces alguna potencia de h es isotópica a un ejemplo de Penner.

4.1.3 Problema de Realización de Nielsen

Ahora analizaremos el caso en que una clase es periódica, en una superficie S con característica de Euler negativa.

Primero, observamos que si f es un homeomorfismo periódico de S , isotópico a la identidad, entonces f es igual a la identidad. (1.2.1). De donde, si f es un homeomorfismo periódico de S , de período k ; entonces la clase de isotopía $[f]$ de f , es un elemento de orden finito k en $\mathcal{M}(S)$ (i.e. k es el menor entero tal que $[f]^k = 1$). Inversamente, si $D \in \mathcal{M}(S)$ es un elemento de orden finito k , nos preguntamos si existe un homeomorfismo $f \in D$ tal que $f^k = id_S$. Esta pregunta constituye un caso particular de un problema propuesto por Nielsen:

Problema de Realización de Nielsen: Sea G un subgrupo finito de $\mathcal{M}(S)$. Nos preguntamos si existe G' subgrupo de $\mathcal{H}^+(S)$ (el grupo de homeomorfismos de S que preservan orientación) tal que:

- (i) $[f] \in G$ para todo $f \in G'$ y,
- (ii) la aplicación:

$$\begin{aligned} \Phi : G' &\rightarrow G \\ f &\mapsto [f] \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos.

S. Kerckhoff dio una respuesta positiva a este problema (anunciada en 1980 [20] y publicada en 1983 [19]). Observamos que esta demostración emplea la Teoría de Thurston y, que otros autores (Nielsen, Fenchel, Kravetz, Zieschang) anteriormente habían dado respuestas parciales a este problema (para mayores referencias [29] y [19]).

Este hecho está relacionado con la búsqueda de criterios algebraicos:

Corolario 4.2 $D \in \mathcal{M}(S)$ es una clase periódica si y sólo si D es un elemento de orden finito en $\mathcal{M}(S)$.

El problema de determinar si un elemento $D \in \mathcal{M}(S)$ es un elemento de orden finito, se traduce en encontrar un candidato k para el orden de D y verificar si $D^k = 1$ en $\mathcal{M}(S)$. Esto último, que puede parecer sencillo, en general no lo es; y de hecho constituye uno de los problemas propuestos por Dehn para grupos finitamente presentados.

4.1.4 Problemas de palabras, conjugación, e isomorfismo

Consideremos un grupo G con presentación $\langle X; R \rangle$ donde X y R son conjuntos finitos (2.1.2). Sea F el grupo libre generado por X y, $N_c(R)$ la clausura normal de R en F (como en 2.1.2).

Decimos que un elemento $w \in F$ es una *palabra* cuyas *letras* son los elementos de X . Toda palabra w representa un elemento $wN_c(R)$ de G , inversamente todo elemento g de G es representado por muchas palabras. Por abuso de notación si $g = wN_c(R)$ decimos que $g = w$ en G .

Ejemplo: Consideremos el grupo,

$$\Pi_1(T_2) = \langle a, b, c, d; aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \rangle$$

En este grupo el elemento $\alpha = aba^{-1}b^{-1}$, también puede ser representado por $\alpha = dcd^{-1}c^{-1}$

Este tipo de situaciones es la que lleva a los problemas de decisión propuestos por Dehn (1912):

1.- *Problema de palabras*: Dadas dos palabras w_1 y w_2 encontrar un procedimiento finito que permita decidir si estas palabras representan el mismo elemento de G o, equivalentemente si $w_1 = w_2$ en G (i. e. si $w_1 w_2^{-1} \in N_c(R)$ o, $w_1 w_2^{-1} = 1$ en G).

2.- *Problema de conjugación*: Dadas dos palabras w_1 y w_2 encontrar un algoritmo que decida si representan elementos conjugados en G o, equivalentemente si existe una palabra h tal que $h w_1 h^{-1} = w_2$ en G .

3.- *Problema de isomorfismo*: Dados dos grupos G y G' con presentaciones $\langle X; R \rangle$ y $\langle Y; S \rangle$, encontrar un algoritmo que decida si G y G' son isomorfos. (mayor información sobre estos problemas se encuentra en [22] capítulo II)

En el Capítulo 2, vimos que el *Mapping Class Group* de las superficies que hemos considerado (T_2 , S^2 , etc.) admiten presentación finita, también vimos que la presentación de dichos grupos está relacionada con los grupos de trenzas de la esfera o del disco.

4.1.5 *Problemas de palabras y conjugación en $\mathcal{B}_n(D^2)$*

El problema de palabras para el grupo de trenzas (del disco), fue primero resuelto por Artin en 1947 [4], a través de un método denominado “peinar trenzas”. Este método es un algoritmo que lleva a cualquier palabra que representa un elemento σ de $\mathcal{B}_n(D^2)$, a una única palabra que representa a σ , denominada forma normal de σ . Este algoritmo resulta ser difícil de aplicar y Artin se refiere a este procedimiento de la siguiente manera:

“ A pesar de que ha sido demostrado de que toda trenza puede ser llevada a una forma normal, el autor está convencido que cualquier intento de llevar esto a cabo por un ser humano, sólo conducirá a violentas protestas y discriminaciones en contra de la matemática.” ([4] pág. 126)

Sin embargo, en 1965 Garside [15] solucionó de forma más eficiente el pro-

blema de palabras en $\mathcal{B}_n(D^2)$ y también dio una solución para el problema de conjugación en este grupo. Hemos sabido ([5]), que recientemente Thurston [28] y Elrifai, Morton [11] han mejorado considerablemente los algoritmos de Garside.

A continuación expondremos la solución de Garside para estos problemas y dejaremos para el futuro el estudio de los algoritmos de Thurston y Elrifai, Morton.

Recordemos (2.1.3) que $\mathcal{B}_n(D^2)$ admite la siguiente presentación:

generadores: $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$

relaciones:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{si } |i - j| \geq 2$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

Una palabra en estos generadores se dice *palabra positiva* si sus letras son σ_i , pero no tiene como letra a σ_i^{-1} ($1 \leq i \leq n - 1$).

Una trenza de particular interés es la *trenza de Dirac* Δ :

$$\Delta := (\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \dots \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1$$

Esta trenza representa geoméricamente una “media vuelta” en D^2 (figura 4.4).

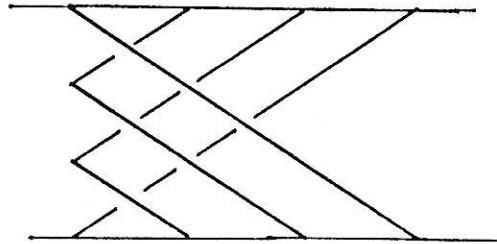


Figura 4.4: $\Delta \in \mathcal{B}_4(D^2)$

Consideremos una palabra $\gamma = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \dots \sigma_{i_m}^{\epsilon_m}$ donde $1 \leq i_k \leq n - 1$ y $\epsilon_k = +1, -1$. Definimos a la palabra $\bar{\gamma}$ por:

$$\bar{\gamma} := \sigma_{n-i_1}^{\epsilon_1} \dots \sigma_{n-i_m}^{\epsilon_m}$$

Lema 4.1 Sea Δ la trenza de Dirac y γ una palabra escrita en los generadores de $\mathcal{B}_n(D^2)$. Entonces:

$$(i) \Delta\gamma = \bar{\gamma}\Delta \text{ en } \mathcal{B}_n(D^2)$$

$$(ii) \Delta = (\sigma_{n-j+1} \dots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \dots \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_1 \sigma_2)(\sigma_1 \sigma_{n-1} \dots \sigma_j) \text{ en } \mathcal{B}_n(D^2),$$

donde $2 \leq j \leq n-1$

Concluimos que Δ^2 pertenece al centro de $\mathcal{B}_n(D^2)$ de hecho lo genera (ver 2.1.3). Además:

$$\sigma_j^{-1} = \Delta^{-1}(\sigma_{n-j+1} \dots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \dots \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_1 \sigma_2)(\sigma_1 \sigma_{n-1} \dots \sigma_{j+1})$$

donde $2 \leq j \leq n-1$.

De esta forma cualquier palabra se puede escribir como el producto de una potencia (negativa) de Δ por una palabra positiva:

Ejemplo: En $\mathcal{B}_3(D^2)$ consideremos $\beta = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}$. Además tenemos las siguientes identidades:

$$\sigma_1^{-1} = \Delta^{-1} \sigma_1 \sigma_2$$

$$\sigma_2^{-1} = \Delta^{-1} \sigma_2 \sigma_1$$

Por lo tanto: $\beta = \sigma_1 \Delta^{-1} \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \Delta^{-1} \sigma_2 \sigma_1 \Delta^{-1} \sigma_1 \sigma_2$. De donde, aplicando la parte (i) del Lema: $\beta = \Delta^{-3} \sigma_2 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$

Garside muestra que todas las palabras que representan una trenza β pueden ser llevadas a una única palabra, que se escribe como el producto de una potencia (positiva o negativa) de Δ y una palabra positiva β_+ :

$$\beta = \Delta^m \beta_+$$

A esta forma se le denomina *forma normal* (de Garside) de β ; a m , la *potencia* de β ; y a β_+ , la *cola* de β .

Un procedimiento finito para obtener esta forma normal se realiza calculando el *diagrama* de una palabra positiva γ . Este diagrama será denotado por $D(\gamma)$ y se define, por construcción, como sigue:

Sea $D_1(\gamma)$ el conjunto de palabras positivas que se obtienen a partir de γ aplicando 0 o 1 vez las relaciones que definen $\mathcal{B}_n(D^2)$. Inductivamente, sea $D_{i+1}(\gamma)$ el conjunto de palabras positivas que se obtienen a partir de los elementos de $D_i(\gamma)$ aplicando 0 o 1 vez las relaciones que definen a $\mathcal{B}_n(D^2)$. Entonces:

$$\gamma \in D_1(\gamma) \subset \dots \subset D_k(\gamma) = D_{k+1}(\gamma)$$

para cierto k . Tal entero k existe, ya que, el número de palabras positivas del mismo largo de γ es finito y, al aplicar las relaciones de $\mathcal{B}_n(D^2)$ este largo no cambia. Definimos:

$$D(\gamma) := D_k(\gamma)$$

En el conjunto de palabras positivas hay un orden. Decimos que: $\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m} < \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_l}$ si y sólo si $i_1 i_2 \dots i_m < j_1 j_2 \dots j_l$ como enteros escritos en base n .

El siguiente Teorema soluciona el problema de palabras:

Teorema 4.2 (Garside) *Si $\beta \in \mathcal{B}_n(D^2)$ entonces β es representado por una única palabra $\Delta^m \beta_+$, donde el entero m y la palabra positiva β_+ se obtienen a partir de una palabra $\sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \dots \sigma_{i_m}^{\epsilon_m}$ ($1 \leq i_k \leq n-1$ y $\epsilon_k = +1, -1$), que representa a β , de la siguiente forma:*

(i) *Cambie todos los $\sigma_{i_k}^{-1}$ por:*

$$\sigma_{i_k}^{-1} = \Delta^{-1}(\sigma_{n-i_k+1} \dots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \dots \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_1 \sigma_2)(\sigma_1 \sigma_{n-1} \dots \sigma_{i_k+1})$$

(ii) *Usando la propiedad $\Delta\gamma = \bar{\gamma}\Delta$ junte todos los Δ^{-1} a la izquierda de tal forma que β es representado por una palabra de la forma $\Delta^k \beta_0$ (k entero negativo, β_0 palabra positiva).*

(iii) *Construya $D(\beta_0)$.*

(iv) *En $D(\beta_0)$ elija la palabra $\Delta^h \beta_1$ tal que h es maximal ($h \geq 0$). Sea $m = h + k$.*

(v) *Construya $D(\beta_1)$ y sea β_+ la menor palabra en $D(\beta_1)$.*

A la palabra $\Delta^m \beta_+$ se le denomina *forma normal de Garside* de β . A cualquier palabra $\Delta^m \beta'_+$ con $\beta'_+ \in D(\beta_+)$ se le denomina una *forma estandar* de β .

Garside solucionó el problema de conjugación en $\mathcal{B}_n(D^2)$ construyendo un conjunto denominado *cumbre* de una trenza.

Consideremos una palabra positiva que representa a Δ :

$$\Delta = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m}$$

entonces decimos que la palabra $\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k}$ ($k \leq m$) es una *palabra inicial* de Δ .

Utilizamos el diagrama de Δ para construir el conjunto de todas las posibles palabras iniciales de Δ y llevamos dichas palabras a su forma normal. El conjunto formado por todas las formas normales de las palabras iniciales de Δ se denomina *conjunto de rutas iniciales* de Δ .

Ejemplo: $\{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_1, \sigma_1\sigma_2\sigma_1\}$ es el conjunto de rutas iniciales de Δ en $\mathcal{B}_3(D^2)$.

Ahora, definimos la *cumbre* de una trenza β describiendo como se construye:

(i) Construimos el conjunto de rutas iniciales de Δ .

(ii) Sea $S_1(\beta)$ el conjunto de palabras en forma estandar que tienen una potencia menor o igual a la potencia de β y que se obtienen a partir de β , por conjugación de una ruta inicial. Inductivamente, sea $S_i(\beta)$ el conjunto de palabras con potencia menor o igual a la potencia de β y que se obtiene a partir de las palabras en $S_{i-1}(\beta)$, por conjugación de una ruta inicial de Δ .

(iii) El número de palabras que se obtiene a través de este proceso es finito y, por lo tanto, existe j tal que $S_{j+1}(\beta) = S_j(\beta)$

(iv) Al subconjunto de $S_j(\beta)$ formado por todos los elementos con potencia máxima en $S_j(\beta)$ se le denomina *cumbre* de β y, es denotado por $S(\beta)$.

Finalmente, la *potencia cumbre* s de β , es la potencia común de los elementos de $S(\beta)$; la *cola cumbre* γ_+ , es la menor cola de los elementos de $S(\beta)$ y; la *forma*

cumbre de β , es la palabra $\Delta^s \gamma_+$. El siguiente Teorema resuelve el problema de conjugación en $\mathcal{B}_n(D^2)$.

Teorema 4.3 (Garside) *Dos elementos de $\mathcal{B}_n(D^2)$ son conjugados si y sólo si sus formas cumbre son iguales.*

J. S. Birman hace una presentación de este algoritmo con algunas mejoras ([7] pág 73–83) y señala que la dificultad de aplicar este procedimiento está en la cantidad de elementos que tiene el diagrama de Δ : 2 elementos, para $n = 3$; 16 elementos, para $n = 4$; 768 elementos, para $n = 5$; 292.864 elementos, para $n = 6$.

El procedimiento de Garside sigue siendo bastante lento (exponencial en el largo de la palabra), sin embargo, en [5] se mencionan versiones más eficientes de estos algoritmos que solucionan el problema de palabras con una rapidez de $O(m^2 n \log n)$ (donde m es el largo de la palabra en $\mathcal{B}_n(D^2)$).

4.1.6 Procedimientos finitos en $\mathcal{M}_n(D^2)$

Benardete, Gutierrez y Nitecki [5] tradujeron el problema de estudiar la clasificación de Thurston en el disco n -agujereado, a problemas en el grupo de n -trenzas del disco. En particular, el problema de determinar si una clase es periódica se traduce a un problema de palabras en $\mathcal{B}_n(D^2)$ y, el problema de determinar si una clase es reducible se traduce a un problema estrechamente relacionado al problema de conjugación en $\mathcal{B}_n(D^2)$. Si bien Benardete, Gutierrez, y Nitecki utilizan versiones más recientes de los algoritmos de Garside, sus resultados se pueden enunciar (aunque difícilmente aplicar) en terminos de los procedimientos ya descritos.

Recordemos (2.2.2) que $\mathcal{M}_n(D^2)$ está relacionado con $\mathcal{B}_n(D^2)$ a través del anti-epimorfismo Φ' :

$$\begin{aligned} \Phi' : \mathcal{B}_n(D^2) &\rightarrow \mathcal{M}_n(D^2) \\ \sigma_i &\mapsto \rho_i \end{aligned}$$

donde ρ_i es la clase de isotopía de un twist de Dehn que intercambia el i -ésimo agujero con el $(i + 1)$ -ésimo agujero. Además, el núcleo de Φ' es el subgrupo de $\mathcal{B}_n(D^2)$ generado por $\Delta^2 = (\rho_1 \dots \rho_{n-1})^n$, de donde $\mathcal{M}_n(D^2)$ admite la presentación siguiente:

generadores: $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$

relaciones:

$$\begin{aligned} \rho_i \rho_j &= \rho_j \rho_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \rho_i \rho_{i+1} \rho_i &= \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \\ (\rho_1 \dots \rho_{n-1})^n &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, un elemento $\rho = \rho_{i_1}^{\epsilon_1} \dots \rho_{i_m}^{\epsilon_m} \in \mathcal{M}_n(D^2)$ tiene asociado una trenza $\beta_\rho = \sigma_{i_m}^{\epsilon_m} \dots \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \in \mathcal{B}_n(D^2)$.

Periodicidad: Al igual que en la esfera todo homeomorfismo periódico del disco es topológicamente conjugado a una rotación [10]. Las rotaciones del disco tienen un punto fijo.

Los homeomorfismos del disco con n agujeros inducen una permutación en los agujeros (invariante bajo isotopías). Así, la clase $\rho = \rho_{i_1}^{\epsilon_1} \dots \rho_{i_m}^{\epsilon_m}$ induce la permutación $\pi(\rho) = (i_1 \ i_1 + 1) \circ \dots \circ (i_m \ i_m + 1)$ (la composición de permutaciones es de derecha a izquierda).

Observamos que $\pi(\rho) = \pi(\beta_\rho)$, donde $\pi(\beta_\rho) = (i_m \ i_m + 1) \dots (i_1 \ i_1 + 1)$ (la multiplicación de permutaciones es de izquierda a derecha).

Se concluye que si ρ contiene un homeomorfismo periódico, entonces, $\pi(\rho)$ deja a lo más un símbolo fijo, es producto de ciclos del mismo largo y, $\rho^{\text{ord } \pi(\rho)} = 1$ en $\mathcal{M}_n(D^2)$. Inversamente si $\rho^{\text{ord } \pi(\rho)} = 1$ en $\mathcal{M}_n(D^2)$, entonces ρ es una clase periódica (Problema de realización de Nielsen 4.1.3, Corolario 4.2).

En el contexto de $\mathcal{B}_n(D^2)$ vemos que ρ es una clase periódica si y sólo si, $\beta_\rho^{\text{ord } \pi(\beta_\rho)} \in \ker \Phi'$, es decir:

$$\beta_\rho^{\text{ord } \pi(\beta_\rho)} = \Delta^{2K}$$

para algún entero K .

El entero K se calcula estudiando la *suma exponencial* (wt) en $\mathcal{B}_n(D^2)$, definida por:

$$\begin{aligned} wt : \mathcal{B}_n(D^2) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \beta = \sigma_{i_m}^{\epsilon_m} \dots \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} &\mapsto wt(\beta) = \epsilon_m + \dots + \epsilon_1 \end{aligned}$$

La *suma exponencial* está bien definida. En efecto, las relaciones que definen a $\mathcal{B}_n(D^2)$ tienen suma exponencial nula. Además, $wt(\beta \cdot \gamma) = wt(\beta) + wt(\gamma)$, de donde K debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$ord(\beta_\rho) \cdot wt(\beta_\rho) = K wt(\Delta^2) = Kn(n-1)$$

El siguiente Teorema ([5] Teorema 7.3) nos da un procedimiento finito para verificar si una clase en $\mathcal{M}_n(D^2)$ es periódica.

Teorema 4.4 (Benardete, Gutierrez, y Nitecki) Dado $\rho \in \mathcal{M}_n(D^2)$:

(i) Si $\pi(\rho)$ deja 2 o más símbolos fijos o no es producto de ciclos del mismo largo, entonces ρ no es una clase periódica.

(ii) Si $\pi(\rho)$ deja a lo más un símbolo fijo y es producto de ciclos del mismo largo, consideramos:

$$K := \frac{ord \pi(\beta_\rho) \cdot wt(\beta_\rho)}{n(n-1)}$$

si K no es entero, entonces ρ no es una clase periódica.

(iii) Si K es entero, ρ es una clase periódica si y sólo si $\beta_\rho^{ord \pi(\beta_\rho)} = \Delta^{2K}$ (lo cual se verifica aplicando una solución al problema de palabras en $\mathcal{B}_n(D^2)$).

Reducibilidad: Para verificar si una clase es reducible primero traducimos la reducibilidad a una condición equivalente para trenzas.

Recordemos que un homeomorfismo f es isotópico a uno reducible si y sólo si existe una colección $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_k\}$ de curvas cerradas simples, disjuntas, no homotópicas entre sí, no homotópicas a un borde, y no homotópicamente triviales, tales que $f(c_1 \cup \dots \cup c_k) \sim c_1 \cup \dots \cup c_k$. En tal caso decimos que \mathcal{C} reduce a f .

Consideremos f un homeomorfismo del disco agujereado, y $\Phi' : \mathcal{B}_n(D^2) \rightarrow \mathcal{M}_n(D^2)$ el anti-epimorfismo definido anteriormente (2.2.2). Sea β_f una trenza, tal que, $\Phi'(\beta_f) = [f]$. β_f corresponde al “rastros” que dejan los agujeros del disco bajo una isotopía entre id_{D^2} y f .

Ejemplo: Consideremos un homeomorfismo reducible f del disco D^2 con 5 agujeros, donde la colección \mathcal{C} de curvas que reduce a f es como en la figura 4.5.

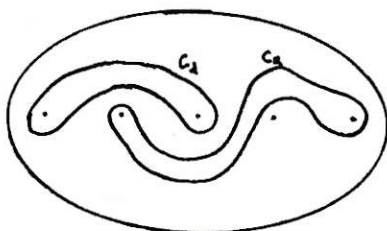


Figura 4.5: Colección \mathcal{C}

Consideremos el “rastros” que deja la colección de curvas \mathcal{C} bajo una isotopía entre la identidad y f , este resulta ser una colección de cilindros en $D^2 \times I$ que “encierra” a la trenza $\beta_{[f]}$.

Definición 4.1 Consideremos una trenza geométrica $\beta \in \mathcal{B}_n(D^2)$, una partición en cilindros de β es una colección $\mathcal{A} = \{A_j\}_1^k$ de cilindros sólidos (incrustados en $D^2 \times I$), disjuntos, tales que:

$$(i) \partial A_j \cap \beta = \emptyset$$

$$(ii) A_j \cap \beta \neq \emptyset$$

$$(iii) \{\partial A_j \cap D^2 \times \{0\} / j = 1 \dots k\} = \{\partial A_j \cap D^2 \times \{1\} / j = 1 \dots k\}$$

Una partición en cilindros es trivial si: $k = 1$ o cada A_j es una vecindad tubular de una cuerda de β .

Observamos que en nuestro ejemplo la colección \mathcal{C} induce una partición en cilindros (no trivial) para β_f . En general, si una colección de curvas reduce a un homeomorfismo f , entonces esta colección induce una partición en cilindros (no trivial) para la trenza asociada a f . Inversamente, la trenza asociada a un homeomorfismo

f tiene una partición en cilindros \mathcal{A} (no trivial), entonces la colección de curvas $\{\partial A_j \cap D^2 \times \{0\} / j = 1 \dots k\}$ reduce a f .

Teorema 4.5 *Sea f un homeomorfismo del disco agujerado:*

[f] es reducible si y sólo si existe una partición en cilindros (no trivial) de β_f

Volviendo a nuestro ejemplo, consideremos un homeomorfismo h tal que la imagen de \mathcal{C} es la colección \mathcal{C}' como en la figura 4.6.

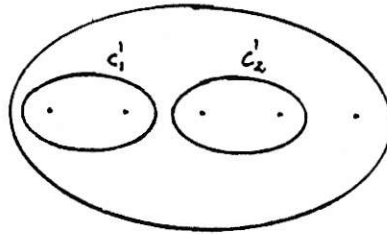


Figura 4.6: Colección \mathcal{C}'

por lo tanto, $h \circ f \circ h^{-1}(\mathcal{C}') \sim \mathcal{C}'$ y la trenza $\beta_{h \circ f \circ h^{-1}}$ tiene una partición en cilindros “convexos”.

Como $\beta_{h \circ f \circ h^{-1}} = \beta_h^{-1} \beta_f \beta_h$ concluimos que β_f tiene una partición en cilindros (no trivial) si y sólo si una trenza conjugada a β_f tiene una partición en cilindros “convexos”.

Las particiones en cilindros “convexos” son las inducidas por *particiones en bloques* de $\{1, \dots, n\}$.

Decimos que B es un *bloque* de $\{1, \dots, n\}$ si B es un subconjunto de números consecutivos en $\{1, \dots, n\}$ (i. e. $B = \{i / 1 \leq a \leq i \leq b \leq n\}$).

A una colección $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$ de bloques disjuntos, se le denomina *partición en bloques* de $\{1, \dots, n\}$.

Consideremos una trenza β con cuerdas $\{b_1, \dots, b_n\}$, y un bloque B de $\{1, \dots, n\}$. Decimos que las cuerdas b_i tales que $i \in B$ pertenecen al bloque B .

Decimos que dos cuerdas se *crizan* si en su proyección al plano se intersectan, y se cruzan por *arriba* o *debajo* según el tipo de esta intersección.

Decimos que la trenza β respeta al bloque B si cada vez que una cuerda b_j , que no pertenece al bloque B se cruza por arriba (resp. abajo) con una cuerda del bloque B , b_j se cruza por arriba (resp. abajo) con todas las cuerdas del bloque B (figura 4.7).

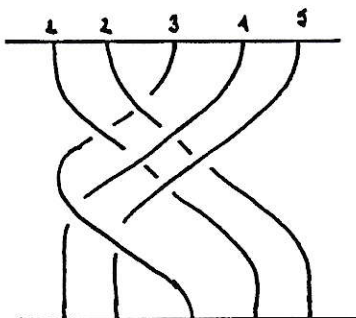


Figura 4.7: La tercera cuerda respeta al bloque $\{1, 2\}$ y al bloque $\{4, 5\}$.

Definición 4.2 Sea $\beta \in \mathcal{B}_n(D^2)$. Decimos que una partición en bloques \mathcal{B} es una partición en bloques coherente con β si:

- (i) β respeta cada bloque de \mathcal{B} y,
- (ii) $\pi(\beta)(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$.

Una partición en cilindros “convexos” $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ de β induce una partición en bloques $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$ coherentes con β ; donde, $B_k = \{i/\text{la } i\text{-ésima cuerda de } \beta \text{ esta contenida en } A_k\}$

Inversamente, una partición en bloques coherente con β induce una partición en cilindros de β al considerar la colección de cilindros A_j , que contienen las cuerdas de β , que pertenecen al bloque B_j .

Teorema 4.6 (Benardete, Gutierrez, y Nitecki) Las siguientes son equivalentes:

- (i) $[f]$ es reducible.
- (ii) β_f tiene una partición en cilindros (no trivial).
- (iii) Alguna trenza β'_f conjugada a β_f tiene una partición en bloques coherentes (no trivial).

(iv) Alguna trenza β'_f en la cumbre de β_f tiene una partición en bloques coherentes (no trivial).

La equivalencia entre (iii) y (iv) constituye el resultado central de Benardete, Gutierrez y Nitecki ([5] Teorema 5.8) que permite dar un procedimiento finito para probar reducibilidad de una clase en $\mathcal{M}_n(D^2)$. En efecto, existen finitas particiones en bloques posibles y finitos elementos en la cumbre de una trenza. Lo anterior, combinado con un algoritmo para determinar si una partición en bloques es coherente con una trenza, soluciona el problema de encontrar un procedimiento finito para determinar si un elemento de $\mathcal{M}_n(D^2)$ es una clase reducible o no lo es.

4.2 Procedimiento finito en $\mathcal{M}(T_2)$

En esta sección daremos un procedimiento finito que traduce el estudio de la clasificación de Thurston en $\mathcal{M}(T_2)$ al estudio de dicha clasificación en $\mathcal{M}_5(D^2)$.

Recordemos (Teorema 2.4) que $\mathcal{M}(T_2)$ admite la siguiente presentación:

generadores: D_1, D_2, D_3, D_4, D_5

relaciones:

$$D_i D_j = D_j D_i \quad \text{si } |i - j| \geq 2$$

$$D_i D_{i+1} D_i = D_{i+1} D_i D_{i+1}$$

$$(D_1 D_2 D_3 D_4 D_5^2 D_4 D_3 D_2 D_1)^2 = 1$$

$$(D_1 D_2 D_3 D_4 D_5)^6 = 1$$

$$D_i (D_1 D_2 D_3 D_4 D_5^2 D_4 D_3 D_2 D_1) = (D_1 D_2 D_3 D_4 D_5^2 D_4 D_3 D_2 D_1) D_i$$

Esta presentación está relacionada con la presentación de $\mathcal{M}_6(S^2)$ (Corolario 2.2):

generadores: w_1, \dots, w_5

relaciones:

$$w_i w_j = w_j w_i \quad \text{si } |i - j| \geq 2$$

$$\begin{aligned}
 w_i w_{i+1} w_i &= w_{i+1} w_i w_{i+1} \\
 w_1 w_2 w_3 w_4 w_5^2 w_4 w_3 w_2 w_1 &= 1 \\
 (w_1 \dots w_5)^6 &= 1
 \end{aligned}$$

La relación entre $\mathcal{M}(T_2)$ y $\mathcal{M}_6(S^2)$ está dada por el epimorfismo Ω :

$$\begin{aligned}
 \Omega : \mathcal{M}(T_2) &\rightarrow \mathcal{M}_6(S^2) \\
 D_i &\mapsto w_i
 \end{aligned}$$

y cuyo núcleo es el subgrupo de orden 2 generado por:

$$[i] = D_1 D_2 D_3 D_4 D_5^2 D_4 D_3 D_2 D_1$$

En la sección 3.1 demostramos que estudiar la clasificación de Thurston en $\mathcal{M}(T_2)$ es “equivalente” a estudiarla en $\mathcal{M}_6(S^2)$. Más precisamente, probamos que:

$D = D_{i_n}^{\epsilon_n} \dots D_{i_1}^{\epsilon_1} \in \mathcal{M}(T_2)$ es una clase periódica (resp. pseudo-Anosov, resp. reducible no periódica) en $\mathcal{M}(T_2)$ si y sólo si $w = \Omega(D) = w_{i_n}^{\epsilon_n} \dots w_{i_1}^{\epsilon_1}$ es una clase periódica (resp. pseudo-Anosov, resp. reducible no periódica) en $\mathcal{M}_6(S^2)$ (3.1.3).

En lo que sigue veremos que un subgrupo K de $\mathcal{M}_6(S^2)$ resulta ser isomorfo a $\mathcal{M}_5(D^2)$ y traducimos el estudio de la clasificación de Thurston en $\mathcal{M}_6(S^2)$ al estudio de dicha clasificación en K y, el estudio en K a $\mathcal{M}_5(D^2)$.

4.2.1 Desde $\mathcal{M}_6(S^2)$ a K

Los homeomorfismos de S^2 con 6 agujeros inducen una permutación de 6 símbolos en los agujeros de S^2 . Esta permutación es invariante bajo isotopías de la esfera agujerada. Definimos la aplicación:

$$\begin{aligned}
 \pi : \mathcal{M}_6(S^2) &\rightarrow \Sigma_6 \\
 w &\mapsto \pi(w)
 \end{aligned}$$

donde $\pi(w)$ es la permutación inducida por los homomorfismos en la clase w . π está bien definida y resulta ser un epimorfismo de grupos. Además, en los generadores de $\mathcal{M}_6(S^2)$, $\pi(w_i) = (i \ i + 1)$ y, en general, si $w = w_{i_n}^{\epsilon_n} \dots w_{i_1}^{\epsilon_1}$, entonces $\pi(w) = (i_n \ i_n + 1) \circ \dots \circ (i_1 \ i_1 + 1)$.

Ahora consideremos el subgrupo K de $\mathcal{M}_6(S^2)$, donde:

$$K = \{w \in \mathcal{M}_6(S^2) \mid \pi(w)(6) = 6\}$$

Es decir, K es el conjunto de clases de isotopía que dejan fijo el "sexto" agujero de S^2 .

Veremos que todo elemento de $\mathcal{M}_6(S^2)$ tiene asociado elementos en K , esta asociación se realiza *potenciando y/o conjugando*:

Definición 4.3 *Dados $w, w' \in \mathcal{M}_6(S^2)$ decimos que:*

- (i) w' se obtiene potenciando w si $w' = w^k$ para algún entero k .
- (ii) w' se obtiene conjugando w si $w' = v w v^{-1}$ para algún $v \in \mathcal{M}_6(S^2)$.

Observamos que dado $w \in \mathcal{M}_6(S^2)$ existe $w' \in K$ obtenido potenciando y/o conjugando:

Ejemplo 1: Sea $w = w_1 w_2 w_3^{-1} w_4^{-1} w_5$, entonces, $\pi(w) = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6)$; de donde:

$$w' = w^6 = (w_1 w_2 w_3^{-1} w_4^{-1} w_5)^6 \in K$$

Ejemplo 2: Sea $w = w_5 w_4^{-1} w_3 w_4 w_2$, entonces, $\pi(w) = (3 \ 2 \ 6 \ 5)(4)(1)$; de donde:

$$w' = (w_4 w_5)^{-1} w (w_4 w_5) = w_5^{-1} w_4^{-1} w_5 w_4^{-1} w_3 w_4 w_2 w_4 w_5 \in K$$

o también:

$$w' = w^4 = (w_5 w_4^{-1} w_3 w_4 w_2)^4 \in K$$

El siguiente Lema traduce el problema de estudiar la clasificación de Thurston en $\mathcal{M}_6(S^2)$ a K :

Lema 4.2 Sean $w \in \mathcal{M}_6(S^2)$ y $w' \in K$, tales que w' es obtenido conjugando y/o potenciando w . Entonces:

w es una clase periódica (resp. pseudo-Anosov, resp. reducible no periódica) si y sólo si w' es una clase periódica (resp. pseudo-Anosov, resp. reducible no periódica).

DEMOSTRACIÓN: Si w' es obtenido conjugando w por v la afirmación es clara

Ahora, si w' es obtenido potenciando w (i.e. $w' = w^k$), entonces w es un elemento de orden finito si y sólo si w' es un elemento de orden finito. De donde, w es una clase periódica si y sólo si w' es una clase periódica (Corolario 4.2).

Si w' contiene un homeomorfismo f pseudo-Anosov (resp. reducible), entonces w contiene un homeomorfismo f^k pseudo-Anosov (resp. reducible). Aplicando el Teorema de clasificación (1.1) el Lema queda demostrado. \square

4.2.2 Método de Reidemeister-Schreier

Un resultado de Reidemeister (1932) y Schreier (1927) permite, dada una presentación de un grupo G , e información apropiada sobre un subgrupo H de G , obtener una presentación para H . Utilizaremos estos resultados para obtener una presentación del grupo K (Birman [8] utiliza esto para obtener la presentación de un grupo similar a K).

A continuación damos una versión del método de Reidemeister-Schreier (ver [22] pág. 102-103). Decimos que un conjunto Schreier transversal de un subgrupo H de F , libre con base X , es un subconjunto T de F tal que, para distintos t en T los cosets tH son distintos, la unión de los tH es F y, todo segmento final de un elemento de T pertenece a T .

Teorema 4.7 (Reidemeister y Schreier) Sea $G = F/N_c(R)$, F grupo libre con base X y $N_c(R)$ la clausura normal de R en F , y sea ϕ la aplicación canónica de F a G . Sea H un subgrupo de G , con \tilde{H} la imagen inversa de H bajo ϕ , y T un Schreier transversal para \tilde{H} en F . Para w en F definimos \bar{w} por la condición:

$$wH = \bar{w}H, \quad \bar{w} \in T$$

Para $t \in T$ y $x \in X$ definimos:

$$\gamma(t, x) = (\overline{xt})^{-1}xt, \quad y \quad \gamma(t, x^{-1}) = (\overline{x^{-1}t})^{-1}x^{-1}t$$

Entonces, H tiene presentación $H = \langle X_1^*, R_1^* \rangle$, como sigue, sean X_1 todos los elementos de $\gamma(t, x) \neq 1$ para $t \in T$ y $x \in X$, sea X_1^* el conjunto de elementos $\gamma(t, x)^*$ en correspondencia uno a uno con aquellos de X_1 , y sea F_1 el grupo libre con base X_1^* .

Definimos la función τ de F a F_1 como sigue: sea $w = y_n \dots y_1$ donde $y_i \in X \cup X^{-1}$, entonces

$$\tau(w) := \gamma(\overline{y_{n-1} \dots y_1}, y_n)^* \dots \gamma(\overline{y_{j-1} \dots y_1}, y_j)^* \dots \gamma(1, y_1)^*$$

Entonces R^* consiste de todos los $\tau(trt^{-1})$ para $t \in T$ y $r \in R$.

Además, si $w \in \tilde{H}$, entonces $\tau(w) = w$ en G .

Para el subgrupo K de $\mathcal{M}_6(S^2)$ un conjunto Schreier transversal es $T = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$, donde:

$$k_j = w_j w_{j+1} \dots w_5$$

para $j = 1, 2, 3, 4, 5$ y $k_6 = 1$

Calculamos $\gamma(k_j, w_i)$ y obtenemos la siguiente tabla:

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_1^{-1}	w_2^{-1}	w_3^{-1}	w_4^{-1}	w_5^{-1}
k_1	v_1	w_1	w_2	w_3	w_4	1	w_1^{-1}	w_2^{-1}	w_3^{-1}	w_4^{-1}
k_2	1	v_2	w_2	w_3	w_4	v_1^{-1}	1	w_2^{-1}	w_3^{-1}	w_4^{-1}
k_3	w_1	1	v_3	w_3	w_4	w_1^{-1}	v_2^{-1}	1	w_3^{-1}	w_4^{-1}
k_4	w_1	w_2	1	v_4	w_4	w_1^{-1}	w_2^{-1}	v_3^{-1}	1	w_4^{-1}
k_5	w_1	w_2	w_3	1	v_5	w_1^{-1}	w_2^{-1}	w_3^{-1}	v_4^{-1}	1
k_6	w_1	w_2	w_3	w_4	1	w_1^{-1}	w_2^{-1}	w_3^{-1}	w_4^{-1}	v_5^{-1}

donde:

$$v_1 = w_1^{-1}w_2^{-1}w_3^{-1}w_4^{-2}w_3^{-1}w_2^{-1}w_1^{-1}$$

$$\begin{aligned}
v_2 &= w_1^{-2} w_2^{-1} w_3^{-1} w_4^{-2} w_3^{-1} w_2^{-1} \\
v_3 &= w_2^{-1} w_1^{-2} w_2^{-1} w_3^{-1} w_4^{-2} w_3^{-1} \\
v_4 &= w_3^{-1} w_2^{-1} w_1^{-2} w_2^{-1} w_3^{-1} w_4^{-2} \\
v_5 &= w_4^{-1} w_3^{-1} w_2^{-1} w_1^{-2} w_2^{-1} w_3^{-1} w_4^{-1}
\end{aligned}$$

Concluimos que un conjunto de generadores para K es : $w_1, \dots, w_4, v_1, \dots, v_5$. Sin embargo, v_1, \dots, v_5 se escriben en terminos de w_1, \dots, w_4 , de donde, w_1, \dots, w_4 es un conjunto de generadores para K . De la misma forma calculamos las relaciones que definen a K y obtenemos:

Corolario 4.3 *El subgrupo K de $\mathcal{M}_6(S^2)$ admite la siguiente presentación:*

generadores: w_1, \dots, w_4

relaciones:

$$\begin{aligned}
w_i w_j &= w_j w_i && \text{si } |i - j| \geq 2 \\
w_i w_{i+1} w_i &= w_{i+1} w_i w_{i+1} \\
(w_1 \dots w_4)^5 &= 1
\end{aligned}$$

Además existe un método para reescribir una palabra:

$$w = w_{i_n}^{\epsilon_n} \dots w_{i_1}^{\epsilon_1} \in K$$

(donde $1 \leq i_k \leq 5$) en terminos de los generadores w_1, \dots, w_4 de K .

(i) Calcule:

$$\begin{aligned}
j_k &= \pi(w_{i_k}^{\epsilon_k} \dots w_{i_1}^{\epsilon_1})(6) \\
&= (i_k \ i_k + 1) \circ \dots \circ (i_1 \ i_1 + 1)(6)
\end{aligned}$$

para $1 \leq k \leq n - 1$.

(ii) Utilize la tabla descrita anteriormente para escribir:

$$w = \gamma(k_{j_{n-1}}, w_{i_n}^{\epsilon_n}) \dots \gamma(k_{j_{l-1}}, w_{i_l}^{\epsilon_l}) \dots \gamma(k_6, w_1^{\epsilon_1})$$

Ejemplo 1: Sea $w' = w_5^{-1}w_4^{-1}w_5w_4^{-1}w_3w_4w_2w_4w_5 \in K$. Entonces:

$$\begin{aligned} j_0 &= 6 & j_1 &= 5 & j_2 &= 4 \\ j_3 &= 4 & j_4 &= 5 & j_5 &= 5 \\ j_6 &= 4 & j_7 &= 4 & j_8 &= 4 \end{aligned}$$

Aplicando la Tabla resulta que $w' = w_4v_4^{-1}w_3v_4w_2v_5$. De donde,

$$w' = w_4w_4^2w_3w_2w_1^2w_2w_3w_3w_3^{-1}w_2^{-1}w_1^{-2}w_2^{-1}w_3^{-1}w_4^{-2}w_2w_4^{-1}w_3^{-1}w_2^{-1}w_1^{-2}w_2^{-1}w_3^{-1}w_4^{-1}$$

Ejemplo 2: Sea $w' = (w_1w_2w_3^{-1}w_4^{-1}w_5)^6 \in K$. Calculando obtenemos:

$$w' = w_1w_2w_3^{-1}w_4^{-1}v_5w_1w_2w_3^{-1}w_4w_1w_2w_3^{-1}w_4w_1v_2w_2^{-1}w_3^{-1}w_4v_1w_1w_2^{-1}w_3^{-1}w_4v_3^{-1}v_4^{-1}$$

Corolario 4.4 *La aplicación Γ definida por:*

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{M}_5(D^2) &\rightarrow K \\ \rho_i &\mapsto w_i \end{aligned}$$

donde $1 \leq i \leq 4$; es un isomorfismo de grupos.

4.2.3 Desde K a $\mathcal{M}_5(D^2)$

El siguiente Teorema asegura que estudiar la clasificación de Thurston en K es equivalente a estudiarla en $\mathcal{M}_5(D^2)$:

Teorema 4.8 *Sean $w' \in K$ y $\rho \in \mathcal{M}_5(D^2)$, tales que $\Gamma(\rho) = w'$. Entonces:*

w' es una clase periódica (resp. pseudo-Anosov, resp. reducible) en $K \leq \mathcal{M}_6(S^2)$ si y sólo si ρ es una clase periódica (resp. pseudo-Anosov, resp. reducible) en $\mathcal{M}_5(D^2)$.

DEMOSTRACIÓN: w' es un elemento de orden finito en K (y por lo tanto en $\mathcal{M}_6(S^2)$) si y sólo si ρ es un elemento de orden finito en $\mathcal{M}_6(S^2)$, de donde, w' contiene un homeomorfismo periódico de la esfera con 6 agujeros si y sólo si ρ contiene un

homeomorfismo periódico del disco con cinco agujeros (Problema de realización de Nielsen 4.1.3).

Basta con demostrar que w' es reducible si y solo si ρ es reducible. Consideremos al disco D^2 agujereado en q_1, \dots, q_5 , a la esfera S^2 agujereada en p_1, \dots, p_6 , y el homeomorfismo h del interior del disco ($\text{int } D^2$) a $S^2 - \{p_6\}$, tal que, $h(q_i) = p_i$:

Consideremos los twist de Dehn t_i en D^2 que intercambian el i -ésimo agujero con el $i + 1$ -ésimo agujero, entonces $t_i \in \rho_i$. Además, $h \circ t_i \circ h^{-1}$ es un twist de Dehn en S^2 que intercambia el i -ésimo agujero con el $i + 1$ -ésimo agujero, de donde, $h \circ t_i \circ h^{-1} \in w_i$.

Si $\rho = \rho_{i_n}^{\epsilon_n} \dots \rho_{i_1}^{\epsilon_1}$, entonces, $t_{i_n}^{\epsilon_n} \circ \dots \circ t_{i_1}^{\epsilon_1} \in \rho$ y $h \circ t_{i_n}^{\epsilon_n} \circ \dots \circ t_{i_1}^{\epsilon_1} \circ h^{-1} \in w'$.

Ahora, si $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_k\}$ es una colección de curvas que reduce a $t_{i_n}^{\epsilon_n} \circ \dots \circ t_{i_1}^{\epsilon_1} \in \rho$, entonces, la colección $\mathcal{C}' = \{h(c_1), \dots, h(c_k)\}$ reduce a $h \circ t_{i_n}^{\epsilon_n} \circ \dots \circ t_{i_1}^{\epsilon_1} \circ h^{-1} \in w'$. De donde si ρ es reducible, entonces, w' también lo es. Inversamente, utilizando el mismo tipo de argumentos se demuestra que si w' es reducible, entonces, ρ también lo es. \square

4.2.4 Procedimiento finito en $\mathcal{M}(T_2)$

El procedimiento encontrado por Benardete, Gutierrez, y Nitecki [5] (4.1.6), en conjunto con el siguiente Teorema resuelve el problema de determinar si una clase en $\mathcal{M}(T_2)$ es periódica, pseudo-Anosov o, reducible no periódica.

Teorema 4.9 Sea $D = D_{i_n}^{\epsilon_n} \dots D_{i_1}^{\epsilon_1} \in \mathcal{M}(T_2)$, donde $1 \leq i_k \leq 5$ y $\epsilon_k = \pm 1$

(i) Considerar $w = \Omega(D) = w_{i_n}^{\epsilon_n} \dots w_{i_1}^{\epsilon_1} \in \mathcal{M}_6(S^2)$

(ii) Considerar $w' \in K$ (i.e $\pi(w')(6) = 6$) obtenido potenciando y/o conjugando w

(iii) Aplicar el método de Reidemeister-Schreier para reescribir w' en términos de w_1, \dots, w_4 :

$$w' = w_{j_m}^{\epsilon'_m} \dots w_{j_1}^{\epsilon'_1}$$

donde $1 \leq j_k \leq 4$ y $\epsilon'_k = \pm 1$.

(iv) Considerar $\rho = \Gamma^{-1}(w') = \rho_{j_m}^{\epsilon'_m} \dots \rho_{j_1}^{\epsilon'_1} \in \mathcal{M}_5(D^2)$

Entonces:

D es una clase periódica si y sólo si ρ es una clase periódica,

D es una clase pseudo-Anosov si y sólo si ρ es una clase pseudo-Anosov y,

D es una clase reducible no periódica si y sólo si ρ es una clase reducible no periódica.

DEMOSTRACIÓN: Aplicar: Teorema 3.3, Lema 4.2 y, Teorema 4.8. \square

Ejemplo 1: Sea $D = D_5 D_4^{-1} D_3 D_4 D_2$

De donde: $w = \Omega(D) = w_5 w_4^{-1} w_3 w_4 w_2$ y $\pi(w) = (3\ 2\ 6\ 5)(4)(1)$.

Consideremos $w' = (w_4 w_5)^{-1} w (w_4 w_5) = w_5^{-1} w_4^{-1} w_5 w_4^{-1} w_3 w_4 w_2 w_4 w_5 \in K$

Aplicando Schreier-Reidemeister:

$$w' = w_4^3 w_3 w_2 w_1^2 w_2 w_3 w_2^{-1} w_1^{-2} w_2^{-1} w_3^{-1} w_4^{-2} w_2 w_4^{-1} w_3^{-1} w_2^{-1} w_1^{-2} w_2^{-1} w_3^{-1} w_4^{-1}$$

Para determinar el tipo de D es necesario aplicar el procedimiento descrito en 4.1.6 a la clase:

$$\rho = \rho_4^3 \rho_3 \rho_2 \rho_1^2 \rho_2 \rho_3 \rho_2^{-1} \rho_1^{-2} \rho_2^{-1} \rho_3^{-1} \rho_4^{-2} \rho_2 \rho_4^{-1} \rho_3^{-1} \rho_2^{-1} \rho_1^{-2} \rho_2^{-1} \rho_3^{-1} \rho_4^{-1}$$

Ejemplo 2: Sea $D = D_1 D_2^{-1} D_5$. De donde $w = \Omega(D) = w_1 w_2^{-1} w_5$ y $\pi(w) = (5\ 6) \circ (1\ 2\ 3)$

Consideremos $w' = w^2 = (w_1 w_2^{-1})^2 w_5^2$

Aplicando Schreier-Reidemeister obtenemos:

$$w' = (w_1 w_2^{-1})^2 w_4^{-1} w_3^{-1} w_2^{-1} w_1^{-2} w_2^{-1} w_3^{-1} w_4^{-1}$$

De donde

$$\rho = (\rho_1 \rho_2^{-1})^2 \rho_4^{-1} \rho_3^{-1} \rho_2^{-1} \rho_1^{-2} \rho_2^{-1} \rho_3^{-1} \rho_4^{-1}$$

Sea β_ρ la trenza asociada a ρ :

$$\beta_\rho = (\sigma_2^{-1} \sigma_1)^2 \sigma_4^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-2} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1}$$

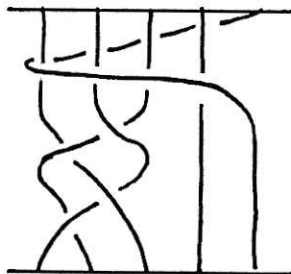


Figura 4.8:

Gráficamente verificamos que β_ρ es coherente con el bloque $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5\}\}$ (figura 4.8).

De donde, ρ es una clase reducible (4.1.6). Y aplicando el Teorema 4.4 (i), obtenemos que ρ no es una clase periódica. Concluimos que D es una clase reducible no periódica en $\mathcal{M}(T_2)$.

4.2.5 Problema de palabras y periodicidad en $\mathcal{M}(T_2)$

El problema de verificar si un elemento de $\mathcal{M}(T_2)$ es una clase periódica se convierte, a través del procedimiento anteriormente descrito y de los resultados de Benardete, Gutierrez, y Nitecki (4.1.6), en un problema de palabras en $\mathcal{B}_5(D^2)$. Nos preguntamos si verificar que una clase de $\mathcal{M}(T_2)$ es un elemento de orden finito es equivalente a resolver el problema de palabras en $\mathcal{M}(T_2)$.

Consideremos un elemento $D \in \mathcal{M}(T_2)$. Entonces D es una clase periódica si y sólo si $w = \Omega(D)$ es una clase periódica en $\mathcal{M}_6(S^2)$ (Teorema 3.3). Además, w es un elemento de orden finito de $\mathcal{M}_6(S^2)$ si y sólo si $w^{ord \pi(w)} = 1$ en $\mathcal{M}_6(S^2)$ (Corolario 3.1) y, por lo tanto, D es una palabra periódica si y sólo si $D^{ord \pi(w)} = 1$ o $[i]$, donde i es la involución del bitoro definida en 2.2.3 (la permutación $\pi(w)$ se calcula fácilmente a partir de una palabra $D_{i_n}^{\epsilon_n} \dots D_{i_1}^{\epsilon_1}$ que representa a D , ya que, $\pi(w) = (i_n \ i_n + 1) \circ \dots \circ (i_1 \ i_1 + 1)$). Concluimos que si existe un algoritmo para decidir cuando dos palabras representan el mismo elemento de $\mathcal{M}(T_2)$, entonces existe un algoritmo para verificar periodicidad.

Inversamente, si D contiene un homeomorfismo periódico y D actúa trivial-

mente en la homología ($D_* = I$), entonces $D = 1$, ya que el único homeomorfismo periódico que actúa trivialmente en la homología es la identidad (3.3.4).

Así, el problema de palabras es equivalente, módulo multiplicar matrices o permutaciones, al problema de verificar si un elemento de $\mathcal{M}(T_2)$ contiene un homeomorfismo periódico.

A continuación daremos algunos criterios algebraicos que pueden evitar algunos cálculos, al intentar verificar periodicidad de un elemento de $\mathcal{M}(T_2)$.

Consideremos $D = D_{i_n}^{\epsilon_n} \dots D_{i_1}^{\epsilon_1} \in \mathcal{M}(T_2)$, definimos:

$$\pi(D) = (i_n \ i_n + 1) \circ \dots \circ (i_1 \ i_1 + 1)$$

$$wt(D) \equiv \epsilon_n + \dots + \epsilon_1 \pmod{10}$$

Tanto $\pi(D)$ como $wt(D)$ están bien definidas, ya que, las relaciones que definen a $\mathcal{M}(T_2)$ tienen asociadas la permutación trivial y suma exponencial múltiplo de 10.

Proposición 4.2 Sea $D = D_{i_n}^{\epsilon_n} \dots D_{i_1}^{\epsilon_1} \in \mathcal{M}(T_2)$:

- (i) Si $\pi(D)$ deja más de 2 y menos de 6 símbolos fijos o, no es producto de ciclos del mismo largo, entonces D no es una clase periódica.
- (ii) Si $\text{ord } \pi(D) \cdot wt(D) \not\equiv 0 \pmod{10}$, entonces D no es una clase periódica.
- (iii) Si $D_*^{\text{ord } \pi(D)} \neq \pm I$, entonces D no es una clase periódica.

DEMOSTRACIÓN: (i) $\pi(D) = \pi(\Omega(D))$, si D es una clase periódica entonces $\Omega(D) \in \mathcal{M}_6(S^2)$ es una clase periódica (Teorema 3.3), y los homeomorfismos periódicos de la esfera con 6 agujeros inducen permutaciones que dejan a lo más 2 símbolos fijos y son producto de ciclos del mismo largo. (ii) y (iii) Si D es una clase periódica, entonces $\Omega(D)^{\text{ord } \pi(D)} = 1$ en $\mathcal{M}_6(S^2)$, por lo tanto, $D^{\text{ord } \pi(D)} = 1$ o $[i]$ en $\mathcal{M}(T_2)$, de donde, $wt(D^{\text{ord } \pi(D)}) \equiv 0 \pmod{10}$ y $D_*^{\text{ord } \pi(D)} = \pm I$. \square

Ejemplo 1: Sea $D = D_5 D_4^{-1} D_3 D_4 D_2$, entonces $\pi(D) = (3 \ 2 \ 6 \ 5)(4)(1)$. De donde, aplicando la Proposición anterior (ii), se concluye que D no es una clase periódica.

Ejemplo 2: Sea $D = D_1 D_2 D_3^{-1} D_4^{-1} D_5$, entonces, $\pi(D) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$. De donde, aplicando la Proposición anterior (ii), se concluye que D no es una clase periódica.

Ejemplo 3: Sea $D = D_1^3 D_3 D_5^2 D_2^{-1} D_4^{-1}$, entonces $\pi(D) = (1\ 2\ 4\ 5\ 3)$. De donde $\text{ord } \pi(D) \cdot \text{wt}(D) \equiv 0 \pmod{10}$. Sin embargo $D_*^5 \neq \pm I$ y, concluimos que D no es una clase periódica. De hecho, D es una clase pseudo-Anosov, ya que, D es un ejemplo de Penner (Corolario 4.1).

Bibliografía

- [1] Ahlfors, L. V., *On quasiconformal mappings*, J. Analyse Math. (1953–54), 1–58.
- [2] Ahlfors, L. V. y Sario, L., *Riemann Surfaces*. Princeton Univ. Press 1960.
- [3] Artin, E., *Theorie der Zöpfe*, Hamburg Abh. 4 (1925), 47–72.
- [4] Artin, E., *Theory of Braids*, Ann. of Math. 45 (1947), 101–126.
- [5] Benardete, D., Gutierrez, M. y Nitecki Z., *Braids and the Nielsen–Thurston Classification*, preprint (1991).
- [6] Bers, L., *An extremal problem for quasiconformal mapping and a Theorem by Thurston*, Acta Math. 141 (1978), 73–98.
- [7] Birman, J., *Braids, Links, and the Mapping Class Group*. Princeton Univ. Press, 1974.
- [8] Birman, J., *A normal form in the homeotopy group of a surface of genus 2, with applications to 3-manifolds*. Proc. AMS. 48 (1972), 379–384.
- [9] Casson, A. y Bleiler, S., *Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston*. London Math. Soc. Students Texts 9, Cambridge Univ. Press, 1988.
- [10] Eilenberg, S., *Sur les transformation périodiques de la surface de la sphère*, Fund. Math. 22 (1934), 28–41.
- [11] Elrifai, E. A. y Morton, H. R., *Algorithms for positive braids*, preprint (1990).

- [12] Fadell, E. y Van Buskirk, J., *The braid group of E^2 and S^2* , Duke Math. Jnl. 29 (1962), 243–258.
- [13] Farkas, H. M. y Kra, I., *Riemann Surfaces*, GTM., Springer-Verlag, 1980.
- [14] Fathi, A., Laudenbach, F. y Poénaru, V., *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque 66–67 (1979).
- [15] Garside F. A., *The Braid Group and other groups*, Quart. J. Math. Oxford 20 (1969), 235–254.
- [16] Greenberg, M., *Lectures on Algebraic Topology*. W. A. Benjamin Inc., 1966.
- [17] Gillette, R. y Van Buskirk, J., *The word problem and consequences for the braid groups and the mapping class group of the 2-sphere*, Tran. AMS. 131 (1968), 277–296.
- [18] Hubbard, J. y Masur, H., *Quadratic differentials and foliations*, Acta Math. 142 (1979), 221–274.
- [19] Kerchoff, S., *The Nielsen Realization Problem*, Ann of Math. 117 (1983), 235–265.
- [20] Kerchoff, S., *The Nielsen Realization Problem*, Bull. AMS. 2 (1980), 452–454.
- [21] Lehto, O., *Univalent Functions and Teichmuller Spaces*, GTM., Springer-Verlag, 1987.
- [22] Lyndon, R. y Schupp, P., *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, 1977.
- [23] Papadopoulos, A., *Difféomorphismes pseudo-anosov et automorphismes symplectiques de l'homologie*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4 serie t. 15 (1982), 543–546.
- [24] Palis, J. y De Melo, W., *Introducao aos sistemas dinamicos*, P. Euclides, 1978.
- [25] Penner, R.C., *A construction of pseudo-anosov diffeomorphisms*, Trans. AMS. 310 (1988), 179–197.

- [26] Poénaru, V., *Travaux de Thurston sur les difféomorphismes des surfaces et l'espace de Teichmüller*. Séminaire Bourbaki 1978/79, 529.
- [27] Thurston, W. P., *On the geometry and dynamycs of diffeomorphisms of the surfaces*, Bull. AMS. Vol 19 (1988).
- [28] Thurston, W. P., *Finite state algorithms for the braid group*, preprint (1989).
- [29] Zieschang, H., *Finite Groups of Mapping Classes of Surfaces*, LNM. # 875, Springer-Verlag, 1981.