H-FC
.A6-F
192

MECANICA CUANTICA SUPERSIMETRICA A PARTIR DE LA REPRESENTACION DE ESTADO FUNDAMENTAL Y SU EXTENSION A TEORIAS COVARIANTES GENERALES

Tesis

Entregada a la

Universidad de Chile

En cumplimiento parcial de los requisitos

Para optar al grado de

Magister en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias

por

Jorge Gamboa Ríos

Patrocinante : Dr. Jorge Zanelli

FACULTAD DE CIENCIAS
BIBLIOTECA
CENTRAL

1987

Facultad de Ciencias

Universidad de Chile

I N F O R M E   D E   A P R O B A C I O N

T E S I S   D E   M A G I S T E R

Se informa la Comisión de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la tesis de Magister presentada por el candidato:

JORGE GAMBOA RIOS

Ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Físicas:

Patrocinante de Tesis:

Dr. Jorge Zanelli ______________________

Comisión Informante de Tesis:

Dr. Roberto Hojman R. Hojman

Dr. Claudio Teitelboim Claudio Teitelboim

Dr. Jorge Alfaro ______________________

1 9 8 7

Dedico esta tesis a mis padres, Galvarino y Bernarda. La formación que ellos me dieron y la perserverancia que a lo largo de sus vidas han mostrado, han sido cruciales para que siga en la física.

A mi hijo Felipe, le entrego esta tesis como testimonio de lo que le espera (¿?).

Agradecimientos

Me gustaría dejar constancia de mi profunda gratitud a mi esposa lizabeth, por su comprensión y apoyo.

Agradezco a mi amigo Jorge Zanelli, quién me dirigió en este tra-ajo. Mis agradecimientos los extiendo no sólo porque su ayuda crítica (aun-ue siempre amistosa) fué útil para que terminara esta tesis, sino también or sus continuas muestras de amistad (y solidaridad). En gran parte, fué orge y Ely quienes más me impulsaron a seguir en ésto, cuando a veces, me altaron fuerzas.

Roberto Hojman, fué otra persona importante que influyó en esta tesis, también le expreso mi gratitud aquí.

Expreso también mi gratitud a mi amigo Rafael Rosende por su buena voluntad para sugerirme cambios en la presentación de algunos párrafos y escribirme los apéndices.

A mi hermana Lorena, le agradezco el inmenso sacrificio que hizo para mecanografiarme rápidamente el texto.

Finalmente agradezco al Centro de Estudios Científicos de Santiago (CECS) y especialmente a Claudio Teitelboim por la hospitalidad y excelentes condiciones de trabajo que siempre me han brindado allí.

RESUMEN

En esta tesis se estudia la extensión supersimétrica de una teoría cuántica bosónica desde el punto de vista de la representación de estado fundamental. El análisis se realiza proponiendo un ansatz para los generadores de supersimetría, que resulta ser dinámicamente más rico que la definición estándar. Demostramos que el teorema de Gozzi no es válido en tres dimensiones a menos que, un término de acoplamiento de spín-órbita sea sumado al hamiltoniano bosónico del sistema.
En la segunda parte de esta tesis, se argumenta que el anzats propuesto, puede considerarse una prescripción para supersimetrizar teorías covariantes generales en analogía con mecánica cuántica supersimétrica. Se ilustra esta idea con dos ejemplos; a) la partícula relativista b) la cuerda relativista. Se demuestra que la prescripción conduce a la supersimetrización correcta de los sistemas considerados y se obtienen las superálgebras correspondientes.

Se discute también brevemente, la conexión entre nuestro método, el de la raiz cuadrada y el mapa de Nicolai. Damos también una interpretación estocástica del mapa de Nicolai para el caso de teorias covariantes generales.

INDICE

INTRODUCCION

Supersimetría es una simetría que fue descubierta hace unos quince años, primeramente en el contexto de los modelos duales /1/ y luego reinterpretada y extendida a teorías de campos /2/.

La interpretación corriente de supersimetría, consiste en postular la existencia de multipletes mixtos de bosones y fermiones en cantidades iguales y con la misma masa.

Históricamente, el interés por supersimetría se originó por las muchas propiedades notables de esta clase de teorías; por ejemplo, para algunas teorías de campos supersimetría mejora la renormalizabilidad. Supersimetría también permite la introducción de simetrías locales (Yang-Mills) /3/.

Desde un punto de vista más formal, supersimetría es la única extensión consistente con teoría cuántica de campos que unifica simetrías espacio-temporales con simetrías internas /4/ y desde el punto de vista algebraico generaliza las simetrías con grupos de Lie a supergrupos /5/.

Sin embargo, a pesar de todas estas propiedades notables, los multipletes supersimétricos no han sido observados y esto hace pensar que supersimetría es una simetría rota.

Varios mecanismos de rompimiento de supersimetría han sido propuestos en la literatura /6,7/. Un criterio particularmente promisorio fue propuesto por Witten /8/, el cual se reduce esencialmente al cálculo de un invariante topológico, conocido ahora como índice de Witten.

En la práctica, este índice es muy difícil de calcular /8,9/. Por esta razón, Witten propuso en su artículo /8/ un modelo no trivial de mecánica cuántica supersimétrica (MQSS) donde el índice, para cierta clase de potenciales, se puede determinar y así discriminar si la supersimetría está rota o no.

Sin embargo, se ha descubierto que más allá del interés original del modelo de Witten, MQSS posee un amplio rango de aplicación en diversas áreas de la Física /10,12/ y de la Matemática /13/. A pesar de estos estudios, la conexión existente entre mecánica cuántica ordinaria y MQSS, sólo ha sido estudiada recientemente a partir de los trabajos de Gozzi.

Gozzi en la ref. /14/, observó que si un sistema bosónico unidemensional posee un estado fundamental normalizable, entonces, las funciones de correlación vacío-vacío asociadas al sistema cuántico ordinario y al sistema supersimétrico son iguales. Esto muestra que la mecánica cuántica ordinaria unidimensional posee una supersimetría oculta. /14/. De esta manera, es razonable preguntarse si los resultados de Gozzi siguen persistiendo en dimensiones superiores y si es posible construir otras clases de teorías supersimétricas a partir de un sistema bosónico dado.

El propósito de esta tesis es responder a estas preguntas.

En el primer capítulo, después de una breve revisión de MQSS, extendemos los resultados de Gozzi a MQSS en tres dimensiones. Demostramos que la construcción de Gozzi es válida en tres dimensiones sólo si se suma un término de acoplamiento de spín-órbita al hamiltoniano bosónico del sistema. Este resultado /15/ es una generalización natural de la ref. /14/.

En el segundo capítulo, proponemos que el anzats para los generadores de supersimetría, puede explotarse como una prescripción para supersimetrizar teorías covariantes generales. Esta idea la aplicamos a dos ejemplos que son : a)la partícula relativista (en un campo escalar externo, en un campo de gauge y en un fondo espacio- temporal curvo) y b) la cuerda relativista. Demostramos que la prescripción conduce a las teorías supersimétricas esperadas. Hacemos notar también que la cuerda relativista, al igual que un oscilador armónico en mecánica cuántica ordinaria, está naturalmente en la representación de estado fundamental. Esto permite calcular explícitamente el estado fundamental de la cuerda bosónica.

Finalmente en el capítulo III establecemos una relación entre nuestro método, el de la raiz cuadrada y damos una interpretación estocástica del mapa de Nicolai.

CAPITULO I

1.1.- Mecánica cuántica supersimétrica y la representación del estado fundamental.

Antes de estudiar la conexión entre mecánica cuántica ordinaria y MQSS revisaremos brevemenete esta última.

MQSS es el estudio de sistemas para los cuales existe una supercarga $\hat{Q}$ que es la "raiz cuadrada" del hamiltoniano. Si $\hat{Q}$ y $\hat{Q}^+$ son las supercargas del sistema, entonces el hamiltoniano es,

$$\hat{H}_S = \frac{1}{2}\{\hat{Q}, \hat{Q}^+\} \tag{1.1}$$

donde $\{\ \}$ denota el anticonmutador de las dos variables dinámicas. Debido al carácter fermiónico de las Q's se cumple también que

$$\hat{Q}^2 = 0 = \hat{Q}^{+2} \tag{1.2}$$

y por consiguiente

$$[\hat{Q}, \hat{H}_S] = 0 = [\hat{Q}^+, \hat{H}_S] \tag{1.3}$$

i.e las supercargas $\hat{Q}$ y $\hat{Q}^+$ generan transformaciones de simetría. Los operadores $\hat{Q}$, $\hat{Q}^+$ y $\hat{H}_S$ constituyen un álgebra gra dada y el conjunto de relaciones (1.1)-(1.3) definen un sistema que llamaremos MQSS /8,16,17,18/.

La forma explícita de las supercargas depende naturalmente del modelo. Para el modelo de Witten estas son:*

$$\hat{Q}^{+} = (p + iW)\psi^{+}$$
$$\hat{Q} = (p - iW)\psi \qquad (1.4)$$

donde ψ y ψ^{+} son espinores que satisfacen

$$\{\psi, \psi^{+}\} = 1$$
$$\{\psi, \psi\} = 0 = \{\psi^{+}, \psi^{+}\} \qquad (1.5)$$

Usando (1.4) y (1.1), se ve fácilmente que Hs es

$$\hat{H}_S = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}W'^2(x) - \frac{1}{2}[\psi^{+}, \psi]W''(x) \qquad (1.6)$$

(1.6) puede ser diagonalizado si se escoge la siguiente representación matricial para los espinores

$$\psi = \sigma_{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \psi^{+} = \sigma_{+} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.7)$$

---

* A lo largo de la tesis, siempre trabajamos con unidades tales que m=c= =e=1, excepto cuando se diga explícitamente lo contrario.

En esta representación (1.6) es

$$\hat{H}_S = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2} W'^2(x) - \frac{1}{2}\sigma_3 W''(x) \tag{1.8}$$

$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Es sabido de mecánica cuántica ordinaria /19/, que cualquier sistema cuántico bosónico con un hamiltoniano de la forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + U(x) \tag{1.9}$$

en una dimensión se puede escribir en "la representación de estado fundamental"

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2} W'^2(x) - \frac{1}{2} W''(x) \tag{1.10}$$

donde $W = -\log\psi_0$, siendo ψ_0 la función de onda del estado fundamental /20-22/.

Usando esta representación, Gozzi/14/ investigó la relación entre (1.8) y (1.9) para el caso unidimensional. Sus resultados se reducen, esencialmente, al siguiente teorema: Las funciones de correlación vacío-vacío para (1.8) y (1.9) son idénticas.

1.2 Teorema de Gozzi en tres dimensiones

En este primer capítulo, demostramos que en tres dimensiones la construcción de Gozzi conduce a que si se agrega a (1.9) un término de acoplamiento de spín-órbita adecuado, este sistema cuántico tendría una "supersimetría oculta", esto es $Z[J] = Z_S[J]$.

Consideremos un sistema cuántico bosónico, descrito por el siguiente hamiltoniano en tres dimensiones

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}^2 + U(\vec{r}) \qquad (1.11)$$

Es bien sabido de mecánica cuántica /19,23/, que siendo (1.11) un operador elíptico, el estado fundamental no tiene modos; esto significa que la función de onda ψ_0 no cambia de signo y por consiguiente podemos escribirla en la forma

$$\psi_0 = e^{-V} \qquad (1.12)$$

donde V es una función real (aquí hemos omitido una constante de normalización, la cual es irrelevante para nuestros fines).

En el estado fundamental, la ecuación de Schrödinger para el sistema (1.11) es

$$\hat{H}\psi_0 = E_0\psi_0 \tag{1.13}$$

si reemplazamos (1.12) en (1.13), obtenemos una ecuación en la que podemos despejar $u(\Lambda)$ algebraicamente en términos de la función V, y por consiguiente, (1.11) se puede escribir en la forma

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}^2 + \frac{1}{2}\left((\vec{\nabla}V)^2 - \vec{\nabla}^2 V\right) + E_0 \tag{1.14}$$

si definimos

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= \vec{\nabla} + \vec{\nabla}V \\ \vec{Q}^{+} &= -\vec{\nabla} + \vec{\nabla}V \end{aligned} \tag{1.15}$$

se ve fácilmente que (1.14) es

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} Q_i^{+} Q_i \\ \tilde{H} &= \hat{H} - E_0 . \end{aligned} \tag{1.16}$$

El hamiltoniano (1.11) escrito en la forma (1.16) (o 1.14), está en la representación de estado fundamental.

El paso siguiente en nuestra construcción es la supersimetrización del sistema (1.16), de manera que satisfaga el álgebra de supersimetría (1.1)-(1.3)

Definimos las supercargas en la forma

$$\hat{\mathcal{Q}} = \hat{Q}_i \sigma^i \otimes \tau_-$$
$$\hat{\mathcal{Q}}^+ = \hat{Q}_i^+ \sigma^i \otimes \tau_+ \qquad (i = 1,2,3) \tag{1.17}$$

$$\tau_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \tau_+ = \tau_-^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

las cuales generalizan (1.4)

Este ansatz también fue propuesto independientemente por Ui /24/, aunque en un contexto diferente al presentado aquí.

Las supercargas (1.17) satisfacen las propiedades de nilpotencia y son también constantes de movimiento si $\hat{H}_S$ es definido por (1.1). En (1.17), las σ_i, son matrices de Pauli.

Usando (1.1), el hamiltoniano supersimétrico es:

$$\hat{H}_s = \frac{1}{2}(\tau_+\tau_-) \otimes \left[\delta^{ij} \mathbb{1}_{2\times2} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k\right] \hat{Q}_i^+ \hat{Q}_j + \tag{1.18}$$
$$+ \frac{1}{2}(\tau_-\tau_+) \otimes \left[\delta^{ij} \mathbb{1}_{2\times2} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k\right] \hat{Q}_i \hat{Q}_j^+$$

El primer y tercer término en (1.18), dan la generalización ingenua a tres dimensiones del resultado de Gozzi, i.e

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \hat{Q}_i^+ \hat{Q}_i & \\ & \hat{Q}_i \hat{Q}_i^+ \end{pmatrix}$$

notemos, sin embargo, que aparecen términos adicionales. Uno de ellos es

$$\frac{i}{2}\,\epsilon^{ijk}\,\sigma^{k}\,\hat{Q}_i^{+}\,\hat{Q}_j$$

el cual se puede escribir como

$$i(\vec{\nabla}V \times \vec{\nabla})\cdot\vec{\sigma}$$

y por consiguiente, el hamiltoniano completo es

$$\hat{H}_s = \frac{1}{2}\{\hat{\mathcal{Q}}^{+},\hat{\mathcal{Q}}\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \hat{Q}_i^{+}\hat{Q}_i & \\ & \hat{Q}_i\hat{Q}_i^{+} \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} \vec{S}\cdot(\vec{\nabla}V\times\vec{P}) & \\ & -\vec{S}\cdot(\vec{\nabla}V\times\vec{P}) \end{pmatrix} \qquad (1.1$$

donde se ha identificado el operador de spin $\vec{S}$ como

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$$

Para el caso particular de fuerzas centrales $U(r)$ y por consiguiente $V = V(r)$, de modo que (1.19) se puede escribir como

$$H_s = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\otimes\left[\frac{1}{2}Q_i^{+}Q_i - \frac{2}{r}\frac{dV}{dr}\vec{L}\cdot\vec{S}\right] + \\ + \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\otimes\left[\frac{1}{2}Q_iQ_i^{+} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr}\vec{L}\cdot\vec{S}\right]. \qquad (1.20)$$

El estado

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} e^{-V} \\ 0 \end{pmatrix}$$

es por construcción aniquilado por $\hat{\not{Q}}$ y $\hat{\not{Q}}^{+}$, i.e

$$\begin{aligned} \not{Q}\psi_0 &= 0 \\ \not{Q}^{+}\psi_0 &= 0 \end{aligned} \tag{1.21}$$

por lo tanto ψ_0 es aniquilado también por H_S. Ya que H_S es positivo semidefinido por construcción, ψ_0 es necesariamente el estado fundamental del sistema (ya que la energía del estado fundamental es cero, la supersimetría no está espontáneamente rota).

Siguiendo a Gozzi /14/, la función de correlación vacío-vacío para el hamiltoniano (1.11), es la misma en una dimensión que la de su extensión supersimétrica, y por lo tanto, las teorías cuánticas son indistinguibles. En nuestro caso, el resultado es que la función correlación vacío-vacío para el sistema supersimétrico;

$$Z_S[J] = \int \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\psi^{+}\, \mathcal{D}\vec{x}\; e^{-\int_{-\infty}^{+\infty} dt\,[H_S(x,p_x,\psi) + J\cdot x]}$$

es la misma que la del sistema descrito por el hamiltoniano bosónico

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\nabla^2 + U(r) - \frac{2}{r}\frac{dV}{dr}\vec{L}\cdot\vec{S} \tag{1.22}$$

así, el sistema supersimétrico (1.20) es indistiguible del (1.22), pero difiere del sistema (1.11) debido al término de acoplamiento de spin-órbita

$$W = -\frac{2}{r}\frac{dV}{dr}\vec{L}\cdot\vec{S} \tag{1.23}$$

Desde este punto de vista, el resultado de Gozzi puede ser visto como una consecuencia del hecho que en una dimensión el spin y momentum angular no existen.

1.3.- Ejemplos

Para terminar este capítulo, comprobaremos los resultados que dan mecánica cuántica ordinaria y supersimétrica para dos ejemplos que poseen solución exacta y el estado fundamental es conocido. Estos ejemplos son el átomo de hidrógeno y el oscilador armónico esférico.

Para mecánica cuántica ordinaria, el acoplamiento de spin orbita es /25/

$$\hat{H}_{L-S} = \frac{\hbar^2}{2mc^2}\frac{1}{r}\frac{du}{dr}\vec{L}\cdot\vec{S} \tag{1.24}$$

e introduciendo todas las constantes respectivas en (1.23) (que antes habian sido puestos iguales a uno), se tiene

$$\hat{W}_{L-S} = \frac{-\hbar^2}{m}\frac{2}{r}\frac{dV}{dr}\vec{L}\cdot\vec{S} \tag{1.25}$$

Antes de seguir, observemos que el origen de (1.24) es completamnete distinto al de (1.25). (1.24) proviene d la interacción de un momento magnético $\vec{\mu} = \frac{e}{mc}\vec{S}$, con un campo magnético igual a $\vec{B} = -\frac{\vec{v}}{c} \times \frac{1}{e}\vec{\nabla}\mathcal{U}$ en el sistema en reposo de una partícula de carga e con spin $\vec{S}$. En tanto que (1.25) es una exigencia de supersimetría.

Para el caso del átomo de hidrógeno,

$$\mathcal{U} = -\frac{e^2}{r} \quad \text{y} \quad V = \frac{r}{2a_0}$$

$(a_0 = \hbar/me^2)$

Comparando los valores de expectación de (1.24) y (1.25) se tiene:

$$\langle H_{L-S} \rangle = \alpha^2 \left(\frac{k_\ell}{4m}\right) \langle W_{L-S} \rangle \tag{1.26}$$

donde α es la constante de estructura fina, $k_\ell = [\ell(\ell+1)(\ell+\frac{1}{2})]$ $m = 1, 2, 3, \ldots$, $\ell = 0, 1, \ldots, m-1$.

Esto demuestra, que esta supersimetría particular no puede ser acomodada por el término de acoplamiento de spin-órbita estándar del átomo de hidrógeno. Para este caso, la violación de supersimetría para los estados excitados más bajos, es de cuatro ordenes de magnitud mayor que la separación de estructura fina observada.

Reciéntemente Kostelecky y Nieto /26/ han examinado este último problema desde el punto de vista del resultado de Gozzi /14/, ellos consideran la extensión supersimétrica de la ecuación radial solamente, la cual por el teorema de Gozzi, debería reproducir el espectro del átomo de hidrógeno, sin embargo esta extensión, no es verdaderamente tridimensional y por consiguiente no da cuenta del acoplamiento de spin-órbita.

Este resultado, no excluye que no puedan encontrarse sistemas supersimétricos a nivel de física atómica. En efecto, se pueden considerar espectros asociados a distintos átomos los cuales se relacionen entre sí por una transformación de supersimetría, estos sistemas forman parejas (o multipletes) de átomos supersimétricos. Esta posibilidad, ha sido considerada también por Kostelecky y Nieto en un artículo posterior /27/; para una revisión reciente ver /28/.

Un cálculo similar puede hacerse para el oscilador armónico esférico. En este caso el potencial es

$$U = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

$$V = \frac{m\omega}{2\hbar} r^2$$

por consiguiente

$$\langle H_{L-S} \rangle = \frac{\frac{1}{2}\hbar\omega}{2mc^2} \langle W_{L-S} \rangle$$

por lo tanto, una partícula cargada en un potencial armónico esférico, podría ser supersimétrico si la separación entre los niveles de energía es suficiente para crear un par.

CAPITULO II

2.1.- Extensión a teorías covariantes generales

En el capítulo anterior mostramos, con un ejemplo simple, la extensión del teorema de Gozzi /14/ a tres dimensiones. La construcción se hizo generalizando el anzats de /14/ para los generadores de supersimetría.

En este capítulo, consideraremos el anzats para las supercargas propuesto en el Cap. I como una prescripción para supersimetrizar teorías hamiltonianas.

Investigaremos la validez de esta prescripción para el caso de teorías covariantes generales, i.e teorías que debido a la invariancia bajo reparametrizaciones temporales, poseen un hamiltoniano nulo y por consiguiente, este puede ser escrito como una combinación lineal de los vínculos del sistema /29/. consideremos hamiltonianos de la forma

$$H=\int\sum_{a} N^{a}\chi_{a}\, d^{N}\xi = 0 \tag{2.1}$$

donde $a=\perp, 1, 2, 3, \ldots N \leq D-1$ y D es la dimensión del espacio tiempo.

Los vínculos $\mathcal{H}_a$ son suficientemente generales como para incluir sistemas covariantes generales tales como la partícula relativista, cuerdas, membranas, gravedad, etc. Los $\mathcal{H}_\perp$ son generadores de desplazamiento locales en la dirección temporal y los $\mathcal{H}_i$ restantes, son generadores de reparametrizaciones en las direcciones espaciales y no juegan ningún rol dinámico /29/.

La prescripción de Dirac /30/ para cuantizar sistemas hamiltonianos con vínculos, consiste en reemplazar la condición clásica $\mathcal{H}_a \approx 0$, por

$$\hat{\mathcal{H}}_a \psi = 0 \qquad (2.2)$$

donde $\hat{\mathcal{H}}_a$ son los operadores cuánticos asociados a las funciones clásicas $\mathcal{H}_a$. (2.2) es equivalente a una condición de selección de los estados físicos. El conjunto de ecuaciones (2.2) son llamadas ecuaciones de Wheeler-De Witt /31/.

La condición (2.2), claramente implica que

$$\hat{H} \psi = 0 \qquad (2.3)$$

y por consiguiente, todos los estados físicos de un sistema cuántico de este tipo, pueden pensarse como el estado fundamental de una teoría cuántica en $D+1$ dimensiones, donde la nueva dimensión es un tiempo ficticio λ ,

$$i \frac{d\psi}{d\lambda} = \hat{H}\psi = 0 \qquad (2.4)$$

Para el caso de teorías covariantes generales, $\hat{H}$ es un operador hiperbólico (debido a la signatura minkowskiana del espacio-tiempo) y no tiene sentido hablar del estado fundamental ya que el espectro de $\hat{H}$ no es superior ni inferiormente acotado.

Sin embargo, mediante una rotación de Wick, es posible transformar el operador $\hat{H}$ en un operador elíptico y la interpretación de (2.4) como una ecuación de Schrödinger tiene perfecta validez. En estas condiciones, el estado fundamental existe y el hamiltoniano puede ser escrito como $\hat{H} = \sum_a \int d^{\nu}\xi \, \nu^a \, Q^+_a Q_a$, o equivalentemente

$$\hat{\mathcal{H}}_a = \hat{Q}^+_a \hat{Q}_a \qquad (2.5)$$

(2.5) es la versión extendida para sistemas covariantes generales de la representación de estado fundamnetal. La supersimetrización de aquí en adelante es directa: se definen la cargas fermiónicas $\hat{\mathcal{Q}}_a$ de acuerdo con el anzats /32/

$$\hat{\mathcal{Q}}_a = \hat{Q}_a \hat{\zeta}_a \; , \quad \hat{\mathcal{Q}}^+_a = \hat{Q}^+_a \hat{\zeta}^+_a \qquad (2.6)$$

donde las variables fermiónicas $\hat{\zeta}_a$ pueden ser elegidas arbitrariamente y están sujetas sólo a que "$\hat{\mathcal{H}}_a^{s}$", $\hat{Q}_a$ y $\hat{Q}_a^+$ formen un álgebra de Lie gradada.

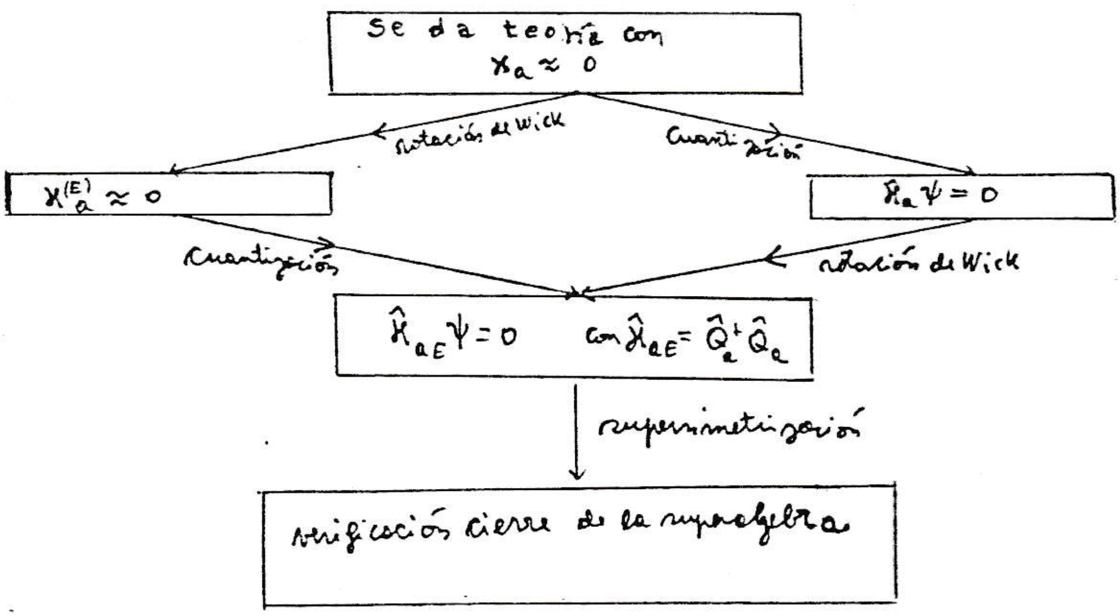
Los operadores de vínculos bosónicos (modificados), se encuentran imponiendo que la teoría fermiónica sea "la raiz cuadrada" de la teoría bosónica /33/, i.e

$$\delta_{ab}\hat{\mathcal{H}}^{s}_{a} = \frac{1}{2}\{\hat{Q}_a, \hat{Q}^+_b\} . \qquad (2.7)$$

La ecuación (2.7) puede considerarse una definición de $\hat{\mathcal{H}}_a^{s}$ y el problema siguiente es verificar si el conjunto de operadores de vínculos $\hat{\mathcal{H}}_a^{s}$, $\hat{Q}_a$ y $\hat{Q}_a^+$ forma una superálgebra cerrada

$$[\hat{\mathcal{H}}_{as}, Q_a] \sim Q_a , \ [\mathcal{H}_{as}, \mathcal{H}_{as}] \sim \mathcal{H}_{as} . \qquad (2.8)$$

A continuación resumimos el método de supersimetrización con el siguiente esquema:



En lo que sigue, resolveremos algunos ejemplos donde aplicamos el método delineado mas arriba. En primer lugar examinaremos la particula relativista de "masa variable" /34/ (la particula relativista moviéndose en un campo de Gauge y en fondo curvo se discuten en el apéndice B). Por último, en la sección 2.3 se analiza la cuerda de Nambu y su extensión supersimétrica según este método.

2.2.- Mecánica cuántica supersimétrica de la particula relativista

La supersimetrización y cuantización de la particula relativista ha sido extensivamente estudiada en la literatura /35-39/. Aquí demostramos como este problema puede ser reanalizado usando nuestro método.

Consideremos el vinculo hamiltoniano clásico asociado a una particula de "masa variable", después de la rotación de Wick se tiene

$$\mathcal{H}^E = \frac{1}{2}\left(P_\mu P_\mu + U^2(x)\right) \approx 0 \qquad (2.9)$$

(para una definición de las convenciones ver apéndice A) donde U es una función dada de x^μ. Siguiendo la discusión de la sección 2.1, la teoria cuántica que se obtiene de (2.9) es,

$$\hat{\mathcal{H}}^E \psi = 0 \qquad (2.10)$$

donde $\hat{\mathcal{H}}^E$ es el operador

$$\hat{\mathcal{H}}^E = \frac{1}{2}(\hat{P}_\mu \hat{P}_\mu + U^2(x)) \tag{2.11}$$

$P_\mu = -i\partial_\mu$ y $\hat{x}_\mu = x_\mu$ si usamos la representación de Schrödinger.

De acuerdo con la sección 2.1, si el operador (2.11) e elíptico, el estado fundamental es de la forma e^{-V} y por consiguiente (2.11) puede ser escrito como,

$$\hat{\mathcal{H}}^E = \frac{1}{2}\hat{Q}_\mu^{E+} Q_\mu^E \quad , \tag{2.12}$$

con

$$\begin{aligned} Q_\mu^E &= \partial_\mu + \partial_\mu V \\ Q_\mu^{E+} &= -\partial_\mu + \partial_\mu V \end{aligned} \tag{2.13}$$

donde U y V están relacionadas por la ecuación de Ricatti

$$\partial_\mu V \partial_\mu V - \partial_\mu \partial_\mu V = -U^2. \tag{2.14}$$

La supersimetrización puede hacerse definiendo las supercargas /40/

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Q}}^{(E)} &= \hat{Q}_\mu^E \gamma_\mu^{(E)} \otimes \tau_- \ . \\ \hat{\mathcal{Q}}^{(E)+} &= \hat{Q}_\mu^{E+} \gamma_\mu^{(E)} \otimes \tau_+ \ . \end{aligned} \tag{2.15}$$

Aquí las $\gamma^{(E)\mu}$ son matrices de Dirac euclidianas (apén dice A) y las $\tau_\pm$ son las matrices definidas en (1.7).

La condición de nilpotencia de las G_+ implica $\hat{Q}^{(E)2} = 0 = \hat{Q}^{(E)+2}$ y por lo tanto, si definimos el vínculo bosónico modificado en la forma

$$\hat{H}_S^E = \frac{1}{2} \left\{ \hat{Q}^{(E)+}, \hat{Q}^{(E)} \right\} \tag{2.16}$$

se tiene que $\hat{Q}^{(E)}$, $\hat{Q}^{(E)}$ y $\hat{H}_S^{(E)}$ satisfacen la siguiente superálgebra

$$\begin{gathered} \left\{ \hat{Q}^{(E)}, \hat{Q}^{(E)} \right\} = 0 = \left\{ \hat{Q}^{(E)+}, \hat{Q}^{(E)+} \right\} \\ \left[\hat{Q}^{(E)}, \hat{H}_S^{(E)} \right] = 0 = \left[\hat{Q}^{(E)+}, \hat{H}_S^E \right] \\ \left[\hat{H}_S^{(E)}, \hat{H}_S^{(E)} \right] = 0 \\ 2 \hat{H}_S^{(E)} = \left\{ \hat{Q}^{(E)}, \hat{Q}^{(E)+} \right\} \end{gathered} \tag{2.17}$$

si un estado ψ_0 es aniquilado por $\hat{Q}^{(E)}$ y $\hat{Q}^{(E)+}$, i.e

$$Q^{(E)} \psi_0 = 0 \tag{2.18a}$$

$$Q^{(E)+} \psi_0 = 0 \tag{2.18b}$$

entonces, la superálgebra (2.17) garantiza que ψ_0 será el estado fundamental de $\hat{H}_6^E$, i.e

$$\hat{H}_S^E \psi_0 = 0 \tag{2.19}$$

Las condiciones (2.18) y (2.19), pueden también ser vistas como un conjunto de vínculos implementados sobre la teoría cuántica por la prescripción de Dirac. El cierre de la superálgebra (2.17) garantiza que los vínculos $\hat{Q}$, $\hat{Q}^{(E)+}$ y $\hat{\mathcal{H}}_s^E$ son de primera clase y que, por consiguiente, pueden consistentemente imponerse sobre el espacio de Hilbert de la teoría cuántica. Contrariamente, si (2.19) posee una solución normalizable única, debe satisfacer (2.18) (y por lo tanto, la supersimetría no puede estar espontáneamente rota).

El vínculo $\hat{\mathcal{H}}_s^{(E)}$ se puede encontrar explícitamente sustituyendo (2.15) en (2.16), el resultado es

$$\hat{\mathcal{H}}_s^E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \hat{Q}_\mu^{E+}\hat{Q}_\mu^E - \sigma_{\mu\nu}\hat{L}_{\mu\nu} & \\ & \hat{Q}_\mu^E\hat{Q}_\mu^{E+} + \sigma_{\mu\nu}\hat{L}_{\mu\nu} \end{pmatrix} \qquad (2.20)$$

donde $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu^{(E)}, \gamma_\nu^{(E)}]$ y

$$\hat{L}_{\mu\nu} = \partial_\mu V \hat{P}_\nu - \partial_\nu V \hat{P}_\mu \qquad (2.21)$$

el término $\sigma_{\mu\nu}\hat{L}_{\mu\nu}$ es el análogo del acoplamiento de spín-órbita encontrado en el capítulo I.

El caso de la partícula relativista libre, puede formalmente resolverse tomando el límite $U \to m$ (este límite es singular ya que, estrictamente hablando, la función de onda del estado fundametal no es normalizable a menos que el sistema sea puesto en una caja, sin embargo, esto rompe la invariancia de Lorentz).

La ecuación de Ricatti (2.14) puede resolverse en este límite y su solución es $V=\pm k_\mu x_\mu$, con $k_\mu k_\mu = m^2$. Si formalmente tomamos $k_\mu = \frac{m}{4}\gamma_\mu$, las supercargas (2.15) son

$$\begin{aligned} \hat{Q}^{(E)} &= (\not{p} + m) \otimes \tau_- \\ \hat{Q}^{(E)+} &= (-\not{p} + m) \otimes \tau_+ \end{aligned} \qquad (2.22)$$

(2.22) reproduce el resultado esperado

$$\hat{H}^E_s = \frac{1}{2}\{\hat{Q}^{(E)}, \hat{Q}^{(E)+}\} = \frac{1}{2}(\hat{P}_\mu \hat{P}_\mu + m^2) \otimes \mathbb{1}_{2\times 2} \qquad (2.23)$$

el cual es el mismo que derivaron Galvao y Teitelboim /35/ en el límite clásico.

Para obtener la teoría física, tenemos que devolvernos al espacio de Minkowski, sin embargo esto tiene un problema técnico. En efecto, el operador es positivo semidefinido, i.e

$$\hat{H}^{(E)}_s \geq 0 \qquad (2.24)$$

sin embargo, cuando nos devolvemos al espacio de Minkowski, H^M_s no satisface esta propiedad, la razón es que las supercargas $\hat{Q}^{(E)}$ y $\hat{Q}^{(E)+}$ no se mapean en operadores hermíticos conjugados entre si debido al carácter complejo de la rotación de Wick.

$$\hat{\Phi}^{(E)} \longrightarrow \hat{\Phi}_M$$

$$\hat{\Phi}^{(E)+}_{E} \longrightarrow \hat{\tilde{\Phi}}_M \neq \hat{\Phi}^{+}_M$$

Por consiguiente, el operador $\mathcal{H}_S^M = \frac{1}{2}\{\Phi_M, \tilde{\Phi}_M\}$ no satisface (2.24), lo que por supuesto es correcto.

Finalmente, enfatizamos que para una partícula relativista en un campo escalar, el término de acoplamiento de spin-órbita es distinto de cero en general puesto que $\partial_\mu V \neq 0$ (cf.(2.21)) . Los casos de superpartículas moviéndose en campos de gauge y en fondos curvos se dan en el apéndice B.

2.3.- Mecánica cuántica supersimétrica de la cuerda relativista.

El segundo ejemplo de sistema covariante general que estudiaremos, es la cuerda relativista (para una definición de las convenciones ver la ref. /1/).

Una cuerda bosónica, es un objeto unidimensional que en su evolución temporal traza una superficie bidimensional en el espacio-tiempo. Los vínculos que generan reparametrizaciones de las coordenadas sobre esta trayectoria bidimensional son :

$$\mathcal{H}_{\perp}(\sigma) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{P}_\mu(\sigma)\,\mathcal{P}^\mu(\sigma) + X'_\mu(\sigma)\,X'^\mu(\sigma)\right) \approx 0 \qquad (2.25)$$

$$\mathcal{H}_1(\sigma) = \mathcal{P}_\mu(\sigma)\,X'^\mu(\sigma) \approx 0$$

donde $X^{\mu}(\sigma,\tau)$ especifica una configuración para la cuerda en un instante τ, $X'^{\mu}=\frac{\partial X^{\mu}(\sigma)}{\partial\sigma}$ y σ rotula los puntos sobre la cuerda ($-\pi\leq\sigma\leq\pi$). $\mathcal{P}_{\mu}(\sigma)$ es el momento canónico conjugado de $X_{\mu}(\sigma)$ y satisfacen la siguiente álgebra canónica,

$$\{X^{\mu}(\sigma),\mathcal{P}_{\nu}(\sigma')\}_{PP}=\delta^{\mu}{}_{\nu}\,\delta(\sigma,\sigma')$$
$$\{X^{\mu}(\sigma),X^{\nu}(\sigma')\}_{PP}=0=\{\mathcal{P}^{\mu}(\sigma),\mathcal{P}^{\nu}(\sigma')\}_{PP} \tag{2.26}$$

donde $\{\ \}_{PP}$ denota paréntesis de Poisson.

El espacio-tiempo en que se propaga la cuerda se supone plano con métrica $\eta_{\mu\nu}$=diag$(-,+\cdots\cdots+)$, $\mu,\nu=0,1\ldots D-1$ y D es la dimensión del espacio-tiempo.

La mecánica cuántica de la cuerda, se obtiene siguiendo las recetas usuales de cuantización: reemplazar variables dinámicas por operadores, paréntesis de Poisson por conmutadores y usando las reglas dadas en la sección 2.1. Así, el equivalente cuántico de los vínculos (2.25) es

$$\hat{\mathcal{H}}_{\perp}\,\Psi[x(\sigma)]=0$$
$$\hat{\mathcal{H}}_{1}\,\Psi[x(\sigma)]=0 \tag{2.27}$$

donde

$$\hat{\mathcal{H}}_{\perp}(\sigma)=\frac{1}{2}\left(\hat{\mathcal{P}}_{\mu}\hat{\mathcal{P}}^{\mu}+\hat{X}'_{\mu}\hat{X}'^{\mu}\right) \tag{2.28a}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{1}(\sigma)=\left[\mathcal{P}_{\mu}\,\hat{X}'^{\mu}\right] \tag{2.28b}$$

[ ] en (2.28b) indica alguna elección de ordenamiento de operadores para el producto $\hat{P}_r \hat{X}'^r$. Distintos ordenamientos difieren entre si, por cantidades de la forma "$\infty.0$", lo que, dependiéndo de la regularización que se elija puede tomar distintos valores.

En lugar de trabajar con $\hat{\mathcal{H}}_\perp$ y $\hat{\mathcal{H}}_1$, es más conveniente usar la combinación lineal $\hat{\mathcal{H}}_a = \hat{\mathcal{H}}_\perp + a\hat{\mathcal{H}}_1$ con $a=-1,+1$. Se verifíca que

$$\left[\hat{\mathcal{H}}_a(\sigma), \hat{\mathcal{H}}_b(\sigma')\right] = i\, a\, \delta_{ab} \left(\hat{\mathcal{H}}_a(\sigma) + \hat{\mathcal{H}}_a(\sigma')\right) \delta'(\sigma,\sigma') \tag{2.29}$$

donde se ha usado la regularización $\delta'(0)=0$.*

La mecánica cuántica (2.27) es equivalente a escribir

$$\hat{\mathcal{H}}_a \Psi\left[X(\sigma)\right] = 0 \tag{2.30}$$

que es el análogo, para la cuerda bosónica, de la ecuación de Schrödinger (ecuaciones de Wheeler-De Witt). Es

---

* Esta regularización, obviamente no es la única elección posible y debiera ser equivalente a cualquier otra que se use. Esta afirmación, es una conjetura que aún no ha sido aclarada del todo. Actualmente, sólo existen argumentos plausibles para justificarlo ver e.g la ref /41/.

notable observar, que los operadores $\mathcal{H}_a$ están naturalmente en la representación de estado fundamental, tal como ocurre con el hamiltoniano del oscilador armónico en mecánica cuántica no relativista. En efecto, en analogía con los operadores de "subida y bajada" del oscilador armónico podemos definir

$$\hat{Q}_{a\mu}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{P}_\mu(\sigma) + a\, x'_\mu(\sigma)\right) \qquad a=-1,+1 \tag{2.31}$$

estos operadores, satisfacen las relaciones de conmutación a tiempos-iguales

$$\left[\hat{Q}_{a\mu}(\sigma), \hat{Q}_{b\nu}(\sigma')\right] = i\, a\, \delta_{ab}\, \eta_{\mu\nu}\, \delta'(\sigma,\sigma') \tag{2.32}$$

es fácil verificar, que el operador $\hat{\mathcal{H}}_a$ puede escribirse en la forma

$$\hat{\mathcal{H}}_a(\sigma) = \hat{Q}^2_a(\sigma) \; . \tag{2.33}$$

De acuerdo con la regularización que estamos usando, (2.33) es una cantidad bien definida. Sin embargo, hacemos notar que si hubiesemos usado una regularización tal que $\delta'(0) \neq 0$, habría un término extra en el lado derecho de (2.33) proporcional a $\delta'(0)$ que jugaría el rol de energía de punto cero. Para la cuerda, esta energía sólo depende de la constante $\hbar$, y por es inobservable.

Para establecer una analogía aún más cercana a mecánica cuántica ordinaria, conviene discretizar el continuo de grados de libertad pasando a la representación de Fourier. Si definimos la transformada de Fourier de $\hat{Q}_{\mu a}(\sigma)$ por $Q_{\mu a m}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{+\pi}d\sigma\, e^{-im\sigma}\,\hat{Q}^{\mu}_{\mu a}(\sigma)$, entonces

$$\hat{Q}^{\mu}_{am}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{P}^{\mu}_{m}-iamx^{\mu}_{m}\right)=\hat{Q}^{\mu +}_{a-m} \qquad (2.34)$$

donde $P^{\mu}_{m}=-i\frac{\partial}{\partial x_{\mu -m}}$ con $m\in\mathbb{Z}$, se encuentra que las Q'_{Ω} satisfacen

$$\left[\hat{Q}^{\mu}_{am},\hat{Q}^{\nu}_{bm}\right]=a\delta_{ab}\,m\,\delta_{m,-m} \qquad (2.35)$$

Si tomamos la transformada de Fourier (2.33), se encuentra que

$$\hat{\mathcal{H}}_{am}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\hat{Q}^{+}_{a\mu(m-m)}\hat{Q}^{\mu}_{am} \qquad (2.36)$$

Es fácil verificar, que los operadores (2.36) satisfacen la siguiente álgebra de Virasoro

$$\left[\hat{\mathcal{H}}_{am},\hat{\mathcal{H}}_{bm}\right]=2(m-m)\,a\delta_{ab}\,\hat{\mathcal{H}}_{a(m+m)} \qquad (2.37)$$

Con la regularización empleada aquí, sería inconsistente suponer $\hat{\mathcal{H}}_{a_0}\psi_0=0$ con (2.36) y (2.37). No obstante, si insistimos en imponer la condición $\hat{\mathcal{H}}_{a_0}\psi_0=0$, es necesario renormalizar los vínculos por $\hat{\mathcal{H}}_{a_m}\to\hat{\mathcal{H}}_{a_m}-(ct)\delta_{m0}$ pero esto es equivalente a introducir una carga central en el álgebra (2.37).

Sin embargo, como veremos mas adelante, los generadores bosónicos $\hat{\mathcal{H}}^{s}_{2m}$ de la teoría supersimetrica, pueden satisfacer $\hat{\mathcal{H}}^{s}_{a_0}\psi_0=0$ sin necesidad de introducir cargas centrales en (2.37).

De la relación (2.35), se sigue que no hay ningún estado de la teoría que pueda ser aniquilado por todos los $\hat{Q}^{\mu'}_{a_m}\Lambda$ simultaneamente. En efecto, a lo más puede exigirse que la "mitad" de los Q'_Λ aniquilen un mismo estado. La restricción sobre el rango de m, es responsable que no todas las compomentes de Fourier de los vínculos aniquilen el vacío ψ_0. Así, no todos los vínculos de la teoría clásica se transforman en operadores que restringen el espacio Hilbert de la cuerda cuántica /1,42/.

Definimos el estado fundamental (o vacío) para la cuerda bosónica por:

$$\hat{Q}^{\mu}_{am}\psi_0 = 0 \tag{2.38}$$

Es fácil ver, que si se elije $(am)\geq o$ en (2.38), la ecuación se puede integrar y la función de onda del vacío para la cuerda es

$$\psi_0 = \tau^{a} \exp\left[-\sum_{m\geq o} m\, x^{\mu}_{m}\, x_{\mu-m}\right] \tag{2.39}$$

de modo que $\hat{Q}_{\mu a n}\psi_0 = 0$ si $(am) \in Z^{+}$

Observando (2.36) , podemos supersimetrizar la cuerda bosónica siguiendo los pasos sugeridos en la sección 2.1. Definimos las cargas fermiónicas en la representación de posición por $\mathcal{Q} \sim Q.\zeta$ donde las ζ's son variables fermiónicas hermíticas.

En la representación de Fourier las supercargas son

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Q}}_{am} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{Q}^{\mu}_{a(m-k)}\,\hat{\zeta}_{\mu a k} \\ \hat{\mathcal{Q}}^{+}_{am} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{Q}^{\mu}_{a(k-m)}\,\zeta^{+}_{\mu a k} \end{aligned} \tag{2.40}$$

donde las Q's son los operadores definidos en (2.34) y los operadores $\hat{\zeta}^{\mu}$'s satisfacen el álgebra

$$\{ \hat{\zeta}_{a\mu n}, \hat{\zeta}^{+}_{b\nu m} \} = a\, \delta_{ab}\, \eta_{\mu\nu}\, \delta_{nm} \tag{2.41a}$$

y la condición de realidad

$$\hat{\zeta}^{+}_{a\mu n} = \hat{\zeta}_{a\mu -n} \tag{2.41b}$$

Para encontrar la forma explícita del operador de vínculo bosónico supersimétrico, procedemos igual que antes. Definimos el vínculo bosónico de la teoría supersimétrica $\hat{\mathcal{H}}^{s}_{am}$ por el anticonmutador de las supercargas, i.e

$$\{ \hat{Q}_{an}, \hat{Q}^{+}_{bm} \} = a\, \delta_{ab}\, \hat{\mathcal{H}}^{s}_{a(n-m)} \tag{2.42}$$

donde un cálculo simple arroja (ver apéndice C)

$$\hat{\mathcal{H}}^{s}_{am} = \hat{\mathcal{H}}_{am} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (2k-m)\, \hat{\zeta}^{\mu}_{ak}\, \hat{\zeta}^{+}_{a\mu(k-m)} \tag{2.43}$$

El resto de la superálgebra , como se muestra en el apéndice D, tiene la forma

$$[\hat{\mathcal{H}}^{s}_{an}, \hat{Q}_{bm}] = 2a\, \delta_{ab} \left(m - \frac{n}{2}\right) \hat{Q}_{a(m+n)} \tag{2.44}$$

$$[\hat{\mathcal{H}}^{s}_{an}, \hat{\mathcal{H}}^{s}_{bm}] = 2a\, \delta_{ab}\, (m-n)\, \hat{\mathcal{H}}^{s}_{a(m+n)} \tag{2.45}$$

Las relaciones(2.42)-(2.45), muestran que el estado fundamental satisface

$$\hat{\varnothing}_{0m}\psi_0 = 0 \qquad (2.46)$$

$$\hat{\mathcal{H}}^{s}_{am}\psi_0 = 0 \qquad (2.47)$$

$(a\,m) \geq 0$

De la condición de realidad (2.41b), se obtiene

$$\hat{\varnothing}^{+}_{am} = \hat{\varnothing}_{a-m} \qquad (2.48)$$

de modo que $\varnothing$ y $\varnothing^{+}$ no son independientes y la superálgebra (2.42)-(2.45), es la del modelo de Ramond-Neveu-Schwarz/1/. Los índices k, ℓ (excepto sutilezas asociadas a las condiciones de borde) pueden ser enteros (modelo de Ramond) o semi enteros (modelo de Neveu-Schwarz).

En esta derivación de la cuerda supersimétrica es fácil ver que, sin necesidad de introducir una carga central en el álgebra , se tiene naturalmente

$$\hat{\mathcal{H}}^{s}_{a0}\psi_0 = 0 \qquad (2.49)$$

Esto no ocurre en las formulaciones usuales/1/; sin embargo, esta diferencia depende de la regularización usada y no debería manifestarse en la interpretación física de la teoría.

Como comentario final a esta sección, notemos la siguiente diferencia en el álgebra de las variables fermiónicas en MQSS y en la cuerda supersimétrica. Las variables de spin introducidas en la sección 1.2 satisfacen un álgebra del tipo

$$\{\zeta_i, \zeta_j^{+}\} = \delta_{ij} + C_{ij} \tag{2.50}$$

donde $C_{ij} = -C_{ji}$ es responsable del acoplamiento de spin-órbita. Análogamente, podríamos postular un álgebra similar para las variables de spin

$$\{\hat{\zeta}_{a\mu n}, \hat{\zeta}^{+}_{b\nu m}\} = a\,\delta_{ab}\,\delta_{nm}\,\eta_{\mu\nu} + C(a\mu n; b\nu m) \tag{2.51}$$

donde C es antisimétrico en $\mu \longleftrightarrow \nu$. Esto introduciría una acoplamiento del tipo spin-órbita en la cuerda fermiónica que no aparece en (2.43). Sin embargo, es fácil convencerse que el resto del álgebra (2.44)-(2.45) no se cierra a menos que $C = 0$. Esto nos permite argumentar que no existe acoplamiento de spin-órbita para una cuerda supersimétrica.

CAPITULO III

Representación de estado fundamental, la raiz cuadrada del hamiltoniano y la ecuación de Langevin.

En este capítulo discutiremos la relación del método presentado en las secciones anteriores, con el método de la raiz cuadrada /33,35/ y la relación con la ecuación de Langevin.

3.1.- La raiz cuadrada de $\hat{H}$

La conexión con el método de Teitelboim es muy simple, en nuestro caso, los generadores de supersimetría son nilpotentes y se construyen suponiendo la existencia del estado fundamental del sistema bosónico (aunque esto es una herramienta auxiliar, para justificar que el hamiltoniano-o el vínculo-se puede escribir en la forma $Q^{+}Q$).

Si $\hat{\mathcal{Q}}$ y $\hat{\mathcal{Q}}^{+}$ son generadores nilpotentes, entonces la combinación

$$\hat{\mathcal{S}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\mathcal{Q}} + \hat{\mathcal{Q}}^{+}\right) \tag{3.1}$$

también define un generador de supersimetría "real" cuyo cuadrado es

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{S}}^{2} &= \frac{1}{2}\hat{\mathcal{Q}}^{2} + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{Q}}^{+2} + \frac{1}{2}\{\hat{\mathcal{Q}}, \hat{\mathcal{Q}}^{+}\} \\ &= \frac{1}{2}\{\hat{\mathcal{Q}}, \hat{\mathcal{Q}}^{+}\} = \hat{\mathcal{H}}_{s}\end{aligned} \tag{3.2}$$

que es la idea que desarrollo originalmente Teitelboim (primera ref. en /33/), para obtener supergravedad como la raiz cuadrada de relatividad general.

Para el caso de la cuerda supersimétrica, los generadores de supersimetría (2.40) no son explícitamente nilpotentes*, sin embargo, se puede comprobar que en el caso $m=m=0$ (MQSS), el álgebra (2.42)-(2.44) efectivamente se reduce a la superálgebra de MQSS

$$\begin{aligned} \{Q, Q\} &= H_s \\ [H_s, Q] &= 0 = [H_s, H_s] \end{aligned} \qquad (3.3)$$

3.2.- Ecuación de Langevin y el mapa de Nicolai

Nicolai /43/ demostró el siguiente teorema: si $\mathcal{L}[\chi,\phi]$ es un lagrangeano para una teoría de campo supersimétrica, donde χ y ϕ son campos fermiónicos y bosónicos respectivamente. Entonces, existe una trasformación entre campos bosónicos (en general no-lineal y no-local)

$$\phi \rightarrow \xi[\phi] \qquad (3.4)$$

(mapa de Nicolai) tal que

---

* Es posible también, construir una cuerda fermionica con generadores de supersimetría nilpotentes, sin embargo, esta construcción es mas complicada que la presentada aquí por presencia de términos anómalos en el álgebra. La anomalía, se puede eliminar usando combinaciones adecuadas de (2.40), para una discusión sobre esto, ver /32/ y /42/. Estas combinaciones, son equivalentes a utilizar la representación nonilpotentes presentada aquí.

a) $\mathcal{L}_B = \xi^T M \xi + \text{divergencia total}$ (3.5)

donde M es un operador lineal.

y

b) $$\int \mathcal{D}\bar{\chi}\,\mathcal{D}\chi\, e^{-\int d^4x\,\mathcal{L}_F} = \det\left[\frac{\delta\xi}{\delta\phi}\right].$$ (3.6)

De esto, se deduce que la integral funcional (euclideana) de la teoría

$$Z = \int \mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\bar{\chi}\,\mathcal{D}\chi\, e^{-\int d^4x\,\mathcal{L}}$$ (3.7)

se puede escribir como una integral gaussiana,

$$Z = \int \mathcal{D}\xi\; e^{-\int d^4x\,\xi^T M \xi}$$ (3.8)

i.e en las nuevas variables ξ , la teoría es formalmente libre.

Este resultado presentado aquí formalmente, fue demostrado perturbativamente (en general) por Nicolai /43/ y no-perturbativamente por Cecotti y Girardello /44/ para algunos modelos. Estos últimos autores, también interpretaron físicamente este mapa en términos de una ecuación diferencial estocástica que coincide exactamente (al menos para MQSS) con la ecuación de Langevin.

El punto de partida de Cecotti y Girardello, consiste en observar, que para el caso de MQSS no relativista con el lagrangeano

$$L = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^{\,2} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}V)^2 + i\,\bar{\eta}\left(\frac{d}{dt} + \vec{\nabla}^2 V\right)\eta$$ (3.9)

existe el siguiente mapa de Nicolai

$$\vec{\xi} = \dot{\vec{x}} + \vec{\nabla}V$$ (3.10)

esta ecuación, puede también leerse como una ecuación de Langevin para $\vec{X}$, donde $\vec{\xi}$ representa el ruido blanco.

Si observamos la forma de (3.10), nos damos cuenta que los operadores $Q'\Omega$ que hemos estado usando en los capítulos anteriores, son justamente del tipo (3.10) en forma hamiltoniana.

Para escribir los operadores $Q'\Omega$ como ecuaciones de Langevin, es necesario poner el operador de momentum en términos de $\dot{x}_\mu$. Consideremos como primer ejemplo la partícula relativista en un campo escalar. Usando la ecuación de Heisenberg $\dot{\hat{f}} = i[\hat{f}, \hat{H}]$, se tiene en este caso que

$$\dot{x}_\mu = i\lambda \partial_\mu$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange. De aquí

$$Q_\mu = -\frac{i}{\lambda}\dot{x}_\mu + \partial_\mu V \qquad (3.11)$$

$$Q^+_\mu = \frac{i}{\lambda}\dot{x}_\mu + \partial_\mu V \qquad (3.12)$$

Las ecuaciones (3.11) y (3.12), claramente son ecuaciones de Langevin en el espacio euclidiano que describen la evolución temporal hacia el futuro y el pasado respectivamente.

De la misma manera, es posible calcular el análogo de (3.11) y (3.12) para la cuerda relativista. Para este caso, el hamiltoniano es la combinación lineal de todos los vínculos bosónicos,

$$\hat{H} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v_m \hat{\mathcal{H}}_{(+)m} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{v}_m \hat{\mathcal{H}}_{(-)m} \qquad (3.13)$$

si escogemos el gauge $N_m = \tilde{N}_m = \delta_{m0}$ (gauge ortonormal), entonces

$$\hat{H} = :\hat{\mathcal{H}}_0 = \hat{\mathcal{H}}_{(+)0} + \hat{\mathcal{H}}_{(-)0} \tag{3.14}$$

luego

$$\hat{H} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{Q}^{\mu +}_{(+)m} \hat{Q}_{(+)\mu m} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{Q}^{\mu +}_{(-)m} \hat{Q}_{(-)m\mu} \tag{3.15}$$

Sin embargo, con el reescalamiento $Q \to \frac{1}{\sqrt{m}} Q = a$ los operadores Q son esencialmente operadores de creación y destrucción de un oscilador armónico. Por lo tanto, una forma equivalente de (3.15) es

$$\hat{H} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m\, a^{+\mu}_{(+)} a_{(+)\mu m} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m\, a^{+\mu}_{(-)m} a_{(-)m\mu}$$

$$= \hat{N}_{(+)} + \hat{N}_{(-)} = \hat{N} \tag{3.16}$$

donde $\hat{N}_{(\pm)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m\, a^{\mu +}_{(\pm)} a_{(\pm)\mu}$ son los operadores de número usuales.

Así, la cuerda es equivalente a un conjunto de osciladores y los mapas de Nicolai serían

$$X^{\mu}_{m} \longrightarrow a^{\mu}_{m} = i\dot{x}^{\mu}_{m} + x^{\mu}_{m} \tag{3.17}$$

En el espacio euclidiano ($t \to it$), este conjunto de ecuaciones de Langevin describe una colección de infinitos osciladores desacoplados en un baño térmico representado por a^{μ}_{m} .

Para demostrar formalmente que $x^{\mu}_{\mu} \to a^{\mu}_{m}$ es un mapa de Nicolai, habría que estudiar la forma hamiltoniana del teorema de Nicolai. Esto hasta donde sabemos, no ha sido hecho y planeamos volver sobre este punto en otro trabajo.

3.3.- Resumen, conclusiones y problemas abiertos

En esta tesis, se propuso una prescripción para estudiar la conexión entre mecánica cuántica normal y MQSS y su extensión como método de supersimetrización de teorías covariantes generales. Los resultados encontrados fueron los siguientes:

i) Los resultados de Gozzi /14/, de acuerdo con nuestra prescripción no son válidos en más de una dimensión a menos que un término de acoplamiento de spin-órbita sea sumado al hamiltoniano bosónico; este término no es de origen cinemático como ocurre con mecánica cuántica, sino que es una exigencia de la supersimetría del sistema.

También de aquí se deduce, que el átomo de hidrógeno no puede ser supersimétrico y la violación de supersimetría para los estados excitados mas bajos, es al menos cuatro órdenes de magnitud mayor que la constante de estructura fina observada.

ii) La prescripción, usada como técnica de supersimetrización, se aplicó a dos ejemplos a) la partícula relativista y b) la cuerda relativista. Se encontraron las superálgebras cuánticas correctas. Se concluyó, que los Q'_α que se usaron para reescribir los vínculos bosónicos en teorías covariantes generales se pueden interpretar como el ruido blanco de las ecuaciones de Langevin para las coordenadas bosónicas. Esto nos permite conjeturar, siguiendo a Cecotti y Girardello /44/, Que las transformaciones $(x,P) \longrightarrow (Q, Q^+)$ son mapas de Nicolai para el hamiltoniano.

Podemos mencionar algunos problemas aún pendientes.

A) En el caso de MQSS no relativista, interesa conocer el álgebra gradada que satisfacen las variables $\zeta_i = \sigma_i \otimes \tau_-$ y $\zeta_i^+ = \sigma_i \otimes \tau_+$, y por lo tanto, el grupo gradado correspondiente. Resultados preliminares, indican que ζ_i, ζ_i^+ son elementos del álgebra de Lie gradada del supergrupo $SO(N) \otimes S$ /45/.

B) Para cualquier operador elíptico $\hat{H}$, existen tantas representaciones de la forma $\hat{H} = \hat{Q}^+_{(\alpha)} \hat{Q}_{(\alpha)}$ como autovalores de $\hat{H}$. Estas transformaciones, introducidas en el siglo pasado por Darboux /46/, incluyen como caso particular a la representación de estado fundamental usada aquí /14,15/. Por lo tanto, cabe preguntarse a qué tipo de supersimetría corresponden las transfor maciones generadas por los restantes operadores de Darboux $\hat{Q}_{(a)}$. Se debe, además, dilucidar el significado estocástico de los distintos $Q'_{(a)}$s y su relación con los mapas de Nicolai (en caso de existir).

C) ¿Es posible tratar en forma análoga, otras teorías de campo supersimétricas, y en particular, la supercuerda de Green-Schwarz?.

APENDICE A: CONVENCIONES EN EL ESPACIO EUCLIDIANO

i) Cuadrivectores

En el espacio de Minkowski, el tensor métrico es

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1) \tag{A.1}$$

Cualquier cuadrivector covariante es,

$$x_\mu = (x_0, \vec{x}) \tag{A.2}$$

y contravariante

$$x^\mu = (x_0, -\vec{x}) \tag{A.3}$$

La rotación en el espacio euclídeo se hace reemplazando $x_0^E \longrightarrow ix_0$ y $\vec{x}^E \longrightarrow \vec{x}$. En el espacio euclídeo, los cuadrivectores se modifican por $x_{E\mu} = x_E^\mu = (x_0^E, x)$. Por consiguente el producto de cuadrivectores es

$$x_E^\mu \, x_{E\mu} = + x_{E\mu} \, x_{E\nu} \, \delta_{\mu\nu}$$

donde $\delta_{\mu\nu}$ es la delta de Kroenecker en cuatrodimensiones euclídeas.

ii) Matrices de Dirac.

En el espacio euclidiano, las matrices-γ que usamos son

$$\gamma^0_{(E)} = \gamma_{(E)0} = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

$$\gamma^i_{(E)} = \gamma_{(E)i} = \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

así que

$$\gamma^+_{(E)\mu} = \gamma_{(E)\mu} \tag{A.6}$$

$$\gamma_{(E)\mu} \, \gamma_{(E)\mu} = 4 \tag{A.7}$$

$$\sigma_{(E)\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma_{(E)\mu}, \gamma_{(E)\nu}\right] \tag{A.8}$$

La vuelta al espacio de Minkowski, se hace reemplazando $\gamma^0_{(E)}$ y $\gamma^i_{(E)}$ por:

$$\gamma^0 = i\beta \qquad\qquad \gamma^i = \alpha_i$$

Para más detalles sobre las matrices -γ en el espacio euclidiano ver la referencia /47/

APENDICE B

Movimiento. de Partículas Supersimétricas en Campos de Gauge y en un Fondo Espacio-Temporal Curvo.

Estos problemas, pueden ser resueltos en forma muy similar al de la partícula relativista en un campo escalar (excepto por algunas sutilezas), aquí damos los resultados de estos cálculos.

i) Partícula relativista en un campo de gauge

Para este caso, el operador de vínculo bosónico para una partícula de masa "variable" es en el espacio euclidiano

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathcal{P}}_\mu \hat{\mathcal{P}}_\mu + U^2) \tag{B.1}$$

donde $\hat{\mathcal{P}}_\mu = p_\mu - eA^i_\mu I_i$, donde los I_i son los generadores del grupo de gauge. En la representación de estado fundamental (B.1) es $\frac{1}{2}Q^+_\mu Q_\mu$ con

$$\begin{aligned} Q_\mu &= \partial_\mu - ieA^i_\mu I_i + \partial_\mu V = \nabla_\mu + \partial_\mu V \\ Q^+_\mu &= -\partial_\mu + ieA^i_\mu I_i + \partial_\mu V = -\nabla_\mu + \partial_\mu V \end{aligned} \tag{B.2}$$

donde la función de onda del estado fundamental es

$$\psi_0 = e^{-V + ie\int_C^x A_\mu dx^\mu} \tag{B.3}$$

aquí el contorno de la integral $\int_C^x A_\mu dx^\mu$ es elegido de tal forma que evite las fuentes de A_μ . Cualquier elección distinta, puede cambiar ψ_0 en un factor de fase no-trivial (efecto de Aharonov-Bohm). Se puede ver que

$$\partial_\mu V \partial_\mu V - \partial_\mu \partial_\mu V = U^2 \tag{B.4}$$

Si procedemos como antes, las supercargas son

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= Q_\mu \gamma_\mu \otimes \tau_- \\ \mathcal{Q}^+ &= Q^+_\mu \gamma_\mu \otimes \tau_+ \end{aligned}$$

y el operador de vínculo supersimétrico modificado (está ya rotado al espacio de Minkowski) es

$$\hat{\mathcal{H}}_s = \frac{1}{2}\{\mathcal{Q},\tilde{\mathcal{Q}}\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Q^+_\mu Q^\mu - \sigma^{\mu\nu}L_{\mu\nu} - \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} & \\ & Q^\mu Q^+_\mu + \sigma^{\mu\nu}L_{\mu\nu} - \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (B.5)$$

Aquí Q_μ y Q^+_μ son los dados en (B.2), $L_{\mu\nu}$ es el operador de momento angular, $\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ es el acoplamiento de Pauli y $F_{\mu\nu}$ es el tensor de campo de Yang-Mills. La superálgebra, se cierra por construcción y el resultado aquí presentado es independiente de las dimensiones del espacio-tiempo. Para detalles y una discusión más extensa, puede consultarse la referencia [48].

ii) <u>Partícula en un fondo curvo</u>.

En este caso el vínculo clásico es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}(x)P_\mu P_\nu + U^2(x)\right) \approx 0 \qquad (B.6)$$

el cual después de la cuantización es (se supone que el espacio-tiempo es localmente euclidiano)

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\left(-\nabla_\mu \nabla^\mu + U^2(x)\right) \qquad (B.7)$$

Donde ∇_μ es la derivada covariante sobre la variedad con métrica g. En la representación de estado fundamental (B.7) es $Q^+_\mu Q^\mu$ con

$$\begin{aligned} Q_\mu &= \nabla_\mu + \partial_\mu V \\ Q^+_\mu &= -\nabla_\mu + \partial_\mu V \end{aligned} \qquad (B.8)$$

se puede ver que V y U se relacionan por una ecuación de Ricatti, y las supercargas son

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= e^\mu{}_a Q_\mu \gamma^a \otimes \tau_- \\ \mathcal{Q}^+ &= e^\nu{}_a Q^+_\nu \gamma^a \otimes \tau_+ \end{aligned} \qquad (B.9)$$

donde las γ's son matrices de Dirac euclidianas y las e's son vierbein que satisfacen $e^\mu_a e_{\mu b} = \delta_{ab}$, etc. El vínculo bosónico supersimétrico es $\hat{\mathcal{H}}_S = \frac{1}{2}\{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^+\}$ y después de reemplazar (B.9) se encuentra

$$\hat{H}_s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Q^+_\mu Q^\mu + e^\mu{}_a e^\nu{}_b \sigma^{ab} L_{\mu\nu} - \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}[\nabla_\mu, \nabla_\nu] & \\ & Q^\mu Q^+_\mu - e^\mu{}_a e^\nu{}_b \sigma^{ab} L_{\mu\nu} - \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \end{pmatrix} \tag{B.10}$$

El término $\sigma^{\mu\nu}[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ es proporcional a $\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\lambda\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho}$, y es el análogo del acoplamiento de Pauli $\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. La superálgebra cuántica se cierra y el sistema $\hat{Q}, Q^+$ y $\hat{H}_s$ describe completamente la MQSS de partículas supersimétricas relativistas en fondos curvos [32].

APENDICE C

Derivación de (2.43)

Usando (2.40), el anticonmutador $\{ \alpha_{am}, \alpha^{+}_{bm} \}$ es

$$\{ \alpha_{am}, \alpha^{+}_{bm} \} = \sum_{kl=-\infty}^{+\infty} \left(Q^{\mu}_{a(m-k)} Q^{\nu}_{b(l-m)} \zeta_{\mu ak} \zeta^{+}_{\nu bl} + Q^{\nu}_{b(l-m)} Q^{\mu}_{a(m-k)} \zeta^{+}_{\nu bl} \zeta_{\mu ak} \right.$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{kl=-\infty}^{+\infty} \left(\{ Q^{\mu}_{a(m-k)}, Q^{\nu}_{b(l-m)} \} \{ \zeta_{\mu ak}, \zeta^{+}_{\nu bl} \} + [Q^{\mu}_{a(m-k)}, Q^{\nu}_{b(l-m)}] [\zeta_{\mu ak}, \zeta^{+}_{\nu bl}] \right) \quad \text{(C.1)}$$

el segundo término del lado derecho en (C.1), se puede escribir así usando (2.35) y (2.41b)

$$\frac{1}{2} \sum_{kl=-\infty}^{+\infty} [Q^{\mu}_{a(m-k)}, Q^{\nu}_{b(l-m)}] [\zeta_{\mu ak}, \zeta^{+}_{\nu bl}] = \frac{a}{2} \delta_{ab} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k-m) [\zeta_{\mu ak}, \zeta^{+\mu}_{a(m-m+k)}]$$

$$= \frac{a}{2} \delta_{ab} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (2k+m-m) \zeta^{\mu}_{ak} \zeta^{+}_{\mu a(m-m+k)} \quad \text{(C.2)}$$

Reemplazando (C.2) en (C.1) y usando (2.41a)

$$\{ \alpha_{am}, \alpha^{+}_{bm} \} = \frac{a \delta_{ab}}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\{ Q^{\mu}_{a(m-k)}, Q_{b\mu (k-m)} \} + (2k+m-m) \zeta^{\mu}_{ak} \zeta^{+}_{\mu a(m-m+k)} \right.$$

y desarrollando el anticonmutador entre las Q's se llega a (2.43).

APENDICE D

Cierre de la superalgebra

Para chequear el cierre de la superálgebra, basta calcular (2.44) y (2.45), escribamos

$$\left[\hat{\mathcal{H}}^{S}_{an}, \hat{\mathcal{Q}}_{bm}\right] = \left[\hat{\mathcal{H}}_{an}, \hat{\mathcal{Q}}_{bm}\right] + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(2k-m)\left[\zeta^{\mu}_{ak}\zeta^{+}_{\mu a(k-m)}, \mathcal{Q}_{bm}\right] \tag{D.1}$$

pero el primer término en (D.1) es

$$\begin{aligned}\left[\hat{\mathcal{H}}_{am}, \hat{\mathcal{Q}}_{bm}\right] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\hat{\mathcal{H}}_{an}, \hat{Q}^{\mu}_{b(m-k)}\hat{\zeta}_{\mu bk}\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\hat{\mathcal{H}}_{am}, \hat{Q}^{\mu}_{b(m-k)}\right]\hat{\zeta}_{\mu bk}\end{aligned} \tag{D.2}$$

usando (2.36), (D.2) es

$$\begin{aligned}&= \sum_{kl=-\infty}^{+\infty}\left\{\hat{Q}^{\mu}_{a(n-l)}\left[\hat{Q}_{\mu al}, \hat{Q}^{\nu}_{b(m-k)}\right]\hat{\zeta}_{\nu bk} + \left[\hat{Q}^{\mu}_{a(n-l)}, \hat{Q}^{\nu}_{b(m-k)}\right]Q_{\mu al}\hat{\zeta}_{\nu bk}\right\} \\ &= 2a\delta_{ab}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(m-k)\,\hat{Q}^{\mu}_{a(n+m-k)}\hat{\zeta}_{\mu ak}\end{aligned} \tag{D.3}$$

el segundo término en (D.1) es

$$\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(2k-m)\left[\hat{\zeta}^{\mu}_{ak}\hat{\zeta}^{+}_{\mu a(k-m)}, \hat{\mathcal{Q}}_{bm}\right] = \frac{1}{2}\sum_{kl=-\infty}^{+\infty}(2k-m)\left[\hat{\zeta}^{\mu}\hat{\zeta}^{+}_{a\mu(k-m)}, \hat{\zeta}_{\nu bl}\right]\hat{Q}^{\nu}_{b(m-l)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{kl=-\infty}^{+\infty}\left[(2k-m)\hat{\zeta}^{\mu}_{ak}\left\{\hat{\zeta}^{+}_{a\mu(k-m)}, \zeta_{\nu bl}\right\}Q^{\nu}_{b(m-l)} - (2k-m)\left\{\zeta^{\mu}_{ak}, \zeta_{\nu bl}\right\}\right. \tag{D.4}$$

donde para escribir (D.4) hemos usado la identidad

$$[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\} \tag{D.5}$$

Desarrollando y usando (2.41), (D.4) es

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(2k-m)\,a\delta_{ab}\,\hat{\zeta}_{a\mu k}\,Q^{\mu}_{a\,(m+n-k)} \tag{D.6}$$

Reemplazando (D.4) y (D.6) en (D.1) y haciendo los cambios de variables apropiados, se llega a (2.44).

Finalmente para calcular (2.45), escribimos

$$[\hat{\mathcal{H}}^{s}_{am}, \hat{\mathcal{H}}^{s}_{bm}] = [\hat{\mathcal{H}}_{am}, \hat{\mathcal{H}}_{bm}] + $$

$$+\frac{1}{4}\sum_{kl=-\infty}^{+\infty}(2k-m)(2l-m)\left[\hat{\zeta}^{\mu}_{ak}\hat{\zeta}^{+}_{a\mu(k-m)}, \hat{\zeta}^{\nu}_{bl}\hat{\zeta}^{+}_{b\nu(l-m)}\right] \quad (D.7)$$

el primer conmutador es (2.37), el segundo término de (D.7) es

$$\frac{1}{4}\sum_{kl=-\infty}^{+\infty}(2k-m)(2l-m)\left[\hat{\zeta}^{\mu}_{ak}\hat{\zeta}^{+}_{a\mu(k-m)}, \hat{\zeta}^{\nu}_{bl}\hat{\zeta}^{+}_{b\nu(l-m)}\right] =$$

$$(D.8)$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{kl=-\infty}^{+\infty}(2k-m)(2l-m)\hat{\zeta}^{\mu}_{ak}\left[\hat{\zeta}^{+}_{a\mu(k-m)}, \zeta^{\nu}_{bl}\zeta^{+}_{b\nu(l-m)}\right] + \frac{1}{4}\sum_{kl=-\infty}^{+\infty}(2k-m)(2l-m)\left[\zeta^{\mu}_{ak}, \zeta^{\nu}_{bl}\zeta^{+}_{b\nu(l-m)}\right]\zeta^{+}_{a\mu(k-m)}$$

usando (D.5), (D.8) llega a ser

$$= -\frac{1}{4}\sum_{kl=-\infty}^{+\infty}(2k-m)(2l-m)\zeta^{\mu}_{ak}\zeta^{\nu}_{bl}\{\zeta^{+}_{a\mu(k-m)}, \zeta^{+}_{b\nu(l-m)}\} +$$

$$\frac{1}{4}\sum_{kl=-\infty}^{+\infty}(2k-m)(2l-m)\zeta^{\mu}_{ak}\{\zeta^{+}_{a\mu(k-m)}, \zeta^{\nu}_{bl}\}\zeta^{+}_{b\nu(l-m)} -$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{kl=-\infty}^{+\infty}(2k-m)(2l-m)\zeta^{\nu}_{bl}\{\zeta^{\mu}_{ak}, \zeta^{+}_{b\nu(l-m)}\}\zeta^{+}_{a\mu(k-m)} \quad (D.9)$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{kl=-\infty}^{+\infty}(2k-m)(2l-m)\{\zeta^{\mu}_{ak}, \zeta^{\nu}_{bl}\}\zeta^{+}_{b\nu(l-m)}\zeta^{+}_{a\mu(k-m)}$$

Después de hacer cambios de variables apropiados y usando (2.41), (D.9) es:

$$= \frac{a\delta_{ab}}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[(2k-m)(2k-2n-m) - (2k-2n-m)(2k-m)\right]\zeta^{\mu}_{ak}\zeta^{+}_{a\mu(k-n-m)}$$

$$= \frac{a\delta_{ab}}{2}(m-m)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(2k-n-m)\zeta^{\mu}_{ak}\zeta^{+}_{a\mu(k-n-m)} \quad (D.10)$$

si reemplazamos (D.10) en (D.7), se obtiene (2.45).

REFERENCIAS

/1/ Ver e.g J. Scherk Rev. of Modern Phys. 47, 123 (1975)
C. Rebbi. Phys. Rep. 12, 1 (1974)
L. Brink y M. Henneaux Principles of string theory
C.E.C.S. Scientific series, C. Teitelboim ed. (Plenum Press 1987)

/2/ J. Wess y B. Zumino Nucl. Phys. B70 , 39 (1974)

/3/ S. Ferrara y B. Zumino Nucl. Phys. B79, 413 (1974)

/4/ R. Haag, M. Sohnius y J. Lopuszanski Nucl. Phys. B88, 257 (1975)

/5/ L. Corwin, Y. Ne'eman y S. Sternberg Rev. of Modem Phys. 47, 573 (1975)

/6/ L. O'Raifeartaigh Nucl. Phys. B96, 331 (1975)

/7/ P. Fayet y J. Iliopoulos Phys. lett. B51, 461 (1974)

/8/ E. Witten Nucl. Phys. B202, 253 (1982)

/9/ S. Cecotti y L. Girardello Phys. lett B110, 39 (1982)

/10/ G. Parisi y N. Sourlas Nucl. Phys. B206, 321 (1982)

/11/ L. F. Urrutia y E. Hernández Phys. Rev. lett. 51, 755 (1983)

/12/ P. Kumar, M. Ruíz-Altaba y B. S. Thomas University of Florida preprint. por aparecer en Phys. Rev. lett.

/13/ E. Witten J. Diff. Geometry 17, 661 (1982)

/14/ E. Gozzi Phys. lett B129, 432 (1983)

/15/ J. Gamboa y J. Zanelli Phys. lett. B165, 91 (1985)

/16/ P. Salomonson y J. W. Van Holten Nucl. Phys. B196, 509 (1982)

/17/ F. Cooper y B. Freedman Ann. of Phys. 151, 262 (1983)

/18/ M. De Crombrugghe y V. Rittenberg Ann. of Phys. 151, 99 (1983)

/19/ Ver e.g E. Merzbacher QUANTUM MECHANICS, J. Wiley N. Y (1961)

/20/ M. Schmutz Phys. lett A108, 195 (1985)

/21/ L. Infeld y T. E. Hull Rev. of Modern Phys. 23, 21 (1951)

/22/ F. Coester y R. Haag Phys. Rev. 117, 1137 (1960)

/23/ L. D. Landau y E. M. Lifshitz QUANTUM MECHANICS pergamon press second edition.

/24/ H. Ui Prog. Theor. Phys. 72, 813 (1984)

/25/ K. Gottfried QUANTUM MECANICS vol. I Benjamin Inc. Reading Masschussetts (1974)

/26/ V. A. Kostelecky y M. M. Nieto Phys Rev. lett 53, 2285 (1984)

/27/ V.A. Kostelecky y M.M. Nieto Phys. Rev. lett 56, 96 (1986)

/28/ R. W. Haymaker y R. P. Rau Am. J. Phys. 54, 928 (1986)

/29/ A. J. Hanson, T. Regge y C. Teitelboim CONSTRAINED HAMILTONIAN SYSTEMS accademia nazionale dei lincei (Roma 1976)

/30/ P. A. M. Dirac LECTURES ON QUANTUM MECHANICS academic press 1965

/31/ B. S. De Witt Phys. Rev. 160, 1113 (1967)

/32/ J. Gamboa y J Zanelli U.CH.-CECS preprint

J. Gamboa y J. Zanelli Actas del V simposio Chileno de física pag. 521 (1986)

/33/ C. Teitelboim Phys. Rev. lett.

R. Tabensky y C. Teitelboim Phys. lett. B69, 453 (1977)

/34/ K. Kuchar QUANTUM GRAVITY II: an Oxford symposium

D. Sciama, R. Penrose y C. Isham ed. (1982)

/35/ C. A. P. Galvao y C. Teitelboim J. Math. Phys 21, 1863 (1980)

/36/ F. A. Berezin y M. S. Marinov Ann. of Phys. 104, 336 (1977)

/37/ L. Brink, P. Di Vecchia, F. Gliotzzi, S. Deser y B. Zumino Phys. lett. B64, 435 (1976)

/38/ A. Stern Phys. Rev. lett 55, 1351 (1985)

/39/ A. P. Balachandran et. al. Phys Rev. D15, 2308 (1977)

/40/ J.Gamboa y J. Zanelli Trieste preprintIc/86/243
Actas Escuela Latinoamericana de Física, Ciudad de México, agosto de 1986 (por aparecer)

/41/ M. Henneaux Phys. Rev. lett 54, 959 (1985)

/42/ J. Gamboa y M. Ruíz-Altaba. University of Florida preprint
Actas Escuela Latinoamericana de Física, Ciudad de México agosto de 1986 (por aparecer)

/43/ H. Nicolai Phys. Lett. B89, 341 (1980), Nucl. Phys. B176, 419 (1980)

/44/ S. Cecotti y L. Girardello Ann. of Phys. 145, 81 (1983)

/45/ J. Gamboa y J. Zanelli (en preparación)

/46/ Ver e.g las ref. 20 y 21

/47/ R. I. Nepomechie Ann. of Phys. 158, 67 (1984)

/48/ J. Gamboa y J. Zanelli preprint CECS-UCH, presentado para publicación.