SOLUCIONES GENERALES DE FLUIDOS PERFECTOS GRAVITANTES

Tesis
Entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los
requisitos para optar al grado de
Magister en Ciencias Físicas

por

PATRICIO GAETE DURAN

1987

Director de la Tesis: DR. ROBERTO HOJMAN

Facultad de Ciencias

Universidad de Chile

I N F O R M E   D E   A P R O B A C I O N
T E S I S   D E   M A G I S T E R

Se informa a la Comisión de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el candidato:

PATRICIO ALFREDO GAETE DURAN

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Físicas

Patrocinante de Tesis:
Dr. Roberto Hojman — R Hojman

Comisión Informante de Tesis:

Dr. Jorge Zanelli

Dr. Nelson Zamorano

Dr. Fernando Lund — F Lund

AGRADECIMIENTOS

Es un placer para mí agradecer a todos quienes hicieron posible este trabajo, en forma muy especial a mis profesores y amigos R. Hojman y J. Zanelli, por su constante apoyo, preocupación y estímulo. Asimismo, agradezco las valiosas sugerencias y escritura a máquina de mi amigo R. Rosende.

A mis padres

INDICE

RESUMEN

Existen diversas maneras de encarar la búsqueda de soluciones a las ecuaciones de Einstein. Ha sido tradicional introducir hipótesis simplificatorias acerca del comportamiento de la fuente del campo gravitatorio y coeficientes métricos. Por ejemplo, se supone que las variables involucradas dependen de una forma particular de la posición y del tiempo; otra suposición muy usada la constituye el adoptar ecuaciones de estado que ligan la densidad de energía y presión.

Así, se ha obtenido a través de años, una gran cantidad de soluciones a las que ya se ha dedicado libros que las compendian y analizan(1). Sin embargo, a pesar de haber incorporado elementos de simplificación, no ha sido posible encontrar expresiones analíticas cerradas (las más generales) para las incógnitas, muchas veces se ha recurrido al estudio cualitativo(2) e incluso a las soluciones numéricas de ellas(3).

De aquí que el objetivo de este trabajo sea, a la luz de un método(4) recientemente propuesto, estudiar las soluciones de las ecuaciones de Einstein cuya fuente es un fluido perfecto con simetría esférica. Por fluido perfecto se entiende aquel fluido en que no se consideran los procesos de disipación de energía, los que pueden ocurrir como consecuencia de la viscosidad e intercambio de calor entre las diferentes partes del fluido. Al mismo tiempo, el método en cuestión permite obtener soluciones generales de las ecuaciones de campo, para la situación descrita en el caso estático. Siendo una de las características importantes del método, después de elegir como conocida una cierta función G, reducir el problema a la integración de una única ecuación, que resulta ser lineal y de primer orden; de esta forma siempre se resuelve en términos de la función arbitraria G.

En concreto, el presente trabajo se propone por un lado, averiguar si dicho método es aplicable cuando existe dependencia de ambas variables (posición y tiempo) de los coeficientes métricos, presión y densidad de energía; y por otro, examinar las soluciones para el caso estático y ciertos espacios homogéneos.

Para conseguir dichos objetivos, se comienza con una breve introducción para presentar el problema que se intenta resolver. Luego, se ilustra con la reobtención de soluciones conocidas. También se analiza el método en ciertos espacios homogéneos. Concluido ésto, se aborda el caso en que

los coeficientes métricos y variables de estado dependen de r y t. En último término, a modo de conclusiones, se hace una breve síntesis del trabajo en general.

Por otra parte, cabe mencionar que en este trabajo se ha abordado solamente la resolución de las ecuaciones de campo, prescindiendo de un aspecto tan importante como lo es la motivación física o posibles modelos en que ellos han sido o puedan ser aplicadas. Paralelamente, aun cuando es muy importante obtener soluciones nuevas dentro del "mar" de soluciones existentes de las ecuaciones de Einstein, lo es también la posibilidad de estudiar todas las soluciones de las ecuaciones en cuestión dentro de un mismo esquema, con un evidente beneficio para la comprensión de la teoría misma.

CAPITULO I: INTRODUCCION

1.1. Elemento de línea

El elemento de línea más general en coordenadas esféricas, está dado por[5]:

$$ds^2 = A(r,t)dt^2 + B(r,t)dr^2 + 2C(r,t)dt\,dr + E(r,t)(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2). \quad (1)$$

También, para esta métrica es conocido que las componentes del tensor energía-impulso $T_{t\theta}, T_{t\phi}, T_{r\theta}, T_{r\phi}$ y $T_{\theta\phi}$ son nulas; donde dicho tensor es

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - p\, g_{\mu\nu}, \quad (2)$$

siendo p la presión y ρ la densidadde energía. De suerte que el movimiento del fluido es radial, con otras palabras, su cuadrivelocidad es la formula

$$U_\mu = (U_t(r,t), U_r(r,t), 0, 0). \quad (3)$$

Asimismo, cuando se resuelven las ecuaciones de Einstein en el que la fuente del campo es un fluido, se acostumbra resolverlas en un sistema de referencia acompañante del fluido. Así, apoyándonos en la libertad que existe en relatividad general para escoger un sistema de referencia, efectuaremos el siguente cambio de coordenadas[6]:

$$\begin{aligned} r &= r(R,T) \\ t &= t(R,T). \end{aligned} \quad (4)$$

Tal cambio de coordenadas posee dos grados de libertad, que los emplearemos primeramente para pasar a un sistema acompañante $(U_r = 0)$

y, en segundo lugar, para llevar la métrica dada a una forma diagonal. Esto, lo podemos conseguir definiendo las nuevas variables en la forma[7]

$$dT = \alpha^{-1}(r,t)\left(U_r(r,t)dr + U_t(r,t)\,dt\right)$$

$$dR = \beta^{-1}(r,t)\left(U^t(r,t)dr - U^r(r,t)\,dt\right), \tag{5}$$

donde α y β son factores integrantes para hacer el lado derecho de (5) diferenciales perfectas, esto es,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha^{-1}(r,t)U_r(r,t)\right] = \frac{\partial}{\partial r}\left[\alpha^{-1}(r,t)U_t(r,t)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\beta^{-1}(r,t)U^t(r,t)\right] = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\beta^{-1}(r,t)U^r(r,t)\right].$$

De acuerdo a ésto, al efectuar las transformaciones explícitamente, se obtiene

$$ds^2 = \alpha^2 dT^2 + \beta^2(BA - C^2)\,dR^2 + E\left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2\right), \tag{6}$$

que al denotar los coeficientes métricos α^2, $\beta^2(BA-C^2)$ y E por g^2, $-h^2$ y $-f^2$ respectivamente, se tiene que

$$ds^2 = g^2(r,t)dt^2 - h^2(r,t)dr^2 - f^2(r,t)\left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2\right), \tag{7}$$

donde se ha usado r y t en vez de R y T, por notación solamente. Por último, advertimos que la cuadrivelocidad (3) se convierte en

$$u^\mu = (u^t, 0, 0, 0) = g^{-1}\delta^\mu{}_t. \tag{8}$$

Vemos, pues, que (7) representa el elemento de línea con simetría esférica expresado en un sistema acompañantey en que la métrica toma una forma diagonal. Dicho elemento de línea será el que usaremos para escribir las ecuaciones de Einstein.

1.2. Ecuaciones de campo

Las ecuaciones de campo a estudiar son

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \tag{9}$$

con $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ y $T_{\mu\nu}$ dado por (2), es decir,

$$T_{\mu\nu} = (p+\rho) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \tag{10}$$

donde Λ es la constante cosmológica, positiva.

Sin embargo, se observa que sin pérdida de generalidad, puede ser puesto igual a cero. Debido que al efectuar la transformación[4]

$$\begin{aligned} \bar{p} &= p - \Lambda \\ \bar{\rho} &= \rho + \Lambda, \end{aligned} \tag{11}$$

las ecuaciones (9) se comportan como un sistema de ecuaciones con $\Lambda = 0$. Luego, de aquí en adelante omitiremos Λ ; pero recordando que cuando $\Lambda \neq 0$ dicho caso ya está considerado.

Visto esto, se tiene que las cuatro ecuaciones de campo independientes[1,8] para la métrica (7) son:

$$\rho = \frac{1}{f^2} - \frac{2}{fh^2}\left(f'' - f'\frac{h'}{h} + \frac{f'^2}{2f}\right) + \frac{2}{fg^2}\left(\dot{f}\frac{\dot{h}}{h} + \frac{\dot{f}^2}{2f}\right) \tag{12-a}$$

$$p = -\frac{1}{f^2} + \frac{2}{fh^2}\left(f'\frac{g'}{g} + \frac{f'^2}{2f}\right) - \frac{2}{fg^2}\left(\ddot{f} - \dot{f}\frac{\dot{g}}{g} + \frac{\dot{f}^2}{2f}\right) \tag{12-b}$$

$$p = \frac{1}{h^2}\left\{\frac{g''}{g} - \frac{g'}{g}\frac{h'}{h} + \frac{f''}{f} + \frac{f'}{f}\left(\frac{g'}{g} - \frac{h'}{h}\right)\right\} - \frac{1}{g^2}\left\{\frac{\ddot{h}}{h} - \frac{\dot{h}}{h}\frac{\dot{g}}{g} + \frac{\ddot{f}}{f} + \frac{\dot{f}}{f}\left(\frac{\dot{h}}{h} - \frac{\dot{g}}{g}\right)\right\} \tag{12-c}$$

$$0 = \dot{f}' - \dot{f}\frac{g'}{g} - f'\frac{\dot{h}}{h} \tag{12-d}$$

De estas ecuaciones también se tiene que

$$p' = -(p+\rho)\frac{g'}{g} \tag{13}$$

$$\dot{\rho} = -(p+\rho)\left(\frac{\dot{h}}{h} + 2\frac{\dot{f}}{f}\right), \tag{14}$$

alternativamente pueden ser derivadas de $T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0$. El punto y la prima sobre las funciones denotan derivadas respecto del tiempo "t" y posición "r" respectivamente.

Así, el problema consiste en obtener soluciones explícitas en términos de funciones analíticas. No obstante, antes de proseguir, haremos algunas consideraciones de tipo general.

De (12), resulta claro que forman un sistema de ecuaciones de segundo orden no lineales complicadas de resolver. Notándose de paso, que se tienen cuatro ecuaciones para las cinco incógnitas: g,h,f,p y ρ; dejando el problema indeterminado. Debido a la complejidad de estas ecuaciones y para cerrar el problema, como ya fue mencionado, se postulan hipótesis simplificatorias acerca del comportamiento de la fuente del campo gravitatorio y coeficientes métricos. Tal es el caso por ejemplo, también señalado, que los coeficientes dependan o no del tiempo, o bien, adoptar desde el comienzo una ecuación de estado. Sin embargo, el hecho de usar una ecuación de estado, debido al carácter no lineal de las ecuaciones, conduce a expresiones analíticas complicadas que generalmente son resueltas numéricamente.[3]

Se puede acotar también que, para el caso estático, Tolman[9] fue el primero en apreciar estas dificultades. Pero precisamente él sugirió y usó otra estrategia; a saber, especificar desde el principio relaciones entre las componentes del tensor métrico.

Es en esta línea, usando el método[4] citado, que la aspiración de este trabajo sea efectuar un examen unficador de las soluciones de las ecuaciones de campo para el caso de un fluido ideal. En el sentido de encontrar soluciones generales, donde las métricas y variables de estado conocidas sean casos particulares de una solución más general.

Para fijar ideas, consideremos la métrica generada por un fluido perfecto, estático con simetría esférica. Otra de las estrategias usadas, consiste en darse como conocidas una de las incógnitas en términos de r (por ejemplo p=p(r)). De esta forma las ecuaciones de campo pueden reducirse a una ecuación diferencial ordinaria, pero no lineal para la otra variable de estado (en este caso ρ). Si la elección ha sido lo suficientemente afortunada, entonces es posible resolver analíticamente la ecuación restante. Ahora bien, conforme ya mencionamos, la clave del método a usar, radica en elegir como conocida una extraña combinación G(r) de las variables de estado (y no una de ellas en particular)). La virtud de tal elección reside en que la única ecuación por resolver resulta ser lineal y de primer orden, de suerte que siempre se resuelve en términos de la función G.

Collins[2], haciendo uso de dichos resultados en el caso de simetría plana, encuentra todas las soluciones de las ecuaciones de campo (y todas las G), para los que la ecuación de estado es de la forma $p=(\gamma-1)\rho$. De este modo, obtiene como subproducto la solución de Tabensky y Taub [10] y la de Texeira, Wolk y Som[11].

Asimismo, parece conveniente enfatizar que al disponer de una función arbitraria G, estamos expresando nuestras soluciones sin comprometernos con una ecuación de estado específica. Como se sabe, hay ciertos resultados cosmológicos que son independientes de la ecuación de estado, a condición que se satisfagan ciertas relaciones (desigualdades) entre las variables de estado. Tales resultados han sido obtenidos, eso sí, bajo el alero de ciertos modelos específicos (Robertson-Walker).

Hecha estas observaciones, resulta fácil ver que para la métrica (7), las combinaciones entre los coeficientes métricos con respecto a su dependencia en r y t son 27. Tales combinaciones se pueden clasificar de la siguente forma:

GRUPO O FAMILIA		f	g	h
I	a)	f(r,t)	g(r,t)	h(r,t)

Grupo o Familia (continuación)		f	g	h
	a)	f(r,t)	g(r,t)	h(r)
	b)	f(r,t)	g(r,t)	h(t)
II	c)	f(r,t)	g(r)	h(r,t)
	d)	f(r,t)	g(t)	h(r,t)
	e)	f(r)	g(r,t)	h(r,t)
	f)	f(t)	g(r,t)	h(r,t)
	a)	f(r,t)	g(r)	h(r)
	b)	f(r,t)	g(t)	h(t)
	c)	f(r,t)	g(r)	h(t)
	d)	f(r,t)	g(t)	h(r)
	e)	f(r)	g(r)	h(r,t)
III	f)	f(t)	g(t)	h(r,t)
	g)	f(r)	g(t)	h(r,t)
	h)	f(t)	g(r)	h(r,t)
	i)	f(r)	g(r,t)	h(r)
	j)	f(t)	g(r,t)	h(t)
	k)	f(r)	g(r,t)	h(r)
	l)	f(t)	g(r,t)	h(t)
	a)	f(r)	g(r)	h(r)
	b)	f(t)	g(t)	h(t)
	c)	f(r)	g(r)	h(t)
	d)	f(r)	g(t)	h(r)
	e)	f(t)	g(r)	h(r)
IV	f)	f(t)	g(r)	h(t)
	g)	f(r)	g(t)	h(t)
	h)	f(t)	g(t)	h(r)

Sin embargo no todos estos casos son independientes como cabría esperar, ya que se puede pasar de un caso a otro mediante una transformación de coordenadas; pero dejemos esto para más adelante.

2.1 Método propuesto

Como fuera anticipado, ahora se revisará el método propuesto. Así, para el caso estático (cuando los coeficientes métricos de (7) sólo dependen de r), se puede efectuar la transformación de coordenadas

$$R = f(r), \tag{15}$$

sin destrozar el carácter acompañante del sistema de coordenadas en que está expresado el elemento de línea (7). De modo que dicho elemento de línea se convierte en

$$ds^2 = g^2(r)\,dt^2 - h^2(r)\,dr^2 - r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2), \tag{16}$$

donde nuevamente se ha llamado los coeficientes por g y h, y usado r en vez de R; por notación solamente. En consecuencia, las ecuaciones de campo para la métrica (16) están dadas por

$$\rho = \frac{1}{r^2} + \frac{2}{rh^2}\left(\frac{h'}{h} - \frac{1}{2r}\right) \tag{17-a}$$

$$p = -\frac{1}{r^2} + \frac{2}{rh^2}\left(\frac{g'}{g} + \frac{1}{2r}\right) \tag{17-b}$$

$$p = \frac{1}{h^2}\left\{\frac{g''}{g} - \frac{g'}{g}\frac{h'}{h} + \frac{1}{r}\left(\frac{g'}{g} - \frac{h'}{h}\right)\right\}, \tag{17-c}$$

además de

$$p' = -(p+\rho)\frac{g'}{g}. \tag{18}$$

Dicho sea de paso, la ecuación (17-c) se obtiene de (17-a) y (17-b), de suerte que en adelante dicha ecuación no se ocupará.
La ecuación (17-a) puede reescribirse como

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r\left(1 - \frac{1}{h^2}\right)\right] = \rho, \tag{19}$$

que al integrarse se obtiene

$$\frac{1}{h^2} = 1 - 2\frac{m(r)}{r} \tag{20}$$

con $$\frac{dm(r)}{dr} = \frac{1}{2}\rho r^2. \tag{21}$$

Usando (18) y (20) en (17-b), se encuentra que

$$(2m-r)\left[-\frac{1}{r^3} + \frac{2}{r^2}\frac{1}{\rho+p}\frac{dp}{dr}\right] = \left(p+\frac{1}{r^2}\right). \tag{22}$$

Definiendo $$G = \frac{2m-r}{p+1/r^2}, \tag{23}$$

la ecuación (22) se convierte en

$$(G-r^3)\frac{dp}{dr} + G^{-1}(G'+r^2)(G+r^3)\,p + (G^{-1}+G'G^{-1}r^{-2}-2r^{-3})(G+r^3) = 0, \tag{24}$$

que al ser integrada, una vez que G es dado, se deduce que la presión está dada por:

$$p(r) = \exp\left[\int \frac{(G+r^3)(G'+r^2)}{G(r^3-G)}dr\right]\left\{p_0 + \int \frac{(G+r^3)(r^3+rG'-2G)}{r^3G(r^3-G)}\exp\left[\int -\frac{(G+r^3)(G'+r^2)}{G(r^3-G)}dr\right]\right\}, \tag{25}$$

donde p_0 es una constante de integración y las integrales son indefinidas.

La densidad de energía $\rho(r)$ se determina de (21) y (23), dando como resultado

$$\rho(r) = \frac{1}{r^2}\left(G\frac{dp}{dr} + p\frac{dG}{dr} - \frac{2G}{r^3} + \frac{1}{r^2}\frac{dG}{dr} + 1\right). \tag{26}$$

Asimismo, de (18) y (22), el coeficiente métrico g resulta ser

$$g^2(r) = \frac{g_0^2}{r}\, e^{-\int \frac{r^2}{G}dr}, \tag{27}$$

mientras que el coeficiente h se obtiene de (23) y (20), es decir,

$$h^{-2}(r) = -\frac{1}{r}\left(p+\frac{1}{r^2}\right)G. \tag{28}$$

Así pues, reiterando lo dicho antes, a partir de las soluciones (25) a (28), se puede apreciar la importancia de haber definido la función G(r), como asimismo, la obtención de la ecuación de primer orden, lineal para p (24).

En las secciones siguentes se ilustrará el método con varios ejemplos.

2.2. Ejemplos estáticos

Antes de mostrar los ejemplos, notemos que (25) y (26) se pueden reescribir en una forma más simple.

Utilizando $p(r) = \mathcal{P}(r) - 1/r^2$, (25) se convierte en

$$\mathcal{P}(r) = \exp\left[-\int \frac{(G'+r^2)(G+r^3)}{G(G-r^3)}dr\right]\left\{\mathcal{P}_0 + 4\int\frac{dr}{G-r^3}\exp\left[\int\frac{(G'+r^2)(G+r^3)}{G(G-r^3)}dr\right]\right\}, \tag{29}$$

mientras que (26) queda

$$\rho(r) = \frac{1}{r^2}\left\{1 + \frac{d}{dr}(\mathcal{P}G)\right\}. \tag{30}$$

Al mismo tiempo, vemos que

$$-\int\frac{(G'+r^2)(G+r^3)}{G(G-r^3)}dr = \ln\left[\frac{G}{(G-r^3)^2}\right] + \int\frac{r^2}{G}dr - 8\int\frac{r^2}{G-r^3}dr + C, \tag{31}$$

donde C es una constante de integración, de esta manera se ha eliminado G' y las soluciones quedan expresadas solamente en función de G y r.

a) Universo de Einstein (Solución I de Tolman [9]).

Escogiendo $G = -r^3$, (32)

vemos que $\exp\left[-\int\frac{(G'+r^2)(G+r^3)}{G(G-r^3)}dr\right] = 1$, y

$$\int\frac{dr}{(G-r^3)}\exp\left[\int\frac{(G'+r^2)(G+r^3)}{G(G-r^3)}dr\right] = \frac{1}{4r^2}$$

Luego de (29) y (31)

$$p = \mathcal{P}_0$$

al escribir $\mathcal{P}_0 = -1/R^2$, resulta que la presión queda expresada como

$$p = -1/R^2, \tag{33}$$

con A constante. De aquí se sigue

$$\exp\left[-\int \frac{(G'+r^2)(G+r^3)}{(G-r^3)G}\,dr\right] = -\frac{1}{4}\,\frac{(1+3r^2/A^2)}{(1+2r^2/A^2)}, \tag{51}$$

$$\int \frac{dr}{(G-r^3)} \exp\left[\int \frac{(G'+r^2)(G+r^3)}{(G-r^3)G}\,dr\right] = -1/r^2. \tag{52}$$

De donde resulta que la presión

$$p(r) = \frac{1}{A^2}\,\frac{1}{1+2r^2/A^2}\,(1-A^2/R^2-3r^2/R^2), \tag{53}$$

y para la densidad de energía

$$\rho(r) = \frac{1}{A^2}\left[\frac{2(1-r^2/R^2)}{(1+2r^2/A^2)^2} + \frac{(1+3A^2/R^2+3r^2/R^2)}{(1+2r^2/A^2)}\right], \tag{54}$$

usando $\rho_0 = 4/R^2$.

También, se deduce que los coeficientes métricos son

$$g^2 = g_0^2\,(1+r^2/A^2), \tag{55}$$

y
$$h^2 = \frac{1+2r^2/A^2}{(1-r^2/R^2)(1+r^2/A^2)}. \tag{56}$$

e) Solución V de Tolman

Escogiendo

$$G = -\frac{r^3}{1+2m}, \tag{57}$$

conduce a

$$\exp\left[-\int \frac{(G'+r^2)(G+r^3)}{(G-r^3)G}\,dr\right] = -\frac{(1+2m)}{4(1+m)^2}\,r^{2m(1-m)/(1+m)}, \tag{58}$$

y

$$\int \frac{dr}{(G-r^3)} \exp\left[\int \frac{(G'+r^3)(G+r^3)}{(G-r^3)G}\,dr\right] = -\frac{(1+m)^2}{(1+2m-m^2)}\,r^{-2(1+2m-m^2)/(1+m)}. \tag{59}$$

De suerte que la presión y densidad de energía están dadas por

$$p(r) = \frac{m^2}{1+2m-m^2}\,\frac{1}{r^2} - \frac{(1+2m)}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^M, \tag{60}$$

$$\rho(r) = \frac{2m-m^2}{1+2m-m^2}\,\frac{1}{r^2} + \frac{(3+5m-2m^2)}{(1+m)\,R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^M, \tag{61}$$

con $\mathcal{P}_0 = 4(1+m)^2/R^{2+M}$ y $M = 2m(1-m)/(1+m)$.

Mientras que los coeficientes métricos quedan expresados como

$$g^2(r) = g_0^2\, r^{2m}, \tag{62}$$

y $$h^2(r) = \frac{1+2m-m^2}{1-(1+2m-m^2)(r/R)^N}, \tag{63}$$

con $N = 2(1+2m-m^2)/(1+m)$.

2.3 Otros ejemplos estáticos

Para completar los ejemplos estáticos, resulta útil considerar brevemente los siguentes dos casos.

a) Schwarzschild exterior

Como se habrá notado, cuando se hace $R=\infty$ en la solución Schwarzschild-de Sitter, se obtiene:

$$G=-r^3(1-2m/r), \tag{64}$$

$$\begin{aligned} p(r) &= 0, \\ \rho(r) &= 0, \\ g^2(r) &= g_0^2(1-2m/r), \\ h^{-2}(r) &= (1-2m/r), \end{aligned} \tag{65}$$

que son las conocidas soluciones para Schwarzschild exterior.

No obstante, al volver a la expresión (25), usando el G dado por (64), observamos que

$$r^3+rG'-2G=0, \tag{66}$$

de modo que cuando $p_0 \neq 0$, la presión se convierte en

$$p(r)=p_0\exp\left[\int\frac{(G+r^3)(G'+r^2)}{G(r^3-G)}dr\right]=p_0(1-m/r)^2. \tag{67}$$

Mientras que la densidad y coeficientes métricos están dadas por

$$\rho(r)=8mp_0/r-5m^2p_0/r^2-3p_0, \tag{68}$$

$$g^2(r)=g_0^2(1-2m/r), \tag{69}$$

y

$$h^{-2}(r)=1-2m/r-4mrp_0+5m^2p_0+p_0r^2-2m^3p_0/r. \tag{70}$$

Es directo ver que, cuando $p_0=0$, estas soluciones se reducen a (65). Sin embargo, lo interesante de estas soluciones (67-70) es que también satisfacen las ecuaciones originales de campo (17).

Como cabía esperar, ya que las soluciones generales (25-28) satisfacen las ecuaciones de campo (no se han introducido soluciones fantasmas).

Eliminando la variable r, en las expresiones (67) y (68), se obtiene la solución de estado

$$\rho = (2\xi - 5\,p^{1/2})\,p^{1/2}, \tag{71}$$

aquí ξ es $p_0^{1/2}$.

Por último, queda abierta la posible aplicabilidad de estas soluciones, como también un estudio más profundo de ellas. Puesto que, a partir de (67) y (68), notamos que la presión (con $p_0 > 0$) es siempre positiva tan sólo en un cierto intervalo. Esto puede ser apreciado en las siguentes figuras:

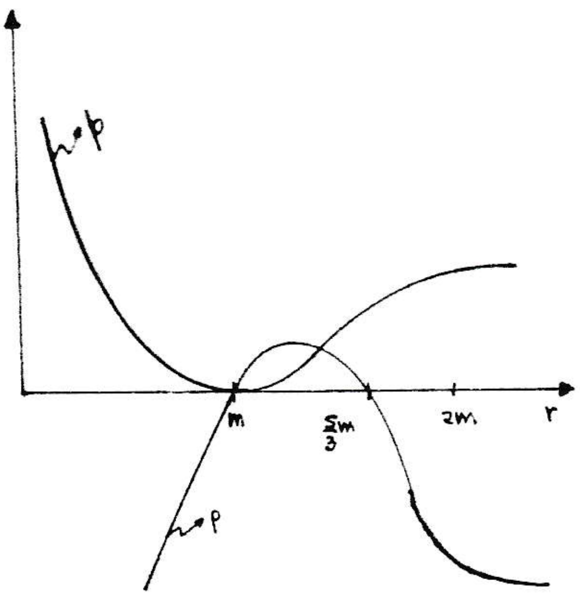

Fig (a)

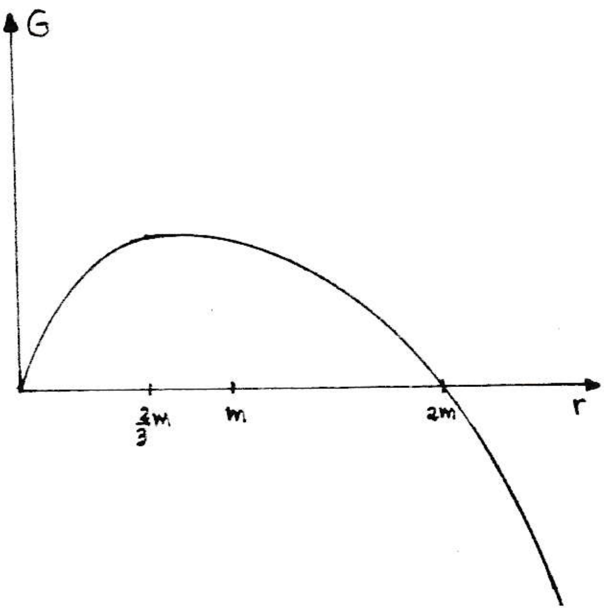

Fig (b)

Así para la región $r < m$, la presión es positiva pero la densidad esnegativa. En cambio, en la región $m < r < \frac{5}{3}m$, tanto la presión como la densidad son positivas, además de la función G. Para la parte $r > \frac{5}{3}m$, la presión tiende asintóticamente al valor $p=p_0$, mientras que la densidad tiende a $-3p_0$ como $-r^3$. En consecuencia,la región de interés físico se sitúa en el intervalo $m < r < \frac{5}{3}m$.

b) Reissner-Nordstrom

En este segundo ejemplo, veamos el caso del campo gravitacional para una partícula cargada.

En tal caso, consideremos G dado por

$$G = -r^3 \frac{(r^2-2mr+e^2)}{(r^2-e^2)}, \tag{72}$$

donde e es la carga de la partícula. De aquí, se sigue que

$$g^2(r) = g_0^2 \left(1 - 2m/r + e^2/r^2\right), \tag{73}$$

$$\phi(r) + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4} e^{\alpha(r-m)/r} (e^2-r^2) r^{\alpha-4} (r-m)^{2-\alpha} \left\{ I_0 + \frac{8}{m^2} \left[\frac{e^{-\alpha t} t^{\alpha-2}}{\alpha-2} + \frac{2}{\alpha-2} \int t^{\alpha-2} e^{-\alpha t} dt \right] \right\}, \tag{74}$$

con $\alpha = 4e^2/m^2$ y $t = \frac{r-m}{r}$.

Mientras que el otro coeficiente resulte ser

$$h^{-2}(r) = r^4 \frac{(1-2m/r+e^2/r^2)}{(r^2-e^2)} \cdot \text{expresión } (74). \tag{75}$$

De (75), claro está, se observa que dicho coeficiente métrico dista mucho de ser el verdadero para el caso en cuestión, esto es,

$$h^{-2}(r) = \left(1 - 2m/r + e^2/r^2\right). \tag{76}$$

Consecuentemente de aquí se obtiene, en una forma alternativa, el resultado conocido que el caso de Reissner-Nordstrom no puede ser modelado como un fluido perfecto.

2.4 El caso homogéneo

En esta sección examinaremos si el método usado precedentemente es aplicable a ciertos espacios homogéneos. Por dichos espacios se quiere decir, que serán considerados aquellos en que los coeficientes métricos de (7) dependen solo del tiempo t. Al mismo tiempo queda abierto el efectuar un estudio más sistemático en todas las clasificaciones de espacios homogéneos.

En razón de lo anterior, se sigue entonces que (7) toma la forma

$$ds^2 = g^2(t)dt^2 - h^2(t)dr^2 - f^2(t)(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2). \tag{77}$$

Definiendo una nueva variable temporal como

$$f^2(t) = T^2, \tag{78}$$

el elemento de línea (77) se convierte en

$$ds^2 = g^2(t)dt^2 - h^2(t)dr^2 - t^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2), \tag{79}$$

donde, como de costumbre, se ha llamado los coeficientes por g y h, y usado t en vez de T; por notación solamente. Consecuentemente, las ecuaciones de campo para la métrica (79) están dadas por:

$$\rho = \frac{1}{t^2} + \frac{2}{tg^2}\left(\frac{\dot h}{h} + \frac{1}{2t}\right) \tag{80-a}$$

$$p = -\frac{1}{t^2} - \frac{2}{tg^2}\left(-\frac{\dot g}{g} + \frac{1}{2t}\right) \tag{80-b}$$

$$p = -\frac{1}{g^2}\left\{\frac{\ddot h}{h} - \frac{\dot h}{h}\frac{\dot g}{g} + \frac{1}{t}\left(\frac{\dot h}{h} - \frac{\dot g}{g}\right)\right\}, \tag{80-c}$$

además de $\dot\rho = -(p+\rho)\left\{\frac{\dot h}{h} + \frac{2}{t}\right\}.$ (81)

Ahora bien, estas ecuaciones se resolverán en forma análoga a la realizada en la sección 2.1.

De la ecuación (80-b) se tiene

$$\frac{1}{t^2}\frac{d}{dt}\left[t\left(1+\frac{1}{g^2}\right)\right] = -p, \tag{82}$$

que al integrarse se obtiene

$$-\frac{1}{g^2} = 1 + 2\frac{m(t)}{t}, \tag{83}$$

con

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{1}{2}pt^2. \tag{84}$$

Además, de (81), se tiene

$$-\frac{\dot{h}}{h} = \frac{2}{t} + \frac{\dot{\rho}}{p+\rho}. \tag{85}$$

Usando (83) y (85) en (80-a), se encuentra que

$$(2m+t)\left[\frac{3}{t^3} + \frac{2}{t^2}\frac{\dot{\rho}}{p+\rho}\right] = \left(\rho - \frac{1}{t^2}\right). \tag{86}$$

Introduciendo la función G dada por

$$G = \frac{2m+t}{\rho - \frac{1}{t^2}}, \tag{87}$$

la ecuación (86) se convierte en

$$\frac{d\rho}{dt} - \frac{(t^3-3G)(t^2+\dot{G})}{G(t^3+3G)}\rho + \frac{(t^3-3G)(t^3+t\dot{G}-2G)}{Gt^3(t^3+3G)} = 0, \tag{88}$$

que al ser integrada, una vez que G es dado, se deduce que la densidad está dada por

$$\rho(t) = \exp\left[\int\frac{(t^3-3G)(t^2+\dot{G})}{G(t^3+3G)}dt\right]\left\{\rho_0 + \int\frac{(3G-t^3)(t^3+t\dot{G}-2G)}{Gt^3(t^3+3G)}\exp\left[-\int\frac{(t^3-3G)(t^2+\dot{G})}{G(t^3+3G)}dt\right]\right\} \tag{89}$$

donde ρ_0 es una constante de integración.

Una vez que $\rho = \rho(t)$ ha sido determinado, $p(t)$ se encuentra a partir de (84) y (87), obteniéndose

$$p(t) = \frac{1}{t^2}\left\{\rho\dot{G} + G\dot{\rho} - \frac{1}{t^2}\dot{G} + \frac{2G}{t^3} - 1\right\}. \tag{90}$$

Por otra parte, al integrarse (85) se obtiene

$$h^2(t) = \frac{h_o^2}{t}\, e^{-\int \frac{t^2}{G} dt}, \tag{91}$$

mientras que el otro coeficiente métrico es

$$\frac{1}{g^2} = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t^2} - \rho\right) G - 2, \tag{92}$$

lo que cierra el problema. De modo que el método es igualmente aplicable a las ecuaciones (80-81).

Por último, observemos el siguente hecho: cuando el fluído obedece una ley de estado tipo γ , es decir,

$$p = (\gamma - 1)\rho,$$

con γ constante, la ecuación (85) se integra fácilmente dando como resultado

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{(ht^2)^\gamma}. \tag{93}$$

Esto es mencionado de paso, puesto que en el caso de simetría plana se obtiene [1] una expresión idéntica a (93), salvo que en vez de ρ_o aparece un 3.

2.5 Comentarios

La idea de esta sección es comentar la procedencia de la función G. Así, para los ejemplos vistos anteriormente, debido a que las funciones eran conocidas, fue directo deducir la función G; dado que está relacionada con el coeficiente métrico g(r) a través de (27)

$$g^2(r) = \frac{g_0^2}{r}\, e^{-\int \frac{r^2}{G} dr} .$$

Lo que de alguna manera implicaría que sin conocer g(r) no se obtiene la función G. Sin embargo, esto no es así, ya que al usar un g particular en dichos ejemplos, fue solo por motivos ilustrativos. De suerte que en general, una vez postulada la función G, el método genera todas las soluciones, al menos matemáticas, de las ecuaciones de Einstein. Así, lo que queda por delante es inventar o encontrar un criterio para poder seleccionar las soluciones físicas (o interesantes)del resto. Cabe acotar al mismo tiempo, que aunque el método por cuadraturas siempre provee de soluciones, el precio que se debe pagar muchas veces es que las integrales envueltas son engorrosas.

Antes bien, si se quisiera determinar la función G explícitamente, se puede conseguir de la manera esbozada a continuación. Recordemos que, en el caso estático, la función m(r) está dada por

$$m(r) = \frac{1}{2} r + \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{r^2}\right) G, \tag{94}$$

que al derivarse, y utilizando

$$\frac{dm}{dr} = \frac{1}{2}\rho r^2, \quad y \tag{95}$$

$$\frac{dp}{dr} = \frac{(G+r^3)(p+\rho)}{2Gr}, \tag{96}$$

se llega a que la ecuación que gobierna G es

$$\frac{dG}{dr} + \frac{1}{2}\frac{r}{(1+pr^2)}\left(\rho + p - \frac{1}{r^2}\right)G - \frac{1}{2}\frac{r^4}{(1+pr^2)}\left(\rho - p - \frac{2}{r^2}\right) = 0. \tag{97}$$

Resulta así, claro está, que poco progreso puede ser hecho en la integración de esta ecuación si no se conocen la presión y densidad en términos de r. De esta manera se harán algunas suposiciones, a modo explorativo, respecto de la densidad y presión.

Consideremos el caso más simple, es decir, cuando tanto la presión y densidad son constantes. Introduciendo la siguente notación

$$\begin{aligned} p &= a \\ \rho &= b \\ \rho + p &= c \\ \rho - p &= d, \end{aligned} \tag{98}$$

con a,b,c y d constantes, se tiene que

$$G = \frac{r^2}{(1+ar^2)^{\alpha+1}}\left[\frac{1}{2}\int (r^2 d - 2)(1+ar^2)^{\alpha}\, dr + C\right], \tag{99}$$

con $\alpha = c/4a$ y C constante de integración.

Asimismo, sin un valor explícito de α tampoco se puede avanzar mucho, ya que la integración nunca se cierra.

a) $\alpha = -1/2$, $a < 0$ y $d > 0$, luego

$$G = \frac{r^3 d}{4a} - \frac{r^2}{2\sqrt{-a(1+ar^2)}}\left(2 + d/2a\right)\operatorname{arcsen}\left(\frac{-2ar}{\sqrt{-4a}}\right) + \frac{C r^2}{\sqrt{1+ar^2}}, \tag{100}$$

en el caso particular $d/4a = -4$ y $C = 0$, se sigue que

$$G = -r^3, \tag{101}$$

como se recordará con este G se reproducen las soluciones para el universo de Einstein.

b) $\alpha = 0$, $a < 0$ y $d > 0$,

$$G = \frac{-r^3}{(1+ar^2)}\left[\left(1 - \frac{r^2 d}{6}\right) - \frac{C}{r}\right], \tag{102}$$

i) $c=2m$ (cte), $a=-3/R^2$ y $d=6/R^2$, se reduce a

$$G=-r^3\frac{(1-2m/r-r^2/R^2)}{(1-3r^2/R^2)}, \tag{103}$$

ii) $c=0$, $a=-3/R^2$ y $d=6/R^2$

$$G=-r^3\frac{(1-r^2/R^2)}{(1-3r^2/R^2)}, \tag{104}$$

iii) $c=2m$, $d=0$ y $a=0$

$$G=-r^3\left(1-\frac{2m}{r}\right), \tag{105}$$

que son las funciones que generan las soluciones de Schwarzschild-de Sitter, de Sitter y Schwarzschild respectivamente.

Antes de pasar a otro aspecto, conviene reiterar que para poder encontrar las funciones G más generales, se necesita la información adicional acerca de las variables de estado. Aun cuando esto constituye una desventaja de este método, no resulta ser tan grave al considerar los resultados obtenidos en los distintos casos analizados anteriormente. Asimismo, aunque sea repetitivo, no debe olvidarse que después de elegir G, el método provee las soluciones a las incógnitas del problema por cuadraturas.

Ahora bien, observamos de (96) que para tener una presión constante, se debe cumplir que

$$G=-r^3, \tag{106}$$

o bien

$$p+\rho=0, \tag{107}$$

una, como es sabido, es la función generatriz para el universo de Einstein y la otra, es la ecuación de estado que obedece el fluido en el caso de Schwarzschild- de Sitter.

Usando (106) en (96), se tiene

$$\frac{dp}{dr}=0,$$

lo que implica

$$p = a\,(cte), \tag{108}$$

y de (94)

$$\rho = -3a, \tag{109}$$

pero como $\rho > 0$, se deduce que $a < 0$, luego

$$p < 0$$
$$\rho > 0$$
$$p/\rho = -1/3 ,$$

que son soluciones conocidas (universo de Einstein) y, a su vez, corroboran el considerar $a<0$ en la resolución de la integral para G (99).

Al mismo tiempo y para finalizar, se debe hacer notar que al considerar $G=-Ar^3$ (A constante), no se obtiene una presión constante como es mostrado recientemente [12]. En otras palabras, si se considera G dado por

$$G(r) = -\frac{(1+\alpha)}{(1+5\alpha)}\, r^3, \tag{110-a}$$

donde α es constante, se encuentra que la presión y densidad quedan expresadas por

$$p(r) = \frac{4\alpha^2}{(1+6\alpha+\alpha^2)} \cdot \frac{1}{r^2}, \tag{110-b}$$

$$\rho(r) = \frac{4\alpha}{(1+6\alpha+\alpha^2)} \cdot \frac{1}{r^2}, \tag{110-c}$$

con $p_0=0$. Así, a partir de 110-a y 110-b , la ecuación de estado que obedece el fluido en este caso es

$$p = \alpha \rho. \tag{110-d}$$

Para completar esta observación, advertimos que una vez elegida la función G se pudo deducir la ecuación de estado del fluido. En cambio, hacer lo contrario no es posible, como quedó de manifiesto al tratar de resolver la ecuación para G.

CAPITULO III: DEPENDENCIA EN AMBAS VARIABLES

3.1. Clasificación general

Como se ha podido apreciar, cuando los coeficientes métricos dependen tan sólo de r o de t, el método propuesto trabaja bastante bien. Así, el interés apunta ahora en averiguar que sucede cuando dichos coeficientes dependen de ambas variables.

Para realizar esto, nos guiaremos con la clasificación hecha al final de la sección 1-2. Así, comenzaremos este análisis con el grupo o familia IV:

- Los casos IVa y IVb, están resueltos en el capítulo anterior
- Para el caso IVc se tiene que:

$$ds^2 = g^2(r)\,dt^2 - h^2(t)\,dr^2 - f^2(r)\,d\Omega^2. \tag{111}$$

Para esta métrica, las ecuaciones de campo son

$$\rho = \frac{1}{f^2} - \frac{2}{fh^2}\left(f'' + \frac{f'^2}{2f}\right) \tag{112-a}$$

$$p = -\frac{1}{f^2} + \frac{2}{fh^2}\left(f'\frac{g'}{g} + \frac{f'^2}{2f}\right) \tag{112-b}$$

$$p = \frac{1}{h^2}\left\{\frac{g''}{g} + \frac{f''}{f} + \frac{f'}{f}\frac{g'}{g}\right\} - \frac{1}{g^2}\frac{\ddot{h}}{h} \tag{112-c}$$

$$0 = f'\frac{\dot{h}}{h} \tag{113}$$

$$p' = -(p+\rho)\frac{g'}{g} \tag{114}$$

$$\dot{\rho} = -(p+\rho)\frac{\dot{h}}{h} \tag{115}$$

De (113) se tiene que $f'=0$, o bien $\dot{h}=0$.

De (113) se tiene que $f'=0$, o bien $\dot{h}=0$.

Si $f'=0$, está implícita en estas ecuaciones, la ecuación de estado $p+\rho=0$. Mientras que si $\dot{h}=0$, (111) se reduce al caso IVa, que es el primer caso resuelto en este trabajo.

- Caso IVd:

$$ds^2 = g^2(t)\,dt^2 - h^2(r)\,dr^2 - f^2(r)\,d\Omega^2. \tag{116}$$

Efectuando las transformaciones $dR^2 = h^2(r)\,dr^2$ y $dT^2 = g^2(t)\,dt^2$, (117) queda

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - f^2(r)\,d\Omega^2. \tag{117}$$

Así, las ecuaciones quedan

$$\rho = \frac{1}{f^2} - \frac{2}{f}\left(f'' + \frac{f'^2}{2f}\right) \tag{118-a}$$

$$p = -\frac{1}{f^2} + \frac{2}{f}\,\frac{f'^2}{2f} \tag{118-b}$$

$$p = \frac{f''}{f} \tag{118-c}$$

y

$$p' = 0 \tag{119}$$

$$\dot{\rho} = 0 \tag{120}$$

Como vemos, en este caso, está implícita la ecuación de estado Asimismo, se tiene que tanto la presión como densidad son constantes, con respecto a r y t respectivamente. Si se denota arbitrariamente la presión por $-\alpha$ (constante positiva), se tiene que

$$f(r) = \frac{A}{\alpha}\cos(\alpha r + \beta), \tag{121}$$

con A y β constantes.

Caso IVe:

$$ds^2 = g^2(r)\,dt^2 - h^2(r)\,dr^2 - f^2(t)\,d\Omega^2. \tag{122}$$

Para esta métrica las ecuaciones son:

$$\rho = \frac{1}{f^2} + \frac{\dot{f}^2}{g^2 f^2} \tag{123-a}$$

$$p = -\frac{1}{f^2} - \frac{2}{f g^2}\left(\ddot{f} + \frac{\dot{f}^2}{2f}\right) \tag{123-b}$$

$$0 = \dot{f}\,\frac{g'}{g} \tag{123-c}$$

$$p' = -(p+\rho)\frac{g'}{g} \tag{124}$$

$$\dot{\rho} = -2(p+\rho)\frac{\dot{f}}{f} \tag{125}$$

De (123-c) se tiene que $\dot{f}=0$, o bien $g'=0$.
Si $\dot{f}=0$, está implícita en estas ecuaciones, la ecuación de estado $p + \rho = 0$. Mientras que si g' es igual a cero, $g=$ cte y (122) se reduce a

$$ds^2 = dt^2 - h^2(r)\,dr^2 - f^2(t)\,d\Omega^2. \tag{126}$$

Asimismo, de (124), se tiene que $p=p(t)$. De manera que la ecuación (123-b) puede ser reescrita al multiplicarla por $f^2\dot{f}$. Luego

$$\dot{f}^2 = -1 - \frac{2m(f)}{f} \tag{127}$$

con
$$\frac{dm}{df} = \frac{1}{2}\,p f^2, \tag{128}$$

al poder definir una función m, el resto del cálculo se sigue del método propuesto.

- Caso IVf:

$$ds^2 = g^2(r)\,dt^2 - h^2(t)\,dr^2 - f^2(t)\,d\Omega^2. \tag{129}$$

Para esta métrica las ecuaciones son:

$$\rho = \frac{1}{f^2} + \frac{2}{fg^2}\left(\dot{f}\frac{\dot{h}}{h} + \frac{\dot{f}^2}{2f}\right) \tag{130-a}$$

$$p = -\frac{1}{f^2} - \frac{2}{fg^2}\left(\ddot{f} + \frac{\dot{f}^2}{2f}\right) \tag{130-b}$$

$$0 = \dot{f}\frac{g'}{g} \tag{130-c}$$

$$p' = -(p+\rho)\frac{g'}{g} \tag{131}$$

$$\dot{\rho} = -(p+\rho)\left(\frac{\dot{h}}{h} + 2\frac{\dot{f}}{f}\right) \tag{132}$$

De (130-c) se tiene $\dot{f}=0$, o bien $g'=0$
Si $\dot{f}=0$, está implícita en estas ecuaciones, la ecuación de estado $p + \rho = 0$. Mientras que si $g'=0$, $g=cte$ y (129) se reduce a

$$ds^2 = dt^2 - h^2(t)\,dr^2 - f^2(t)\,d\Omega^2, \tag{133}$$

que como vemos es un caso particular de (IV-b).

- Caso IVg:

$$ds^2 = g^2(t)\,dt^2 - h^2(t)\,dr^2 - f^2(r)\,d\Omega^2 \tag{134}$$

En este caso las ecuaciones son:

$$\rho = \frac{1}{f^2} - \frac{2}{fh^2}\left(f'' + \frac{f'^2}{2f}\right) \tag{135-a}$$

$$p = -\frac{1}{f^2} + \frac{f'^2}{h^2 f^2} \tag{135-b}$$

$$0 = f'\frac{\dot{h}}{h} \tag{135-c}$$

$$p' = 0 \tag{136}$$

$$\dot{\rho} = -(p+\rho)\frac{\dot{h}}{h} \tag{137}$$

De (135-c), si $f'=0$, la ecuación $p + \rho = 0$ está implícita en estas ecuaciones. Mientras que si $\dot{h}=0$, (134) se convierte en

$$ds^2 = g^2(t)\,dt^2 - dr^2 - f^2(r)\,d\Omega^2. \tag{138}$$

De manera que al reescribir (135-a), permite definir una función m y el resto del cálculo se sigue del método propuesto.

- Caso IVh:

$$ds^2 = g^2(t)\,dt^2 - h^2(r)\,dr^2 - f^2(t)\,d\Omega^2. \tag{139}$$

Haciendo la transformación $f^2(t) = T^2$ *, (139) se transforma en

$$ds^2 = g^2(t)\,dt^2 - h^2(r)\,dr^2 - t^2\,d\Omega^2. \tag{140}$$

Para (139) las ecuaciones de campo son:

$$\rho = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2 g^2} \tag{141-a}$$

$$p = -\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t g^2}\left(-\frac{\dot{g}}{g} + \frac{1}{2t}\right) \tag{141-b}$$

$$p = -\frac{1}{g^2}\left(-\frac{1}{t}\frac{\dot{g}}{g}\right) \tag{141-c}$$

$$p' = 0 \tag{142}$$

$$\dot{\rho} = -(p+\rho)\frac{2}{t} \tag{143}$$

De (142) se tiene $p=p(t)$, de manera que (141-b) se puede reescribir

$$-p = \frac{1}{t^2}\frac{d}{dt}\left[t\left(1+\frac{1}{g^2}\right)\right], \tag{144}$$

de aquí se define una función m y, se siguen los pasos del método usado reduciendo el problema a cuadraturas.

---

* Observación: En este capítulo, como se ha hecho a través de todo este trabajo, una vez que es efectuada una transformación de coordenadas, tanto los coeficientes métricos como variables; se designarán por las mismas letras que poseían antes de la transformación.

Veamos ahora el grupo o familia III.

- Caso IIIe:

$$ds^2 = g^2(r)\,dt^2 - h^2(r,t)\,dr^2 - f^2(r)\,d\Omega^2 \tag{145}$$

De la ecuación (12-d), se tiene que para esta métrica se reduca a

$$0 = f'\frac{\dot{h}}{h} \tag{146}$$

Como se sabe, cuando $f'=0$ está implícita la ecuación $p + \rho = 0$. Mientras que si $\dot{h}=0$, se obtiene $h=h(r)$ de manera que (145) queda

$$ds^2 = g^2(r)\,dt^2 - h^2(r)\,dr^2 - f^2(r)\,d\Omega^2, \tag{146}$$

como vemos es el caso IVa.

- Caso IIIf:

$$ds^2 = g^2(t)\,dt^2 - h^2(r,t)\,dr^2 - f^2(t)\,d\Omega^2, \tag{147}$$

que al efectuar la transformación de coordenadas $f^2(t) = T^2$, (147) queda

$$ds^2 = g^2(t)\,dt^2 - h^2(r,t)\,dr^2 - t^2\,d\Omega^2. \tag{148}$$

De modo que las ecuaciones de campo son:

$$\rho = \frac{1}{t^2} + \frac{2}{tg^2}\left(\frac{\dot{h}}{h} + \frac{1}{2t}\right) \tag{149-a}$$

$$p = -\frac{1}{t^2} - \frac{2}{tg^2}\left(-\frac{\dot{g}}{g} + \frac{1}{2t}\right) \tag{149-b}$$

$$p' = 0 \tag{150}$$

$$\dot{\rho} = -(p+\rho)\left(\frac{\dot{h}}{h} + \frac{2}{t}\right) \tag{151}$$

De (150) se tiene que $p=p(t)$, de manera que (149-b) se puede reescribir como

$$p = \frac{1}{t^2}\frac{d}{dt}\left[-t\left(1+\frac{1}{g^2}\right)\right],$$

que son los pasos habituales del método propuesto.

- Caso IIIg:

$$ds^2 = g^2(t)\,dt^2 - h^2(r,t)\,dr^2 - f^2(r)\,d\Omega^2 . \tag{152}$$

Para esta métrica la ecuación (12-d) queda

$$0 = f' \frac{\dot{h}}{h} , \tag{153}$$

como se sabe $f'=0$, conduce a la ecuación de estado $p + \rho = 0$. Mientras que si $\dot{h}=0$, se tiene $h=h(r)$ y (152) se convierte en

$$ds^2 = g^2(t)\,dt^2 - h^2(r)\,dr^2 - f^2(r)\,d\Omega^2 , \tag{154}$$

que es el caso IV-d.

- Caso IIIh:

$$ds^2 = g^2(r)\,dt^2 - h^2(r,t)\,dr^2 - f^2(t)\,d\Omega^2 \tag{155}$$

En este caso la ecuación (12-d) conduce a

$$0 = \dot{f} \frac{g'}{g} , \tag{156}$$

como es sabido $\dot{f}=0$, conlleva a la ecuación $p + \rho = 0$. Mientras que si $g'=0$, (155) queda

$$ds^2 = dt^2 - h^2(r,t)\,dr^2 - f^2(t)\,d\Omega^2 . \tag{157}$$

De suerte que las otras ecuaciones son

$$\rho = \frac{1}{f^2} + \frac{2}{f}\left(\dot{f}\frac{\dot{h}}{h} + \frac{\dot{f}^2}{2f}\right) \tag{158-a}$$

$$p = -\frac{1}{f^2} - \frac{2}{f}\left(\ddot{f} + \frac{\dot{f}^2}{2f}\right) \tag{158-b}$$

$$p' = 0 \tag{159}$$

$$\dot{\rho} = -(p+\rho)\left(\frac{\dot{h}}{h} + 2\frac{\dot{f}}{f}\right) \tag{160}$$

De (159) se tiene p=p(t) , de manera que (158-b) se puede reescribir como

$$\dot{f}^2 = -1 - \frac{2m(f)}{f}, \qquad (161)$$

con
$$\frac{dm}{df} = \frac{1}{2} p f^2, \qquad (162)$$

que son los pasos habituales del método propuesto.

- Caso IIIi:

$$ds^2 = g^2(r,t)\, dt^2 - h^2(r)\, dr^2 - f^2(r)\, d\Omega^2, \qquad (163)$$

que al efectuar la transformación $f^2(r)=R^2$, se reduce a

$$ds^2 = g^2(r,t)\, dt^2 - h^2(r)\, dr^2 - r^2 d\Omega^2. \qquad (164)$$

Las ecuaciones de campo para la métrica (163) resultan ser

$$\rho = \frac{1}{r^2} - \frac{2}{rh^2}\left\{-\frac{h'}{h} + \frac{1}{2r}\right\} \qquad (165\text{-a})$$

$$p = -\frac{1}{r^2} + \frac{2}{rh^2}\left\{\frac{g'}{g} + \frac{1}{2r}\right\} \qquad (165\text{-b})$$

$$p' = -(p+\rho)\frac{g'}{g} \qquad (166)$$

$$\dot{\rho} = 0 \qquad (167)$$

De (167) se sigue que $\rho=\rho(r)$, de manera que (165-a) puede ser reescrita en la forma
$$\rho = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r\left(1-\frac{1}{h^2}\right)\right],$$

como se recordará, estas son las ecuaciones para el caso estático vistas en el capítulo anterior.

- Caso IIIj:

$$ds^2 = g^2(r,t)\,dt^2 - h^2(t)\,dr^2 - f^2(t)\,d\Omega^2, \tag{168}$$

La ecuación (12-d) en este caso conduce a

$$0 = \dot{f}\,\frac{g'}{g}, \tag{169}$$

Cuando $\dot{f}=0$, claro está conduce a $p + \rho = 0$. Asimismo, si $g'=0$, se tiene que $g=g(t)$, de suerte que (168) se reduce a

$$ds^2 = g^2(t)\,dt^2 - h^2(t)\,dr^2 - f^2(t)\,d\Omega^2,$$

que es precisamente el caso IV-b.

- Caso IIIk:

$$ds^2 = g^2(r,t)\,dt^2 - h^2(t)\,dr^2 - f^2(r)\,d\Omega^2, \tag{170}$$

de ecuación (12-d) se tiene

$$0 = f'\,\frac{\dot{h}}{h}, \tag{171}$$

el caso $f'=0$ es conocido. En cambio, $\dot{h}=0$ implica $h=cte$, de manera que (170) se reduce a

$$ds^2 = g^2(r,t)\,dt^2 - dr^2 - f^2(r)\,d\Omega^2, \tag{172}$$

y las ecuaciones quedan

$$\rho = \frac{1}{f^2} - \frac{2}{f}\left(f'' + \frac{f'^2}{2f}\right) \tag{173-a}$$

$$p = -\frac{1}{f^2} + \frac{2}{f}\left(f'\frac{g'}{g} + \frac{f'^2}{2f}\right) \tag{173-b}$$

$$p' = -(p+\rho)\,\frac{g'}{g} \tag{174}$$

$$\dot{\rho} = 0 \tag{175}$$

De (174) se tiene $\rho=\rho(r)$, y la ecuación (173-a) puede ser reescrita permitiendo definir una función m y el resto del cálculo se sigue del método propuesto.

- Caso IIIℓ :

$$ds^2 = g^2(r,t)\,dt^2 - h^2(r)\,dr^2 - f^2(t)\,d\Omega^2 , \tag{176}$$

De ecuación (12-d) para esta métrica se tiene

$$0 = \dot{f}\,\frac{g'}{g} , \tag{177}$$

$\dot{f}=0$ conduce $p + \rho = 0$. Si $g'=0$, se tiene $g=g(t)$ y (176) se convierte en

$$ds^2 = g^2(t)\,dt^2 - h^2(r)\,dr^2 - f^2(t)\,d\Omega^2 , \tag{178}$$

que es el caso IVh.

Del grupo III sólo restan los casos a,b,c y d. Sin embargo, en todos los casos el único coeficiente que depende de ambas variables es f(r,t). De manera que, siguendo el procedimiento hecho hasta aquí, sería tentador efectuar una transformación del tipo . Tal transformación complica las ecuaciones, ya que en ese caso se abandona el sistema de coordenadas acompañante usado en este trabajo. A su vez conviene señalar que en todos los otros casos, el hecho de efectuar una transformación del tipo $R^2 = f^2(r)$ o $T^2 = f^2(t)$, no afectaba las ecuaciones, tanto el tensor de Einstein como el energía-momento permanecían iguales. Esto lógicamente, por la libertad adicional que se dispone de redefinir la variable espacial o temporal.

Por último, cabe mencionar que las ecuaciones de campo para los casos IIIa,b,c, o d son complicadas. Tomemos, por ejemplo, el caso IIIa:

$$\rho = \frac{1}{f^2} - \frac{2}{fh^2}\left(f'' - f'\frac{h'}{h} + \frac{f'^2}{2f}\right) + \frac{2}{fg^2}\left(\frac{\dot{f}^2}{2f}\right)$$

$$p = -\frac{1}{f^2} + \frac{2}{fh^2}\left(f'\frac{g'}{g} + \frac{f'^2}{2f}\right) - \frac{2}{fg^2}\left(\ddot{f} + \frac{\dot{f}^2}{2f}\right) \qquad (179)$$

$$0 = \dot{f}' - \dot{f}\frac{g'}{g}$$

y

$$p' = -(p+\rho)\frac{g'}{g} \qquad (180)$$

$$\dot{\rho} = -2(p+\rho)\frac{\dot{f}}{f} \qquad (181)$$

Veamos la familia II:

- Caso IIe:

$$ds^2 = g^2(r,t)\,dt^2 - h^2(r,t)\,dr^2 - f^2(r)\,d\Omega^2 \qquad (182)$$

A partir de la ecuación (12-d) para esta métric se encuentra que

$$0 = f' \frac{\dot{h}}{h}, \tag{183}$$

cuando f'=0, es sabido lo que ocurre. Mientras que si $\dot{h}=0$, se tiene que h = h(r) y (182) se reduce a

$$ds^2 = g^2(r,t)dt^2 - h^2(r)dr^2 - f^2(r)d\Omega^2, \tag{184}$$

que es el caso IIIi.

- Caso IIf:

$$ds^2 = g^2(r,t)dt^2 - h^2(r,t)dr^2 - f^2(t)d\Omega^2, \tag{185}$$

usando ecuación (12-d) se tiene

$$\dot{f}\frac{g'}{g} = 0 \tag{186}$$

de g'=0 , se observa que g=g(t) y (186) se convierte en

$$ds^2 = g^2(t)dt^2 - h^2(r,t)dr^2 - f^2(t)d\Omega^2, \tag{187}$$

que es el caso IIIf.

Para concluir esta sección y por todo lo expuesto anteriormente, vemos que de los 27 casos que se tenían en la clasificación general, 18 se han resuelto totalmente por el método propuesto. De esta forma, los casos realmente pendientes son Ia, IIa, b, c, d y IIIa, b, c, d; que precisamente son las ecuaciones más complicadas de resolver.

Se debe señalar por último, que en todos los casos resueltos, la transformación de coordenadas usada no alteraba el carácter acompañante del sistema de coordenadas usado primitivamente al escribirlas ecuaciones de campo. En cambio, en los casos restantes, donde todos los coeficientes métricos dependen de ambas variables (además de las variables de estado), intentar una transformación de la misma forma implica salirse del sistema acompañante y consecuentemente, complicar aun más las ecuaciones. Debido a que el tensor energía-momento, deja de ser diagonal ante tal transformación, a la vez que el tensor de Einstein también sufre varias modificaciones.

CONCLUSIONES

Al terminar este trabajo acerca de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein, se puede advertir que la contribución fundamental del método usado para resolverlas, es que eligiendo la función G arbitraria se encuentran todas las soluciones (al menos matemáticas) de las ecuaciones de campo. Como ha quedado de manifiesto en cada uno de los ejemplos vistos precedentemente, restando solamente por encontrar un modo o criterio de seleccionar las soluciones físicas del resto de ellas. Al mismo tiempo y como fuera advertido, una vez que G es dado, la presión y densidad pueden ser determinados; de manera que G contiene la ecuación de estado.

En tanto que, para el caso homogéneo considerado aquí, el haberlo incluido nos permitió extender en una forma coherente el método propuesto.

Por otra parte, para la clasificación introducida en este trabajo, vemos que nos permite examinar en una forma ordenada todas las posibles combinaciones para la métrica general utilizada. Esta manera de estudiar las soluciones, posee la ventaja de considerar dichas soluciones en un mismo esquema unificante, además que evita la obtención repetida de las ecuaciones de campo. Por último, se debe acotar que en este estudio general queda pendiente traducir las distintas soluciones a términos físicos, esto es, usando la clasificación cinemática de fluidos: shear, expansión, etc. Como también para el caso homogéneo, considerar todas las clasificaciones de dichos espacios.

REFERENCIAS

1.) Kramer, D., Stephani, H., Herlt, E. & MacCallum, M., Exact Solutions of Einstein's Field Equations, Cambridge University Press (1980).
Hoenselaers, C. & Dietz, W. editors, Solutions of Einstein's Equations: Techniques and Results., Proceedings of the First International Seminar on Exact Solutions of Einstein's Equations, held in Reizebach in November 1983. Lecture Notes N° 205, New York, Springer (1984).

2.) Collins, J., J. Math. Phys. 26, 268 (1985).

3.) May, M. & White, R., Phys. Rev. 4, 141,1232 (1966).

4.) Berger, S., Hojman, R. & Santamarina, J., Trieste preprint IC/85/222.

5.) Weinberg, S., Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity (Wiley, New York, 1972).

6.) Landau, L.D. & Lifshitz, E.M., Teoría Clásica de los Campos, (Ed. Reverté, Madrid, 1970)

7.) Ponce de León, J., J. Math. Phys. 27, 271 (1986).

8.) Tolman, R. C., Relativity, Thermodynamics and Cosmology, (Oxford University Press, Cambridge, England, 1934).

9.) Tolman, R. C., Phys. Rev. 55, 364 (1939).

10.) Tabensky, R. & Taub, A., Comm. Math. Phys. 29, 61 (1973).

11.) de Texeira, A. F., Wolk, I. & Som, M. M., J. Phys. A 10, 1679, (1977)

12.) Díaz, M & Pullin, J., preprint , Bariloche.