DESCENSO DE SHINTANI PARA $GL(2,\mathbb{F}_q)$

Tesis

entregada a la

Universidad de Chile

en cumplimiento parcial de los requisitos

para optar al grado de

Magister en Ciencias Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS

por

JORGE ENRIQUE GONZALEZ LORCA

Patrocinante: Dr. Jorge Soto A.

Facultad de Ciencias

Universidad de Chile

I N F O R M E   D E   A P R O B A C I O N

T E S I S   D E   M A G I S T E R

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el Candidato

JORGE ENRIQUE GONZALEZ LORCA

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Matemáticas

Patrocinante de Tesis

Dr. Jorge Soto A.

Comisión Informante de Tesis

Dr. Ricardo Baeza R.

Dr. Manuel Elgueta D.

Dr. Rolando Pomareda R.

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

Sea k un cuerpo finito y K una extensión finita de k. Es bien sabido (y fácil de verificar) que cualquier carácter (complejo) de $K^{\times} = GL(1,K)$, Galois invariante, es decir invariante bajo la acción del grupo de Galois de K sobre k, se factoriza mediante el homomorfismo norma de $K^{\times}$ sobre $k^{\times}$ por algún carácter de $k^{\times}$. Más generalmente T. SHINTANI muestra en [Sh] (ver también [Ge]), de una manera en cierto modo análoga, como asociar a cada carácter irreducible Galois invariante χ de $GL(n,K)$ un carácter irreducible de $GL(n,k)$, actualmente llamado descendido de Shintani de χ, y que era el descenso (o levantamiento) de Shintani hasta ahora conocido. Más precisamente, sea F el automorfismo de Frobenius de K con respecto a k, el cual se extiende naturalmente a $GL(n,K)$, entonces se define en $GL(n,K)$ una aplicación N llamada norma, que no es un homomorfismo para $n \geq 2$, dada por $Ng = gg^{F} \dots g^{F^{m-1}}$ ($g \in GL(n,K)$, $m = [K : k]$), con la propiedad que Ng es conjugado en $GL(n,K)$ a un elemento de $GL(n,k)$ para todo $g \in GL(n,K)$.

Por otro lado, una representación irreducible de $GL(n,K)$ se dice Galois invariante si es isomorfa a su transformada por F. En consecuen - cia para una representación irreducible Galois invariante π de $GL(n,K)$ existe un entrelazamiento Φ entre π y $\pi^F = \pi \circ F$ (con π^F la transformada, por F, de π), de donde Shintani demuestra que existe un único carácter irreducible χ_π de $GL(n,k)$ tal que el carácter "torcido", por Φ, de π es igual al carácter $\chi_\pi \circ N$, es decir $\text{traza}(\pi_g \circ \Phi) = \chi_\pi(Ng)$ $(g \in GL(n,K))$. Así entonces se establece que la aplicación $\pi \mapsto \chi_\pi$ es una biyección entre el conjunto de clases de isomorfía de representaciones irreducibles Galois invariante de $GL(n,K)$ y el conjunto de caracteres irreducibles de $GL(n,k)$.

En este trabajo realizaremos una construcción explícita del descenso de Shintani en términos de las <u>representaciones</u> mismas, para cuando $n = [K : k] = 2$. En su Primer Capítulo se entrega una síntesis sobre las principales nociones y resultados de la teoría de representaciones de grupos finitos (ver [SA-1]). Además en el último párrafo de este Capítulo se ve una correspondencia de representaciones, bajo ciertas condiciones, entre dos grupos finitos abstractos cualesquiera, que más adelante aplicaremos a $GL(2,K)$ y $GL(2,k)$.

El Capítulo siguiente se destina por completo a la determinación de todas las clases de isomorfía de representaciones irreducibles de $GL(2,k)$, de relevante importancia para el próximo Capítulo pues tales representacio nes, específicamente sus construcciones, serán constantemente requeridas (ver [SA-2]). Finalmente el Capítulo III se refiere y dá solución explícita del descenso de Shintani para $GL(2,k)$, que consiste, como se ha dado a entender anteriormente, en asociar a cada representación irreducible π de $GL(2,K)$ que sea Galois invariante, una representación de $GL(2,k)$ que denominaremos descendida (de Shintani) de π y denotaremos por $V[\pi]$. Específicamente, se considera el k-espacio vectorial $E = \{x \in M_2(K) \mid x^* = x\}$, donde x^* es la matriz transpuesta conjugada ${}^t\bar{x}$ de x (la conjugación es el automorfismo de Frobenius extendido a $M_2(K)$ de manera natural) y Q la aplicación determinante. Así (E,Q) es un espacio cuadrático no degenerado de dimensión 4 sobre k, de índice de Witt 1, al cual le asociamos la representación de Weil de $GL(2,k)$ que denotaremos por (V,ρ), con $V = \mathbb{C}^{E\times\mathcal{X}}$ ($\mathcal{X}$ es el conjunto de caracteres de k^+ distintos del carácter trivial) (ver [SA-2]).

Por otro lado el grupo $GO(Q)$ de todas las similitudes ortogonales de (E,Q) es isomorfo al producto semi-directo de un grupo de orden dos y Γ', donde $\Gamma' = GL(2,K)/\tilde{\mathbb{U}}$ y $\tilde{\mathbb{U}} = \left\{\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u\end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{U}\right\}$. Además, designamos por (V,σ) la representación natural de $GO(Q)$ asociada a la acción natural de $GO(Q)$ sobre $E \times \mathcal{X}$ (a saber $\gamma\cdot(x,\psi) = (\gamma x, \psi^{m_\gamma^{-1}}))$ donde $\gamma \in GO(Q)$, $(x,\psi) \in E \times \mathcal{X}$ y m_γ es el multiplicador de la similitud γ) que de acuerdo a la descomposición de $GO(Q)$ de más arriba podemos considerar, con el habitual abuso de notación, como la representación natural de Γ'. Nótese que como σ y ρ conmutan, definen una representación $\sigma \otimes \rho$ de $\Gamma' \times GL(2,k)$ en V.

Ahora bien, para π una representación irreducible de $GL(2,K)$ Galois invariante (por consiguiente una representación irreducible de Γ') observamos que la componente isotípica $I_{\check{\pi}}(\sigma)$ de tipo $\check{\pi}$ de σ en V (donde $\check{\pi}$ es la representación contragradiente de π) se descompone como subrepresentación de $\sigma \otimes \rho$ en el producto tensorial (externo) $\check{\pi} \otimes \mathrm{Hom}_{\Gamma'}(\check{\pi},\sigma)$ donde $\mathrm{Hom}_{\Gamma'}(\check{\pi},\sigma)$ es el espacio vectorial de entrelazamientos entre $\check{\pi}$ y σ . Se obtiene así a partir de la representación irreducible π de Γ' otra representación de $GL(2,k)$ en $\mathrm{Hom}_{\Gamma'}(\check{\pi},\sigma)$ que transformamos a su vez en una representación que designaremos por $(V[\pi],\rho)$ donde ρ está dada por los operadores de Weil de $GL(2,k)$. Concretamente, lo anterior es un plano esquemático de una máquina (que podríamos llamar de Weil) que se alimenta con representaciones irreducibles π de $GL(2,K)$ que sean Galois invariantes y nos suministra representaciones de $GL(2,k)$ que aparecen como "cuocientes tensoriales", en un sentido que está precisado más arriba, de la componente isotípica de tipo $\check{\pi}$ de σ por $\check{\pi}$.

Posteriormente se determina que las únicas representaciones irreducibles de $GL(2,K)$ que tienen descenso de SHINTANI no nulo son precisamente las que son Galois invariante y viceversa, en analogía para el caso de $GL(1,K) = K^{\times}$. La dificultad en esto se centra en la descripción explícita de los espacios vectoriales $V[\pi]$ que aparecen como "fibrados vectoriales" con base un conjunto $\Omega = GL(2,K)\backslash E \times \mathcal{X}$ de representantes de la acción de $GL(2,K)$ en $E \times \mathcal{X}$ y con fibra sobre $\xi \in \Omega$ el espacio vectorial $\mathrm{Fix}_{\pi}(\mathrm{Stab}_{GL(2,K)}\, \xi)$. En particular se deducen la dimensión de los $V[\pi]$, sin ayuda de caracteres.

Una vez obtenido lo anterior se procede a resolver la inquietud, que seguramente el lector ya habrá tenido, sobre la irreducibilidad o reducibilidad de las representaciones $V[\pi]$. Pero de acuerdo a la descripción de éstas y sus dimensiones existen algunas que son reducibles (en suma directa de dos irreducibles) correspondiendo a las descendidas de las representaciones unidimensionales de GL(2,K) que son Galois invariante; el resto resulta ser irreducible. Ahora bien, conjuntamente con resolver la irreducibilidad de estas últimas y de las componentes, se procede a identificarlas con las representaciones irreducibles de GL(2,k) . La parte más delicada aquí consiste en la identificación con la serie discreta (o cuspidal) de GL(2,k) . En relación a lo expresado en un comienzo cabe hacer notar que el carácter de las representaciones $V[\pi]$ son exactamente los caracteres irreducibles χ_π de GL(2,k) que construye Shintani salvo cuando π es unidimensional, que en ese caso corresponde al carácter de la componente irreducible unidimensional (de GL(2,k)) de $V[\pi]$.

Por descenso de Shintani de las solas representaciones Galois invariante de la serie principal de GL(2,K) se obtienen todas las representaciones irreducibles de GL(2,k) , en particular aquellas de la serie discreta de GL(2,k) . Además cabe mencionar que la representación de Steinberg de dimensión q de GL(2,k) aparece repetida dos veces, una como descendida directa de la Steinberg de dimensión q^2 de GL(2,K) (Galois invariante) y la otra en la descomposición de la descendida de la representación unidimensional de GL(2,K) cuando sea Galois invariante.

Por lo demás cabe señalar que para los casos en que k es un cuerpo local, arquimediano o no, también se ha construído ya el descenso de Shintani a nivel de representaciones para GL(2,k) (llamado usualmente cambio de base cuadrático para GL(2,k) ; ver [Co-1] y [Co-2]).

Finalmente, deseo expresar mis agradecimientos al Profesor Dr. Jorge Soto Andrade por su apoyo y sus valiosas observaciones en la realización del presente trabajo; como así también a la señora Carmen Lagos quien ha efectuado el trabajo de dactilografía con la calidad que le es característic

N O T A C I O N E S   G E N E R A L E S

$\|X\|$	cardinalidad del conjunto finito X .
$\mathbb{C}^X$	el conjunto de todas las funciones complejas sobre el conjunto X .
Sop f	soporte de la función f de un conjunto X en un grupo aditivo N , es decir el conjunto de todos los $x \in X$ tales que $f(x) \neq 0$.
Car(G)	grupo de caracteres de un grupo abeliano G .
$\mathfrak{X}(G)$	el conjunto de los caracteres de las representaciones irreducibles de un grupo G .
$Hom(\rho,\sigma)$, $Hom_G(\rho,\sigma)$	el espacio de entrelazamiento de las representaciones ρ y σ de un grupo finito G .
δ	función de Dirac sobre un grupo abeliano G , centrada en el origen, que vale 1 en cero y se anula en otra parte.
$\mathbb{1}$	el carácter trivial de un grupo finito G .

C A P I T U L O   I

PRELIMINARES. REPRESENTACIONES DE GRUPOS FINITOS

§ 1. CONCEPTOS BASICOS.

1.1. Primeras definiciones y notaciones.

Sea G un grupo finito. Se llama representación lineal compleja de G, o en breve, representación de G, a un par (V,ρ), donde V es un espacio vectorial complejo y ρ una acción lineal de G en V, es decir un homomorfismo de grupos de G en el grupo $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ de todos los automorfismos lineales del $\mathbb{C}$-espacio vectorial V. El espacio V se suele llamar el espacio de la representación y el homomorfismo ρ se suele llamar la acción de la representación. Para consideraciones teóricas, se escribirá a menudo sólo ρ en lugar de (V,ρ). En casos concretos, si no hay riesgo de confusión, escribiremos a veces simplemente V en lugar de (V,ρ). La dimensión (o grado) de una representación es, por definición, la dimensión de su espacio.

Hay una noción natural de (homo)morfismo de una representación (V,ρ) en una representación (W,σ) de un mismo grupo G, a saber una aplicación lineal Φ de V en W tal que

$$\sigma_g \circ \Phi = \Phi \circ \rho_g \qquad (g \in G) .$$

Queda así definida la categoría $\mathcal{R}(G)$ de todas las representaciones de G. Notemos que un monomorfismo (resp. epimorfismo; resp. isomorfismo) de representaciones es un homomorfismo inyectivo (resp. epiyectivo; resp. biyectivo) de representaciones.

1.2. <u>Unitariedad de las representaciones de</u> G.

Una representación unitaria de G es una representación (V,ρ) de G cuyo espacio V está provisto de un producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ (esto significa que la aplicación $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ es sesquilineal, hermitiana, definida positiva) invariante bajo ρ, es decir tal que

$$\langle \rho_g u, \rho_g v\rangle = \langle u,v\rangle \qquad (u,v \in V) ,$$

para todo $g \in G$. Esto es equivalente a decir que los operadores ρ_g son unitarios respecto a $\langle\ ,\ \rangle$, para cada $g \in G$. Diremos que una representación (V,ρ) de G es <u>unitarizable</u> si (y sólo si) existe algún producto escalar en V provisto del cual (V,ρ) devenga unitaria. Recordemos que,

PROPOSICION 1.1. <u>Toda representación</u> (V,ρ) <u>de dimensión finita de un grupo finito</u> G <u>es unitarizable</u>.

$\square$

1.3. <u>Representaciones irreducibles y completamente reducibles</u>.

Sea (V,ρ) una representación de G. Si U es un subespacio de V <u>estable</u> por ρ, es decir por todos los ρ_g $(g \in G)$, se define naturalment una representación de G en U $(U,\rho_{|U})$, que denotaremos simplemente por (U,ρ) , llamada <u>subrepresentación</u> de (V,ρ) .

Llamaremos <u>irreducible</u> (o <u>simple</u>) toda representación de G que no sea nula (es decir de espacio nulo) y que no admita subrepresentaciones propias (es decir de espacio propio); en caso contrario, la representación se dice <u>reducible</u>.

Una representación se llamará <u>completamente reducible</u> (o <u>semi-simple</u>) si se deja descomponer como suma directa de subrepresentaciones irreduci - bles.

Por supuesto, se dirá que una representación (V,ρ) es suma directa de una familia de subrepresentaciones (V_i,ρ^i) $(i \in I)$ sí y sólo si V es suma directa de sus subespacios V_i $(i \in I)$, ya que automáticamente cada automorfismo ρ_g se recupera como suma directa de los correspondien-te ρ_g^i $(g \in G)$.

TEOREMA 1.1. (MASCHKE-MOLIEN). <u>Toda representación de dimensión finita de un grupo finito</u> G <u>es completamente reducible</u>.

$\square$

Según lo que antecede vemos entonces que la determinación del conjunto $\widetilde{\mathcal{R}}(G)$ de tipos de isomorfía de representaciones de G se reduce esencialmente a determinar el conjunto $\hat{G}$, llamado clásicamente el <u>objeto dual unitario</u> de G , de todos los tipos de isomorfía de las representaciones irreducibles de G (que podemos suponer unitarias por la Proposición 1.1.

El conjunto $\hat{G}$ sólo tiene una estructura natural de grupo si G es conmutativo, en cuyo caso sus elementos se identifican naturalmente a los homomorfismos α de G en el grupo multiplicativo $\mathbb{C}^{\times}$ del cuerpo $\mathbb{C}$. Por supuesto, dada la finitud de G, la imagen de un tal α está contenida en el grupo de las raíces n-ésimas de la unidad, con $n = |G|$.

La ley de grupo de $\hat{G}$ está definida, en este caso, por

$$(\alpha\beta)(g) = \alpha(g)\beta(g) \qquad (g \in G) ,$$

para todo $\alpha, \beta \in \hat{G}$. Si G es cíclico, claramente $G \simeq \hat{G}$. Del teorema de estructura para grupos conmutativos finitos se deduce entonces que $G \simeq \hat{G}$ (de modo no canónico) para todo grupo finito conmutativo G.

Para el caso de un grupo finito G no conmutativo arbitrario, no se conoce, a esta fecha, ningún método general de clasificación o construcción de los elementos de $\hat{G}$. Por ejemplo, se sabe obtener de manera uniforme y elemental los elementos de $\hat{G}$ para $G = GL(2,k)$ (k cuerpo finito) solamente con ayuda de métodos "meta-geométricos" como el de la construcción de las representaciones de Weil de G, asociadas a cada plano cuadrático no degenerado sobre k. Este ejemplo lo veremos con más detalle en el Capítulo II.

§ 2. CONSTRUCCIONES FUNCTORIALES.

Para uso futuro, señalamos aquí diversas construcciones functoriales que permiten obtener nuevas representaciones a partir de representaciones dadas.

2.1. Suma directa de representaciones.

Si (V_i, ρ^i) $(i \in I)$ es una familia de representaciones de un mismo grupo G, entonces se llama <u>suma directa</u> de esta familia y se denota por

$\left(\bigoplus_{i\in I} V_i, \bigoplus_{i\in I} \rho^i\right)$ a la representación de G cuyo espacio $\bigoplus_{i\in I} V_i$ es la suma directa vectorial de los espacios V_i $(i \in I)$ y cuya acción $\bigoplus_{i\in I} \rho^i$ está definida por

$$\left(\bigoplus_{i\in I} \rho^i\right)_g = \bigoplus_{i\in I} \left(\rho^i\right)_g \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}} \left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right) ,$$

para todo $g \in G$. Esta construcción goza de las propiedades evidentes de asociatividad, conmutatividad y functorialidad. La usaremos especialmente para un I finito.

2.2. Contragradiente de una representación.

Si (V,ρ) es una representación de G , se llama contragradiente (o a veces simplemente conjugada) de (V,ρ) a la representación $(V^*, \check{\rho})$ de G , cuyo espacio V^* es el dual del espacio vectorial V y cuya acción $\check{\rho}$ está definida por

$$\check{\rho}_g = \left(\rho_{g^{-1}}\right)^* \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V^*) \qquad (g \in G) .$$

2.3. Productos tensoriales de representaciones.

El producto tensorial $\left(\bigotimes_{i\in I} V_i, \bigotimes_{i\in I} \rho^i\right)$ de una familia (V_i, ρ^i) $(i \in I)$ de representaciones de G , tiene, por definición, como espacio al producto tensorial de los espacios V_i $(i \in I)$ y como acción al producto tensorial (interno) de las acciones ρ^i $(i \in I)$ definido por

$$\left(\bigotimes_{i\in I} \rho^i\right)_g = \bigotimes_{i\in I} \left(\rho^i\right)_g \qquad (g \in G) .$$

Esta construcción goza de las propiedades evidentes de asociatividad, conmutatividad y functorialidad.

Cabe notar que si uno considera una familia (V_i,ρ^i) de representaciones de sendos grupos G_i, puede entonces formar, de manera natural, una representación de $\tilde{G} = \prod_{i\in I} G_i$, que se llama producto tensorial (externo) de los (V_i,ρ^i) $(i \in I)$ y se denota por $\left(\bigotimes_{i\in I} V_i, \bigotimes_{i\in I} \rho^i\right)$. El espacio de esta representación es aún el producto tensorial de los V_i $(i \in I)$, pero la acción está dada por

$$\left(\bigotimes_{i\in I} \rho^i\right)_{\tilde{g}} = \bigotimes_{i\in I} (\rho^i)_{g_i} ,$$

para cada $\tilde{g} = (g_i)_{i\in I} \in \tilde{G}$.

§ 3. ALGEBRA DE GRUPO.

La categoría de representaciones de un grupo G (con homomorfismo de representaciones como homomorfismos) es un caso particular de categoría de módulos sobre un álgebra, a saber la llamada <u>álgebra de grupo</u> $\mathbb{C}[G]$. Esta, se puede definir como el álgebra de espacio vectorial subyaciente $\mathbb{C}^G$, de todas las funciones complejas sobre G, cuya multiplicación es la convolución, definida por

$$(f_1 * f_2)(g) = \sum_{\substack{h,k\in G \\ hk=g}} f_1(h)f_2(k) \qquad (g \in G)$$

para toda $f_1,f_2 \in \mathbb{C}^G$. Se obtiene así inmediatamente una $\mathbb{C}$-álgebra unitaria, denotada $\mathbb{C}[G]$, cuyo grupo de inversibles contiene a G como subgrupo vía la inyección $g \to \delta_g$ con $\delta_g(h) = \delta(g,h)$ $(g,h \in G)$, donde δ es la función característica de la diagonal de $G \times G$ que vale 1 en la diagonal y se anula en el complementario de la diagonal.

Ahora bien, si (V,ρ) es una representación de G , entonces V tiene una estructura natural de $\mathbb{C}[G]$-módulo definiendo

$$f \cdot v = \sum_{g \in G} f(g)\, \rho_g(v) \qquad (f \in \mathbb{C}[G]\ ,\ v \in V)\ .$$

Recíprocamente si M es un $\mathbb{C}[G]$-módulo unitario (es decir $1 \cdot v = v$ para todo $v \in M$, donde 1 designa el neutro multiplicativo de $\mathbb{C}[G]$, esto es el neutro de G) , entonces la restricción a G de la ponderación por los elementos de $\mathbb{C}[G]$ define una acción ρ de G en M . A menudo llamaremos a un $\mathbb{C}[G]$-módulo simplemente por G-módulo. Se obtiene así de hecho una equivalencia de categorías entre la categoría de representaciones de G y la categoría de módulos sobre $\mathbb{C}[G]$.

Cabe notar que hasta el momento se tiene que la categoría de módulos sobre $\mathbb{C}[G]$ es semi-simple, o equivalentemente que el álgebra $\mathbb{C}[G]$ es semi-simple. Todo tal módulo se descompone entonces, de manera no necesariamente única, en suma directa de submódulos simples, pero sí se descompone de manera única en sus llamadas <u>componentes isotípicas</u> (que se pueden obtener agrupando en paquetes todos los sumandos simples isomorfos entre sí en una descomposición dada cualquiera). Usaremos esta primera terminología para las representaciones correspondientes.

§ 4. ENTRELAZAMIENTO DE REPRESENTACIONES

Clásicamente, los homomorfismos de representaciones se llaman <u>operadores de entrelazamiento</u>. Describir el entrelazamiento de una representación (consigo misma) significa entonces describir su álgebra de endomorfismos, llamada también a menudo <u>álgebra conmutante</u>.

En las consideraciones que siguen, designaremos frecuentemente una representación (V,ρ) de G simplemente por ρ . Si (W,σ) es otra representación de G , designaremos entonces a $\mathrm{Hom}\big((V,\rho),(W,\sigma)\big)$ por $\mathrm{Hom}(\rho,\sigma)$. En particular escribiremos $\mathrm{End}(\rho)$ en lugar de $\mathrm{End}(V,\rho)$.

LEMA 4.1. (SCHUR). i) <u>Una representación</u> (V,ρ) <u>de</u> G <u>es irreducible sí y sólo si</u> $\mathrm{End}(\rho) = \{h_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$, <u>donde</u> h_λ <u>es una homotecia de</u> V <u>de razón</u> λ .

ii) <u>Si</u> (V,ρ) <u>y</u> (W,σ) <u>son dos representaciones irreducibles no isomorfas de</u> G <u>entonces</u> $\mathrm{Hom}(\rho,\sigma) = \underline{0}$.

□

4.1. <u>El número de entrelazamiento y las multiplicidades</u>.

Designemos, en general, por $n\tau$ la representación igual a la suma directa de n copias de una representación τ de G , donde n es un entero positivo.

Para cada par de representaciones ρ,σ de G , se define el <u>número de entrelazamiento</u> $[\rho,\sigma]$ de ρ y σ por

$$[\rho,\sigma] = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(\rho,\sigma) .$$

Este invariante numérico de gran importancia práctica tiene las si - guientes propiedades.

PROPOSICION 4.1. i) $[\rho,\sigma]$ <u>depende sólo del tipo de isomorfía de</u> ρ <u>y</u> σ <u>en</u> $\mathcal{R}(G)$.

ii) $[\ ,\ ]$ <u>es una función bi-aditiva simétrica de</u> $\mathcal{R}(G) \times \mathcal{R}(G)$ <u>en</u> $\mathbb{N}$.

iii) $[m\rho, n\sigma] = mn[\rho,\sigma]$ <u>para todo</u> $\rho,\sigma \in \mathcal{R}(G)$ <u>y</u> $m,n \in \mathbb{N}$.

□

Designemos por $\pi^1, \ldots, \pi^r$ un sistema de representantes de los tipos de isomorfía de las representaciones irreducibles que aparecen en sendas descomposiciones arbitrarias de ρ y σ en irreducibles

$$\rho \simeq m_1\pi^1 \oplus \ldots \oplus m_r\pi^r ,$$

$$\sigma \simeq m_1'\pi^1 \oplus \ldots \oplus m_r'\pi^r ,$$

donde los m_i y m_i' $(1 \leq i \leq r)$ son enteros positivos (eventualmente nulos).

Como una aplicación del lema de Schur obtenemos

$$[\rho,\sigma] = \sum_{i=1}^{r} m_i m_i' ,$$

$$[\rho,\rho] = \sum_{i=1}^{r} m_i^2 .$$

Además, se obtiene una caracterización intrínseca de los números m_i , que habían sido definidos a partir de una descomposición arbitraria de ρ en irreducibles, a saber,

$$m_i = [\pi^i,\rho] = [\rho,\pi^i] \qquad (1 \leq i \leq r) .$$

Si π es una representación irreducible y ρ una representación cualquiera de G, definiremos, en general, la <u>multiplicidad de</u> π <u>en</u> ρ llamada también <u>número de veces que aparece</u> π <u>en</u> ρ, como el número $[\pi,\rho]$.

Esta multiplicidad no es otra cosa, por supuesto, que la longitud de la componente isotípica de tipo π de ρ, en el lenguaje de la teoría de módulos.

4.2. <u>Criterio de completitud</u>.

Sea G un grupo finito y sea (V,ρ) (resp. (V,σ)) la <u>representación regular derecha</u> (resp. <u>izquierda</u>) de G, de espacio $V = \mathbb{C}^G$ y acción ρ (resp. σ) definida por

$$(\rho_g f)(h) = f(hg) \qquad (g,h \in G \ , \ f \in V) ,$$

$$\text{(resp.} \quad (\sigma_g f)(h) = f(g^{-1}h) \qquad (g,h \in G \ , \ f \in V)).$$

OBSERVACION. σ es naturalmente isomorfa a ρ, vía $f \to \widetilde{f}$ $(f \in V)$, con $\widetilde{f}(g) = f(g^{-1})$ $(g \in G)$.

PROPOSICION 4.2. <u>Sea</u> (U,π) <u>una representación cualquiera de</u> G <u>y sea</u> (V,ρ) <u>la representación regular derecha de</u> G . <u>Entonces, se define un isomorfismo de</u> $\mathbb{C}$<u>-espacios vectoriales</u>

$$U^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\pi,\rho)$$

<u>asociando a cada</u> $\omega \in U^*$ <u>el operador lineal</u> Φ_ω <u>de</u> U <u>en</u> V <u>dado por</u>

$$\Phi_\omega(u) : g \mapsto \omega(\pi_g(u)) \qquad (g \in G \, , \, u \in U) \; .$$

□

COROLARIO 1. La multiplicidad de cada representación irreducible π de G en la representación regular derecha ρ de G es igual a la dimensión de π .

□

OBSERVACION. El mismo resultado vale para la representación regular izquierda.

COROLARIO 2. Se tiene $|\hat{G}| \leq |G|$.

□

COROLARIO 3. (Criterio de completitud). Sea $\pi^1, \ldots, \pi^r$ un sistema de representantes para el conjunto $\hat{G}$ de tipos de isomorfía de representaciones irreducibles de G . Sean $d_1, \ldots, d_r$ las respectivas dimensiones. Entonces

$$d_1^2 + \ldots + d_r^2 = |G| \; .$$

□

PROPOSICION 4.3. El álgebra conmutante $\mathrm{End}(\rho)$ de la representación regular derecha de G es isomorfa al álgebra de convolución $\mathbb{C}^G$.

□

COROLARIO. i) $r = |\hat{G}|$ es igual a la dimensión del centro del álgebra conmutante $\mathrm{End}(\rho)$.

ii) *El cardinal* $|\hat{G}|$ *de* $\hat{G}$ *es igual al número de clases de conjugación de* G .

□

§ 5. CARACTERES.

Se llama *carácter* de una representación ρ de G y se denota usualmente por χ_ρ , a la función compleja $g \to Tr(\rho_g)$ sobre G .

PROPOSICION 5.1. *Sean* ρ *y* σ *representaciones de* G . *Entonces*

i) $\chi_\rho(e) = \dim \rho$, *donde* e *es el elemento neutro de* G ,

ii) χ_ρ *es constante sobre cada clase de conjugación de* G , *más precisamente* $\chi_\rho(ghg^{-1}) = \chi_\rho(h) \qquad (g,h \in G)$,

iii) $\rho \simeq \sigma$ *implica* $\chi_\rho = \chi_\sigma$,

iv) $\chi_{\rho\oplus\sigma} = \chi_\rho + \chi_\sigma$,

v) $\chi_{\rho\otimes\sigma} = \chi_\rho \cdot \chi_\sigma$,

vi) $\chi_{\bar{\rho}} = \overline{\chi}_\rho$.

□

El espacio $\mathbb{C}^G$, admite un producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$, a saber aquel definido por

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} f_1(g)\overline{f_2(g)} \qquad\qquad (f_1, f_2 \in \mathbb{C}^G) .$$

TEOREMA 5.1. *Sean* ρ *y* σ *representaciones de* G . *Entonces*

$$[\rho,\sigma] = \langle \chi_\rho\ \chi_\sigma \rangle .$$

□

Designemos por $\mathfrak{X}(G)$ el conjunto de los caracteres de las representaciones irreducibles de G .

PROPOSICION 5.2. <u>Los proyectores isotípicos de una representación cualquiera</u> (V,ρ) <u>de</u> G <u>sobre sus componentes isotípicas son los proyectores</u>

$$P_\chi = \frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{g\in G} \overline{\chi(g)}\rho_g \qquad (\chi \in \mathfrak{X}(G))$$

<u>no nulos</u>.

□

§ 6. REPRESENTACIONES NATURALES DE UN GRUPO G .

Sea G un grupo finito. Supongamos que G actúa a la izquierda por $x \to gx$ $(x \in X\ ,\ g \in G)$ sobre un conjunto finito X (se dice entonces que X es un G-<u>conjunto izquierdo</u> o un G-<u>espacio izquierdo</u>). Llamaremos <u>representación natural (izquierda) de</u> G <u>asociada a la acción dada de</u> G <u>en</u> X (<u>o, equivalentemente, al</u> G-<u>espacio</u> X) a la representación (V,σ) de G de espacio $V = \mathbb{C}^X$ y acción σ definida por

$$(\sigma_g f)(x) = f(g^{-1}x) \qquad (f \in V\ ,\ g \in G\ ,\ x \in X)\ .$$

PROPOSICION 6.1. <u>El espacio</u> $V = \mathbb{C}^X$ <u>admite un producto escalar que es invariante bajo</u> σ , <u>a saber aquel definido por</u>

$$(1) \qquad \langle f_1,f_2\rangle = \frac{1}{|X|} \sum_{x\in X} f_1(x)\overline{f_2(x)} \qquad (f_1,f_2 \in V)\ .$$

□

Frecuentemente al espacio $\mathbb{C}^X$ provisto de este producto escalar es denotado por $L^2(X)$ (notación correcta si se piensa en la medida de conteo normalizada en X) .

OBSERVACIONES. 1) Similarmente, si ahora G actúa a la derecha por $x \to xg$ $(x \in X\ ,\ g \in G)$ sobre un conjunto finito X . Llamaremos representación natural (derecha) de G asociada a la acción de G en X a la representación (V,τ) de G de espacio $V = \mathbb{C}^X$ y acción τ definida por

$$(\tau_g f)(x) = f(xg) \qquad\qquad (f \in V\ ,\ g \in G\ ,\ x \in X)\ .$$

2) La representación regular izquierda (resp. derecha) de G es un caso particular de representación natural izquierda (resp. derecha) de G .

En lo que sigue, dentro de este párrafo, X designará un G-espacio izquierdo y $(L^2(X),\sigma)$ la representación natural de G a él asociada.

LEMA 6.1. Se define un isomorfismo del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathcal{K}(X) = \mathbb{C}^{X^2}$ $(X^2 = X \times X)$ de todas las funciones complejas K sobre X^2 , llamados núcleos en lo que sigue, sobre el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(L^2(X))$ asociando a cada $K \in \mathcal{K}(X)$ el operador lineal Φ_K de $L^2(X)$ definido por

$$[\Phi_K f](x) = \sum_{y \in X} K(x,y)f(y)$$

para toda $f \in L^2(X)$ y $x \in X$. Por este isomorfismo la composición de operadores en $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(L^2(X))$ corresponde al "producto de Volterra" (o producto matricial) de núcleos definido por

$$(K * L)(x,z) = \sum_{y \in X} K(x,y)L(y,z) \qquad\qquad (x,z \in X)$$

para $K,L \in \mathcal{K}(X)$.

□

PROPOSICION 6.2. <u>Por el isomorfismo del lema</u> 6.1, <u>la</u> $\mathbb{C}$-<u>álgebra</u> End(σ) <u>corresponde a la subálgebra</u> $K^G(X)$ <u>formada de los núcleos</u> K <u>que son</u> G-<u>invariantes en el sentido que</u>

$$K(gx,gy) = K(x,y) \qquad (x,y \in X)$$

<u>para todo</u> $g \in G$.

□

COROLARIO. <u>Se tiene</u> $[\sigma,\sigma] = |G \backslash X^2|$.

□

§ 7. REPRESENTACIONES INDUCIDAS.

Dado un subgrupo H de un grupo finito G y una representación (U,σ) de H , quisiéramos construir a partir de ella, de modo natural, una representación (V,ρ) de G , que será llamada <u>representación inducida por</u> (U,σ) <u>de</u> H <u>a</u> G y denotada por $\operatorname{Ind}_{H\uparrow G}(U,\sigma)$ o simplemente $\operatorname{Ind}_{H\uparrow G}\sigma$.

Existen diversos modelos para la representación inducida $\operatorname{Ind}_{H\uparrow G}\sigma$, nosotros daremos sólo uno, el llamado <u>modelo de MACKEY derecho</u> (para otros modelos ver, por ejemplo, [SA-1]), de espacio V que consta de todas las funciones $f : G \to U$ que son σ-homogéneas a izquierda, es decir

$$f(hg) = \sigma_h(f(g)) \qquad (g \in G\ ,\ h \in H)$$

y acción ρ definida por

$$(\rho_g f)(g') = f(g'g) \qquad (f \in V\ ,\ g,g' \in G)\ .$$

OBSERVACION. Es inmediato que el modelo de MACKEY derecho es isomorfo al modelo de MACKEY izquierdo (V',ρ'), en que V' consta de todas las funciones $f : G \to U$ tales que

$$f(gh) = \sigma_{h^{-1}}(f(g)) \qquad (g \in G\ ,\ h \in H)$$

y

$$(\rho'_g f)(g') = f(g^{-1}g') \qquad (f \in V'\ ,\ g,g' \in G)\ .$$

PROPOSICION 7.1. (Propiedad Universal). Para toda representación (W,τ) de G y todo homomorfismo ϕ de H-representaciones de (U,σ) en (W,τ) existe un único homomorfismo Φ de representaciones de G de $\operatorname{Ind}_{H\uparrow G}\sigma$ en (W,τ) tal que $\Phi \circ i = \phi$, donde i designa el H-monomorfismo canónico de (U,σ) en $\operatorname{Ind}_{H\uparrow G}\sigma$,

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ind}_{H\uparrow G}(U,\sigma) \arrow[r, dashed, "\exists!\Phi"] & (W,\tau) \\
(U,\sigma) \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "\phi"'] &
\end{tikzcd}$$

□

PROPOSICION 7.2. Hay un isomorfismo natural

$$\operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}_{H\uparrow G}\sigma,\tau) \xrightarrow{\ \sim\ } \operatorname{Hom}_H(\sigma,\operatorname{Res}_{G\downarrow H}\tau)$$

dado por $\Phi \mapsto \Phi \circ i$, para toda $\sigma \in \mathcal{R}(H)$ y $\tau \in \mathcal{R}(G)$.

□

COROLARIO. (Reciprocidad de FROBENIUS).

$$[\operatorname*{Ind}_{H\uparrow G} \sigma,\tau]_G = [\sigma, \operatorname*{Res}_{G\downarrow H} \tau]_H .$$

□

Nuestras representaciones naturales $(L^2(X),\sigma)$ de un grupo G, donde X es un G-espacio transitivo izquierdo, no son otros que las representaciones inducidas $\operatorname*{Ind}_{K\uparrow G}(\mathbb{C},\mathbb{1})$ desde la representación unidad $\mathbb{1}$ del estabilizador K en G de un punto cualquiera $x_o \in X$.

Con las notaciones de más arriba, el resultado siguiente es una consecuencia inmediata de la Reciprocidad de FROBENIUS.

PROPOSICION 7.3. Para toda representación (U,π) de G se tiene

$$\mathrm{Hom}(\sigma,\pi) \simeq \mathrm{Fix}_U(K) .$$

□

Si, en general, X es un G-espacio izquierdo y se descompone en G-órbitas en la forma

$$X = \bigcup_{i\in I} O_i ,$$

entonces, canónicamente, la representación natural asociada $(L^2(X),\sigma)$ se identifica a la suma directa

$$\left(\bigoplus_{i\in I} L^2(O_i), \bigoplus_{i\in I} \sigma^i\right) ,$$

en que cada σ^i es la representación natural asociada al G-espacio O_i $(i \in I)$.

COROLARIO. Sea (U,π) una representación cualquiera de G y sea K_i el estabilizador en G de un punto cualquiera $x_i \in O_i$ $(i \in I)$. Entonces

$$\mathrm{Hom}(\sigma,\pi) \simeq \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Fix}_U (K_i) .$$

□

OBSERVACION. La proposición anterior (resp. Corolario) se verifica también cuando X es un G-espacio transitivo derecho (resp. G-espacio derecho) y la correspondiente representación natural asociada $(L^2(X),\tau)$.

§ 8. LAS REPRESENTACIONES $V[\pi]$.

Dentro de este párrafo citaremos, principalmente, algunos resultados que serán de gran utilidad en la construcción del "descenso de SHINTANI" para el grupo $GL(2,k)$ (k cuerpo finito), principal objetivo del presente trabajo, el cual resultará ser una aplicación de lo expuesto en el presente párrafo y que pretendemos abordar en el Capítulo III.

PROPOSICION 8.1. i) Sea H un grupo finito. Sea (V,σ) representación de H y (U,π) representación irreducible de H . Designemos por $I_\pi(\sigma)$ la componente isotípica de tipo π de σ . Entonces existe un isomorfismo de H-módulos

$$\begin{aligned} ev : U \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathrm{Hom}(\pi,\sigma) &\to I_\pi(\sigma) \\ u\otimes\phi &\mapsto \phi(u) \end{aligned}$$

donde la acción de H en U es la dada por la representación π y en $\mathrm{Hom}(\pi,\sigma)$ es trivial.

ii) Sea G un grupo finito y (V,ρ) una representación de G tal que conmute con (V,σ) , en el sentido $\rho_g \circ \sigma_h = \sigma_h \circ \rho_g$ $(g \in G\ ,\ h \in H)$. Definimos una representación $(V,\sigma\otimes\rho)$ de $H \times G$ por

$$(\sigma \otimes \rho)(h,g) = \sigma_h \circ \rho_g \qquad (h \in H\ ,\ g \in G)\ .$$

Entonces $I_\pi(\sigma)$ es una $H \times G$-subrepresentación de $(V,\sigma\otimes\rho)$ y se tiene un isomorfismo de $H \times G$-módulos

$$U \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathrm{Hom}(\pi,\sigma) \xrightarrow{\sim} I_\pi(\sigma)$$

donde la acción de $(h,g) \in H \times G$ en $U \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathrm{Hom}(\pi,\sigma)$ envía $u \otimes \phi$ en $\pi_h(u) \otimes (\rho_g \circ \phi)$.

iii) Se tiene la siguiente descomposición

$$(V,\sigma \otimes \rho) \simeq \bigoplus_{\pi\in\hat{H}} U_\pi \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathrm{Hom}(\pi,\sigma) \qquad \text{como } H \times G\text{-módulos,}$$

$$(V,\rho) \simeq \bigoplus_{\pi\in\hat{H}} (\dim \pi)\ \mathrm{Hom}(\pi,\sigma) \qquad \text{como } G\text{-módulos,}$$

donde U_π es el espacio de π .

Demostración: Puesto que la aplicación ev es compatible con sumas directas e isomorfismos de representaciones de H para demostrar (i) basta sólo considerar el caso cuando (V,σ) es irreducible. Luego por lema de SCHUR $\mathrm{Hom}(\pi,\sigma) \simeq \delta(\pi,\sigma)\mathbb{C}$ donde $\delta(\pi,\sigma)$ es la función de Dirac sobre $\hat{H} \times \hat{H}$ que vale 1 si π y σ son isomorfas y cero en caso contrario. En consecuencia

$$U \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathrm{Hom}(\pi,\sigma) \simeq \delta(\pi,\sigma)(U \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{C}) ,$$

de donde ev es simplemente el isomorfismo canónico $U \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{C} \to U$, $u \otimes \lambda \to \lambda u$.

Por otro lado la componente isotípica $I_\pi(\sigma)$ de tipo π de σ (V general) viene dada por $I_\pi(\sigma) = P_{\chi_\pi}(V)$ donde P_{χ_π} es el proyector H-isotípico de tipo π de la representación (V,σ) y χ_π el carácter de π (cf. § 5, Prop. 5.2.).

Como, en este caso, (V,σ) es irreducible entonces $I_\pi(\sigma) = \delta(\pi,\sigma)V$, lo cual demuestra el isomorfismo

Para demostrar (ii) basta observar que $I_\pi(\sigma)$ es estable por ρ_g $(g \in G)$ debido a la conmutatividad de ρ y σ .

Finalmente la última aserción resulta de las dos anteriores.

□

En todo lo que sigue, en este párrafo, mantendremos las siguientes notaciones, a menos que se indique lo contrario, X designará un conjunto finito no vacío cualquiera, $V = L^2(X)$ el espacio de Hilbert complejo, de dimensión finita igual a la cardinalidad de X , provisto del producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ dado por (1); H y G grupos finitos cualesquiera con representaciones <u>unitarias</u>, con respecto a $\langle\ ,\ \rangle$, (V,σ) y (V,ρ) respectivamente que <u>conmuten entre sí</u>.

DEFINICION 8.1. <u>Se define la representación</u> $(V,\hat{\rho})$ <u>de</u> G <u>por</u>

$$\hat{\rho}_g f = \overline{\rho_g(\bar{f})} \qquad (f \in V\ ,\ g \in G)$$

donde $\overline{f}$ es la función conjugada (compleja) de f .

Análogamente se define $(V,\hat{\sigma})$.

LEMA 8.1. Existe un isomorfismo de $H \times G$-módulos

$$(V,(\sigma \otimes \rho)^\wedge) \xrightarrow{\sim} (V^*,(\sigma \otimes \rho)^\vee) .$$

Demostración: Definamos η como sigue

$$\eta : V \to V^* \quad , \qquad f \mapsto \eta(f) = \langle ?,\overline{f}\rangle \quad ;$$

es inmediato verificar que η es un isomorfismo $\mathbb{C}$-lineal.

Por otro lado

$$\begin{aligned}
[(\sigma \otimes \rho)^\vee (h,g) \circ \eta](f) &= [\check{\sigma}_h \circ \check{\rho}_g \circ \eta](f) \\
&= \langle ?,\overline{f}\rangle \circ \rho_{g^{-1}} \circ \sigma_{h^{-1}} \\
&= \langle (\rho_{g^{-1}} \circ \sigma_{h^{-1}})(?),\overline{f}\rangle \\
&= \langle ?,\sigma_h(\rho_g(\overline{f}))\rangle \\
&= \langle ?,\overline{(\hat{\sigma}_h \circ \hat{\rho}_g)(f)}\rangle \\
&= \eta((\hat{\sigma}_h \circ \hat{\rho}_g)(f)) \\
&= [\eta \circ (\sigma \otimes \rho)^\wedge(h,g)](f)
\end{aligned}$$

$f \in V$, $h \in H$, $g \in G$.

$\square$

LEMA 8.2. Sea (U,π) una representación de H . Entonces existe un isomorfismo de G-módulos

$$(\mathrm{Hom}(\check{\pi},\sigma),\rho_i) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Hom}(\hat{\sigma},\pi),\hat{\rho}_d)$$

donde

$$(\rho_i(g))(\phi) = \rho_g \circ \phi \qquad (\phi \in \mathrm{Hom}(\check{\pi},\sigma)\ ,\ g \in G)\ ,$$

$$(\hat{\rho}_d(g))(\phi') = \phi' \circ \hat{\rho}_{g^{-1}} \qquad (\phi' \in \mathrm{Hom}(\hat{\sigma},\pi)\ ,\ g \in G)\ .$$

Demostración: Sea λ el isomorfismo entre la representación contragradiente, $(\check{\pi})^{\vee}$, de $\check{\pi}$ y la representación π ; por lo tanto $\pi_h \circ \lambda = \lambda \circ (\pi_h^*)^*$ $(h \in H)$.

Definamos R como sigue

$$R : \mathrm{Hom}(\check{\pi},\sigma) \to \mathrm{Hom}(\hat{\sigma},\pi) \quad , \quad \phi \mapsto \lambda \circ \phi^* \circ \eta$$

donde η es el isomorfismo del Lema 8.1. (§ 8) y $\phi^* : \omega \to \omega \circ \phi \in (U^*)^*$ $(\omega \in V^*)$.

Ahora bien

$$\begin{aligned}
\pi_h \circ R(\phi) &= \pi_h \circ \lambda \circ \phi^* \circ \eta \\
&= \lambda \circ (\pi_h^*)^* \circ \phi^* \circ \eta \\
&= \lambda \circ (\phi \circ \check{\pi}_{h^{-1}})^* \circ \eta \\
&= \lambda \circ (\sigma_{h^{-1}} \circ \phi)^* \circ \eta \\
&= \lambda \circ \phi^* \circ \check{\sigma}_h \circ \eta
\end{aligned}$$

$$= \lambda \circ \phi^* \circ \eta \circ \hat{\sigma}_h$$

$$= R(\phi) \circ \hat{\sigma}_h$$

con $\phi \in \mathrm{Hom}(\check{\pi},\sigma)$, $h \in H$. Luego R está bien definido, y es un isomorfismo $\mathbb{C}$-lineal.

Finalmente verifiquemos que R es un entrelazamiento de ρ_i y $\hat{\rho}_d$. Para ello sea $\phi \in \mathrm{Hom}(\check{\pi},\sigma)$

$$\begin{aligned}[\hat{\rho}_d(g) \circ R](\phi) &= \lambda \circ \phi^* \circ \eta \circ \hat{\rho}_{g^{-1}} \\ &= \lambda \circ \phi^* \circ \check{\rho}_{g^{-1}} \circ \eta \\ &= \lambda \circ (\rho_g \circ \phi)^* \circ \eta \\ &= [R \circ \rho_i(g)](\phi)\end{aligned}$$

para todo $g \in G$.

□

OBSERVACION. Sea W un espacio vectorial complejo cualquiera y (V,τ) , $V = L^2(X)$, una representación cualquiera de un grupo finito P . Puesto que τ_p $(p \in P)$ es un endomorfismo lineal de V a él le está asociado una función compleja K_p sobre X^2 , llamado <u>núcleo</u>, dado por

$$(2) \qquad (\tau_p f)(x) = \sum_{y \in X} K_p(x,y) f(y) \qquad (f \in V\ ,\ p \in P)\ ,$$

luego podemos definir una representación (V_o,τ) de P de espacio $V_o = W^X$ y acción dada por (2), para $f \in V_o$.

A continuación introduciremos las representaciones $V[\pi]$.

DEFINICION 8.2. Sea (U,π) una representación de H ; definimos la representación $(V[\pi],\rho)$ de G cuyo espacio $V[\pi]$ consta de todas las funciones f de X en U tales que

$$\sigma_{h^{-1}} f = \pi_h \circ f \qquad (h \in H) ,$$

y cuya acción está determinada por ρ según (2), restringida al subespacio $V[\pi]$ que es estable por ρ .

LEMA 8.3. Sea (U,π) una representación de H . Entonces existe un isomorfismo de G-módulos

$$(\mathrm{Hom}(\hat{\sigma},\pi),\hat{\rho}_d) \xrightarrow{\sim} (V[\pi],\rho) .$$

Demostración: Recordemos que el conjunto $\{\delta_x \,/\, x \in X\}$ es una base ortonormal de V donde δ_x $(x \in X)$ es la función compleja definida sobre X por $\delta_x(y) = \delta(x,y)$ con δ la función característica de la diagonal de X^2 que vale 1 en la diagonal y se anula en el complementario de la diagonal.

Por otro lado sea K_g $(g \in G)$ el núcleo asociado al operador ρ_g $(g \in G)$, entonces la unitariedad de ρ , respecto al producto escalar $\langle\, ,\, \rangle$ de V , equivale a

$$K_g(x,y) = \overline{K_{g^{-1}}(y,x)} \qquad (x,y \in X)$$

con

$$K_g(x,y) = (\rho_g\, \delta_y)(x) \qquad (x,y \in X)$$

para todo $g \in G$.

Análogamente, sea L_h $(h \in H)$ el núcleo asociado a σ_h $(h \in H)$ entonces

$$L_h(x,y) = \overline{L_{h^{-1}}(y,x)} \qquad (x,y \in X)$$

con

$$L_h(x,y) = (\sigma_h\, \delta_y)(x) \qquad (x,y \in X)$$

para todo $h \in H$.

Ahora bien, sea $\phi \in \mathrm{Hom}(\hat{\sigma},\pi)$; entonces se define $F(\phi)$ por

$$F(\phi)(x) = \phi(\delta_x) \qquad (x \in X) \ .$$

Por lo tanto, para todo $x \in X$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sigma_{h^{-1}}(F(\phi))(x) &= \sum_{y\in X} L_{h^{-1}}(x,y)F(\phi)(y) \\
&= \sum_{y\in X} \overline{L_h(y,x)}\phi(\delta_y) \\
&= \phi\left(\overline{\sum_{y\in X} L_h(y,x)\delta_y}\right) \\
&= \phi(\overline{\sigma_h(\delta_x})) \\
&= (\phi \circ \hat{\sigma}_h)(\delta_x) \\
&= (\pi_h \circ \phi)(\delta_x) \\
&= (\pi_h \circ F(\phi))(x)
\end{aligned}$$

es decir

$$\sigma_{h^{-1}}(F(\phi)) = \pi_h \circ F(\phi) \qquad (\phi \in \mathrm{Hom}(\hat{\sigma},\pi)\ ,\ h \in H)\ .$$

Luego F es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal de $\mathrm{Hom}(\hat{\sigma},\pi)$ en $V[\pi]$. Aún más, es inmediato que F es un isomorfismo $\mathbb{C}$-lineal.

Finalmente verifiquemos que F es un entrelazamiento, es decir

$$\rho_g \circ F = F \circ \hat{\rho}_d(g) \qquad (g \in G)\ .$$

Sea $\phi \in \mathrm{Hom}(\hat{\sigma},\pi)$ y $x \in X$;

$$\begin{aligned}
[(\rho_g \circ F)(\phi)](x) &= \sum_{y\in X} K_g(x,y)F(\phi)(y) \\
&= \sum_{y\in X} \overline{K_{g^{-1}}(y,x)}\phi(\delta_y) \\
&= \phi\left(\overline{\sum_{y\in X} K_{g^{-1}}(y,x)\ \delta_y}\right) \\
&= \phi(\overline{\rho_{g^{-1}}(\delta_x})) \\
&= (\phi \circ \hat{\rho}_{g^{-1}})(\delta_x) \\
&= F(\phi \circ \hat{\rho}_{g^{-1}})(x) \\
&= [(F \circ \hat{\rho}_d(g))(\phi)](x)
\end{aligned}$$

para todo $g \in G$.

$\square$

TEOREMA 8.1. _Sea_ $\hat{H}$ _el conjunto de tipos de isomorfía de representaciones irreducibles de_ H . _Designemos por_ U_π _el espacio de_ $\pi \in \hat{H}$. _Entonces_

$$(V,\sigma \otimes \rho) \simeq \bigoplus_{\pi\in\hat{H}} U_{\pi}^{*} \otimes V[\pi] \qquad \text{\underline{como} } H \times G\text{-\underline{módulos}},$$

$$(V,\rho) \simeq \bigoplus_{\pi\in\hat{H}} (\dim \pi) V[\pi] \qquad \text{\underline{como} } G\text{-\underline{módulos}}.$$

$\square$

C A P I T U L O   II

LAS REPRESENTACIONES DE $GL(2,\mathbb{F}_q)$

En el presente Capítulo construiremos todas las representaciones complejas irreducibles de $GL(2,\mathbb{F}_q)$ por descomposición de sus representaciones de Weil asociadas a planos cuadráticos. También se entregarán varias otras construcciones de la serie principal que serán de gran utilidad en el Capítulo III.

Dentro de todo el Capítulo mantendremos las siguientes notaciones, $k = \mathbb{F}_q$ (cuerpo finito de q elementos), $G = GL(2,\mathbb{F}_q)$, B_o el subgrupo de Borel de G formado de matrices triangulares superiores y T_o el toro maximal de G formado de las matrices diagonales.

§ 1. LA SERIE PRINCIPAL DE G.

Recordemos brevemente dos construcciones bien conocidas de la serie principal de representaciones de G.

1.1. Construcción de la serie principal por inducción.

DEFINICION 1.1. Sean $\alpha,\beta \in \mathrm{car}(k^{\times})$. Designemos por $[\alpha,\beta]$ el carácter de B_o definido por

$$[\alpha,\beta]\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \alpha(a)\beta(d) \qquad (a,d \in k^{\times}\ ,\ b \in k)\ .$$

Se llamará serie principal (de representaciones) de G la familia de tipos de isomorfía de representaciones irreducibles de G obtenidas en la descomposición de las representaciones irreducibles (modelo de MACKEY derecho)

$$\left(H_{\alpha,\beta}\ ,\ \pi_{\alpha,\beta}\right) = \mathrm{Ind}_{B_o \uparrow G}\,[\alpha,\beta]\ .$$

Recordemos que $H_{\alpha,\beta}$ consta de todas las funciones complejas f sobre G que son $[\alpha,\beta]$-homogéneas, es decir

$$f(bg) = [\alpha,\beta](b)f(g) \qquad (g \in G\ ,\ b \in B_o)$$

y la acción $\pi_{\alpha,\beta}$ está dada por

$$[\pi_{\alpha,\beta}(g)f](h) = f(hg) \qquad (f \in H_{\alpha,\beta}\ ,\ g,h \in G)\ .$$

Como $|G| = (q-1)^2q(q+1)$ y $|B_o| = (q-1)^2q$, se tiene que $\dim_{\mathbb{C}} H_{\alpha,\beta} = q+1$.

LEMA 1.1. Sean $\alpha,\beta,\alpha',\beta' \in \mathrm{Car}(k^{\times})$. Designemos por $K(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial formado de todas las funciones complejas K sobre G verificando la condición

$$K(b'gb) = [\alpha',\beta'](b')K(g)[\alpha,\beta](b) \qquad (b,b' \in B_o\ ,\ g \in G)\ .$$

Entonces, la correspondencia que a cada $K \in \mathcal{K}(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$ le asigna el operador Φ_K dado por

$$[\Phi_K(f)](g) = \sum_{h \in G} K(gh^{-1})f(h) \qquad (f \in H_{\alpha,\beta}\ ,\ g \in G)\ ,$$

define un isomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales de $\mathcal{K}(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$ en $\mathrm{Hom}(\pi_{\alpha,\beta}, \pi_{\alpha',\beta'})$. Además, la aplicación anteriormente definida transforma el producto de convolución de funciones complejas sobre G en el producto de operadores.

$\square$

Denotemos por $N_G(T_o)$ el normalizador de T_o en G y W_o el grupo de Weyl $N_G(T_o) / T_o$ de G. Entonces $W_o = \{1, w_o\}$ con $w_o = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T_o$. El grupo W_o actúa naturalmente sobre los caracteres de T_o por

$$(\alpha,\beta)^w(h) = (\alpha,\beta)(whw^{-1})$$

para $w \in W_o$, $\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$, $h \in T_o$, donde

$$(\alpha,\beta)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \alpha(a)\beta(d) \qquad (a,d \in k^\times)\ .$$

Con ayuda de los resultados inmediatamente anteriores y de la descomposición de Bruhat

$$G = B \,\dot{\cup}\, Bw_oB$$

de G , se demuestra fácilmente la

PROPOSICION 1.1. Sean $\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$. Se tiene que

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(\pi_{\alpha,\beta}, \pi_{\alpha',\beta'}) = |\{w \in W_o \,/\, (\alpha,\beta)^w = (\alpha',\beta')\}| \ .$$

□

COROLARIO. <u>Sean</u> $\alpha,\beta,\alpha',\beta' \in \mathrm{Car}(k^\times)$, <u>entonces</u>

i) $H_{\alpha,\beta}$ <u>es irreducible si</u> $\alpha \neq \beta$.

ii) $H_{\alpha,\alpha}$ <u>es suma directa de dos representaciones irreducibles no isomorfas.</u>

iii) $H_{\alpha',\beta'}$ <u>es isomorfa a</u> $H_{\alpha,\beta}$ <u>sí y sólo si</u> $(\alpha',\beta') = (\alpha,\beta)$ <u>ó</u> $(\alpha',\beta') = (\beta,\alpha)$.

□

La descomposición explícita de $H_{\alpha,\alpha}$ $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times))$ es la siguiente

$$H_{\alpha,\alpha} = H^1_\alpha \oplus H^q_\alpha$$

donde H^1_α designa la recta en $H_{\alpha,\alpha}$ engendrada por la función compleja $\alpha \circ \det$ (det. es el homomorfismo determinante de G sobre $k^\times$) , y donde la subrepresentación irreducible H^q_α de dimensión q está dada por

$$H^q_\alpha = \left\{ f \in H_{\alpha,\alpha} \,/\, \sum_{\substack{g\in G \\ \det g = t}} f(g) = 0 \qquad \forall\, t \in k^\times \right\} .$$

Denotemos por π^1_α (resp. π^q_α) la restricción de $\pi_{\alpha,\alpha}$ al subespacio H^1_α (resp. H^q_α) . Luego $(H^1_\alpha, \pi^1_\alpha) = (\mathbb{C}, \alpha \circ \det)$ (a menos de isomorfía). La representación $(H^q_\alpha, \pi^q_\alpha)$ es llamada <u>la representación de Steinberg de</u> G <u>asociada al carácter</u> α <u>y denotada por</u> $\mathrm{St}(\alpha)$.

Designemos por $(H_{\{\alpha,\beta\}},\pi_{\{\alpha,\beta\}})$ el tipo de isomorfía de $(H_{\alpha,\beta},\pi_{\alpha,\beta})$, para $\alpha,\beta \in Car(k^{\times})$. La siguiente proposición entrega una descripción de la serie principal de G.

PROPOSICION 1.2. La serie principal de representaciones de G está formada de:

$\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$ representaciones $\pi_{\{\alpha,\beta\}}$ $(\alpha,\beta \in Car(k^{\times}),\ \alpha \neq \beta)$ de dimensión $q+1$,

$q-1$ representaciones π_{α}^{q} $(\alpha \in Car(k^{\times}))$ de dimensión q, y

$q-1$ representaciones $\pi_{\alpha}^{1} = \alpha \circ \det$ $(\alpha \in Car(k^{\times}))$ de dimensión 1.

□

1.2. La representación natural de G .

Dentro de lo que sigue k^2 indicará el plano finito $k \times k$.

DEFINICION 1.2. La representación natural τ de G es definida dentro del espacio $\overline{M} = \mathbb{C}^{k^2\times k^{\times}}$ por

$$[\tau_g(f)](x,t) = f(xg,\ t \det g^{-1}) \qquad (g \in G,\ f \in \overline{M},\ x \in k^2,\ t \in k^{\times})$$

(el grupo G actúa sobre k^2 por multiplicación matricial a la derecha).

Por de pronto obtenemos una descomposición evidente

$$(\overline{M},\tau) = (M^{\circ},\tau) \oplus (M,\tau) = \bigoplus_{\alpha\in Car(k^{\times})} (\mathbb{C},\alpha \circ \det) \oplus (M,\tau)$$

donde

$$M^{\circ} = \{f \in \overline{M} \,/\, \mathrm{sop}\ f \subset \{0\} \times k^{\times}\},$$

$$M = \{f \in \overline{M} \,/\, f(0,t) = 0 \qquad \forall\, t \in k^{\times}\} ,$$

donde denotamos todavía por τ la restricción de τ al subespacio estable M° (resp. M) .

Por otro lado, podemos descomponer $(\overline{M},\tau)$ según los caracteres de $k^{\times} \times k^{\times}$ como sigue

$$(\overline{M},\tau) = \bigoplus_{\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^{\times})} (\overline{M}_{\alpha,\beta} ,\tau)$$

donde

$$\overline{M}_{\alpha,\beta} = \{f \in \overline{M} \,/\, f(rx,t(rs)^{-1}) = \alpha(r)\beta(s)f(x,t) \qquad \forall\, r,s,t \in k^{\times} , \ \forall\, x \in k^{2}\}$$

donde designamos todavía por τ la restricción de τ al subespacio esta - ble $\overline{M}_{\alpha,\beta}$ $(\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^{\times}))$.

Coloquemos

$$M_{\alpha,\beta} = \overline{M}_{\alpha,\beta} \cap M \qquad (\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^{\times})) .$$

Luego, es inmediato que

$$M_{\alpha,\beta} = \overline{M}_{\alpha,\beta} \qquad \text{si } \alpha \neq \beta \qquad (\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^{\times}))$$

$$\left(\overline{M}_{\alpha,\alpha} , \tau\right) = \left(M_{\alpha,\alpha} , \tau\right) \oplus (\mathbb{C}, \alpha \circ \det) \qquad (\alpha \in \mathrm{Car}(k^{\times}))$$

y

$$\dim_{\mathbb{C}} M_{\alpha,\beta} = q + 1 \qquad (\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^{\times})) .$$

DEFINICION 1.3. Para $\alpha,\beta,\alpha',\beta' \in \mathrm{Car}(k^\times)$, se designa por $\underline{\underline{N}}(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial formado de funciones complejas N sobre $(k^2 \times k^\times) \times (k^2 \times k^\times)$ (llamados núcleos en lo que sigue) tales que

$$N(x'g',t'\det g'^{-1};\ xg,t\det g^{-1}) = N(x',t';x,t)$$

y que

$$N(r'x',t'(r's')^{-1};rx,t(rs)^{-1}) = \alpha'(r')\beta'(s')\alpha^{-1}(r)\beta^{-1}(r)N(x',t';x,t)$$

para cualquier $r,r',t,t',s,s' \in k^\times$, $x,x' \in k^2$, $g \in G$. Además, denotemos por $N(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$ el subespacio de $\underline{\underline{N}}(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$ formado de núcleos N tales que

$$N(0,r;y,s) = N(x,t;0,u) = 0 \qquad (r,s,t,u \in k^\times,\ x,y \in k^2)\ .$$

PROPOSICION 1.3. La correspondencia que a cada núcleo $N \in \underline{\underline{N}}(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$ para cualquier $\alpha,\beta,\alpha',\beta' \in \mathrm{Car}(k^\times)$, le asigna el operador Φ_N de $\overline{M}_{\alpha,\beta}$ en $\overline{M}_{\alpha',\beta'}$ dado por

$$[\Phi_N(f)](\xi) = \sum_{\eta\in k^2\times k^\times} N(\xi,\eta)f(\eta) \qquad (\xi \in k^2 \times k^\times)$$

define una aplicación que transforma la multiplicación matricial de núcleos en producto de operadores y es un isomorfismo del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\underline{\underline{N}}(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$ (resp. $N(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$) sobre el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathrm{Hom}\left(\overline{M}_{\alpha,\beta}\ ,\ \overline{M}_{\alpha',\beta'}\right)$ (resp. $\mathrm{Hom}\left(M_{\alpha,\beta}\ ,\ M_{\alpha',\beta'}\right)$), para cualquier $\alpha,\beta,\alpha',\beta' \in \mathrm{Car}(k^\times)$.

□

PROPOSICION 1.4. _Sean_ $\alpha,\beta,\alpha',\beta' \in \mathrm{Car}(k^{\times})$, _entonces_

i) $M_{\alpha,\beta}$ _es irreducible si_ $\alpha \neq \beta$;

ii) $M_{\alpha,\alpha}$ _es suma directa de dos representaciones irreducibles no isomorfas;_

iii) $M_{\alpha,\beta}$ _es isomorfa a_ $M_{\alpha',\beta'}$ _sí y sólo si_ $(\alpha',\beta') = (\alpha,\beta)$ _ó_ $(\alpha',\beta') = (\beta,\alpha)$.

□

La descomposición explícita de $M_{\alpha,\alpha}$ $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^{\times}))$ viene dada por

$$M_{\alpha,\alpha} = M_{\alpha}^{1} \oplus M_{\alpha}^{q}$$

donde M_{α}^{1} es el subespacio de $M_{\alpha,\alpha}$ formado de funciones constantes, y la subrepresentación irreducible M_{α}^{q} de dimensión q está dada por

$$M_{\alpha}^{q} = \{f \in M_{\alpha,\alpha} \,/\, \sum_{s\in k} f(1,s;1) = -f(0,1;1)\} \,.$$

1.3. Isomorfismo entre la representación natural y la serie principal.

A continuación demostraremos que la representación natural de G vuelve a dar la serie principal.

PROPOSICION 1.5. _Existe un isomorfismo de representaciones de_ G

$$M_{\alpha,\beta} \simeq H_{\alpha,\beta}$$

para cualquier $\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^{\times})$.

Demostración: Puesto que $H_{\alpha,\beta} \simeq H_{\beta,\alpha}$ (cf. § 1, Corolario de la Proposición 1.1.) construiremos un morfismo no nulo Φ entre las representaciones de G $H_{\beta,\alpha}$ y $M_{\alpha,\beta}$. Como $H_{\beta,\alpha} = \mathrm{Ind}_{B_o \uparrow G} [\beta,\alpha]$, es suficiente construir un morfismo no nulo entre la representación $[\beta,\alpha]$ de B_o y la restricción de $M_{\alpha,\beta}$ a B_o (cf. Capítulo I, § 7, Proposición 7.1.). Para ello consideremos la aplicación no nula que envía a $1 \in \mathbb{C}$ en la función $f_1 \in M_{\alpha,\beta}$ de soporte $\{0\} \times k^\times \times k^\times$. Es inmediato verificar que esta aplicación es un morfismo entre las representaciones involucradas de B_o. Además f_1 es claramente un generador del $\mathbb{C}[G]$-módulo $M_{\alpha,\beta}$, para todo $\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$. Por consiguiente el morfismo Φ definido por f_1 es un epimorfismo de $H_{\beta,\alpha}$ en $M_{\alpha,\beta}$. Ahora bien, como $\dim H_{\beta,\alpha} = q + 1 = \dim M_{\alpha,\beta}$, para todo $\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$, el epimorfismo Φ resulta ser un isomorfismo.

□

DEFINICION 1.4. <u>Dentro de lo que sigue, diremos que la representación $(M_{\alpha,\beta},\tau)$ $(\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$, $\alpha \neq \beta)$ constituye el modelo natural del tipo de isomorfía $\pi_{\{\alpha,\beta\}}$. Para $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$, diremos que (M_α^q,τ) es el modelo natural de la representación de Steinberg $\mathrm{St}(\alpha)$, a menudo denotada también por π_α^q dentro de lo que sigue.</u>

OBSERVACION. Para otro modelo de la representación de Steinberg $\mathrm{St}(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$, ver, por ejemplo, [SA-2].

§ 2. LA REPRESENTACION DE WEIL DE G .

Describiremos, en el presente párrafo la representación de Weil de G asociada a un espacio cuadrático (no degenerado) sobre k .

2.1. Una presentación de $GL(2,k)$, k un cuerpo cualquiera.

DEFINICION 2.1. Sean

$$h(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \qquad (a \in k^{\times}) ,$$

$$h'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \qquad (t \in k^{\times}) ,$$

$$u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b \in k) ,$$

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

y

$$H_o = \{h(a) \,/\, a \in k^{\times}\} ,$$

$$H'_o = \{h(t) \,/\, t \in k^{\times}\} ,$$

$$U_o = \{u(b) \,/\, b \in k\} .$$

TEOREMA 2.1. El grupo $GL(2,k)$ está engendrado por los generadores $h(a)$ $(a \in k^{\times})$, $h'(t)$ $(t \in k^{\times})$, $u(b)$ $(b \in k)$ y w con las relaciones

(i) $h(a)h(d) = h(ad)$ $\qquad (a,d \in k^{\times})$,

(ii) $h'(r)h'(t) = h'(rt)$ $\qquad (r,t \in k^{\times})$,

(iii) $u(a)u(b) = u(a + b)$ $\qquad (a,b \in k)$,

(iv) $h'(t)h(a) = h(a)h'(t)$ $\qquad (a,t \in k^{\times})$,

(v) $u(b)h'(t) = h'(t)u(tb)$ $(b \in k\ ,\ t \in k^{\times})$,

(vi) $h(a)u(b) = u(a^2b)h(a)$ $(b \in k\ ,\ a \in k^{\times})$,

(vii) $w^2 = h(-1)$,

(viii) $wh'(t) = h(t)h'(t)w$ $(t \in k^{\times})$,

(ix) $wh(a) = h(a^{-1})w$ $(a \in k^{\times})$,

(x) $wu(a^{-1})wu(a)wu(a^{-1}) = h(a)$ $(a \in k^{\times})$.

De hecho se tiene

$$GL(2,k) = H'_oH_oU_o \cup H'_oH_oU_owU_o \ .$$

□

2.2. Formas cuadráticas y sumas de Gauss sobre el cuerpo finito $k = \mathbb{F}_q$.

Dentro de este número citaremos algunos resultados bien conocidos sobre la clasificación de formas cuadráticas sobre un cuerpo finito k , de las sumas cuadráticas (de Gauss) que le están asociadas solamente para el caso de dimensión par ya que, dentro de todo lo que sigue, necesitaremos sólo la representación de Weil asociada a un espacio cuadrático no degenerado de dimensión par. En el caso de dimensión impar se puede citar como referencia [SA-2] .

DEFINICION 2.2. Denotaremos por x la función coordenada sobre k y por x,y las funciones coordenadas canónicas sobre $k^2 = k \times k$. Llamaremos plano hiperbólico a todo espacio cuadrático isomorfo al espacio (k^2,xy) .

Designaremos por K la única extensión cuadrática de k y N la norma de K sobre k .

TEOREMA 2.2. Todo espacio cuadrático no degenerado (E,Q) sobre k es suma ortogonal de planos hiperbólicos y de un espacio cuadrático (E',Q') reducido a 0 o bien isomorfo a uno de los espacios siguientes:

i) (k,x^2) ,

ii) $(k,t_o x^2)$ (si car $k \neq 2$, se fija un no cuadrado $t_o \in k$) ,

iii) (K,N) .

Si $(E',Q') = 0$ ó $(E',Q') \simeq (k,x^2)$ se dice que (E,Q) es desplegada (sobre k) ; si $(E',Q') \simeq (k,t_o x^2)$ ó $(E',Q') \simeq (K,N)$ se dice que (E,Q) es no desplegada (sobre k) .

Demostración: Es inmediata de la descomposición de Witt de (E,Q).

$\square$

DEFINICION 2.3. Sea $\psi \in \mathrm{Car}(k^+)$ y (E,Q) un espacio cuadrático sobre k . Se define la suma de Gauss $S_{\psi\circ Q}$ asociada a $\psi \circ Q$ por

$$S_{\psi\circ Q} = \sum_{v\in E} \psi(Q(v))$$

$$S_{\psi\circ Q}(t) = S_{\psi^t\circ Q} \qquad (t \in k^{\times}) ,$$

donde

$$\psi^t(a) = \psi(ta) \qquad (a \in k^+) .$$

PROPOSICION 2.1. Sean (E,Q) y (E',Q') dos espacios cuadráticos sobre k . Entonces, para todo $\psi \in \mathrm{Car}(k^+) - \{\mathbb{1}\}$,

i) $S_{\psi\circ Q} = S_{\psi\circ Q'}$ si $Q \simeq Q'$

en particular, $S_{\psi\circ Q}$ no depende de ψ si Q es no degenerada de rango par. Recuerdese que si Q es no degenerada de rango par, se tiene que $Q \simeq tQ \quad (t \in k^{\times})$.

ii) $\quad S_{\psi\circ(Q\oplus Q')} = S_{\psi\circ Q}\cdot S_{\psi\circ Q'}$ (suma directa ortogonal).

$\square$

DEFINICION 2.4.

$$\varepsilon(Q) = \begin{cases} 1 & \text{si } (E,Q) \text{ es desplegada} \\ -1 & \text{si } (E,Q) \text{ es no desplegada.} \end{cases}$$

PROPOSICION 2.2. Sea (E,Q) un espacio cuadrático no degenerado de dimensión par sobre k . Entonces, para todo $\psi \in \mathrm{Car}(k^{+}) - \{\mathbb{1}\}$,

$$S_{\psi\circ Q} = \varepsilon(Q)\,|E|^{1/2} \ .$$

Demostración: Puesto que $\dim E$ es par basta calcular $S_{\psi\circ xy}$ y $S_{\psi\circ N}$ (cf. § 2, Teorema 2.2. y Proposición 2.1).

$$\begin{aligned} S_{\psi\circ xy} &= \sum_{(v_1,v_2)\in k^2} \psi(v_1v_2) \\ &= \sum_{t\in k} \sum_{\substack{(v_1,v_2)\in k^2 \\ v_1v_2=t}} \psi(t) \\ &= \sum_{t\in k} (q - 1 + q\delta(t))\psi(t) \\ &= q \end{aligned}$$

$$S_{\psi\circ N} = \sum_{v\in K} \psi(N(v))$$

$$= \sum_{t\in k} \sum_{\substack{v\in K \\ N(v)=t}} \psi(t)$$

$$= \sum_{t\in k} (q + 1 - q\delta(t))\psi(t)$$

$$= -q$$

□

2.3. Definición de la representación de Weil.

Sea (E,Q) un espacio cuadrático (no degenerado) sobre k. Se denotará por B la forma bilineal asociada a Q, definida por

$$B(x,y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y) \qquad (x,y \in E) .$$

Dentro de todo lo que sigue, denotaremos por $\mathcal{X}$ el conjunto de caracteres no triviales de k^+. El grupo multiplicativo $k^\times$ actúa transitivamente sobre $\mathcal{X}$ por

$$\psi^t(a) = \psi(ta) \qquad (t \in k^\times ,\ a \in k^+ ,\ \psi \in \mathcal{X}) .$$

TEOREMA 2.3. Sea (E,Q) un espacio cuadrático (no degenerado), de dimensión par $2n$, sobre k. Definimos una representación (V_Q,ρ^Q) de G, llamada representación de Weil de G asociada al espacio cuadrático (E,Q), cuyo espacio es

$$V_Q = \mathbb{C}^{E\times\mathcal{X}}$$

y cuya acción $\rho^Q = \rho$ está definida sobre los generadores de G por las fórmulas siguientes

$$(3) \qquad [\rho(h(a))f](x,\psi) = f(ax,\psi) \qquad (a \in k^\times) ,$$

$$(4) \qquad [\rho(h'(t))\ f](x,\psi) = f(x,\psi^{t^{-1}}) \qquad (t \in k^\times) ,$$

$$(5) \qquad [\rho(u(b))f](x,\psi) = \psi(bQ(x))f(x,\psi) \qquad (b \in k^+) ,$$

$$(6) \qquad [\rho(w)f](x,\psi) = \varepsilon(Q)q^{-n} \sum_{y\in E} \psi[B(x,y)]f(y,\psi)$$

para $f \in V_Q$, $x \in E$, $\psi \in \mathcal{X}$.

Por otra parte, si γ es una similitud, de multiplicador m_γ , de (E,Q) sobre un espacio cuadrático (E',Q') , entonces γ induce un isomorfismo $\sigma(\gamma)$ de $(V_{Q'},\rho^{Q'})$ sobre (V_Q,ρ^Q) definido por

$$[\sigma(\gamma)f'](x,\psi) = f'(\gamma^{-1}(x),\psi^{m_\gamma}) \qquad (f' \in V_{Q'} , x \in E , \psi \in \mathcal{X}) ;$$

si γ' es una similitud de (E',Q') sobre un espacio cuadrático (E'',Q'') , entonces

$$\sigma(\gamma' \circ \gamma) = \sigma(\gamma') \circ \sigma(\gamma) .$$

Demostración: Debemos verificar que las relaciones (i) a (x) entre los generadores de G sean respetadas por la definición de los operadores que acabamos de dar. Esto es trivial para las relaciones (i) a (iv) e inmediato para las relaciones (v), (vi), (viii) y (ix). Comprobemos la relación (vii), para $f \in V_Q$, $x \in E$, $\psi \in \mathcal{X}$,

$$[\rho(w^2)f](x,\psi) = q^{-2n} \sum_{y,z\in E} \psi(B(x,y))\psi(B(y,z))f(z,\psi)$$

$$= q^{-2n} \sum_{z\in E} f(z,\psi) \sum_{y\in E} \psi(B(x+z,y))$$

$$= q^{-2n} \sum_{z\in E} f(z,\psi)\,|E|\,\delta(x+z)$$

$$= f(-x,\psi) \ .$$

La última relación es equivalente a

$$wu(a)w = h(-a^{-1})u(-a)wu(-a^{-1}) \qquad (a \in k^\times) \ .$$

Sean $a \in k^\times$, $f \in V_Q$, $x \in E$ y $\psi \in \mathfrak{X}$,

$$[\rho(w)\rho(u(a))\rho(w)f](x,\psi) = q^{-2n} \sum_{y,z\in E} \psi[B(x,y) + aQ(y) + B(y,z)]\,f(z,\psi)$$

$$= q^{-2n} \sum_{y',z\in E} \psi[a^{-1}(B(x+z,y') + Q(y'))]\,f(z,\psi)$$

$$= q^{-2n}\, S_{\psi\circ Q}(a^{-1}) \sum_{z\in E} \psi[-a^{-1}Q(x+z)]\,f(z,\psi)$$

$$= \varepsilon(Q)\,q^{-n} \sum_{z\in E} \psi[-a^{-1}Q(x+z)]\,f(z,\psi)$$

ya que, por Proposición 2.2. (§ 2),

$$S_{\psi\circ Q}(a) = \varepsilon(Q)\,|E|^{1/2} \qquad (a \in k^\times) \ .$$

Por otra parte

$$[\rho(h(-a^{-1}))\rho(u(-a))\rho(w)\rho(u(-a^{-1}))f](x,\psi) =$$

$$= \psi(-a^{-1}Q(x))\varepsilon(Q)q^{-n} \sum_{z\in E} \psi[-a^{-1}(B(x,z) + Q(z))]\, f(z,\psi)$$

$$= \varepsilon(Q)q^{-n} \sum_{z\in E} \psi[-a^{-1}Q(x + z)]\, f(z,\psi) \; ,$$

verificándose así la relación (x) . Con esto queda demostrado que la re - presentación ρ está bien definida y por ende el teorema, puesto que sus dos últimas aseveraciones son claras.

$\square$

OBSERVACION. Si se elige un carácter $e \in \mathcal{X}$ la representación de Weil (V_Q,ρ^Q) puede ser realizada en el espacio $\mathbb{C}^{E\times k^\times}$ colocando

$$f(x,e^t) = f(x,t) \qquad (f \in V_Q \;,\; x \in E \;,\; t \in k^\times) \;.$$

§ 3. LA REPRESENTACION DE WEIL ASOCIADA A UN PLANO HIPERBOLICO.

En el presente párrafo, vamos a descomponer la representación de Weil (V_Q,ρ^Q) de G asociada al plano hiperbólico $(E,Q) = (k^2,xy)$ y mostraremos que volvemos a recuperar toda la serie principal de representaciones irreducibles de G . A modo de abreviación, dentro de este párrafo escribiremos simplemente (V,ρ) en lugar de (V_Q,ρ^Q) .

3.1. El grupo $\Gamma = GO(Q)$.

Pretendemos describir el grupo $\Gamma = GO(Q)$ de todas las similitudes ortogonales de (E,Q) . Todo par $(r,s) \in k^\times \times k^\times$ define una similitud $\gamma(r,s)$ de multiplicador rs , de (E,Q) , por

$$\gamma(r,s)(x_1,x_2) = (rx_1,sx_2) \qquad (x_1,x_2 \in k) .$$

Definamos T por

$$T(x_1,x_2) = (x_2,x_1) \qquad (x_1,x_2 \in k) .$$

Entonces $T \in O(Q)$ y Γ es el producto semidirecto del grupo

$$\Gamma^+ = \{\gamma(r,s) \mid r,s \in k^\times\} ,$$

isomorfo a $k^\times \times k^\times$, y del subgrupo $\{1,T\}$, con las relaciones

$$T^2 = 1 \quad \text{y} \quad \gamma(r,s) \circ T = T \circ \gamma(s,r) \qquad (r,s \in k^\times) .$$

3.2. Descomposición de (V,ρ) según Γ .

Denotemos por (V,σ) la representación natural (izquierda) de Γ definida por

$$[\sigma(\gamma)f](x,\psi) = f\left(\gamma^{-1}(x),\psi^{m_\gamma}\right) \qquad (\gamma \in \Gamma,\ f \in V,\ x \in k^2,\ \psi \in \mathfrak{X})$$

donde m_γ es el multiplicador de la similitud γ .

DEFINICION 3.1. Se define, para todo $\alpha,\beta \in Car(k^\times)$,

$$V(\alpha,\beta) = \{f \in V \,/\, \sigma\left(\gamma(r^{-1},s^{-1})\right)f = \alpha(r)\beta(s)\, f \qquad r,s \in k^\times\} .$$

$V(\alpha,\beta)$ es una subrepresentación de (V,ρ) y se tiene la siguiente descomposición de G-módulos

$$V = \bigoplus_{\alpha,\beta\in Car(k^\times)} V(\alpha,\beta) \ .$$

PROPOSICION 3.1. Se tiene, para todo $\alpha,\beta \in Car(k^\times)$

$$\dim_{\mathbb{C}} V(\alpha,\beta) = q + 1 + \delta(\alpha,\beta)$$

(donde δ es la función característica de la diagonal de $Car(k^\times) \times Car(k^\times)$ que vale 1 en la diagonal y se anula en el complementario de la diagonal).

Demostración: Sea $f \in V(\alpha,\beta)$, entonces

(7) $$f(rx_1,sx_2;\psi) = \alpha(r)\beta(s)f(x_1,x_2;\psi^{rs})$$

para todo $r,s \in k^\times$, $x_1,x_2 \in k$, $\psi \in \mathfrak{X}$.

Fijemos un caracter $e \in \mathfrak{X}$, luego es inmediato de (7) que

$$f(0,0;\psi) = \delta(\alpha,\beta)\alpha^{-1}(t)f(0,0;e) \qquad (\psi = e^t \ , \ t \in k^\times)$$

$$f(x_1,0;\psi) = (\alpha\beta^{-1})(x_1)\beta^{-1}(t)f(1,0;e) \qquad (\psi = e^t \ , \ x_1,t \in k^\times)$$

$$f(0,x_2;\psi) = (\alpha^{-1}\beta)(x_2)\alpha^{-1}(t)f(0,1;e) \qquad (\psi = e^t \ , \ x_2,t \in k^\times)$$

$$f(x_1,x_2;\psi) = \alpha(x_1)\beta(x_2)f(1,1;\psi^{x_1x_2}) \qquad (x_1,x_2 \in k^\times \ , \ \psi \in \mathfrak{X})$$

□

PROPOSICION 3.2. i) El automorfismo σ_T induce por restricción a $V(\alpha,\beta)$ un isomorfismo de $V(\alpha,\beta)$ sobre $V(\beta,\alpha)$.

ii) _Sea_ $\alpha \in Car(k^\times)$, _se tiene la descomposición de_ G-_módulos_

$$V(\alpha,\alpha) = V^+(\alpha,\alpha) \oplus V^-(\alpha,\alpha)$$

donde

$$V^\pm(\alpha,\alpha) = \{f \in V(\alpha,\alpha) \;/\; \sigma(T)f = \pm f\}$$

con

$$\dim V^+(\alpha,\alpha) = q + 1 \quad , \quad \dim V^-(\alpha,\alpha) = 1 \; .$$

Demostración: La primera aserción resulta de inmediato de las relaciones $\gamma(r,s) \circ T = T \circ \gamma(s,r)$ $(r,s \in k^\times)$ y la segunda de la demostración de la Proposición anterior, y del hecho que T permuta las Γ^+-órbitas $(1,0;\psi)$ y $(0,1;\psi)$, y fija a $(0,0;\psi)$ y $(1,1;\psi)$ $(\psi \in \mathfrak{X})$.

□

La representación $V^+(\alpha,\alpha)$ admite la siguiente descomposición de G-módulos:

PROPOSICION 3.3. _Se tiene, para todo_ $\alpha \in Car(k^\times)$,

$$V^+(\alpha,\alpha) = V^q(\alpha,\alpha) \oplus V^{1,+}(\alpha,\alpha)$$

con

$$V^q(\alpha,\alpha) = \{f \in V^+(\alpha,\alpha) \;/\; \sum_{x_1 \in k} f(x_1,0;\psi) = 0 \qquad \forall\, \psi \in \mathfrak{X}\}$$

$$V^{1,+}(\alpha,\alpha) = \{f \in V^+(\alpha,\alpha) \;/\; f(x_1,x_2;\psi) = \delta(x_1)f(0,0;\psi) \quad \forall\, x_1,x_2 \in k \;,\; \psi \in$$

(*donde* δ *es la función de Dirac sobre* k^+ , *centrada en el origen, que vale* 1 *en* 0 *y se anula en otra parte*).

3.3. *Isomorfismo entre* (V,ρ) *y la representación natural.*

Puesto que existe una correspondencia biunívoca entre $k^\times$ y $\mathcal{X}$, podemos realizar la representación natural de G en el espacio $\overline{M} = \mathbb{C}^{k^2\times\mathcal{X}}$ con acción definida por

$$(\tau_g f)(x,\psi) = f(xg,\psi^{\det g^{-1}}) \qquad (f \in \overline{M},\ g \in G,\ x \in k^2,\ \psi \in \mathcal{X}) .$$

TEOREMA 3.1. *La aplicación* F *de* $\overline{M}$ *en* V *definida por*

$$[F(f)](x_1,x_2;\psi) = \sum_{s\in k} f(x_1,s;\psi)\psi(-sx_2) \qquad (f \in \overline{M},\ x_1,x_2 \in k,\ \psi \in \mathcal{X})$$

es un isomorfismo de $(\overline{M},\tau)$ *sobre* (V,ρ) *y la restricción a* $M_{\alpha,\beta}$ *es un isomorfismo de* $M_{\alpha,\beta}$ *sobre* $V(\alpha,\beta)$, *para cualquier* $\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$.

Demostración: Se verifica fácilmente que F es un operador de entrelazamiento y que envía $M_{\alpha,\beta}$ en $V(\alpha,\beta)$, además su inversa viene dada por

$$[F^{-1}(f')](x_1,x_2;\psi) = q^{-1} \sum_{s\in k} f'(x_1,s;\psi)\psi(sx_2) \qquad (f' \in V,\ x_1,x_2 \in k,\ \psi \in \mathcal{X})$$

lo cual finaliza la demostración del Teorema.

□

De acuerdo a la Proposición 1.5. del número 1.3. del párrafo § 1, se deduce que la representación de Weil asociada a $Q = xy$ suministra exactamente toda la serie principal de G , por consiguiente hemos así obtenido tres tipos de modelos; inducido, natural y de Weil.

§ 4. LA REPRESENTACION DE WEIL ASOCIADA A UN PLANO NORMICO.

Dentro de este párrafo, vamos a descomponer la representación de Weil (V_N, ρ^N) asociada al plano nórmico (no desplegado) (K,N), donde K designa la única extensión cuadrática de k y N la norma de K sobre k (c.f. § 2. Teorema 2.3.). La forma bilineal B asociada a N está dada por

$$B(x,y) = Tr(xy^q) \qquad (x,y \in K) .$$

Dentro de lo que sigue, designaremos por $\mathbb{U}$ el subgrupo de $K^\times$ formado de elementos de norma 1. Escribiremos simplemente (V,ρ) en lugar de (V_N, ρ^N) .

4.1. <u>El grupo</u> $\Gamma = GO(N)$.

Para todo $x \in K^\times$, definimos

$$\gamma_x(y) = xy \qquad (y \in K)$$

y

$$F(y) = y^q \qquad (y \in K) .$$

Cada γ_x $(x \in K^\times)$ es una similitud de N , de multiplicador $N(x)$, y $F \in O(N)$.

PROPOSICION 4.1. <u>El grupo</u> $\Gamma = GO(N)$ <u>es el producto semidirecto del grupo</u> Γ^+ <u>formado de</u> γ_x $(x \in K^\times)$, <u>isomorfo a</u> $K^\times$, <u>y del grupo</u> $\{1,F\}$ <u>con las relaciones</u>

$$F^2 = 1 \quad \underline{y} \quad F \circ \gamma_x = \gamma_{x^q} \circ F \qquad (x \in K^\times) .$$

Demostración: Sea $\varphi \in \Gamma$. Entonces $\psi = (\gamma_{\varphi(1)})^{-1} \cdot \varphi$ verifica $\psi(1) = 1$ y pertenece a $O(N)$. Ya que $N(\psi(x)) = N(x)$ y $\psi(1) = 1$, se deduce de la relación general

$$Tr(z) = N(z + 1) - N(z) - 1 \qquad (z \in K) ,$$

la igualdad $Tr(\psi(x)) = Tr(x)$ para todo $x \in K^{\times}$. Luego para cada $x \in K$ tenemos o bien $\psi(x) = x$ ó $\psi(x) = x^q$. Sea $x_o \in K$ tal que $\{1,x_o\}$ es una k-base de K . Entonces $\psi = Id$ si $\psi(x_o) = x_o$ ó $\psi = F$ si $\psi(x_o) = x_o^q$. De este modo $\varphi = \gamma_{\varphi(1)}$ ó $\varphi = \gamma_{\varphi(1)} \cdot F$. Por lo tanto la proposición queda así demostrada.

□

4.2. Descomposición de (V,ρ) según Γ .

Denotemos por (V,σ) la representación natural (izquierda) de Γ dada por

$$[\sigma(\gamma)f](x,\psi) = f\left(\gamma^{-1}(x),\psi^{m_\gamma}\right) \qquad (\gamma \in \Gamma,\ f \in V,\ x \in K,\ \psi \in \mathcal{X}).$$

DEFINICION 4.1. Para todo $\Lambda \in Car(K^{\times})$, definimos

$$V(\Lambda) = \{f \in V \,/\, \sigma(\gamma_{x^{-1}})f = \Lambda(x)f \qquad x \in K^{\times}\} .$$

Así los subespacios $V(\Lambda)$ $(\Lambda \in Car(K^{\times}))$ resultan ser subrepresentaciones de (V,ρ) . Además tenemos una descomposición en G-módulos

$$V = \bigoplus_{\Lambda \in Car(K^{\times})} V(\Lambda) .$$

DEFINICION 4.2. Sea L una extensión finita de k y $\Lambda \in \mathrm{Car}(L^\times)$, se dice que Λ es descendible si existe $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$ tal que $\Lambda = \alpha \circ N_L$ (donde N_L es el homomorfismo norma de $L^\times$ sobre $k^\times$) .

Si $\Lambda \in \mathrm{Car}(L^\times)$ entonces Λ^q es el conjugado de Λ sobre L , es decir $\Lambda^q(x) = \Lambda(x^q)$ $(q = |k|$, $x \in L^\times)$.

LEMA 4.1. Sea $\Lambda \in \mathrm{Car}(L^\times)$. Son equivalentes

i) Λ es descendible

ii) $\Lambda = \Lambda^q$ (en este caso se dice que Λ es Galois invariante)

iii) $\Lambda(u) = 1$ para todo $u \in \mathbb{U}_L$, donde $\mathbb{U}_L = \{x \in L^\times \mid N_L(x) = 1\}$.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii). Es inmediato de $N_L = N_L \circ F$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sea $u \in \mathbb{U}_L$: por el Teorema 90 de Hilbert existe $x \in L^\times$ tal que $u = x^q x^{-1}$, luego

$$\Lambda(u) = \Lambda^q(x)\Lambda(x^{-1}) = 1 .$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Sea α la aplicación compleja sobre $k^\times$ definida por $\alpha(t) = \Lambda(z)$ con $N_L(z) = t$ $(z \in L^\times$, $t \in k^\times)$. Esta definición tiene sentido pues N_L es epiyectiva. Si $x \in L^\times$ es tal que $N_L(x) = t$ entonces $N_L(zx^{-1}) = 1$, de donde por hipótesis $\Lambda(z) = \Lambda(x)$, por lo que α está bien definida. Finalmente es inmediato comprobar que α es un carácter de $k^\times$.

$\square$

PROPOSICION 4.2. Sea $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$, entonces

$$\dim_{\mathbb{C}} V(\Lambda) = q - 1 + \delta(\Lambda,\Lambda^q)$$

(con δ de Kronecker que vale 1 sobre los caracteres Galois invariante y cero en caso contrario).

Demostración: Sea $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$ y $f \in V(\Lambda)$, entonces

$$f(xy,\psi) = \Lambda(x) f\left(y,\psi^{N(x)}\right) \qquad (x \in K^\times,\ y \in K,\ \psi \in \mathcal{X}),$$

en particular

$$f(x,\psi) = \Lambda(x) f\left(1,\psi^{N(x)}\right) \qquad (x \in K^\times,\ \psi \in \mathcal{X})$$

$$f(0,\psi) = \delta(\Lambda,\Lambda^q) f(0,\psi) \qquad (\psi \in \mathcal{X}) .$$

□

Denotemos en lo que sigue por ρ_Λ la restricción de ρ al subespacio invariante $V(\Lambda)$ $(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times))$.

PROPOSICION 4.3. La restricción de la involución $\sigma(F)$ a $V(\Lambda)$ es un isomorfismo de $V(\Lambda)$ sobre $V(\Lambda^q)$, cualquiera que sea $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$. La restricción de $\sigma(F)$ a $V(\Lambda)$ es la identidad si $\Lambda = \Lambda^q$.

Demostración: Resulta inmediato de las relaciones $F \circ \gamma_x = \gamma_{x^q} \circ F$ $(x \in K^\times)$ y del hecho que

$$f(x^q,\psi) = \Lambda(x^{q-1}) f(x,\psi) \qquad (f \in V(\Lambda),\ x \in K^\times,\ \psi \in \mathcal{X}).$$

□

PROPOSICION 4.4. <u>La representación</u> $V(\alpha \circ N)$ $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^{\times}))$ <u>es la representación de Steinberg</u> $St(\alpha)$ <u>asociada a</u> α .

<u>Demostración</u>: Realicemos la representación de Steinberg asociada a α por el modelo inductivo H^q_α , es decir como subrepresentación de
$H_{\alpha,\alpha} = \mathrm{Ind}_{B_o \uparrow G} [\alpha,\alpha]$ (cf. § 1, Definición 1.1).

Para construir un isomorfismo de H^q_α sobre $V(\alpha \circ N)$, es suficiente -debido a las dimensiones- construir un epimorfismo de $H_{\alpha,\alpha}$ sobre $V(\alpha \circ N)$. Como $H_{\alpha,\alpha} = \mathrm{Ind}_{B_o \uparrow G} [\alpha,\alpha]$, es suficiente para ello encontrar un generador de $V(\alpha \circ N)$ (como $\mathbb{C}[G]$-módulo) que se transforme como $1 \in \mathbb{C}$, bajo la acción de B_o , dentro de la representación $(\mathbb{C},[\alpha,\alpha])$ de B_o (cf. Capítulo I, § 7. Proposición 7.1.). Se verifica fácilmente que todo vector $f_o \in V(\alpha \circ N)$ tal que $\mathrm{Sop}\, f_o = \{0\} \times \mathcal{X}$ tiene la propiedad requerida.

□

4.3. <u>Entrelazamiento de las representaciones</u> $V(\Lambda)$ $(\Lambda \in \mathrm{Car}(k^{\times}))$.

Puesto que ya sabemos que $V(\Lambda) = St(\alpha)$ para $\Lambda = \alpha \circ N$ $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^{\times}))$ y $\dim V(\Lambda) = q - 1$ para $\Lambda \neq \Lambda^q$, bastará con estudiar los espacios $\mathrm{Hom}_G(V_\Lambda, V_{\Lambda'})$ para $\Lambda,\Lambda' \in \mathrm{Car}(k^{\times})$ tal que $\Lambda \neq \Lambda^q$, $\Lambda' \neq \Lambda'^q$.

LEMA 4.2. <u>Sea</u> Θ <u>un operador de</u> $V(\Lambda)$ <u>en</u> $V(\Lambda')$ $(\Lambda,\Lambda' \in \mathrm{Car}(K^{\times})$, $\Lambda \neq \Lambda^q, \Lambda' \neq \Lambda'^q)$, <u>que entrelace la acción de</u> $u(b)$, $b \in k^+$ (cf. § 2, Definición 2.1). <u>Entonces existe una única función</u> $\theta \in V(\Lambda'\Lambda^{-1})$ <u>con soporte en</u> $K^{\times} \times \mathcal{X}$ <u>y tal que</u>

$$[\Theta f](x,\psi) = \theta(x,\psi)f(x,\psi) \qquad (f \in V(\Lambda),\ x \in K,\ \psi \in \mathcal{X}).$$

Además, el operador Θ es biyectivo sí y sólo si $\operatorname{sop}\theta = K^{\times} \times \mathcal{X}$.

Demostración: Nuestro operador Θ está a priori definido por un núcleo $L : (K^{\times} \times \mathcal{X}) \times (K^{\times} \times \mathcal{X}) \to \mathbb{C}$ verificando

$$L[(z'y,\psi^{N(z')^{-1}}),(zx,\varphi^{N(z)^{-1}})] = \Lambda'(z')L[(y,\psi),(x,\varphi)]\Lambda^{-1}(z)$$

para todo $z,z' \in K^{\times}$, $x,y \in K^{\times}$, $\varphi,\psi \in \mathcal{X}$. Por hipótesis se tiene que Θ conmuta con $\rho_{\Lambda}(u(b))$ y $\rho_{\Lambda'}(u(b))$, para todo $b \in k^{+}$, lo que equivale a la condición siguiente

$$L[(x,\varphi),(y,\psi)] = 0$$

salvo para (x,φ) y (y,ψ) tales que $\varphi(bN(x)) = \psi(bN(y))$ para todo $b \in k^{+}$.

Por otro lado para $(x,\varphi), (y,\psi) \in K^{\times} \times \mathcal{X}$, tenemos que $\varphi^{N(x)} = \psi^{N(y)}$ sí y sólo si existe $z \in K^{\times}$ tal que $(y,\psi) = (zx,\varphi^{N(z)^{-1}})$. Así entonces para $f \in V(\Lambda)$ y $(x,\varphi) \in K^{\times} \times \mathcal{X}$ obtenemos

$$[\Theta f](x,\varphi) = \sum_{(y,\psi)\in K^{\times}\times\mathcal{X}} L[(x,\varphi),(y,\psi)]f(y,\psi)$$

$$= \sum_{z\in K^{\times}} L[(x,\varphi),(zx,\varphi^{N(z)^{-1}})]f(zx,\varphi^{N(z)^{-1}})$$

$$= |K^{\times}|L[(x,\varphi),(x,\varphi)]f(x,\varphi),$$

luego basta hacer $\theta(x,\varphi) = |K^{\times}|L[(x,\varphi),(x,\varphi)]$, de donde el Lema queda demostrado.

□

TEOREMA 4.1. Sean $\Lambda, \Lambda' \in \mathrm{Car}(K^\times)$ tales que $\Lambda \neq \Lambda^q$ y $\Lambda' \neq \Lambda'^q$, entonces

i) La representación $V(\Lambda)$ de G es irreducible.

ii) Si $V(\Lambda) \simeq V(\Lambda')$, entonces $\Lambda' = \Lambda$ ó $\Lambda' = \Lambda^q$.

Demostración: Consideremos el subgrupo

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid b \in k^+, \ d \in k^\times \right\}$$

de G . Puesto que $\mathrm{End}_G(V(\Lambda))$ es un subespacio no nulo de $\mathrm{End}_P(V(\Lambda))$, basta demostrar que la restricción de $V(\Lambda)$ a P es irreducible. Para ello sea Θ un operador de entrelazamiento de $V(\Lambda)$ restringida a P en $V(\Lambda')$ restringida a P . Como Θ entrelaza la acción de $u(b)$ $(b \in k^+)$, por Lema 4.2. (§ 4),

$$\Theta f = \theta \cdot f \qquad (f \in V(\Lambda))$$

para una única función $\theta \in V(\Lambda'\Lambda^{-1})$. Por otro lado, el hecho que Θ entrelace la acción de $h'(t)$ $(t \in k^\times)$ significa

$$\theta(x, \varphi^t) = \theta(x, \varphi) \qquad (x \in K^\times, \ \varphi \in \mathcal{X}, \ t \in k^\times) ,$$

esto quiere decir que $\theta(x,\varphi)$ no depende de $\varphi \in \mathcal{X}$, para todo $x \in K^\times$. De esto resulta que existe una constante $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$\theta(x,\varphi) = c \ \Lambda'\Lambda^{-1}(x) \qquad (x \in K^\times, \ \varphi \in \mathcal{X}) .$$

En particular si $\Lambda' = \Lambda$, la función θ es constante sobre $K^\times \times \mathcal{X}$, de donde $\mathrm{End}_P(V(\Lambda)) = \mathbb{C}$, y así la restricción de $V(\Lambda)$ a P

es irreducible, lo cual demuestra la primera parte del Teorema

Para la última aserción del Teorema, supongamos que $\Lambda' \neq \Lambda$ y que Θ es un operador no nulo de entrelazamiento de $V(\Lambda)$ en $V(\Lambda')$, es decir $c \neq 0$.

Puesto que

$$\Theta \circ \rho_{\Lambda}(h'(t)^{-1}w) = \rho_{\Lambda'}(h'(t)^{-1}w) \circ \Theta \qquad (t \in k^{\times}) ,$$

entonces, para todo $f \in V(\Lambda)$ y $\varphi \in \mathcal{X}$,

$$\theta(1,\varphi) \sum_{y \in K^{\times}} \varphi^{t}(Tr(y))f(y,\varphi) = \sum_{y \in K^{\times}} \varphi^{t}(Tr(y))\theta(y,\varphi)f(y,\varphi) \qquad (t \in k^{\times}),$$

de donde

$$(8) \quad \sum_{y \in K^{\times}} \varphi^{t}(Tr(y))\Lambda(y)f(1,\varphi^{N(y)}) = \sum_{y \in K^{\times}} \varphi^{t}(Tr(y))\Lambda'(y)f(1,\varphi^{N(y)})$$

para todo $t \in k^{+}$, pues Λ y Λ' son no triviales sobre $\mathbb{U}$. Como los caracteres φ^{t} $(t \in k^{+})$ forman una $\mathbb{C}$-base de $\mathbb{C}^{k^{+}}$, para $\varphi \in \mathcal{X}$, fijo, entonces la combinación lineal (8) es equivalente a

$$(9) \quad \sum_{\substack{y \in K^{\times} \\ Tr(y)=Tr(x)}} \Lambda(y)f(1,\varphi^{N(y)}) = \sum_{\substack{y \in K^{\times} \\ Tr(y)=Tr(x)}} \Lambda'(y)f(1,\varphi^{N(y)}) \qquad (x \in K).$$

Consideremos, para cada $x \in K^{\times}$, una función $f_x \in V(\Lambda)$ tal que $f_x(1,\varphi^{r}) = \delta(r - N(x))$ $(r \in k^{\times})$, luego reemplazando esta función en (9) resulta

$$\sum_{\substack{y\in K^\times\\ Tr(y)=Tr(x)\\ N(y)=N(x)}} \Lambda(y) = \sum_{\substack{y\in K^\times\\ Tr(y)=Tr(x)\\ N(y)=N(x)}} \Lambda'(y) \qquad (x \in K^\times) ,$$

es decir $\Lambda + \Lambda^q = \Lambda' + \Lambda'^q$ y por consiguiente $\Lambda' = \Lambda^q$, debido a la independencia lineal de caracteres.

□

DEFINICION 4.3. <u>Llamaremos serie discreta (de representaciones) de</u> G <u>al conjunto de tipos de isomorfía de las representaciones irreducibles</u> $(V(\Lambda),\rho_\Lambda)$ <u>para</u> $\Lambda \in Car(K^\times)$, $\Lambda \neq \Lambda^q$.

<u>La serie discreta de</u> G <u>consta de</u> $\frac{1}{2}q(q-1)$ <u>(tipos de isomorfía) de representaciones de dimensión</u> $q-1$.

<u>Habitualmente, en el futuro, denotaremos por</u> π_Λ <u>ó</u> $(V(\Lambda),\rho_\Lambda)$ <u>el tipo de isomorfía de la representación</u> $(V(\Lambda),\rho_\Lambda)$ $(\Lambda \in Car(K^\times))$.

TEOREMA 4.2. <u>La serie discreta y la serie principal de representaciones de</u> G <u>son disjuntas y ellas agotan todas las representaciones irreducibles de</u> G .

<u>Demostración</u>: Para ver que las dos series son disjuntas, es suficiente observar que todas las representaciones de la serie principal admiten vectores no nulos invariantes por el subgrupo unipotente superior U_o de G y en cambio ninguna representación de la serie discreta los admite. Para demostrar que las dos series agotan todas las representaciones irreducibles de G basta aplicar el criterio de completitud (cf. Capítulo I, § 4, Corolario 3 de la Proposición 4.3.).

□

OBSERVACION. Como notación general, designaremos por $(V_{\alpha,\beta}, \pi_{\alpha,\beta})$ $(\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^{\times}), \alpha \neq \beta)$, $(V_{\alpha}^{r}, \pi_{\alpha}^{r})$ $(r = 1,q ; \alpha \in \mathrm{Car}(k^{\times}))$, $(V_{\Lambda}, \pi_{\Lambda})$ $(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^{\times}), \Lambda \neq \Lambda^{q})$, los tipos de isomorfía (o de representantes de tipos de isomorfía) de representaciones irreducibles de G, manteniendo la parametrización adoptada en los párrafos anteriores. Para $\alpha \in \mathrm{Car}(k^{\times})$, tenemos $(V_{\alpha,\alpha}, \pi_{\alpha,\alpha}) = (V_{\alpha}^{q}, \pi_{\alpha}^{q}) \oplus (V_{\alpha}^{1}, \pi_{\alpha}^{1})$.

En la Tabla 1, denotamos por χ_{α}^{r} el carácter de π_{α}^{r} $(r = 1,q ;$ $\alpha \in \mathrm{Car}(k^{\times}))$ y $\chi_{\alpha,\beta}^{q+1}$ (resp. χ_{Λ}^{q-1}) el carácter de $\pi_{\alpha,\beta}$ (resp. π_{Λ}) para $\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^{\times})$ (resp. $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^{\times})$, $\Lambda \neq \Lambda^{q}$).

TABLA 1. <u>Los caracteres de</u> $GL(2,k)$.

	Carácter	$\chi^1_\alpha = \alpha \circ \det$	χ^q_α	$\chi^{q+1}_{\alpha,\beta}$	χ^{q-1}_Λ
Representante	Parametrización	$\alpha \in Car(k^\times)$	$\alpha \in Car(k^\times)$	$\alpha,\beta \in Car(k^\times)$ $\alpha \neq \beta$ mod.$(\alpha, \beta) \sim (\beta, \alpha)$	$\Lambda \in Car(K^\times)$ $\Lambda \neq \Lambda^q$ mod. $\Lambda \sim \Lambda^q$
$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$	$a \in k^\times$	$\alpha^2(a)$	$q\alpha^2(a)$	$(q+1)\alpha\beta(a)$	$(q-1)\Lambda(a)$
$\begin{bmatrix} a & a \\ 0 & a \end{bmatrix}$	$a \in k^\times$	$\alpha^2(a)$	0	$\alpha\beta(a)$	$-\Lambda(a)$
$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$	$a,d \in k^\times$ $a \neq d$ mod.$(a,d) \sim (d,a)$	$\alpha(ad)$	$\alpha(ad)$	$\alpha(a)\beta(d)+\alpha(d)\beta(a)$	0
$\begin{bmatrix} 0 & N(x) \\ -1 & Tr(x) \end{bmatrix}$	$x \in K^\times - k^\times$ mod. $x \sim x^q$	$\alpha(N(x))$	$-\alpha(N(x))$	0	$-\Lambda(x)-\Lambda^q(x)$

C A P I T U L O III

DESCENSO DE SHINTANI PARA $GL(2,\mathbb{F}_q)$

Dentro de todo lo que sigue mantendremos, salvo mención expresa de lo contrario, las siguientes notaciones: k el cuerpo finito de q elementos, K la única extensión cuadrática de k, N la norma de K sobre k, $G = GL(2,k)$ y $\mathbb{K}$ la única extensión cuadrática de K.

§ 1. PRELIMINARES.

En este párrafo definiremos un espacio cuadrático (E,Q), adecuado, sobre k que será de gran utilidad al considerar la representación de Weil a él asociada (cf. Capítulo II, § 2, Teorema 2.3.). Además explicitaremos el grupo $U(2,K)$ y determinaremos las $GL(2,k)$-órbitas de $E \times \mathcal{X}$.

1.1. Realización de (E,Q) y $\Gamma = GO(Q)$.

Designemos por F el automorfismo de Frobenius $x \mapsto x^q$ de K , como así también su extensión natural a $\mathbb{K}$ (resp. $K \times K$; resp. $M_2(K)$) definida por $F(z) = z^q$ $(z \in \mathbb{K})$ [resp. $F(x,y) = (F(x),F(y))$ para $x,y \in K$; resp. $F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(a) & F(b) \\ F(c) & F(d) \end{pmatrix}$ con $a,b,c,d \in K$].

Denotemos por x^* la matriz transpuesta conjugada $F({}^t x) = {}^t F(x)$ de $x \in M_2(K)$.

PROPOSICION 1.1. Sea $M_2^h(K)$ el espacio que consta de todas las matrices $x \in M_2(K)$ tal que $x^* = x$. Designando por det la aplicación determinante del espacio vectorial $M_2^h(K)$ sobre k obtenemos que $(M_2^h(K), \det)$ es un espacio cuadrático no degenerado de dimensión 4 sobre k , de índice de Witt 1.

Demostración: Observemos que para $x \in M_2^h(K)$ se tiene

$$x = \begin{pmatrix} r & b \\ b^q & s \end{pmatrix} \qquad r,s \in k \ , \ b \in K \ \text{ convenientes.}$$

Además

$$(M_2^h(K), \det) \simeq (k^2 \oplus K, \ x_1x_2 \oplus (-N))$$

donde x_1x_2 es un plano hiperbólico (x_1,x_2 designan las coordenadas canónicas de k^2) .

$\square$

DEFINICION 1.1. _En todo lo que sigue del presente Capítulo mantendremos la notación_ $(E,Q) = \left(M_2^h(K), \det\right)$.

DEFINICION 1.2. _Designemos por_ Γ _el grupo de todas las similitudes ortogonales,_ $GO(Q)$, _de_ (E,Q) . _Además denotemos por_ m_γ _el multiplicador de la similitud_ $\gamma \in \Gamma$.

Observemos que sobre E la transposición y conjugación coinciden, así es

$$F(x) = {}^t x \qquad (x \in E)$$

y

$$F^2 = Id_E \quad , \quad F \in \Gamma \quad , \quad m_F = 1 \; .$$

Recordemos que $\mathbb{U}$ designa el subgrupo de $K^\times$ formado de elementos de norma 1.

PROPOSICION 1.2. _Para cada_ $h \in GL(2,K)$ _se define una similitud_ φ_h _de_ Q , _de multiplicador_ $m_h = N(\det h)$, _por_

$$\varphi_h(x) := h\cdot x := hxh^* \qquad (x \in E) \; .$$

Designemos por φ _el homomorfismo de grupos que envía_ $h \in GL(2,K)$ _en_ $\varphi_h \in \Gamma$, _entonces_

i) $\widetilde{\mathbb{U}} = \operatorname{Ker}\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \in GL(2,K) \;/\; u \in \mathbb{U} \right\}$.

ii) _El grupo_ Γ _es el producto semidirecto de la imagen_ Γ^+ _de_ φ _y el grupo_ $\{1,F\}$, _con la relación_

(10) $$F \circ \varphi_h \circ F = \varphi_{\overline{h}} \qquad (h \in GL(2,K))$$

(donde $\overline{h} = F(h)$) .

Demostración: Es claro que el multiplicador de φ_h es $N(\det h)$. Por otro lado, sea $h \in GL(2,K)$ tal que $\varphi_h = Id_E$. En particular $hh^* = 1$, de donde $hx = xh$ para todo $x \in M_2(K)$. Por lo tanto h es una matriz escalar, $h = c\cdot 1$ $c \in K^\times$ apropiado. Luego la relación $hh^* = 1$ equivale a $c \in \mathbb{U}$, lo cual demuestra (i).

En la demostración de (ii) la relación (10) es inmediata. Luego resta por demostrar que el producto semidirecto $\Gamma^+ \times \{1,F\}$ es todo Γ . Como $F \notin \Gamma^+$, de (i), tenemos que

$$|\Gamma^+ \times \{1,F\}| = 2|GL(2,K)||\mathbb{U}|^{-1} = 2(q-1)(q^4-1)q^2 .$$

Por otra parte

$$|O(Q)| = n_H|O(N)|$$

donde n_H indica el número de pares hiperbólicos en (E,Q) , se encuentra enseguida que $n_H = (q-1)(q^2+1)q^2$ y $|O(N)| = 2(q+1)$ (cf. Capítulo II, § 4, Proposición 4.1.) de donde

$$|\Gamma| = (q-1)|O(Q)| = 2(q-1)(q^2-1)(q^2+1)q^2 .$$

$\square$

1.2. *El grupo* U(2,K) .

DEFINICION 1.3.

$$U(2,K) = \{h \in GL(2,K) \;/\; hh^* = 1\} ,$$

$$SU(2,K) = U(2,K) \cap SL(2,K) .$$

PROPOSICION 1.3. *Cualquier* $h \in U(2,K)$, *se puede escribir en la forma*

$$h = \begin{pmatrix} ua & ub \\ -b^q & a^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b^q & a^q \end{pmatrix}$$

con $u = \det h \in \mathbb{U}$ *y* $a,b \in K$ (*determinados de manera única por* h) *verificando la relación*

$$N(a) + N(b) = 1 .$$

□

COROLARIO

$$|SU(2,K)| = (q-1)q(q+1)$$

$$|U(2,K)| = (q-1)q(q+1)^2 .$$

□

PROPOSICION 1.4. *Consideremos la inyección canónica de* GL(2,k) *en* GL(2,K) . *Entonces los subgrupos* SL(2,k) *y* SU(2,K) *de* GL(2,K) *son conjugados dentro de* GL(2,K) . *En efecto, para* $h \in GL(2,K)$, *la relación*

$$SU(2,K) = h^{-1}SL(2,k)h$$

es equivalente a la condición

$$hh^* = aw$$

<u>con</u> $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ <u>y</u> $a \in K^\times$ <u>de traza nula</u>.

<u>Demostración</u>: Observemos que para $h_1 \in SL(2,K)$ se tiene que $h_1 \in SL(2,k)$ sí y sólo si $h_1 w h_1^* = w$.

Por consiguiente, para $h_1 \in SL(2,k)$, $h_2 \in SU(2,K)$ y $h \in GL(2,K)$ tal que $hh^* = aw$ $(a \in K^\times)$, tenemos

$$(h^{-1}h_1h)(h^{-1}h_1h)^* = 1 ,$$

y

$$(hh_2h^{-1})w(hh_2h^{-1})^* = w ,$$

es decir, $h^{-1}h_1h \in SU(2,K)$ y $hh_2h^{-1} \in SL(2,k)$.

Recíprocamente, tenemos que para $h_1 \in SL(2,k)$ y $h \in GL(2,K)$; $h_1hh_1^* = h$ es equivalente a $h = aw$ (algún $a \in K^\times$) . Luego sea $h \in GL(2,K)$ tal que $SU(2,K) = h^{-1}SL(2,k)h$, entonces

$$h_1(hh^*)h_1^* = h(h^{-1}h_1h)(h^{-1}h_1h)^*h^* = hh^*$$

para todo $h_1 \in SL(2,k)$; de donde $hh^* = aw$ cierto $a \in K^\times$.

□

OBSERVACION. En toda característica de k , una solución $h \in GL(2,K)$ de $hh^* = aw$ ($a \in K^\times$ de traza nula) es

$$h = \begin{pmatrix} z & 1 \\ b & zb \end{pmatrix}$$

con $z,b \in K^\times$ tales que $N(z) = -1$, $z \neq 1$ y $Tr(b) = 0$.

PROPOSICION 1.5. *Los subgrupos* $SL(2,k)$ *y* $SU(2,K)$ *de* $GL(2,K)$ *no admiten vectores fijos no nulos en ninguna representación* π *de la serie discreta de* $GL(2,K)$.

Demostración: Como los subgrupos $SL(2,k)$ y $SU(2,K)$ de $GL(2,K)$ son conjugados (cf. § 1, Proposición 1.4.), es suficiente demostrar la Proposición para $SL(2,k)$. Además, como por reciprocidad de Frobenius, la dimensión del subespacio de los vectores $SL(2,k)$-fijos de la restricción de π a $SL(2,k)$ (para cualquier representación π de la serie discreta de $GL(2,K)$) es la multiplicidad de la representación trivial de $SL(2,k)$ en la restricción de π ; la demostración se reduce a verificar que la suma del carácter de π sobre $SL(2,k)$ es nula, lo cual es inmediato a partir de la Tabla 1, puesto que $\left|\text{clase}\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}\right| = q^2 - 1 = \dim \pi \quad (a \in K^\times)$.

□

1.3. *Las* $GL(2,K)$-*órbitas de* $E \times \mathcal{X}$.

En todo lo que sigue, denotaremos por $\mathcal{X}$ el conjunto de los caracteres no triviales de k^+ . En este número consideraremos la extensión natural a $E \times \mathcal{X}$ de la acción de $GL(2,K)$ en E definida en la Proposición 1.2. (§ 1).

DEFINICION 1.4. *Sea*

$$\mathcal{H} = E \times \mathcal{X} ,$$

se define la acción

$$h\cdot(x,\psi) = \left(h\cdot x, \psi^{m_h^{-1}}\right) = \left(hxh^*, \psi^{m_h^{-1}}\right)$$

con $m_h = N(\det h)$, $h \in GL(2,K)$, $(x,\psi) \in \mathcal{H}$.

DEFINICION 1.5.

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u & b \\ 0 & v \end{pmatrix} / u,v \in \mathbb{U} \ , \ b \in K \right\} ,$$

$$UL(2,K) = \{h \in GL(2,K) \ / \det h \in \mathbb{U}\} ,$$

$$E^{(i)} = \{x \in E \ / \text{ rango } \ x = i\} \qquad (i = 0,1,2) .$$

OBSERVACION.

$$E^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} / s \in k^{\times} \right\} \dot{\cup} \left\{ s \begin{pmatrix} 1 & b \\ b^q & N(b) \end{pmatrix} / b \in K \ , \ s \in k^{\times} \right\} ,$$

$$|E^{(1)}| = (q-1)(q^2+1) ,$$

$$|E^{(2)}| = (q-1)(q^2+1)q .$$

PROPOSICION 1.6. Consideremos la acción de $GL(2,K)$ sobre $\mathcal{H}$ dada por la Definición 1.4. (§ 1). Designemos por e un carácter no trivial fijo de k^+ y $x_o := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces

i) $\mathrm{Orb}_{GL(2,K)}(0,e) = \{0\} \times \mathcal{X}$, $\mathrm{Stab}_{GL(2,K)}(0,e) = UL(2,K)$,

ii) $\mathrm{Orb}_{GL(2,K)}(x_o,e) = E^{(1)} \times \mathcal{X}$, $\mathrm{Stab}_{GL(2,K)}(x_o,e) = H_1$,

iii) $\bigcup_{\psi \in \mathcal{X}} \mathrm{Orb}_{GL(2,K)}(1,\psi) = E^{(2)} \times \mathcal{X}$,

$\mathrm{Stab}_{GL(2,K)}(1,\psi) = U(2,K) \qquad (\psi \in \mathcal{X})$.

□

TABLA 2. Las GL(2,K)-órbitas de $E \times \mathcal{X}$.

Representante	Parámetro	N° de órbitas	Estabilizador	Cardinal de la órbita
$(0,e)$		1	$UL(2,K)$	$q - 1$
(x_o,e)		1	H_1	$(q-1)^2(q^2+1)$
$(1,\psi)$	$\psi \in \mathcal{X}$	$q - 1$	$U(2,K)$	$(q-1)q(q^2+1)$

§ 2. LAS REPRESENTACIONES $V[\pi]$.

Dentro de todo lo que sigue mantendremos las notaciones del párrafo precedente y designaremos por Γ' al grupo $GL(2,K)/\widetilde{\mathbb{U}}$, donde $\widetilde{\mathbb{U}}$ es el subgrupo de $GL(2,K)$ formado de matrices escalares de razón en $\mathbb{U}$ (cf. § 1, Proposición 1.2). Por lo tanto las representaciones de Γ' serán aquellas de $GL(2,K)$ que son triviales sobre $\widetilde{\mathbb{U}}$.

2.1. Definición de las representaciones $V[\pi]$.

DEFINICION 2.1. Sea (V,σ) la representación natural (izquierda) de

GL(2,K) <u>asociada a la acción</u> $\xi \mapsto h\cdot\xi = \left(h\cdot x, \psi^{m_h^{-1}}\right)$ $(h \in GL(2,K)$, $\xi = (x,\psi) \in \mathcal{H})$, (cf. § 1, Defición 1.4), <u>de espacio</u> $V = L^2(\mathcal{H})$ <u>y acción dada por</u>

$$(\sigma_h f)(\xi) = f(h^{-1}\cdot\xi)$$

<u>para todo</u> $f \in V$, $h \in GL(2,K)$ <u>y</u> $\xi \in \mathcal{H}$.

Es claro que (V,σ) es trivial sobre $\widetilde{\mathbb{U}}$, por ende ella se factoriza por la representación natural de Γ' , que con el habitual abuso de notación denotaremos también por σ , asociada a la acción de $GL(2,K)$, sobre $\mathcal{H}$, extendida de manera natural a Γ' .

Además designemos por $\left(V,\rho^Q\right)$, o simplemente (V,ρ) cuando no exista peligro de confusión, a la representación de Weil de $G = GL(2,k)$ asociada al espacio cuadrático (E,Q) no degenerado de dimensión 4 sobre k (cf. Capítulo II, § 2, Teorema 2.3.).

OBSERVACION. Es claro que $\Gamma = GO(Q)$ actúa sobre $\mathcal{H}$, a saber $\xi \to \gamma\cdot\xi = \left(\gamma(x), \psi^{m_\gamma^{-1}}\right)$ $(\xi = (x,\psi) \in \mathcal{H}$, $\gamma \in \Gamma)$. Ahora bien, sea $\left(V,\sigma^Q\right)$ la representación natural asociada a esta acción. Luego la representación (V,σ) de más arriba (cf. § 2, Definición 2.1.) no es otra que la restricción de $\left(V,\sigma^Q\right)$ a Γ^+ vía el homomorfismo φ de la Proposición 1.2. (§ 1).

Más general, sea (E',Q') un espacio cuadrático no degenerado cualquiera de dimensión par sobre k , $\left(V',\rho^{Q'}\right)$ la representación de Weil de G que le está asociada, $GO(Q')$ el grupo de todas las similitudes ortogonales de (E',Q') y $\left(V',\sigma^{Q'}\right)$ la representación natural (izquierda) asociada a la acción evidente de $GO(Q')$ sobre $E' \times \mathcal{X}$; bajo estas notaciones es inmediata la siguiente

PROPOSICION 2.1. $(V',\rho^{Q'})$ y $(V',\sigma^{Q'})$ conmutan, es decir $\rho_g^{Q'} \circ \sigma_\gamma^{Q'} = \sigma_\gamma^{Q'} \circ \rho_g^{Q'}$ $(g \in G\ ,\ \gamma \in GO(Q'))$.

□

DEFINICION 2.2. Sea (U,π) una representación de $GL(2,K)$ trivial sobre las matrices escalares de razón en $\mathbb{U}$; definimos la representación $(V[\pi],\rho^Q)$ de G cuyo espacio $V[\pi]$ consta de todas las funciones f de $\mathcal{H}$ en U tales que

$$f(h\cdot\xi) = \pi_h(f(\xi)) \qquad (h \in GL(2,K)\ ,\ \xi \in \mathcal{H})\ ,$$

y cuya acción ρ^Q es la acción de la representación de Weil de G en el espacio $U^{\mathcal{H}}$ asociada al espacio cuadrático (E,Q) y a U , restringida a $V[\pi]$, que es estable por ρ^Q (cf. Capítulo I, § 8, Definición 8.2. y Capítulo II, § 2, Teorema 2.3.).

Designemos, con abuso de notación, por $(\Gamma')^\wedge$ el conjunto de tipos de isomorfía de representaciones irreducibles de $GL(2,K)$ que son triviales sobre las matrices escalares de razón en $\mathbb{U}$.

DEFINICION 2.3. Llamaremos descenso de SHINTANI para G a la aplicación $\pi \mapsto V[\pi]$ de $(\Gamma')^\wedge$ en $\widetilde{\mathcal{R}}(G)$, o equivalentemente diremos que $V[\pi]$ es la descendida de SHINTANI de la representación $\pi \in (\Gamma')^\wedge$.

El siguiente Teorema entrega una primera descomposición de la representación de Weil (V,ρ^Q) de G asociada a (E,Q) según las componentes isotípicas de la acción de Γ' en V .

TEOREMA 2.1. Designemos por U_π el espacio de $\pi \in (\Gamma')^\wedge$. Entonces

$$(V, \sigma \otimes \rho^Q) \simeq \bigoplus_{\pi \in (\Gamma')^\wedge} U_{\check{\pi}} \otimes_{\mathbb{C}} V[\pi] \qquad \text{como } \Gamma' \times G\text{-módulos},$$

$$(V, \rho^Q) \simeq \bigoplus_{\pi \in (\Gamma')^\wedge} (\dim \pi) V[\pi] \qquad \text{como } G\text{-módulos},$$

(cf. Capítulo I, § 8, Teorema 8.1.).

$\square$

2.2. Descripción de $(\Gamma')^\wedge$.

Recordemos que $\mathbb{K}$ es la única extensión cuadrática de K y $\mathbb{N}$ la norma de $\mathbb{K}$ sobre K .

DEFINICION 2.4. Designemos las representaciones irreducibles de $GL(2,K)$ (cf. Capítulo II, Observación al final del N° 4.3.) por $(V_{\Lambda,\phi}, \pi_{\Lambda,\phi})$ $(\Lambda,\phi \in Car(K^\times), \Lambda \neq \phi)$, $(V_\Lambda^{q^2}, \pi_\Lambda^{q^2})$ $(\Lambda \in Car(K^\times))$, $(\mathbb{C}, \pi_\Lambda^1)$ $(\Lambda \in Car(K^\times))$ (serie principal) y (V_Θ, π_Θ) $(\Theta \in Car(\mathbb{K}^\times), \Theta \neq \Theta^{q^2})$ (serie discreta).

PROPOSICION 2.2. Se tiene

i) $\pi_{\Lambda,\phi} \in (\Gamma')^\wedge$ sí y sólo si $\Lambda\phi = \Lambda^q \phi^q$ $(\Lambda,\phi \in Car(K^\times), \Lambda \neq \phi)$,

ii) $\pi_\Lambda^r \in (\Gamma')^\wedge$ sí y sólo si $\Lambda^2 = \Lambda^{2q}$ $(r = 1, q^2 ; \Lambda \in Car(K^\times))$,

iii) $\pi_\Theta \in (\Gamma')^\wedge$ sí y sólo si $\Theta\Theta^{q^2} = \Theta^q \Theta^{q^3}$ $(\Theta \in Car(\mathbb{K}^\times), \Theta \neq \Theta^{q^2})$.

Demostración: Sea $\pi_{\Lambda,\phi}$ $(\Lambda,\phi \in Car(K^{\times}),\ \Lambda \neq \phi)$ una representación de la serie principal de GL(2,K) realizada por su modelo natural (cf. Capítulo II, § 1, Definición 1.2.), luego para $h_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $(a \in K^{\times})$ tenemos que

$$\left(\pi_{\Lambda,\phi}(h_1)f\right)(\vec{x},c) = f(a\vec{x},ca^{-2})$$

$$= (\Lambda\phi)(a)f(\vec{x},c)$$

para todo $f \in V_{\Lambda,\phi}$, $\vec{x} \in K^2$, $c \in K^{\times}$; es decir

(11) $$\pi_{\Lambda,\phi}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = (\Lambda\phi)(a) \qquad (a \in K^{\times}) .$$

Observese que (11) también es válido para π_{Λ}^{r} $(r = 1,q^2$; $\Lambda \in Car(K^{\times}))$.

Por otro lado si π_{Θ} $(\Theta \in Car(\mathbb{K}^{\times}),\ \Theta \neq \Theta^{q^2})$ pertenece a la serie discreta de GL(2,K) realizada como subrepresentación de la representación de Weil de GL(2,K) asociada al espacio cuadrático $(\mathbb{K},\mathbb{N})$ (cf. Capítulo II, § 4, Definición 4.1.), entonces

$$\left(\pi_{\Theta}(h_1)f\right)(z,\Phi) = f\left(az,\Phi^{a^{-2}}\right)$$

$$= \Theta(a)f(z,\Phi)$$

para todo $f \in V_{\Theta}$, $z \in \mathbb{K}$, $\Phi \in Car(K^{+}) - \{\mathbb{1}\}$; de donde

(12) $$\pi_{\Theta}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \Theta(a) \qquad (a \in K^{\times}) .$$

Ahora bien, (i) y (ii) (resp. (iii)) es inmediato de (11) (resp. (12)) y Lema 4.1. (Capítulo II, § 4) para $a \in \mathbb{U}$.

□

LEMA 2.1. <u>Sea</u> F <u>el automorfismo de Frobenius extendido a</u> $GL(2,K)$ (cf. § 1, N° 1.1.). <u>Entonces</u>

i) $\pi_{\Lambda,\phi} \circ F \simeq \pi_{\Lambda^q,\phi^q}$ $\qquad (\Lambda,\phi \in Car(K^\times)\ ,\ \Lambda \neq \phi)$,

ii) $\pi^r_\Lambda \circ F \simeq \pi^r_{\Lambda^q}$ $\qquad (r = 1,q^2\ ;\ \Lambda \in Car(K^\times))$,

iii) $\pi_\Theta \circ F \simeq \pi_{\Theta^q}$ $\qquad (\Theta \in Car(\mathbb{K}^\times)\ ,\ \Theta \neq \Theta^{q^2})$.

□

PROPOSICION 2.3. <u>Sea</u> (U,π) <u>una representación irreducible de</u> $GL(2,K)$. <u>Entonces</u> $\pi \circ F \simeq \pi$ <u>solamente en los siguientes casos</u>

i) $\pi = \pi_{\Lambda,\phi}$ <u>con</u> $\Lambda = \Lambda^q;\ \phi = \phi^q$ $\qquad (\Lambda,\phi \in Car(K^\times)\ ,\ \Lambda \neq \phi)$,

ii) $\pi = \pi_{\Lambda,\Lambda^q}$ <u>con</u> $\Lambda \neq \Lambda^q$ $\qquad (\Lambda \in Car(K^\times))$,

iii) $\pi = \pi^r_\Lambda$ <u>con</u> $\Lambda = \Lambda^q$ $\qquad (r = 1,q^2\ ;\ \Lambda \in Car(K^\times))$.

<u>Demostración</u>: Sea $\pi = \pi_{\Lambda,\phi}$ $(\Lambda,\phi \in Car(K^\times),\ \Lambda \neq \phi)$ en la serie principal de representaciones de $GL(2,K)$ y supongamos que $\pi \circ F \simeq \pi$. Ahora bien, por Lema 2.1. esto es equivalente a $\pi_{\Lambda^q,\phi^q} \simeq \pi_{\Lambda,\phi}$; de donde $(\Lambda,\phi) = \left(\Lambda^q,\phi^q\right)$ ó $\phi = \Lambda^q$ (cf. Capítulo II, § 1, Proposición 1.4.) lo que demuestra (i) y (ii).

En forma análoga se demuestra para el caso $\pi = \pi^r_\Lambda$ $(r = 1,q^2\ ,\ \Lambda \in Car(K^\times))$.

Finalmente si $\pi = \pi_{\Theta}$ $(\Theta \in Car(\mathbb{K}^{\times}), \Theta \neq \Theta^{q^2})$ perteneciente a la serie discreta de representaciones de GL(2,K) tenemos que: $\pi \circ F \simeq \pi$ es equivalente a $\pi_{\Theta^q} \simeq \pi_{\Theta}$, de donde $\Theta = \Theta^q$ ó $\Theta^q = \Theta^{q^2}$ (cf. Capítulo II, § 4, Proposición 4.3.) que equivale a $\Theta = \Theta^q$ y $\Theta^q = \Theta^{q^2}$, es decir $\Theta = \Theta^{q^2}$; lo cual es contradictorio. Por lo tanto $\pi_{\Theta} \circ F \not\simeq \pi_{\Theta}$ $(\Theta \in Car(\mathbb{K}^{\times}), \Theta \neq \Theta^{q^2})$.

□

2.3. Descripción de los espacios $\mathbb{V}[\pi](\xi)$.

DEFINICION 2.5. Sea (U,π) una representación de Γ' . Para todo $\xi \in \mathcal{H}$ y todo subespacio V' de $\mathbb{V}[\pi]$, se define

$$V'(\xi) = \{f(\xi) \mid f \in V'\} .$$

Se dirá que V' es un subespacio saturado de $\mathbb{V}[\pi]$ si $f(\xi) \in V'(\xi)$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$ implica $f \in V'$.

En particular, para $\xi = (x,\psi) \in \mathcal{H}$

$$\mathbb{V}[\pi](\xi) = Fix_U\left(Stab_{GL(2,K)}\,\xi\right) = Fix_U\left(O(Q) \cap Stab_{GL(2,K)}\,x\right) . \tag{13}$$

Recordemos que e designa un carácter no trivial fijo de k^+ y $x_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

PROPOSICION 2.4. Sean $\Lambda,\phi \in Car(K^{\times})$, $\Lambda \neq \phi$, $\Lambda\phi = \Lambda^q\phi^q$. Consideremos la representación $\left(V_{\Lambda,\phi}, \pi_{\Lambda,\phi}\right)$ de la serie principal de GL(2,K) realizada por su modelo natural. Entonces

i) $V[\pi_{\Lambda,\phi}](1,\psi)$ <u>consta, para todo</u> $\psi \in \mathfrak{X}$, <u>de todas las funciones</u> $f \in V_{\Lambda,\phi}$ <u>tales que</u>

(14) $f(0,1;1) = f(1,0;1) = \delta(\Lambda,\Lambda^q)f(0,1;1)$,

(15) $f(1,d;1) = (\Lambda\phi^{-1})(a)\delta(\Lambda,\Lambda^q)f(0,1;1)$ $(a,d \in K^\times,\ N(a) = 1 + N(d) \neq 0)$,

(16) $f(1,uv_o;1) = \Lambda(u)\delta(\phi,\Lambda^q)f(1,v_o;1)$ $(u \in \mathbb{U},\ v_o \in K^\times$ <u>fijo</u>, $N(v_o) = -1)$,

ii) $V[\pi_{\Lambda,\phi}](x_o,e)$ <u>consta de todas las funciones</u> $f \in V_{\Lambda,\phi}$ <u>tales que</u>

(17) $f(1,d;1) = \delta(\Lambda,\Lambda^q)f(1,0;1)$ $(d \in K)$,

(18) $f(0,1;1) = \delta(\Lambda,\Lambda^q)f(0,1;1)$,

iii) $V[\pi_{\Lambda,\phi}](0,e) = \underline{0}$.

<u>Demostración</u>: Por la condición $\Lambda\phi = \Lambda^q\phi^q$ se tiene que, $\Lambda = \Lambda^q$ sí y sólo sí $\phi = \phi^q$, es decir $\delta(\Lambda,\Lambda^q) = \delta(\phi,\phi^q)$.

Recordemos que $V_{\Lambda,\phi}$ consta de las funciones $f \in \mathbb{C}^{K^2\times K^\times}$ tales que

(19) $f(a\vec{x};c(ad)^{-1}) = \Lambda(a)\phi(d)f(\vec{x};c)$ $(a,d,c \in K^\times\ ,\ \vec{x} \in K^2)$,

y acción $\pi = \pi_{\Lambda,\phi}$ dada por

$$(\pi_h f)(\vec{x};c) = f(\vec{x}h;c\ \det h^{-1})$$

donde $\vec{x} \in K^2$, $c \in K^\times$, $h \in GL(2,K)$, $f \in V_{\Lambda,\phi}$.

Luego cualquier $f \in V_{\Lambda,\phi}$ queda completa y únicamente determinada por su valor en $(1,d;1)$ $(d \in K)$ y $(0,1;1)$.

i) Ahora bien,

$$V[\pi_{\Lambda,\phi}](1,\psi) = \mathrm{Fix}_{V_{\Lambda,\phi}}(U(2,K)) \qquad (\psi \in \mathfrak{X})$$

y todo $h \in U(2,K)$ puede escribirse en la forma

$$h = \begin{pmatrix} ua & ub \\ -b^q & a^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b^q & a^q \end{pmatrix}$$

con $u = \det h \in \mathbb{U}$ y $a,b \in K$ tales que $N(a) + N(b) = 1$ (cf. § 1, Proposición 1.3.).

Sea $f \in V[\pi_{\Lambda,\phi}](1,\psi)$ y $u \in \mathbb{U}$, entonces

$$\left(\pi_{\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} f\right)(0,1;1) = f(0,1;1) \quad \text{sí y sólo si} \quad f(0,1;u^{-1}) = f(0,1;1)$$

$$\text{sí y sólo si} \quad \phi(u)f(0,1;1) = f(0,1;1) ,$$

de donde $f(0,1;1) = \delta(\Lambda,\Lambda^q)f(0,1;1)$.

Además

$$\left(\pi_{\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} f\right)(0,1;1) = f(0,1;1) \quad \text{sí y sólo si} \quad f(1,0;u^{-1}) = f(0,1;1)$$

$$\text{sí y sólo si} \quad \phi(u)f(1,0;1) = f(0,1;1)$$

luego $f(1,0;1) = \delta(\Lambda,\Lambda^q)f(0,1;1)$, lo cual demuestra (14).

Por otro lado sea $d \in K$ tal que $N(d) \neq -1$, entonces existe $c \in K^{\times}$ tal que $N(c) = 1 + N(d)$. Coloquemos

$$b = -c^{-q} \quad , \quad a = (dc^{-1})^{q} \qquad y \qquad u \in \mathbb{U}$$

entonces

$$h = \begin{pmatrix} ua & ub \\ -b^{q} & a^{q} \end{pmatrix} \in U(2,K) \ ,$$

y

$$\left(\pi_h f\right)(0,1;1) = f(0,1:1) \quad \text{sí y sólo si} \quad f(-b^{q},a^{q};u^{-1}) = f(0,1;1)$$

$$\text{sí y sólo si} \quad (\phi\Lambda^{-1})(c)\phi(u)f(1,d;1) = f(0,1;1)$$

$$\text{sí y sólo si} \quad f(1,d;1) = (\Lambda\phi^{-1})(c)\phi^{q}(u)f(0,1;1)$$

de donde $f(1,d;1) = (\Lambda\phi^{-1})(c)\delta(\Lambda,\Lambda^{q})f(0,1;1)$, que corresponde a (15).

Finalmente demostremos (16), para ello sea $v_o \in K^{\times}$ fijo tal que $N(v_o) = -1$ y $u \in \mathbb{U}$ entonces

$$\left(\pi_{\begin{pmatrix} u^{q} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} f\right)(1,v_o;1) = f(1,v_o;1) \quad \text{sí y sólo si} \quad f(u^{q},v_o;u^{-q}) = f(1,v_o;1)$$

$$\text{sí y sólo si} \quad \Lambda^{q}(u)f(1,uv_o;1) = f(1,v_o;1)$$

luego

$$(20) \qquad f(1,uv_o;1) = \Lambda(u)f(1,v_o;1) \ .$$

Por otro lado sea $c \in K^{\times}$ y $z \in K$ tal que $Tr(z) = 1 - N(c)$, colocando

$$b = -c^{-1}v_o z$$

$$a = c^{-q}(N(c) + z^q)$$

tenemos inmediatamente que

$$N(a) + N(b) = 1$$

y

$$c = a - v_o b^q \ .$$

Ahora bien

$$\left(\pi\begin{pmatrix} a & b \\ -b^q & a^q \end{pmatrix} f\right)(1,v_o;1) = f(1,v_o;1)$$

sí y sólo si $f(a - v_o b^q,\ b + a^q v_o;1) = f(1,v_o;1)$

sí y sólo si $f(c,v_o c^q;1) = f(1,v_o;1)$

sí y sólo si $(\Lambda\phi^{-1})(c)f(1,v_o c^q c^{-1};1) = f(1,v_o;1)$

por (20)

sí y sólo si $(\Lambda\phi^{-1})(c)\Lambda(c^q c^{-1})f(1,v_o;1) = f(1,v_o;1)$

sí y sólo si $(\Lambda^q\phi^{-1})(c)f(1,v_o;1) = f(1,v_o;1)$

de donde

$$(21) \qquad f(1,v_o;1) = \delta(\phi,\Lambda^q)f(1,v_o;1) \ ,$$

por lo tanto (16) se obtiene inmediatamente de (20) y (21).

Recíprocamente, sea $f \in V_{\Lambda,\phi}$ tal que verifique (14), (15) y (16). Luego, $f \in V[\pi_{\Lambda,\phi}](1,\psi)$ sí y sólo si

$$(22) \qquad (\pi_h f)(0,1;1) = f(0,1;1)$$

$$(23) \qquad (\pi_h f)(1,v_o;1) = f(1,v_o;1) \ ,$$

para todo $h \in U(2,K)$.

Sea $h = \begin{pmatrix} ua & ub \\ -b^q & a^q \end{pmatrix} \in U(2,K) \quad (u \in \mathbb{U} \ , \quad a,b \in K \ ; N(a) + N(b) = 1)$,

distingamos los casos:

si $b = 0$, se tiene $(\pi_h f)(0,1;1) = (\Lambda^q\phi^{-q})(a)\phi(u)f(0,1;1)$;

si $b \neq 0$, se tiene $(\pi_h f)(0,1;1) = \phi(u)\delta(\Lambda,\Lambda^q)f(0,1;1)$;

que se obtienen inmediatamente de (19) y (15).

Ahora sí $\Lambda = \Lambda^q$, (22) es inmediato a partir de las igualdades de más arriba. Por el contrario, si $\Lambda \neq \Lambda^q$, en (22) se tiene la igualdad $0 = 0$ en virtud de las igualdades de más arriba y de (14).

Por otro lado, para (23) coloquemos $c = ua - v_o b^q$ que es no nulo pues $N(a) + N(b) = 1$, entonces en virtud de (19) y (16)

$$(\pi_h f)(1,v_o;1) = f(ua - v_o b^q \ , \ ub + v_o a^q ; \ u^{-1})$$

$$= (\Lambda\phi^{-1})(c)\phi(u) f(1, uc^q c^{-1} v_o ; 1)$$

$$= (\Lambda^q \phi^{-1})(c)\delta(\phi,\Lambda^q) f(1,v_o;1) \ .$$

En consequencia (23) es inmediato de esta última relación.

ii) Recordemos que

$$V[\pi_{\Lambda,\phi}](x_o,e) = \mathrm{Fix}_{V_{\Lambda,\phi}}(H_1)$$

con

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u & b \\ 0 & v \end{pmatrix} \mid u,v \in \mathbb{U} \ , \ b \in K \right\} .$$

Sea $d \in K$ y $f \in V[\pi_{\Lambda,\phi}](x_o,e)$; luego $h = \begin{pmatrix} u & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_1 \quad (u \in \mathbb{U})$ y

$$(\pi_h f)(1,d;1) = f(1,d;1) \quad \text{sí y sólo si} \quad f(u,0;u^{-1}) = f(1,d;1)$$

$$\text{sí y sólo si} \quad \Lambda(u) f(1,0;1) = f(1,d;1)$$

de donde $f(1,d;1) = \delta(\Lambda,\Lambda^q) f(1,0;1)$, que corresponde a (17).

Por otro lado,

$$(\pi_h f)(0,1;1) = f(0,1;1) \quad \text{sí y sólo si} \quad f(0,1;u^{-1}) = f(0,1;1)$$

$$\text{sí y sólo si} \quad \phi(u) f(0,1;1) = f(0,1;1)$$

de donde $f(0,1;1) = \delta(\Lambda,\Lambda^q) f(0,1;1)$.

Recíprocamente, sea $f \in V_{\Lambda,\phi}$ tal que verifique (17) y (18), observemos que si $\Lambda \neq \Lambda^q$ entonces (17) y (18) son verificadas sólo por la función nula de donde $V[\pi_{\Lambda,\phi}](x_o,e) = \underline{0}$. En consecuencia basta reducirnos al caso $\Lambda = \Lambda^q$; luego por (17) y (18) es suficiente demostrar

$$(\pi_h f)(1,0;1) = f(1,0;1)$$

y $$(\pi_h f)(0,1;1) = f(0,1;1)$$

(para todo $h \in H_1$) , que resultan inmediatamente de (19).

iii) Recordemos que

$$V[\pi_{\Lambda,\phi}](0,e) = \mathrm{Fix}_{V_{\Lambda,\phi}}(UL(2,K)) \ .$$

Sea $f \in V[\pi_{\Lambda,\phi}](0,e)$, puesto que $U(2,K)$ y H_1 son subgrupos de $UL(2,K)$, f satisface (14) y (17), por consiguiente basta con determinar el valor de f en $(0,1;1)$.

Ahora bien, para $a \in K^\times$ tenemos, en virtud de (19),

$$\left(\pi_{\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}} f\right)(0,1;1) = f(0,1;1) \quad \text{sí y sólo si} \quad f(0,a;1) = f(0,1;1)$$

$$\text{sí y sólo si} \quad (\Lambda\phi^{-1})(a)f(0,1;1) = f(0,1;1)$$

así $f(0,1;1) = \delta(\Lambda,\phi)f(0,1;1) = 0$.

□

PROPOSICION 2.5. Sea $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^{\times})$, $\Lambda^{2} = \Lambda^{2q}$. Realicemos la representación de Steinberg $(V_{\Lambda}^{q^2}, \pi_{\Lambda}^{q^2})$ de $GL(2,K)$ por su modelo natural. Entonces

i) $V[\pi_{\Lambda}^{q^2}](1,\psi)$ está formado, para todo $\psi \in \mathfrak{X}$, por las funciones $f \in V_{\Lambda}^{q^2}$ tales que

(24) $f(1,d;1) = \delta(\Lambda,\Lambda^{q})f(0,1;1)$ $\qquad (d \in K\ ,\ 1 + N(d) \neq 0)$,

(25) $f(1,uv_o;1) = \Lambda(u)\delta(\Lambda,\Lambda^{q})f(1,v_o;1)$ $\qquad (u \in \mathbb{U}\ ,\ v_o \in K^{\times}$ fijo , $N(v_o) = -1$

ii) $V[\pi_{\Lambda}^{q^2}](x_o,e)$ está formado de las funciones $f \in V_{\Lambda}^{q^2}$ tales que

(26) $f(1,d;1) = \delta(\Lambda,\Lambda^{q})f(1,0;1)$ $\qquad (d \in K)$,

iii) $V[\pi_{\Lambda}^{q^2}](0,e) = \underline{0}$.

Demostración: Recordemos que

$$V_{\Lambda}^{q^2} = \left\{ f \in V(\Lambda,\Lambda) \ / \ \sum_{d\in K} f(1,d;1) = -f(0,1;1) \right\} .$$

Para probar (i) y (ii), basta observar que las demostraciones de (i) y (ii) en la Proposición 2.4. (§ 2) permanecen válidas también para el caso $\Lambda = \phi$. Luego sólo nos resta demostrar (iii); para ello sea $f \in V[\pi_{\Lambda}^{q^2}](0,e)$ entonces f verifica (24), (25) y (26). Por otro lado vemos que, al igual que en la Proposición anterior, basta considerar el caso $\Lambda = \Lambda^{q}$.

Ahora bien en (24) haciendo $d = 0$ tenemos que $f(1,0;1) = f(0,1;1)$. Además por (26) $f(0,1;1) = -q^2 f(1,0;1)$, entonces $f(1,0;1) = 0$; de donde, en virtud de (26), f es la función nula.

$\square$

PROPOSICION 2.6. <u>Sea</u> $\Theta \in \mathrm{Car}(\mathbb{K}^\times)$, $\Theta \neq \Theta^{q^2}$, <u>trivial sobre</u> $\mathbb{U}$. <u>Consideremos la representación</u> (V_Θ, π_Θ) <u>de la serie discreta de</u> $GL(2,K)$. <u>Entonces</u>

$$\mathbb{V}[\pi_\Theta](\xi) = \underline{0} \qquad (\xi \in \mathcal{H}) .$$

<u>Demostración</u>: Realicemos (V_Θ, π_Θ) como subrepresentación de la representación de Weil de $GL(2,K)$ asociada al espacio cuadrático $(\mathbb{K}, \mathbb{N})$ sobre K ($\mathbb{N}$ es la norma de la extensión cuadrática $\mathbb{K}$ de K) , definida por

$$V_\Theta = \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{K}\times\widetilde{\mathfrak{X}}} / f(zy, \Psi^{\mathbb{N}(z)^{-1}}) = \Theta(z) f(y,\Psi) \quad z \in \mathbb{K}^\times, \ y \in \mathbb{K}, \ \Psi \in \widetilde{\mathfrak{X}}\}$$

donde $\widetilde{\mathfrak{X}} = \mathrm{Car}(K^+) - \{\mathbb{1}\}$.

Denotemos a π_Θ simplemente por π . Supongamos $f \in \mathbb{V}[\pi_\Theta](x_o, e)$ ó $f \in \mathbb{V}[\pi_\Theta](0,e)$, $u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_1$ $(b \in K)$, $\Psi \in \widetilde{\mathfrak{X}}$; entonces debe tenerse

$$\left(\pi_{u(b)} f\right)(1,\Psi) = f(1,\Psi) ,$$

es decir

$$\Psi(b) f(1,\Psi) = f(1,\Psi) \qquad (b \in K)$$

de donde $f(1,\Psi) = 0$, puesto que $\Psi \neq \mathbb{1}$, y por consiguiente f es nula.

Por otro lado, como los vectores de $V[\pi_\Theta](1,\psi)$ $(\psi \in \mathfrak{X})$ también son vectores $SU(2,K)$-fijos, resulta inmediato de la Proposición 1.5. (§ 1) que $V[\pi_\Theta](1,\psi) = \underline{0}$ $(\psi \in \mathfrak{X})$.

□

PROPOSICION 2.7. <u>Sea</u> $\Lambda \in Car(K^\times)$, $\Lambda^2 = \Lambda^{2q}$. <u>Consideremos la representación</u> $\{\mathbb{C},\ \pi_\Lambda^1 = \Lambda \circ \det.\}$ <u>de</u> $GL(2,K)$. <u>Entonces</u>

$$V[\pi_\Lambda^1](\xi) = \delta(\Lambda,\Lambda^q)\mathbb{C} \qquad (\xi \in \mathcal{H}) .$$

<u>Demostración</u>: Es claro, puesto que

$$\dim_{\mathbb{C}} V[\pi_\Lambda^1](\xi) = |\mathrm{Stab}_{GL(2,K)}\ \xi|^{-1} \sum_{h \in \mathrm{Stab}_{GL(2,K)}\ \xi} \Lambda(\det h)$$

y para cualquier $\xi \in \mathcal{H}$ el homomorfismo det. aplica $\mathrm{Stab}_{GL(2,K)}\ \xi$ <u>sobre</u> $\mathbb{U}$ (con fibra de cardinal constante).

□

La siguiente tabla nos entrega la dimensión de los espacios $V[\pi](\xi)$ para los distintos representantes ξ de $\mathcal{H}$. En la última fila se da la dimensión de las representaciones $V[\pi]$, obtenidas de la relación

$$\dim_{\mathbb{C}} V[\pi] = (q-1)\dim_{\mathbb{C}} V[\pi](1,e) + \dim_{\mathbb{C}} V[\pi](x_o,e) + \dim_{\mathbb{C}} V[\pi](0,e)$$

(cf. Capítulo I, § 7, Corolario de la Proposición 7.3.).

TABLA 3. Dimensión de los espacios $V[\pi](\ )$.

	Representación	π^{1}_{Λ}	$\pi^{q^2}_{\Lambda}$	$\pi^{q^2+1}_{\Lambda,\phi}$	$\pi^{q^2-1}_{\Theta}$
Representante	Parametrización	$\Lambda \in Car(K^{\times})$ $\Lambda^2 = \Lambda^{2q}$	$\Lambda \in Car(K^{\times})$ $\Lambda^2 = \Lambda^{2q}$	$\Lambda, \phi \in Car(K^{\times})$ $\Lambda \neq \phi, \quad \Lambda\phi = \Lambda^q \phi^q$	$\Theta \in Car(\mathbb{K}^{\times})$ $\Theta \neq \Theta^{q^2}$ Θ trivial en $\mathbb{U}$
$(1, \psi)$	$\psi \in \mathfrak{X}$	$\delta(\Lambda, \Lambda^q)$	$\delta(\Lambda, \Lambda^q)$	$\delta(\Lambda, \Lambda^q) + \delta(\phi, \Lambda^q)$	0
(x_0, e)		$\delta(\Lambda, \Lambda^q)$	$\delta(\Lambda, \Lambda^q)$	$2\delta(\Lambda, \Lambda^q)$	0
$(0, e)$		$\delta(\Lambda, \Lambda^q)$	0	0	0
$\dim_{\mathbb{C}} V[\pi]$		$(q+1)\delta(\Lambda,\Lambda^q)$	$q\delta(\Lambda, \Lambda^q)$	$(q+1)\delta(\Lambda,\Lambda^q)+(q-1)\delta(\phi,\Lambda^q)$	0

TEOREMA 2.2. Sea (U,π) representación irreducible de $GL(2,K)$ trivial sobre las matrices escalares de razón en $\mathbb{U}$. Entonces

$$V[\pi] \neq \underline{0} \quad \text{sí y sólo si} \quad \pi \circ F \simeq \pi \ .$$

Demostración: Es inmediato de la Proposición 2.3. (§ 2) y la Tabla 3.

□

§ 3. DESCOMPOSICION DE LA REPRESENTACION $V[\pi_\Lambda^1]$ $(\Lambda = \alpha \circ N\ ,\ \alpha \in Car(k^\times))$.

Sea $(\mathbb{C},\pi_\Lambda^1)$ $(\pi_\Lambda^1 = \Lambda \circ \det,\ \Lambda = \Lambda^q\ ,\ \Lambda \in Car(K^\times))$ una representación unidimensional de $GL(2,K)$. Sea

$$P_\alpha = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \overline{\alpha(\det g)}\ \rho_g$$

el proyector isotípico de tipo $\alpha \circ \det$ de la representación $(V[\pi_\Lambda^1],\rho)$ de G (de donde α es un carácter de $k^\times$ que factoriza a Λ mediante la norma N , es decir $\Lambda = \alpha \circ N)$.

PROPOSICION 3.1. Sea $(\mathbb{C},\ \pi_\Lambda^1 = \Lambda \circ \det)$ $(\Lambda = \alpha \circ N\ ,\ \alpha \in Car(k^\times))$ una representación unidimensional de $GL(2,K)$. Entonces

$$\text{Sop}\ P_\alpha f = \{0\} \times \mathcal{X} \cup E^{(1)} \times \mathcal{X}$$

$$(P_\alpha f)(0,\psi) = -(q-1)(P_\alpha f)(x_o,\psi)$$

$$(P_\alpha f)(0,\psi) - (P_\alpha f)(x_o,\psi) = \frac{1}{q+1}\left[f(0,\psi) - (q^2+1)f(x_o,\psi)\right]$$

para $f \in V[\pi_\Lambda^1]$, $\psi \in \mathcal{X}$ y $x_o = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

<u>Demostración</u>: Recordemos que B_o designa el subgrupo de Borel (de matrices triangulares superiores) de G, U_o el subgrupo de las matrices unipotentes superiores de G y $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Sea $f \in V[\pi_\Lambda^1]$, coloquemos

$$\tilde{f} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in B_o} \overline{\alpha(\det g)} \rho_g f$$

y

$$f_o = \sum_{g \in U_o} \overline{\alpha(\det g)} \rho_g f$$

entonces, es inmediato que

$$\tilde{f}(x,\psi) = \frac{1}{q+1} \delta(Q(x)) f(x,\psi) \qquad ((x,\psi) \in \mathcal{H}), \tag{27}$$

y

$$f_o(x,\psi) = q\delta(Q(x)) f(x,\psi) \qquad ((x,\psi) \in \mathcal{H}),$$

donde δ es la función de Dirac sobre k^+ que vale 1 en 0 y se anula en otra parte.

Ahora bien, con ayuda de la descomposición de Bruhat

$$G = B_o \cup B_o w U_o$$

(cf. Capítulo II, § 2, Teorema 2.1.), tenemos

$$P_\alpha f = \tilde{f} + \widetilde{\rho_w f_o} \qquad (f \in V[\pi_\Lambda^1]). \tag{28}$$

En virtud de (27) y (28) es inmediato que $(P_\alpha f)(x,\psi) = 0$ cuando $x \in E \cap GL(2,K)$ y $\psi \in \mathcal{X}$. Luego basta determinar $(P_\alpha f)(x,\psi)$ $(\psi \in \mathcal{X})$ cuando $x = 0$ y $x = x_o$; para ello es necesario lo siguiente

$$\left(\rho_w f_o\right)(x,\psi) = -\frac{1}{q}\left[f(0,\psi) + \sum_{z \in E^{(1)}} \psi\left[B(x,z)\right] f(z,\psi)\right]$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{q}\left[f(0,\psi) + (q-1)(q^2+1) f(x_o,\psi)\right] & x = 0 \\ \\ -\frac{1}{q}\left[f(0,\psi) - (q^2-q+1) f(x_o,\psi)\right] & x = x_o \end{cases} .$$

Por consiguiente a partir de (27), (28) y lo de arriba, se tiene lo que se quería demostrar.

□

COROLARIO. <u>Sea</u> $\left(\mathbb{C}, \pi_\Lambda^1\right)$ $(\Lambda = \alpha \circ N\ ,\ \alpha \in \mathrm{Car}(k^\times))$ <u>una representación unidimensional de</u> $GL(2,K)$. <u>Entonces la representación</u> $V[\pi_\Lambda^1]$ <u>de</u> G <u>se descompone en componentes irreducibles como sigue</u>

$$V[\pi_\Lambda^1] = V^1[\pi_\Lambda^1] \oplus V^q[\pi_\Lambda^1] ,$$

<u>donde</u>

$$V^1[\pi_\Lambda^1] = \{f \in V[\pi_\Lambda^1] \ /\ \mathrm{Sop}\ f \subset \{0\} \times \mathcal{X} \cup E^{(1)} \times \mathcal{X} ,$$

$$f(0,\psi) = -(q-1) f(x_o,\psi) ,\quad \psi \in \mathcal{X}\}$$

$$V^q[\pi_\Lambda^1] = \{f \in V[\pi_\Lambda^1] \; / \; f(0,\psi) = (q^2+1)f(x_o,\psi) \quad , \; \psi \in \mathcal{X}\}$$

<u>con</u> $\dim_{\mathbb{C}} V^r[\pi_\Lambda^1] = r \qquad (r = 1;q)$.

□

§ 4. IDENTIFICACION DE LAS REPRESENTACIONES $V[\pi]$.

Las representaciones $V[\pi]$ de G , construídas a partir de representaciones irreducibles π de Γ' , no son sino otra manera de obtener <u>toda</u> la serie principal y discreta de G que ya son conocidas (cf. Capítulo II, § 1, Definición 1.1. y § 4, Definición 4.3.). Dentro de este párrafo se pretende identificar las representaciones $V[\pi]$ con las representaciones de G de acuerdo a los modelos dados en el Capítulo II.

Además cabe hacer notar que sobre la irreducibilidad de $V[\pi]$ se puede decir, por un lado, que resultará inmediata de la identificación que se hará con las representaciones irreducibles de G que por lo demás será la demostración de este hecho en el presente contexto. No obstante, por otro lado, se puede dar una demostración directa mediante el Lema de Schur, que necesita el estudio de los operadores de entrelazamiento y la descripción explícita de los núcleos que le están asociados; no será este el camino a seguir aquí, para evitar introducir nuevos conceptos y resultados que pueden llegar a ser demasiado extensos, que no es el fin, a esta altura, pretender seguir abusando de la paciencia del lector. Sin embargo para mayores detalles se puede citar, por ejemplo, a [SA-2] .

Dentro de este párrafo mantendremos las notaciones de los párrafos anteriores como así también las del Capítulo II.

4.1. Serie principal de G .

Recordemos la

DEFINICION 4.1. Sean $\alpha,\beta \in Car(k^{\times})$. Denotemos por $[\alpha,\beta]$ el caracter de B_o , subgrupo de Borel triangular superior de G , definido por

$$[\alpha,\beta]\begin{pmatrix} r & t \\ 0 & s \end{pmatrix} = \alpha(r)\beta(s) \qquad (r,s \in k^{\times} , t \in k) .$$

Denotemos por $(H_{\alpha,\beta} , \pi_{\alpha,\beta})$ a la representación inducida $Ind_{B_o \uparrow G} [\alpha,\beta]$, donde

$$H_{\alpha,\beta} = \{f : G \to \mathbb{C} / f(bg) = [\alpha,\beta](b)f(g) \qquad b \in B_o , \quad g \in G\}$$

y

$$[\pi_{\alpha,\beta}(g)f](g') = f(g'g) \qquad (f \in H_{\alpha,\beta} ; g,g' \in G) .$$

Para $\alpha = \beta$ se tiene una descomposición de $H_{\alpha,\alpha}$, a saber

$$H_{\alpha,\alpha} = H^1_\alpha \oplus H^q_\alpha$$

donde $H^1_\alpha = \mathbb{C}(\alpha \circ \det)$,

$$H^q_\alpha = \{f \in H_{\alpha,\alpha} / \sum_{\substack{g\in G \\ \det g=t}} f(g) = 0 \qquad \forall\, t \in k^{\times}\} .$$

PROPOSICION 4.1. Sean $\alpha,\beta \in Car(k^{\times})$, $\Lambda = \alpha \circ N$, $\phi = \alpha \circ N$ $(\alpha \neq \beta)$. Consideremos la representación $(V_{\Lambda,\phi} , \pi_{\Lambda,\phi})$ de la serie principal de $GL(2,K)$ realizada por su modelo natural. Entonces existe un isomorfismo de G-módulos

$$H_{\alpha,\beta} \simeq V[\pi_{\Lambda,\phi}] \ .$$

Demostración: Construiremos un morfismo no nulo φ de la representación $H_{\alpha,\beta}$ dentro de la representación $V[\pi_{\Lambda,\phi}]$ para cualquier $\alpha,\beta \in Car(k^\times)$ $(\alpha \neq \beta)$. Como $H_{\alpha,\beta} = Ind_{B_o\uparrow G}[\alpha,\beta]$, es suficiente construir un morfismo no nulo entre las representaciones $(\mathbb{C}, [\alpha,\beta])$ y $V[\pi_{\Lambda,\phi}]$ de B_o (cf. Capítulo I, § 7, Proposición 7.1.).

Definamos $\tilde{\varphi}$ como sigue; sea $\tilde{\varphi}(1) = \varphi_1$ en $V[\pi_{\Lambda,\phi}]$ tal que

$$Sop\ \varphi_1 = Orb(x_o,e)$$

y

$$Sop\ \varphi_1(x_o,e) = K^\times \times K \times K^\times$$

con $e \in \mathfrak{X}$ fijo.

Sea $g = \begin{pmatrix} r & t \\ 0 & s \end{pmatrix} = h(r)h'(rs)u(tr^{-1})$ $\qquad (r,s \in k^\times\ ,\ t \in k)$ entonces

$$\rho_g(\varphi_1) = [\alpha,\beta](g)\varphi_1 \tag{29}$$

en efecto,

$$\rho_g(\varphi_1)(x,\psi) = \psi\left(ts^{-1}Q(x)\right)\varphi_1\left(rx,\psi^{(rs)^{-1}}\right) \qquad ((x,\psi) \in \mathcal{H})\ . \tag{30}$$

Si en (30), $x \in E^{(o)} = \{0\}$ ó $x \in E^{(2)}$, en (29) se tiene la igualdad $0 = 0$.

Por otro lado, de (30), se tiene

$$\rho_g(\varphi_1)(x_o,e) = \varphi_1\left(rx_o, e^{(r\ s)^{-1}}\right)$$

$$= \varphi_1(h\cdot(x_o,e)) \quad \text{con} \quad h = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \ N(a) = r\ ,\ N(d) = s$$

$$= \pi_{\Lambda,\phi}(h)\left(\varphi_1(x_o,e)\right)$$

$$= \Lambda(a)\phi(d)\varphi_1(x_o,e)$$

$$= [\alpha,\beta]\,(g)\varphi_1(x_o,e)$$

(Obsérvese que

$$[\pi_{\Lambda,\phi}(h)\left(\varphi_1(x_o,e)\right)]\,(\vec{y},c) = \varphi_1(x_o,e)(ay_1,dy_2;c(ad)^{-1})$$

$$= \Lambda(a)\phi(d)\varphi_1(x_o,e)(\vec{y},c)$$

con $\vec{y} = (y_1,y_2)$ $(y_1 \in K^\times)$. Para $\vec{y} = (0,y_2)$ con $y_2 \in K$ se tiene la igualdad $0 = 0$ en virtud de la Proposición 2.4. (§ 2)).

Luego existe φ morfismo no nulo (pues $\tilde{\varphi}$ es no nulo) entre las representaciones $H_{\alpha,\beta}$ y $V[\pi_{\Lambda,\phi}]$ de G . Como $H_{\alpha,\beta}$ es irreducible, φ es inyectivo y por dimensión (cf. Tabla 3), φ es un isomorfismo.

□

PROPOSICION 4.2. <u>Sea</u> $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$, $\Lambda = \alpha \circ N$. <u>Consideremos la representación</u> $(\mathbb{C},\ \pi_\Lambda^1 = \Lambda \circ \det)$ <u>de</u> $GL(2,K)$. <u>Entonces existe un isomorfismo de G-módulos entre</u> $H_{\alpha,\alpha}$ <u>y</u> $V[\pi_\Lambda^1]$ <u>cuyas restricciones a</u> H_α^1 <u>y</u> H_α^q <u>suministran isomorfismos</u>

$$H_\alpha^1 \simeq V^1[\pi_\Lambda^1] \qquad \underline{y} \qquad H_\alpha^q \simeq V^q[\pi_\Lambda^1]$$

<u>respectivamente</u>.

<u>Demostración</u>: Sea $\widetilde{\varphi}$ definida como sigue; $\widetilde{\varphi}(1) = \varphi_1$ en $V[\pi_\Lambda^1]$ tal que $\mathrm{Sop}\,\varphi_1 = \mathrm{Orb}(x_o,e)$, $\varphi_1(x_o,e) \in \mathbb{C}^\times$ con $e \in \mathfrak{X}$ fijo. Obsérvese que la definición de $\widetilde{\varphi}$ corresponde a la dada en la Proposición anterior, por esta razón es inmediato que

$$\rho_g(\varphi_1) = \alpha(\det g)\varphi_1 \qquad\qquad (g \in B_o)\ .$$

Luego existe φ morfismo no nulo entre las representaciones $H_{\alpha,\alpha}$ y $V[\pi_\Lambda^1]$ (cf. Capítulo I, § 7, Proposición 7.1.). Por otro lado tenemos las descomposiciones

$$H_{\alpha,\alpha} = H_\alpha^1 \oplus H_\alpha^q$$

y

$$V[\pi_\Lambda^1] = V^1[\pi_\Lambda^1] \oplus V^q[\pi_\Lambda^1]$$

(cf. § 4, Definición 4.1. y § 3, Corolario de la Proposición 3.1.).

Ahora bien, de acuerdo a la Proposición 3.1. (§ 3) tenemos que $(P_\alpha\varphi_1)(x_o,\psi) = \dfrac{q^2+1}{q(q+1)}\,\varphi_1(x_o,\psi)$ $(\psi \in \mathfrak{X})$; por lo tanto, en virtud del Corolario de la Proposición 3.1. (§ 3), $\varphi_1 \notin \mathrm{Im}\,P_\alpha = V^1[\pi_\Lambda^1]$ y $\varphi_1 \notin \mathrm{Ker}\,P_\alpha = V^q[\pi_\Lambda^1]$. En consecuencia φ aplica H_α^1 (resp. H_α^q) en $V^1[\pi_\Lambda^1]$ (resp. $V^q[\pi_\Lambda^1]$) de manera no trivial; y es inmediato que estas restricciones son isomorfismos, en virtud de la irreducibilidad de H_α^1

(resp. H^q_α) y de la dimensión de $V^1[\pi^1_\Lambda]$ (resp. $V^q[\pi^1_\Lambda]$) .

□

PROPOSICION 4.3. Sea $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$, $\Lambda = \alpha \circ N$. Realicemos la representación de Steinberg $\left(V^{q^2}_\Lambda , \pi^{q^2}_\Lambda\right)$ de GL(2,K) por su modelo natural. Entonces existe un isomorfismo de G-módulos

$$H^q_\alpha \simeq V[\pi^{q^2}_\Lambda]$$

Demostración: Consideremos, en analogía con el de la Proposición anterior, el operador $\tilde{\varphi}$ tal que $\tilde{\varphi}(1) = \varphi_1$ en $V[\pi^{q^2}_\Lambda]$ y $\mathrm{Sop}\,\varphi_1 = \mathrm{Orb}(x_o,e)$ con $\varphi_1(x_o,e)(0,1;1) \in \mathbb{C}^\times$, $e \in \mathfrak{X}$ fijo.

Es inmediato comprobar que $\tilde{\varphi}$ es un morfismo no nulo entre las representaciones $(\mathbb{C}, \alpha \circ \det)$ y $V[\pi^{q^2}_\Lambda]$ de B_o . Luego existe φ morfismo no nulo en $\mathrm{Hom}_G\left(H_{\alpha,\alpha} , V[\pi^{q^2}_\Lambda]\right)$ (cf. Capítulo I, § 7, Proposición 7.1.).

Con la ayuda de la descomposición de Bruhat

$$G = B_o \,\dot{\cup}\, B_o w U_o ,$$

tenemos un conjunto de representantes de coclases derechas, $B_o \backslash G$, de B_o en G formado por $w_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $w_t = wu(-t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$ $(t \in k)$. Ahora bien si δ es la función en $H_{\alpha,\alpha}$ definida por; $\delta(g) = \alpha(\det g)$ si $g \in B_o$ y cero es caso contrario, se tiene que los elementos $\pi_{\alpha,\alpha}(w_t)(\delta)$ $(t \in k_\infty = k \cup \{\infty\})$ forman una base del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $H_{\alpha,\alpha}$. Además es inmediato de la definición de H^q_α que $f \in H^q_\alpha$ sí y sólo si $\sum_{t\in k_\infty} f(w_t) = 0$.

Por otro lado designemos simplemente por π a la representación $\pi_\Lambda^{q^2}$, luego para $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,K)$, en virtud de (26), tenemos

$$\pi_h\big(\varphi_1(x_o,e)\big)(0,1;1) = \mu(c)\alpha(m_h)\varphi_1(x_o,e)(0,1;1)$$

donde $\mu(c) = \frac{-1}{q^2}$ si $c \in K^\times$ y $\mu(0) = 1$, $m_h = N(\det h)$. Por lo que, en virtud de $\dim_{\mathbb{C}} V[\pi_\Lambda^{q^2}](x_o,e) = 1$ (cf. § 2, Proposición 2.5.), se tiene

$$\pi_h\big(\varphi_1(x_o,e)\big) = \mu(c)\alpha(m_h)\varphi_1(x_o,e) \tag{31}$$

con $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,K)$.

Ahora bien, para $t \in k$ y en virtud de (31),

$$\big(\rho_{\omega_t}\varphi_1\big)(x_o,e) =$$

$$= -\frac{1}{q^2}\left|\mathrm{Stab}_{GL(2,K)}(x_o,e)\right|^{-1} \sum_{h\in UL(2,K)} e[B(x_o,hx_oh^*)]\,\pi_h\big(\varphi_1(x_o,e)\big)$$

$$\big(\rho_{\omega_t}\varphi_1\big)(x_o,e) = \lambda\,\varphi_1(x_o,e) \tag{32}$$

con
$$\lambda = -\frac{1}{q^4(q+1)^2} \sum_{\substack{h=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in GL(2,K) \\ m_h=1}} e(N(c))\mu(c) .$$

Para determinar el valor de λ recordemos que $\sum_{z\in K^\times} e(N(z)) = -(q+1)$ entonces

$$\lambda = -\frac{1}{q^4(q+1)^2}\left[q^2(q^2-1)(q+1) - \frac{1}{q^2}\sum_{\substack{h=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \\ c\in K^\times \\ m_h=1}} e(N(c))\right]$$

$$= -\frac{1}{q^4(q+1)^2}\left[q^2(q+1)^2(q-1) - q^2(q+1)\sum_{c\in K^\times} e(N(c))\right]$$

$$= -\frac{1}{q} .$$

En consecuencia, sea $f = \sum_{t\in k_\infty} \lambda_t \, \pi_{\alpha,\alpha}(w_t)(\delta)$ en H_α^q $(\lambda_t \in \mathbb{C})$, es inmediato que $f(1) = \lambda_\infty$ y $f(w) = \sum_{t\in k} \lambda_t$.

Como φ es un morfismo entre $H_{\alpha,\alpha}$ y $V[\pi_\Lambda^{q^2}]$ y $\dim_{\mathbb{C}} V[\pi_\Lambda^{q^2}](x_o,e) = 1$, en virtud de (32), se tiene que

$$\varphi(f)(x_o,e) = \frac{1}{q}\left(qf(1) - f(\omega)\right)\varphi_1(x_o,e) .$$

Por consiguiente la restricción de φ a H_α^q es no nula, pues basta tomar en la relación de arriba f tal que $qf(1) - f(\omega) \in \mathbb{C}^\times$, por ejemplo $f(1) = -f(\omega) \in \mathbb{C}^\times$ y $f(g) = 0$ para $g \in B_o \setminus G - \{1,w\}$. Además como H_α^q es irreducible, φ es inyectivo y por dimensión (cf. Tabla 3), φ es un isomorfismo.

□

4.2. Serie discreta de G .

Dentro de este número determinaremos la serie discreta de G y veremos como ella aparece como la descendida de Shintani de sólo una parte de la serie principal de $GL(2,K)$.

PROPOSICION 4.4. Sea $\Lambda \in Car(K^{\times})$, $\Lambda \neq \Lambda^{q}$. Consideremos la representación $(V_{\Lambda,\Lambda^q}, \pi_{\Lambda,\Lambda^q})$ de la serie principal de $GL(2,K)$ (resp. $(V(\Lambda), \rho^N)$) de la serie discreta de G.) realizada por su modelo natural (resp. como subrepresentación de la representación de Weil asociada al espacio cuadrático (K,N)). Entonces existe un isomorfismo de G-módulos

$$V(\Lambda) \simeq V[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}] .$$

Demostración: Designemos a π_{Λ,Λ^q} simplemente por π . Recordemos que $V(\Lambda)$ consta de todas las funciones f en $\mathbb{C}^{K\times\mathcal{X}}$ tales que

$$f\left(ax, \psi^{N(a)^{-1}}\right) = \Lambda(a)f(x,\psi) \qquad (a \in K^{\times},\ x \in K\ ,\ \psi \in \mathcal{X}) .$$

Respectivamente, V_{Λ,Λ^q} está formado de las funciones que verifican (19).

Sea

$$S^{\circ} = \{(a,d) \in K^{\times} \times K^{\times} \mid N(a) + N(d) = 0\} ,$$

entonces, en virtud de la Proposición 2.4. (§ 2), los elementos de $V[\pi]$ tienen soporte en $E^{(2)} \times \mathcal{X}$ y $V[\pi](I,\psi)$ $\left(I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \psi \in \mathcal{X}\right)$ consta de las funciones f en V_{Λ,Λ^q} tales que $\mathrm{Sop}\, f \subset S^{\circ} \times K^{\times}$ y

$$(33) \qquad f(1,uv_o;1) = \Lambda(u)f(1,v_o;1) \qquad (u \in \mathbb{U}\ ,\ v_o \in K^{\times} \text{ fijo, } N(v_o) = -1) .$$

Sea μ_∞ en $V[\pi](I,\psi)$ $(\psi \in \mathcal{X})$ tal que $\mu_\infty(1,v_o;1) \in \mathbb{C}^\times$.

Definamos un operador de entrelazamiento Φ de $V(\Lambda)$ en $V[\pi]$ como sigue, para $f \in V(\Lambda)$ $\Phi(f) =: \Phi_f$ es aquel elemento de $V[\pi]$ tal que Sop Φ_f = $\mathrm{Orb}(I,\psi)$ y

$$(34) \qquad \Phi_f(I,\psi) = f(1,\psi)\mu_\infty \qquad\qquad (\psi \in \mathcal{X}) .$$

Para $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,K)$, en virtud de (19) y (33), tenemos que

$$(35) \qquad \pi_h(\mu_\infty) = \lambda(h)\mu_\infty$$

con $\lambda(h) \doteq \Lambda\left(\dfrac{(b + dv_o)(\det h)^q}{v_o(a + cv_o)^q}\right)$ si $(1,v_o)h \in S°$ y $\lambda(h) = 0$ si $(1,v_o)h \notin S°$.

Ahora bien, se deduce inmediatamente de (34) y (35) que $\rho_g^Q \circ \Phi = \Phi \circ \rho_g^N$ $(g \in B_o)$.

Por otro lado sea $f \in V(\Lambda)$; entonces de acuerdo a (34) y (35) tenemos

$$\left[\rho_w^Q \circ \Phi\right](f)(I,\psi) = \varepsilon(\psi)\mu_\infty \qquad\qquad \left(w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \psi \in \mathcal{X}\right)$$

donde

$$\varepsilon(\psi) = -\frac{1}{q^2}\,|\,U(2,K)\,|^{-1} \sum_{h\in GL(2,K)} \psi[B(I,hh^*)]\,f(1,\psi^{m_h})\lambda(h) \ .$$

Denotemos por $G(v_o,z)$ $(z \in K^{\times})$ el conjunto formado de las matrices $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en $GL(2,K)$ tales que $(1,v_o)h \in S°$ y $\dfrac{(b + dv_o)(\det h)^q}{v_o(a + cv_o)^q} = z$;

entonces para $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en $G(v_o,z)$ tenemos que $b + dv_o = uv_o(a + cv_o)$ algún $u \in \mathbf{U}$ y $\det h = (a + cv_o)(d - cuv_o)$. Ahora bien,

$$N(z) = m_h ,$$

$$Tr(z) = - \frac{Tr[(a + cv_o)(b + dv_o)v_o^q(\det h)^q]}{N(a + cv_o)}$$

$$= - Tr[(b + dv_o)v_o^q(d - cuv_o)^q]$$

$$= N(d + au) + N(b + dv_o) - N(d - cuv_o)$$

$$= N(a) + N(c) + Tr[d^q u(a + cv_o)] + N(b + dv_o)$$

$$= N(a) + N(c) - Tr[bd^q v_o^q - N(d)] + N(b + dv_o)$$

$$= N(a) + N(c) + 2N(d) - Tr\left(bd^q v_o^q\right) + N(b + dv_o)$$

$$= N(a) + N(c) + N(d) + N(b) ,$$

pero $B(I,hh^*) = N(a) + N(b) + N(c) + N(d)$.

Por lo tanto, con las notaciones anteriores

B I B L I O G R A F I A

[Co-1] COGNET, M., Représentation de Weil et changement de base cuadratique. Bull. Soc. Math. France, 113 (1985), p. 403-457.

[Co-2] COGNET, M., Représentation de Weil et changement de base cuadratique dans le cas archimédien. II, Bull. Soc. Math. France, 114 (1986), p. 325-354.

[Ge] GERARDIN, P., Relevement des représentations du groupe GL(n) sur un corps fini, d'aprés T. SHINTANI. Publ. Math. Univ. Paris 7, Vol. 1, Séminaire "Groupes Réductifs et formes automorphes" I, Paris, 1975.

[SA-1] SOTO ANDRADE, J., Métodos geométricos en teoría de representaciones de grupos finitos. Cursillo en IX-ELAM, Santiago de Chile, 1988.

[SA-2] SOTO ANDRADE, J., Représentations de certains groupes symplectiques finis, Mém. 55-56 (1978), Soc. Math. France.

[Sh] SHINTANI, T., Two remarks on irreducible characters of finite general linear groups. J. Math. Soc. Japan. 28 (1976), p. 396-414.

$$\varepsilon(\psi) = -\frac{1}{q^2}\,|U(2,K)|^{-1} \sum_{z\in K^\times} \sum_{h\in G(v_o,z)} \psi[\mathrm{Tr}(z)]\,\Lambda(z)\,f\left(1,\psi^{N(z)}\right)$$

$$= -\frac{1}{q^2}\,|U(2,K)|^{-1}|G(v_o,z)| \sum_{z\in K^\times} \psi[\mathrm{Tr}(z)]\,f(z,\psi)$$

$$= -\frac{1}{q} \sum_{z\in K} \psi[\mathrm{Tr}(z)]\,f(z,\psi)$$

$$= [\rho_\omega^N f](1,\psi)\ .$$

En consecuencia, de (34), se tiene que $\rho_\omega^Q \circ \Phi = \Phi \circ \rho_\omega^N$.

Así, entonces, Φ es un isomorfismo entre las representaciones $V(\Lambda)$ y $V[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}]$ de G, en virtud de la irreducibilidad de $V(\Lambda)$ y por dimensión (cf. Tabla 3).

□