

# Modelando Tráfico en Ciudades.

Tesis  
entregada a la  
Universidad de Chile  
en cumplimiento parcial de los requisitos  
para optar al grado de  
Magíster en Ciencias con mención en Física  
Facultad de Ciencias

por

**Letizia Andrea de Lourdes Wastavino González**

Septiembre, 2005

Director de Tesis: **Dr. Juan Alejandro Valdivia Hepp**  
**Dr. José Antonio Rogan Castillo**

FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE  
INFORME DE APROBACIÓN  
TESIS DE MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por la candidata

**Letizzia Andrea de Lourdes Wastavino González**

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Física, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 22 de Septiembre de 2005.

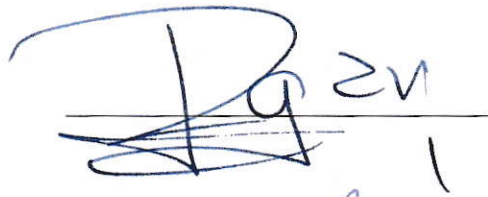
**Director de Tesis**

Dr. J. Alejandro Valdivia H.

\_\_\_\_\_

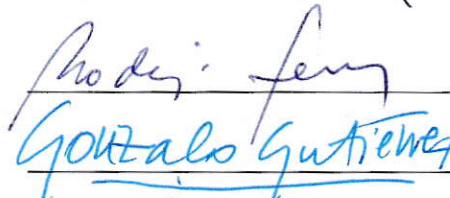
**Codirector de Tesis**

Dr. José Rogan C.

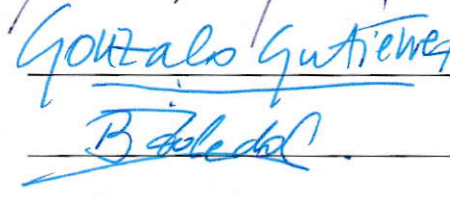
\_\_\_\_\_

**Comisión de Evaluación de la Tesis**

Dr. Rodrigo Ferrer P.

\_\_\_\_\_

Dr. Gonzalo Gutiérrez G.

\_\_\_\_\_

Dr. Benjamín Toledo C.

\_\_\_\_\_

## AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer a cada una de las personas que me ayudaron no sólo en la realización de esta tesis, sino que también en el transcurso de mis estudios.

**Prof. Alejandro Valdivia** Por hacer esta tesis posible, y más que nada por la confianza que depositó en mi.

**Prof. José Rogan** Por todos sus consejos y su amistad desde el primer día.

**Mis Padres y mi hermano** Por toda la paciencia, el amor y el constante apoyo que siempre me han dado.

**Robert Seiringer** Por todo lo que ha significado en mi vida, dándome día a día algo lindo en que pensar.

**Benjamín Toledo** Por su amistad, sus respuestas a mis preguntas, toda su ayuda computacional y su constante intento de enseñarme c++.

**Vicky Alcaíno** Por ser tan buena onda conmigo.

**Víctor Muñoz** Por su formato de tesis.

A todos mis profesores, porque cada uno de ellos me ha enseñado mucho más que física. Especialmente agradezco a los Profesores **Roberto Morales**, **Mario Molina** y **David Gottlieb**.

A los profesores **Nitant Kenkre**, **Elliott Lieb** y **Rafael Benguria** por lo que han aportado a mi persona.

A todos mis amigos quienes siempre han estado cuando los he necesitado, **Pedro Miranda**, **Simón Cancino**, **Jaime Hoyos**, **Javier Wachter**, **Cristián Saavedra**, **José Gallardo**, **Victoria Becerra**, **Rodrigo Vicencio**, **Lucía Gonzalorenna**, **Felipe González**, **Elisa Abedrapo**, **Roberto Hauyón**, **Michelle Miller** y **Matthias Blaickner**.

En fin a toda la gente que me ha rodeado, ha confiado en mi y me ha apoyado.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Sistemas Complejos y Caos</b>	<b>6</b>
2.1. Caos . . . . .	7
2.2. Atractor . . . . .	9
2.3. Cuenca de atracción . . . . .	11
2.4. Bifurcaciones . . . . .	11
2.4.1. Transiciones Discontinuas . . . . .	14
2.5. Exponente de Lyapunov . . . . .	17
<b>3. Modelando el tráfico vehicular</b>	<b>19</b>
3.1. El modelo microscópico desarrollado por Toledo <i>et al.</i> . . . . .	21
3.2. Modelamiento con semáforos . . . . .	31
3.3. Modelamiento con señal de ceda el paso . . . . .	36
<b>4. Conclusiones y proyecciones</b>	<b>49</b>
<b>A. Cinemática entre dos semáforos</b>	<b>52</b>
<b>B. Cinemática entre señalizaciones de ceda el paso</b>	<b>55</b>

## RESUMEN

En esta tesis abordamos el estudio del tráfico vehicular desde la perspectiva de sistemas complejos, enfocado, en particular, en la dinámica del tráfico en ciudades. Nos basaremos en el modelo desarrollado por Toledo *et al* [1], en el que se estudian dos agentes muy simples de un sistema de tráfico, tal como lo es un único vehículo desplazándose por una secuencia de semáforos, situación que ya revela la aparición de comportamiento caótico.

Con esta propuesta pretendemos avanzar en la complejidad del modelo de Toledo *et al* [1], estudiando nuevos elementos que están presentes principalmente en ciudades, tales como cruces de calles reguladas tanto por semáforos como por la señalización de ceda el paso, manteniendo eso sí, la forma simple y el aspecto básico de la dinámica.

En nuestro estudio, agregaremos un segundo automóvil y una segunda calle que intersectará en un sólo punto a la primera. En esta intersección colocaremos primeramente un semáforo que luego será reemplazado por una señal de ceda el paso. En este segundo caso, uno de los móviles determinará si el otro puede continuar su marcha o si tendrá que detenerse.

En ambos estudios de intersecciones se observa comportamiento caótico para un intervalo de los parámetros que definen el sistema, aún cuando estamos manteniendo condiciones ideales. Lo anteriormente mencionado nos hace pensar que la dinámica caótica está siempre presente en todo sistema de tráfico, dado que en las situaciones estudiadas en esta tesis se consideran los casos de un sólo vehículo viajando por una calle. Por lo que es esperable que el caso de muchos vehículos transitando por una vía e interactuando entre sí y con los agentes de control, pertenezca a la clase de sistemas complejos, abriendo la posibilidad de explorar fenómenos de auto-organización. En el desarrollo de este trabajo se presenta la evidencia en este sentido.

## ABSTRACT

In this thesis we propose to study a traffic network as a complex system, emphasizing in the dynamics of the traffic in cities. We study the model developed by Toledo *et al.* [1]. In spite of consisting of two very simple agents of a traffic network, a single car and a sequence of traffic lights, it shows chaotic behavior.

In this proposed model we increase the complexity of the cited model above, in order to study new elements that are present in the vehicular traffic, keeping the simple shape and the basic aspect of the dynamics, like intersections with traffic lights and with yield signals. In this work we add a second car travelling through another street which intersects in only one point with the first one. In this intersection we first place a traffic light which will be replaced, for a second study, by a yield sign. In the latter case, one of the vehicles will decide whether the other one can go on or must stop.

Both intersections show chaotic behavior for a range of the parameters that define the system, even under ideal conditions. This means that this chaotic behavior is an essential part of any traffic network. Since this is the case at a microscopic level, it seems foreseeable that the whole system, that is, many vehicles interacting among each other and with the control devices, belongs to the class of complex systems. In this context the possibility of study self-organization is open. Through the development of this work we give evidence in this regard.

# Capítulo 1

## Introducción

El estudio del flujo vehicular intenta describir en forma matemática las interacciones entre los móviles y la infraestructura existente como, por ejemplo, señalizaciones y vías de tránsito. De tal forma se han podido desarrollar modelos en los que se ha basado el diseño de calles y carreteras.

Es fácil imaginar lo complicada que serían nuestras actividades diarias sin la compleja infraestructura asociada al transporte terrestre que toda ciudad posee. Por esta razón es importante entender la dinámica de este sistema en tanto detalle como sea posible y eventualmente introducir esquemas de control que mejoren su desempeño.

El estudio del flujo vehicular tiene sus orígenes en la década del treinta, con la aplicación de la teoría de probabilidades a la descripción del tráfico de carreteras [2], así como con los estudios de modelos que relacionaban el volumen con la velocidad [3] y la eficiencia del tráfico en las intersecciones [4]. Después de la segunda guerra mundial el aumento en el uso del automóvil incrementó el interés por investigar en este área. Durante la década del cincuenta se desarrollaron varias aproximaciones teóricas, tales como seguimiento de automóviles, teoría ondulatoria del tráfico (del tipo hidrodinámico), y la teoría del tiempo de espera (*queuing theory*).

Para el año 1959 el área había alcanzado un alto grado de desarrollo de tal forma

que se comenzaron a realizar simposios internacionales, siendo uno de los primeros de ellos el llevado a cabo en el Laboratorio de Investigaciones de *General Motors* en Diciembre de 1959.

Desde entonces se ha incrementado el entendimiento de los fenómenos asociados al flujo vehicular, de modo que se han tratado variados tópicos relacionados con el tráfico en distintos tipos de simposios, dando como resultado que el tema se ha vuelto demasiado difuso como para poder ser totalmente discutido en un sólo tipo de ellos.

Actualmente el estudio de los fundamentos de la teoría de tráfico sigue siendo tan importante como lo fue en sus primeros días, más aún, ahora que puede ser caracterizada más fácilmente mediante el uso de la tecnología computacional, por lo que sigue constituyendo la base para las técnicas y procedimientos que están siendo aplicados en el diseño, operación y desarrollo de avanzados sistemas de transporte.

Han habido muchos trabajos enfocados a estudiar la relación existente entre flujo, que se define como el número de vehículos contados en un intervalo de tiempo, y su velocidad. Entre ellos se encuentra el artículo de Hall, Hurdle y Banks [5], y el trabajo realizado por Banks [6], entre otros. Estos estudios sostienen que la velocidad permanece aproximadamente constante aún a muy altas tasas de flujo.

También han sido estudiados modelos que relacionan la velocidad con la densidad, siendo Drake [7] quien concluyó que los resultados de estos modelos estaban basados solamente en la intuición, ya que las pruebas estadísticas eran ineficientes. Más tarde, Gerlough y Huber [8] hicieron notar la importancia que tienen los modelos de flujo y concentración, principalmente por su aplicación a sistemas de control. Cabe hacer notar que los datos empíricos relativos a las curvas flujo-concentración tienen, frecuentemente, discontinuidades en la vecindad de lo que debería ser el flujo máximo, por lo que se supone se podrían necesitar curvas discontinuas para estable-



cer tal relación. También se han realizado estudios de la incidencia de los factores humanos en el tráfico vehicular, los que incluyen el tiempo de percepción-reacción y respuestas a los sistemas de control, entre otros. Se han planteado tres tipos de estudios con respecto al manejo en sí. El primer tipo tiene que ver con la habilidad del conductor para interactuar con el vehículo; el segundo tipo tiene que ver con la interacción con el entorno físico; en tanto el tercer tipo toma en cuenta la ruta que sigue el conductor. Existen varias referencias sobre embotellamientos, flujos caóticos de tráfico, itinerarios de buses, flujos peatonales, etc. [9–17].

Actualmente se utilizan distintos modelos, dependiendo de la aplicación que se requiera. Por ejemplo, para el estudio del flujo de carreteras se utilizan modelos del tipo hidrodinámico y, para el tráfico en ciudades, son preferibles los modelos basados en autómatas celulares.

Como vemos el intrincado comportamiento mostrado por los patrones de tráfico ha sido un interesante campo de la física que ha estado atrayendo la atención casi desde la aparición de los automóviles, dadas sus propiedades estadísticas [18, 19] y dinámicas [20, 21]. En particular, el desarrollo de un comportamiento no trivial en los flujos de tráfico determina, en cierta forma, la eficiencia de la infraestructura de transporte de una ciudad, región o país. En este contexto, los flujos de tráfico, con y sin toma de pasajeros, han sido estudiados extensamente en la literatura [22, 23], por medio de modelamientos con autómatas celulares, teorías de campo medio que analizan la evolución microscópica, modelos hidrodinámicos que aproximan el comportamiento colectivo, entre otros. [24, 25]. Sin ninguna duda, un sistema de transporte eficiente es esencial para las actividades de cada día en las modernas sociedades industrializadas.

En el tráfico urbano, el flujo es controlado mediante semáforos y señales de tránsito-

to como “ceda el paso” y “disco pare”. Algunos estudios con estos dispositivos se encuentran en los trabajos de Chang *et al.* [26] y Wortman y Matthias [27] que incluyen estudios con semáforos. Se han publicado, además, investigaciones sobre optimización de semáforos para el tráfico en ciudades usando modelos de autómatas celulares [28] y en flujo de tráfico controlado por semáforos mediante modelos de optimización de velocidad [29], donde se derivó la relación entre capacidad de ruta y transición al embotellamiento. Muy recientemente, se ha revelado que existe un comportamiento auto-similar para un sólo vehículo moviéndose a través de una serie infinita de semáforos [30]. Finalmente, en el trabajo desarrollado por Toledo *et al.* [1] se estudió el comportamiento de un vehículo que viaja a través de una secuencia de semáforos, obteniendo como resultado la aparición de comportamientos no triviales para ciertos valores de los parámetros, donde el comportamiento caótico es introducido por la aceleración y desaceleración para partir y frenar en ellos. También se ha estudiado el comportamiento caótico exhibido al acelerar entre semáforos [31], con el objetivo de disminuir el retraso inducido por el frenado en los éstos, dado que el conductor quiere llegar a su destino lo antes posible.

En esta tesis tomaremos el modelo de Toledo *et al.* y lo aplicaremos al estudio de cruces señalizados primeramente con un semáforo y luego con una señal de ceda el paso. Nuestro objetivo es estudiar con más detalle el comportamiento de los componentes del sistema para poder, idealmente, obtener la diferencia entre un flujo óptimo y un embotellamiento indeseado. El modelo desarrollado por Toledo *et al.* [1], en el que se estudian dos agentes - que son un automóvil transitando por una calle y una secuencia de semáforos - mostró la aparición de caos en la dinámica del modelo, para un intervalo de los parámetros que definen el sistema.

Con esta propuesta pretendemos incrementar la complejidad del modelo de To-

ledo *et al.* [1] para estudiar nuevos elementos (manteniendo la forma simple y el aspecto básico de la dinámica) que están presentes principalmente en ciudades como son las intersecciones reguladas, tanto por semáforos como por la señalización ceda el paso. En nuestro estudio, agregaremos un segundo automóvil y una segunda calle, la que intersectará en un sólo punto a la primera calle.

En el caso del cruce con semáforo, la condición que regula la luz verde del semáforo es  $\sin(\omega_n t + \phi_n) > 0$  y será roja en el caso contrario. En el caso particular de la intersección regulada por un semáforo, se puede entender como dos modelos (propuestos por Toledo *et al.* [1]) pero con un desfase de  $\Delta\phi = \pi$  entre los semáforos. Los parámetros  $\omega$  y  $\phi$  que representan la frecuencia del semáforo y un desfase temporal, respectivamente, resultarán de gran importancia al tratar de controlar el flujo vehicular.

En cambio, en el caso del cruce con señalización ceda el paso, podemos comparar al vehículo que tiene la preferencia de paso,  $A$ , como un semáforo para el otro móvil,  $B$ , ya que  $A$  determinará si  $B$  pasa o se detiene. Por lo tanto, la fase del semáforo para el auto  $B$ ,  $\phi_B$ , es no trivial en este caso y depende de la dinámica del móvil  $A$ . En estos sistemas pretendemos estudiar la dinámica de los dos autos bajo diferentes parámetros. Creemos que estos estudios nos permitirán adquirir una intuición inicial para enfrentar en el futuro el problema más complejo de muchos autos en una grilla de intersecciones.

Este trabajo está organizado como sigue, en el segundo capítulo se aborda el tema de la complejidad y de su subconjunto: la dinámica caótica. El tercer capítulo, abarca el desarrollo y análisis del modelo desarrollado por Toledo *et al.* aplicado ahora a los cruces de vías. En el cuarto capítulo se presentan las conclusiones. Finalmente, en el apéndice se presentan en detalle las ecuaciones que describen el modelo.

## Capítulo 2

# Sistemas Complejos y Caos<sup>1</sup>

La física no lineal ha llegado a su presente estado siguiendo una serie de desarrollos analíticos, numéricos y experimentales. La meta es proveer los conceptos y las técnicas necesarias para una descripción unificada de este particular fenómeno en el que un simple sistema determinista evoluciona en un comportamiento complejo, asociado con la presencia de estructuras espaciales inesperadas. Tales sistemas se encuentran en muchas disciplinas como: mecánica clásica, física estadística, dinámica de fluidos, química, óptica, biología, economía, entre otros. La física no lineal introduce una nueva manera de pensar, basada en una suave interacción entre topología, geometría y consideraciones métricas y entre aspectos determinísticos y estadísticos.

La física no lineal ayuda a identificar un nivel apropiado de descripción en el que unificación y universalidad pueden ser esperadas. Las leyes fundamentales de la física microscópica tales como las ecuaciones de Newton o la ecuación de Schrödinger, o las de la física macroscópica como las ecuaciones de Navier-Stokes, son inadecuadas para formular la complejidad inducida por la evolución del sistema no lineal. En contraste, atractores, fractales y multifractales, exponentes de Lyapunov, entropías, mediciones tanto de medida como densidad invariante y funciones de correlación son parte del

---

<sup>1</sup>Esta sección está basada en gran medida en las referencias [32–35]

vocabulario científico propuesto por la física no lineal y provee una forma pragmática de enfrentar el desafío frente al cual las aproximaciones tradicionales han fallado. Pero, ¿cómo podemos distinguir si un sistema es complejo? Los sistemas complejos contienen muchos constituyentes interdependientes que interactúan no linealmente, además poseen estructuras que se extienden en varias escalas; por ejemplo podemos pensar en el cuerpo humano como un sistema complejo, ya que si tomamos por ejemplo una mano, esta se conforma de huesos, los que se conforman de células, las que se forman de proteínas, etc, es decir estructuras dentro de estructuras. Otra de las propiedades de los sistemas complejos es que son capaces de exhibir comportamientos emergentes. La diferencia más significativa entre caos y complejidad es que un sistema complejo siempre tiene varias escalas. Mientras el caos puede observarse en la escala  $n$ -ésima, la escala más gruesa por sobre ésta (la escala  $n - 1$ -ésima) puede resultar auto-organizada, lo que de algún modo es opuesto al caos. La complejidad envuelve la coexistencia de comportamientos caóticos y no caóticos.

## 2.1. Caos

Caos es un término usado para describir la aparición de comportamiento caótico en un sistema que aparenta ser simple. El comportamiento caótico, cuando se es visto casualmente, luce errático y casi aleatorio, como si el comportamiento de este sistema estuviera fuertemente influenciado por ruido aleatorio de un sistema con muchos grados de libertad, en los que cada uno hace lo que quiere. Sin embargo, el tipo de comportamiento que ha sido llamado caótico, surge en sistemas muy simples, con unos pocos grados de libertad y que están libres de ruido aleatorio. De hecho, estos sistemas son esencialmente determinísticos; lo que quiere decir que un conocimiento preciso de las condiciones del sistema nos permite, en principio, conocer

qué ocurrirá en el futuro comportamiento de aquél sistema.

En general un sistema puede presentar un comportamiento caótico dependiendo de los parámetros de control usados. Tomemos como ejemplo la ecuación logística

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (2.1)$$

con  $n \in \mathbb{N}$ , que fue desarrollada en 1976 por R. S. May, [36] como un simple e idealizado modelo ecológico para las variaciones anuales de la población de una especie de insectos. En (2.1),  $x_n$  se refiere a la población en un período  $n$  de tiempo,  $r$  a la tasa de crecimiento de ella,  $x_{n+1}$  a la población en el período de tiempo siguiente, mientras que el factor  $(1 - x_n)$  limita el crecimiento de la población, que puede relacionarse con la escases de alimentos, natalidad, enfermedades o muerte. Dependiendo del valor que tome el parámetro de control  $r$ , la ecuación (2.1) converge a un punto de equilibrio estable ( $r < 3$ ), tal como se observa en la Fig. 2.1. Al incrementar el parámetro de control, el período de las órbitas se duplica, así que al paso del tiempo la población converge a órbitas de período 2, es decir a dos puntos estables. Al seguir incrementando  $r$  la órbita de período 2 comienza a perder estabilidad y se bifurca en período 4, 8 y así sucesivamente.

De esta forma la población varía en una forma mucho más complicada, ya que cuando  $r$  se encuentra entre 3,5 y 4 el sistema se vuelve caótico. Al llevar este sistema a un diagrama, mostrado en la Fig. 2.1, se observa una infinita cascada de bifurcaciones de doble período. En este caso,  $x_{n+1}$  es un mapa de iteración, dado que mapea un valor de  $x_n$ , digamos  $x_0$ , en el rango  $[0, 1]$  en otro valor de  $x_n$  que llamamos  $x_1$ , en el mismo rango si  $r$  se encuentra entre 0 y 4.

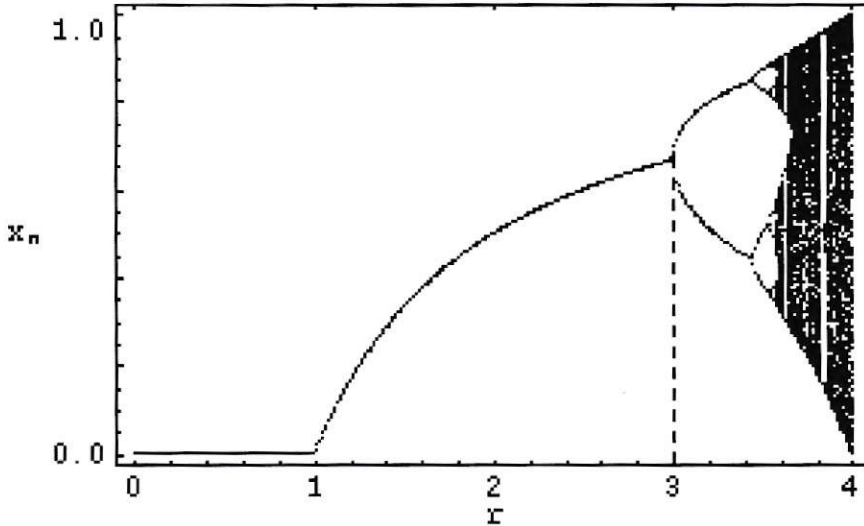


Figura 2.1: Diagrama de bifurcación del mapa logístico. En  $r = 3$  comienza un período 2. Ventanas de período pueden verse en la franjas verticales claras.

## 2.2. Atractor

El atractor es un conjunto de puntos al que las trayectorias convergen a medida que el número de iteraciones tiende a infinito. En general, para el caso de los mapas estos puntos pueden ser puntos fijos o atractores extraños, a los que nos referiremos más adelante.

En el ejemplo del Mapa Logístico, tenemos dos puntos fijos,  $x_r = 0$  y  $x_r = 1 - \frac{1}{r}$ . En la Fig. 2.2 el atractor es obtenido a partir de la condición inicial  $x_0 = 0,01$ , independiente de dónde la curva que representa al mapa cruce a la curva diagonal  $y = x$ , la función mapa tiene un punto fijo. En este caso existen dos atractores conocidos, uno en  $-\infty$  y el otro en  $[0, 1]$ , ambos para  $r > 0$ .

En general, para determinar el atractor se comienza con un conjunto de condiciones iniciales, y se observa su convergencia a los puntos fijos después de un determinado número de aplicaciones del mapa.

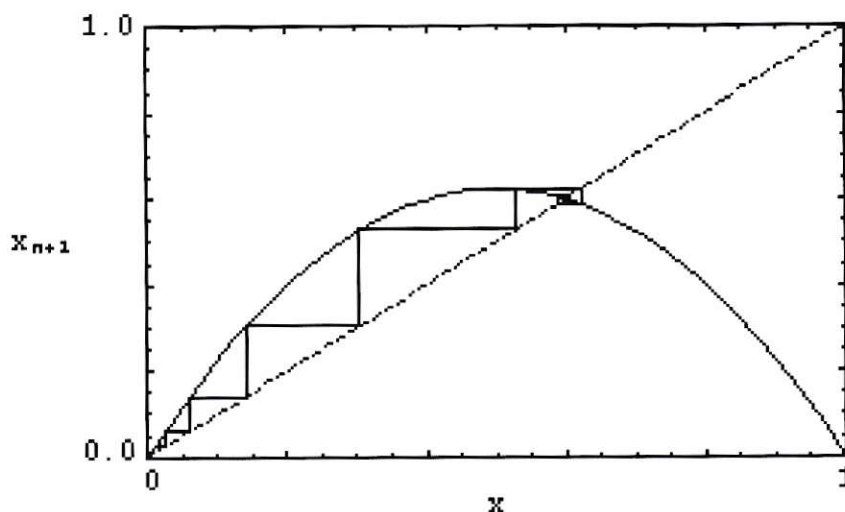


Figura 2.2: Mapa logístico para  $r = 2,5$ ; la curva escalonada representa la trayectoria para la condición inicial  $x_0 = 0,01$ .

Si un determinado conjunto de puntos no converge a alguno de los puntos fijos conocidos, podríamos suponer que estamos en presencia de un **atractor extraño**, atractor para el cual hay sensibilidad a las condiciones iniciales y cuya dimensión es un número no entero, razón por la cual también recibe el nombre de **atractor fractal** ó **atractor caótico**. Sin embargo, esto no es necesariamente cierto, porque también podría tratarse de un conjunto **no-atractivo** y sólo deberemos aplicar un mayor número de veces el mapa para que finalmente converja a algún atractor. De tratarse efectivamente de un atractor extraño, el número de puntos asociados a él no se anulará al aumentar las aplicaciones del mapa. Diferentes atractores tienen diferentes cuencas de atracción (el subconjunto del espacio formado por las condiciones iniciales).



## 2.3. Cuenca de atracción

La cuenca de atracción para un atractor dado consiste en el conjunto de las condiciones iniciales que convergen a él. En el caso del mapa logístico, tenemos un atractor en  $-\infty$  cuya cuenca de atracción es  $[\infty, 0] \cup [1, +\infty]$ . El otro atractor está en  $[0, 1]$  con cuenca de atracción  $[0, 1]$ .

Numéricamente comenzamos con un conjunto de condiciones iniciales y vemos qué ocurre a medida que éstas evolucionan. En principio algunas de las condiciones iniciales convergerán a un conjunto dado de puntos fijos (es decir, trayectorias que se repiten en si mismas después de algún período). Si después de cierto número de iteraciones, la trayectoria no converge a un punto fijo, podemos pensar que se trata de un atractor extraño, ya que el conjunto de condiciones iniciales que no convergen a un punto fijo forman un atractor extraño. Pero, primeramente, puede haber más de un atractor y por otro lado, debemos tener cuidado de que no se trate de un conjunto caótico no atractivo observando que el número de puntos asociados a él, no tienda a anularse en el transcurso de más iteraciones.

## 2.4. Bifurcaciones

Bifurcación significa una división en dos partes. El término es comúnmente usado en el estudio de la dinámica no lineal, para describir cualquier cambio repentino en el comportamiento del sistema a medida que se va variando un parámetro. En sistemas dinámicos, una bifurcación corresponde a una duplicación, triplicación, cuadruplicación, etc., del período que acompaña la aparición del caos. El estudio de cómo los puntos fijos (y otros estados de atractores espaciales) cambian, a medida que los parámetros del sistema cambian, es llamado la teoría de la bifurcación.

La teoría de la bifurcación se divide en dos, las **bifurcaciones locales** y las **bifurcaciones globales**. Las bifurcaciones locales son aquellas en las que puntos fijos aparecen, desaparecen o cambian su estabilidad. Mientras que las bifurcaciones globales son aquellas que los cambios se producen en las cuencas de atracción. Decimos que una bifurcación local es genérica cuando su geometría local, no puede ser alterada por perturbaciones pequeñas. Existen tres tipos de bifurcaciones genéricas para mapas en una dimensión: Bifurcaciones de duplicación de período, bifurcación tangente, y bifurcación de duplicación inversa de período.

La bifurcación de duplicación del período se produce por la aparición de un atractor de período 2. La duplicación del período continúa en la medida que se van cruzando varios umbrales, conduciendo a períodos 4, 8, etc. En cada caso, al atravesar alguno de estos umbrales, aparecen nuevos puntos fijos atractivos, mientras que los antiguos puntos fijos se hacen inestables. En la bifurcación de duplicación inversa del período, se da el mismo proceso pero en sentido contrario. En una bifurcación tangente, un par de órbitas periódicas aparecen de la nada, una de ellas es inestable y la otra estable (por eso también se le conoce como punto de silla). En un espacio de fase uni-dimensional, un punto fijo tiene un sólo valor característico  $\lambda$ . La suposición crucial en el análisis es que  $\lambda$  varía suavemente cuando algún parámetro, llamémosle  $\nu$ , varía. Por ejemplo, si  $\lambda(\nu) < 0$  para algún valor de  $\nu$ , el punto fijo es un nodo. A medida que  $\nu$  cambia,  $\lambda$  deberá crecer, acercándose a 0, luego el nodo cambiará a un repulsor cuando  $\lambda > 0$ , convirtiéndose en un punto fijo inestable. Si comenzamos con  $\nu < 0$  y lo dejamos crecer, encontraremos que cuando cambia a  $\nu = 0$  ocurre una bifurcación. En este valor del parámetro tenemos un punto de silla, que luego cambia a un nodo repulsivo cuando  $\nu$  se hace positivo. Luego decimos que en  $\nu = 0$  hay una bifurcación *saddle node*, o bifurcación tangente. Esta bifurcación es fundamental en

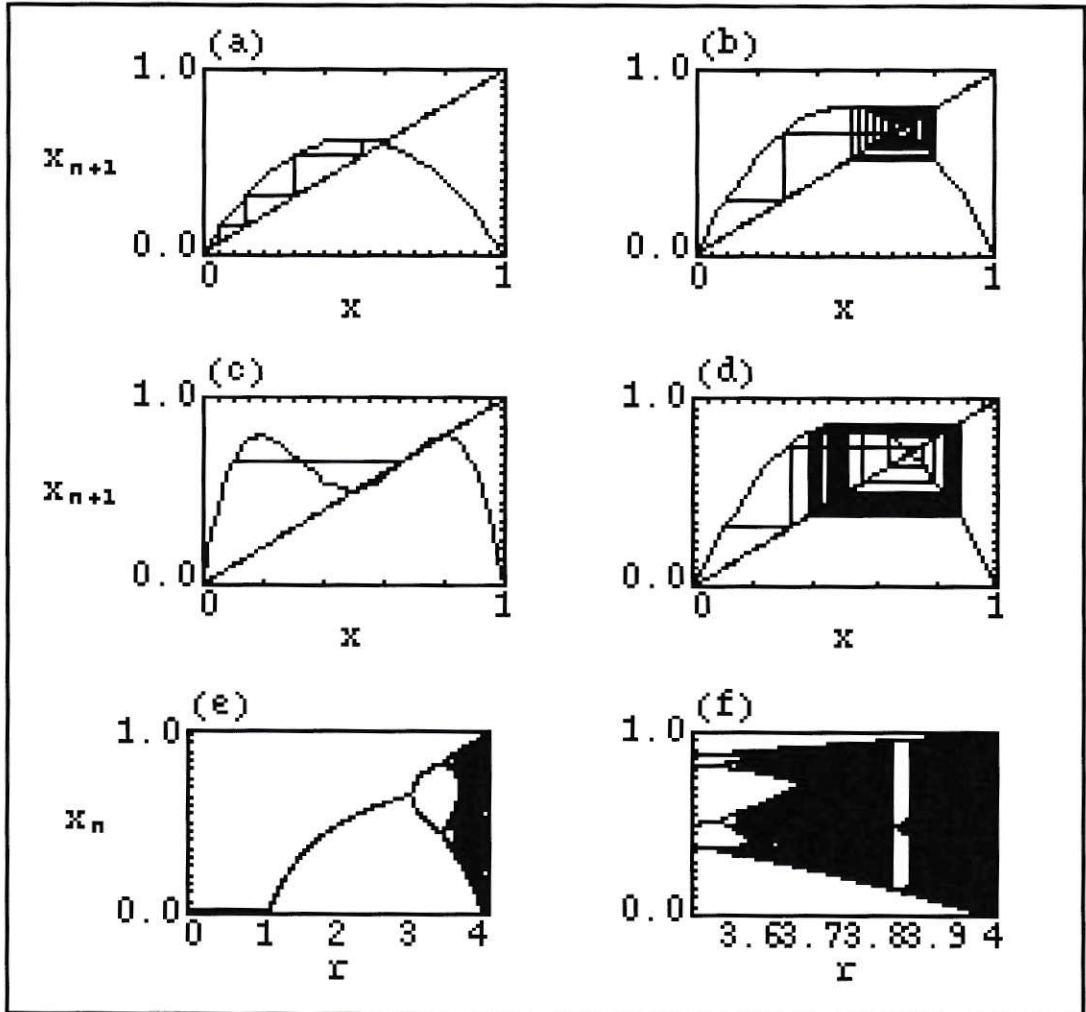


Figura 2.3: (a) Mapa logístico para  $r = 2,5$  con la trayectoria de  $x_0 = 0,1$ , representada por la línea zig-zag. (b) Mapa logístico para  $r = 3,2$  correspondiente a una trayectoria de período 2. (c) Trayectoria del mapa  $f^2$  para  $r = 3,2$ . (d) Mapa logístico para  $r = 3,5$ , caso caótico. (e) Diagrama de bifurcación. (f) Ampliación del diagrama.

el estudio de sistemas no lineales ya que representa uno de los procesos más básicos en la aparición de órbitas periódicas.

### 2.4.1. Transiciones Discontinuas

Como hemos visto, una bifurcación de duplicación de período es, en esencia, una bifurcación continua, mientras que una bifurcación tangente es una transición discontinua. De igual manera, el mapa logístico crece abruptamente al final de una ventana de orden en otra transición discontinua del atractor.

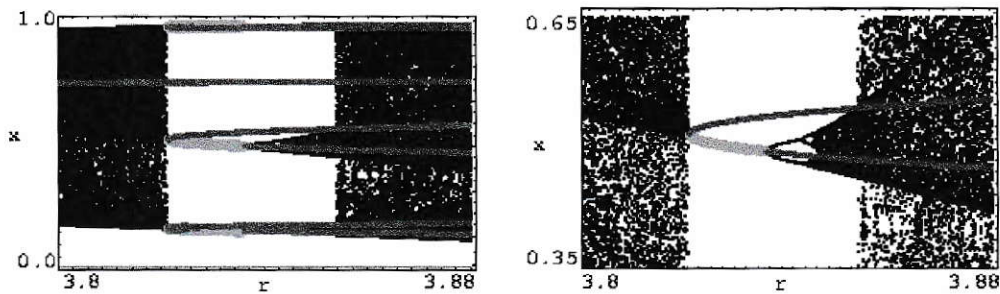


Figura 2.4: (a) Ventana de orden de período 3, con las órbitas periódicas creadas en la bifurcación tangente. (b) una ampliación.

Para comprender mejor las transiciones discontinuas, veamos la Fig. 2.4 en donde tenemos una ampliación de la ventana de orden de período 3 para el mapa logístico. Acá observamos que cuando aparece la ventana de orden, la transición es claramente discontinua y el atractor cambia de tamaño abruptamente. Como podemos ver, antes de la bifurcación tangente hay un comportamiento intermitente, en el cual la trayectoria pasa un tiempo considerable cerca del punto fijo que aparecerá, yendo hacia adelante y hacia atrás intermitentemente entre comportamientos aparentemente regulares y comportamientos caóticos. Este comportamiento se conoce como **transición intermitente al atractor caótico**. A medida que el parámetro de control

varía, el tiempo que la trayectoria pasa siendo caótica crecerá y el tiempo de periodicidad se irá reduciendo hasta que eventualmente el comportamiento será todo el tiempo caótico. Existe además otro tipo de intermitencia, en la que la trayectoria varía entre comportamientos periódicos y cuasiperiódicos, que estudiaremos más tarde.

En la transición intermitente, se tiene una órbita periódica que es reemplazada por caos a medida que un parámetro dado,  $P$ , pasa a través de un valor crítico  $P_T$ . Lo que implica que la órbita periódica estable pasa a ser inestable o se destruye a medida que  $P$  crece hacia  $P_T$ . De esta forma se pueden distinguir tres tipos de bifurcaciones genéricas que cumplen con estos requisitos, la bifurcación tangente, la bifurcación de duplicación de período inverso y la bifurcación de Hopf. Pomeau y Manneville [37] distinguen tres tipos de transiciones intermitentes que corresponden a los tres tipos de bifurcaciones genéricas:

- Bifurcación tangente al caos, con  $(P - P_T)^{-1/2}$ ,
- Bifurcación de Hopf al caos, con  $(P - P_T)^{-1}$ , en donde aparece una órbita cuasiperiódica (similar a la bifurcación tangente).
- Duplicación de período inverso, con  $(P - P_T)^{-1}$  en donde una órbita periódica pero inestable en el atractor, se hace estable por una bifurcación de duplicación de período inversa.

Ahondemos un poco en la transición intermitente debido a una bifurcación tangente. Asumamos que la dinámica del sistema está bien descrita por un mapa unidimensional, justo antes y justo después (Fig. 2.5) de una bifurcación tangente de una transición intermitente. Vemos en la Fig. 2.5 que para  $P$  un poco mayor que  $P_T$  la

trayectoria pasa un tiempo considerable moviéndose por este “túnel” que se forma entre la función del mapa y la línea punteada. Mientras está en el túnel, la órbita se acerca a un valor de  $x$  que podría ser un punto fijo estable para  $P$  menor que  $P_T$ . Luego de atravesar el túnel, la órbita sigue un comportamiento caótico determinado por la forma específica del mapa, alejándose de la vecindad del túnel, para ser luego reintegrada al túnel cuando por “suerte” la órbita caótica vuelve a pasar por él.

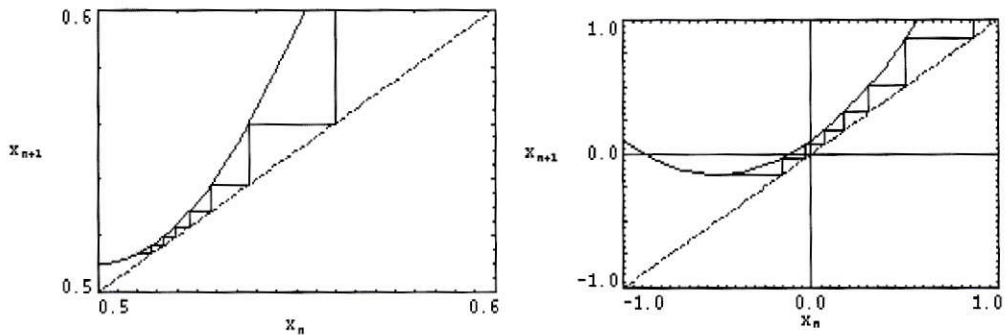


Figura 2.5: El mapa logístico iterado 3 veces, cerca de la ventana de orden de período 3 y cerca de la formación de la órbita de período 3.

De igual forma, el cambio abrupto de la dinámica que se produce cuando termina una ventana de orden, es una transición discontinua, que se conoce como **crisis** del atractor. Una **crisis** es un evento de bifurcación en el que el atractor caótico y su cuenca de atracción desaparece o cambia repentinamente su tamaño. Existen dos tipos de crisis, la **crisis de frontera** y la **crisis interior**. En ambos casos la crisis se produce cuando una órbita inestable colisiona con el atractor caótico.

La **crisis interior** es aquella en que el atractor colisiona con una órbita inestable dentro de la cuenca de atracción asociada a ese atractor. Cuando ésta colisión ocurre el atractor cambia repentinamente de tamaño. Esta expansión ocurre debido a que las trayectorias del atractor se van acercando a una órbita inestable y son repelidas

por ella hacia regiones del espacio que no habían sido visitadas antes de que la colisión ocurriera. Volvamos a la Fig. 2.4 que muestra una ventana de orden 3 para el mapa logístico. Vemos que contiene una crisis interior. Las 3 bandas caóticas se expanden repentinamente en tamaño cubriendo todo el rango de valores para  $x$ .

## 2.5. Exponente de Lyapunov

Es un concepto útil para determinar si un sistema es caótico, pues mide una de las características que definen al caos: sensibilidad con respecto a condiciones iniciales. Consideremos  $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , veamos cuál es el exponente de Lyapunov para  $M$ . Tomemos dos puntos que distan  $\epsilon_n$  (esta cantidad puede depender del tiempo), es decir  $x_n$  y  $x_n + \epsilon_n$ , todos en  $\mathbb{R}^n$ , entonces tenemos

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= M(x_n), \\ x_{n+1} + \epsilon_{n+1} &= M(x_n + \epsilon_n), \\ &\approx M(x_n) + DM(x_n)\epsilon_n, \end{aligned}$$

de donde  $\epsilon_{n+1} = DM(x_n)\epsilon_n$ , donde  $DM$  denota la matriz jacobiana de las derivadas parciales de  $M$ . Con esto podemos definir un exponente dependiente del tiempo para  $x_0$  y  $\epsilon_0$  dados

$$\lambda_n(x_0, \epsilon_0) \equiv \frac{1}{n} \ln \left( \frac{|\epsilon_n|}{|\epsilon_0|} \right), \quad (2.2)$$

$$= \frac{1}{n} \ln |DM^n(x_0)|, \quad (2.3)$$

$$= \frac{1}{2n} \ln (H_n(x_0)), \quad (2.4)$$

donde la matriz  $H_n(x_0)$  es dada por

$$H_n(x_0) = [DM^n(x_0)]^\dagger DM^n(x_0) \quad (2.5)$$

$$= DM(x_0)^\dagger \dots DM(x_{n-1})^\dagger DM(x_{n-1}) \dots DM(x_0). \quad (2.6)$$

Ahora es útil recurrir al **teorema ergódico multiplicativo de Oseledec** [38], que establece la existencia de los autovalores de la matriz ortogonal  $H_n$ , de modo que para  $n \gg 1$ , la matriz resultante tiene autovalores  $e^{\lambda_i n}$  con autovectores asociados  $\xi_i^{(n)}$ . Por lo tanto, los autovalores y autovectores de  $H_n$ , determinan en forma única los exponentes de Lyapunov  $\lambda_i^{(n)}(x_0)$ . Si existe el límite para  $n \rightarrow \infty$ , se obtiene el exponente buscado

$$\lambda_i(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^{(n)}(x_0), \quad (2.7)$$

si además existe una *medida natural invariante*, estos exponentes son independientes de las condiciones iniciales. En muchos casos  $DM$  es fácil de calcular (mapa logístico). Pero si se trata de mapas discontinuos, una aproximación numérica generalmente da resultados satisfactorios.

Se puede estimar una amplitud del exponente de Lyapunov [39] para amplitudes finitas. Tomemos una trayectoria en el atractor que comience desde  $(u_0, \tau_0)$  y una trayectoria perturbada inicialmente que comience en  $(u_0, \tau_0 + \delta_0)$ , por ejemplo con  $\delta_0 = 10^{-7}$ . El error es iterado  $n$  veces produciendo  $\delta_n$ . Se debe tener cuidado para incluir solamente la región de escalamiento donde

$$\delta_n \sim \delta_0 e^{\lambda n}.$$

Dada una condición inicial sobre el atractor se puede estimar un exponente por medio de un procedimiento de ajuste en la región de escalamiento. Es digno de mención que esta forma de calcular el exponente de Lyapunov no es la estándar, fue necesario introducirla debido la fuerte restricción impuesta en nuestro modelo.



## Capítulo 3

# Modelando el tráfico vehicular

En este capítulo, nos concentraremos en el comportamiento de dos automóviles que se cruzan en una intersección de calles controladas por una secuencia de semáforos y una señalización de ceda el paso, y veremos que para ciertas condiciones surge un comportamiento impredecible.

El entendimiento de esta situación puede ayudarnos, como componente esencial, a aproximarnos al problema más complejo de automóviles interactuando entre sí y con las señalizaciones de una ciudad.

Siguiendo el estudio desarrollado por Toledo *et al.* [1], estudiaremos el comportamiento de dos automóviles que se mueven por dos calles que se intersectan en un sólo punto, cuya intersección esta regulada por una señal de tránsito, primeramente un semáforo que será reemplazado luego por una señal de ceda el paso. Aquellos que han quedado atrapados en un embotellamiento de tránsito debido a la señalización existente en el lugar, deberían entender la relevancia de estudiar la dinámica de los patrones de tráfico bajo esas condiciones, y que la posibilidad de controlar estos puede ofrecer una solución a este problema tan común.

Teniendo en cuenta lo que se comentó en los capítulos previos sobre las características de los sistemas complejos, es viable analizar los sistemas de tráfico desde el

punto de vista de los sistemas complejos. Como se comentó, tales sistemas poseen características interesantes y no triviales tales como la aparición de caos, fenómenos emergentes y autoorganización. Además, sabemos que una característica básica en este contexto es la sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que implica la necesidad de conocer con tanto detalle como resulte razonable el comportamiento de los componentes más simples del sistema complejo de interés, ya que si logramos entender el funcionamiento del sistema lo más simplificada posible, seremos capaces en un futuro, de estudiar una aproximación más cercana a la realidad, encontrando así la diferencia entre un embotellamiento y el ansiado flujo óptimo. De ahí que decidamos comenzar estudiando el comportamiento de un par de vehículos al cruzar una intersección de calles de manera análoga, pero idealizada, a cómo ocurre en las calles de las ciudades. Veremos que estas interacciones revelan un comportamiento no trivial para ciertos parámetros.

Presentemos primeramente el modelo microscópico desarrollado por Toledo *et al.* [1] poniendo especial cuidado en el estudio de uno de los parámetros  $\phi_n$  que será de gran importancia en nuestro modelo. Luego, estudiaremos lo que ocurre al agregar un segundo vehículo transitando por una calle perpendicular manteniendo como señalización de tránsito al semáforo. Finalmente, reemplazaremos el semáforo por una señal de ceda el paso, donde estudiaremos la interacción entre ambos vehículos, la que se debe a que uno de ellos decidirá si el móvil transitando por la calle perpendicular a la calle por la que éste transita, seguirá su viaje o tendrá que detenerse hasta que el primer móvil haya salido de la intersección.

En este trabajo, queremos ver si con alguno de estos componentes podemos obtener información suficiente para poder adquirir una mejor intuición al momento de estudiar el comportamiento del tráfico en ciudades a medida que vayamos conside-

rando más agentes que componen el complejo sistema de tránsito vehicular en las ciudades, y consideramos que lo que será presentado en esta tesis es una continuación razonable del estudio desarrollado por Toledo *et al.* [1].

### 3.1. El modelo microscópico desarrollado por Toledo *et al.*

Primero consideraremos el modelo desarrollado por Toledo *et al.* [1], que consiste en un sólo vehículo moviéndose a través de una secuencia de semáforos. En la Fig. 3.1 se muestra un diagrama de la topología usada para la construcción de las ecuaciones descritas en el apéndice A.

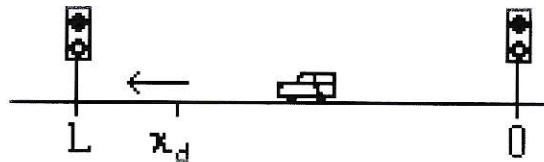


Figura 3.1: Esquema de la topología usada en el modelo de Toledo *et al.* [1], donde  $x_d$  se refiere a la posición de decisión del móvil, mientras que  $L$  es la distancia entre semáforos.

En una calle por donde transita un sólo vehículo, la separación entre el  $n$ -ésimo y el  $(n + 1)$ -ésimo semáforo es  $L_n$ . La señal de luz del semáforo  $n$ -ésimo es verde si  $\sin(\omega_n t + \phi_n) > 0$  y roja en caso contrario, donde  $\omega_n$  es la frecuencia del semáforo, y  $\phi_n$  es un desfase temporal. Es digno de mención que estos dos parámetros serán importantes si tratamos de controlar el flujo vehicular.

Un automóvil en esta secuencia de semáforos puede tener

- (a) una aceleración  $a_+$  hasta que alcance la velocidad de cruceo  $v_{\text{máx}}$ ,

- (b) una velocidad constante  $v_{\text{máx}}$  con aceleración nula, o
- (c) una aceleración negativa  $-a_-$  hasta que se detiene, o comience a acelerar nuevamente, por lo tanto

$$\frac{dv}{dt} = \begin{cases} a_+ \theta(v_{\text{máx}} - v) , & \text{acelera,} \\ -a_- \theta(v) , & \text{frena,} \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $\theta(x)$  es la función de Heaviside (o de escalón).

Este simplificado modelo se hace menos trivial al introducir las decisiones inducidas por el semáforo. Ya que en la medida que el móvil se aproxima al  $n$ -ésimo semáforo con velocidad  $v$ , el conductor debe tomar la decisión de frenar o continuar, dependiendo del signo de  $\sin(\omega_n t + \phi_n)$ , a una distancia  $v_{\text{máx}}^2/2a_-$  del semáforo (el último punto de frenado posible, debido a la capacidad del vehículo). Suponemos que el móvil siempre alcanza velocidad cruce antes de llegar al punto de decisión si  $(v_{\text{máx}}^2/2a_+) + (v_{\text{máx}}^2/2a_-) < L_n$ . En general, también tiene sentido que  $(2\pi/\omega_n) > (v_{\text{máx}}/a_-), (v_{\text{máx}}/a_+)$  de modo que el semáforo no cambie de luz demasiado rápido, ya que, en caso contrario, sería imposible respetar la señalización debido a la limitada capacidad de frenado del móvil. Las ecuaciones que describen el comportamiento del móvil son presentadas en detalle en el apéndice A.

Es importante recalcar que, al frenar, dos cosas pueden ocurrir,

- (a) el móvil puede frenar completamente y esperar hasta que la luz cambie a verde nuevamente, tal como se indica en la Fig. 3.2, por medio del punto (2), ó
- (b) puede empezar a acelerar al cambiar la luz antes de haberse detenido totalmente, (representada por curva 3 en Fig. 3.2),

Estas posibles situaciones, además de continuar desplazándose con velocidad de cruce (1), se esquematizan en la Fig. 3.2, donde se muestra el tipo de trayectorias

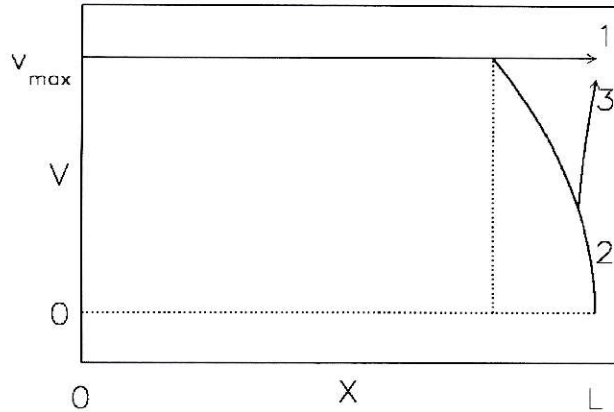


Figura 3.2: Posibles situaciones en el punto de detención, es decir, (1) continuar, (2) frenar hasta detenerse en  $x = L$  antes de que la luz cambie nuevamente a verde, y (3) frenar y reacelerar cuando la luz cambia a verde antes de que el móvil se haya detenido completamente.

que se dan entre dos semáforos, observándose la típica cinemática asociada a este modelo. Así empezamos a observar su naturaleza discontinua.

De esta forma, el automóvil entra en la secuencia de semáforos con velocidad  $v_0$ , en el tiempo  $t_0$ . El conjunto de reglas descritas arriba determina un mapa bidimensional  $M(t_n, v_n)$  que evoluciona el estado  $(t_n, v_n)$  en el  $n$ -ésimo semáforo al estado  $(t_{n+1}, v_{n+1})$  en el  $(n + 1)$ -ésimo semáforo, ver apéndice A.

Es conveniente construir un mapa exacto de los cruces sucesivos en los semáforos (ver apéndice A). Si definimos el tiempo de cruce como  $T_c = L/v_{\max}$  definiendo  $L_n = L$  y  $\omega_n = \omega$ , sin pérdida de generalidad, podemos normalizar  $u = v/v_{\max}$ ,  $\tau = 2\pi t/T_c$ ,  $y = x/L$  y  $\Omega = \omega T_c$ , con las que construimos las expresiones adimensionales escritas al lado derecho de las ecuaciones que se describen en el apéndice A, donde  $L$  es la distancia entre semáforos consecutivos.

El menor tiempo de viaje ocurre cuando la velocidad del móvil se sincroniza

con la frecuencia del semáforo, es decir cuando  $\sin(n\omega_n L_n/v_{\text{máx}} + \phi_n) > 0$  para  $\phi_n = -\omega \sum_{m=1}^n L_m/v_{\text{máx}}$  para todo  $n$ . Esta sincronización se puede conseguir para una  $v_{\text{máx}}$  específica, pero no puede ser garantizada para un intervalo de velocidades de crucero. Sabemos que la velocidad máxima es un parámetro muy relevante en ciudades reales debido a que distintos conductores preferirán valores de  $v_{\text{máx}}$  distintas, y por tanto las estrategias de control de tráfico que se implementen a través de  $\omega_n$  y  $\phi_n$ , serán muy sensibles a esta distribución de velocidades. Por ahora, centraremos nuestro estudio en la dinámica del sistema para una velocidad máxima dada. Es importante notar que podríamos considerar diferentes valores para  $L_n = L + \Delta L_n$  y  $\omega_n = \omega + \Delta\omega_n$  como desfases temporales inducidos descritos por  $\Delta\phi_n = \omega\Delta L_n/v_{\text{máx}}$  y  $\Delta\phi_n = \Delta\omega_n L/v_{\text{máx}}$  respectivamente. Razón por la cual nos podemos concentrar en la situación  $L_n = L$  y  $\omega_n = \omega$ , sin pérdida de generalidad. De este modo, las ecuaciones de evolución se reducen a

$$\frac{du}{d\tau} = \begin{cases} A_+ \theta(1-u) , & \text{acelera,} \\ -A_- \theta(u) , & \text{frena,} \end{cases} \quad (3.2)$$

con  $A_+ = a_+ L/v_{\text{máx}}^2$ ,  $A_- = a_- L/v_{\text{máx}}^2$  y  $\Omega = \omega T_c$ .

De modo que la decisión de detenerse o continuar, dependiendo del signo de  $\sin(\Omega\tau + \phi_n)$ , se toma a una distancia

$$\Delta y = \frac{1}{2A_-}, \quad (3.3)$$

del semáforo.

Estudiaremos el flujo de tráfico como función de  $A_+$ ,  $A_-$ ,  $\Omega$  y  $\phi_n$ . Y definiremos  $a = A_+/A_-$  como la razón de aceleración. En la medida que los móviles, con  $a = 1/3$ , se desplazan a través de la secuencia de semáforos, podemos observar un comportamiento complejo para ciertos intervalos de  $\Omega$ . En las Fig. 3.3a y b, se muestra el caso

para la velocidad  $u_n$  en el semáforo  $n$ -ésimo con  $\Omega = 6,03$  y  $\Omega = 6,11$ , respectivamente. Claramente observamos que pasamos de una órbita de período dos, en la que el móvil pasa con luz verde, o debe frenar al cambiar la luz del semáforo a rojo (a), a órbitas más complejas como la mostrada en (b). Cabe destacar que el caso de tener comportamiento con período dos, no significa que el móvil sea frenado semáforo por medio, tal como se afirmó en el estudio de Toledo *et al.* [1], ya que una vez que el semáforo cambia a verde, transcurrirá un cierto tiempo en cambiar a rojo, por lo que el móvil puede continuar pasando durante este intervalo de tiempo, en cambio, al enfrentar luz roja, el móvil sólo debe esperar, hasta que la luz del semáforo cambie nuevamente a verde.

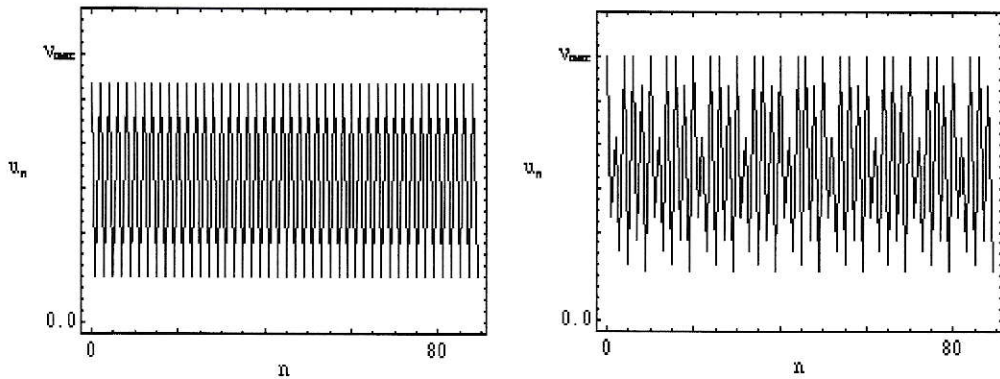


Figura 3.3: Mapa iterado para la velocidad  $u_n$  en el  $n$ -ésimo semáforo, con (a)  $\Omega = 6,03$  y (b)  $\Omega = 6,11$ , para  $a = 1/3$ ,  $\phi = 0$ ,  $L = 1$  y  $A_+ = 10$ . El transiente ha sido removido.

Observamos así lo que ocurre asintóticamente lejos en el tiempo. Una forma de estudiar este comportamiento es por medio de la construcción de diagramas de bifurcación (ver capítulo 2); en la Fig. 3.4, se muestra el resultado de variar  $\Omega$  para la velocidad. Podemos ver que existe un intervalo de frecuencias donde la velocidad iterada del móvil varía de una manera muy complicada. Se sugiere además una

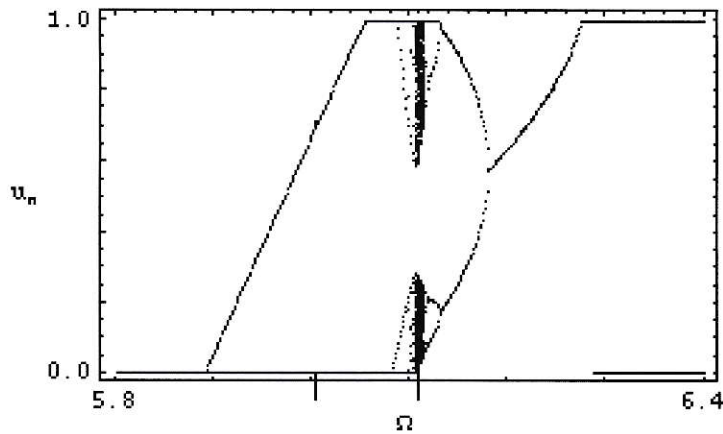


Figura 3.4: El diagrama de bifurcación para la velocidad, entre semáforos como función de  $\Omega$ , donde las líneas verticales señalan las frecuencias usadas en la Fig. 3.3, respectivamente. Los otros parámetros son  $a = 1/3$ ,  $\phi = 0$ ,  $L = 1$  y  $A_+ = 10$ . El transiente ha sido removido.

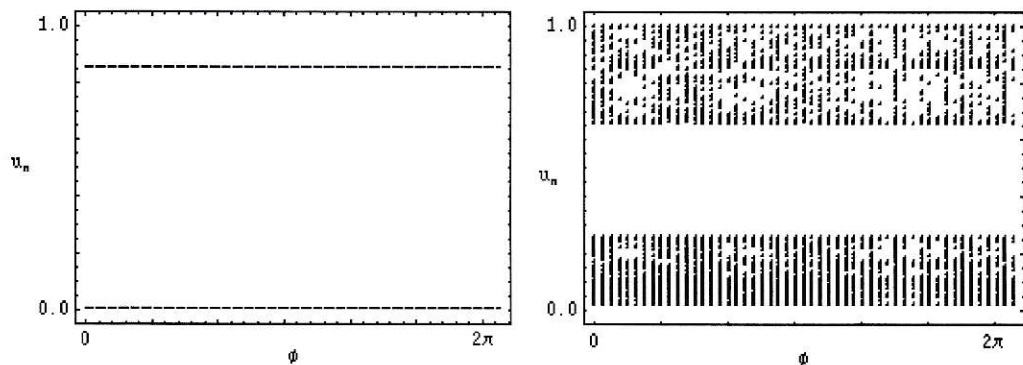


Figura 3.5: Diagrama de bifurcación para la velocidad, en los semáforos como función de  $\phi$ , con (a)  $\Omega = 6,03$  y (b)  $\Omega = 6,11$ . Los otros parámetros son  $a = 1/3$ ,  $L = 1$  y  $A_+ = 10$ . El transiente ha sido removido.

bifurcación de duplicación de período como ruta al caos en la medida que reducimos  $\Omega$ . También podemos observar la existencia de sincronización en el caso en que  $\Omega = 2\pi$ , en que el móvil pasa la secuencia de semáforos con velocidad crucero. Al colisionar el atractor caótico con uno de los umbrales de velocidad, se produce una bifurcación



de duplicación de período inverso. Si hacemos una ampliación en uno de los intervalos de frecuencia en los que se observa comportamiento caótico, como se muestra en la Fig. 3.9 a, encontramos una intrincada estructura de comportamientos estacionarios y caóticos, tal y como se espera de un régimen caótico después de una bifurcación de duplicación de período inverso (ver capítulo 2).

Veamos ahora como influye el parámetro  $\phi_n = \phi$  en nuestro modelo. En la Fig. 3.5 mostramos dos diagramas de bifurcación para la velocidad al variar  $\phi$ , para distintos valores de  $\Omega$ , un caso periódico  $\Omega = 6,03$  y uno no periódico  $\Omega = 6,11$ . Observamos que distintos valores de  $\phi$  generan el mismo atractor caótico en el estado asintótico.

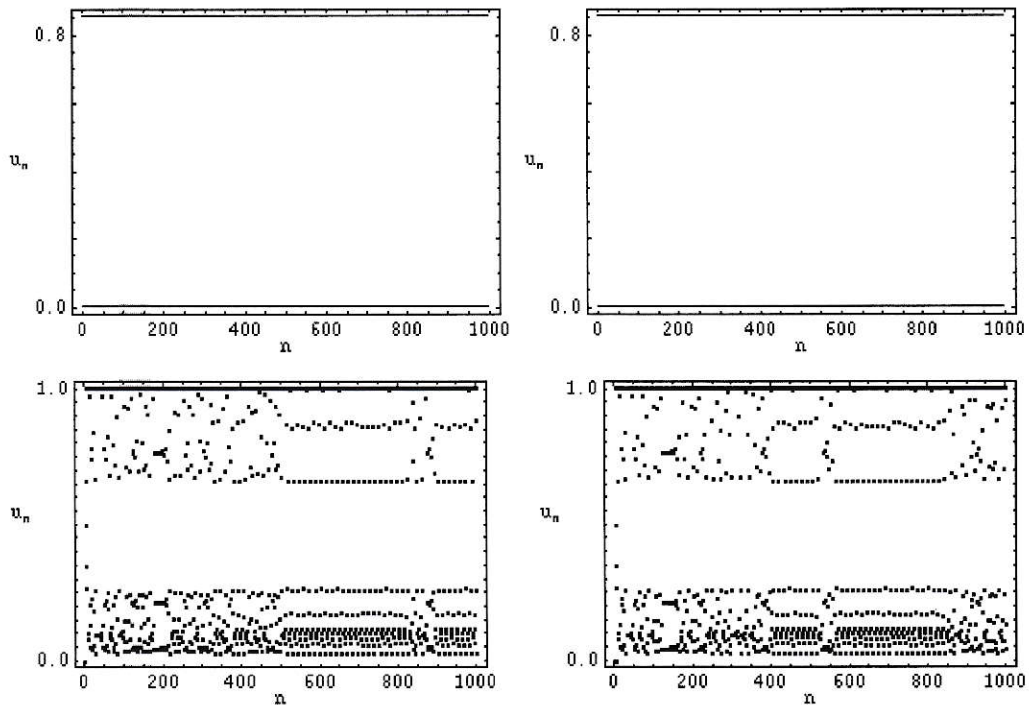


Figura 3.6: Mapa iterado para la velocidad  $u_n$  en el  $n$ -ésimo semáforo, para  $\Omega = 6,03$  con (a)  $\phi = 0$  y (b)  $\phi = \pi$ , y con  $\Omega = 6,11$  para (c)  $\phi = 0$  y (d)  $\phi = \pi$  con  $a = 1/3$ ,  $L = 1$  y  $A_+ = 10$ .

En las Fig.3.6 a y b, mostramos dos secuencias para la velocidad  $u_n$  en el  $n$ -ésimo semáforo con  $\Omega = 6,03$  para  $\phi = 0$  y  $\phi = \pi$  respectivamente, donde el transiente no ha sido removido. Mientras que en las Fig. 3.6 c y d, vemos las velocidades con  $\Omega = 6,11$  para  $\phi = 0$  y  $\phi = \pi$ . En ellas, vemos que las secuencias tienden al mismo atractor. Observando las figuras c y d, vemos presencia de intermitencia, ya que es posible distinguir distintas áreas que aparentan variar entre comportamiento periódico y no periódico. El comportamiento del sistema es predominantemente periódico con irrupciones ocasionales de comportamiento caótico. A medida que va aumentando el número de semáforos que el móvil tiene que enfrentar, la velocidad máxima sufre variaciones bastante complicadas. Pero alrededor de  $n = 200$  en la Fig. 3.6c, la velocidad presenta un comportamiento cercano a un período 4, el que da paso a un estallido caótico, el que a medida que aumenta  $n$  deriva nuevamente a un aparente estado periódico. De este modo podemos ver que  $\phi$  es un parámetro relevante en el comportamiento transiente, más no así en el comportamiento asintótico. Este parámetro será de gran relevancia al estudiar el comportamiento de dos móviles aproximándose a un cruce regulado por semáforos, así como también en estudios de gasto de combustible.

Si bien es cierto que el comportamiento asintótico revela algunas propiedades fundamentales del sistema, el comportamiento transiente es especialmente interesante en este caso, ya que los viajes dentro de una ciudad abarcan unas pocas decenas de semáforos o incluso menos, lo que puede pensarse que en realidad, un móvil transitando por una ciudad no pasa del transiente.

En la Fig. 3.7 se observan los transientes para dos condiciones iniciales distintas, es decir, dos móviles que parten con tiempos distintos, uno de ellos sufre un retraso al partir, mientras el otro acelera inmediatamente al cambiar la luz del semáforo

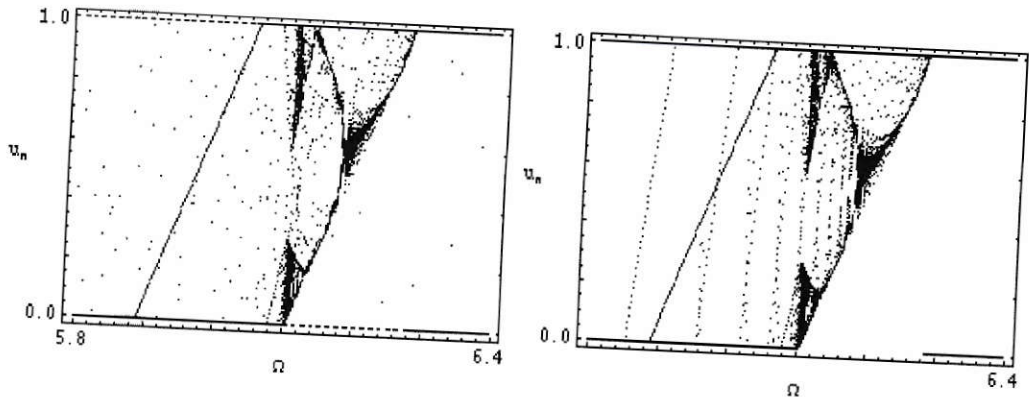


Figura 3.7: Diagrama de bifurcación para la velocidad con respecto a  $\Omega$  para distintas condiciones iniciales (a)  $t_0 = 0$  y  $v_0 = 0$  y (b)  $t_0 = 0,153$  y  $v_0 = 0$ .

a verde. Como se observa, la estructura transiente no resulta simple y es bastante sensible a las condiciones iniciales.

Ahora, otra forma de estimar la relevancia del comportamiento caótico y su sensibilidad a perturbaciones y ruidos es calculando un exponente de Lyapunov en forma numérica, suponiendo amplitudes finitas. Para ello, tomamos una trayectoria en el atractor que comience desde  $(u_0, \tau_0)$  y una trayectoria perturbada inicialmente, que comience en  $(u_0, \tau_0 + \delta_0)$ , por ejemplo con  $\delta_0 = 10^{-7}$ . El error será iterado  $n$  veces produciendo  $\delta_n$ . Teniendo cuidado de incluir sólo la región de escalamiento, donde

$$\delta_n \sim \delta_0 e^{\lambda n}.$$

Se puede estimar un exponente de Lyapunov, por medio de un procedimiento de ajuste a la región de escalamiento mostrada por la línea diagonal en la Fig. 3.8, sin tomar en cuenta la región de saturación.

Es digno de mención que esta forma de calcular el exponente de Lyapunov no es la estándar, fue necesario introducirla debido la fuerte restricción impuesta por los umbrales de velocidad  $0 \leq v \leq v_{\text{máx}}$ . Por supuesto, la naturaleza discontinua del

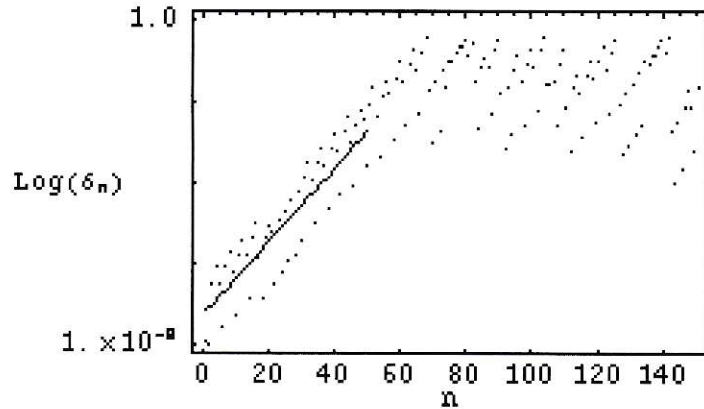


Figura 3.8: Región de escalamiento, donde la línea diagonal es la región usada para el cálculo del exponente de Lyapunov.

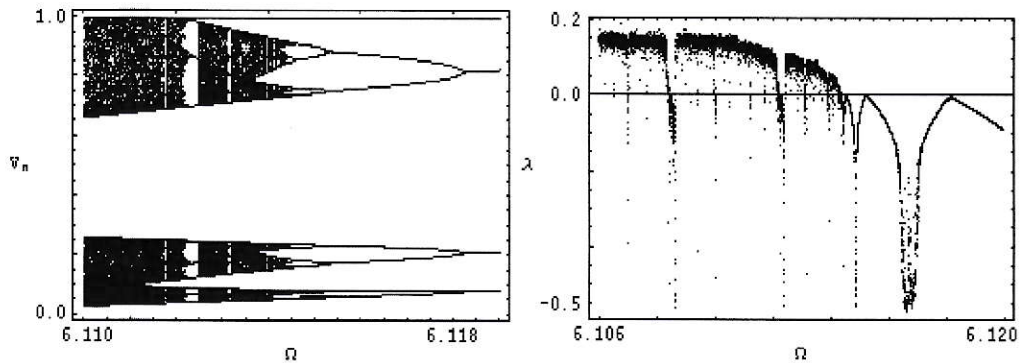


Figura 3.9: Cálculo del exponente de Lyapunov (a) Ampliación de diagrama de bifurcación mostrado en Fig. 3.4a, y (b) el exponente de Lyapunov asociado a (a)

mapa complica este cálculo, ya que ambas trayectorias pueden alcanzar el mismo estado en un paso, dando como resultado  $\lambda = -\infty$ .

El exponente de Lyapunov junto con la ampliación del diagrama de bifurcación mostrado en la Fig. 3.4, se muestra en la Fig. 3.9. El cálculo se hace sobre el intervalo en que el error crece exponencialmente, región mostrada en la Fig. 3.8 señalada por la línea diagonal, luego sigue la saturación donde ya no es posible extraer información

útil para determinar el exponente.

### 3.2. Modelamiento con semáforos

Ahora agregamos al modelo recién descrito, un segundo móvil que se mueve por una segunda calle y la intersectamos en un sólo punto con la vía por la que se desplaza el primer vehículo. En esta intersección colocamos un semáforo, obteniendo así un conveniente modelamiento de un cruce de calles por donde los vehículos fluyen constantemente aumentando así, poco a poco, la complejidad del modelo desarrollado por Toledo *et al.* [1].

En la Fig. 3.10, mostramos un diagrama de la topología usada en nuestro modelo. Tomamos el cruce esquematizado en la Fig. 3.10 y juntamos el final de la calle con su comienzo formando un lazo, al hacer lo mismo con la calle perpendicular, obtenemos dos lazos ortogonales, en cuya intersección se encuentra el semáforo. Obteniendo por medio de esta topología toda la información esencial de la dinámica contenida en el cruce.

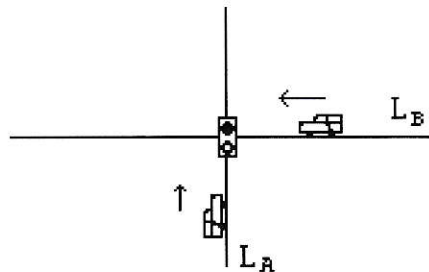


Figura 3.10: Esquema de la topología usada en el modelo.

Ahora, al agregar un segundo móvil, que transita por una segunda calle que intersecta a la primera en un sólo punto, debemos desfazar ambos semáforos por

medio del desfase temporal  $\phi_{A,n} - \phi_{B,n} = \pi$ . De modo que cuando uno de los móviles enfrente la luz verde, el otro enfrente la luz roja.

Las ecuaciones que describen este modelo, son las mismas que describen el modelo microscópico descrito anteriormente desarrollado en el apéndice A, ya que mantene-  
mos la simpleza de un móvil transitando por una secuencia de semáforos donde la luz será verde si  $\text{sen}(\omega_n t + \phi_{n,A}) > 0$  o roja en el caso contrario. Y modelaremos al segundo móvil de igual forma, aunque con la secuencia de semáforos desfasada en  $\pi$ , es decir, la luz del semáforo será verde si  $\text{sen}(\omega_n t + \phi_{n,B} + \pi) > 0$ .

Es importante destacar que la cinemática de ambos móviles, tratados por separado, presentan la misma naturaleza discontinua que en el caso de un sólo móvil. Por lo que las situaciones a las que se verá enfrentado cada móvil por separado, se muestran en la Fig. 3.2.

Para mayor claridad, llamaremos  $A$  al móvil que parte primero, es decir que tiene  $\phi = 0$ , y  $B$  al móvil que enfrenta al semáforo en rojo, es decir  $\phi = \pi$ . De este modo, definiremos al tiempo que le tome al móvil  $A$  recorrer la calle por donde transita con velocidad crucero como  $T_{c,A} = L_A/v_{\text{máx},A}$ , expresión a la que nos referiremos como tiempo crucero, mientras que al móvil  $B$  le tomará  $T_{c,B} = L_B/v_{\text{máx},B}$ . De modo que tendremos que las ecuaciones de evolución para  $A$  son

$$\frac{dv_A}{dt_A} = \begin{cases} a_{+,A} \theta(v_{\text{máx},A} - v_A) , & \text{acelera} \\ -a_{-,A} \theta(v_A) , & \text{frena,} \end{cases} \quad (3.4)$$

mientras que para  $B$  tendremos

$$\frac{dv_B}{dt_B} = \begin{cases} a_{+,B} \theta(v_{\text{máx},B} - v_B) , & \text{acelera} \\ -a_{-,B} \theta(v_B) , & \text{frena,} \end{cases} \quad (3.5)$$

De la Fig.3.10 podemos observar que los largos de las calles pueden ser variables pero, para simplificar nuestros cálculos, dejaremos el largo de la calle por la que

transita el móvil  $A$  fijo y diremos además que ambos móviles tendrán la misma aceleración  $a_{+,A} = a_{+,B} = a_+$  y la misma desaceleración  $a_{-,A} = a_{-,B} = a_-$  y también diremos que  $v_{\text{máx},A} = v_{\text{máx},B} = v_{\text{máx}}$ . De este modo, podemos normalizar las ecuaciones que rigen a los móviles por  $T_{c,A}$ , tal como lo hicimos en el caso para un sólo móvil transitando por una sólo calle. Definiremos además la razón entre aceleración y desaceleración como  $a = a_+/a_-$ . Así, podemos estudiar el flujo vehicular como función de  $a_+$ ,  $a$ ,  $\Omega$ ,  $\phi$  y  $T_{c,B}/T_{c,A}$ .

En la medida que los móviles, con  $a = 1/3$ , cruzan la secuencia de semáforos, obtenemos un comportamiento complejo para ciertos intervalos de  $\Omega$ , tal como se desprende de la Fig. 3.11, donde se muestra el resultado de variar  $\Omega$  tanto en la velocidad con la que cruzan el  $n$ -ésimo semáforo (Fig. 3.11 a), como para los tiempos de viaje  $\Delta\tau_n = (\tau_{n+1} - \tau_n)$  normalizados por  $T_{c,A}$ , entre el  $n$ -ésimo y  $n + 1$ -ésimo semáforos (Fig. 3.11 b).

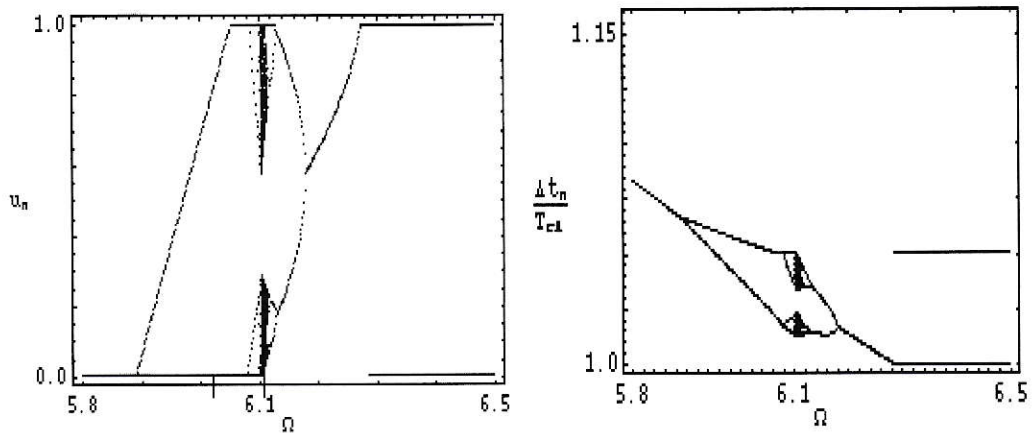


Figura 3.11: El diagrama de bifurcación para (a) la velocidad  $u_n$  en el  $n$ -ésimo semáforo y (b) el tiempo de viaje entre dos cruces, como función de  $\Omega$ . Los otros parámetros son  $a = 1/3$ ,  $a_+ = 10$ ,  $L_A = 10$  y  $T_{c,B}/T_{c,A} = 1$ . El transiente ha sido removido. Las líneas verticales mostradas en la Fig. 3.11a muestran valores de  $\Omega$  usadas en la Fig. 3.12.

El diagrama de bifurcación de la Fig. 3.11 nos muestra, al igual que en el caso del modelo desarrollado por Toledo *et al.* [1], que existe un intervalo de frecuencias donde tanto la velocidad iterada del móvil como el tiempo de viaje entre semáforos, varían de una manera muy compleja. Cabe destacar que este comportamiento ocurre tanto para el móvil *A* como para el móvil *B*. Por lo que es de utilidad estudiar el comportamiento de ambos móviles como función de la razón de los parámetros  $T_{c,B}/T_{c,A}$ .

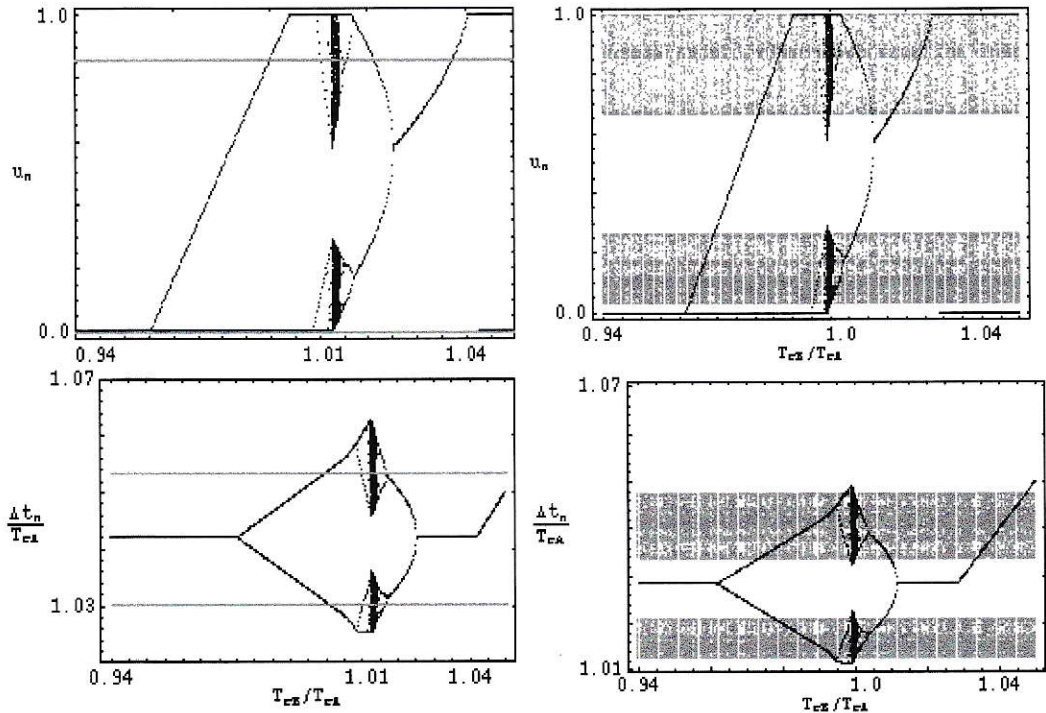


Figura 3.12: El diagrama de bifurcación para (a) la velocidad  $u_n$  normalizada por  $T_{c,A}$  en el  $n$ -ésimo semáforo como función de  $T_{c,B}/T_{c,A}$  para  $\Omega = 6,03$  y (b)  $\Omega = 6,11$ . (c) El tiempo entre los semáforos como función de  $T_{c,B}/T_{c,A}$  para  $\Omega = 6,03$  y (d)  $\Omega = 6,11$ . Donde la región en gris representa el comportamiento de la velocidad del móvil *A*, mientras que el diagrama en negro, representa la velocidad alcanzada por *B*. Los otros parámetros son  $a = 1/3$  y  $a_+ = 10$ ,  $v_{\text{máx}} = 1$  y  $L_A = 10$ . El transiente ha sido removido.



En la Fig. 3.12, vemos el resultado de variar  $T_{c,B}/T_{c,A}$ , es decir, el tiempo crucero de  $B$ , normalizado por el móvil  $A$ , para dos valores de  $\Omega$ . En ellas vemos la influencia tanto de el largo de las calles como de la velocidad máxima que cada móvil alcanza. En la Fig. 3.12a, vemos el resultado para  $\Omega = 6,03$ . El diagrama descrito por el móvil  $A$  se muestra en gris, y nos sugiere un comportamiento periódico, observando que las órbitas para distintos valores de  $T_{c,B}/T_{c,A}$  llegan al mismo atractor, situación debida a que el largo de la calles por la que transita el móvil  $A$  es fija. De la Fig. 3.12b, observamos que el móvil  $A$  genera un atractor caótico a medida que varía la razón entre los tiempos de crucero, situación producida por el valor usado en la frecuencia, ya que al tomar  $\Omega = 6,11$  estamos en la región caótica observada en la Fig. 3.11a. Mientras que el comportamiento del móvil  $B$  presenta, para ambos valores de  $\Omega$ , una bifurcación de duplicación de período a medida que incrementamos  $T_{c,B}$ . Además observamos que podemos obtener sincronización para ambos vehículos, entre uno de los móviles y su secuencia de semáforos, sólo en casos muy específicos como por ejemplo en el caso en que  $T_{c,A} = T_{c,B}$ , lo que nos demuestra que será muy complicado sincronizar la secuencia de semáforos para un móvil sin dañar la sincronización de la secuencia que enfrenta el otro móvil. Si hacemos una ampliación dentro de uno de los intervalos de  $T_{c,B}/T_{c,A}$  donde el mapa describe comportamiento caótico, tal como lo muestra la Fig. 3.13a, encontramos una intrincada estructura entre comportamiento estacionario y caótico, que se observa con más detalle en la Fig. 3.13b en que el exponente de Lyapunov es positivo sólo para una región de frecuencias.

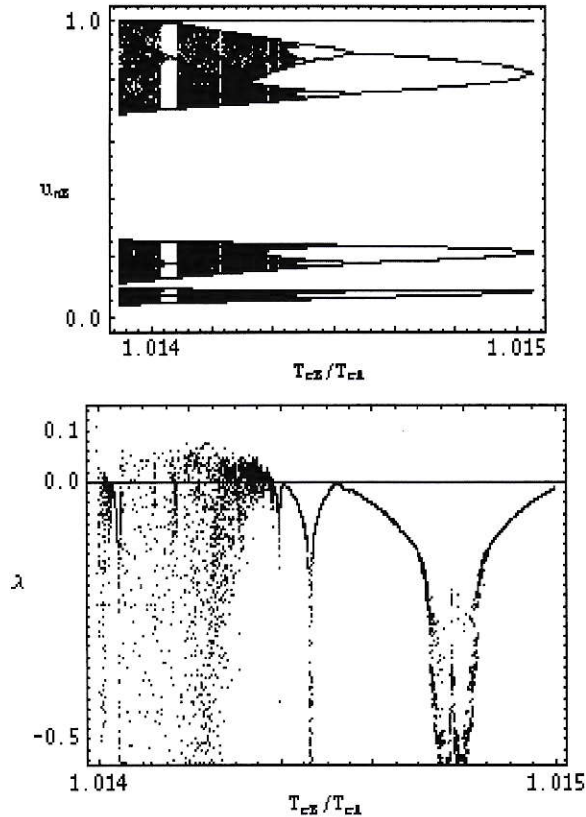


Figura 3.13: Cálculo del exponente de Lyapunov (a) Ampliación de diagrama de bifurcación mostrado en Fig. 3.12a, y (b) el exponente de Lyapunov asociado a (a)

### 3.3. Modelamiento con señal de ceda el paso

Enfocaremos ahora nuestro estudio a otra señalización de tráfico presente en las ciudades, la señalización de ceda el paso.

Estudiaremos el comportamiento de dos vehículos que se desplazan por calles perpendiculares que forman un cruce, cuya intersección es regulada por una señal de ceda el paso en vez de un semáforo, como en el caso visto anteriormente. Para tener un mejor entendimiento de este tipo de cruces, será conveniente etiquetar a los

vehículos, tal como se muestra en la Fig. 3.14. En consecuencia, nos referiremos al vehículo con preferencia al paso como  $A$ , mientras que al móvil que tiene que ceder el paso como  $B$ .

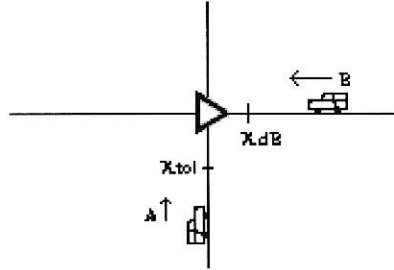


Figura 3.14: Esquema de la intersección que será estudiada,  $B$  corresponde al móvil que enfrenta la señalización, mientras que  $A$  tiene paso preferencial.  $x_{tol}$  se refiere a la distancia de tolerancia que debe considerar  $B$  para no colisionar con  $A$  y  $x_{d,B}$  es la posición de decisión del móvil  $B$ .

Diremos que la distancia entre intersecciones será  $L_A$  para el móvil  $A$  y la distancia entre señales de ceda el paso será  $L_B$ . Siendo  $A$  quien determine si  $B$  pasa o no, modelando así una interacción entre ambos vehículos. El móvil  $A$  se desplaza con velocidad constante, sin sufrir aceleraciones o desaceleraciones, por lo que  $v_{0,A} = v_{máx,A}$ , de modo que tendremos

$$x_A(t) = v_{máx,A} t \bmod L_A,$$

para la posición de  $A$ .

De esta forma podemos definir una distancia de tolerancia como

$$x_{tol} = L_A - x_A(t),$$

por lo que cuando el móvil  $B$  se encuentra en el punto de decisión ( $x_d = v_{máx,B}^2 / 2a_{-,B}$ ), cruzará la intersección si es que  $A$  se encuentra a una distancia prudente del cruce

( $x_{\text{tol}}$ ), o frenará, si es que  $A$  esta cerca o pasando por el cruce, de este modo tenemos una distancia mínima de tolerancia, definida por

$$x_{\text{tol},\text{min}} = \frac{v_{\text{máx},A}v_{\text{máx},B}}{2a_{-,B}} \quad (3.6)$$

que se debe considerar para de evitar colisiones. Las ecuaciones que describen este modelo son presentadas en el apéndice B.

El móvil  $B$  en la secuencia de señales de ceda el paso, puede tener

- (a) una aceleración  $a_{+,B}$  hasta que alcance la velocidad de crucero  $v_{\text{máx},B}$ ,
- (b) una velocidad constante  $v_{\text{máx},B}$  con aceleración nula, o
- (c) una aceleración negativa  $-a_{-,B}$  hasta que se detiene, o acelere nuevamente, por lo tanto

$$\frac{dv}{dt} = \begin{cases} a_{+,B} \theta(v_{\text{máx},B} - v_B) & \text{acelera,} \\ -a_{-,B} \theta(v_B) & \text{frena,} \end{cases} \quad (3.7)$$

donde  $\theta(x)$  es la función de Heaviside (o de escalón). Mientras que el móvil  $A$  no variará su velocidad, desplazándose siempre con velocidad crucero  $v_{\text{máx},A}$ .

Al aproximarse al cruce, el móvil  $B$  deberá considerar la posición del móvil  $A$  para decidir si continúa desplazándose, o si deberá frenar. Esta decisión dependerá si la posición del móvil  $A$ , en el instante de decisión  $t_{d,B}$ , sea mayor o menor que una cierta distancia de tolerancia, definida como  $x_{\text{tol}}$ , tal como lo muestra la Fig. 3.14. Si  $A$  se encuentra fuera de la región de tolerancia, el móvil  $B$  podrá continuar con su viaje, pero si  $A$  se encuentra dentro de la región de tolerancia,  $B$  deberá frenar.

Al frenar, dos cosas pueden ocurrirle a  $B$ , el móvil puede frenar completamente y esperar hasta que  $A$  salga del cruce, o puede empezar a acelerar al observar que  $A$  está pasando por el cruce, antes de haberse detenido totalmente. Estas posibles

situaciones se esquematizan en la Fig. 3.2, donde se muestra el tipo de trayectorias que se dan entre dos señales de ceda el paso.

De esta forma, el móvil  $B$  entra en la secuencia de señalizaciones con velocidad  $v_0$ , en el tiempo  $t_0$ . El conjunto de reglas recién descritas determina un mapa bidimensional  $M(t_n, v_n)$  que evoluciona el estado  $(t_n, v_n)$  en la  $n$ -ésima señalización al estado  $(t_{n+1}, v_{n+1})$  en el  $(n+1)$ -ésimo ceda el paso, tal como se muestra en el apéndice B.

Es conveniente construir un mapa exacto de los cruces sucesivos, que será muy parecido al mapa que modela el cruce con semáforos, ya que podemos considerar  $A$  como un semáforo para  $B$ , donde la frecuencia del semáforo será una función de  $A$ . Definimos el tiempo de crucero de  $A$  como  $T_{c,A} = L_A/v_{\text{máx},A}$ , mientras que el tiempo que le tomará a  $B$  recorrer  $L_B$  con velocidad crucero será  $T_{c,B} = L_B/v_{\text{máx},B}$ .

Por ahora, centraremos nuestro estudio en la dinámica del sistema para velocidades máximas dadas y diremos que  $v_{\text{máx},A} = v_{\text{máx},B}$ .

Estudiaremos el flujo de tráfico como función de  $a_+$ ,  $a_-$ ,  $x_{\text{tol}}$  y  $T_{c,B}/T_{c,A}$ , dado que como  $A$  se mantiene constante, parece lógico normalizar el comportamiento del móvil  $B$  con respecto a  $A$ . Definiremos  $a = a_+/a_-$  como la razón de aceleración de  $B$ .

En la medida que los móviles, iteran a través de la secuencia de intersecciones, podemos observar que presentan un comportamiento complejo para ciertos intervalos de  $T_{c,B}/T_{c,A}$ . En las Fig. 3.15 a y b, se muestra el caso para la velocidad  $v_n$  en la  $n$ -ésima señal de ceda el paso con  $T_{c,B}/T_{c,A} = 9,76$  y  $T_{c,B}/T_{c,A} = 9,715$ , respectivamente, mientras que en las Fig. 3.15 c y d, se muestra el tiempo viajado  $\Delta\tau_n = (\tau_{n+1} - \tau_n)$  entre la  $n$ -ésima y  $(n+1)$ -ésima intersección. Claramente observamos que pasamos de una órbita de período dos, en una en que  $B$  es frenado intersección por medio

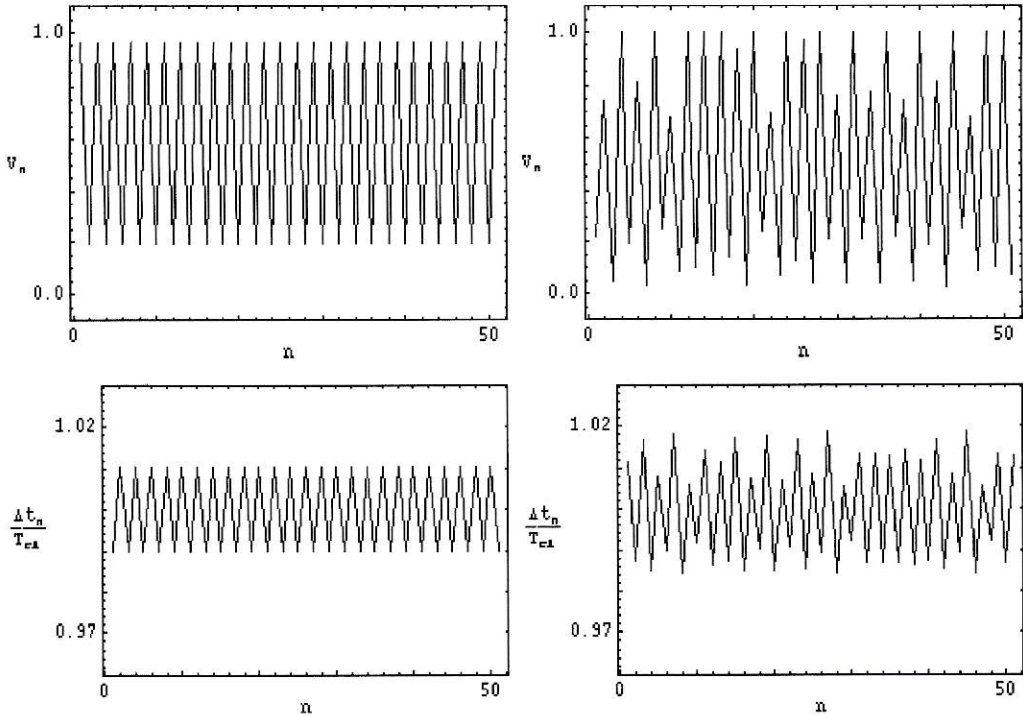


Figura 3.15: Mapa iterado para (a) la velocidad  $v_n$  en el  $n$ -ésimo cruce, con  $T_{c,B}/T_{c,A} = 9,76$  y (b)  $T_{c,B}/T_{c,A} = 9,715$ , (c) el tiempo de viaje normalizado entre dos cruces,  $\Delta\tau_n/T_{c,A} = (\tau_{n+1} - \tau_n)/T_{c,A}$  con  $T_{c,B}/T_{c,A} = 9,76$  y (d)  $T_{c,B}/T_{c,A} = 9,715$ ,  $x_{\text{tol}} = L_A/30$ , con  $L_A = 10$ ,  $a = 1/3$  y  $a_+ = 10$ . El transiente ha sido removido.

(a), a órbitas más complejas como la mostrada en (b) en que existe una situación no trivial en el flujo vehicular, notemos que el tiempo de viaje promedio en (d) se reduce en comparación a la situación mostrada en (c).

Dado que tratamos dos móviles transitando por calles perpendiculares, cada uno de ellos cruzará la intersección con frecuencias distintas, por lo que podemos analizar el comportamiento viendo si ambas frecuencias son conmensurables o no. En el caso de ser conmensurables, es decir, que la razón entre ambas frecuencias es racional, el comportamiento es periódico. Mientras que si la razón entre ambas es irracional, o inconmensurable, estamos frente a comportamiento no periódico. En la Fig. 3.16,

observamos el comportamiento para la velocidad en la  $n$ -ésima señal de ceda el paso para distintos valores de  $T_{c,B}/T_{c,A}$ , en (a) vemos un comportamiento no periódico, ya que observamos la existencia de distintas velocidades alcanzadas por el móvil  $B$  a medida que va cruzando las señalizaciones de ceda el paso, observando que es frenado aperiódicamente, aunque cruza en gran medida con velocidad máxima.

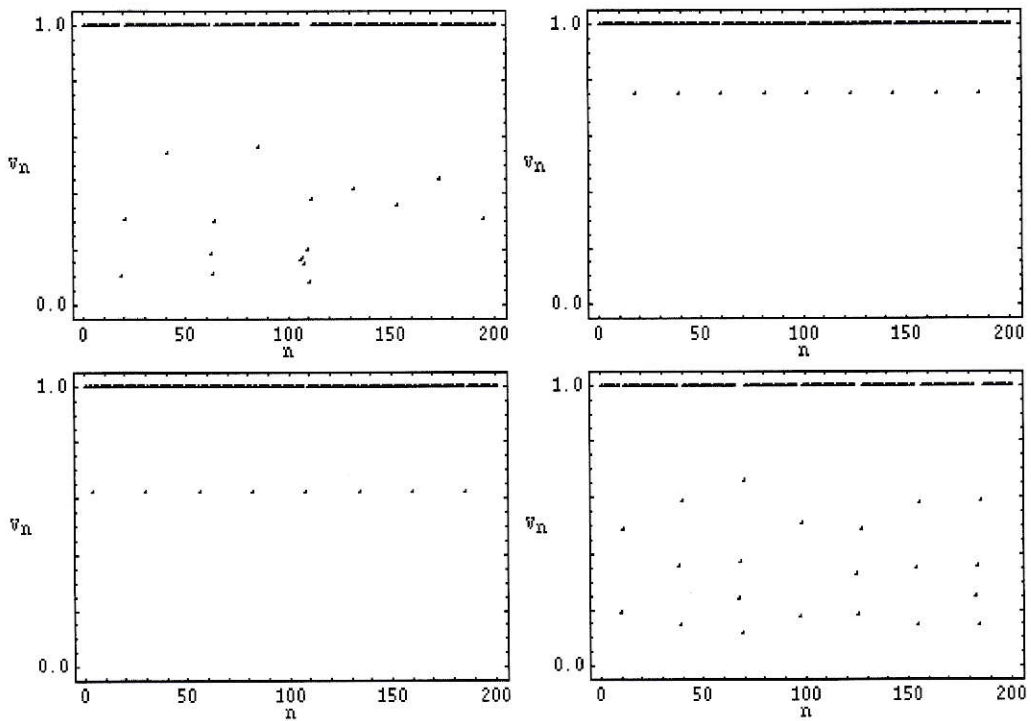


Figura 3.16: Mapa iterado para la velocidad  $v_n$  en el  $n$ -ésimo cruce, con (a)  $T_{c,B} = 9,51$ , (b)  $T_{c,B} = 9,52$ , (c)  $T_{c,B} = 9,61$  y (d)  $T_{c,B} = 9,62$ , para  $L_A = 10$ ,  $x_{\text{tol}} = L_A/30$ ,  $a = 1/3$  y  $a_+ = 10$ . El transiente ha sido removido.

En (b) observamos un comportamiento cuasiperiódico, en el que el móvil  $B$  es frenado aproximadamente cada 20 señalizaciones de ceda el paso. En (c) nuevamente vemos un comportamiento cuasiperiódico en el que el móvil es frenado aproximadamente cada 30 cruces de ceda el paso y en (d) observamos otro comportamiento

caótico, en el que se observa que el móvil es frenado con distintas frecuencias. Lo que nos muestra que el sistema es altamente sensible al largo de la calle por la que transita el móvil  $B$ , o mejor dicho, que tan sensible es el sistema al tiempo cruce de  $B$ .

Para ver con más detalle esta sensibilidad, podemos estudiar por medio de un diagrama de bifurcación, lo que ocurre a la velocidad que alcanza  $B$  al cruzar la  $n$ -ésima señalización de ceda el paso, con respecto al tiempo cruce de  $B$  sobre  $A$ , tal como se ve en la Fig. 3.17 a y b, donde además se muestra el caso para dos valores de  $x_{\text{tol}}$  distintos.

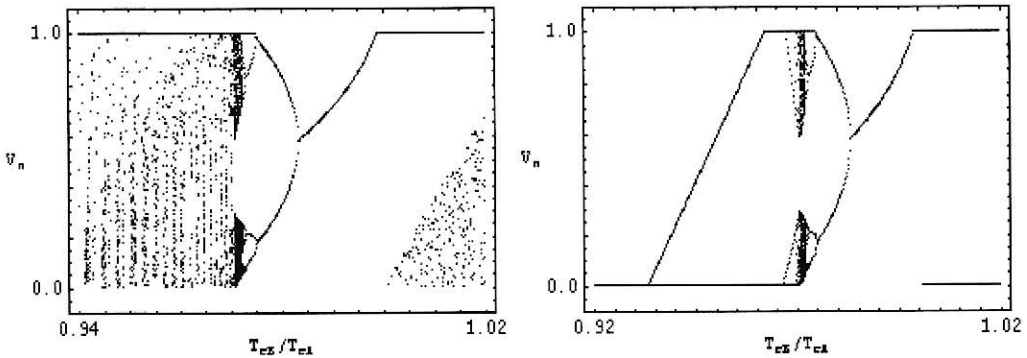


Figura 3.17: El diagrama de bifurcación para la velocidad con respecto a  $T_{c,B}/T_{c,A}$  para distintos valores de  $x_{\text{tol}}$ , (a)  $x_{\text{tol}} = L_A/30$  y (b)  $x_{\text{tol}} = L_A/2$ . Los otros parámetros son  $a = 1/3$ ,  $L_A = 10$  y  $a_+ = 10$ . El transiente ha sido removido.

Al estudiar la razón de los tiempos cruce entre ambos móviles, vemos la influencia tanto de el largo de las calles como de la velocidad máxima que cada móvil alcanza, ya que  $T_c = L/v_{\text{max}}$ . En la Fig. 3.17a, tomamos una distancia de tolerancia bastante pequeña, situación que presenta alto riesgo de colisión, ya que en el caso que  $T_{c,A}$  sea igual a  $T_{c,B}$  el móvil  $B$  pasará siempre la intersección con velocidad máxima, al igual que el móvil  $A$ , debido a la preferencia al paso que éste tiene, por



lo que estamos frente a un muy imprudente conductor del móvil  $B$  que al considerar una pequeña distancia entre la posición del móvil  $A$  y la intersección de las calles, podría provocar algún accidente. A medida que  $T_{c,A}$  es mayor que  $T_{c,B}$ , surge una bifurcación de duplicación de período como ruta al caos, la que deriva en una intermitencia entre comportamientos periódicos y caóticos, tal como se muestra en las Fig. 3.16, en el que el móvil  $B$  continúa pasando mayormente con velocidad máxima en vez de ser frenado más frecuentemente.

En la Fig. 3.17b, vemos el comportamiento del sistema para una tolerancia correspondiente a  $L_A/2$ , situación equivalente a lo observado en el caso del semáforo, ya que tal como dijimos a un comienzo, al considerar al móvil  $A$  como un semáforo para el móvil  $B$ , tendremos que la frecuencia efectiva será  $\Omega = 2\pi L_A/v_{\text{máx},A}$ . Como podemos ver, para valores de  $T_{c,B} > T_{c,A}$ , obtenemos un comportamiento semejante a un período 2, en que el móvil  $B$  será frenado intersección por medio hasta que  $T_{c,B} = T_{c,A}$  situación que da paso a una bifurcación de duplicación de período. A medida que  $T_{c,B} < T_{c,A}$  el móvil  $B$  será frenado en todas las intersecciones.

Acá podemos ver que el parámetro  $x_{\text{tol}}$  cumple un importante rol en el comportamiento del sistema, en la Fig. 3.18a, mostramos el resultado de variar la distancia de tolerancia en la que el móvil  $A$  se debe encontrar para que el móvil  $B$  pueda continuar su viaje, o deba detenerse. A medida que la tolerancia se incrementa, el riesgo que toma  $B$  disminuye, en el diagrama observamos que para tolerancias cortas ( $x_{\text{tol}} \sim L_A/30$ ) el comportamiento presenta un estado periódico, de período 7, el que varía en un intrincado comportamiento que aparenta ser caótico, ya que si observamos qué tan sensible es a perturbaciones, es decir estudiando el exponente de Lyapunov asociado a él, Fig. 3.18 b, vemos que a medida que  $x_{\text{tol}}$  aumenta,  $\lambda$  es positivo, por lo que estamos en presencia de un comportamiento caótico.

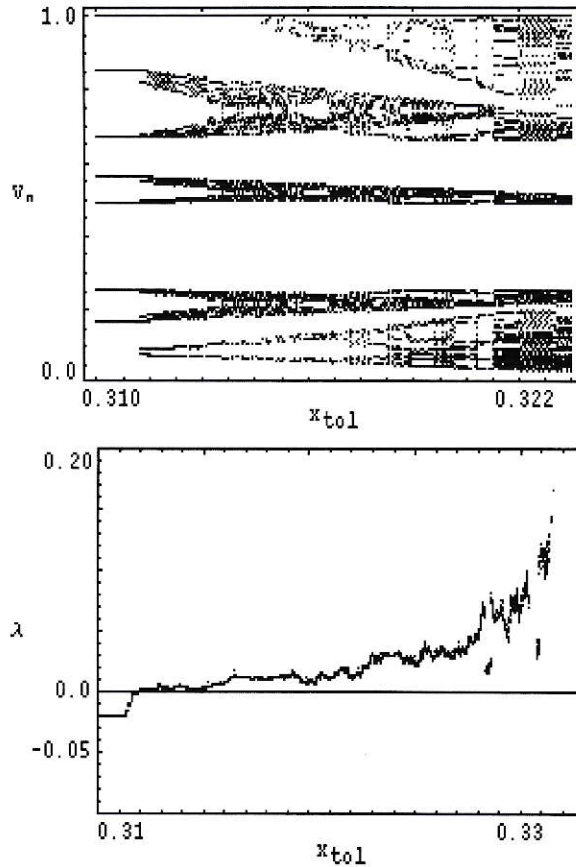


Figura 3.18: (a) El diagrama de bifurcación para la velocidad con respecto a  $x_{tol}$  y (b) Exponente de Lyapunov asociado a (a). Los otros parámetros son  $a = 1/3$ ,  $T_{c,B}/T_{c,A} = 9,71$  y  $a_+ = 10$ . El transiente ha sido removido.

La relevancia del comportamiento caótico y su sensibilidad a perturbaciones y ruidos se puede estimar mediante el cálculo de una amplitud del exponente de Lyapunov para amplitudes finitas. Tal como ya lo hicimos en los dos casos estudiados anteriormente, es decir, tomamos una trayectoria en el atractor que comience desde  $(u_0, \tau_0)$  y una trayectoria perturbada inicialmente, que comience en  $(u_0, \tau_0 + \delta_0)$ , por ejemplo con  $\delta_0 = 10^{-7}$ . El error será iterado  $n$  veces produciendo  $\delta_n$ . Cuidando de

incluir sólo la región de escalamiento, donde

$$\delta_n \sim \delta_0 e^{\lambda n} .$$

Se puede estimar un exponente de Lyapunov, por medio de un procedimiento de ajuste a la región de escalamiento, tomando una condición inicial dada sobre el atractor. En la Fig. 3.19 b, se muestra el diagrama del exponente de Lyapunov asociado a la ampliación del diagrama de bifurcación mostrado en la Fig. 3.17 a.

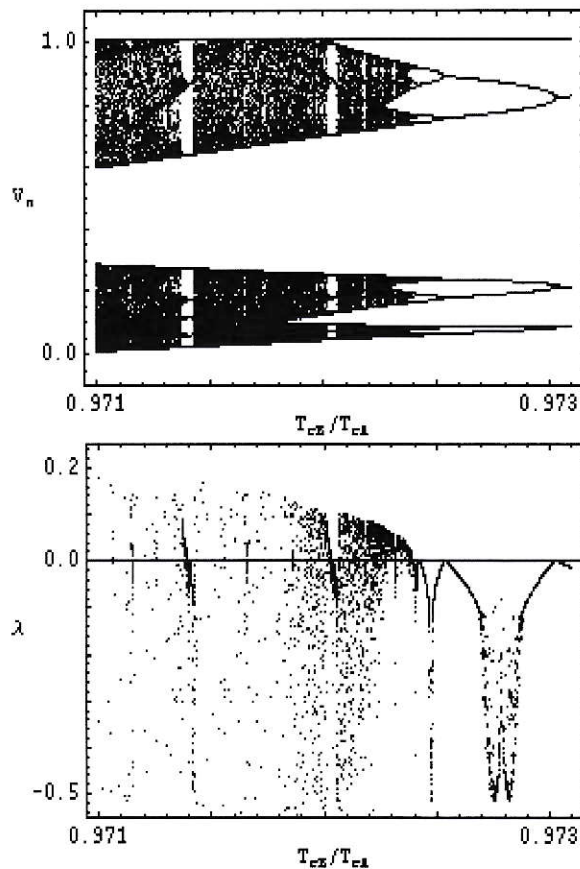


Figura 3.19: (a) Ampliación de diagrama de bifurcación mostrado en Fig. 3.17 a y (b) Exponente de Lyapunov asociado a (a)

Ahora, para ver de otra forma la sensibilidad a las condiciones iniciales del sis-

tema, podemos estudiar que ocurre en el caso de los transientes. Ya que, si bien es cierto, el comportamiento asintótico revela algunas propiedades fundamentales del sistema, el comportamiento transiente es especialmente interesante en este caso, ya que los viajes dentro de una ciudad abarcan unas pocas decenas de señalizaciones e incluso menos, lo que puede pensarse que en realidad, un móvil transitando por una ciudad no pasa del transiente. En la Fig. 3.20 se observan los transientes para dos condiciones iniciales distintas, es decir, dos móviles que parten con tiempos distintos. Como se observa, la estructura transiente no resulta simple y es bastante sensible a las condiciones iniciales.

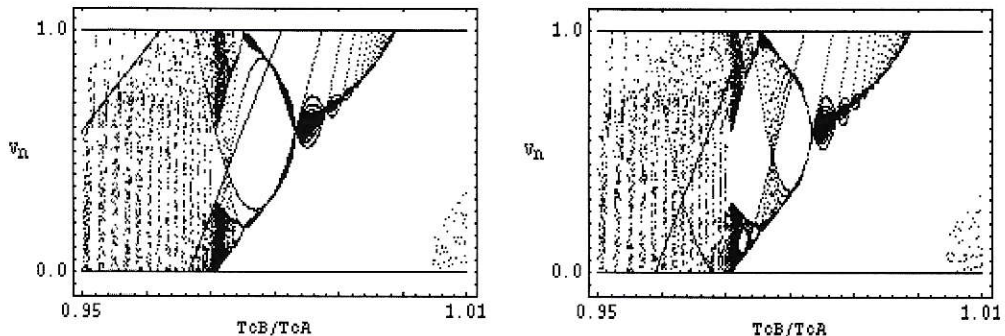


Figura 3.20: Diagrama de bifurcación para la velocidad con respecto a  $T_{c,B}$  para distintas condiciones iniciales (a)  $t_0 = 0$  y  $v_0 = 0$  y (b)  $t_0 = 0,153$  y  $v_0 = 0$ .

La región caótica presentada en nuestros resultados, puede verse modificada al variar los valores propuestos para  $a_+$ ,  $a_-$ ,  $x_{tol}$  y  $T_{c,B}/T_{c,A}$ . Siendo estos últimos dos parámetros, de bastante interés ya que en una ciudad real, tanto el largo de las calles como las velocidades máximas no son uniformes, así como la distancia de tolerancia que consideren distintos conductores. Podemos pensar además, que el parámetro  $x_{tol}$ , estima el riesgo al que un conductor se expone, en el caso de considerar una distancia de tolerancia tan pequeña como la estudiada aquí, o que tan prudente éste sea, en

el caso de considerar  $x_{\text{tol}} = L_A/2$ .

De este modo cabe destacar que si quisiéramos modelar una ciudad real, deberíamos tomar en consideración más conjuntos de parámetros, como el tamaño de las calles, la separación entre señalizaciones, el largo de móviles, la condición de calles, comportamiento de los conductores, etc. Además que aún no consideramos que en las ciudades transita un alto número de móviles, por lo que los valores de  $a_+$  y  $a_-$  podrían ser obtenidos estadísticamente por medio de la distribución de parámetros que definen el flujo vehicular.

Las situaciones reales no son tan simples como las que presenta el modelo aquí presentado. Pero creemos que el modelo mantiene algunos de los aspectos de interés presentes en el tráfico real.

Se debe tener en cuenta, que el presente análisis ha enfatizado en el efecto de viajes largos a través de una ciudad, donde los viajes cortos, se ven representados por los transientes de este modelo. Tal como esperábamos, obtuvimos comportamientos muy complicados a medida que fuimos variando los parámetros del modelo. Pero las situaciones realistas son mucho más complejas que las descritas aquí, ya que se pueden tener calles con variaciones aleatorias en sus largos, o en las fases de los semáforos. Aunque si se eligiera una fase  $\phi_n = -n\omega_n L_n/v_{\text{máx}}$  uno de los móviles podría pasar sin ser detenido durante la secuencia de semáforos, por lo que se podría pensar que tendríamos un control óptimo. Pero esto no puede ser llevado a la práctica ya que al tener un mayor número de móviles con una distribución de velocidades máximas, no sería posible que todos ellos estén en fase con los semáforos. Además que en el caso de una intersección, transitarán por ambas calles vehículos cuyos conductores desean pasar fluidamente sin ser detenidos, por lo que un control óptimo en una secuencia de semáforos para los móviles transitando por una vía, no será óptimo para los vehículos

que transiten por la otra.

Claramente entendemos que el modelo presentado aquí es una fuerte simplificación de las situaciones de tráfico reales, pero consideramos que mantiene algunos de los aspectos esenciales presentes en el tráfico real. Este es tan sólo un interesante punto de partida desde el cual podemos construir e interpretar escenarios de mayor complejidad.

# Capítulo 4

## Conclusiones y proyecciones

Sin ninguna duda un buen sistema de transporte en cualquier ciudad moderna contribuye en gran medida a un mejoramiento en el desarrollo de ésta, debido a que al disminuir los tiempos de viaje que le toman a los conductores llegar de un punto a otro, aumentará la calidad de vida de estos, entre otras cosas. En este sentido es importante entender en tanto detalle como resulte razonable el comportamiento de un vehículo al viajar por las calles de una ciudad, problema que resulta distinto de la dinámica que se da en carreteras, debido a que los tramos y períodos son bastante mas heterogéneos al interior de las ciudades que fuera de ellas.

Como se ha visto, con el simple modelo desarrollado por Toledo *et al.* [1] se pueden sacar conclusiones importantes, donde lo que más llama la atención, es el hecho de que para parámetros consistentes con vehículos y condiciones de tráfico comunes surge el caos como una componente esencial de este tipo de sistemas. También es importante notar que de los diagramas de bifurcación, se desprende la existencia de parámetros para los cuales el móvil siempre cruza la intersección con velocidad distinta de cero, sin importar que la intersección este regulada por un semáforo o por una señal de ceda al paso. Aunque también existe el caso en que el móvil es frenado siempre. Lo que no implica una desventaja para el sistema, ya que tal como

vimos al aplicar el modelo a dos autos transitando por calles perpendiculares entre sí y que están aproximándose a un cruce, es necesario que uno de ellos se detenga en orden de evitar accidentes de tránsito. Por lo que una situación será ventajosa o desventajosa, dependiendo de lo que se quiera estudiar al aplicar una estrategia de control determinada en el caso de las intersecciones reguladas por semáforos.

Es claro que este es un modelo altamente idealizado, sin embargo parece retener algunas de las características básicas del problema real, y de este modo existe la posibilidad de explotar la riqueza de la dinámica durante el régimen caótico.

También vimos, que al introducir más vehículos, la dinámica del sistema varía con respecto a la situación con un sólo móvil. Y esperamos que al introducir un mayor número de vehículos interactuando entre sí, la dinámica seguirá variando. Aunque como hemos visto se puede establecer una analogía entre un semáforo y el segundo móvil con el que interactúa el primero, tal como se muestra en el caso de la señalización de ceda el paso, en la que el móvil  $B$  debía detenerse en la medida que el móvil  $A$  se encontraba a corta distancia del cruce, provocando una situación riesgosa para  $B$ . Por lo que podemos decir que tanto los semáforos como la interacción entre móviles son objetos que regulan el flujo vehicular, en base a una interacción a corta distancia, por lo que volvemos a tener un problema semejante al original.

El encontrar y comprender los factores implicados en el régimen caótico de un sistema de tráfico podría resultar decisivo al momento de planificar una estrategia de control. Este hecho resulta obvio si tratamos de controlar el caos por medio de perturbaciones pequeñas en el período de ciertas señalizaciones que regulan el tránsito, para así conducir al sistema a estados que minimicen algún parámetro de interés, como el tiempo de viaje, el consumo de combustible, etc. Otro aspecto que resultará interesante al seguir explorando este modelo, es la topología de la carretera, ya



que es razonable esperar que esto introduzca variables que hagan aun más variada la dinámica de la simulación. Lo aquí presentado constituye una continuación razonable para construir un modelo de tráfico vehicular en una ciudad en el que posteriormente se incluyan otros componentes como los peatones, que hoy en día cuentan con dispositivos que les permiten cruzar las calles alterando altamente el flujo vehicular, ya que estos tienen una dinámica propia, de modo que cualquier solución aceptable debe tener en cuenta esta interacción entre tráfico vehicular y peatonal. En ese contexto, toda la riqueza de este sistema complejo comenzará a ser observada a plenitud.

# Apéndice A

## Cinemática entre dos semáforos

Siendo  $L$  la distancia entre el origen del móvil y la posición del semáforo, podemos decir que después de cruzar el  $n$ -ésimo semáforo, el móvil alcanza la velocidad máxima  $v_{\text{máx}}$  en

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{v_{\text{máx}}^2 - v_n^2}{2a_+} & \rightarrow & \quad y_c = \frac{1}{2A_+}(1 - u_n^2) , \\t_c &= t_n + \frac{v_{\text{máx}} - v_n}{a_+} & \rightarrow & \quad \tau_c = \tau_n + \frac{1}{A_+}(1 - u_n) , \\v_c &= v_{\text{máx}} & \rightarrow & \quad u_c = 1 \quad ,\end{aligned}$$

donde  $x_c$  es el punto para el cual se alcanza la velocidad máxima  $v_{\text{máx}}$ . El móvil continúa moviéndose a velocidad constante hasta el punto de decisión

$$\begin{aligned}x_d &= L_n - \frac{v_{\text{máx}}^2}{2a_-} & \rightarrow & \quad y_d = 1 - \frac{1}{2A_-} , \\t_d &= t_c + \frac{x_d - x_c}{v_{\text{máx}}} & \rightarrow & \quad \tau_d = \tau_c + (y_d - y_c) , \\v_d &= v_{\text{máx}} & \rightarrow & \quad u_d = 1 .\end{aligned}$$

en este punto tenemos dos elecciones dependiendo del signo de  $\text{sen}(\omega_n t_d + \phi_n)$ .

Si  $\text{sen}(\omega_n t_d + \phi_n) = \text{sen}(\Omega \tau_d + \phi_n) > 0$ , donde  $\Omega = \omega T_c$ , el móvil alcanza el  $(n + 1)$ -ésimo semáforo en el estado

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= L_n & \rightarrow & y_{n+1} = 1, \\
t_{n+1} &= t_d + \frac{L_n - x_d}{v_{\text{máx}}} & \rightarrow & \tau_{n+1} = \tau_d + 1 - y_d, \\
v_{n+1} &= v_{\text{máx}} & \rightarrow & u_{n+1} = 1.
\end{aligned}$$

Si  $\text{sen}(\omega_n t_d + \phi_n) = \text{sen}(\Omega \tau_d + \phi_n) < 0$ , el móvil debe empezar a detenerse con  $a_-$ , y le tomará un tiempo extra  $\Delta t$ , alcanzar el semáforo  $(n + 1)$ -ésimo y detenerse, con  $\Delta t = v_{\text{máx}}/a_-$ , o  $\Delta \tau = 1/A_-$ , donde  $A_- = a_- L/v_{\text{máx}}^2$ . Este tiempo debe ser comparado con el tiempo que le tome al semáforo cambiar de luz roja a verde  $t_g$ , donde el subíndice  $g$  se refiere a *green*, punto en el cual el móvil puede acelerar otra vez.

Definiendo la fase  $\xi_d = \omega_n t_d + \phi_n = \Omega \tau_d + \phi_n$ , podemos calcular

$$t_g = \frac{1}{\omega_n} (\xi_g - \phi_n) = \frac{1}{\omega_n} \left( 2\pi \left( \text{Int} \left[ \frac{\xi_d}{2\pi} \right] + 1 \right) - \phi_n \right),$$

donde  $\text{Int}[x]$  es la parte entera de  $x$ . Por lo tanto, si  $t_d + \Delta t < t_g$ , o  $\tau_d + \Delta \tau < \tau_g$ , el móvil cruzará el  $(n + 1)$ -ésimo semáforo con

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= L_n & \rightarrow & y_{n+1} = 1, \\
t_{n+1} &= t_g & \rightarrow & \tau_{n+1} = \tau_g, \\
v_{n+1} &= 0 & \rightarrow & u_{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

En caso contrario,  $t_d + \Delta t > t_g$ , o  $\tau_d + \Delta \tau > \tau_g$ , el móvil comienza a acelerar en el estado

$$\begin{aligned}
x_g &= x_d + v_d(t_g - t_d) - a_-(t_g - t_d)^2/2 & \rightarrow & y_g = y_d + u_d(\tau_g - \tau_d) - A_-(\tau_g - \tau_d)^2/2, \\
t_g &= t_g & \rightarrow & \tau_g = \tau_g, \\
v_g &= v_d - a_-(t_g - t_d) & \rightarrow & u_g = u_d - A_-(\tau_g - \tau_d),
\end{aligned}$$

pero otra vez tenemos dos casos antes de que llegue a la distancia  $L$ , ya que necesitamos determinar si el móvil alcanza  $v_{\text{máx}}$  antes que cambie la luz. Para ello calculamos

la distancia a la cual el móvil alcanza la velocidad crucero  $x_m = x_g + (v_{\text{máx}}^2 - v_g^2)/2a_+$ , o  $y_m = y_g + (1 - u_g^2)/2A_+$ . Entonces, si  $x_m > L$ , el móvil alcanza el semáforo con

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= L_n && \rightarrow y_{n+1} = 1, \\ t_{n+1} &= t_g + \frac{v_{n+1} - v_g}{a_+} && \rightarrow \tau_{n+1} = \tau_g + \frac{1}{A_+}(u_{n+1} - u_g), \\ v_{n+1} &= \sqrt{v_g^2 + 2a_+(L_n - x_g)} && \rightarrow u_{n+1} = \sqrt{u_g^2 + 2A_+(1 - y_g)}, \end{aligned}$$

de otro modo, alcanza  $v_{\text{máx}}$  en

$$\begin{aligned} x_m &= x_m && \rightarrow y_m = y_m, \\ t_m &= t_g + \frac{v_{\text{máx}} - v_g}{a_+} && \rightarrow \tau_m = \tau_g + \frac{1}{A_+}(1 - u_g), \\ v_m &= v_{\text{máx}} && \rightarrow u_m = 1, \end{aligned}$$

y el semáforo en

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= L_n && \rightarrow y_{n+1} = 1, \\ t_{n+1} &= t_m + \frac{L_n - x_m}{v_{\text{máx}}} && \rightarrow \tau_{n+1} = \tau_m + (1 - y_m), \\ v_{n+1} &= v_{\text{máx}} && \rightarrow u_{n+1} = 1. \end{aligned}$$

# Apéndice B

## Cinemática entre señalizaciones de ceda el paso

Una vez que  $B$  haya cruzado el  $n$ -ésimo ceda el paso, alcanza la velocidad máxima  $v_{\text{máx}, B}$  en

$$\begin{aligned} x_{c,B} &= \frac{v_{\text{máx}, B}^2 - v_{n,B}^2}{2a_{+,B}} & \rightarrow & \quad y_{c,B} = \frac{1}{2A_+}(1 - u_{n,B}^2) , \\ t_{c,B} &= t_{n,B} + \frac{v_{\text{máx}, B} - v_{n,B}}{a_{+,B}} & \rightarrow & \quad \tau_{c,B} = \tau_{n,B} + \frac{1}{A_+}(1 - u_{n,B}) , \\ v_{c,B} &= v_{\text{máx}, B} & \rightarrow & \quad u_{c,B} = 1 , \end{aligned}$$

y continúa moviéndose a velocidad constante hasta el punto de decisión

$$\begin{aligned} x_{d,B} &= L_{n,B} - \frac{v_{\text{máx}, B}^2}{2a_{-,B}} & \rightarrow & \quad y_{d,B} = 1 - \frac{1}{2A_-} , \\ t_d &= t_{c,B} + \frac{x_{d,B} - x_{c,B}}{v_{\text{máx}, B}} & \rightarrow & \quad \tau_{d,B} = \tau_{c,B} + (y_{d,B} - y_{c,B}) , \\ v_{d,B} &= v_{\text{máx}, B} & \rightarrow & \quad u_{d,B} = 1 . \end{aligned}$$

en este punto tenemos dos elecciones dependiendo de la posición del móvil  $A$ , si  $L_A - x_A(t, B) > x_{\text{tol}}$  donde  $x_{\text{tol}}$  esta restringido tanto por la velocidad máxima de  $A$  como por la del móvil  $B$ . El  $(n + 1)$ -ésimo ceda el paso, será alcanzado por  $B$  en el estado

$$\begin{aligned} x_{n+1,B} &= L_{n,B} & \rightarrow & \quad y_{n+1,B} = 1 , \\ l_{n+1,B} &= t_{d,B} + \frac{L_{n,B} - x_{d,B}}{v_{\text{máx}}} & \rightarrow & \quad \tau_{n+1,B} = \tau_{d,B} + 1 - y_{d,B} , \\ v_{n+1,B} &= v_{\text{máx}, B} & \rightarrow & \quad u_{n+1,B} = 1 . \end{aligned}$$

Si  $L_A - x_A(t, B) < x_{\text{tol}}$ , el móvil  $B$  debe empezar a detenerse con  $a_{-,B}$ , y le tomará un tiempo extra  $\Delta t$ , alcanzar la señal de ceda el paso  $(n + 1)$ -ésima y detenerse, con  $\Delta t = v_{\text{máx},B}/a_{-,B}$ . Este tiempo debe ser comparado con el tiempo que le tome al móvil  $A$  cruzar la intersección  $t_p$ , donde el subíndice  $p$  se refiere a *pasa*, punto en el cual  $B$  puede acelerar otra vez. Donde  $t_p$  se define como

$$t_p = t_{d,B} + \frac{L_A - x_A(t_{d,B})}{v_{\text{máx},A}} ,$$

Por lo tanto, si  $t_{d,B} + \Delta t < t_p$ , ó  $\tau_{d,B} + \Delta\tau < \tau_p$ ,  $B$  llegará al  $(n + 1)$ -ésimo ceda el paso con

$$\begin{aligned} x_{n+1,B} &= L_{n,B} \rightarrow y_{n+1,B} = 1 , \\ t_{n+1,B} &= t_p \rightarrow \tau_{n+1,B} = \tau_p , \\ v_{n+1,B} &= 0 \rightarrow u_{n+1,B} = 0 . \end{aligned}$$

En caso contrario,  $t_d + \Delta t > t_p$ , ó  $\tau_{d,B} + \Delta\tau > \tau_p$ ,  $B$  comienza a acelerar en el estado

$$\begin{aligned} x_p &= x_{d,B} + v_{d,B}(t_p - t_{d,B}) - \frac{1}{2}a_{-,B}(t_p - t_{d,B})^2 \\ \rightarrow y_p &= y_{d,B} + u_{d,B}(\tau_p - \tau_{d,B}) - \frac{1}{2}A_{-}(\tau_p - \tau_{d,B})^2 \\ t_p &= t_p \rightarrow \tau_p = \tau_p , \end{aligned}$$

$$v_p = v_{d,B} - a_{-,B}(t_p - t_d) \rightarrow u_p = u_{d,B} - A_{-}(\tau_p - \tau_{d,B}) ,$$

pero otra vez tenemos dos casos antes de que llegue a la posición  $L_B$ , ya que necesitamos determinar si el móvil alcanza  $v_{\text{máx},B}$  antes que  $A$  se acerque al cruce. Para ello calculamos la distancia a la cual el móvil alcanza la velocidad crucero  $x_{m,B} = x_p + (v_{\text{máx},B}^2 - v_p^2)/2a_{+,B}$ , ó  $y_m = y_p + (1 - u_p^2)/2A_{+}$ . Entonces, si  $x_{m,B} > L_B$ , el móvil alcanza el cruce con

$$\begin{aligned}
x_{n+1,B} &= L_{n,B} && \rightarrow y_{n+1,B} = 1, \\
t_{n+1,B} &= t_p + \frac{v_{n+1,B} - v_p}{a_{+,B}} && \rightarrow \tau_{n+1,B} = \tau_p + \frac{1}{A_+}(u_{n+1,B} - u_p), \\
v_{n+1,B} &= \sqrt{v_p^2 + 2a_{+,B}(L_{n,B} - x_p)} && \rightarrow u_{n+1,B} = \sqrt{u_p^2 + 2A_+(1 - y_p)},
\end{aligned}$$

de otro modo, alcanza  $v_{\text{máx},B}$  en

$$\begin{aligned}
x_{m,B} &= x_{m,B} && \rightarrow y_{m,B} = y_{m,B}, \\
t_{m,B} &= t_p + \frac{v_{\text{máx},B} - v_p}{a_{+,B}} && \rightarrow \tau_{m,B} = \tau_p + \frac{1}{A_+}(1 - u_p), \\
v_{m,B} &= v_{\text{máx},B} && \rightarrow u_{m,B} = 1,
\end{aligned}$$

y el cruce en

$$\begin{aligned}
x_{n+1,B} &= L_{n,B} && \rightarrow y_{n+1,B} = 1, \\
t_{n+1,B} &= t_{m,B} + \frac{L_{n,B} - x_{m,B}}{v_{\text{máx},B}} && \rightarrow \tau_{n+1,B} = \tau_{m,B} + (1 - y_{m,B}), \\
v_{n+1,B} &= v_{\text{máx},B} && \rightarrow u_{n+1,B} = 1.
\end{aligned}$$

# Referencias

- [1] B. A. Toledo, V. Muñoz, J. Rogan, C. Tenreiro y J. A. Valdivia, *Phys. Rev. E* **70**, 016107 (2004).
- [2] W. F. Adams, *J. Inst. Civil Engineers* **4**, 121 (1936).
- [3] B. D. Greenshields, en *Highway Research Board, Proceedings*, (1935), Vol. 14, pág. 458.
- [4] B. D. Greenshields, D. Schapiro y E. L. Erickson, Bureau of Highway Traffic, Technical Report (1947).
- [5] F. L. Hall, V. F. Hurdle y J. H. Banks, *Transportation Research Record* **1365** (1992).
- [6] J. H. Banks, *Transportation Research Record* **1225**, 53 (1989).
- [7] J. S. Drake, J. L. Shofer y A. D. May, *Highway Research Record* **154** (1967).
- [8] D. L. Gerlough y M. J. Huber, Special Report 165, Transportation Research Board, Washington DC: National Research Council (1975).
- [9] D. Chowdhury, L. Santen y A. Schadschneider, *Phys. Rep.* **329**, 199 (2000).
- [10] D. Helbing, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 1067 (2001).



- [11] T. Nagatani, Phys. Rev. E **404**, 3534 (2000).
- [12] N. Moussa, Phys. Rev. E **68**, 036127 (2003).
- [13] B. S. Kerner y S. L. Klenov, Phys. Rev. E **68**, 036130 (2003).
- [14] T. Nagatani, Rep. Prog. Phys. **65**, 1331 (2002).
- [15] T. Nagatani, Phys. Rev. E **68**, 036107 (2003).
- [16] J. Kuhl, D. Evans, Y. Papelis, R. Romano y G. Watson, IEEE Computer (1995).
- [17] N. V. Findler y J. Stapp, Journal of Transportation Engineering **118**, 99110 (1992).
- [18] K. Nishinari, M. Treiber y D. Helbing, Phys. Rev. E **68**, 067101 (2003).
- [19] D. Huang, Phys. Rev. E **68**, 046112 (2003).
- [20] M. Treiber y D. Helbing, Phys. Rev. E **68**, 046119 (2003).
- [21] K. Hasebe, A. Nakayama y Y. Sugiyama, Phys. Rev. E **68**, 026102 (2003).
- [22] T. Nagatani, Phys. Rev. E **60**, 1535 (1999).
- [23] A. Benyoussef, H. Chakib y H. Ez-Zahraouy, Phys. Rev. E **68**, 026129 (2003).
- [24] D. Huang y W. Huang, Phys. Rev. E **67**, 056124 (2003).
- [25] J. B. Rundle, K. F. Tiampo, W. Klein y J. S. Martins, Proc. Natl. Acad. Sci. **67**, 2514 (2002).
- [26] M. S. Chang, C. J. Messer y A. Santiago, Transportation Research Record **1027** (1985).

- [27] R. H. Wortman y J. S. Matthias, *Transportation Research Record* **904** (1983).
- [28] E. Brockfeld, R. Barlovic, A. Schadschneider y M. Schreckenberg, *Phys. Rev. E* **64**, 056132 (2001).
- [29] M. Sasaki y T. Nagatani, *Physica A* **325**, 531 (2002).
- [30] T. . Nagatani, *Physica A* **in press**, doi:10.1016/j.physa.08.007.
- [31] T. Nagatani, *Physica A* **348**, 561 (2005).
- [32] G. Nicolis, *Introduction to nonlinear Science* (Cambridge University Press, 1995), primera edición.
- [33] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, College Park, Maryland, USA, 2002), segunda edición.
- [34] R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics An Introduction for Scientists and Engineers* (Oxford University Press, 1994), primera edición.
- [35] L. Nadel y D. L. Stein, editores, *1993 Lectures in Complex Systems* (Addison-Wesley Publishing Company, Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, 1995), Vol. VI, págs. 143–170.
- [36] R. May, *Nature* **261**, 45 (1976).
- [37] Y. Pomeau y P. Manneville, *Commun. Math. Phys.* **74**, 189 (1980).
- [38] J.-P. Eckmann y D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 617 (1985).
- [39] G. Boffetta, M. Cencini, M. Falcioni y A. Vulpiani, *Phys. Reports* **356**, 367 (2002).