APLICACIONES DE LAS ECUACIONES INTEGRALES A PROBLEMAS DE FRONTERA

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magister en Ciencias Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS BASICAS
Y FARMACEUTICAS

por

RIGOBERTO MEDINA LEYTON

Septiembre, 1982

Patrocinante: Sr. Nicolás Yus S.

Facultad de Ciencias
Básicas y Farmacéuticas
Universidad de Chile

INFORME DE APROBACION
TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Comisión de Postgrado de la Facultad de Ciencias Básicas y Farmacéuticas que la Tesis de Magister presentada por el Candidato

Rigoberto Medina Leyton

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Matemáticas

Patrocinante de Tesis

Nicolás Yus S. ____________ Nicolás Yus S

Comisión Informante de Tesis

Ricardo Baeza R. ____________ Ricardo Baeza

Jorge Soto A. ____________

I N D I C E

INTRODUCCION

Este trabajo está dedicado primordialmente a los matemáticos cuyo principal interés es la aplicación de las matemáticas al análisis y solución de problemas físicos.

La teoría de ecuaciones integrales de Fredholm juega un importante papel en la discusión de los problemas de frontera de física-matemática.

El presente trabajo tiene por fin aplicar la teoría de Fredholm al análisis y resolución de algunos interesantes problemas de frontera, como son, por ejemplo, los problemas de Sturm-Liouville, Dirichlet y Neumann. De hecho, una de las primeras y más bellas aplicaciones de la teoría de Fredholm es la relativa al problema de Dirichlet.

En general tratamos de presentar ideas antiguas, como son los problemas antes citados, en un lenguaje moderno.

Comenzamos transformando el problema diferencial en una ecuación integral de Fredholm con núcleo simétrico a través de la función de Green del problema. Esta ecuación integral, a la cual corresponde un operador auto-adjunto y compacto, se estudia a través del Capítulo I y este estudio se basa en la teoría espectral de los operadores auto-adjuntos (o hermitianos) compactos.

En el Capítulo II presentamos una extensión del problema de Sturm-Liouville y de las ideas y métodos para resolverlo. Aquí aparecen los problemas de Dirichlet y Neumann, y para resolverlos necesitamos extender también el concepto de función de Green.

Al transformar el problema de Dirichlet en una ecuación integral de Fredholm aparece un núcleo de singularidad débil.

En Capítulo III, buscando condiciones de solubilidad de las ecuaciones integrales con núcleo de singularidad débil, logramos generalizar los importantes teoremas de Fredholm y Hilbert-Schmidt.

CAPITULO I

PROBLEMAS DE VALORES EN LA FRONTERA PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE. FUNCION DE GREEN.

A. El problema de Sturm-Liouville.

Consideremos el operador diferencial lineal de segundo orden

$$L_\lambda(y) = (py')' + (\lambda r - q)y \ ,$$

en el intervalo $[a,b]$, donde p,q y r son funciones reales, y

$$p \in C^{(1)}([a,b]) \quad \text{con} \quad p(t) > 0 \quad \text{para} \quad t \in [a,b]$$

$$r \in C([a,b]) \quad \text{con} \quad r(t) > 0 \quad \text{para} \quad t \in [a,b]$$

$q \in C([a,b])$; y condiciones de frontera de la forma

$$F_1(y) \equiv \alpha_o y(a) + \alpha_1 y'(a)$$

$$F_2(y) \equiv \beta_o y(b) + \beta_1 y'(b) \ ,$$

donde α_o , α_1 , β_o y β_1 pertenecen a $\mathbb{R}$ tal que $|\alpha_o| + |\alpha_1| \neq 0$ y $|\beta_o| + |\beta_1| \neq 0$.

El problema de Sturm-Liouville consiste en hallar una función y, solución del sistema

$$\begin{cases} L_\lambda(y)(t) = f(t) \quad \text{para} \quad t \in [a,b] & (S_\lambda) \\ F_1(y) = 0 \ , \quad F_2(y) = 0 & (F) \end{cases}$$

A.1. Observaciones.

1) Los ejemplos más comunes de condición de frontera son

$$y(a) = y(b) = 0 \qquad \text{e}$$

$$y'(a) = y'(b) = 0$$

2) Si en uno de los extremos del intervalo $[a,b]$ el coeficiente de la derivada de segundo orden se anula, por ejemplo $p(a) = 0$, entonces se plantea la condición natural de frontera de que la solución sea acotada para $t = a$ y en el otro extremo se dá la condición común de frontera.

A.2. Definición.

Diremos que λ es un valor propio del problema de Sturm-Liouville si la ecuación homogénea

$$L_\lambda(y) = 0 \qquad (S_\lambda^*)$$

tiene una solución $y \neq 0$ que satisface la condición de frontera (F) . Una tal solución y se llamará <u>función propia</u> (correspondiente al valor propio λ).

<u>Notación</u>.

Introduciremos una notación especial para la suma de los términos del lado izquierdo de la ecuación (S_λ) que no contiene λ :

$$L(y) = (p(t)y')' - q(t)y \quad \text{en} \quad [a,b]$$

Usando esta notación, consideremos el siguiente sistema:

$$L(y) = 0 \tag{1}$$

$$F_1(y) = 0 \ , \quad F_2(y) = 0 \tag{2}$$

Antes de continuar <u>recordemos</u> algunos resultados de la teoría de ecuaciones diferenciales lineales; para ello consideremos el operador diferencial lineal de orden n

$$L(y) = a_o(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y \ ,$$

donde

$$a_i \in C([a,b]) \quad i = 0,1,2,\ldots,n \quad y \quad a_o(t) \neq 0$$

para todo $t \in [a,b]$.

i) El conjunto de las funciones $y \in C^{(n)}[a,b]$ que son soluciones de la ecuación homogénea $L(y) = 0$ forman un espacio vectorial E_o de dimensión n.

ii) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en E_o forman una base de E_o, si y sólo si, su determinante Wronskiano

$$W(t) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n](t)$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(t) & \ldots\ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \ldots\ldots & y_n'(t) \\ & & \\ & & \\ y_1^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

es distinto de cero para todo $t \in [a,b]$.

Fijando un punto $t_o \in [a,b]$ tenemos que (fórmula de Liouville)

$$W(t) = W(t_o)\exp\left(-\int_{t_o}^{t} \frac{a_1(s)}{a_o(s)}\, ds\right) .$$

para todo $t \in [a,b]$.

A.3. Proposición.

Todo valor propio del problema de Sturm-Liouville tiene multiplicidad uno, es decir, el espacio vectorial generado por las funciones propias correspondientes tiene dimensión uno.

En efecto, sean y_1, y_2 dos soluciones linealmente independientes de $L_\lambda(y) = 0$ que satisfacen $F_1(y) = 0$ y $F_2(y) = 0$.

Consideremos el Wronskiano

$$W(t) = W[y_1, y_2](t)$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

por (ii) sabemos que $W[y_1, y_2] \neq 0$ para $t \in [a,b]$, pues y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes y también que

$$W(t) = W(a)\exp -\left(\int_a^t \frac{p'(s)}{p(s)}\, ds\right)$$
$$= \frac{W(a)}{p(t)} \cdot p(a)$$

luego

$$p(t)W(t) = p(a)W(a)$$

por otro lado, las hipótesis

$$F_1(y_1) = \alpha_o y_1(a) + \alpha_1 y_1'(a) = 0$$

$$F_1(y_2) = \alpha_o y_2(a) + \alpha_1 y_2'(a) = 0$$

con α_o y α_1 no simultáneamente nulos, implican

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_1'(a) \\ & \\ y_2(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = 0$$

Es decir $W[y_1,y_2](a) = 0$

Entonces

$$W[y_1,y_2] \equiv 0$$

Esto contradice la hipótesis de independencia lineal de y_1,y_2 .

De aquí en adelante, supondremos que $\lambda = 0$ no es un valor propio del problema de Sturm-Liouville, hasta que se diga lo contrario; y al final de este Capítulo veremos que la definición de la función de Green debe ser modificada cuando $\lambda = 0 \in P_\sigma(L)$.

Con la suposición anterior tenemos que el operador L es inyectivo, por lo tanto podemos preguntarnos por su inverso. Para ello necesitaremos definir un nuevo concepto:

A.4. Definición.

Se llama <u>función de Green</u> al operador L con condiciones de frontera (F) a la función real $g(t,s)$ que satisface las siguientes condiciones:

1) Está definida y es contínua en el cuadrado dado por $a \leq t,s \leq b$.

2) En cada intervalo $a \leq t < s$ y $s < t \leq b$, la función $g(t,s)$ considerada como función de t , tiene derivadas contínuas hasta el segundo orden y satisface la ecuación homogénea $L(y) = 0$.

3) Como función de t satisface las consiciones de frontera (F) .

4) Su derivada de primer orden con respecto a t tiene una discontinuidad de primera especie en $t = s$, siendo el salto igual a $\frac{1}{p(s)}$. Es decir

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,s) \Big/_{t=s+0} - \frac{\partial g}{\partial t}(t,s) \Big/_{t=s-0} = - \frac{1}{p(s)}$$

A.5. Notas.

1) La condición (4) significa que $\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)$ está definida para cualquier valor próximo a $t = s$, es decir, para $s < t$ y $s > t$. La diferencia entre esos valores límites debe ser igual a $- \frac{1}{p(s)}$.

2) En este Capítulo haremos uso muy frecuente de la si - guiente identidad, llamada identidad de Lagrange:

Si $u,v \in C^{(2)}([a,b])$. Entonces

$$\int_a^b vL(u) - uL(v)dt = M[u,v](b) - M[u,v](a) \text{ , donde}$$

$$M[u,v](t) = p(t)[u(t)v'(t) - u'(t)v(t)] .$$

Construcción de la función de Green.

A.6. Teorema.

Si $\lambda = 0$ no es un valor propio, entonces el operador L tiene una y sólo una función de Green g .

Demostración:

Sean $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluciones no nulas de $L(y) = 0$, las cuales satisfacen $F_1(y_1) = 0$ y $F_2(y_2) = 0$, respectivamente.

y_1, y_2 son linealmente independientes, pues $\lambda = 0$ no es un valor propio de L .

Por otro lado, $c_1 y_1(t)$, c_1 constante cualquiera, satisface la ecuación $L(y) = 0$ y la condición de frontera $F_1(y) = 0$.

Cualquier otra solución y que satisfaga las mismas condiciones que y_1 es linealmente dependiente con ella. En efecto, tenemos las ecuaciones en α_o y α_1 :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_o y_1(a) + \alpha_1 y'(a) = 0 \\ \alpha_o y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0 \end{array}\right|$$

y como

$|\alpha_o| + |\alpha_1| \neq 0$, entonces $W[y_1, y](t)$ es igual a 0 para $t = a$, luego y_1 e y son linealmente dependientes, es decir $y = cy_1$.

Análogamente, $c_2 y_2(t)$, c_2 constante arbitraria, es solución de $L(y) = 0$ y satisface $F_2(y) = 0$.

Luego $g(t,s)$ debe ser de la forma

$$g(t,s) = \begin{cases} c_1 y_1(t) , & a \leq t \leq s \\ \\ c_2 y_2(t) , & s \leq t \leq b \end{cases} \tag{1}$$

Además, la continuidad de la función $g(t,s)$ y la discontinuidad de primera especie de sus derivadas de primer orden con respecto a t en $t = s$ nos da

$$\left.\begin{array}{l} c_2 y_2(s) - c_1 y_1(s) = 0 \\ \\ c_2 y_2'(s) - c_1 y'(s) = \dfrac{1}{p(s)} \end{array}\right| \tag{2}$$

Este sistema, en c_1 y c_2 tiene solución única pues no se anula su determinante.

Como $L(y) = 0$; $I = 1,2$, tenemos que

$$y_1 L(y_2) - y_2 L(y_1) = [p(y_1 y_2' - y_2 y_1')]' = 0 .$$

Luego, $p(y_1 y_2' - y_2 y_1') = c$, donde c es una cierta constante distinta de cero e independiente de t y s . Con esta relación, la solución del sistema A.6.2. es la siguiente:

$$c_1(s) = \frac{y_2(s)}{c} \quad , \quad c_2(s) = \frac{y_1(s)}{c}$$

y por lo tanto A.6.1. toma la forma

$$g(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{c} y_1(t) y_2(s) \ , & a \le t \le s \\ \\ \frac{1}{c} y_2(t) y_1(s) \ , & s \le t \le b \end{cases}$$

A.7. Observaciones.

1) En el teorema A.6. demostramos que las magnitudes c_1 y c_2 están unívocamente determinadas, con ello queda demostrada la existencia y unicidad de la función de Green $g(t,s)$ y también se ha dado el método de construcción.

2) La construcción de la función de Green fracasa, si y sólo si, c se anula y esto sucede cuando y_1 e y_2 son linealmente dependientes, es decir, si son múltiplos de cierta función no trivial $z(t)$. En este caso la función $z(t)$ satisface $L(y) = 0$ y ambas condiciones de frontera. Por ejemplo, el problema

$$L(y) = y'' = 0$$

$$y'(0) = y'(1) = 0$$

tiene solución $z(t) = 1$ y no existe la función de Green para L , tal que satisfaga las condiciones extremas pedidas, pues cualquier par de funciones, soluciones del problema anterior, son linealmente dependientes. O sea, múltiplos de $z(t) = 1$.

3) La función de Green g para el operador L con condiciones de frontera (F) es simétrica.

En efecto, tomando

$$u(t) = g(t,s_1) \quad \text{y}$$

$$v(t) = g(t,s_2) \quad \text{con} \quad s_1 < s_2$$

en la identidad de Lagrange, tenemos:

$$g(s_1,s_2) - g(s_2,s_1) =$$

$$= [p(t)(g(t,s_1)g'(t,s_2) - g(t,s_2)g'(t,s_1))]\Big/_a^b$$

Esta última expresión vale cero cuando $t = a$ y $t = b$, pues la función de Green satisface la primera parte de las condiciones de frontera (F) , es decir,

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_o g(a,s_1) + \alpha_1 g'(a,s_1) = 0 \\ \alpha_o g(a,s_2) + \alpha_1 g'(a,s_2) = 0 \end{array}\right|$$

y como $|\alpha_o| + |\alpha_1| \neq 0$, entonces

$$\begin{vmatrix} g(a,s_1) & g'(a,s_1) \\ & \\ g(a,s_2) & g'(a,s_2) \end{vmatrix} = 0$$

Análogamente para $t = b$.

Luego $g(s_2,s_1) = g(s_1,s_2)$.

4) Cuando las condiciones de frontera (F) se hacen más generales, por ejemplo, si toman la forma:

$$\alpha_o y(a) + \alpha_1 y'(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(b) = 0$$
$$\beta_o y(a) + \beta_1 y'(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(b) = 0$$

de todos modos se puede construir la función de Green correspondiente a L con estas condiciones de frontera, y todo se cumple de manera análoga a lo hecho anteriormente, excepto la simetría de g , para la cual se requiere la condición adicional

$$p(a) \begin{vmatrix} \alpha_o & \alpha_1 \\ \beta_o & \beta_1 \end{vmatrix} = p(b) \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

A.8. Ejemplo.

Consideremos la ecuación $y'' = 0$ con condiciones de frontera de la forma:

$$hy(0) - y'(0) = 0$$

$Hy(1) + y'(1) = 0$; donde H y h son constantes.

Estudiaremos si existe o no la función de Green para este problema de frontera, y si existe la construiremos.

La solución general de la ecuación $y'' = 0$ es de la forma $y(t) = a + bt$. Como $y(0) = a$, $y'(0) = b$ $y(1) = a + b$, $y'(1) = b$.

Entonces las condiciones de frontera nos dan:

$$ha - b = 0$$

$$Ha + (H + 1)b = 0$$

Luego, $a = b = 0$, es decir, $\lambda = 0$, no es propio. Entonces la función de Green $g(t,s)$ se puede construir usando las condiciones de frontera de la definición A.4. Finalmente obtenemos:

$$g(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(ht + 1)H(s - 1) - 1}{h + H + hH} , & 0 \leq t \leq s \\ \\ \dfrac{(hs + 1)H(s - 1) - 1}{h + H + hH} , & s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

B. Reducción del problema de Sturm-Liouville a una ecuación integral.

Consideremos el sistema

$$L(y) = -f \quad , \quad f \in C[a,b] \qquad (S_o)$$

$$F_1(y) = 0 \quad , \quad F_2(y) = 0 \qquad (F)$$

A continuación presentaremos un teorema y para ello necesitamos definir el siguiente operador integral:

$$G : f \in C[a,b] \longrightarrow Gf \in C^{2}[a,b]$$

donde

$$(Gf)(t) = \int_a^b g(t,s)f(s)ds ,$$

g es la función de Green correspondiente a L .

B.1. Teorema.

$y \in C^{(2)}[a,b]$ es solución del problema $(S_o) - (F)$, si y sólo si $y = Gf$; donde

$$(Gf)(t) = \int_a^b g(t,s)f(s)ds .$$

<u>Demostración</u>:

1) Supongamos que $y \in C^{(2)}[a,b]$ es una solución cualquiera del problema $(S_o) - (F)$. Entonces

$$- \int_a^b g(t,s)Ly(t)dt = \int_a^b g(t,s)f(t)dt ,$$

donde g es la función de Green correspondiente. Además,

$$\int_a^b g(t,s)Ly(t)dt = \int_a^b g(t,s)Ly(t)dt + \int_s^b g(t,s)Ly(t)dt$$

Ahora, por la identidad de Lagrange tenemos:

$$\int_a^s g(t,s)L(y(t))dt$$

$$= \int_a^s Lg(t,s)y(t)dt + \{p(t)[g(t,s)y'(t) -$$

$$- y(t)g'(t,s)]\} \Big|_a^s$$

y también

$$\int_s^b g(t,s)Ly(t)dt$$

$$= \int_s^b y(t)Lg(t,s)dt + \{p(t)[g(t,s)y'(t) - y(t)g'(t,s)]\}\Big|_s^b$$

Luego, usando las propiedades de la función de Green y las condiciones de frontera (F) , tenemos

$$- \int_a^b g(t,s)Ly(t)dt$$

$$= -p(s)[g(s,s)y'(s) - g'(s-0,s)y(s)]$$

$$+ p(s)[g(s,s)y'(s) - g'(s+0,s)y(s)]$$

$$= y(s)$$

Luego

$$y(t) = \int_a^b g(t,s)f(s)ds \quad , \text{ es decir}$$

$y = Gf$, para todo $f \in C[a,b]$.

2) Demostremos que toda función de la forma $y = Gf$, $f \in C[a,b]$ es solución del problema (S_o) - (F) :

$$y(t) = \int_a^b g(t,s)f(s)ds$$

$$= \int_a^t g(t,s)f(s)ds + \int_t^b g(t,s)f(s)ds$$

Implica

$$y'(t) = \int_a^t g'(t,s)f(s)ds + g(t,t-0)f(t) +$$

$$+ \int_t^b g'(t,s)f(s)ds - g(t,t+0)f(t) \quad ,$$

como g es contínua en $[a,b] \times [a,b]$ tenemos que

$$g(t,t-0) = g(t,t+0)$$

luego

$$y'(t) = \int_a^t g'(t,s)f(s)ds + \int_t^b g'(t,s)f(s)ds$$

$$= \int_a^b g'(t,s)f(s)ds$$

$$y''(t) = \int_a^t g''(t,s)f(s)ds + g'(t,t-0)f(t) +$$

$$+ \int_t^b g''(t,s)f(s)ds - g'(t,t+0)f(t)$$

$$= \int_a^b g''(t,s)f(s)ds + [g'(t,t-0) - g'(t,t+0)]f(t)$$

$$= \int_a^b g''(t,s)f(s)ds - \frac{f(t)}{p(t)}$$

De donde

$$Ly(t) = [p(t)y'(t)]' - q(t)y(t)$$

$$= p'(t)y'(t) + p(t)y''(t) - q(t)y(t)$$

$$= p'(t) \int_a^b g'(t,s)f(s)ds +$$

$$+ \; p(t)\left[\int_a^b g''(t,s)f(s)ds - \frac{f(t)}{p(t)}\right]$$

$$- \; f(t)\int_a^b g(t,s)f(s)ds$$

$$= \int_a^b [p'(t)g'(t,s) + p(t)g''(t,s) - q(t)g(t,s)]f(s)ds$$

$$- \; f(t)$$

$$= -f(t) \qquad (\text{pues } \; Lg(t,s) = 0).$$

Entonces

$$Ly = -f \quad , \quad f \in C[a,b]$$

Por otro lado se verifica fácilmente que $y = Gf$ satisface las condiciones de frontera (F) .

#

B.2. Observaciones.

1) El Teorema B.1. esencialmente dice que el problema (S_o) - (F) es equivalente a una expresión de la forma $y = Gf$, con $f \in C[a,b]$.

2) El problema (S_o) - (F) tiene una única solución para un $f \in C[a,b]$, de la forma $y = Gf$ por Teorema B.1.

En efecto, sean y_1 e y_2 dos soluciones de (S_o) - (F) . Entonces $z = y_1 - y_2$ satisface $L(z) = 0$.

Luego, $z = 0$, pues L es inyectivo.

Con las observaciones B.2.1. y B.2.2. tenemos la posibilidad de reducir el problema de Sturm-Liouville a una ecuación integral, pués escribiendo la ecuación (S_o) en la forma $L(y) = -ry$, tenemos que:

B.3. Teorema.

El sistema

$$\begin{cases} Ly = -\lambda ry & (S_1) \\ F_1(y) = 0 \quad , \quad F_2(y) = 0 & (F) \end{cases}$$

es equivalente a la ecuación integral de la forma

$$y = \lambda G_r y \quad , \text{ donde } \quad G_r y = G(ry)$$

B.4. Corolario.

Sea $h \in C[a,b]$. Entonces el sistema

$$\begin{cases} Ly = -\lambda ry + h \\ F_1(y) = 0 \quad , \quad F_2(y) = 0 \end{cases}$$

es equivalente a la ecuación integral de la forma

$$y = \lambda G_r y + h_1 \quad , \text{ donde } \quad h_1 = - Gh \ .$$

<u>Demostración</u>.

Basta tomar $f = \lambda ry - h$ y aplicar el Teorema B.1.

B.5. Observaciones.

1) La función de Green para el problema de frontera (S_o) - (F) se puede interpretar físicamente como sigue: Si $Ly = -f$, entonces f puede mirarse como una distribución de fuerzas e $y(t)$ el desplazamiento de equilibrio en el punto t causado por esta fuerza.

Luego, la función de Green $g(t,s)$ representa el desplazamiento en el punto t causado por una fuerza concentrada de magnitud uno, actuando en el punto s .

En efecto, si suponemos que sobre el segmento $(s - \varepsilon , s + \varepsilon)$ actúa una fuerza de distribución f tal que su vector resultante es uno, es decir

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} f(t)dt = 1 \qquad (*)$$

y supongamos que los segmentos $(a,s - \varepsilon)$ y $(a + \varepsilon,b)$ son libres de la acción de cada fuerza tal que en ellas $f \equiv 0$. Entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_a^b g(t,s)f(s)ds \\ &= \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} g(t,s)f(s)ds \end{aligned}$$

si $f > 0$, por teorema del valor medio tenemos que

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t,s_o)\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} f(s)ds \ , \quad s \in (a - \varepsilon \ , \ s + \varepsilon) \\ &= g(t,s_o) \end{aligned}$$

si $\varepsilon \to 0$, se obtiene una fuerza concentrada aplicada en el punto s igual a uno (por (*)).

Además $y = g_s$ que es lo que se aseguraba.

2) Como toda función de la forma $y = Gf$, $f \in C[a,b]$ es solución del problema $Ly = -f$, con condiciones de frontera (F) , entonces

$$\begin{aligned} -f &= Ly \\ &= L(Gf) \\ &= LG(f) \quad , \quad \text{para cada} \quad f \in C[a,b] \ . \end{aligned}$$

Luego $LG = -I$ (*)

Por otro lado tenemos que si y es solución cualquiera del problema (S_o) - (F) , entonces

$$\begin{aligned} y &= Gf \\ &= G(-Ly) \\ &= -GL(y) \end{aligned}$$

Luego $GL = -I$ (**)

Por lo tanto, de (*) y (**) se tiene que

$$L^{-1} = -G \ .$$

3) La aplicación

$$G : C[a,b] \longrightarrow C^{(2)}[a,b]$$

$$f \longrightarrow Gf$$

donde

$$(Gf)(t) = \int_a^b g(t,s)f(s)ds \quad , \text{ es acotada.}$$

4) El operador diferencial L es autoadjunto.

C. Valores propios y funciones propias de un problema de frontera.

Como redujimos nuestro problema de valores en la frontera a una ecuación integral, podemos utilizar los resultados de esa teoría analizando los valores propios y funciones propias del problema.

Por Teorema B.3. tenemos que: y es solución del problema (S_1) - (F) , si y sólo si $\frac{1}{\lambda}y = Gry$.

Es decir, si y sólo si, $\frac{1}{\lambda}y = Gry$, o sea $\frac{1}{\lambda}$ es valor propio de Gr , luego

C.1. Corolario.

1) λ es valor propio del problema de Sturm-Liouville, si y sólo si, $\frac{1}{\lambda}$ es valor propio de Gr .

2) y es función propia del problema de Sturm-Liouville correspondiente al valor propio λ , si y sólo si, y es

función propia del operador Gr .

C.2. Suponiendo condiciones de frontera tal que la función de Green sea simétrica, se tiene que:

1) La ecuación integral

$$(I - \lambda G)y = h_1 \quad , \quad \text{tiene núcleo } g \text{ simétrico} .$$

2) Los valores propios son todos reales (en cantidad numerable) y forman una sucesión monótona que tiende a infinito y las funciones propias correspondientes a distintos valores propios, son ortogonales.

3) Para cada valor propio, existe una única función propia. Esta última propiedad la demostramos para las condiciones de frontera (F) .

En el caso de condiciones de frontera periódicas, es decir si

$$\left.\begin{aligned} y(a) &= y(b) \\ y'(a) &= y'(b) \end{aligned}\right\}$$

a cada valor propio corresponden dos y sólo dos funciones propias (pues ecuación $Ly = -\lambda y$ tiene sólo dos soluciones linealmente independientes).

C.3. Proposición.

El núcleo g de la ecuación integral

$$(I - \lambda G)y = 0$$

es completo, es decir no existen funciones contínuas ortogonales a g, salvo las idénticamente nulas.

<u>Demostración</u>:

Supongamos que existe una función $f \in C[a,b]$ ortogonal con g, es decir tal que

$$\int_b^a g(t,s)f(s)ds = 0$$

Entonces poniendo

$$y(t) = \int_b^a g(t,s)f(s)ds ,$$

se tiene que $y = 0$, además por Teorema B.1. tenemos que y satisface la ecuación $L(y) = -f$.

Por lo tanto $f \equiv 0$.

Sean λn $(n = 1,2,\ldots)$ los valores propios del problema $(S_1) - (F)$, y φ_n las correspondientes funciones propias tal que ellas forman un sistema ortonormal.

Supongamos que $f \in C^{(2)}[a,b]$ y satisface las condiciones de frontera (F). Poniendo $L(f) = -h$, por Teorema B.1. tenemos que $f = Gh$. Entonces obtenemos los siguientes resultados:

C.4. Teorema.

Si la serie de Fourier de la función f; $\sum_n f_n \varphi_n$; $f_n = \langle f,\varphi_n \rangle$ es uniformemente convergente en $[a,b]$, entonces

$$f = \sum_n f_n \varphi_n \qquad \text{en} \qquad [a,b]$$

Demostración:

Sea $h = \sum_n f_n \varphi_n$ tal que $h \not\equiv f$ en $[a,b]$, entonces $\langle h - f, \varphi_n \rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Luego $\langle h - f, g_t \rangle = 0$ para todo $t \in [a,b]$, o sea $h - f$ es ortogonal al núcleo g . Esto contradice el hecho de que g sea completo.

C.5. Teorema.

Toda función $f \in C^{(2)}[a,b]$ que satisfaga las condiciones de frontera (F) puede escribirse en la forma

$$f = \sum_n f_n \varphi_n \quad , \quad f_n = \langle f, \varphi_n \rangle$$

donde la serie es absoluta y uniformemente convergente a f .

Demostración:

Poniendo $Lf = -h$, podemos expresar f en términos del operador G , es decir, $f = Gh$, como G es autoadjunto, el teorema de Hilbert-Schmidt (Miklin [1]) afirma que f puede desarrollarse en serie de Fourier, absoluta y uniformemente convergente con respecto al sistema ortonormal $\{\varphi_n\}$ en L_2 (Pues $\|g_t\|_2$ es acotada, con $g_t(s) = g(t,s)$).

Por lo tanto, por Teorema C.4.:

$$f = \sum_n f_n \varphi_n \quad , \quad f_n = \langle f, \varphi_n \rangle .$$

El Teorema C.5. se cumple esencialmente porque g es simétrica, sin embargo, esto no sucede con el núcleo de toda ecuación integral.

D. Ecuaciones integrales reducibles a ecuaciones con núcleo simétrico.

Cuando $r \equiv 1$, demostramos que el problema de frontera (S_1) - (F) era equivalente a una ecuación integral con núcleo simétrico.

Cuando $r \not\equiv 1$ y $r \neq 0$, demostramos que el problema de frontera (S_1) - (F) era equivalente a una ecuación integral de la forma

$$\varphi = h + \lambda G r \varphi \tag{1}$$

Esta última ecuación no tiene núcleo simétrico, sin embargo

D.1. Teorema.

Sea $r = r(t) > 0$, para todo $t \in [a,b]$

Entonces $\varphi = h + \lambda G r \varphi$ es equivalente a una ecuación integral (con núcleo simétrico) de la forma

$$\psi = h\sqrt{r} + \lambda \tilde{G}\psi \quad , \text{ donde}$$

$\widetilde{g}(t,s) = g(t,s)\,\sqrt{r(t)r(s)}$ es el núcleo del operador $\widetilde{G}$, y

$$\psi(t) = \sqrt{r(t)}\,\varphi(t)$$

(si $r < 0$ todo es análogo).

Demostración:

Basta multiplicar ambos miembros de la ecuación (1) por $\sqrt{r}$.

#

Sean $\{\lambda_n\}$ los valores propios y $\{\psi_n\}$ las correspondientes funciones propias de la ecuación homogénea $\psi = \lambda\widetilde{G}\psi$, las cuales suponemos ortonormalizadas. Es decir

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$$

como

$\psi_k(t) = \varphi_k(t)\,\sqrt{r(t)}$, entonces las funciones propias de la ecuación homogénea

$$\varphi = \lambda G r \varphi$$

están ortonormalizadas con densidad r, es decir

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_r = \delta_{ij}$$

Sea

$$f = \widetilde{G}h \quad , \quad h \in L_2([a,b]) \qquad (2)$$

entonces

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k \qquad (3)$$

Esta serie es uniforme y absolutamente convergente, por teorema de Hilbert-Schmidt, pues $\|\tilde{g}_t\|_2$ es acotada. Donde

$$\begin{aligned} f_k &= \langle f, \psi_k \rangle \\ &= \int_a^b f(t)\sqrt{r(t)}\,\varphi_k(t)\,dt \end{aligned}$$

Dividiendo las ecuaciones (2) y (3) por $\sqrt{r}$, tenemos:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{f(t)}{\sqrt{r(t)}} \\ &= \int_a^b g(t,s)\sqrt{r(s)}\,h(s)\,ds \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} \left(\int_a^b \sqrt{r(s)}\,f(s)\,\varphi_k(s)\,ds\right)\varphi_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^b r(s)\,\frac{f(s)}{\sqrt{r(s)}}\,\varphi_k(s)\,ds\right)\varphi_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^b r(s)F(s)\,\varphi_k(s)\,ds\right)\varphi_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} F_k\varphi_k(t) \quad , \quad F_k = \langle F, \varphi_k \rangle_r \qquad (4) \end{aligned}$$

y esta última serie es uniformemente convergente.

Luego obtenemos una extensión al caso $r > 0$ (ó $r < 0$) del Teorema C.5.

D.2. Teorema.

Toda función $f \in C^2[a,b]$, satisfaciendo las condiciones de frontera (F), puede escribirse en la forma

$$f = \sum_k f_k \varphi_k \quad , \quad f_k = \langle f, \varphi_k \rangle_r$$

con respecto a las funciones propias $\{\varphi_k\}$ consideradas anteriormente, y la serie es absoluta y uniformemente convergente.

<u>Demostración</u>:

Tenemos que

$$Lf = -\lambda r f$$

entonces

$$f = \lambda G r f$$

$$= -GLf$$

pero obviamente podemos poner

$$Lf = -\sqrt{r}h \text{ , donde } h \in C[a,b]$$

Entonces

$$f(t) = \int_a^b g(t,s)\sqrt{r(s)}h(s)ds$$

De donde

$$\sqrt{r(t)}\,f(t) = \int_a^b g(t,s)\,\sqrt{r(t)r(s)}\,h(s)\,ds$$

Es decir

$$\tilde{f}(t) = \int_a^b \tilde{g}(t,s)h(s)\,ds$$

donde

$$\begin{cases} \tilde{f}(t) = \sqrt{r(t)}\,f(t) \\ \tilde{g}(t,s) = g(t,s)\,\sqrt{r(t)r(s)} \end{cases}$$

Entonces, por (4)

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\tilde{f}(t)}{\sqrt{r(t)}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^b \sqrt{r(s)}\,\tilde{f}(s)\varphi_k(s)\,ds\right)\varphi_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^b r(s)f(s)\varphi_k(s)\,ds\right)\varphi_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k\varphi_k(t) \quad , \quad f_k = \langle f,\varphi_k\rangle_r \end{aligned}$$

#

D.3. Observaciones.

1) Si $\tilde{g} \in L_2$, por ejemplo cuando $g \in L_2(\mathbb{R}^2)$ y $r \in L_1(\mathbb{R})$, entonces el problema de Sturm-Liouville tiene

solo una cantidad numerable de valores propios, ellos son los valores propios del núcleo, los cuales pueden tener a lo más dos funciones propias linealmente independientes.

Para los demás valores propios λ , la ecuación (1) tiene solución para todo $h \in L_2$ (única para todo λ por alternativa de Fredholm [1]).

2) Existen condiciones de frontera tales que a cada valor propio corresponde solo una función propia, se llaman "funciones propias simples".

Las funciones propias forman una base en L_2 , lo cual está garantizado por el siguiente teorema:

D.4. Teorema (Friedman [2]).

Si A es un conjunto ortonormal en un espacio de Hilbert H , entonces son equivalentes:

1) A es completo
2) El subespacio generado por A es H
3) A es una base ortonormal de H

Demostraremos el siguiente teorema:

D.5. Teorema.

El conjunto ortonormal $\{\varphi_n\}$ de funciones propias del problema de frontera (S_1) - (F) es completo en $L_2([a,b])$.

Demostración:

Sea $M = \{y \in C^2[a,b] / y$ satisface las condiciones de frontera $(F)\}$.

a) El conjunto generado por $\{\varphi_n\}$, que denotaremos por $[\varphi_n]$ es denso en M .

En efecto, sea $y \in M$, entonces, por Teorema D.2.

$$y = \sum_{k=i}^{\infty} y_k \varphi_k \quad , \quad y_k = \langle y, \varphi_k \rangle$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} y_i \varphi_i \right) \quad , \text{ absoluto y uniformemente.}$$

Pero

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \varphi_i \in [\varphi_n] \quad , \text{ para todo } k \in \mathbb{N} .$$

Es decir, para todo $y \in M$ existe un elemento de la forma $\sum^{k} y_i \varphi_i$ en $[\varphi_n]$ tal que

$$y = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} y_i \varphi_i \right)$$

b) El conjunto M es denso en $L_2[a,b]$.

En efecto, sabemos que las funciones contínuas son densas en $L_2[a,b]$ y que toda función contínua se puede aproximar uniformemente por polinomios. Entonces basta demostrar que los polinomios son densos en M .

Multiplicando los polinomios adecuadamente (para no destruir la 2-diferenciabilidad) en vecindades arbitrariamente pequeñas de $t = a$ y $t = b$ se logra que satisfagan las condiciones de frontera (F) .

Por lo tanto, los polinomios $\{P_F\}$, es decir los polinomios que satisfacen las condiciones de frontera (F) son densos en M .

Luego, por (a) y (b), tenemos que $[\varphi_n]$ es denso en $L_2[a,b]$. Por lo tanto, de Teorema D.4., $\{\varphi_n\}$ es completo en $L_2[a,b]$.

#

D.6. Corolario.

El problema de frontera (S_1) - (F) tiene un conjunto infinito numerable de valores propios.

Demostración:

Como $\{\varphi_n\}$ es una base ortonormal del espacio de dimensión infinita $L_2[a,b]$, entonces los valores propios deben ser infinitos.

A continuación estudiaremos algunas condiciones bajo las cuales el núcleo g satisface el teorema de Mercer (Miklin [1]).

E. Signo de los valores propios.

Sean $\{\lambda_n\}$; n = 1,2,..... los valores propios y $\{\varphi_n\}$ las funciones propias correspondientes tal que forman un conjunto ortonormal.

Para $r \equiv 1$, tenemos

$$L\varphi_n = -\lambda_n \varphi_n$$

Entonces

$$\langle L\varphi_n, \varphi_n \rangle = -\lambda_n \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle$$
$$= -\lambda_n$$

De donde

$$\lambda_n = -\int_a^b \left[\frac{d}{dt}\left(p(t)\,\varphi'_n(t)\right) - q(t)\,\varphi_n(t)\right]\varphi_n(t)\,dt$$
$$= -\int_a^b \frac{d}{dt}\left(p(t)\,\varphi'_n(t)\right)\varphi_n(t)\,dt + \int_a^b q(t)\,\varphi_n^2(t)\,dt$$

Pero

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(p(t)\,\varphi'_n(t)\right)\varphi_n(t)\,dt$$
$$= \varphi_n(t)\,p(t)\,\varphi'_n(t)\Big/_a^b - \int_a^b p(t)\,\varphi_n{}^2(t)\,dt$$

Luego

$$\lambda_n = \int_a^b p(t)\,\varphi_n{}^2(t)\,dt + \int_a^b q(t)\,\varphi^2{}_n(t)\,dt$$
$$- \left[\varphi_n(t)\,\varphi'_n(t)\,p(t)\right]\Big/_a^b$$
$$= \int_a^b \left[p(t)\,\varphi_n{}^2(t) + q(t)\,\varphi^2{}_n(t)\right]dt$$

$$- \left[\varphi_n(t)\,\varphi'_n(t)p(t)\right] \Big|_a^b$$

Supongamos que las condiciones de frontera son

$$\varphi_n(a) = \varphi_n(b) = 0$$

Entonces

$$\left[\varphi_n(t)\,\varphi'_n(t)p(t)\right] \Big|_a^b = 0$$

Luego

$$\lambda_n = \int_a^b \left[p(t)\,\varphi_n^{\,2}(t) + q(t)\,\varphi^2_n(t)\right]dt$$

Sea $p > 0$, entonces

1) Si $q \geq 0$ en $C[a,b]$, se cumple que $\lambda_n > 0$ para todo n .

2) Si $q \in C[a,b]$ cualquiera y m su mínimo en $[a,b]$ entonces

$$\lambda_n \geq \int_a^b p(t)\,\varphi_n^{\,2}(t)dt + m$$

$$\geq m$$

por lo tanto, puede haber sólo un número finito de valores propios negativos.

Si las condiciones de frontera son de la forma

$$\left.\begin{aligned} y'(a) - h_1 y(a) &= 0 \\ y'(b) + h_2 y(b) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

con h_1, h_2 constantes positivas. Entonces

$$-[p(t)\varphi_n(t)\varphi'_n(t)]\Big|_a^b \qquad \text{es positivo.}$$

Luego, si $q \geq 0$, $\lambda_n > 0$ para todo n .

Por lo tanto, como todos los valores propios son positivos, o existe a lo más un número finito de ellos negativos, por el teorema de Mercer(Miklin [1]) el núcleo g tiene un desarrollo en serie de Fourier absoluta y uniformemente convergente, es decir

$$g(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)\varphi_k(s)}{\lambda_k}$$

E.1. Ejemplo.

Consideremos la ecuación de Bessel de grado n :

$$\left.\begin{array}{l} y'' + \frac{1}{t}y' + \left(\lambda_n - \frac{n^2}{t^2}\right)y = 0 \ , \\ \text{con } \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ \text{ y condiciones de} \\ \text{frontera } \ y(0) \ \text{ finito e } \ y(1) = 0 \end{array}\right\}$$

Como tiene un polo en $t = 0$, imponemos la condición que la solución sea acotada en una vecindad de $t = 0$.

Le damos la forma

$$(ty')' + (\lambda t - \frac{n^2}{t})y = 0 \ , \qquad n \in \mathbb{N}$$

Utilizando las condiciones de frontera encontramos que la función de Green es

$$g(t,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}\left[\left(\dfrac{t}{s}\right)^n - (ts)^n\right] , & t \leq s \\[2ex] \dfrac{1}{2n}\left[\left(\dfrac{s}{t}\right)^n - (ts)^n\right] , & t \geq s \end{cases}$$

Entonces la ecuación no-homogénea

$$Ly = -f$$

donde

$$\begin{cases} f(t) = \lambda t y(t) \\ Ly(t) = (ty'(t))' - \dfrac{n^2}{t}y(t) \end{cases}$$

, tiene una única solución que satisface las condiciones de frontera. Está dada por la fórmula

$$y(t) = \lambda \int_0^1 g(t,s)sy(s)ds$$

Usando los argumentos sobre el signo de los valores propios, estudiados en esta sección, concluímos que son todos positivos.

Poniendo $\lambda = \mu^2$, obtenemos la ecuación fundamental $J_n(\mu) = 1$ para los valores propios, donde $J_n(t)$ es la función de Bessel, y las correspondientes funciones propias son

$$\varphi_m(t) = c_m J_n(\mu_m t)$$

para el caso $n = 0$, la ecuación $Ly = 0$ tiene soluciones linealmente independientes

$$y_1(t) = 1 \quad , \quad y_2(t) = \ln t$$

y la función de Green está dada por

$$g(t,s) = \begin{cases} -\ln(s) & , \quad t \leq s \\ \\ -\ln t & , \quad s \leq t \end{cases}$$

La ecuación diferencial

$$(ty')' + (\lambda t - \frac{n^2}{t})y = 0 \quad , \qquad n \in \mathbb{N}$$

con condiciones de frontera $y(0)$ finito e $y(1) = 0$.
Es equivalente a la ecuación integral de la forma

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^1 \tilde{g}(t,s)\varphi(s)ds$$

donde

$$\begin{cases} \varphi(t) = y(t)\sqrt{t} \\ \\ \tilde{g}(t,s) = g(t,s)\sqrt{t\,s} \qquad , \qquad 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Es decir, tiene un núcleo contínuo y simétrico en

$0 \leq t \leq 1$

$0 \leq s \leq 1$

Las funciones propias de esta ecuación integral están dadas por

$$\varphi_m(t) = c_m \sqrt{t}\, J_o(\mu_m t)$$

Además, el núcleo $\tilde{g}$ puede desarrollarse en una serie de Fourier absoluta y uniformemente convergente:

$$g(t,s)\sqrt{ts} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)\varphi_k(s)}{\lambda_k} \qquad \text{(por Teo. Mercer)}$$

Dividiendo por $\sqrt{ts}$, obtenemos:

$$g(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^2\, J_o(\mu_k t)\, J_o(\mu_k s)}{\lambda_k}$$

Teniendo en cuenta la forma de g , esta serie converge uniformemente sólo en $[\varepsilon,1]$, donde $\varepsilon > 0$ cualquiera.

Las constantes c_k están dadas por la condición de normalización, por

$$c_k^2 = \frac{2}{J_1(\mu_k)}$$

F. La función generalizada de Green.

Estudiaremos el caso $\lambda = 0$ valor propio del problema de Sturm-Liouville (S_λ) - (F) , es decir, cuando la ecuación homogénea $Ly = 0$ tiene una solución no trivial $y = \varphi_o$ que satisface las condiciones de frontera (F) .

Supongamos normalizada esta solución de aquí en adelante.

En este caso no existe la función de Green definida en A.4. (ver A.7.2.), y se requiere de un concepto levemente más exigente llamado función generalizada de Green.

F.1. Definición.

Se llama función generalizada de Green a la función real $g(t,s)$ que como función de t satisface las siguientes propiedades:

1) En cada intervalo $[a,s)$ y $(s,b]$ satisface la ecuación

$$L(g(t,s)) = \varphi_o(s)\varphi_o(t)$$

2) Satisface las condiciones de frontera (F) .

3) Es contínua en $t = s$

4) La derivada de primer orden de $g(t,s)$ con respecto a t tiene un salto de magnitud $1/p(s)$ en el punto $t = s$

5) Satisface la condición

$$\int_a^b g(t,s)\varphi_o(s)ds = 0 \qquad \text{para todo } t \in [a,b]$$

F.2. Observaciones.

1) El lado derecho de la ecuación

$$L(g(t,s)) = \varphi_o(s)\,\varphi_o(t)$$

tiene la siguiente interpretación física:

Si $\lambda = 0$ es un valor propio del problema, tenemos resonancia con frecuencia igual a cero y no se puede obtener una desviación estática finita en presencia de la fuerza concentrada. Para obtener tal desviación, debemos tener una fuerza contínuamente distribuída, además de la fuerza concentrada. Esto último está caracterizado por el lado derecho de la ecuación F.1.1.

2) Demostraremos que la condición (5) es necesaria para que la función generalizada de Green sea simétrica.

F.3. Construcción de la función generalizada de Green.

Sea w una solución cualquiera de la ecuación F.1.1., es decir

$$Lw = \varphi_o(s)\varphi_o \qquad , \qquad s \in [a,b] \quad \text{fijo},$$

y φ_1 solución de la ecuación homogénea correspondiente $Ly = 0$, linealmente independiente con φ_o y tal que

$$p(\varphi_o \varphi'_1 - \varphi_1 \varphi'_o) = 1 \tag{1}$$

(Esta relación se logra por fórmula de Liouville).

Como la solución general de la ecuación F.1.1. es la suma de la solución general de la homogénea y w, debemos poner:

$$g(t,s) = \begin{cases} w(t) + c_1\varphi_o(t) + c_2\varphi_1(t) , & t \leq s \\ \\ w(t) + c_3\varphi_o(t) + c_4\varphi_1(t) , & t \geq s \end{cases} \qquad (2)$$

Es decir, $g(t,s)$ es la solución general de la ecuación F.1.1.

Además, $g(t,s)$ debe satisfacer también las condiciones de frontera (F) .

Como φ_o satisface esas condiciones, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_o w(a) + \alpha_1 w'(a) + c_2[\alpha_o \varphi_1(a) + \alpha_1 \varphi'_1(a)] = 0 \\ \\ \beta_o w(b) + \beta_1 w'(b) + c_4[\beta_o \varphi_1(b) + \beta_1 \varphi'_1(b)] = 0 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Como φ_o es linealmente independiente con φ_1, entonces φ_1 no puede satisfacer ninguna de las partes de las condiciones de frontera (F) .

Luego

$\alpha_o \varphi_1(a) + \alpha_1 \varphi'_1(a) \neq 0$ y

$\beta_o \varphi_1(b) + \beta_1 \varphi'_1(b) \neq 0$

Entonces, por 8.2.3. tenemos

$$c_2 = - \frac{\alpha_o w(a) + \alpha_1 w'(a)}{\alpha_o \varphi_1(a) + \alpha_1 \varphi'_1(a)}$$

$$c_4 = - \frac{\beta_o w(b) + \beta_1 w'(b)}{\beta_o \varphi_1(b) + \beta_1 \varphi'_1(b)}$$

De las condiciones (3) y (4) de la definición de la función generalizada de Green, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_o(s)(c_1 - c_3) - \varphi_1(s)(c_2 - c_4) &= 0 \\ \varphi'_o(s)(c_1 - c_3) - \varphi'_1(s)(c_2 - c_4) &= \frac{1}{p(s)} \end{aligned}\right\}$$

La solución de este sistema, en $c_1 - c_3$ y $c_2 - c_4$, utilizando F.3.1. es

$$c_1 - c_3 = - \varphi_1(s)$$

$$c_2 - c_4 = \varphi_o(s)$$

Implica

$$c_1 = c_3 - \varphi_1(s)$$

Reemplazando en la primera de las ecuaciones F.3.2., tenemos

$$g(t,s) = w(t) + [c_3 - \varphi_1(s)]\varphi_o(t) + c_2\varphi_1(t) .$$

Además, por condición F.1.5.

$$\int_a^b [w(t) + c_3\varphi_o(t) - \varphi_1(s)\varphi_o(t) + c_2\varphi_1(t)]\varphi_o(t)dt = 0 \ ,$$

de donde

$$\int_a^b w(t)\,\varphi_o(t)dt + c_3 \int_a^b \varphi^2{}_o(t)dt$$
$$- \varphi_1(a) \int_a^b \varphi^2{}_o(t)dt + c_2 \int_a^b \varphi_1(t)\,\varphi_o(t)dt = 0$$

Entonces

$$c_3 - \varphi_1(s) = - \int_a^b w(t)\varphi_o(t)dt - c_2 \int_a^b \varphi_1(t)\,\varphi_o(t)dt$$

Luego

$$c_3 = \varphi_1(s) - \int_a^b [w(t) + c_2\varphi_1(t)]\,\varphi_o(t)dt$$

por lo tanto

$$c_1 = - \int_a^b [w(t) + c_2\varphi_1(t)]\,\varphi_o(t)dt$$

Ahora verifiquemos que c_2 y c_4 encontrados anteriormente satisfacen la relación $c_2 - c_4 = \varphi_o(s)$

Por la fórmula de Liouville, tenemos

$$\varphi_o(s) = [p(\varphi_o w' - w\varphi'{}_o)] \Big|_a^b \qquad (4)$$

Por otro lado, φ_o satisface

$$\left.\begin{aligned} \alpha_o\varphi_o(a) + \alpha_1\varphi'{}_o(a) &= 0 \\ \beta_o\varphi_o(b) + \beta_1\varphi'{}_o(b) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Entonces, haciendo $t = a$ y $t = b$ en F.3.1. y utilizando F.3.5. se tiene que

$$\varphi_o(a) = - \frac{\alpha_1}{p(a)[\alpha_o \varphi_1(a) + \alpha_1 \varphi'_1(a)]}$$

$$\varphi'_o(a) = - \frac{\alpha_o}{p(a)[\alpha_o \varphi_1(a) + \alpha_1 \varphi'_1(a)]}$$

$$\varphi_o(b) = - \frac{\beta_o}{p(b)[\beta_o \varphi_1(b) + \beta_1 \varphi'_1(b)]}$$

$$\varphi'_o(b) = - \frac{\beta_1}{p(b)[\beta_o \varphi_1(b) + \beta_1 \varphi'_1(b)]}$$

Luego, reemplazando estos valores en F.3.4. tenemos que $c_2 - c_4 = \varphi_o(s)$.

#

F.4. Ejemplo.

Consideremos el problema

$$Ly = y'' = 0$$

con condiciones de frontera

$$y'(0) = y'(1) = 0$$

Entonces la función generalizada de Green, en este caso, tiene la forma

$$g(t,s) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(t^2 + s^2) - \begin{cases} s & , \text{ si } \ t < s \\ \\ t & , \text{ si } \ t < s \end{cases}$$

$g(t,s)$ satisface las cinco condiciones pedidas. (Recordemos que este problema no pudo resolverse en A.7.2. pues la función de Green no existía).

F.5. Proposición.

La función generalizada de Green es simétrica.

<u>Demostración</u>:

Haciendo

$u(t) = g(t,s_1)$ y

$v(t) = g(t,s_2)$, con $s_1 < s_2$, en la fórmula de Liouville tenemos

$$\int_a^b [g(t,s_1)Lg(t,s_2) - g(t,s_2)Lg(t,s_1)]dt =$$

$$= \int_a^b \underbrace{\frac{d}{dt}\Big[p(t)(g(t,s_1)g'(t,s_2) - g(t,s_2)g'(t,s_1))\Big]dt}_{(*)}$$

$$= \int_a^{s_1} (*)dt + \int_{s_1}^{s_2} (*)dt + \int_{s_2}^{b} (*)dt$$

$$= g(s_2,s_1) - g(s_1,s_2)$$

Esto se obtiene pues

$g'(t,s_i)$; $i = 1,2$, tiene un salto de magnitud

$-\dfrac{1}{p(s_i)}$ en $t = s_i$.

Además $u(t)$ y $v(t)$ satisfacen las mismas condiciones de frontera en $t = a$ y $t = b$.

Luego

$$p(t)[u(t)v'(t) - v(t)u'(t)]\Big|_a^b = 0$$

Como

$$\int_a^b [g(t,s_1)Lg(t,s_2) - g(t,s_2)Lg(t,s_1)]dt$$

$$= \varphi_o(a_2) \int_a^b g(t,s_2)\,\varphi_o(t)dt - \varphi_o(s_1) \int_a^b g(t,s_1)\,\varphi_o(t)dt$$

$$= 0 \qquad\qquad \text{(Propiedad F.1.5.)}$$

Entonces

$$g(s_2,s_1) = g(s_1,s_2)$$

por lo tanto g es simétrica.

#

Consideremos nuevamente el problema de frontera:

$$\begin{cases} L(y) = -f \quad , \qquad f \in C[a,b] & (S_o) \\ F_1(y) = 0 \quad , \quad F_2(y) = 0 & (F) \end{cases}$$

Entonces

F.6. Teorema.

Una condición necesaria para que el problema de frontera $(S_o) - (F)$ tenga solución, es que f sea ortogonal a φ_o .

<u>Demostración</u>:

Sea h una solución de $(S_o) - (F)$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} -\langle f,\varphi_o\rangle &= -f \\ &= \langle Lh,\varphi_o\rangle \\ &= \langle h,L\varphi_o\rangle \quad , \quad (L \text{ autoadjunto}) \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

De donde

$$\langle f,\varphi_o\rangle = 0 \ .$$

Suponiendo que la función generalizada de Green existe, obtenemos los dos teoremas siguientes:

F.7. Teorema.

Si f es ortogonal a φ_o, entonces el problema de frontera (S_o) - (F) tiene una única solución ortogonal a φ_o, y esa solución es de la forma $y = Gf$; donde G es un operador integral con núcleo g, o sea, la función genealizada de Green.

Demostración:

a) Unicidad: Supongamos que existen dos soluciones del problema (S_o) - (F), ortogonales a φ_o. Sean éstas y_1 e y_2, entonces $z = y_1 - y_2$ es solución del problema $L(y) = 0$ con condición de frontera (F).
Luego $z = C\varphi_o$, C constante cualquiera, entonces $\langle z, \varphi_o \rangle = 0$, pero esto contradice la hipótesis de que $\|\varphi_o\| = 1$.

b) Ahora demostremos que esa única solución ortogonal a φ_o es de la forma $y = Gf$.

Subdividiendo el intervalo de integración en $[a,s]$ y $[s,b]$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
Ly &= \langle Lg_s, f \rangle - f \\
&= \varphi_o(s)\langle \varphi_o, f \rangle - f \\
&= - f .
\end{aligned}
$$

Es fácil verificar que $y = Gf$ satisface también las condiciones de frontera (F) .

Además

$$\begin{aligned} \langle y, \varphi_o \rangle &= \langle Gf, \varphi_o \rangle \\ &= \langle f, G\varphi_o \rangle \qquad , \qquad \text{(G autoadjunto)} \\ &= \langle f, \langle g_s, \varphi_o \rangle \rangle \\ &= 0 \ . \qquad\qquad \text{(Por F.1.5.)} \end{aligned}$$

F.8. Teorema.

Si f es ortogonal a φ_o , entonces $y \in C^2[a,b]$ es solución del problema (S_o) - (F) , si y sólo si es de la forma $y = Gf + A\varphi_o$; donde A es una cierta constante.

Demostración:

1) Demostremos que toda función de la forma $y = Gf + A\varphi_o$ es solución del sistema (S_o) - (F) .

Sea $g = g_1$ cuando $t < s$, y

$g = g_2$ cuando $t > s$.

Entonces

$$y(t) = \int_a^t g_2(t,s)f(s)ds + \int_t^b g_1(t,s)f(s)ds + A\varphi_o(t)$$

$$y'(t) = \int_a^t \frac{\partial g_2(t,s)}{\partial t} f(s)ds + \int_t^b \frac{\partial g_1(t,s)}{\partial t} f(s)ds + A\varphi'_o(t)$$

$$y''(t) = \int_a^t \frac{\partial^2 g_2(t,s)}{\partial t^2} f(s)ds + \int_t^b \frac{\partial^2 g_1(t,s)}{\partial t^2} f(s)ds$$

$$- \frac{1}{p(t)} f(t) + A\varphi''_o(t) .$$

Luego

$$Ly(t) = \int_a^t L(g_2(t,s))f(s)ds + \int_t^b L(g_1(t,s))f(s)ds - f(t) ,$$

(Por F.1.3. y F.1.4.)

$$= \int_a^b \varphi_o(t)\varphi_o(s)f(s)ds - f(t)$$

$$= \varphi_o(t) \int_a^b \varphi_o(s)f(s)ds - f(t)$$

$$= -f(t) ,$$ (por F.1.1. y la restricción sobre f) .

2) Supongamos que $y \in C^{(2)}[a,b]$ es una solución cualquiera del problema (S_o) - (F) . Entonces y tiene la forma $y = Gf + A\varphi_o$; A cierta constante. La demostración de esto es totalmente análoga a lo hecho en teorema B.1.

Consideremos nuevamente el problema de frontera (S_1) - (F) , es decir

$$Ly = -\lambda y \quad \text{con condiciones de frontera} \quad (F) .$$

F.9. Proposición.

Toda función propia del problema de frontera (S_1) - (F) , distinta de φ_o , es decir, correspondiente a un valor propio distinto de cero, es ortogonal a φ_o .

Demostración:

Sea φ_1 función propia correspondiente al valor propio $\lambda_1 \neq 0$. Entonces

$$0 = \langle L\varphi_o, \varphi_1 \rangle$$

$$= \langle \varphi_o, L\varphi_1 \rangle \qquad \text{(L autoadjunto)}$$

$$= \langle \varphi_o, -\lambda_1 \varphi_1 \rangle$$

$$= -\lambda_1 \langle \varphi_o, \varphi_1 \rangle$$

Luego

$$\langle \varphi_o, \varphi_1 \rangle = 0$$

#

F.10. Corolario.

El problema de frontera (S_1) - (F) es equivalente a la ecuación integral

$$y = \lambda G y \qquad (1)$$

para todo λ valor propio distinto de cero.

Demostración:

Consecuencia directa de F.7. y F.9.

#

F.11. Observaciones.

1) En F.10. vimos que toda función $y \in C^2[a,b]$ que satisface las condiciones de frontera (F) y ortogonal a φ_o se puede escribir en términos de núcleo. Luego, esas funciones se pueden desarrollar en serie de Fourier absoluta y uniformemente convergente, en funciones propias de la ecuación F.10.1.

2) Las funciones consideradas en la parte (1) además de poder desarrollarse en serie de Fourier, son ortogonales a φ_o , luego el núcleo no es completo.

3) La continuidad de la segunda derivada se puede reemplazar por la continuidad a pedazos en el teorema de expansión antes mencionado.

C A P I T U L O I I

FUNCION DE GREEN PARA LA ECUACION DE LAPLACE. RELACION ENTRE EL PROBLEMA DE DIRICHLET, ECUACION INTEGRAL Y TRANSFORMACION CONFORME

A. La ecuación de Laplace y el problema de Dirichlet.

A.1. Introducción.

En esta sección estudiaremos algunos conceptos para determinar la solución de una ecuación del tipo

$$\mu_{xx} + \mu_{yy} = 0$$

ó

$$\mu_{xx} + \mu_{yy} + \mu_{zz} = 0$$

con ciertas condiciones de frontera apropiadas. Las ecuaciones anteriores son conocidas como <u>ecuaciones de Laplace</u>, en dos y tres variables respectivamente.

Los problemas de Dirichlet y Neumann que estudiaremos en las secciones siguientes son los problemas más famosos en ecuaciones diferenciales parciales, esto se debe a dos motivos principalmente:

1) La riqueza y abundancia en propiedades de sus solu - ciones.

2) Por la infinidad de aplicaciones conocidas, entre ellas tenemos: La teoría del potencial Newtoniano, potenciales electrostáticos, potenciales armónicos y bi-armónicos en electricidad, y en muchos otros campos de la Física Matemática.

Ahora nos preguntamos: ¿Qué tipo de funciones son buenos candidatos para ser soluciones de la ecuación de Laplace?

Veremos que, por lo menos, ciertas funciones llamadas "potenciales" satisfacen la ecuación de Laplace.

A.2. Los problemas de Dirichlet y de Neumann.

Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, denotemos por $\partial\Omega$ la frontera de Ω . Sea $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una función contínua conocida, entonces el <u>problema de Dirichlet</u> para la ecuación de Laplace consiste en lo siguiente:

Determinar una función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{en} \quad \Omega & (1) \\ u = f \quad \text{en} \quad \partial\Omega & (2) \end{cases}$$

con $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Aquí $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ es el operador de Laplace.

Cualquier función en $C^2(\Omega)$ que satisfaga la ecuación de Laplace se llama <u>función armónica en Ω</u>. $C^2(\Omega)$ denota el espacio de funciones contínuas que tienen derivadas contínuas hasta el 2° orden en Ω. $C(\overline{\Omega})$ es el espacio de funciones contínuas en Ω que pueden extenderse contínuamente hasta la frontera de Ω.

Además, diremos que $\partial\Omega \in C^2$ si puede cubrirse por un número finito de subconjuntos abiertos Ω_i de Ω, tal que $\Omega_i \cap \partial\Omega$ tienen una representación paramétrica en términos de funciones en C^2 para cada i.

La información que se dá sobre la frontera $\partial\Omega$ depende del problema físico considerado, por ejemplo, en Hidrodinámica cuando lo conocido es la derivada normal de la velocidad potencial. En este caso la condición A.2.2. debe reemplazarse por

$$\frac{\partial \mu}{\partial \gamma_x} = f \qquad \text{en } \partial\Omega ,$$

donde γ_x es la normal exterior en x.

Más precisamente, el <u>problema de Neumann</u> es el siguiente:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ una región acotada, cuya frontera $\partial\Omega$

es de la clase C^1 . Dada una función contínua $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, determinar una función u tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{en} \quad \Omega & (3) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \gamma} = f \quad \text{en} \quad \partial\Omega & (4) \end{cases}$$

$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

aquí $C^1(\overline{\Omega})$ es el espacio de las funciones de la clase C^1 en Ω tales que ellas y sus derivadas parciales de primer orden puedan extenderse contínuamente a la frontera de Ω .

Los problemas de Dirichlet y Neumann en general son difíciles de resolver. Se verá que las posibilidades de resolverlos dependen de la "geometría" de la región Ω . Mientras "peor" sea la frontera $\partial\Omega$, menores serán las posibilidades de resolver el problema.

El problema de Dirichlet tiene solución única, por ejemplo, si Ω es una bola abierta de $\mathbb{R}^n$, pero también haremos mención del ejemplo de Zaremba que muestra un abierto acotado del plano $\mathbb{R}^2$ en el cual el problema de Dirichlet no tiene solución.

A continuación enunciaremos un teorema (Principio del Máximo) que usaremos para demostrar otro teorema que garantiza la unicidad del problema (1) - (2) de Dirichlet.

A.3. Teorema. (Principio del Máximo). (Friedman [2]).

Sea u una función armónica en Ω, contínua en $\overline{\Omega}$, entonces

$$\underset{\overline{\Omega}}{\text{Máx}}\,|u| = \underset{\partial\Omega}{\text{Máx}}\,|u|$$

A.4. Teorema.

El problema de Dirichlet (1) - (2) tiene a lo más una solución en Ω.

Demostración:

Sean u_1 y u_2 dos soluciones del problema (1) - (2).

Sea $w = u_1 - u_2$, entonces esta función es armónica en Ω y contínua en $\overline{\Omega}$. Además $w \equiv 0$ sobre la frontera.

Luego, del Principio del Máximo tenemos:

$$\begin{aligned}\underset{\overline{\Omega}}{\text{Máx}}\,|w| &= \underset{\partial\Omega}{\text{Máx}}\,|w| \\ &= 0\end{aligned}$$

Luego $u_1 = u_2$ en toda la región.

#

A.5. Teorema.

Si $\partial\Omega$ está en C^2 , entonces para cualquier función contínua f definida sobre $\partial\Omega$ existe una solución del problema (1) - (2), de Dirichlet.

<u>Demostración</u>:

Hay varios métodos para probar este teorema, pero todos exigen largos desarrollos. Aquí usaremos el Corolario C.4., cuyo enunciado y demostración se encuentran en el Tercer Capítulo.

Por simplicidad tomaremos el caso $n = 3$.

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^3$, con frontera S en C^2 . Consideremos las siguientes funciones definidas en Ω :

$$V(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\sigma(y)}{|x - y|} \, ds_y \quad , \quad y$$

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial \gamma_y} \left(\frac{1}{|x - y|} \right) ds_y$$

Donde σ y μ son funciones contínuas definidas sobre S , llamadas <u>densidades</u> de V y W respectivamente.

γ_y y ds_y son la normal exterior y el elemento de área de S en el punto y , respectivamente.

Afirmación.

Si u es contínua, entonces

$$\lim_{x \to x_o} W(x) = - u(x_o) + W(x_o)$$

para todo x_o en S.

Demostraremos esta afirmación mediante tres lemas:

A.6. Lema.

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S u(y) \frac{\cos \varphi}{r^2} ds_y \, ,$$

donde $r = |x - y|$, $\varphi = \sphericalangle(\vec{r}, \gamma_y)$

Demostración:

Sean $x = (x_1, x_2, x_3)$

$y = (y_1, y_2, y_3)$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_y}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r}\right) \cos(\gamma, x_1) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{r}\right) \cos(\gamma, x_3)$$

$$= \frac{y_1 - x_1}{r^3} \cos(\gamma, x_1) + \ldots + \frac{y_3 - x_3}{r^3} \cos(\gamma, x_3)$$

tenemos

$$\cos \varphi = \cos(\vec{r}, \gamma)$$

$$= \frac{\vec{r} \cdot \gamma}{|\vec{r}| \, |\gamma|}$$

$$= \frac{y_1 - x_1}{r} \cos(\gamma, x_1) + \dots + \frac{y_3 - x_3}{r} \cos(\gamma, x_3)$$

de donde

$$r \cos\varphi = (y_1 - x_1)\cos(\gamma, x_1) + \dots + (y_3 - x_3)\cos(\gamma, x_3)$$

luego

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_y}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\cos\varphi}{r^2}$$

por lo tanto

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \mu(y) \frac{\cos\varphi}{r^2} ds_y$$

#

A.7. Lema.

$$\int_S \frac{\cos\varphi}{r^2} ds_y = \begin{cases} 4\pi \,, & x \text{ en el interior de } S \\ 0 \,, & x \text{ no pertenece a } S \\ 2\pi \,, & x \text{ está sobre } S \end{cases}$$

Demostración:

Sea $u(y) \equiv 1$, entonces

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\cos\varphi}{r^2} ds_y$$

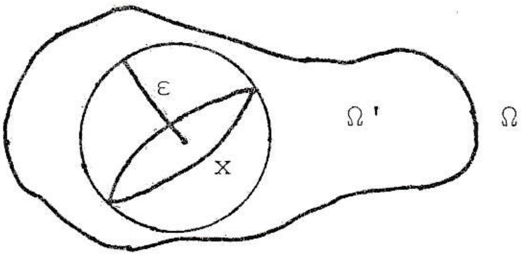
$$= - \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial \gamma_y}\left(\frac{1}{r}\right) ds_y$$

$= W_1(x)$. (El signo menos en la integral pues $\frac{\vec{r}\cdot}{r^2}$ tiene sentido contrario a ∇)

Supongamos que $x \notin S$, entonces la función $\frac{1}{r}$ es armónica en el interior de S , con derivadas contínuas de todos los ordenes (tantos como tenga S). Luego

$$\int_S \frac{\partial}{\partial\gamma_y} (\frac{1}{r}) ds_y = 0 .$$

Supongamos que x está en el interior de la región encerrada por S . Para evitar el punto singular x , excluyamos de Ω el volumen de una esfera de radio ε y centro x .



Sea Ω' el volumen resultante y Σ la frontera de la esfera.

En Ω' la función $\frac{1}{r}$ es armónica, luego

$$\int_S \frac{\partial}{\partial\gamma_y} (\frac{1}{r}) ds_y + \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial\gamma} (\frac{1}{r}) d\Sigma = 0$$

La normal exterior con respecto al dominio Ω' está dirigida al centro de la esfera, de donde

$$\left(\frac{\partial}{\partial \gamma}\ \frac{1}{r}\right)_{r=\varepsilon}$$

$$= \ -\left(\frac{\partial}{\partial r}\ \frac{1}{r}\right)_{r=\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}$$

implica

$$\int_S \frac{\partial}{\partial \gamma}\ (\frac{1}{r})\,ds_y \ + \ \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Sigma d\Sigma \ = \ 0$$

de donde

$$\int_S \frac{\partial}{\partial \gamma}\ (\frac{1}{r})\,ds_y \ + \ 4\pi \ = \ 0$$

es decir

$$W_1(x) \ = \ 2$$

Análogamente, si x está sobre S, resulta $W_1(x) = 1$

Así se ha establecido el resultado.

#

A.8. Lema.

W es "contínua" para una densidad contínua u cualquiera.

Demostración:

Caso 1: Sea x_o un punto fijo de S y sea

$$W_o(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S [u(y) - u(x_o)] \frac{\cos\varphi}{r^2} ds_y$$

Supongamos que $x \to x_o$

Sea $\varepsilon > 0$. Aislemos una parte de S , llamemosla τ , tal que contenga a x_o como punto interior y se cumpla

$$|u(y) - u(x_o)| \leq \frac{\varepsilon}{4C_o} \qquad \text{(con } y \text{ sobre } S)$$

donde $C_o > 0$ en $\mathbb{R}$.

Supongamos que S es tal que para cualquier posición que tenga x ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{|\cos\varphi|}{r^2} |ds_y| \leq C_o$$

Dividamos S en dos partes: τ y $S - \tau$.

Entonces

$$W(x_o) = W_o^{(1)}(x) + W_o^{(2)}(x) ,$$

donde

$$W_o^{(1)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\tau [u(y) - u(x_o)] \frac{\cos\varphi}{r^2} ds_y ,$$

$$W_o^{(2)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{S-\tau} [u(y) - u(x_o)] \frac{\cos\varphi}{r^2} ds_y .$$

De donde

$$|W_o^{(1)}(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\tau [u(y) - u(x_o)] \frac{|\cos\varphi|}{r^2} |ds_y|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4C_o} C_o = \frac{\varepsilon}{4}$$

Luego

$$W_o(x) - W_o(x_o) = W_o^{(1)}(x) - W_o^{(1)}(x_o) +$$

$$+ [W_o^{(2)}(x) - W_o^{(2)}(x_o)]$$

Entonces

$$|W_o(x) - W_o(x_o)| \leq |W_o^{(1)}(x) - W_o^{(1)}(x_o)| +$$

$$+ |W_o^{(2)}(x) - W_o^{(2)}(x_o)|$$

Como $W_o^{(2)}$ se integra sobre $S - \tau$ y el punto x_o está en el interior de τ, entonces $W_o^{(2)}$ es contínua en una vecindad de x_o, de donde

$|W_o^{(2)}(x) - W_o^{(2)}(x_o)| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo x suficientemente cercano a x_o. Por lo tanto W_o es contínua en x_o.

Entonces

$$W_o(x) = W(x) - \frac{1}{2\pi} \int_S u(x_o) \frac{\cos\varphi}{r} ds_y \qquad (1)$$

luego, como W_o es contínua sobre S, lo mismo es cierto para W.

Caso 2: Supongamos que $x \nearrow x_o$. (Es decir, un punto x del interior de S tiende a un punto x_o sobre S).

Entonces

$$W_o(x) \to W_o(x_o) = W(x_o) - u(x_o) .$$

Como

$$W_o(x) = W(x) - 2u(x_o) ,$$

tenemos

$$W(x) - 2u(x_o) \to W(x_o) - u(x_o) .$$

Luego

$$W(x) \to W_i(x_o) \qquad \text{cuando} \quad x \nearrow x_o$$

(Es decir, $W(x)$ tiene un límite $W_i(x_o)$ cuando $x \nearrow x_o$) .

Entonces

$$W_i(x_o) - 2u(x_o) = W(x_o) - u(x_o) ,$$

implica

$$W_i(x_o) = W(x_o) + u(x_o)$$

Caso 3: Supongamos que $x \searrow x_o$. (Es decir, un punto x del exterior de S tiende a un punto sobre S).

Entonces, por A.8.1.:

$$W_o(x) = W(x) .$$

Pero

$$W_o(x) \to W_o(x_o) = W(x_o) - u(x_o) .$$

Implica que $W(x)$ tiene un límite cuando $x \searrow x_o$, llamémoslo $W_e(x_o)$, de donde

$$W_e(x_o) = W(x_o) - u(x_o) .$$

#

Por lo tanto, de lemas A.6., A.7. y A.8., tenemos que

$$\lim_{x\to x_o} W(x) = \pm u(x_o) + W(x_o) \tag{2}$$

Luego, tomando en cuenta la fórmula A.8.2. y el hecho que $W(x_o)$ es contínua cuando x_o varía sobre S, podemos decir que la función W es contínua desde el interior hasta S y desde el exterior hasta S.

Con esto queda demostrado el lema A.8.

Por otra parte, la función W es armónica en Ω (pues la función $\frac{1}{r}$ lo es en S), entonces W es una solución del problema de Dirichlet (1) - (2), con $-f$ en lugar de f, si y sólo si

$$u(x_o) = f(x_o) + \int_S k(x_o,y)u(y)ds_y$$

donde

$$k(x_o,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\gamma_y}\left(\frac{1}{|x_o - y|}\right)$$

Por corolario (Tercer Capítulo) conclu**í**mos que si $\lambda = 1$ no es un valor propio del operador

$$K : u \to \int_S k(x,y)u(y)ds_y$$

entonces existe una única solución del problema de Di - richlet (1) - (2).

#

A.9. Observaciones.

1) El núcleo $k(x_o,y)$ no es simétrico pues la normal se toma en y , y $\vec{r}_o$ denota la dirección x_o a y .

2) Se demostrará que $\lambda = 1$ no es un valor propio del operador K (por ejemplo, utilizando las propiedades de la función V).

3) Análogamente, si la condición (2) se cambia por $\frac{\partial u}{\partial\gamma} = f$ en S , es decir el problema de Neumann, se llega a la ecuación integral

$$\sigma(x_o) = f(x_o) - \int_S k(y,x_o)\sigma(y)ds_y$$

En este caso $\lambda = -1$ es un valor propio de K^* .

Sin embargo, las únicas soluciones no triviales de la ecuación homogénea

$$\psi = K^{*}\psi$$

son las constantes.

Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que éste problema tenga solución es que

$$\int_{S} f ds = 0 .$$

Las demostraciones de las afirmaciones (2) y (3) se remiten al Apéndice del Capítulo II, debido a su extensión.

4) El núcleo K aparecido en esta ecuación integral es un ejemplo de los llamados de "singularidad débil" y en Capítulo III estudiamos las condiciones bajo las cuales se verifican los teoremas de Fredholm y Hilbert-Schmidt.

B. Función de Green para el operador de Laplace.

En esta sección presentaremos el concepto de Función de Green para el operador de Laplace.

La función de Green permitirá obtener una fórmula para la solución del problema de Dirichlet (1) - (2). Su definición depende de dos "soluciones especiales" de la ecuación de Laplace: la "solución singular" y la "solución fundamental".

Sea $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ fijo.

Denotemos por $r = r(x)$ la función

$$r^2 = r(x) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2 = |x - y|^2 .$$

Busquemos previamente soluciones de la forma $u(x) = v(r)$ de la ecuación

$$\Delta u = 0$$

se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{dv}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_j}$$

$$= \frac{dv}{dr} \left(\frac{x_j - y_j}{r} \right)$$

pues

$$r \frac{\partial r}{\partial x_j} = x_j - y_j \quad , \qquad r \neq 0$$

De donde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \frac{d^2 v}{dr^2} \left(\frac{x_j - y_j}{r^2} \right)^2 + \frac{dv}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{(x_j - y_j)^2}{r^3} \right)$$

Luego

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

$$= \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{dv}{dr} \left(\frac{n - 1}{r} \right)$$

Si u satisface $\Delta u = 0$, entonces

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{dv}{dr}\left(\frac{n-1}{r}\right) = 0 \ .$$

Esta ecuación tiene como solución

$$v(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 r^{2-n} \ , & \text{si } n > 2 \\ \\ c_1 + c_2 \ln r \ , & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

c_1 y c_2 son constantes.

Luego, motivados por la forma de estas soluciones, definiremos las funciones $k_n(x,y)$; $n = 2,3,4,\ldots$

$$k_n(x,y) = \begin{cases} -\ln|x-y| \ , & \text{si } n = 2 \\ \\ -|x-y|^{2-n} \ , & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

(Es decir, escogemos $c_1 = 0$ y $c_2 = -1$).

Las funciones $k_n(x,y)$; $n = 2,3,4,\ldots$ se llaman funciones singulares para la ecuación $\Delta u = 0$.

Notemos que si $x \neq y$, entonces $k_n(x,y) \in C^\infty$ y

$$\Delta k_n(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(k_n(x,y))$$

$$= 0$$

Sea $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $h \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ tal que $\Delta h = 0$, entonces definimos la función

$$F_h(x,y) = k_n(x,y) + h(y) , \quad \text{para } x \neq y.$$

La función F_h se llama una solución fundamental para el Laplaciano Δ en la región Ω .

B.1. Definición.

Diremos que una función $g(x,y)$ es una <u>función de Green</u> para el operador de Laplace si:

i) Para x fijo, $g(x,y)$ es una solución fundamental (con respecto a y) de $\Delta u = 0$.

ii) g es contínua en x , cuando

$x \in \bar{\Omega} - \{y\}$

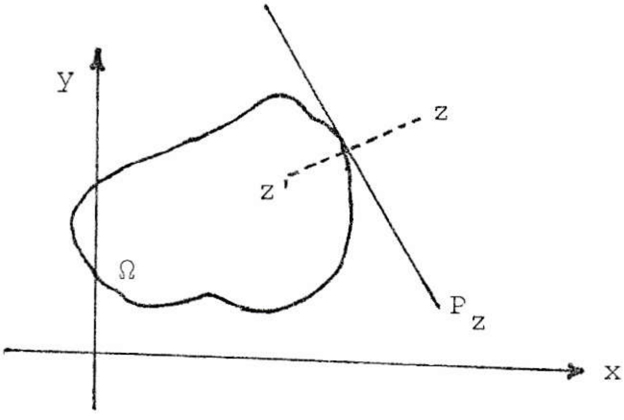
iii) Si $x \in \Omega$, $g(x,y) = 0$ para $y \in \partial\Omega$.

Construiremos la función de Green usando el teorema de Hahn-Banach. Se considerará el caso $n = 2$ que es más sencillo que el caso $n \geq 3$.

Supongamos que $\partial\Omega$ consiste de un número finito de curvas cerradas continuamente diferenciables, Entonces

(*) Para cualquier z "cerca" de $\partial\Omega$, denotemos por P_z el plano tangente a $\partial\Omega$ en el punto sobre $\partial\Omega$ más cercano a z . Sea z' la reflexión de z con respecto a P_z , de donde

$$\underset{x \in \partial\Omega}{\text{Máx}} \left|\frac{z - x}{z' - x}\right| \to 1 \quad \text{cuando} \quad z \to z_o \quad , \quad z_o \in \partial\Omega$$



B.2. Teorema.

Si $n = 2$ y $\partial\Omega \in C^1$, entonces la función de Green para el operador de Laplace en existe.

Demostración:

Sea X el espacio de Banach de todas las funciones contínuas sobre $\partial\Omega$, con norma del supremo, y X' el subespacio lineal formado por todas aquellas funciones f para las cuales el problema de Dirichlet (1) - (2) tiene solución.

Para cada $y \in \Omega$, consideremos la función lineal

$Ly : X' \to \mathbb{R}$

tal que

$Ly(f) = u_f(y)$,

donde u es la solución del problema (1) - (2) .

Además

$$\|Ly\| = \underset{\|f\|_\infty = 1}{\text{Máx}} \{|Ly(f)|\}$$

$$= \underset{\|f\|_\infty = 1}{\text{Máx}} \{|u_f(y)|\}$$

Sabemos que

$$\underset{\partial\Omega}{\text{Máx}}|u| = \text{Máx}|u|$$

$$= \underset{\partial\Omega}{\text{Máx}}|f|$$

$$= 1$$

Luego Ly es acotado y tiene norma 1 .

Por teorema de Hahn-Banach, Ly puede extenderse a una funcional lineal acotada sobre X , de norma 1 .

Denotémoslo de nuevo por Ly para cada $z \notin \partial\Omega$. Considerar la función $f_z \in X$ tal que $f_z(x) = \ln|x - z|$; $x \in \partial\Omega$, y definamos

$$k_y(z) = L_y(f_z)$$

k_y es una función armónica. En efecto, sea $z' = (z_1 + \delta , z_2)$. Entonces

$$\frac{k_y(z') - k_y(z)}{\delta} = Ly\left(\frac{f_{z'} - f_z}{\delta}\right)$$

$$\frac{f_{z'} - f_z}{\delta} \to \frac{\partial f_z}{\partial z_1} , \quad \text{si} \quad \delta \to 0 ,$$

donde $\dfrac{\partial f_z}{\partial z_1}$ es el elemento $\dfrac{\partial}{\partial z_1}(\ln|x - z|)$ de X .

Como Ly es un operador contínuo sobre X , entonces $\dfrac{\partial k_y(z)}{\partial z_1}$ existe y es igual a $Ly\left(\dfrac{\partial f_z}{\partial z_1}\right)$.

Análogamente se demuestra que k_y tiene un número arbitrario de derivadas y ellas son iguales al valor de Ly sobre las correspondientes derivadas de f_z .

En particular:

$$\begin{aligned} \Delta k_y(z) &= L_y(\Delta f_z) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Es decir, k_y es armónica fuera de $\partial\Omega$.

Como $\ln|x - z|$ es armónica en $x \in \Omega$ cuando $z \notin \overline{\Omega}$, tenemos

$$\begin{aligned} k_y(z) &= L_y(f_z) \\ &= \ln|y - z| , \quad \text{si} \quad z \notin \overline{\Omega} \qquad (1) \end{aligned}$$

Sea $z \in \Omega$, cerca de $\partial\Omega$ y z' su reflexión con respecto a P_z .

Entonces

$$\|f_z - f_{z'}\| = \underset{x\in\partial\Omega}{\text{Máx}} \; |f_z(x) - f_{z'}(x)|$$

$$= \underset{x\in\partial\Omega}{\text{Máx}} \; |\ln|x - z| - \ln|x - z'||$$

$$= \underset{x\in\partial\Omega}{\text{Máx}} \; \ln\left|\frac{z - x}{z' - x}\right| \xrightarrow{(*)} 0 \; ,$$

si $z \to z_o$, $z_o \in \partial\Omega$.

Luego

$$L_y(f_z - f_{z'}) \to 0$$

es decir

$$k_y(z) - k\ (z') \to 0 \qquad \text{si} \quad z \to z_o \; .$$

$z' \in \overline{\Omega}$ (por ser la reflexión de z con respecto al plano P_z).

Por B.2.1. tenemos que

$$k_y(z') = \ln|y - z'| \; ,$$

entonces

$$\lim_{z'\to z_o} k_y(z') = \ln|y - z_o|$$

Luego, $k_y(z)$ con $z \in \Omega$ puede extenderse a una función contínua $\hat{k}_y$ en , y

$$k_y(z) = \ln|y - z| \qquad \text{si} \quad z \in \partial\Omega \ .$$

La función $-\ln|x - y| + \hat{k}_y(x)$ satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) de la definición de la función de Green para el operador de Laplace en

#

Las siguientes propiedades de la función de Green se demuestran fácilmente utilizando su definición y la identidad de Green del cálculo potencial (Friedman [2]):

a) Si existe, es única

b) Es no negativa

c) Es simétrica

Además, la función de Green se puede usar para representar la solución del problema de Dirichlet (1) - (2) mediante una ecuación integral que involucra los valores de frontera. Esta última afirmación se demuestra mediante el siguiente teorema:

B.3. Teorema.

Sea u solución del problema de Dirichlet (1) - (2) tal que sus derivadas de primer y segundo orden son uniformemente contínuas en Ω . Entonces, para cualquier $y \in \Omega$:

$$u(y) = -c \int_{\partial\Omega} f(x) \frac{\partial g(x,y)}{\partial \gamma_x} ds_x ;$$

donde g es la función de Green del operador de Laplace en Ω (suponiendo que existe y sea dos veces diferenciable en $x \in \overline{\Omega} - \{y\}$, c es una contante que depende sólo de n).

Demostración:

Caso 1: Sea $n > 2$.

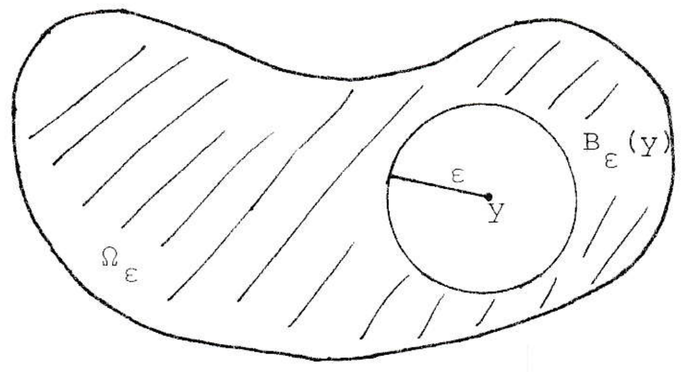
A partir de la segunda identidad de Green (del cálculo potencial) que dice:

$$\int_{\Omega} [f_1 \Delta f_2 - f_2 \Delta f_1] \, dx = \int_{\partial\Omega} \left[f_1 \frac{\partial f_2}{\partial \gamma_x} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial \gamma_x} \right] d\sigma_x ; \quad (1)$$

donde f_1 y f_2 junto con sus derivadas parciales de primer y segundo grado son uniformemente contínuas en Ω .

Sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que la bola cerrada $B_\varepsilon(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |n - y| \leq \varepsilon\}$ está contenida en Ω . Como la función de Green g es singular en $x = y$ (pues k_n lo es en ese punto), consideremos la región

$$\Omega_\varepsilon = \Omega - B_\varepsilon(y)$$



Aplicando la identidad B.3.1. a la región Ω_ε (con $g = f_1$, $u = f_2$) tenemos:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} [g\Delta u - u\Delta g]\,dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left[g \frac{\partial u}{\partial \gamma_x} - u \frac{\partial g}{\partial \gamma_x}\right] ds_x - \int_{|x-y|=\varepsilon} \left[g \frac{\partial u}{\partial \gamma_x} - u \frac{\partial g}{\partial \gamma_x}\right] ds_x$$

Reemplazando g por $k_n + h$ en la última integral, obtenemos

$$0 = \int_{\Omega_\varepsilon} [g\Delta u - u\Delta g]\,dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left[g \frac{\partial u}{\partial \gamma_x} - u \frac{\partial g}{\partial \gamma_x}\right] ds_x - \int_{|x-y|=\varepsilon} \left[k_n \frac{\partial u}{\partial \gamma_x} - u \frac{\partial k_n}{\partial \gamma_x}\right] ds_x$$

$$- \int_{|x-y|=\varepsilon} \left[h \frac{\partial u}{\partial \gamma_x} - u \frac{\partial h}{\partial \gamma_x}\right] ds_x$$

(*)

como en (*) el integrado es una función contínua en $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x - y| \leq \varepsilon\}$, entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-y|=\varepsilon} h \frac{\partial u}{\partial \gamma_x} - u \frac{\partial h}{\partial \gamma_x}\, ds_x = 0$$

Ahora por demostrar que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-y|=\varepsilon} \left[k_n \frac{\partial u}{\partial \gamma_x} - u \frac{\partial k_n}{\partial \gamma_x}\right] ds_x = cu(y) \; ,$$

donde c es una constante dependiente solo de n .
En efecto, como

$$k_n(x,y) = |x - y|^{2n} , \quad n > 2$$

entonces

$$\int_{|x-y|=\varepsilon} k_n \frac{\partial u}{\partial \gamma_x} \, ds_x = \varepsilon^{2-n} \int_{|x-y|=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \gamma_x}(x) \, ds_x$$

sea $x = y + \varepsilon z$, entonces $ds_x = \varepsilon^{n-1} ds_z$, luego

$$\int_{|x-y|=\varepsilon} k_n \frac{\partial u}{\partial \gamma_x} \, ds_x = \varepsilon \int_{|z|=1} \frac{\partial u}{\partial \gamma_x} (y + \varepsilon z) \, ds_z \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

(pues $u \in C^2(\Omega)$).

Por otro lado, como $\gamma_x = \dfrac{x - y}{|x - y|}$ y

$$k_n(x,y) = |x - y|^{2-n} ,$$

entonces

$$\frac{\partial k_n}{\partial \gamma_x} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial k_n}{\partial x_j}\right) \left(\frac{x_j - y_j}{|x - y|}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (2 - n) \left(\frac{x_j - y_j}{|x - y|^n}\right) \left(\frac{x_j - y_j}{|x - y|}\right)$$

$$= \frac{2 - n}{|x - y|^{n+1}} \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2$$

$$= (2 - n) \, |x - y|^{1-n}$$

De donde

$$\int_{|x-y|=\varepsilon} u \frac{\partial k_n}{\partial \gamma_x} ds_x$$

$$= (n - 2)\cdot\varepsilon^{1-n} \int_{|x-y|=\varepsilon} u \, ds_x$$

$$= (n - 2) \int_{|z|= 1} u(y + \varepsilon z) ds_x \ ,$$

y esta última integral converge a $(n - 2)Sn\ u(y)$ cuando $\varepsilon \to 0$, donde

$$Sn = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$ y Γ es la función gamma.

Luego

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-y|=\varepsilon} k_n \frac{\partial u}{\partial \gamma_x} - u \frac{\partial k_n}{\partial \gamma_x} ds_x$$

$$= - (n - 2) \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} u(y)$$

$$= -c_1(n)\ u(y) \quad , \quad \text{con} \quad c_1(n) = (n - 2)\cdot\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Por último, tenemos que

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left[g \frac{\partial u}{\partial \gamma_x} - u \frac{\partial g}{\partial \gamma_x}\right] ds_x - c_1(n) u(y) \ ,$$

cuando $\varepsilon \to 0$.

Entonces

$$u(y) = \frac{1}{c_1(n)} \int_{\partial\Omega} \left[g \frac{\partial u}{\partial \gamma_x} - u \frac{\partial g}{\partial \gamma_x} \right] ds_x$$

$$= -c(n) \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial g}{\partial \gamma_u} ds_x$$

con

$$c(n) = \frac{1}{c_1(n)}$$

Caso 2: El caso $n = 2$ es totalmente análogo, y se obtiene

$$u(y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial g}{\partial \gamma_x} ds_x$$

$$= -c(2) \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial g}{\partial \gamma_x} ds_x$$

#

Por lo tanto, si conocemos la función u en la frontera $\partial\Omega$, la expresión

$$u(y) = -c \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial g}{\partial \gamma_x} ds_x$$

sería un buen candidato para ser solución del problema de Dirichlet (1) - (2) . Todo lo anterior si conocemos $g(x,y)$. Para dominios y dimensiones arbitrarias esto puede ser, en general, bastante difícil.

B.4. Ejemplo.

Busquemos la expresión de una función de Green cuando Ω es la bola

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| < r\} = B_r(0) .$$

Sea $n > 2$. Fijemos $x \in \Omega$, $0 < |x| < r$. Sea $k_n(x,y)$ la función singular definida anteriormente y determinemos números reales a y b tal que la función $g(x,y) = k_n(x,y) - a|y - bx|^{2-n}$, con $bx \neq y$, sea una función de Green.

Tenemos que

$$\Delta(a|y - bx|^{2-n}) = 0 \qquad \text{si } bx \neq y$$

como deseamos también que

$$g(x,y) = 0 \qquad \text{para } |y| = r$$

debemos tener:

$$k_n(x,y) = a|y - bx|^{2-n} ; \qquad (\text{para } |y| = r) .$$

Luego, de la definición de $k_n(x,y)$

$$\frac{1}{a} |x - y|^{2-n} = |y - bx|^{2-n} ; \quad (\text{para } |y| = r) .$$

Es decir

$$|bx - y|^2 = a^{\frac{2}{n-2}} |x - y|^2 \quad ; \quad (\text{para } |y| = r) ,$$

de donde

$$b^2|x|^2 - 2b(x\cdot y) + r^2 = a^{\frac{2}{n-2}}(|x|^2 - 2(x\cdot y) + r^2)$$

Luego

$$(1 - a^{\frac{2}{n-2}})r^2 = (a^{\frac{2}{n-2}} - b^2)|x|^2 + 2(b - a^{\frac{2}{n-2}}))x\cdot y$$

Eligiendo $b = a^{\frac{a}{n-2}}$ en la identidad anterior, obtenemos:

$$(1 - b)r^2 = b(1 - b)|x|^2$$

Entonces

$$b = 1 \quad ó \quad b = \frac{r^2}{|r|^2}$$

Notemos que $b = 1$ no satisface la condición $bx \neq y$ pues $0 < |x| < r$ y $|y| = r$.

Así, tomando $b = \frac{r^2}{|r|^2}$ obtenemos

$$a = \left(\frac{r}{|x|}\right)^{n-2} .$$

Finalmente, de la elección de a y b tenemos que

$$g(x,y) = |x - y|^{2-n} - \left(\frac{r}{|x|}\right)^{n-2}\cdot\left|y - \frac{r^2}{|x|^2}x\right|^{2-n}$$

para $x \neq 0$ y $n > 2$.

Si tomamos $a = 1$, se sigue que

$$g(0,y) = |y|^{2-n} - r^{2-n}$$

claramente la función $g(x,y)$ es la función de Green para el Laplaciano cuando $n > 2$.

Para el caso $n = 2$ puede demostrarse en forma análoga que si

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < r\} ,$$

entonces

$$g(x,y) = \ln|x - y| + \ln \frac{r}{|x|} - \ln\left| \frac{r^2}{|x|^2} x - y\right| ;$$

si $x \neq 0$. Y

$$g(0,y) = \ln|y| - \ln r .$$

Ahora, para usar la representación del teorema B.3. debemos calcular $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial \gamma_y}$ con $x \in \Omega$ fijo e y variando en $\partial\Omega$ pero

$$\frac{\partial}{\partial y_j} g(x,y) = \frac{|x|^2 - r^2}{|x - y|^n} \cdot \frac{y_j}{r^2} , \quad (|y| = r)$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_y} g(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \gamma_j} g(x,y) y_x^j$$

$$= \frac{|x|^2 - r^2}{r|x - y|^n}$$

Por lo tanto

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{r} \int_{|y|=r} \frac{u(y)}{|x - y|^n} ds_y$$

#

El problema de Dirichlet sobre una región plana.

En las tres secciones siguientes, expondremos métodos de solución del problema de Dirichlet que se relacionan con la teoría de ecuaciones integrales.

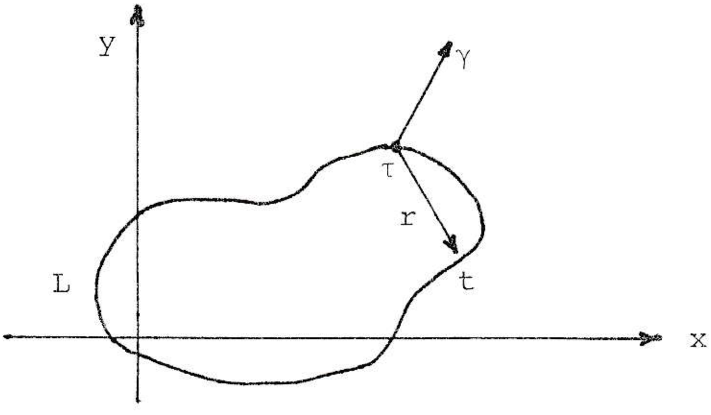
Damos importancia especial al problema de Dirichlet en el caso bidimensional, pues tiene gran cantidad de aplicaciones y los métodos de solución son muy efectivos.

Proposición.

El problema de Dirichlet (1) - (2) para una región plana y acotada por un contorno L, se reduce a una ecuación integral de la forma

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\cos(\gamma, r)}{r} u(\tau) d\sigma = f(t) \; ; \qquad (1)$$

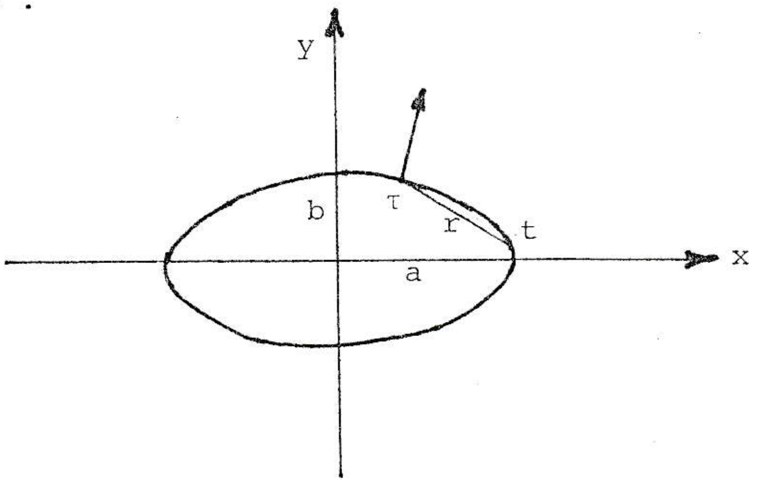
donde t y τ son valores de un parámetro que determinan la posición de un punto sobre la curva L; r es la distancia entre los puntos correspondientes a esos valores, γ es la normal exterior a L en el punto τ, $d\sigma$ es el elemento de longitud de arco de L, u es la función incógnita y f es una función dada.



Nota: Más adelante demostraremos que esta ecuación integral tiene solución única para cada f .

C. Solución exacta de un problema de Dirichlet (1) - (2).

Resolvamos la ecuación integral (1) en el caso práctico en que el contorno es una elipse con semiejes a y b .



Sus ecuaciones paramétricas son

$$x = a\cos\tau$$

$$y = b\,\mathrm{sen}\,\tau \quad ; \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi$$

$$r^2 = a^2(\cos t - \cos\tau)^2 + b^2(\mathrm{sen}\,t - \mathrm{sen}\,\tau)^2$$

$$= 4a^2\mathrm{sen}^2\frac{t-\tau}{2}\left(1 - \varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}\right) \;;$$

donde $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ es la excentricidad de la elipse.

$$\cos(\gamma, r)d\sigma = [\cos(\gamma,x)\cos(r,x) + \cos(\gamma,y)\cos(r,y)]d\sigma$$

$$= \frac{1}{r}[a(\cos t - \cos\tau)dy - b(\mathrm{sen}\,t - \mathrm{sen}\,\tau)]dx$$

$$= \frac{ab}{r}\,[\cos\tau(\cos t - \cos\tau) + \operatorname{sen}\tau(\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}\tau)]\,d\tau$$

$$= -\,\frac{2ab}{r}\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{t-\tau}{2}\right)d\tau\ .$$

De donde

$$\frac{\cos(\gamma,r)}{r}\,d\sigma = -\,\frac{2ab}{r^2}\,\operatorname{sen}^2\frac{t-\tau}{2}\,d\tau$$

$$= -\,\frac{b}{2a}\,\frac{d\tau}{1-\varepsilon^2\cos^2\left(\frac{t+\tau}{2}\right)}$$

$$= -\,\frac{b}{2a}\,[1 + \varepsilon^2\cos^2\left(\frac{t+\tau}{2}\right) + \varepsilon^4\cos^4\left(\frac{t+\tau}{2}\right) +$$

para ello desarrollaremos la función $\frac{1}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}$ en una serie de Fourier, como es una función par, entonces

$$\frac{1}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\cos 2k\theta\ ,$$

pero

$$\cos 2k\theta = \frac{e^{2k\theta i} + e^{-2k\theta i}}{2}$$

luego

$$\frac{1}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta} = a_o + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{ak}{2}\,e^{2k\theta i} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{ak}{2}\,e^{-2k\theta i}\ ,$$

donde

$$a_o = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

$$\frac{ak}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{2k\theta i}}{1 - \varepsilon^2 \cos^2\theta}\, d\theta \quad ; \qquad k \geq 1$$

Haciendo $z = e^{i\theta}$, tenemos

$$\frac{ak}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{4z^{2k+1} dz}{4z^2 - \varepsilon^2 (z^2 + 1)^2}$$

donde Γ es el círculo unitario $|z| = 1$. Este círculo contiene dos polos del integrando, a saber

$$z_1 = \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

$$z_2 = -z_1 = -\frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

Los resíduos en los polos z_1 y z_2 son iguales y valen

$$\frac{\varepsilon^{2k}}{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}\,(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})^{2k}}$$

Luego

$$a_k = \frac{2\varepsilon^{2k}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}\,(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})^{2k}} \quad ; \qquad k \geq 1$$

De donde

$$\frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)^{2k} \cos 2k\theta \right.$$

Ahora

$$\frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{t + \tau}{2}}$$

$$= \frac{a}{b}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}(\cos kt \cos k\tau - \operatorname{sen} kt \quad \operatorname{sen} k\tau)\right] ;$$

donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ es la mitad de la distancia focal de la elipse, y nuestra ecuación integral se transforma en

$$u(t) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}\cos kt\int_0^{2\pi} u(\tau)\cos k\tau\,d\tau$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}\operatorname{sen} kt\int_0^{2\pi} u(\tau)\operatorname{sen} k\tau\,d\tau = f(t)$$

Si hacemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\tau)\,d\tau = A_o \ , \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\tau)\cos k\tau\,d\tau = A_k \ ,$$

y

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\tau)\operatorname{sen} k\tau\,d\tau = B_k \ .$$

Entonces la ecuación integral se transforma en

$$U(t) = f(t) - A_o - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}(A_k \cos kt - B_k \operatorname{sen} kt)$$

Luego

$$A_o = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau) - A_o - \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2j}(A_j \cos\tau - B_j \operatorname{sen}\tau)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} A_o d\tau$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{c}{a+b}\right)^{2j} \int_0^{2\pi} A_j \cos j\tau d\tau$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{c}{a+b}\right)^{2j} \int_0^{2\pi} B_j \operatorname{sen} j\tau d\tau$$

$$= F_o - A_o - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{c}{a+b}\right)^{2j} A_j \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos j\tau d\tau}_{=\,0}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{c}{a+b}\right)^{2j} B_j \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} j\tau d\tau}_{=\,0}$$

De ahí obtenemos

$$A_o = F_o - A_o ,$$

es decir

$$A_o = \frac{1}{2} F_o ,$$

donde

$$F_o = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\tau) \cos k\tau d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(\tau) - A_o - \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2j}(Aj\cos j\tau - Bj\,\mathrm{sen}\,j\tau)\right]\cos k\tau d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos k\tau d\tau - \frac{A_o}{\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos k\tau d\tau}_{=0}$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2j} Aj\int_0^{2\pi}\cos j\tau\cdot\cos k\tau d\tau$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2j} \underbrace{Bj\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,j\tau\cdot\cos k\tau d\tau}_{=0}$$

$$= F_k - \frac{1}{\pi}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}\cdot A_k\int_0^{2\pi}\cos^2 k\tau d\tau$$

$$= F_k - \left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}\cdot A_k$$

De donde

$$A_k = \frac{(a+b)^k}{(a+b)^k + (a-b)^k}F_k$$

análogamente

$$B_k = \frac{(a+b)^k}{(a+b)^k - (a-b)^k}F'_k \quad ; \quad k \geq 1$$

Donde F_o , F_k y F'_k denotan los coeficientes de Fourier de la función f con respecto al sistema ortonormal $\{\cos k\tau , \mathrm{sen}\, k\tau\}$. O sea

$$F_o = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau$$

$$F_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\ \cos k\tau d\tau$$

$$F'_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\ \text{sen}\ k\tau d\tau$$

En el caso del círculo (elipse degenerada, es decir $a = b$) tenemos

$$c^2 = a^2 - b^2 = 0$$

por lo tanto la solución tiene la forma

$$\begin{aligned} u(t) &= f(t) - A_o \\ &= f(t) - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau\ . \end{aligned}$$

D. Solución del problema de Dirichlet (1) - (2) sobre una región plana simplemente conexa.

Sea D un dominio finito, con frontera L. Esta frontera la supondremos suave y con curvatura contínua. Entonces la función armónica buscada puede tomarse como la parte real de una cierta función analítica φ, que es regular en D.

D.1. Observación.

Diremos que una función de variable compleja es <u>analítica</u> en un dominio si es holomorfa en todo punto del dominio, con la posible excepción de un número finito de puntos o líneas, y, que una función analítica es regular en un dominio si es univaluada y no tiene puntos singulares en el interior del dominio.

Luego nuestro problema queda resuelto al conocer la función φ . La buscaremos en la forma de una integral de Cauchy, es decir

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{u(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

La densidad la supondremos real valorada.

Por lo tanto, nuestro problema se reduce a determinar la función u , para lo cual haremos uso del siguiente teorema de la teoría de funciones de variable compleja.

D.2. Teorema (Mikhlin [1]).

Sea L contorno suave y $\varphi \in Lip_\alpha(L)$ $(f \in Lip_\alpha(A)$ si $|f(z) - f(z')| \leq k|z - z'|^\alpha$; con $z, z' \in A)$ con $0 < \alpha \leq 1$.

Si $z \to t$ desde el exterior (e) o interior (i) de L , entonces la integral de Cauchy

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

tiende al límite

$$F_i(t) = \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad ;$$

$$F_e(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\xi)}{\xi - t}\,d\xi$$

según el caso, donde las últimas integrales son singulares.

Supongamos que $z \nearrow t$, $t \in L$ (es decir, desde el interior de D hasta L).

Si u es real, entonces para

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{u(\xi)}{\xi - z}\,d\xi \quad , \text{ con } \operatorname{Re}\varphi = u$$

tenemos

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{u(\xi)}{\xi - t}\,d\xi \ .$$

De donde

$$\operatorname{Re}\varphi(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\left(\int_L \frac{u(\xi)}{\xi - t}\,d\xi\right)$$

implica

$$u(t) + \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left(\int_L \frac{u(\xi)}{\xi - t}\,d\xi\right) = 2u \ .$$

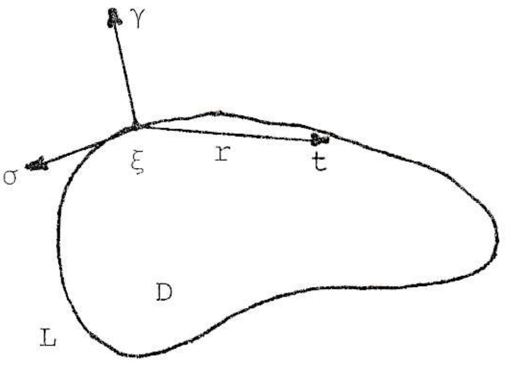
Sea $\xi - t = re^{i\theta}$, entonces

$$\operatorname{Im}\left(\frac{d}{\xi - t}\right) = \operatorname{Im}[d(\log(\xi - t))]$$

$$= d\theta$$

$$= \frac{\partial\theta}{\partial\sigma}\,d\sigma \ ,$$

donde $d\sigma$ es el elemento de arco del contorno.



Por ecuaciones de Cauchy-Riemann (en coordenadas polares), tenemos

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma}\,(\ln r) \ ,$$

donde γ es la normal exterior a L .

Si r está dirigida de ξ a t , entonces

$$\frac{\partial r}{\partial \gamma} = -(\cos(r,\gamma))$$

Luego

$$\operatorname{Im}\left(\frac{d\xi}{\xi - t}\right) = -\,\frac{\cos(r,\gamma)}{r}\,d\sigma \ .$$

Si $r \to 0$, entonces $\cos(r,\gamma) \to 0$, y por la continuidad de la curvatura de la frontera L , el núcleo $\frac{\cos(r,\gamma)}{r}$ es contínuo.

Luego, u satisface la ecuación integral de segunda especie

$$u(t) - \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\cos(r,\gamma)}{r}\, u(\xi)\, d\sigma_\xi = 2u(t) \tag{1}$$

D.3. Proposición.

El número $\lambda = \frac{1}{\pi}$ no es un valor propio del núcleo $\frac{\cos(r,\gamma)}{r}$.

En efecto, basta demostrar que la ecuación homogénea de D.2.1. tiene sólo la solución trivial. (Por alternativa de Fredholm)

Sea u_o una solución cualquiera de la ecuación homogénea de D.2.1., es decir

$$u_o(t) - \frac{1}{\pi}\int_L u_o(\xi)\, \frac{\cos(r,\gamma)}{r}\, d\sigma = 0$$

Sea

$$\varphi_o(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{u_o(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \ ,$$

con z en el interior de D .

Luego, si $u \equiv 0$ sobre L , $\operatorname{Re}\{\varphi_o(t)\} = 0$ para $t \in L$.

Entonces, por unicidad de la solución del problema de Dirichlet (teorema A.4.), tenemos

$$\operatorname{Re}\{\varphi_o(z)\} = 0$$

en todo D .

Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos que

$$\varphi_o(z) = ia \;, \qquad\qquad a \text{ constante}$$

Luego

$$ia = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{u_o(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

implica

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{u_o(\xi) - ia}{\xi - ia}\, d\xi \equiv 0 \;,$$

para todo z en el interior de D.

Entonces por un teorema de Cauchy sobre integrales, $u_o - ia$ es el valor límite sobre L de una cierta función ψ que es regular fuera de L e igual a cero en el infinito. Además

$$\operatorname{Im} \psi(t) = -a \;, \qquad\qquad \text{para } t \in L \,.$$

Entonces ψ es una función constante y como vale cero en el infinito, implica que $\psi \equiv 0$. Como

$$\operatorname{Re} \psi(t) = u_o(t)$$

sobre L, entonces

$$u_o \equiv 0 \,.$$

Por lo tanto la ecuación homogénea anterior tiene sólo la solución trivial.

#

D.4. Observación.

Por la Prop. D.3., sabemos entonces que la ecuación integral

$$u(t) - \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\cos(r,\gamma)}{r}\, u(\xi)\, d\sigma_\xi = f(t)$$

tiene solución única cualquiera sea la función f en esta región. Por lo tanto, podemos resolverla por el método exacto (por ejemplo).

E. Solución del problema de Dirichlet mediante transformaciones conformes.

E.1. Proposición.

Resolver el problema de Dirichlet (1) - (2) es equivalente a encontrar una transformación conforme de la región simplemente conexa dada en una región sobre la cual se conoce la solución o es fácil encontrarla.

Demostración:

Si conocemos la transformación conforme, entonces resolvemos el problema de Dirichlet (1) - (2) "transformado" y finalmente llevamos la solución obtenida a las coordenadas originales utilizando la inversa de la transformación conforme.

Inversamente, supongamos que conocemos la solución del problema de Dirichlet (1) - (2) en una región plana D simplemente conexa.

Entonces se puede deducir la función que efectúa la transformación conforme de D sobre el círculo (por ejemplo).

En efecto, sea $w : D \to C$ una transformación conforme tal que $w(a) = 0$, con $a \in D$ fijo y $C : |w| < 1$. Entonces $w(z) = (z - a)\psi(z)$, para todo $z \in D$. Donde es regular y distinta de cero en D.

Luego $\psi(z) = \log \psi(z)$ también es regular en D.

Encontremos las condiciones que determinan la función φ :

Si $z \in L$, digamos $z = t \in L$.

Entonces

$$|w| = |t - a| \cdot |\psi(t)| = 1$$

De donde

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \varphi(t) &= \ln |\psi(t)| \\ &= \ln|t - a| \end{aligned}$$

Por lo tanto, para determinar φ basta resolver el problema de Dirichlet:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{en } D \\ u = f & \text{en } L \end{array}\right|$$

Donde $f(t) = -\ln|t - a|$, $t \in L$. Pues, por sección D, la solución del problema de Dirichlet (1) - (2) se puede tomar en la forma

$$u = \operatorname{Re} \varphi ,$$

con φ regular en D y con la forma

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{u(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

#

E.2. Observación.

De lo hecho en las secciones (C), (D) y (E) se deduce que es válido el siguiente diagrama (por lo menos para regiones planas simplemente conexas):

$$\begin{array}{ccc} \text{Ecuación Integral} & \xleftrightarrow{(1)} & \text{Problema de Dirichlet} \\ & & \Big\updownarrow (2) \\ & & \text{Transformación conforme} \end{array}$$

Es decir, (1) significa que resolver el problema de Dirichlet es equivalente a resolver la ecuación integral, (2) significa que resolver el problema de Dirichlet es equivalente a encontrar una transformación conforme ,

F. El ejemplo de Zaremba.

En esta sección mostraremos un ejemplo de una región Ω del plano, donde el problema de Dirichlet no tiene solución.

Previamente recordemos que si $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ entonces una función $\tilde{u} : \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una <u>extensión</u> de u si

a) $\Omega \subseteq \Omega_1$ y

b) $\tilde{u} = u$ en Ω .

F.1. Lema.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ una región de $\mathbb{R}^2$ y $(x_o, y_o) \in \Omega$. Consideremos una función $u : \Omega - \{(x_o, y_o)\} \to \mathbb{R}$ armónica y acotada en $\Omega - \{(x_o, y_o)\}$.

Entonces existe una extensión $\tilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ de u tal que es armónica en Ω .

<u>Nota</u>: El lema F.1. no se aplica, por ejemplo, a la función

$$u : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}\,,$$

$$(x,y) \longrightarrow \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

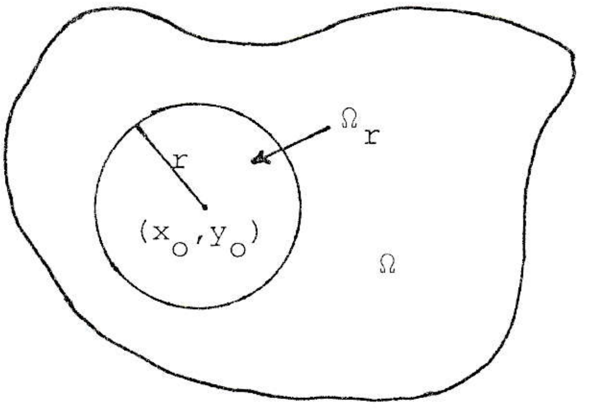
pues u no es acotada en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

<u>Demostración</u>: (del lema)

Sea $r > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$\Omega_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 \leq r^2\}$$

esté contenido en Ω .



Notemos que la restricción de u al subconjunto

$$\partial\Omega_r = \{(x,y) \in \Omega \mid (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2\}$$

es una función contínua. Así, como $\partial\Omega_r \in C^2$, por teorema A.5., deducimos que existe una solución $v = v(x,y)$ del problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{en} \quad \Omega_r \\ v = u & \text{en} \quad \partial\Omega_r \\ v \quad C^2(\Omega_r) \cap C(\overline{\Omega}_r) . \end{cases}$$

En particular v es acotada en $\overline{\Omega}_r$ (por ser contínua).

Definamos la función $w = u - v$ en $\overline{\Omega}_r - \{(x_o, y_o)\}$ y notemos que

a) $w = w(x,y)$ es acotada

b) $\Delta w = w_{xx} + w_{yy} = 0$ en $\Omega_r - \{(x_o, y_o)\}$

c) $w(x,y) = 0$ en $\partial\Omega_r$

lo cual es claro, basado en las consideraciones anteriores.

Sea

$$M = \sup\{|w(x,y)|\} \qquad (x,y) \in \overline{\Omega}_r - \{(x_o,y_o)\}$$

Por demostrar que $M = 0$, es decir, $w(x,y) \equiv 0$ en $\overline{\Omega}_r - \{(x_o,y_o)\}$; luego $u = v$ en $\overline{\Omega}_r - \{(x_o,y_o)\}$ y así v será una extensión de u a $\overline{\Omega}_r$, además de ser armónica.

Sea $0 < \varepsilon < r$ y denotemos por

$$\Omega_r^\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ \varepsilon \le \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} \le r\}$$

Definamos ahora

$$h_\varepsilon(x,y) = \frac{M}{2\ln\frac{\varepsilon}{r}} \ln\left[\frac{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}{r^2}\right] \qquad (1)$$

para $(x,y) \in \Omega_r^\varepsilon$.

Entonces tenemos que

d) $h_\varepsilon(x,y) = 0$ si $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$

e) $h_\varepsilon(x,y) = M$ si $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = \varepsilon^2$

f) $h_\varepsilon(x,y)$ es armónica en

$$\{(x,y) | \ \varepsilon < \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} < r\} .$$

En efecto, los items (d) y (e) son inmediatos por la definición de h_ε . Para el item (f) tenemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} h_\varepsilon = \frac{Mr^2 \,[\,(y - y_o)^2 - (x - x_o)^2]}{\ln(\frac{\varepsilon}{r})\ [\,(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2]^2}$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} h_\varepsilon = \frac{Mr^2 \,[\,(x - x_o)^2 - (y - y_o)^2]}{\ln(\frac{\varepsilon}{r})\ [\,(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2]^2}$$

Luego

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} h_\varepsilon + \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_\varepsilon = 0$$

Notemos que si $(x,y) \in \partial\Omega_r^\varepsilon$, entonces $w(x,y) < h_\varepsilon(x,y)$. Por otro lado, de teorema A.3., tenemos que $w(x,y) \leq h_\varepsilon(x,y)$ para todo $(x,y) \in \Omega_r^\varepsilon$.

Sea $(x,y) \in \Omega_r - \{(x_o,y_o)\}$ y $\delta > 0$ tal que $\delta < \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}$; entonces para todo $\varepsilon < \delta$ tenemos que

$$(x,y) \in \Omega_r^\varepsilon \qquad y \qquad w(x,y) \leq h_\varepsilon(x,y) \tag{2}$$

Notemos que para cada $(x,y) \in \Omega_r^\varepsilon$ fijo se tiene que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(x,y) = 0 \qquad\qquad \text{(por F.1.)}$$

Luego $w(x,y) \leq 0$ para todo $(x,y) \in \Omega_r - \{(x_o,y_o)\}$.
Análogamente, si definimos la función

$$H_\varepsilon(x,y) = -h_\varepsilon(x,y) \qquad \text{en } \Omega_r^\varepsilon ,$$

tendremos

g) $H_\varepsilon(x,y) = 0$ si $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$

h) $H_\varepsilon(x,y) = -M$ si $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = \varepsilon^2$

i) $H_\varepsilon(x,y)$ es armónica en

$$\{(x,y) \mid \varepsilon < \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} < r\}$$

Como

$$w(x,y) \geq H_\varepsilon(x,y)$$

para $(x,y) \in \Omega_r^\varepsilon$, seguimos que $w(x,y) \geq H_\varepsilon(x,y)$, para todo $(x,y) \in \Omega_r^\varepsilon$ o sea,

$$w(x,y) \geq \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon(x,y) = 0$$

Luego

$$w \equiv 0 \qquad \text{en } \Omega_r .$$

La función $\tilde{u}$ definida por

$$u(x,y) = \begin{cases} x(x,y) & \text{para } (x,y) \in \Omega_r \\ u(x,y) & \text{para } (x,y) \in \Omega - \Omega_r \end{cases}$$

es la extensión armónica buscada.

Con los resultados anteriores estamos en condiciones de resolver el "ejemplo de Zaremba":

Sea $r > 0$, $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$.

Consideremos la región

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 < r^2\}$$

(o sea, la bola menos el centro).

Entonces no existe solución del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u(x,y) = f(x,y) & \text{en } \partial\Omega \\ u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \end{cases}$$

donde

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) = (x_o, y_o) \\ \\ 0 & \text{si } (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2 \end{cases}$$

<u>Demostración</u>: La función f es contínua en

$$\partial\Omega = \{(x_o, y_o)\} \cup \{(x,y) \mid (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2\}$$

Supongamos que el problema anterior tiene una solución u . Entonces u es acotada (por ser contínua en $\overline{\Omega}$). Y por lo tanto, podemos aplicar el lema F.1. y concluir que existe $\tilde{u} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que $\Delta\tilde{u} = 0$ en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 < r^2\}$, y que coincide con u en

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 \leq r^2\} .$$

Como u y $\tilde{u}$ son funciones contínuas en $\overline{\Omega}$ y coinciden cuando $(x,y) \neq (x_o,y_o)$, entonces (por continuidad) ellas deben coincidir en

$$\{(x,y) | (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 < r^2\} ,$$

pero esto implica que $u \equiv 0$ pues $u = 0$ en $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$. Contradicción, pues tendríamos que $u(x_o,y_o) = 0$ y también

$$u(x_o,y_o) = f(x_o,y_o) = 1$$

#

G. Función de Green y el problema no homogéneo.

Consideremos la ecuación no homogénea

$$\Delta u = -h \tag{1}$$

en el dominio $\Omega \in \mathbb{R}^n$, acotado por la frontera $\partial\Omega$, y $h \in C(\overline{\Omega})$.

Busquemos una solución $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y satisfaga la condición de frontera

$$u = 0 \qquad \text{en } \partial\Omega \tag{2}$$

Entonces el problema (1) - (2) tiene sólo una solución, pués la diferencia entre dos soluciones de la ecuación (1) con condiciones (2) debe satisfacer la ecuación de Laplace y las condiciones (2). Afirmamos que la solución buscada tiene la forma

$$u(x) = \int_{\Omega} g(x,y)h(y)dy \quad , \qquad x \in \Omega \ . \tag{3}$$

En efecto, aplicando el método de demostración empleado en el teorema B.3. a este caso, tenemos que para x fijo en Ω :

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{g(x,y)}{\partial\gamma} d\sigma_y + \int_{\Omega} g(x,y)h(y)dy \ .$$

Como u debe ser cero sobre $\partial\Omega$, entonces

$$u(x) = \int_{\Omega} g(x,y)h(y)dy \ .$$

H. Valores propios y funciones propias.

La propiedad fundamental demostrada en la sección (G) para la función de Green con respecto a la ecuación no homogénea (1), nos permite aplicar la función de Green para resolver el problema de frontera de la forma

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad , \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{1_λ}$$

con condiciones de frontera

$$u = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega \ . \tag{2}$$

Tomando $h = \lambda u$ en la ecuación (G.1.), tenemos que el problema (1_λ) - (2) es equivalente a la ecuación integral

$$u(x) = \lambda \int_\Omega g(x,y)u(y)dy \; . \tag{3}$$

H.1. Observación.

El núcleo g de la ecuación integral (3) es de la forma $g(x,y) = \frac{k(x,y)}{r}$, donde $k(x,y)$ es contínua. En Capítulo III demostraremos que este tipo de núcleos sa - tisfacen los cuatro teoremas de Fredholm y el teorema de Hilbert-Schmidt.

Sean λ_n $(n = 1,2,...)$ los valores propios del problema de frontera (1_λ) - (2), y u_n las correspondientes funciones propias, tal que ellas forman un sistema ortonormal.

H.2. Teorema.

Toda función $v \in C^2(\Omega)$ que satisfaga la condición de frontera (2) se puede desarrollar en serie de Fourier con respecto al sistema ortonormal $\{u_n\}$ en L_2 ; absoluta y uniformemente convergente en Ω .

Demostración:

Supongamos que $v \in C^2(\Omega)$ y satisface las condiciones de frontera (2). Entonces, por G.3. tenemos que v

se puede expresar en términos del operador G , es decir

$$v = Gh \ .$$

Como g es un núcleo de singularidad débil, el corolario B.3. del Capítulo III afirma que v se puede desarrollar en serie de Fourier con respecto al sistema ortonormal $\{u_n\}$ en L_2 :

$$v(x) \overset{(L_2)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x) \quad , \qquad c_n = \int_\Omega v(x)u_n(x)dx$$

y como $\|g_x\|_2$ es acotada, entonces esta serie es absoluta y uniformemente convergente en el dominio Ω .

C A P I T U L O   I I I

GENERALIZACIONES DE LOS TEOREMAS DE FREDHOLM Y HILBERT-SCHMIDT.

Introducción.

Al buscar las condiciones de solubilidad de los problemas de Dirichlet y Neumann, en Capítulo II, nos encontramos con ecuaciones integrales que tenían núcleos con una singularidad débil. Estos nos planteó la necesidad de construir una potente "artillería" para demostrar que ese tipo de núcleos satisfacen los teoremas de Fredholm y Hilbert-Schmidt.

Lo anterior dió origen a generalizaciones de esos teoremas que presentaremos en los párrafos siguientes. Justamente, ya que serán mencionados contínuamente, presentamos los cinco teoremas de Fredholm y el teorema de Hilbert-Schmidt. Explicitemos además que las funciones con las que se trabaja son reales.

Teorema 1: En cada porción acotada del λ-plano complejo, existe sólo un número finito de valores característicos.

Teorema 2: A cada valor característico le corresponde a lo menos una función propia y a lo más un número finito de éstos, linealmente independientes.

Teorema 3: Si λ_o es un valor característico, entonces $\overline{\lambda}_o$ lo es de la ecuación conjugada, coincidiendo el número de soluciones linealmente independientes de ambas ecuaciones.

Teorema 4: Para que exista solución de la ecuación no-homogénea, es necesario y suficiente que el témino libre sea ortogonal a cada solución de la ecuación homogénea conjugada.

Teorema 5: (Alternativa de Fredholm).

O bien la ecuación no-homogénea tiene solución única para cada término libre en L_2, o la ecuación homogénea tiene por lo menos una solución no nula.

Teorema: (de Hilbert-Schmidt).

Sean $\{\lambda_n\}$ los valores característicos de un núcleo simétrico $k = k(x,y)$ y ϕ_n sus correspondientes funciones propias. Si $g \in L_2$, entonces $f = Kg$ puede desarrollarse en serie de Fourier con respecto al sistema ortonormal $\{\phi_n\}$:

$$f = \Sigma f_n \phi_n \quad , \quad f_n = \lambda_n^{-1} \langle g, \phi_n \rangle$$

Más aún, si $\|k_x\|_2$ es acotada, la serie converge absoluta y uniformemente.

A. Teoremas de acotamiento para núcleos con una singularidad débil.

Recordemos que un núcleo k es de singularidad débil, sobre una región acotada Ω de un espacio n-dimensional, si tiene la forma

$$k(x,y) = \frac{h(x,y)}{r^{\alpha}} \quad , \qquad 0 < \alpha < n \tag{1}$$

donde h es una función acotada, x e y son puntos de Ω y r la distancia entre ellos.

A.1. Teorema.

Sean $|k_1(x,y)| < \dfrac{A_1}{r^{\alpha_1}}$; $|k_2(x,y)| < \dfrac{A_2}{r^{\alpha_2}}$,

donde A_1 y A_2 son constantes y $0 \leq \alpha_i < n$; $i = 1,2$. Entonces el núcleo de K_1 o K_2

$$k_3(x,y) = \int_{\Omega} k_1(x,y_1)k_2(y_1,y)dy_1$$

tiene la siguiente propiedad:

$$|k_3(x,y)| < \begin{cases} A_3 \ , & \text{si} \quad \alpha_1 + \alpha_2 < n \\ A_3|\ln r| + A_4 \ , & \text{si} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = n \\ \dfrac{A_3}{r^{\alpha_1+\alpha_2-n}} \ , & \text{si} \quad \alpha_1 + \alpha_2 > n \ ; \end{cases}$$

donde A_3 y A_4 son constantes.

Demostración:

Sean $x \neq y$. Entonces

$$|k_3(x,y)| \leq \int_{\Omega} |k_1(x,y_1)||k_2(y_1,y)|dy_1$$

$$\leq \overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{r_1 \leq D} \frac{A_1 A_2 dx_1^{(1)} \ldots dx_n^{(1)}}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_i^{(1)}\right)^2\right]^{\frac{\alpha_1}{2}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{(1)} - y_i\right)^2\right]^{\frac{\alpha_2}{2}}} = I \ .$$

aquí

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$y_1 = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(1)}\right) \ ;$$

D es el diámetro de la región Ω ,

$$r_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{(1)} - x_i\right)^2} \ .$$

Sin perder la generalidad, hagamos $x = (0,0, \ldots, 0)$; $y = (r,0,0, \ldots, 0)$, donde $r = |x - y|$.

Efectuemos el siguiente cambio de variable:

$$x_i^{(1)} = r\xi_i \qquad\qquad i = 1,2, \ldots, n \ .$$

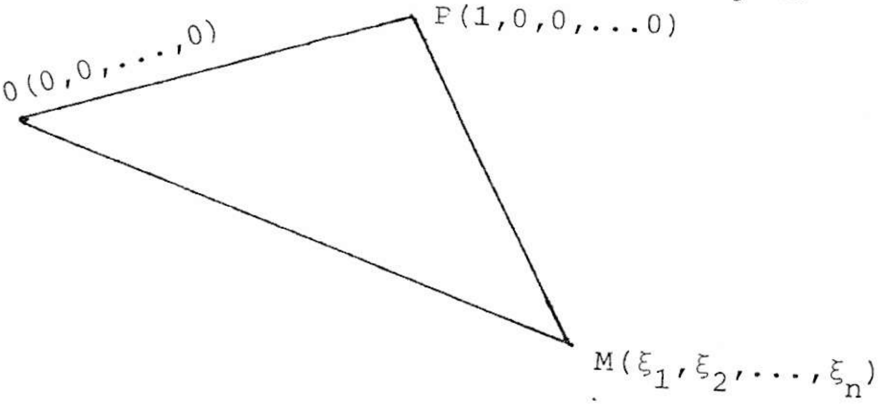
Entonces la integral I se transforma en:

$$I = \overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{r_1 \leq D} \frac{A_1 A_2 r^n d\xi_1 \ldots d\xi_n}{\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{\frac{\alpha_1}{2}} \left[(\xi_1 - 1)^2 + \sum_{i=2}^{n} \xi_i^2\right]^{\frac{\alpha_2}{2}} \cdot r^{\alpha_1+\alpha_2}}$$

notemos que si $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2} \geq 2$, entonces

$$\sqrt{(\xi_1 - 1)^2 + \sum_{i=2}^{n} \xi_i^{\,2}} \geq \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{\,2}} \tag{2}$$

En efecto, considerando la siguiente figura



tenemos que $\overline{PM} + \overline{OP} \geq \overline{OM}$; como $\overline{OP} = 1$, entonces $\overline{PM} \geq \overline{OM} - 1$

$$= \frac{1}{2}\,[\overline{OM} + (\overline{OM} - 2)]\ ,$$

pero por hipótesis $OM \geq 2$, luego $\overline{PM} \geq \frac{\overline{OM}}{2}$.

Descompongamos la integral I en dos partes y usemos (2), entonces:

$$I \leq \frac{A_1A_2}{r^{\alpha_1+\alpha_2-n}} \int \cdots \int_{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 < 4} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \cdots d\xi_n}{\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{\frac{\alpha_1}{2}} \cdot \left[(\xi_1 - 1)^2 + \sum_{i=2}^{n} \xi_i^2\right]^{\frac{\alpha_2}{2}}}$$

$$+ \frac{A_1A_2}{r^{\alpha_2+\alpha_2-n}} \int \cdots \int_{4 \leq \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leq \frac{D^2}{r^2}} \frac{2^{\alpha_2} d\xi_1 \cdots d\xi_n}{\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}}$$

La integral del primer sumando es convergente y se obtiene una constante c_1 que no depende de r .

Para calcular la segunda integral, pasemos a coordenadas polares. Sea

$$\tau^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 ,$$

entonces

$$d\xi_1 \ldots d\xi_n = \tau^{n-1} d\tau ds ,$$

donde ds es el elemento de superficie de la hiperesfera de radio 1 en el espacio de coordenadas $(\xi_1 , \ldots, \xi_n)$. De ahí obtenemos

$$I \leq c_1 r^{n-\alpha_1-\alpha_2} + c_2 r^{n-\alpha_1-\alpha_2} \int_2^{\frac{D}{r}} \tau^{n-1-\alpha_1-\alpha_2} d\tau , \qquad (3)$$

donde c_2 es una constante positiva.

Si $\alpha_1 + \alpha_2 > n$, entonces de (3) deducimos que

$$I \leq c_1 r^{n-\alpha_1-\alpha_2} + c_2 r^{n-\alpha_1-\alpha_2} \int_2^{\infty} \tau^{n-1-\alpha_1-\alpha_2} d\tau + c_3 r^{n-\alpha_1-\alpha_2}$$

Si $\alpha_1 + \alpha_2 = n$, entonces de la fórmula (3) se desprende que

$$I \leq c_1 + c_2 \ln\frac{D}{2r}$$

Si $\alpha_1 + \alpha_2 < n$, entonces

$$I \leq c_1 r^{n-\alpha_1-\alpha_2} + \frac{c_2 r^{n-\alpha_1-\alpha_2}}{n-\alpha_1-\alpha_2} \left[\frac{D}{r}^{n-\alpha_1-\alpha_2} - 2^{n-\alpha_1-\alpha_2} \right]$$

$< c_3$, donde c_3 es una constante.

#

A.2. Corolario.

Si el núcleo tiene una singularidad débil, entonces todos sus núcleos iterados, desde cierto orden en adelante, son acotados.

Demostración:

Si el núcleo satisface la desigualdad (1), entonces por teorema A.1. el núcleo iterado de orden m tiene la cota superior

$$|k_m(x,y)| < \begin{cases} \dfrac{c_m}{r^{m\alpha-(m-1)n}} , & \text{si} \quad m\alpha - (m-1)n > 0 \\ \\ c_m , & m\alpha - (m-1)n < 0 , \end{cases}$$

donde c_m es una cierta constante. Luego $k_m(x,y)$ es acotado si $m < \frac{n}{n-\alpha}$

#

B. Generalizaciones del Teorema de Hilbert-Schmidt.

En este párrafo presentaremos dos generalizaciones del teorema de Hilbert-Schmidt, las que descubrimos al buscar las condiciones que debía cumplir un núcleo de singularidad débil para satisfacer dicho teorema.

B.1. Teorema.

Sea K un operador autoadjunto. Si K^2 satisface el teorema de Hilbert-Schmidt, entonces K también lo satisface.

<u>Demostración</u>:

Sean $\{\lambda_j, \phi_j\}$ $j = 1,2, \ldots$ tales que $K\phi_j = \lambda_j^{-1}\phi_j$ y $h \in L_2$. Entonces

$$K^2 h \overset{(L_2)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j \phi_j}{\lambda_j^2} \quad , \quad a_j = \langle h, \phi_j \rangle \tag{1}$$

Por demostrar que

$$Kh \overset{(L_2)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j \phi_j}{\lambda_j}$$

Sea $Sn = \sum_{j=1}^{n} a_j \phi_j$. Basta demostrar que $KSn \to Kh$, $n \to \infty$ (en norma), pero

$$\langle K^2(h - Sn), h - Sn \rangle$$

$$= \langle K(h - Sn), K(h - Sn) \rangle \quad , \qquad K \text{ autoadjunto}$$

$$= \| K(h - Sn) \|^2 \tag{2}$$

Además

$$|\langle K^2(h - Sn), h - Sn\rangle|$$

(D. Cauchy)

$$\leq \|K^2(h - Sn)\| \cdot \|h - Sn\|$$

$$= \|K^2h - K^2Sn\| \cdot \|h - Sn\|$$

Pero

$$K^2Sn = K^2 \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\phi_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j K^2\phi_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j\phi_j}{\lambda_j^2}$$

Como la serie (1) converge en L_2 (media cuadrática), entonces

$$\|K^2h - K^2Sn\| \to 0 \quad , \qquad n \to \infty$$

Por otro lado

$$\|h - Sn\| \leq \|h\| + \|Sn\|$$

$$\|h\| + \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

La desigualdad de Bessel implica $\|h - Sn\| \leq 2\|h\|$, o sea

$\|h - Sn\|$ es acotado. Por lo tanto

$$\langle K^2(h - Sn), h - Sn\rangle \to 0 \quad , \quad n \to \infty$$

entonces de (2) deducimos que

$$\|Kh - KSn\| \to 0 \quad , \quad n \to \infty$$

Es decir

$$\underset{n \to \infty}{KSn \to Kh} \qquad \text{(en norma)}$$

Como

$$KSn = K\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \phi_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j \phi_j}{j}$$

entonces

$$Kh \overset{(L_2)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j \phi_j}{j}$$

#

B.2. Teorema.

Sea K operador autoadjunto. Si K^{2^m} satisface el teorema de Hilbert-Schmidt, entonces K también lo satisface.

Demostración:

Sea $\{\lambda_j, \phi_j\}$ $j = 1,2, \ldots$ tales que

$K\phi_j = \lambda_j^{-1}\phi_j$ y $h \in L_2$. Entonces

$$K^{2^m} h \overset{(L_2)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j \phi_j}{\lambda_j^{2^m}} , \quad a_j = \langle h, \phi_j \rangle \quad ; \qquad (1)$$

Por demostrar que

$$Kh \overset{(L_2)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j \phi_j}{\lambda_j}$$

Sea

$$Sp = \sum_{j=1}^{p} a_j \phi_j .$$

Basta demostrar que

$$K^2 Sp \underset{p \to \infty}{\to} K^2 h$$

pero

$$\langle K^{2^m}(h - Sp), h - Sp \rangle$$

$$= \langle K^{2^{m-1}}(h - Sp), K^{2^{m-1}}(h - Sp) \rangle , \quad K \text{ autoadjunto}$$

$$= \| K^{2^{m-1}}(h - Sp) \|^2$$

$$= \| K^2(h - Sp) \|^{2^{m-1}} , \quad \text{pues } K \text{ autoadjunto} \qquad (2)$$

Además

$$\langle K^{2^m}(h - Sp), h - Sp\rangle$$

(D. Cauchy-Schwartz).

$$\leq \| K^{2^m}(h - Sp\| \; \| h - Sp\| \; ,$$

pero

$$K^{2^m} Sp = K^{2^m}\left(\sum_{j=1}^{p} a_j \phi_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \frac{a_j \phi_j}{\lambda_j^{2^m}}$$

Como la serie (1) converge en L_2, entonces

$$\| K^{2^m} h - K^{2^m} Sp\| \to 0 \; , \quad p \to \infty$$

Luego

$\langle K^{2^m}(h - Sp), h - Sp\rangle \to 0$, pues $\| h - Sp\|$ es acotado.

Entonces, de (2) tenemos

$$\| K^2 h - K^2 Sp\| \to 0 \; , \quad p \to \infty$$

o sea

$$K^2 Sp \underset{p \to \infty}{\to} K^2 h \qquad \text{(en norma)}$$

Como

$$K^2 S_p = \sum_{j=1}^{p} \frac{a_j \phi_j}{\lambda_j^2} ,$$

entonces

$$K^2 h \overset{(L_2)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j \phi_j}{\lambda_j^2} ,$$

o sea, K^2 es "Hilbert-Schmidt". Luego, por teorema B.1. tenemos que K satisface el teorema de Hilbert-Schmidt.

#

B.3. Corolario.

Los operadores de núcleos singularidad débil satisfacen el teorema de Hilbert-Schmidt.

<u>Demostración</u>:

Por Corolario A.2. sabemos que si K es un operador de núcleo k singularidad débil, entonces todos sus núcleos iterados, desde cierto orden en adelante, son acotados.

Supongamos que K^m es acotado para todo $m > m_o$, cierto m_o.

Elijamos $m \geq 2^n$. Entonces K^m satisface el teorema de Hilbert-Schmidt.

Luego, por teorema B.2., K también satisface Hilbert-Schmidt.

#

C. Generalización de los teoremas de Fredholm.

En el presente párrafo mostraremos una generalización de los teoremas de Fredholm [1] ; y destacaremos una consecuencia (corolario) de esta generalización que fué utilizada en Capítulo II para demostrar el teorema A.5.

Para justificar dicha generalización, desarrollaremos previamente la siguiente teoría:

C.1. Definición.

Sean A y B operadores integrales, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces diremos que $A \sim B$, si y sólo si existe F_λ , operador integral, invertible tal que

$$I - \lambda B = F_\lambda (I - \lambda A) \qquad (1)$$

Adoptemos la siguiente convención notacional:

a) $A \in F$ significará que el operador A satisface los cuatro teoremas de Fredholm.

b) $A \in F_{i,j}$ significará que A satisface los teoremas de Fredholm números $\underline{i}$ y $\underline{j}$.

C.2. Teorema.

Sean A y B operadores integrales. Si $A \sim B$ y $B \in F$, entonces $A \in F$.

La demostración de este teorema la haremos a través de dos lemas:

I. Lema.

Si $A \sim B$ y $B \in F_{1,2}$, entonces $A \in F_{1,2}$.

Demostración:

1. Sea λ_o un valor propio de A y ϕ_o su correspondiente función propia. Consideremos el círculo $|\lambda| \leq R$, $R > 0$ cualquiera en el plano complejo, tal que λ_o pertenece a este círculo.

Entonces ϕ_o satisface la ecuación

$$(I - \lambda_o A)\phi_o = 0 \qquad (1)$$

y por C.1.1., también satisface la ecuación

$$(I - \lambda_o B)\phi_o = 0 \qquad (2)$$

Como B tiene solo un número finito de valores propios en el círculo $|\lambda| \leq R$, entonces A tiene la misma propiedad.

Luego A satisface el primer teorema de Fredholm.

2. Supongamos que las ecuaciones (1) y (2) tienen n y m

funciones propias linealmente independientes, respectivamente.

Como cada solución de (1) es una solución de (2), entonces $n \leq m$; pero m es finito, luego n también lo es. O sea, A satisface el segundo teorema de Fredholm.

Por lo tanto $A \in F_{1,2}$.

Notemos que para demostrar lema I no se necesita que F_λ sea invertible.

II. Lema.

Si $A \sim B$, $B \in F_{3,4}$ y existe F^*_λ , entonces $A \in F_{3,4}$.

Demostración:

3. Sea n el número de soluciones linealmente independientes de la ecuación conjugada de (1), es decir, de

$$(I - \bar{\lambda}_o A^*)\psi = 0 \tag{3}$$

Las ecuaciones (1) y (2) son equivalentes, pues por hipótesis, existe $F^{-1}_{\lambda_o}$.

Por lo tanto, ecuaciones (1) y (2) tienen el mismo número de soluciones linealmente independientes, digamos m . Entonces

$$(I - \bar{\lambda}_o B^*)\psi = 0 \tag{4}$$

también tiene m soluciones linealmente independientes (tercer teorema de Fredholm). Como

$$I - \overline{\lambda}_o B^* = F^*_{\lambda_o} (I - \overline{\lambda}_o A^*) \ ,$$

entonces las ecuaciones (3) y (4) son equivalentes, si y sólo si existe $(F^*_{\lambda_o})^{-1}$.

Con esta equivalencia tenemos que $n = m$.

Luego A satisface el tercer teorema de Fredholm.

4. Sea λ_o valor propio de A . Por demostrar que la ecuación $(I - \lambda_o A)\psi = g$, tiene solución si y sólo si $\langle g,\psi \rangle = 0$ para todo $\psi \in \mathrm{Ker}(I - \overline{\lambda}_o A^*)$.

Sea $\psi \in \mathrm{Ker}(I - \overline{\lambda}_o A^*)$ cualquiera, entonces

$$\begin{aligned} \langle g,\psi \rangle &= \langle (I - \lambda_o A)\phi,\psi \rangle \\ &= \langle \phi,(I - \overline{\lambda}_o A^*)\psi \rangle \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

Inversamente, supongamos que $\langle g,\psi \rangle = 0$ para todo $\psi \in \mathrm{Ker}(I - \overline{\lambda}_o A^*)$.

Como existe $F^{-1}_{\lambda_o}$, entonces las ecuaciones

$$(I - \lambda_o A)\phi = g \qquad \text{y} \qquad (I - \lambda_o B)\phi = F_{\lambda_o} g$$

son equivalentes.

Luego, basta demostrar que $\langle F_{\lambda_o} g,w \rangle = 0$ para todo $w \in \mathrm{Ker}(I - \overline{\lambda}_o B^*)$, pero

$$\langle F_{\lambda_o} g,w \rangle = \langle g,F^*_{\lambda_o} w \rangle ,$$

pues existe $F^*_{\lambda_o}$. Además

$$\begin{aligned} 0 &= (I - \overline{\lambda}_o B^*)w \\ &= (I - \overline{\lambda}_o A^*)F^*_{\lambda_o} w \end{aligned}$$

implica que

$$\psi_1 = F^*_{\lambda_o} w \in \mathrm{Ker}(I - \overline{\lambda}_o A^*) ,$$

con $w \in \mathrm{Ker}(I - \overline{\lambda}_o B^*)$ cualquiera. Luego

$$\langle g,F^*_{\lambda_o} w \rangle = 0 .$$

De donde

$$\langle F_{\lambda_o} g,w \rangle = 0$$

para todo $w \in \mathrm{Ker}(I - \overline{\lambda}_o B^*)$.

Luego A satisface el cuarto teorema de Fredholm.

Por lo tanto $A \in F_{3,4}$.

#

<u>Observación</u>: Al cumplirse los cuatro teoremas de Fredholm, se demuestra fácilmente que también se cumple la alternativa de Fredholm.

C.3. Corolario.

Sea K un operador integral tal que $K^m \in F$ para todo $m \geq m_o$. Entonces $K \in F$.

Demostración:

Usaremos el teorema C.2. para demostrar que $K \in F$. Consideremos la ecuación 2 de Fredholm

$$(I - \lambda K)\phi = g \tag{1}$$

aplicando el siguiente operador a ecuación (1)

$$(I - \varepsilon\lambda K)(I - \varepsilon^2\lambda K) \ldots (I - \varepsilon^{m-1}\lambda K) \quad , \quad \varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$$

cierto $m \geq m_o$

$$=: F_\lambda \ .$$

Obtenemos una ecuación 2 de la forma

$$(I - \lambda^m K^m)\phi = F_\lambda g \tag{2}$$

Por lo anterior tenemos que existe F_λ tal que

$$I - \lambda(\lambda^{m-1}K^m) = F_\lambda(I - \lambda K) \ .$$

Entonces, lema C.2.I. implica que $K \in F_{1,2}$. (Pues $\lambda^{m-1}K^m \in F_{1,2}$, dado que $K^m \in F$).

Para demostrar que $K \in F_{3,4}$ necesitamos hacer ver que existe F_λ^{-1} . Sea λ_o un valor propio de K y ϕ_o su correspondiente función propia.

Consideremos el círculo $|\lambda| \leq R$, $R > 0$ cualquiera tal que λ_o pertenezca a este círculo. Entonces ϕ_o satisface las ecuaciones

$$(I - \lambda_o K)\phi_o = 0 \tag{3}$$

y

$$(I - \lambda_o^m K^m)\phi_o = 0 \tag{4}$$

Elijamos un m tal que ninguno de los números $\varepsilon\lambda_o$, $\varepsilon^2\lambda_o$, ..., $\varepsilon^{m-1}\lambda_o$ sea valor propio de K . Un tal m existe, pues en caso contrario el operador K podría tener infinitos valores propios en el círculo $|\lambda| = |\lambda_o|$, lo cual contradice el primer teorema de Fredholm.

Con esta elección de m existe $F_{\lambda_o}^{-1}$, es decir, las ecuaciones (3) y (4) son equivalentes. Por lo tanto $K \sim \lambda_o^{m-1} K^m$. Como $\lambda_o^{m-1} K^m \in F_{3,4}$, pues $K^m \in F$, entonces (lema C.2.II.) $K \in F_{3,4}$.

#

C.4. Corolario.

Los operadores de núcleo singularidad débil satisfacen los cuatro teoremas de Fredholm.

<u>Demostración</u>:

Directa por A.2. y C.3.

#

A P E N D I C E

En este apéndice demostraremos las afirmaciones hechas en (2) y (3) de A.9.

Teorema.

$\lambda = 1$ no es un valor propio del operador

$K : u \to \int_S k(x,y)u(y)dS_y$; y $\lambda = -1$ es un valor propio del operador K^* , el adjunto de K .

<u>Demostración:</u>

Consideremos la función V:

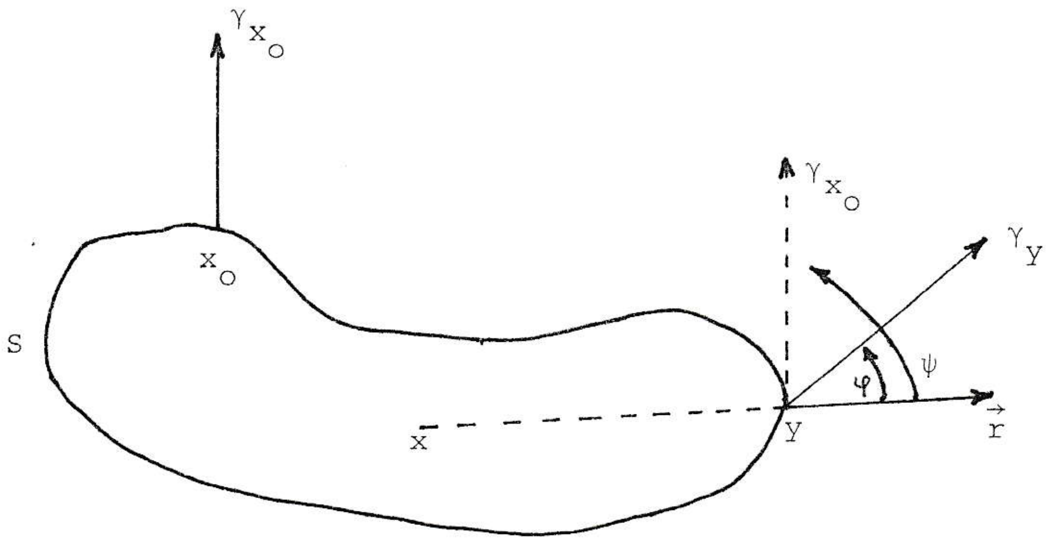
$$V(x) = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\sigma(y)}{r}\, dS_y \ , \qquad r = |x - y|$$

Sea $x_o \in S$, γ_{x_o} la normal exterior en el punto x_o .

Tomemos un $x \notin S$. Entonces, como solamente el factor $\frac{1}{r}$ de la función V depende de x , y V es contínua en x , podemos derivar bajo el signo integral

$$\frac{\partial V(x)}{\partial \gamma_{x_o}} = \frac{1}{2\pi}\int_S \sigma(y)\, \frac{\partial}{\partial \gamma_{x_o}}\left(\frac{1}{r}\right) dS_y$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_S \sigma(y)\, \frac{\cos\psi}{r^2}\, dS_y \qquad (1)$$



Notemos que las diferencias entre la integral (1) y la integral

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S u(y) \frac{\cos\varphi}{r^2} dS_y \qquad (2)$$

radican en lo siguiente:

$$\varphi = \sphericalangle (\vec{r}, \gamma_y)$$

aquí γ_y es la normal unitaria exterior a S en el punto y, que es la variable de integración; $\psi = \sphericalangle (\vec{r}, \gamma_{x_o})$, donde γ_{x_o} es la normal unitaria externa a S en el punto fijo x_o.

Pongamos la integral (1) en la forma:

$$\int_S \sigma(y) \frac{\cos\psi_o}{r_o^2} dS_y = \int_S \sigma(y) \frac{\cos(r_o, \gamma_{x_o})}{r_o^2} dS_y$$

donde r_o es la dirección x_o e y.

$$\psi_o = \sphericalangle\ (\vec{r}_o, \gamma_{x_o}) \ .$$

Como $\dfrac{\partial V(x)}{\partial \gamma_{x_o}}$ tiene la forma de la función w, entonces cuando $x \to x_o$ desde el interior o exterior de S, a lo largo de la normal, tenemos:

$$\lim_{x \nearrow x_o} \frac{\partial V(x)}{\partial \gamma_{x_o}} = \left(\frac{\partial V(x_o)}{\partial \gamma_{x_o}}\right)_i$$

$$= \sigma(x_o) + \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma(y) \frac{\cos\psi_o}{r_o^2}\, dS_y \qquad (3)$$

$$\lim_{x \searrow x_o} \frac{\partial V(x)}{\partial \gamma_{x_o}} = \left(\frac{\partial V(x_o)}{\partial \gamma_{x_o}}\right)_e$$

$$= -\sigma(x_o) + \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma(y) \frac{\cos\psi_o}{r_o^2}\, dS_y \qquad (4)$$

Recordemos que el problema interior de Dirichlet con condiciones de frontera $W/S = -f$ es equivalente a la ecuación integral con densidad u:

$$-f(x_o) = \frac{1}{2\pi} \int_S u(y) \frac{\cos(r_o, \gamma_y)}{r_o^2}\, dS_y + u(x_o) \ ,$$

o haciendo

$$k(x_o, y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(r_o, \gamma_y)}{r_o^2} \ ,$$

$$u(x_o) = f(x_o) + \int_S u(y)k(x_o,y)dS_y \tag{5}$$

El núcleo $k(x_o,y)$ no es simétrico pues la normal se toma en y, y $\vec{r}_o$ denota la dirección $\overrightarrow{x_o y}$. En cambio

$$k(y,x_o) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\cos(r_o,\gamma x_o)}{r_o^2}$$

Es decir, se toma la dirección $\overrightarrow{yx_o}$, y la normal en x_o (así actúa la función k).

Por otra parte, el problema de Dirichlet con condiciones de frontera $W/S = f$ es equivalente a la ecuación integral

$$u(x_o) = f(x_o) - \frac{1}{2\pi}\int_S u(y)\,\frac{\cos(r_o,\gamma_y)}{r_o^2}\,dS_y \tag{6}$$

análogamente, el problema de Neumann interior y exterior, con condiciones de frontera

$$\left(\frac{\partial V(x_o)}{\partial\gamma}\right)_i = f \qquad y \qquad \left(\frac{\partial V(x_o)}{\partial\gamma}\right)_e = f$$

sobre S, es equivalente a las ecuaciones integrales con densidad σ:

$$\sigma(x_o) = f(x_o) - \int_S \sigma(y)k(y,x_o)dS_y \tag{7}$$

y

$$\sigma(x_o) = f(x_o) + \int_S \sigma(y)k(y,x_o)dS_y \tag{8}$$

respectivamente.

Escribamos las ecuaciones (5), (6), (7) y (8) con parámetro λ , es decir

$$u(x_o) = f(x_o) + \lambda \int_S u(y)k(x_o,y)dS_y \qquad (9)$$

$$\sigma(x_o) = f(x_o) + \lambda \int_S \sigma(y)k(y,x_o)dS_y \qquad (10)$$

consideremos la ecuación homogénea de (10) con $\lambda = 1$:

$$\sigma(x_o) = \int_S \sigma(y)k(y,x_o)dS_y \qquad (11)$$

sea σ_o una solución de (11).

Por demostrar $\sigma_o \equiv 0$.

La densidad σ_o nos dá la función V_o armónica en el interior y exterior de la región acotada por S , contínua en Ω . Además

$$\left(\frac{\partial V(x_o)}{\partial \gamma_{x_o}}\right)_e \equiv 0 \qquad \text{sobre } S .$$

Apliquemos a V_o el siguiente teorema de la teoría potencial, Friedman [2] :

Teorema.

Si la región Ω es acotada (no importa interior o exteriormente) por una superficie S , V es una función armónica en Ω y γ la normal a S , exterior relativa a Ω , entonces:

$$\int_S V \frac{\partial V}{\partial \gamma} dS = \int_\Omega (\nabla V)^2 d\Omega \quad ,$$

donde ∇ es el operador gradiente.

En particular se tiene que

$$\int_{S'} V \frac{\partial V}{\partial \gamma} dS \geq 0$$

y

$$\int_S V \frac{\partial V}{\partial \gamma} dS = 0$$

solamente cuando $V = C$ constante.

Por lo tanto V_o es constante en el exterior de la región Ω .

Sabemos que V_o es cero cuando x está infinitamente lejos de la frontera S . En efecto: sea

$$A = \underset{y \in S}{\text{Máx}} \{|\sigma(y)|\} \qquad \sigma \text{ contínua}$$

y

$$D = \inf_{y \in S} \{|x - y|\} .$$

Entonces

$$|\sigma(x)| \leq \int_S \frac{|\sigma(y)|}{r} dS_y$$

$$\leq \frac{A}{D} . \qquad \text{(área de } S).$$

Luego, si x se aleja infinitamente, $\sigma(x) \to 0$.

Por lo tanto $V_o = 0$ en el exterior y sobre S ; y por teorema A.2. también vale cero en el interior.

De donde

$$\left(\frac{\partial V_o(y)}{\partial \gamma}\right)_i - \left(\frac{\partial V_o(y)}{\partial \gamma}\right)_e = 2\sigma_o(y) , \qquad y \in S$$

$$\equiv 0 .$$

Entonces $\sigma_o \equiv 0$.

Luego $\lambda = 1$ no es un valor propio del operador

$$K^* : \sigma \to \int_{S'} \sigma(y) k(x,y) dS_y ,$$

y tampoco lo es del operador

$$K : u \to \int_S u(y) k(x,y) dS_y ,$$

por teorema de Fredholm, [1] .

La ecuación homogénea de (9), con $\lambda = -1$, es decir

$$u(x_o) = - \int_S u(y) k(x_o,y) dS_y \tag{12}$$

tiene como solución una constante arbitraria.

En efecto, sea x_o un punto sobre S en el cual $|u(x_o)|$ toma su máximo valor, u una solución de (12).

Si $u(y)$ no es constante, tenemos

$$|u(x_o)| < |\lambda||u(x_o)| \quad , \qquad u(x_o) \neq 0 \ .$$

De donde $|\lambda| > 1$ (es decir que u no es constante sólo para $\lambda < -1$ y $\lambda > 1$). Sea entonces $u = c$, constante. Luego

$$C = \lambda \int_S Ck(x_o,y)\,dS_y \ , \qquad x_o \in S$$

implica $\lambda = -1$. Es decir $\lambda = -1$ es un valor propio de (9).

Por lo tanto, $\lambda = -1$ es un valor propio de la ecuación (conjugada)

$$\sigma(x_o) = - \int_S \sigma(y)k(y,x_o)\,dS_y$$

De donde, las únicas soluciones distintas de cero de esta ecuación, son las constantes. De aquí deducimos también que el problema de Neumann (exterior) tiene solución, si y sólo si

$$\int_S CfdS = 0 \ ,$$

si y sólo si

$$\int_S fdS = 0 \ .$$

#

B I B L I O G R A F I A

[1] S.G. Mikhlin. Integral Equations. Pergamon Press. (1964).

[2] Avner Friedman. Foundations of Modern Analysis. Holt, Rinehart and Winston, Inc. (1970).

[3] V.I. Smirnov. A course of higher Mathematics. Pergamon Press. (1964).

[4] Manuel Pinto. Apuntes curso de Ecuaciones Integrales. Facultad de Ciencias, Universidad de Chile (1978).