

RADIACION PRODUCIDA POR DOS CARGAS  
RELATIVISTAS INTERACTUANTES

Tesis  
entregada a la  
Universidad de Chile  
en cumplimiento parcial de los requisitos  
para optar al grado de  
Magister en Ciencias Físicas

FACULTAD DE CIENCIAS

por

LEDA PEÑA ALVAREZ

Enero, 1988



Patrocinante: Dr. Roberto Hojman G.

Facultad de Ciencias  
Universidad de Chile

INFORME DE APROBACION  
TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el Candidato

LEDA PEÑA ALVAREZ

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Físicas

Patrocinante de Tesis

Dr. Roberto Hojman G

Comisión Informante de Tesis

Dr. Marcelo Loewe

Dr. Herbert Massmann

Dr. Jorge Zanelli



R. Hojman  
Marcelo Loewe  
Herbert Massmann  
Jorge Zanelli

## I N D I C E

	Pág.
INTRODUCCION.	i
CAPITULO I. RADIACION DE UNA CARGA PUNTUAL RELATIVISTA.	1
i) Radiación de una partícula cargada que se mueve con $\vec{a} = \text{cte.}$	4
ii) Radiación de una partícula cargada en movimiento circular uniforme.	5
iii) Radiación dipolar.	6
CAPITULO II. RADIACION DE UN SISTEMA DE DOS CARGAS RELATIVISTAS.	8
1. Radiación de un sistema de dos cargas relativistas.	8
2. Solución aproximada.	13
CAPITULO III. EJEMPLOS.	15
1. La partícula neutra.	15
2. El positronium.	17
3. El dipolo eléctrico.	21
4. Dos cargas con $\vec{a} = \text{cte.}$ que se persiguen.	26

	Pág.
CONCLUSIONES.	32
APENDICE A. COORDENADAS RETARDADAS DE NEWMANN-PENROSE	35
APENDICE B. CALCULO DE $J_n^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}$	38
REFERENCIAS.	47

## I N T R O D U C C I O N

En todos los textos de Electrodinámica está ampliamente tratado el problema de la radiación de cargas puntuales aceleradas. En este trabajo se considera el caso de dos partículas cargadas aceleradas que interactúan y se estudia la interferencia en la radiación producida por ambas partículas. Para ello se supone conocida explícitamente la línea de universo  $z^\mu(\tau)$  de cada partícula, y a partir del campo electromagnético se construye el tensor energía-momentum del sistema de las dos partículas interactuantes.

Se obtiene así una expresión exacta para el momentum total radiado por el sistema. Sin embargo, las integrales que resultan no se pueden calcular en forma exacta, de modo que se introduce una aproximación que permite llegar al resultado deseado. Gracias a esta aproximación se pueden evaluar las cantidades dinámicas asociadas a ambas partículas en un mismo tiempo retardado  $\tau$  y se integra sobre el pasado de una sola de las partículas. La validez de esta aproximación depende de la distancia y velocidad relativa de las partículas consideradas.

En seguida, con el objeto de examinar la plausibilidad de la aproximación usada, se desarrollan algunos ejemplos de interés.

## CAPITULO I

### RADIACION DE UNA CARGA PUNTUAL RELATIVISTA

Dada la línea de universo  $z^\mu(\tau)$  de una carga puntual  $q$ , el campo electromagnético  $F^{\mu\nu}$  debido a esa carga, en un punto arbitrario del espacio-tiempo, se puede construir a partir de los potenciales de Lienard-Wiechert<sup>(\*)</sup>. [1].

$$F^{\mu\nu} = \frac{q}{\sqrt{4\pi}} \left[ \frac{K^{[\mu} \dot{v}^{\nu]}}{\kappa} + (1 - \kappa(\dot{v} \cdot K)) \frac{K^{[\mu} v^{\nu]}}{\kappa^2} \right], \quad (I.1)$$

donde

$$(a \cdot b) = a^\mu b_\mu \quad (I.2)$$

$$a^{[\mu} b^{\nu]} = a^\mu b^\nu - a^\nu b^\mu \quad (I.3)$$

$$K^\mu = \kappa^{-1} [x^\mu - z^\mu(\tau)] \quad (I.4)$$

$$\kappa = v_\mu(\tau) [x^\mu - z^\mu(\tau)], \quad (I.5)$$

(\*) Hacemos uso de las coordenadas retardadas de Newman-Penrose, definidas en el Apéndice A.

siendo  $\tau$  el tiempo propio retardado del evento  $x^\mu$ , es decir, solución de  $(x - z)^2 = 0$ .

Usamos las definiciones

$$v_\mu(\tau) = \dot{z}_\mu = \frac{dz_\mu}{d\tau} \quad (I.6)$$

$$\dot{v}^\mu = \eta^{\mu\nu} \dot{v}_\nu = \eta^{\mu\nu} \frac{dv_\nu}{d\tau} \quad (I.7)$$

y

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) . \quad (I.8)$$

La velocidad de la luz se elige igual a uno.

El tensor energía-momentum  $T^{\mu\nu}$  asociado a un campo electromagnético  $F^{\mu\nu}$  es:

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\sigma} F_\sigma^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (I.9)$$

que, como se sabe, tiene divergencia nula

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \quad (I.10)$$

para cualquier campo que satisfaga las ecuaciones de Maxwell.

Se define el momentum radiado por la partícula  $q$  como

$$P_R^\mu = - \int_\Sigma T^{\mu\nu} d\Sigma_\nu , \quad (I.11)$$

donde  $\Sigma$  es una superficie tipo-tiempo que eventualmente se hará tender al infinito espacial. Se puede demostrar ([1], [2]) que la forma exacta de dicha superficie no es importante ya que  $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ . Por conveniencia, para integrar elegimos un tubo de Bhabha, definido por la ecuación  $\kappa = \text{cte}$ .



Su elemento de volumen está dado por [ 3 ] , [ 4 ] :

$$d\Sigma_{\mu} = \{ [ 1 - \kappa(\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{v}}) ] K_{\mu} - v_{\mu} \} \kappa^2 d\tau d\Omega , \quad (\text{I.12})$$

donde todas las cantidades del lado derecho deben evaluarse en el punto retardado asociado a  $x^{\mu}$  , y  $d\Omega$  representa un elemento de ángulo sólido en el marco en reposo de la fuente.

Usando (I.9) y (I.12) en (I.11), tomando el límite  $\kappa \rightarrow \infty$  y resolviendo la integral angular se obtiene [ 5 ] :

$$P_{\text{R}}^{\mu} = - \frac{2}{3} q^2 \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{v}}^2 v^{\mu} d\tau , \quad (\text{I.13})$$

que es la conocida fórmula de Larmor para la radiación de una partícula.

Esta fórmula supone que, para determinar el cuadrivector radiado  $P^{\mu}$  , debe conocerse la trayectoria  $z^{\mu}(\tau)$  de la partícula. Sin embargo, estrictamente hablando,  $z^{\mu}(\tau)$  no puede ser dada a priori porque la radiación perdida por la partícula debe producir un cambio en su velocidad y aceleración. En nuestro desarrollo posterior consideraremos tiempos de emisión relativamente pequeños, lo que nos permite prescribir aproximadamente la línea de universo de las partículas involucradas.

A manera de introducción, y con el objeto de comparar los resultados que obtendremos más adelante con los conocidos en la literatura, derivaremos la radiación producida por una partícula cargada que se mueve con aceleración constante, la radiación emitida por una partícula que se mueve en una órbita circular, y la radiación dipolar.

i) Radiación de una partícula cargada que se mueve con  $\vec{a} = \text{cte}$ .

En general, sabemos que la 4-velocidad de una partícula está dada por

$$v^\mu = \gamma(1, \vec{v}) , \quad (I.14)$$

donde

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} = (1 - \vec{v}^2)^{-1/2} . \quad (I.15)$$

De aquí se obtiene

$$\dot{v}^\mu = \frac{dv^\mu}{d\tau} = (\gamma^4 \vec{v} \cdot \vec{a} , \gamma^4 (\vec{v} \cdot \vec{a}) \vec{v} + \gamma^2 \vec{a}) \quad (I.16)$$

y

$$\dot{v}^2 = -\gamma^4 [\vec{a}^2 + \gamma^2 (\vec{v} \cdot \vec{a})^2] , \quad (I.17)$$

con

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} . \quad (I.18)$$

Entonces, el momentum radiado por una partícula en un tiempo  $t$  está dado por

$$P_R^\mu = \frac{2}{3} q^2 \int_0^t \gamma^4 [\vec{a}^2 + \gamma^2 (\vec{v} \cdot \vec{a})^2] (1, \vec{v}) dt . \quad (I.19)$$

En el límite no relativista ( $\gamma \approx 1$ ), se obtiene

$$P_R^\mu = \frac{2}{3} q^2 \int_0^t \vec{a}^2 (1, \vec{v}) dt , \quad (I.20)$$

y si suponemos que la partícula se mueve con  $\vec{a} = \text{cte}$ . y de modo que  $\vec{v}$  y

$\vec{a}$  sean colineales, se encuentra que la energía y el momentum radiado por dicha partícula en un tiempo  $t$  son

$$P_R^0 = \frac{2}{3} q^2 a^2 t \quad (I.21)$$

$$\vec{P}_R = \frac{1}{3} q^2 a^3 t^2 \hat{a} .$$

ii) Radiación de una partícula cargada en movimiento circular uniforme.

Consideremos una carga puntual  $q$  que describe una órbita circular de radio  $R$  y se mueve con una frecuencia angular  $\omega$  constante. Si el plano de la órbita es el plano  $xy$ , la línea de universo, 4-velocidad y 4-aceleración de la partícula están dados por

$$z^\mu = (t, R \cos \omega t, R \sin \omega t, 0) \quad (I.22)$$

$$v^\mu = \gamma(1, -R \omega \sin \omega t, R \omega \cos \omega t, 0) \quad (I.23)$$

$$a^\mu = \gamma^2(0, -R \omega^2 \cos \omega t, -R \omega^2 \sin \omega t, 0) , \quad (I.24)$$

con

$$\gamma = [1 - (R\omega)^2]^{-1/2} . \quad (I.25)$$

Así, el momentum radiado por la partícula en un período  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  se reduce a calcular

$$P_R^\mu = \frac{2}{3} q^2 \gamma^4 R^2 \omega^4 \int_0^T v^\mu d\tau = \frac{2\pi}{\omega} v^\mu d\tau . \quad (I.26)$$

Es fácil mostrar que

$$\int_0^T v^\mu d\tau = \frac{2\pi}{\omega} \ell^\mu , \quad (I.27)$$

donde

$$\ell^\mu = (1, 0, 0, 0) . \quad (\text{I.28})$$

Por lo tanto, la partícula irradia energía en un período  $T$  en una cantidad igual a

$$P_R^0 = \frac{4\pi}{3} q^2 \frac{R^2 \omega^3}{[1 - (R\omega)^2]^2} . \quad (\text{I.29})$$

### iii) Radiación dipolar.

El tratamiento usual de la radiación de un dipolo eléctrico [6], [7] se hace a través del cálculo del vector de Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) , \quad (\text{I.30})$$

que representa el flujo de energía del campo electromagnético.

En la literatura se encuentra que, si se tiene un sistema localizado de cargas y corrientes, el vector de Poynting en la llamada zona lejana o de radiación está dado por

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi} ([\ddot{\vec{p}} \times \hat{n}]^2 \hat{n} , \quad (\text{I.31})$$

donde  $\vec{p}$  es el momento dipolar del sistema, el punto indica derivación respecto al tiempo retardado  $t' = t - r$ , y el paréntesis cuadrado señala que  $\ddot{\vec{p}}$  debe evaluarse en el tiempo  $t'$ .

La potencia media radiada por unidad de ángulo sólido por el momento dipolar  $\vec{p}$  es

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = (\vec{S} \cdot \hat{n}) r^2 = \frac{[\ddot{\vec{p}}]^2}{4\pi} \sin^2 \theta, \quad (\text{I.32})$$

en que el ángulo  $\theta$  se mide respecto de la dirección de  $\vec{p}$ .

La potencia total radiada es

$$\mathcal{P} = \int_{4\pi} \frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} d\Omega = \frac{[\ddot{\vec{p}}]^2}{4\pi} \int_{4\pi} \sin^3 \theta d\theta d\phi$$

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3} [\ddot{\vec{p}}]^2. \quad (\text{I.33})$$

Supongamos que el momento dipolar varía armónicamente en el tiempo, es decir,

$$[\vec{p}] = \vec{p}(t') = \vec{p}_0 e^{-i\omega t'} \quad (\text{I.34})$$

En ese caso, la potencia media radiada es

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3} \langle [\ddot{\vec{p}}]^2 \rangle, \quad (\text{I.35})$$

de modo que se obtiene finalmente

$$\mathcal{P} = \frac{1}{3} \omega^4 p_0^2. \quad (\text{I.36})$$

## CAPITULO II

### RADIACION DE UN SISTEMA DE DOS CARGAS RELATIVISTAS

#### 1. Radiación de un sistema de dos cargas relativistas.

Ahora consideremos dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  que interactúan.

El campo electromagnético creado por cada una de ellas es:

$$F_i^{\mu\nu} = \frac{q_i}{\sqrt{4\pi}} \left[ \frac{K_i [\mu \cdot \dot{v}_i \nu]}{K_i} + (1 - \kappa_i (\dot{v}_i \cdot K_i)) \frac{K_i [\mu \nu \nu]}{K_i^2} \right] \quad (\text{II.1})$$

( $i = 1, 2$ )

y el campo electromagnético total producido por el sistema es

$$F^{\mu\nu} = F_1^{\mu\nu} + F_2^{\mu\nu} \quad (\text{II.2})$$

El tensor energía-momentum para el campo creado por las dos cargas se puede escribir en la forma

$$T^{\mu\nu} = T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu} + T_{\text{mix}}^{\mu\nu} \quad (\text{II.3})$$

donde

$$T_i^{\mu\nu} = F_i^{\mu\sigma} F_{i\sigma}{}^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_i^{\alpha\beta} F_{i\alpha\beta}, \quad (i = 1, 2) \quad (\text{II.4})$$

y

$$T_{\text{mix}}^{\mu\nu} = F_1^{\mu\sigma} F_{2\sigma}{}^\nu + F_2^{\mu\sigma} F_{1\sigma}{}^\nu + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} F_1^{\alpha\beta} F_{2\alpha\beta} \quad (\text{II.5})$$

Siguiendo la misma idea, el momentum total radiado por el sistema puede escribirse como

$$P_R^\mu = P_{R_1}^\mu + P_{R_2}^\mu + P_{R \text{ mix}}^\mu, \quad (\text{II.6})$$

donde

$$P_{R_i}^\mu = - \int_{\Sigma} T_i^{\mu\nu} d\Sigma_{i\nu} \quad (\text{II.7})$$

es el momentum radiado por cada partícula, es decir, de acuerdo con (I.13),

$$P_{R_i}^\mu = - \frac{2}{3} q_i^2 \int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}_i^2 v_i^\mu d\tau_i \quad (\text{II.8})$$

y

$$P_{R \text{ mix}}^\mu = - \int_{\Sigma} T_{\text{mix}}^{\mu\nu} d\Sigma_\nu \quad (\text{II.9})$$

es el término de interferencia. Aquí tomaremos como superficie de integración un tubo de Bhabha en torno a la línea de universo de una de las partículas (partícula 1), y haremos tender  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  a infinito. Esta elección tiene sentido en el marco de las aproximaciones que luego se harán para calcular explícitamente el término de interferencia.

Queremos calcular entonces

$$P_{R \text{ mix}}^\mu = - \int_{\Sigma} \lim_{\substack{\kappa_1 \rightarrow \infty \\ \kappa_2 \rightarrow \infty}} (T_{\text{mix}}^{\mu\nu} d\Sigma_{\nu}) , \quad (\text{II.10})$$

con el elemento de volumen dado por (I.12).

Para determinar el comportamiento asintótico de las cantidades que aparecen en la integral (II.10), definimos un vector

$$\delta^\mu = \kappa_1 K_1^\mu - \kappa_2 K_2^\mu , \quad (\text{II.11})$$

donde las cantidades asociadas a  $q_1$  ( $q_2$ ) están evaluadas en  $\bar{\tau}_1$  ( $\bar{\tau}_2$ ), tiempo propio retardado sobre la línea de universo  $LU$  de  $q_1$  ( $q_2$ ) del punto de observación  $x^\mu$ . De acuerdo a su definición,  $\delta^\mu$  tiene su origen en  $z_1^\mu(\bar{\tau}_1)$  y su extremo en  $z_2^\mu(\bar{\tau}_2)$ . (Ver Fig. 1).

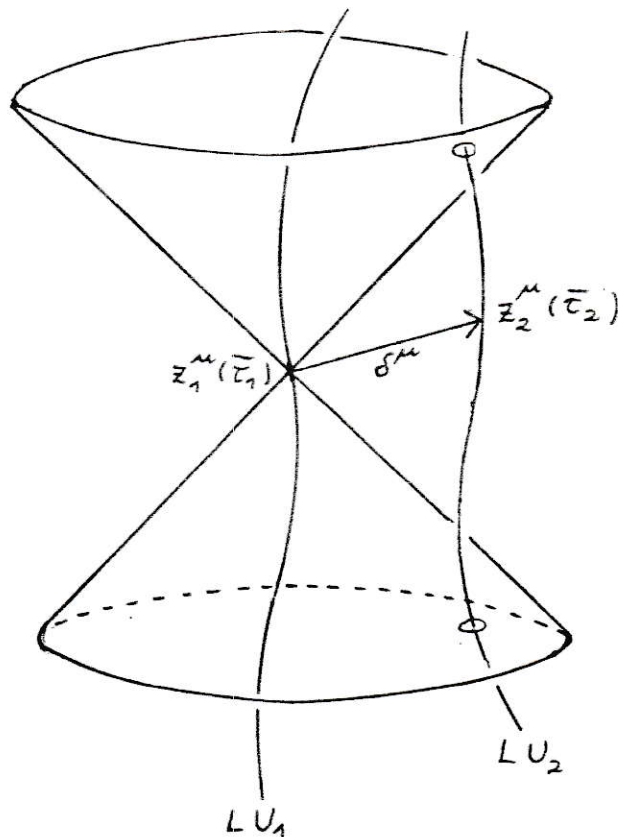


Fig. 1.



$\delta^\mu$  es un vector que no es afectado cuando  $\begin{cases} \kappa_1 \rightarrow \infty \\ \kappa_2 \rightarrow \infty \end{cases}$ , de forma que

$$\frac{\delta^\mu}{\kappa_2} = \rho \kappa_1^\mu - \kappa_2^\mu \xrightarrow[\kappa_2 \rightarrow \infty]{\kappa_1 \rightarrow \infty} 0, \quad (\text{II.12})$$

donde se ha definido la variable  $\rho$  como

$$\rho = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}. \quad (\text{II.13})$$

Entonces se tiene

$$\kappa_2^\mu \xrightarrow[\kappa_2 \rightarrow \infty]{\kappa_1 \rightarrow \infty} \rho \kappa_1^\mu. \quad (\text{II.14})$$

Además, de la definición de  $\kappa^\mu$  (I.4) se comprueba

$$\kappa_1 \cdot v_1 = \kappa_2 \cdot v_2 = 1, \quad (\text{II.15})$$

así es que, si multiplicamos (II.14) por  $v_{2\mu}$  se tiene

$$\kappa_1 \cdot v_2 \xrightarrow[\kappa_2 \rightarrow \infty]{\kappa_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho}. \quad (\text{II.16})$$

Haciendo uso de estas relaciones en la expresión explícita de (II.10), después de un largo cálculo se encuentra

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\kappa_1 \rightarrow \infty \\ \kappa_2 \rightarrow \infty}} (T_{\text{mix}}^{\mu\nu} d\Sigma_{1\nu}) = & - \frac{q_1 q_2}{2\pi} \left\{ \rho^3 [(v_2 \cdot a_1)(a_2 \cdot K_1) - \right. \\
& - (v_1 \cdot v_2)(a_2 \cdot K_1)(a_1 \cdot K_1)] + \rho^2 [(v_1 \cdot a_2)(a_1 \cdot K_1) - \\
& \left. - (a_1 \cdot a_2)] \right\} K_1^\mu d\tau_1 d\Omega_1, \quad (\text{II.17})
\end{aligned}$$

donde

$$a_i^\mu = v_i^\mu \quad (i = 1, 2). \quad (\text{II.18})$$

Entonces,

$$P_R^\mu \text{mix} = 2q_1 q_2 \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} d\tau_1 K_1^\mu \chi, \quad (\text{II.19})$$

donde

$$\begin{aligned}
\chi = & \rho^3 [(v_2 \cdot a_1)(a_2 \cdot K_1) - (v_1 \cdot v_2)(a_2 \cdot K_1)(a_1 \cdot K_1)] + \\
& + \rho^2 [(v_1 \cdot a_2)(a_1 \cdot K_1) - (a_1 \cdot a_2)]. \quad (\text{II.20})
\end{aligned}$$

Las integrales que aparecen en (II.19) pueden ser calculadas sólo si se conocen las expresiones explícitas de ambas líneas de universo. Aún en tal caso, los cálculos resultan engorrosos. En la próxima sección veremos cómo es posible, haciendo una aproximación razonable, calcular la integral deseada.

## 2. Solución aproximada.

Cuando el tiempo  $t_\ell$  que tarda una señal luminosa en ir y volver entre ambas partículas es pequeño comparado con algún tiempo característico de la interacción, es posible hacer una aproximación que permite calcular las integrales angulares para líneas de universo cualesquiera. Tal condición se satisface cuando las partículas están cerca una de la otra y su velocidad relativa  $r$  definida, como es usual, por

$$v_1 \cdot v_2 = (1 - r^2)^{-1/2}, \quad (\text{II.21})$$

es pequeña comparada con la velocidad de la luz.

En efecto,  $r$  es la velocidad relativa entre ambas partículas ya que, si consideramos un sistema inercial acompañante (S.I.A.) ligado a una de las partículas, su velocidad está dada por  $v_1^\mu = (1, \vec{0})$ , mientras que la velocidad de la segunda partícula vista desde ese mismo sistema es  $v_2^\mu = (1 - r^2)^{-1/2} (1, \vec{r})$ . De aquí se obtiene la relación (II.21).

Bajo las condiciones indicadas, puede verse que  $v_2^\mu$  y  $a_2^\mu$  varían levemente en el intervalo  $t_\ell$  y pueden considerarse constantes para efecto de las integrales angulares.

En la aproximación descrita se puede escribir

$$P_{R \text{ mix}}^\mu = 2q_1 q_2 \int d\tau_1 w^\mu, \quad (\text{II.22})$$

donde

$$\begin{aligned}
 W^\mu = & -(a_1 \cdot a_2) J_2^\mu + (v_1 \cdot a_2) a_{1\nu} J_2^{\mu\nu} + (v_2 \cdot a_1) a_{2\nu} J_3^{\mu\nu} - \\
 & - (v_1 \cdot v_2) a_{1\nu} a_{2\sigma} J_3^{\mu\nu\sigma}
 \end{aligned} \tag{II.23}$$

y se ha usado la notación

$$J_n^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} = \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \rho^n K_1^{\alpha_1} K_1^{\alpha_2} \dots K_1^{\alpha_s} . \tag{II.24}$$

Las integrales (II.24) pueden evaluarse en esa aproximación (ver Apéndice B) y se encuentra que

$$\begin{aligned}
 W^\mu = & [(v_1 \cdot a_2)(v_2 \cdot a_1) f_1(r) + (a_1 \cdot a_2) g_1(r)] v_1^\mu + \\
 & + [(v_1 \cdot a_2)(v_2 \cdot a_1) f_2(r) + (a_1 \cdot a_2) g_2(r)] v_2^\mu + \\
 & + (v_1 \cdot a_2) h_1(r) a_1^\mu + (v_2 \cdot a_1) h_2(r) a_2^\mu ,
 \end{aligned} \tag{II.25}$$

donde  $f_i$ ,  $g_i$  y  $h_i$  ( $i = 1, 2$ ) son funciones de la velocidad relativa  $r$  y cuya expresión explícita está dada en (B.40).

## C A P I T U L O    I I I

### EJEMPLOS

#### 1. La partícula neutra.

En primer lugar, ilustraremos la plausibilidad de la aproximación usada considerando una partícula neutra, que se puede suponer formada por la superposición de dos cargas  $+q$  y  $-q$  que viajan juntas sobre la misma línea de universo.

En este caso se tiene

$$v_1^{\mu} = v_2^{\mu} \tag{III.1}$$

$$a_1^{\mu} = a_2^{\mu} \tag{III.2}$$

$$\rho = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} = 1 . \tag{III.3}$$

Se puede calcular en forma exacta la radiación de interferencia dada por la ecuación (II.19). En efecto,  $\chi$  se reduce a

$$\chi = -a^2 - (K \cdot a)^2 , \tag{III.4}$$

y usando la notación de (II.23):

$$W^\mu = -a^2 J_0^\mu - a_\nu a_\lambda J_0^{\mu\nu\lambda} . \quad (\text{III.5})$$

$J_0^\mu$  y  $J_0^{\mu\nu\lambda}$  pueden encontrarse a partir de las ecuaciones (B.10) y (B.12), obteniéndose

$$W^\mu = -a^2 v^\mu I_0 - a^2 I_0^\mu - a_\nu a_\lambda I_0^{\mu\nu\lambda} - a_\nu a_\lambda v^\mu I_0^{\nu\lambda} \quad (\text{III.6})$$

De (B.15, 19, 20, 37, 38) se tiene

$$\begin{aligned} I_0 &= 1 \\ I_0^\mu &= 0 \\ I_0^{\mu\nu} &= -\frac{1}{3} h_1^{\mu\nu} \\ I_0^{\mu\nu\lambda} &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

de modo que

$$W^\mu = -\frac{2}{3} a^2 v^\mu , \quad (\text{III.8})$$

y finalmente

$$P_{R \text{ mix}}^\mu = \frac{4}{3} q^2 \int d\tau a^2 v^\mu , \quad (\text{III.9})$$

que cancela exactamente la radiación producida por ambas partículas consideradas independientemente. Por lo tanto, el momentum total radiado es cero, como era de esperar.

Por otro lado, si usamos la aproximación propuesta, de acuerdo a (II.25)  $w^\mu$  se reduce a

$$w^\mu = [g_1(0) + g_2(0)] a^2 v^\mu, \quad (\text{III.10})$$

ya que la velocidad relativa  $r$  es en este caso igual a cero.

De (B.40) se puede evaluar

$$\lim_{r \rightarrow 0} [g_1(r) + g_2(r)] = -\frac{2}{3}, \quad (\text{III.11})$$

encontrándose

$$w^\mu = -\frac{2}{3} a^2 v^\mu, \quad (\text{III.12})$$

con lo que se obtiene nuevamente el resultado esperado.

Por lo tanto, el resultado exacto (III.8) y el que se obtiene en (III.12) usando la aproximación coinciden exactamente para la situación descrita ( $z_1^\mu = z_2^\mu$ ,  $r = 0$ ). Cabe hacer notar que la aproximación es tanto mejor cuanto menores sean  $r$  y la distancia relativa ( $|z_1^\mu - z_2^\mu|$ ) entre ambas partículas.

## 2. El positronium.

Vamos a considerar ahora un sistema que consiste en dos partículas,  $+q$  y  $-q$ , que rotan una en torno a la otra. Calcularemos el momentum radiado  $P_R^\mu$  durante un período  $T$ , suponiendo que el movimiento es circular en ese período, siendo  $R$  el radio de la circunferencia descrita y  $\omega$  la frecuencia angular.

Las líneas de universo para cada partícula son

$$z_1^\mu = (t, R \cos \omega t, R \sin \omega t, 0) \quad (\text{III.13})$$

$$z_2^\mu = (t, -R \cos \omega t, -R \sin \omega t, 0) \quad (\text{III.14})$$

De aquí resulta que

$$v_1^\mu = \alpha (1, -R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t, 0) \quad (\text{III.15})$$

$$v_2^\mu = \alpha (1, R\omega \sin \omega t, -R\omega \cos \omega t, 0) \quad (\text{III.16})$$

y

$$a_1^\mu = \alpha^2 (0, -R\omega^2 \cos \omega t, -R\omega^2 \sin \omega t, 0) \quad (\text{III.17})$$

$$a_2^\mu = \alpha^2 (0, R\omega^2 \cos \omega t, R\omega^2 \sin \omega t, 0) \quad (\text{III.18})$$

donde

$$\alpha = \frac{dt}{d\tau_1} = \frac{dt}{d\tau_2} = [1 - (R\omega)^2]^{-1/2} \quad (\text{III.19})$$

La aproximación usada permite evaluar las cantidades asociadas a  $+q$  en el mismo tiempo  $t$  en que evaluamos las asociadas a  $-q$ . Se deduce entonces que

$$v_1 \cdot a_2 = v_2 \cdot a_1 = 0 \quad (\text{III.20})$$

$$a_1 \cdot a_2 \equiv \epsilon = \frac{R^2 \omega^4}{[1 - (R\omega)^2]^2} \quad (\text{III.21})$$

$$v_1 \cdot v_2 \equiv \gamma = \frac{1 + (R\omega)^2}{1 - (R\omega)^2} \quad (\text{III.22})$$



Tanto  $\epsilon$  como  $\gamma$  son constantes y de (II.21) se ve que  $r$  también lo es. Entonces, de las ecuaciones (II.22) y (II.25) se encuentra que el momentum radiado por interferencia en un período  $T$  es

$$P_{R \text{ mix}}^{\mu} = -2q^2 \left\{ \epsilon [g_1(r) \int_0^T v_1^{\mu} d\tau_1 + g_2(r) \int_0^T v_2^{\mu} d\tau_2] \right\} . \quad (\text{III.23})$$

Un simple cálculo conduce a

$$\int_0^T v_1^{\mu} d\tau_1 = \int_0^T v_2^{\mu} d\tau_2 = \frac{2\pi}{\omega} \ell^{\mu} , \quad (\text{III.24})$$

donde

$$\ell^{\mu} = (1, 0, 0, 0) . \quad (\text{III.25})$$

Por lo tanto

$$P_{R \text{ mix}}^{\mu} = -4\pi q^2 \frac{R^2 \omega^3}{[1 - (R\omega)^2]^2} [g_1(r) + g_2(r)] \ell^{\mu} \quad (\text{III.26})$$

En el Capítulo I se calculó el momentum radiado por una partícula en órbita circular. De acuerdo con (I.29), cada partícula irradia independientemente un momentum dado por

$$P_{R_1}^{\mu} = P_{R_2}^{\mu} = \frac{4\pi}{3} q^2 \frac{R^2 \omega^3}{[1 - (R\omega)^2]^2} \ell^{\mu} , \quad (\text{III.27})$$

de modo que el momentum total radiado por el sistema en un período  $T$  es

$$P_R^{\mu} = 4\pi q^2 \frac{R^2 \omega^3}{[1 - (R\omega)^2]^2} \left[ \frac{2}{3} - g_1(r) - g_2(r) \right] \ell^{\mu} \quad (\text{III.28})$$

Si llamamos

$$M(r) = \frac{2}{3} - g_1(r) - g_2(r) , \quad (\text{III.29})$$

usando las expresiones explícitas de  $g_1(r)$  y  $g_2(r)$  dadas en (B.40) se puede ver que  $M(r)$  disminuye desde un valor  $\frac{4}{3}$  (para  $r = 0$ ) hasta un valor  $\frac{2}{3}$  (para  $r = 1$ ), como muestra la Figura 2.

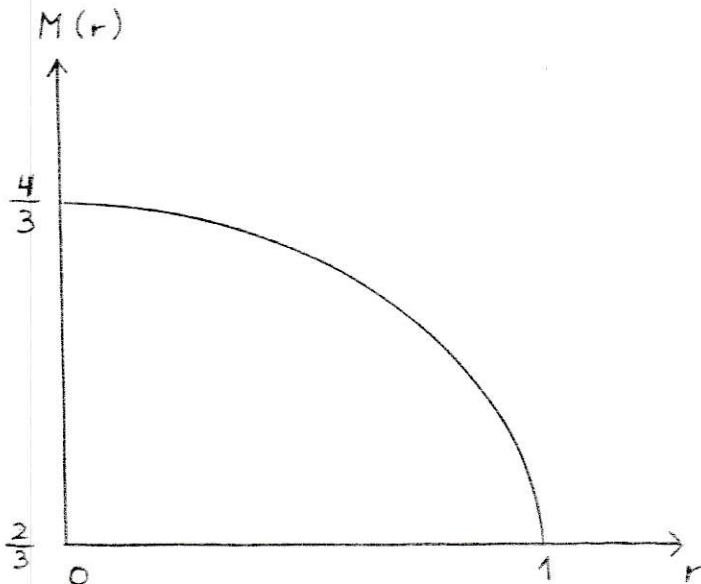


Fig. 2.

Se sabe, sin embargo, que la aproximación es válida solamente para  $r \ll 1$ . En este caso, el momentum radiado por el positronium en un período  $T$  tiende al valor

$$P_R^{\mu} = \frac{16\pi}{3} q^2 \frac{R^2 \omega^3}{[1 - (R\omega)^2]^2} e^{\mu} . \quad (\text{III.30})$$

### 3. Dipolo oscilante.

Consideramos un modelo de dipolo oscilante, es decir, dos partículas de carga  $+q$  y  $-q$ , que oscilan longitudinalmente en torno a una posición de equilibrio con la misma amplitud  $b$  y frecuencia angular  $\omega$ . La distancia entre las posiciones de equilibrio de las partículas es  $2\ell$ .

Se encuentra que, si las partículas oscilan en fase, el momentum total radiado durante un período  $T$  es cero.

En efecto, las líneas de universo para un período  $T$  están dadas por

$$z_1^\mu = (t, \ell + b \operatorname{sen} \omega t, 0, 0) \quad (\text{III.31})$$

$$z_2^\mu = (t, -\ell + b \operatorname{sen} \omega t, 0, 0) . \quad (\text{III.32})$$

Por lo tanto

$$v_1^\mu = v_2^\mu = \beta(1, b\omega \cos \omega t, 0, 0) \quad (\text{III.33})$$

y

$$a_1^\mu = a_2^\mu = -\beta^4 b\omega^2 \operatorname{sen} \omega t (b\omega \cos \omega t, 1, 0, 0) , \quad (\text{III.34})$$

donde

$$\beta = \frac{dt}{d\tau_1} = [1 - b^2 \omega^2 \cos^2 \omega t]^{-1/2} . \quad (\text{III.35})$$

Evaluando las cantidades dinámicas correspondientes a  $+q$  y a  $-q$  en el mismo tiempo  $t$ , se encuentra que

$$v_1 \cdot v_2 \equiv \gamma = 1 \quad (\text{III.36})$$

$$v_1 \cdot a_2 = v_2 \cdot a_1 = 0 \quad (\text{III.37})$$

$$a_1 \cdot a_2 = a^2 = -\beta^6 b^2 \omega^4 \sin^2 \omega t . \quad (\text{III.38})$$

Entonces, en la aproximación descrita, el momentum radiado por interferencia en un período  $T$  es

$$P_{R \text{ mix}}^\mu = -2q^2 \int_0^T d\tau_1 w^\mu , \quad (\text{III.39})$$

donde, usando la ecuación (II.25), se tiene

$$w^\mu = [g_1(r) + g_2(r)] a^2 v^\mu . \quad (\text{III.40})$$

Pero la velocidad relativa  $r$  de las partículas es cero; de este modo, usando (III.11) se llega a

$$P_{R \text{ mix}}^\mu = \frac{4}{3} q^2 \int_0^T d\tau_1 a^2 v^\mu . \quad (\text{III.41})$$

Esta radiación de interferencia cancela la radiación emitida por las cargas en forma independiente.

Si las partículas están desfasadas, el resultado es distinto. Ahora las líneas de universo de cada partícula, en un período, son

$$z_1^\mu = (t, l + b \sin \omega t, 0, 0) \quad (\text{III.42})$$

$$z_2^\mu = (t, -l - b \sin \omega t, 0, 0) . \quad (\text{III.43})$$

De aquí se obtiene

$$v_1^\mu = \beta(1, b\omega \cos \omega t, 0, 0) \quad (\text{III.44})$$

$$v_2^\mu = \beta(1, -b\omega \cos \omega t, 0, 0) \quad (\text{III.45})$$

y

$$a_1^\mu = -\beta^4 b \omega^2 \sin \omega t (b\omega \cos \omega t, 1, 0, 0) \quad (\text{III.46})$$

$$a_2^\mu = -\beta^4 b \omega^2 \sin \omega t (b\omega \cos \omega t, -1, 0, 0), \quad (\text{III.47})$$

con  $\beta$  dado en (III.35).

En forma análoga a lo hecho anteriormente, calculamos

$$v_1 \cdot a_2 = v_2 \cdot a_1 = -2\beta^5 b^2 \omega^3 \sin \omega t \cos \omega t \quad (\text{III.48})$$

$$v_1 \cdot v_2 \equiv \gamma = \beta^2 (1 + b^2 \omega^2 \cos^2 \omega t) \quad (\text{III.49})$$

$$a_1 \cdot a_2 = \beta^6 \gamma b^2 \omega^4 \sin^2 \omega t. \quad (\text{III.50})$$

$$r = \frac{2b\omega \cos \omega t}{1 + b^2 \omega^2 \cos^2 \omega t}. \quad (\text{III.51})$$

La radiación por interferencia en un período  $T$  es, como siempre

$$P_{R \text{ mix}}^\mu = -2q^2 \int_0^T d\tau_1 W^\mu, \quad (\text{III.52})$$

donde la expresión para  $W^\mu$ , dada por la ecuación (II.25), es

$$\begin{aligned} W^\mu &= v_1^\mu [(v_1 \cdot a_2)^2 f_1(r) + (a_1 \cdot a_2) g_1(r)] + \\ &+ v_2^\mu [(v_1 \cdot a_2)^2 f_2(r) + (a_1 \cdot a_2) g_2(r)] + \\ &+ a_1^\mu (v_1 \cdot a_2) h_1(r) + a_2^\mu (v_1 \cdot a_2) h_2(r). \end{aligned} \quad (\text{III.53})$$

Usando (B.40) y (III.48) a (III.51), después de un largo cálculo se llega a la expresión

$$\int_0^T d\tau_1 W^\mu = \ell^\mu \frac{\omega}{2} \int_s^{-s} \left[ \left( \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{2x^2} \right) + \left( \frac{3}{4x} + \frac{1}{4x^3} \right) \ln \frac{1+x}{1-x} \right] \times \\ \times \sqrt{s^2 - x^2} dx, \quad (\text{III.54})$$

donde se han definido

$$x = s \cos \omega t \quad (\text{III.55})$$

y

$$s = b\omega. \quad (\text{III.56})$$

Como hemos dicho anteriormente, la aproximación usada es válida cuando la velocidad relativa  $v$  entre las partículas es pequeña comparada con la velocidad de la luz. En tal caso,  $x < 1$  y  $s < 1$ , lo que permite calcular las integrales en forma aproximada haciendo desarrollo en serie de las expresiones que aparecen.

Se obtiene así

$$P_{R \text{ mix}}^\mu = q^2 \pi \omega \left( \frac{4}{3} s^2 + \frac{1}{5} s^4 + O(s^6) \right) \ell^\mu. \quad (\text{III.57})$$

Por otro lado, el momentum radiado durante un período por cada partícula independientemente es

$$P_{R_1}^\mu = P_{R_2}^\mu = -\frac{2}{3} q^2 \int_0^T d\tau_1 a_1^2 v_1^\mu, \quad (\text{III.58})$$

donde

$$a_1^2 = -\beta^6 b^2 \omega^4 \sin^2 \omega t . \quad (\text{III.59})$$

La integral por resolver es, en este caso

$$\int_0^T d\tau_1 a_1^2 v_1^\mu = 2\omega \ell^\mu \int_s^{-s} \frac{\sqrt{s^2 - x^2}}{(1 - x^2)^3} dx , \quad (\text{III.60})$$

cuya solución exacta es

$$\int_0^T d\tau_1 a_1^2 v_1^\mu = \pi \omega \frac{3s^4 - 4s^2}{4(1 - s)^{2 \cdot 3/2}} \ell^\mu . \quad (\text{III.61})$$

Haciendo desarrollo en serie en  $s$  se obtiene por último

$$P_{R_1}^\mu = P_{R_2}^\mu = q^2 \pi \omega \left( \frac{2}{3} s^2 + \frac{1}{2} s^4 + O(s^6) \right) \ell^\mu . \quad (\text{III.62})$$

Por lo tanto, el momentum total radiado por las partículas en un período  $T$  es

$$P_R^\mu \approx \frac{2\pi}{\omega} q^2 b^2 \omega^4 \left( \frac{4}{3} + \frac{3}{5} b^2 \omega^2 \right) \ell^\mu . \quad (\text{III.63})$$

Según nuestro resultado y de acuerdo al modelo, la potencia media radiada por el dipolo eléctrico cuando las partículas oscilan desfasadas es

$$\mathcal{P}_R = \frac{4}{3} q^2 b^2 \omega^4 , \quad (\text{III.64})$$

al primer orden de aproximación. Si consideramos la amplitud de oscilación  $b$  igual a  $\ell$  -mitad de la distancia entre las posiciones de equilibrio de ambas partículas- su momento dipolar  $\vec{p}_0$  tiene un módulo igual a  $2\ell q$ , de modo que, en primera aproximación, nuestro resultado coincide con el resultado conocido. (Ver ec. (I.36)).

4. Dos cargas con  $\vec{a} = \text{cte}$  que se persiguen.

Consideremos ahora dos cargas iguales (+q) moviéndose a lo largo de una línea con una aceleración constante  $a$ . Una de ellas parte desde el reposo en el instante  $t = 0$ , y la segunda inicia su movimiento, detrás de la anterior, en el instante  $t = T$ . Podría pensarse que esas cargas se mueven entre las placas de un condensador.

La 4-velocidad de la primera partícula es

$$v_1^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2}} (1, v_1, 0, 0) . \quad (\text{III.66})$$

En el sistema de referencia propio de dicha partícula se tiene

$$\frac{d}{dt} \frac{v_1}{\sqrt{1 - v_1^2}} = a . \quad (\text{III.67})$$

Integrando y haciendo  $v = 0$  en  $t = 0$  se obtiene

$$v_1 = \frac{at}{\sqrt{1 + a^2 t^2}} \quad (\text{III.68})$$

y volviendo a integrar con la condición inicial  $x = 0$  en  $t = 0$  se llega a

$$x_1 = \frac{1}{a} \left( \sqrt{1 + a^2 t^2} - 1 \right) . \quad (\text{III.69})$$

De esta forma, para la primera partícula se obtiene



$$z_1^\mu = \left[ t, \frac{1}{a} (\sqrt{1 + a^2 t^2} - 1), 0, 0 \right] \quad (\text{III.70})$$

y

$$v_1^\mu = \sqrt{1 + a^2 t^2} \left[ 1, \frac{at}{\sqrt{1 + a^2 t^2}}, 0, 0 \right] \quad (\text{III.71})$$

Análogamente, considerando que la segunda partícula parte en un tiempo  $t = T$ ,

$$z_2^\mu = \left[ t - T, \frac{1}{a} (\sqrt{1 + a^2 (t - T)^2} - 1), 0, 0 \right] \quad (\text{III.72})$$

$$v_2^\mu = \sqrt{1 + a^2 (t - T)^2} \left[ 1, \frac{a(t - T)}{\sqrt{1 + a^2 (t - T)^2}}, 0, 0 \right] \quad (\text{III.73})$$

De aquí es fácil obtener

$$a_1^\mu = \sqrt{1 + a^2 t^2} \left[ \frac{a^2 t}{\sqrt{1 + a^2 t^2}}, a, 0, 0 \right] \quad (\text{III.74})$$

y

$$a_2^\mu = \sqrt{1 + a^2(t - T)^2} \left( \frac{a^2(t - T)}{\sqrt{1 + a^2(t - T)^2}}, a, 0, 0 \right) \quad (\text{III.75})$$

Como nuestra aproximación vale cuando las partículas están cerca una de la otra y su velocidad relativa es mucho menor que 1, consideramos que  $t$  y  $T$  son pequeños.

Esto nos permite hacer las aproximaciones

$$v_1 \cdot a_2 = -v_2 \cdot a_1 \approx -a^2 T \quad (\text{III.76})$$

$$v_1 \cdot v_2 = \gamma \approx 1 + \frac{1}{2} a^2 T^2 \quad (\text{III.77})$$

$$a_1 \cdot a_2 \approx -a^2 \left( 1 + \frac{1}{2} a^2 T^2 \right) \quad (\text{III.78})$$

$$r \approx aT, \quad (\text{III.79})$$

donde, como se ve, todas estas cantidades son constantes en la aproximación usada.

Así, usando la ecuación (II.25),  $W^\mu$  está dado en forma aproximada por

$$\begin{aligned} W^\mu = & v_1^\mu \left[ -a^4 T^2 f_1(r) - a^2 \left( 1 + \frac{1}{2} a^2 T^2 \right) g_1(r) \right] + \\ & + v_2^\mu \left[ -a^4 T^2 f_2(r) - a^2 \left( 1 + \frac{1}{2} a^2 T^2 \right) g_2(r) \right] - \\ & - a^2 T [a_1^\mu h_1(r) - a_2^\mu h_2(r)] , \end{aligned} \quad (\text{III.80})$$

y la radiación por interferencia es, por (II.22),

$$P_{R \text{ mix}}^{\mu} = 2q^2 \int_T^t d\tau_1 W^{\mu} . \quad (\text{III.81})$$

Calculando las integrales, con  $f, g$  y  $h$  dadas por (B.40), se obtiene, tomando términos hasta del orden  $t^4$

$$P_{R \text{ mix}}^0 = q^2 a^2 \left[ \frac{4}{3} (t - T) - \frac{29}{35} a^2 T^2 (t - T) - \frac{2}{5} a^2 T (t^2 - T^2) \right]$$

$$P_{R \text{ mix}}^1 = q^2 a^3 \left[ -\frac{4}{5} T (t - T) + \frac{2}{3} (t^2 - T^2) + \frac{31}{35} a^2 T^3 (t - T) - \right. \\ \left. - \frac{68}{105} a^2 T^2 (t^2 - T^2) + \frac{7}{45} a^2 T (t^3 - T^3) - \frac{1}{6} a^2 (t^4 - T^4) \right]$$

$$P_{R \text{ mix}}^2 = P_{R \text{ mix}}^3 = 0 , \quad (\text{III.82})$$

para las 4 componentes del vector  $P_{R \text{ mix}}^{\mu}$ .

Considerando cada partícula independientemente, tenemos además

$$P_{R_1}^{\mu} = -\frac{2}{3} q^2 \int_0^t d\tau_1 a_1^2 v_1^{\mu} \quad (\text{III.83})$$

y

$$P_{R_2}^{\mu} = -\frac{2}{3} q^2 \int_T^t d\tau_2 a_2^2 v_2^{\mu} . \quad (\text{III.84})$$

Como  $a_1^2 = a_2^2 = -a^2$ , se llega a

$$P_{R_1}^0 = \frac{2}{3} q^2 a^2 t$$

$$P_{R_1}^1 = q^2 a^3 \left[ \frac{1}{3} t^2 - \frac{1}{12} a^2 t^4 \right] \quad (\text{III.85})$$

$$P_{R_1}^2 = P_{R_1}^3 = 0$$

para la primera partícula, y

$$P_{R_2}^0 = \frac{2}{3} q^2 a^2 (t - T)$$

$$P_{R_2}^1 = q^2 a^3 \left[ \frac{1}{3} (t - T)^2 - \frac{1}{12} a^2 (t - T)^4 \right]$$

$$P_{R_2}^2 = P_{R_2}^3 = 0 \quad (\text{III.86})$$

para la segunda partícula, conservando la misma aproximación anterior.

Finalmente se obtiene

$$P_{R \text{ Tot}}^0 = q^2 a^2 \left[ \frac{2}{3} t + 2(t - T) - \frac{29}{35} a^2 T^2 (t - T) - \frac{2}{5} a^2 T (t^2 - T^2) \right]$$

$$P_{R \text{ Tot}}^1 = q^2 a^3 \left[ \frac{1}{3} t^2 + \frac{1}{3} (t - T)^2 - \frac{4}{5} T(t - T) + \frac{2}{3} (t^2 - T^2) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{12} a^2 t^4 - \frac{1}{12} a^2 (t - T)^4 + \frac{31}{35} a^2 T^3 (t - T) - \right.$$

$$\left. - \frac{68}{105} a^2 T^2 (t^2 - T^2) + \frac{7}{45} a^2 T (t^3 - T^3) - \frac{1}{6} a^2 (t^4 - T^4) \right]$$

$$P_{R \text{ Tot}}^2 = P_{R \text{ Tot}}^3 = 0 \quad (\text{III.87})$$

Por lo tanto, el sistema irradia energía y también momentum en la dirección del movimiento.

Una forma de mostrar que es razonable nuestro resultado es hacer

$T = 0$  , que corresponde a la situación en que ambas partículas salen juntas. Esto es equivalente a suponer que una partícula de carga  $2q$  , que se mueve con aceleración constante  $a$  , irradia durante un tiempo  $t$  considerado pequeño.

En este caso,

$$P_{R \text{ Tot}}^0 \approx \frac{8}{3} q^2 a^2 t \quad (\text{III.88})$$

$$P_{R \text{ Tot}}^1 \approx \frac{4}{3} q^2 a^3 t^2 ,$$

que es el resultado que esperaríamos obtener en el límite no-relativista.

(Ver ec. (I.21)).

## CONCLUSIONES

Es un fenómeno conocido el que las cargas aceleradas emiten radiación electromagnética. Dicha radiación depende de la línea de universo de las partículas. Sin embargo, estrictamente hablando, la línea de universo no puede ser dada a priori debido a que la radiación perdida por la partícula debe producir un cambio en su aceleración. El problema se complica si tenemos dos cargas aceleradas interactuantes donde, además de la radiación emitida por cada una de las partículas, debemos considerar la radiación debida a la interacción entre ellas. Esa radiación por interferencia depende de la forma detallada de ambas líneas de universo. Hemos mostrado que, para un sistema de dos partículas cercanas, esto es, en el caso en que el tiempo que tarda una señal luminosa en ir y volver entre ambas es pequeño comparado con algún tiempo característico del sistema, y suponiendo que la velocidad relativa entre las partículas es mucho menor que la velocidad de la luz, la radiación por interferencia puede ser calculada considerando el pasado de una sola de las partículas. En tal caso podemos prescribir aproximadamente la línea de universo de cada partícula y obtener la radiación emitida por el sistema considerando sólo los términos de orden cero en el desarrollo

de Taylor de las variables dinámicas asociadas a una de las partículas. El cálculo puede refinarse considerando potencias superiores del desarrollo en serie.

Probamos la plausibilidad del resultado obtenido aplicándolo a distintas situaciones físicas de interés, tales como la partícula neutra, el positronium, el dipolo eléctrico y dos cargas aceleradas que se persiguen. Luego comparamos el resultado de estos cálculos con los que se encuentran para casos análogos en la literatura.

Para el caso trivial de la partícula neutra, considerada como la superposición de dos partículas de cargas opuestas, el resultado exacto y el que se obtiene a partir de la aproximación coinciden y se reproduce lo que era de esperar, es decir, que la radiación total es nula. Esto es, la radiación por interferencia cancela la radiación emitida por ambas partículas en forma independiente.

De especial interés es el ejemplo que se refiere al modelo de dipolo eléctrico. Aquí la radiación emitida por el dipolo se calcula usando una formulación covariante de la teoría de radiación, tratamiento que no se encuentra normalmente en la literatura. Se muestra así que un sistema formado por dos partículas oscilando en fase no irradia, es decir, se encuentra un sistema que, aún cuando cada una de sus partes está acelerada, no irradia como un todo. Basándose en este resultado se puede pensar que sería posible encontrar, teóricamente y dentro de la aproximación introducida, otros sistemas que no irradien, ajustando adecuadamente los parámetros que describen las líneas de universo de cada una de las partículas.

En el caso del dipolo eléctrico, suponiendo que las partículas oscilan desfasadas, y en el caso de las partículas uniformemente aceleradas que se persiguen, se recupera en primera aproximación el resultado estándar.



## A P E N D I C E A

### COORDENADAS RETARDADAS DE NEWMAN-PENROSE [ 4 ] , [ 8 ]

Consideremos una línea de universo  $x^\mu = z^\mu(\tau)$  en el espacio de Minkowski. Es posible definir cuatro coordenadas  $(\tau, \kappa, \theta, \phi)$  asociadas a cualquier punto de este espacio de la siguiente forma. El tiempo retardado  $\tau$  es la solución de la ecuación

$$[x^\mu - z^\mu(\tau)][x_\mu - z_\mu(\tau)] = 0 \quad (\text{A.1})$$

donde, como es habitual,

$$z_\mu(\tau) = \eta_{\mu\nu} z^\nu(\tau) \quad (\text{A.2})$$

con

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) . \quad (\text{A.3})$$

La variable  $\kappa$  está definida por

$$\kappa = v_\mu(\tau) [x^\mu - z^\mu(\tau)] , \quad (\text{A.4})$$

donde

$$v_{\mu}(\tau) = \dot{z}_{\mu} = \frac{dz_{\mu}}{d\tau}. \quad (\text{A.5})$$

Geométicamente,  $\kappa$  representa la distancia espacial entre  $x^{\mu}$  y  $z^{\mu}(\tau)$  en un marco en que la carga está en reposo en el tiempo retardado  $\tau$ . En efecto, en este caso  $v^{\mu} = (1, \vec{0})$ , de modo que, en ese marco,

$$\kappa = x^0 - z^0(\tau) = |\vec{x} - \vec{z}(\tau)|, \quad (\text{A.6})$$

de acuerdo con las ecuaciones (A.4) y (A.1). La situación puede visualizarse en la fig. A.1

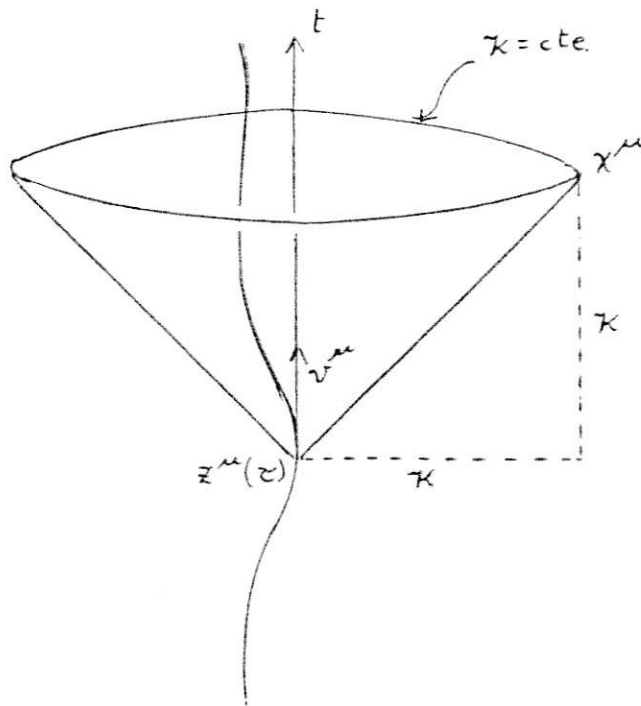


Fig. A.1

Finalmente, si definimos

$$[x^\mu - z^\mu(\tau)]_\perp \equiv (\eta^{\mu\nu} - t^\mu t^\nu)[x_\nu - z_\nu(\tau)] , \quad (\text{A.7})$$

los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  son los ángulos polares del 3-vector  $[x^\mu - z^\mu(\tau)]_\perp$ , referido a un sistema inercial arbitrario cuyo eje temporal tiene la dirección de un vector unitario  $t^\mu$ .

A P E N D I C E   B

CALCULO DE  $J_n^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}$  [ 9 ]

Se quiere evaluar las integrales

$$J_n^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \equiv \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \rho^n K_1^{\alpha_1} K_1^{\alpha_2} \dots K_1^{\alpha_s}, \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (B.1)$$

$s = 1, 2, \dots$

cuando

$$K_1 \rightarrow \infty$$

y donde

$$\rho \equiv \frac{K_1}{K_2} \frac{1}{K_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{(K_1 \cdot v_2)}. \quad (B.2)$$

Conviene introducir el cuadrivector  $K_{1\perp}^\mu$ , que es la proyección de  $K_1^\mu$  sobre el espacio ortogonal a  $v_1^\mu$ :

$$K_{1\perp}^\mu = K_1^\mu - v_1^\mu. \quad (B.3)$$

Este vector satisface las relaciones

$$K_{1\perp} \cdot v_1 = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$K_{1\perp} \cdot K_1 = -1 \quad (\text{B.5})$$

$$K_{1\perp} \cdot K_{1\perp} = -1 \quad (\text{B.6})$$

Definiendo además

$$I_n \equiv \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \rho^n \quad (\text{B.7})$$

y

$$I_n^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \equiv \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \rho^n K_{1\perp}^{\alpha_1} K_{1\perp}^{\alpha_2} \dots K_{1\perp}^{\alpha_s} , \quad (\text{B.8})$$

es fácil probar que

$$J_n = I_n \quad (\text{B.9})$$

$$J_n^\mu = I_n^\mu + v_1^\mu I_n \quad (\text{B.10})$$

$$J_n^{\mu\nu} = I_n^{\mu\nu} + v_1^{(\nu} I_n^{\mu)} + v_1^\mu v_1^\nu I_n \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} J_n^{\mu\nu\lambda} &= I_n^{\mu\nu\lambda} + v_1^{(\mu} I_n^{\nu\lambda)} + v_1^{(\mu} v_1^{\nu} I_n^{\lambda)} + \\ &+ v_1^\mu v_1^\nu v_1^\lambda I_n , \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

donde

$$a^{(\mu} b^{\nu)} = a^\mu b^\nu + a^\nu b^\mu . \quad (\text{B.13})$$

Se puede demostrar que para evaluar  $I_n^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}$  es sólo necesario conocer  $I_n^\mu$ . En efecto, consideremos  $I_n^\mu$ .

De su definición,

$$I_n^\mu v_{1\mu} = 0. \quad (\text{B.14})$$

Entonces  $I_n^\mu$  es una combinación lineal de vectores ortogonales a  $v_1^\mu$ . Por otro lado,  $I_n^\mu$  también puede escribirse en función de un vector  $v_{2\perp}^\mu$

$$I_n^\mu = \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \rho^n K_{1\perp}^\mu = A_n v_{2\perp}^\mu, \quad (\text{B.15})$$

donde

$$v_{2\perp}^\mu = h_1^{\mu\nu} v_{2\nu} = v_2^\mu - \gamma v_1^\mu \quad (\text{B.16})$$

con

$$h_1^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - v_1^\mu v_1^\nu \quad (\text{B.17})$$

y

$$\gamma = (v_1 \cdot v_2). \quad (\text{B.18})$$

Análogamente podemos decir que

$$I_n^{\alpha\beta} \equiv \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \rho^n K_{1\perp}^\alpha K_{1\perp}^\beta = B_n v_{2\perp}^\alpha v_{2\perp}^\beta + C_n h_1^{\alpha\beta} \quad (\text{B.19})$$

$$I_n^{\alpha\beta\gamma} \equiv \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \rho^n K_{1\perp}^\alpha K_{1\perp}^\beta K_{1\perp}^\gamma = D_n v_{2\perp}^\alpha v_{2\perp}^\beta v_{2\perp}^\gamma + E_n h_1^{(\alpha\beta} v_{2\perp}^{\gamma)}. \quad (\text{B.20})$$

Multiplicando (B.15) por  $v_{2\mu\perp}$ , se obtiene

$$\gamma I_n - I_{n-1} = \gamma^2 r^2 A_n, \quad (\text{B.21})$$

ya que

$$(v_{2\perp} \cdot v_{2\perp}) = -\gamma^2 r^2 \quad (\text{B.22})$$

y

$$(K_{1\perp} \cdot v_{2\perp}) = \frac{1}{\rho} - \gamma. \quad (\text{B.23})$$

Ahora, multiplicando (B.19) por  $v_{2\alpha\perp} v_{2\beta\perp}$ , se obtiene

$$\gamma^2 I_n - 2\gamma I_{n-1} + I_{n-2} = \gamma^2 r^2 (\gamma^2 r^2 B_n - C_n) \quad (\text{B.24})$$

y contrayendo  $\alpha$  y  $\beta$  en (B.19) se llega a

$$I_n = \gamma^2 r^2 B_n - 3C_n. \quad (\text{B.25})$$

Análogamente, multiplicando (B.20) por  $v_{2\alpha\perp} v_{2\beta\perp} v_{2\gamma\perp}$  se obtiene

$$\gamma^3 I_n - 3\gamma^2 I_{n-1} + 3\gamma I_{n-2} - I_{n-3} = \gamma^4 r^4 (\gamma^2 r^2 D_n - 3E_n). \quad (\text{B.26})$$

Ahora, contrayendo los índices  $\beta$  y  $\gamma$  en (B.20) y multiplicando por  $v_{2\alpha\perp}$  se tiene además

$$\gamma I_n - I_{n-1} = \gamma^2 r^2 (\gamma^2 r^2 D_n - 5E_n). \quad (\text{B.27})$$

Las expresiones (B.21), (B.24), (B.25), (B.26) y (B.27) permiten determinar  $A_n, B_n, C_n, D_n$  y  $E_n$  en términos de  $I_n, I_{n-1}, I_{n-2}$  e  $I_{n-3}$ .

Debemos calcular entonces  $I_n$ . Su valor debe ser independiente del sistema que se elija para evaluarlo. Si se elige el sistema que se mueve con  $q_1$ , entonces

$$v_1^\mu = (1, 0, 0, 0) . \quad (\text{B.28})$$

La dirección  $z$  puede elegirse como aquella que coincide con el eje espacial de  $v_2^\mu$ . Por lo tanto,

$$v_2^\mu = (\gamma, 0, 0, \sqrt{\gamma^2 - 1}) . \quad (\text{B.29})$$

Además, de la definición de  $k^\mu$  y de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ , y como  $K \cdot v = 1$ , se tiene que

$$K_1^\mu = (1, \text{sen } \theta_1 \cos \phi_1, \text{sen } \theta_1 \text{sen } \phi_1, \cos \theta_1) . \quad (\text{B.30})$$

Tomando el límite  $\kappa_1 \rightarrow \infty$  y considerando (B.2),

$$\rho = \frac{1}{\gamma(1 - rx_1)} , \quad (\text{B.31})$$

donde

$$x_1 = \cos \theta_1 . \quad (\text{B.32})$$

Pero

$$d\Omega_1 = - d\phi_1 dx_1 , \quad (\text{B.33})$$



de modo que, después de hacer la integral angular, para  $I_n$  definido en (B.7) se llega a

$$I_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx \frac{1}{\gamma^n (1 - rx)^n} . \quad (\text{B.34})$$

De aquí se obtiene

$$I_1 = \frac{1}{2\gamma r} \ln \frac{1+r}{1-r} \quad (\text{B.35})$$

$$I_n = \frac{1}{2\gamma^n r(1-n)} [ (1+r)^{1-n} - (1-r)^{1-n} ] , \quad n \neq 1 . \quad (\text{B.36})$$

En nuestros cálculos necesitamos la expresión explícita de  $I_n$  para varios valores de  $n$

$$I_{-2} = \frac{1}{3} (4\gamma^2 - 1)$$

$$I_{-1} = \gamma$$

$$I_0 = 1$$

(B.37)

$$I_1 = \frac{1}{2\gamma r} \ln \frac{1+r}{1-r}$$

$$I_2 = 1$$

$$I_3 = \gamma .$$

Usando estos resultados y resolviendo las ecuaciones para  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  y  $E_n$  se obtiene

$$A_0 = 0$$

$$A_1 = \frac{1-r^2}{r^2} \left( \frac{1}{2r} \ln \frac{1+r}{1-r} - 1 \right)$$

$$A_2 = \frac{1}{\gamma r^2} \left( 1 - \frac{1-r^2}{2r} \ln \frac{1+r}{1-r} \right)$$

$$A_3 = 1$$

$$B_1 = \frac{1-r^2}{2\gamma r^4} \left( \frac{3-r^2}{2r} \ln \frac{1+r}{1-r} - 3 \right)$$

$$B_2 = \frac{1-r^2}{r^2} \left( \frac{3(1-r^2)}{r^2} \left( 1 - \frac{1}{2r} \ln \frac{1+r}{1-r} \right) + 1 \right)$$

$$B_3 = \frac{1}{\gamma r^2} \left( \frac{3(1-r^2)}{2r^2} \left( \frac{1-r^2}{2r} \ln \frac{1+r}{1-r} - 1 \right) + 1 \right)$$

$$C_0 = -\frac{1}{3}$$

$$C_1 = -\frac{1}{2} A_2$$

$$C_2 = -A_1$$

$$C_3 = -\frac{1}{2} A_2$$

$$E_1 = -\frac{1}{6} B_2$$

$$E_2 = -B_1$$

(B.38)

$$E_3 = -\frac{1}{2} B_2$$

$$D_n = \frac{1-r^2}{r^2} (A_n + 5E_n) .$$

Esto nos permite evaluar las funciones  $J_2^{\mu}$ ,  $J_2^{\mu\nu}$ ,  $J_3^{\mu\nu}$  y  $J_3^{\mu\nu\sigma}$  definidas en (B.9)-(B.12). Reemplazándolas en (II.23) y comparando con la expresión (II.25) se encuentra que las funciones  $f_i$ ,  $g_i$ ,  $h_i$  ( $i = 1,2$ ) están dadas por

$$f_1(r) = -\gamma B_2 + A_2 + 3\gamma^2 B_3 - C_3 - 3\gamma A_3 + I_3 - \gamma^3 D_3 + \gamma E_3$$

$$f_2(r) = B_2 - 2\gamma B_3 + A_3 + \gamma^2 D_3$$

$$g_1(r) = \gamma A_2 - I_2 + \gamma^2 E_3 - \gamma C_3$$

$$g_2(r) = -A_2 - \gamma E_3 \tag{B.39}$$

$$h_1(r) = C_2 + \gamma^2 E_3 - \gamma C_3$$

$$h_2(r) = C_3 - \gamma E_3 .$$

La forma explícita de ellas en función de  $r$  se obtiene directamente al reemplazar (B.37) y (B.38) en (B.39):

$$f_1(r) = \frac{1}{\gamma^3 r^3} \left[ -\frac{13}{2r} + \frac{15}{2r^3} - \left( \frac{3}{4} - \frac{9}{2r^2} + \frac{15}{4r^4} \right) \ln \frac{1+r}{1-r} \right]$$

$$f_2(r) = \frac{1}{\gamma^2 r^4} \left\{ \frac{1}{2} + (1 - r^2) \left[ 3 - \frac{15}{2r^2} - \left( \frac{3}{r} - \frac{15}{4r^3} \right) \ln \frac{1+r}{1-r} \right] \right\}$$

$$g_1(r) = \frac{1}{\gamma^2 r^2} \left[ 1 - \frac{3}{2r^2} + \frac{3(1-r^2)}{4r^3} \ln \frac{1+r}{1-r} \right]$$

$$g_2(r) = \frac{1}{\gamma r^2} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1-r^2}{2r} \left[ \frac{3}{r} + \left( 1 - \frac{3}{2r^2} \right) \ln \frac{1+r}{1-r} \right] \right\}$$

$$h_1(r) = \frac{1}{\gamma^2 r^2} \left[ 1 - \frac{3}{2r^2} + \frac{3(1-r^2)}{4r^3} \ln \frac{1+r}{1-r} \right]$$

$$h_2(r) = \frac{1}{\gamma^3 r^3} \left[ \frac{3}{2r} + \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{4r^2} \right) \ln \frac{1+r}{1-r} \right]$$

(B.40)

## REFERENCIAS

- [ 1 ] A.O. Barut., "Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles", Mac Millan, New York, 1964.
- [ 2 ] F. Rohrlich., "Classical Charged Particles", Addison-Wesley, Reading Mass., 1965.
- [ 3 ] H.J. Bhabha., Proc. Roy. Soc. London A172, 384 (1939).
- [ 4 ] C. Teitelboim, D. Villarroel y Ch.G. van Weert., Revista del Nuovo Cimento, 3,N. 9 (1980).
- [ 5 ] R. Tabensky y D. Villarroel., J. Math. Phys. 16, 1380 (1975).
- [ 6 ] J.D. Jackson., "Classical Electrodynamics", John Wiley and Sons, 2nd. ed., 1975.
- [ 7 ] J.B. Marion., "Classical Electromagnetic Radiation", Academic Press Inc., London, 1965.
- [ 8 ] R. Tabensky., Phys. Rev. D, 13, 267 (1976).
- [ 9 ] R. Hojman., "Interferencia en la radiación de dos cargas relativistas", Tesis para optar al grado de Magister en Ciencias con mención en Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Santiago, 1975.

