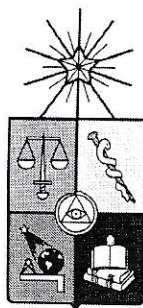


UCH-FC
MAG-F
C678
C1



Viabilidad de teorías inspiradas en la gravedad de Eddington.

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias Físicas
Facultad de Ciencias

por

Diego Benjamín Cohen Maldonado

Agosto, 2013

Directores de Tesis: **Dr. Gonzalo Palma**
Dr. Máximo Bañados



FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Diego Benjamín Cohen Maldonado

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Físicas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 21 de Agosto de 2013.

Directores de Tesis

Dr. Gonzalo Palma

Dr. Máximo Bañados

Two handwritten signatures in blue ink, one above the other, each written over a horizontal line.

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Andrés Gomberoff

Dr. Nelson Zamorano

Two handwritten signatures in blue ink, one above the other, each written over a horizontal line.

AGRADECIMIENTOS

Como siempre, el tiempo no es mucho.

Gracias a mi familia: El humor y abstracción de mi padre, la fortaleza y realismo de mi madre. La humanidad de mi hermana Antonia, el coraje de mi hermana Rocío. La rigurosidad de mi abuela. La sapiencia de mi tata. El recuerdo de mis abuelos, el apoyo de mis tíos. En fin, la presencia de toda mi familia (que por supuesto, no se queda sólo en el concepto del lazo de sangre).

Gracias a mis amigos: del Manuel, de la Facultad, de Ingeniería, de la PUC, del rap (sí, tengo amigos de ahí). En fin, de todos lados.

A todos los profes que he conocido, todos y sin faltar ninguno. De todos he aprendido algo y todos me han hecho cuestionar y mirar el mundo con otros ojos.

Todas estas personas han sido fundamentales en la construcción de lo que soy ahora... asuman su responsabilidad.

Al café y al clonazepam (sobre todo al final de la tesis).

A los libros y disciplinas que no tienen que ver con física.



6. Conclusión	28
7. Apéndice	30
7.1. Apéndice I	30
7.2. Apéndice II	32
7.3. Apéndice III	33
7.4. Apéndice IV	33

RESUMEN

Se desarrolló el estudio de tres teorías inspiradas en la gravedad de Eddington. La teoría Eddington-Born-Infeld (EBI) presenta singularidades en su curvatura cuando se modelan objetos compactos de simetría esférica y compuestos por materia descrita por un fluido ideal. Esto es debido a que sus ecuaciones de movimiento relacionan algebraicamente la métrica con los campos de materia.

Este resultado es compartido con las teorías de gravitación con campos auxiliares (TGCA) de las cuáles EBI es un caso particular. Se estudió el caso donde los campos auxiliares no pueden ser fijados completamente a partir de sus ecuaciones de movimiento, obteniendo que las soluciones son equivalentes a relatividad general más un término de constante cosmológica.

La formulación afín de K-Inflation es presentada. No presenta las mismas patologías de EBI. La cosmología de la teoría es equivalente a relatividad general con materia descrita por un fluido ideal. Casos particulares de su cosmología son exhibidos.

ABSTRACT

Three gravitational theories inspired in Eddington's gravitation were studied. Eddington-Born-Infeld theory (EBI) shows curvature singularities when it tries to develop compact objects with spherical symmetry that are composed by an ideal fluid approximation. This is because EBI's field equations relate the metric fields with the matter fields in an algebraic way.

This result is shared with gravity with auxiliary field theories (in fact EBI is a particular case of the former). It have been studied the case when the auxiliary

fields can't be totally fixed using their own field equation. The result was that this is completely equivalent to general relativity with a cosmological constant term.

Affine formulation of K-Inflation (AFK) is presented. It is extent of EBI's pathologies. AFK's cosmology is equivalent to general relativity with matter composed by an ideal fluid. Particular cases of the theory's cosmology are presented.

Capítulo 1

Introducción

Relatividad general es la teoría que durante un siglo ha modelado las interacciones gravitacionales. Su vigencia se debe principalmente a sus éxitos experimentales [1]. Sin embargo, cada vez toma más protagonismo la idea que se requiere una modificación de la misma. La presencia de energía oscura [2–4] y materia oscura [5, 6], singularidades en la curvatura [7] y su inconsistencia con el actual paradigma de la mecánica cuántica [8] alimentan esta idea.

Cualquier teoría que propongamos como alternativa a la relatividad general debe contar con la condición mínima de que para curvaturas moderadas debe ser equivalente a la relatividad general. La violación de esta condición enfrentaría nuestra teoría a numerosas mediciones experimentales, frente a las cuáles tendría bajísimas posibilidades de salir victoriosa. Por otro lado, es en los regímenes de fuertes curvaturas donde esperamos que nuestra teoría exhiba dinámica novedosa.

Cuando hablamos de regímenes de fuertes curvaturas, los escenarios más comunes y estudiados son el comienzo del universo y los agujeros negros. Su trascendencia histórica y sencillez matemática los hacen unos excelentes candidatos de estudio.

Hay muchas maneras de modificar gravedad [9]. Este trabajo se concentrará en las modificaciones que tienen su origen en la gravedad de Eddington [10]. En el Capítulo

2 se desarrollarán las motivaciones.

Cada capítulo cuenta con una breve introducción y conclusión. El Capítulo 3 desarrolla las principales ideas de la teoría Eddington-Born-Infeld (EBI) y estudio de objetos compactos de simetría esférica dentro de su marco. El Capítulo 4 desarrolla un caso no reportado en la literatura de teorías de gravedad con campos auxiliares (TGCA), de las cuáles EBI es un caso particular.

El Capítulo 5 desarrolla la versión afín de la teoría K-Inflation [11]. Se estudia su cosmología y se encuentran soluciones exactas para ciertos casos particulares que tienen su analogía con relatividad general. Se hacen proyecciones e intereses futuros. Finalmente, en el Capítulo 6 se hace una conclusión global de toda la tesis.

Capítulo 2

Gravedad de Eddington

Sería poco razonable comenzar una tesis de teorías alternativas a la relatividad general (RG) sin hacer mención a ella. El principio de acción de RG actual es esencialmente la acción de Einstein-Hilbert (EH) más un término de constante cosmológica Λ y una acción relacionada con los campos de materia,

$$S[g_{\mu\nu}] = \int dx^4 \sqrt{|g|} (R - 2\Lambda) + S_m[g_{\mu\nu}, \Psi], \quad (2.1)$$

donde $|\cdot|$ es el valor absoluto del determinante, $g_{\mu\nu}$ es la métrica, $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ donde $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci y $S_m[g_{\mu\nu}, \Psi]$ es la acción de la materia representada por el campo Ψ , que por ahora nos es indiferente su naturaleza. Note que hemos asignado $8\pi G = 1$ y $c = 1$, donde G es la constante de gravitación universal y c es la velocidad de la luz en el vacío. Al variar (2.1) respecto a $g_{\mu\nu}$, obtenemos las ecuaciones de Einstein,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu},$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momentum construido de la forma usual [12].

La acción (2.1) asume implícitamente que la conexión $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ es la conexión de Levi-

con $R_{(\mu\nu)} \equiv R_{(\mu\nu)}(\Gamma)$ y κ la constante de acoplamiento de la teoría. Si variamos (2.6) respecto a la conexión obtenemos la ecuación

$$\left(\kappa\sqrt{|R|}R^{(\mu\nu)}\right)_{;\xi} = 0, \quad (2.7)$$

donde $R^{(\mu\nu)}$ es el inverso de $R_{(\mu\nu)}$. La solución a esta ecuación es

$$\kappa\sqrt{|R|}R^{(\mu\nu)} = \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

donde hemos establecido que $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu})$. La ecuación (2.8) se puede llevar a

$$R_{(\mu\nu)} + \frac{1}{\kappa}g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.9)$$

que esencialmente es RG con constante cosmológica en el vacío. Aquí vale la pena llamar la atención en dos puntos: **(1)** Las ecuaciones de movimiento de la acción de Eddington tienen un término de constante cosmológica que en RG solo aparece introducido “a mano”. Esto da pie a conjeturar que (2.6) es un principio variacional más fundamental que EH, tomando en cuenta también que no necesita una métrica para su formulación. **(2)** Ambas formulaciones sostienen una dualidad [13]. El hecho de que $\kappa \sim \Lambda^{-1}$ implica que los regímenes de interacción fuerte en una descripción serán los de interacción débil en la otra. Estas son las principales ideas por las cuáles se guiará este trabajo de tesis.

Un principio variacional afín requiere que la materia se acople solo a la conexión si se quiere mantener en la calidad de afín. Por ejemplo, la acción afín para el electromagnetismo se construye como [14]

$$S[\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}, A_{\mu}] = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{|R|} R^{\mu\alpha} R^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

donde $F_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}(A_{\mu})$ es el tensor electromagnético. Notablemente, la dinámica descrita por (2.10) es equivalente a su formulación métrica tradicional. Sin embargo, la

suma de los principios de acción afines (2.6) y (2.10) no son equivalentes a la suma de sus correspondientes descripciones métricas [15]. Este hecho indica que la traducción de principios afines a métricos afines y métricos no es obvia. Los desarrollos de teorías que contemplen estos conceptos deben ser muy cuidadosos y en consecuencia, incorporar mecanismos novedosos.

En el próximo capítulo, veremos una teoría con interesantes propiedades cosmológicas que tiene su génesis en la ingeniosa mezcla de Gravedad de Eddington y la Teoría de Born-Infeld [16].

Capítulo 3

Gravedad de Eddington-Born-Infeld

El “Principio de Finitud” [17] estipula que una teoría física satisfactoria no debiera permitir que los observables tomaran valores infinitos. Tal vez es algo que gran parte de los físicos tiene incorporado en su *modus operandi*. Las divergencias en una teoría usualmente son comportamientos incómodos.

En el electromagnetismo clásico, la energía propia de una carga puntual es infinita [18]. Frente a esta situación, Born e Infeld proponen una modificación [16] del electromagnetismo clásico que logra regularizar la divergencia. Notablemente, la construcción de esta modificación esta inspirada en los estudios de Eddington [10]. De hecho, las acciones de ambas teorías comparten estéticas evidentemente similares.

3.1. Teoría de Born-Infeld

Una acción tipo Born-Infeld [16] es usualmente de la forma

$$S = \int dx^4 \left(\sqrt{|g_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}|} - \sqrt{|g_{\mu\nu}|} \right), \quad (3.1)$$

descrita en unidades naturales. Está construída de tal manera que al límite de $f_{\mu\nu} \ll 1$ (para cada componente) se obtenga $S \approx -(1/4) \int dx^4 \sqrt{|g|} f^{\mu\nu} f_{\mu\nu}$. Si identificamos el campo $f_{\mu\nu}$ con el tensor electromagnético, la teoría en este límite es el electromagnetismo clásico. En cambio, en los regímenes de campos fuertes (por ejemplo cerca de una carga puntual) es donde se empiezan a percibir nuevos efectos, entre ellos una energía propia del electrón bien definida.

Las teorías tipo Born-Infeld han mantenido su vigencia y siguen siendo protagonistas en varios aspectos de la física teórica [19]. La gravitación no ha quedado excluída de ello [20–22]. Un especial énfasis en cómo acoplar materia a teorías de gravedad inspiradas en Born-Infeld se puede encontrar en [23].

3.2. Eddington-Born-Infeld

La acción de Eddington-Born-Infeld (EBI) ha estudiar es [24]

$$S_{EBI}[g_{\mu\nu}, \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}, \Psi] = \frac{2}{\kappa} \int dx^4 \left(\sqrt{|g_{\mu\nu} + \kappa R_{\mu\nu}(\Gamma)|} - \lambda \sqrt{|g|} \right) + S_M[g_{\mu\nu}, \Psi]. \quad (3.2)$$

Es un principio variacional métrico-afín, con la materia acoplada solamente a la métrica. Nuevamente se hacen necesarios ciertos comentarios. **(1)** La evidente similitud con la acción de Born-Infeld (3.1) permite intuir sobre una posible capacidad reguladora en los regímenes de fuerte curvatura. De hecho, la cosmología de EBI no presenta la singularidad desnuda que en relatividad general aparece, describiendo una evolución regular del universo [24]. **(2)** Los regímenes estarán condicionados por el objeto $\kappa R_{\mu\nu}$. Si $\kappa R_{\mu\nu} \rightarrow \infty$ (en cada una de sus componentes),

$$S_{EBI}[g_{\mu\nu}, \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}, \Psi] \rightarrow 2\kappa \int d^4x \sqrt{|R|}, \quad (3.3)$$

que es la acción de Eddington. En cambio, si $\kappa R_{\mu\nu} \rightarrow 0$ (en cada una de sus componentes),

$$S_{EBI}[g_{\mu\nu}, \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, \Psi] \rightarrow \int d^4x \sqrt{|g|} (R(\Gamma) - 2\Lambda), \quad (3.4)$$

con $R(\Gamma) \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma)$, $\Lambda \equiv (\lambda - 1)/\kappa$. Así, $\kappa R_{\mu\nu}$ funciona como un interpolador entre el régimen de curvaturas leves, descrito por RG, y el régimen de curvaturas fuertes, descrito por la gravedad de Eddington. EBI hace explícita la dualidad descrita en el Capítulo 1.

Por el momento estudiaremos la teoría sin constante cosmológica ($\lambda = 1$). Las ecuaciones de campo para $g_{\mu\nu}$ y Γ son

$$\begin{aligned} \sqrt{|g + \kappa R|} (g + \kappa R)^{\mu\nu} - \sqrt{g} g^{\mu\nu} &= -\kappa \sqrt{g} T^{\mu\nu}, \\ \left[\sqrt{|g + \kappa R|} (g + \kappa R)^{\mu\nu} \right]_{;\xi} &= 0. \end{aligned}$$

Definiendo $q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \kappa R_{\mu\nu}$, la solución de la ecuación para la conexión implica que $\Gamma \equiv \Gamma(q)$. Así, las ecuaciones de movimiento se pueden describir como

$$\sqrt{q} q^{\mu\nu} - \sqrt{g} g^{\mu\nu} = -\kappa \sqrt{g} T^{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \kappa R_{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

donde $q^{\mu\nu}$ es el inverso de $q_{\mu\nu}$, y la conexión $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ está descrita por

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} q^{\alpha\xi} (q_{\xi\beta,\gamma} + q_{\xi\gamma,\beta} - q_{\beta\gamma,\xi}). \quad (3.7)$$

La conexión y curvatura estarán construídas a partir de $q_{\mu\nu}$. Es importante aclarar que el elemento $q_{\mu\nu}$ es un campo auxiliar. Las magnitudes “físicas” seguirán estando vinculadas a $g_{\mu\nu}$ y a sus objetos derivados.

3.2.1. Estudio de objetos compactos

Teniendo ya interesantes resultados cosmológicos en EBI [24], se hace necesario el estudio de otros fenómenos. En esta tesis desarrollamos el estudio de objetos compactos con simetría esférica. Describiremos la materia usando un fluido ideal. Esperamos el buen comportamiento de estos objetos, ya que buena parte de las estructuras del universo pueden modelarse siguiendo estos criterios (planetas y estrellas). La versión para relatividad general de este cálculo puede encontrarse en [25], concluyendo en las famosas ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV).

Supondremos la siguiente forma de nuestros elementos de línea,

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\alpha(r)dt^2 + \beta(r)dr^2 + \zeta(r)d\Omega^2, \quad (3.8)$$

$$q_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -a(r)dt^2 + h(r)dt dr + b(r)dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (3.9)$$

Note que elegimos expresar el objeto $q_{\mu\nu}$ en coordenadas de Schwarzschild [26]. Esta elección simplificará ostensiblemente los cálculos. El tensor energía momentum será el de un fluido ideal,

$$T_{\mu\nu} = [\rho(r) + p(r)]u_\mu u_\nu + p(r)g_{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

y definiremos que $T^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\alpha}g^{\beta\gamma}T_{\alpha\beta}$.

Reemplazando (3.8), (3.9) y (3.10) en (3.5), se puede solucionar explícitamente para $a(r)$, $b(r)$, $\zeta(r)$ y $h(r)$:

$$\begin{aligned} a(r) &= \frac{\alpha(r)(1 - \kappa p(r))^2}{\sqrt{(1 + \kappa\rho(r))(1 - \kappa p(r))}}, \\ b(r) &= \beta(r)\sqrt{(1 + \kappa\rho(r))(1 - \kappa p(r))}, \\ h(r) &= 0, \\ \zeta(r) &= \frac{r^2}{\sqrt{(1 + \kappa\rho(r))(1 - \kappa p(r))}}, \end{aligned}$$

restringiendonos a soluciones del tipo $(1 + \kappa\rho(r))(1 - \kappa p(r)) > 0$ para asegurar la realidad de las expresiones anteriores.

Conociendo ya $q_{\mu\nu}$ explícitamente, podemos construir $R_{\mu\nu}(\Gamma)$ y obtener de (3.6)

$$\begin{aligned}\alpha' &= \frac{2\alpha}{(3V + W)r\kappa V} [-2(WV)^{3/2}\beta(r^2 - \kappa) + \\ &+ r\kappa W V' + r^2\beta V(V + W) - 2\kappa W V], \\ \beta' &= \frac{2\beta}{(3V + W)r\kappa W} [2(WV)^{3/2}\beta(r^2 - \kappa) - \\ &- r\kappa W V' + \frac{1}{2}r^2\beta(-4VW + V^2 - W^2) + 2\kappa V W], \\ p' &= \frac{1}{(3V + W)r\kappa^2 V} [2(\sqrt{W^3 V^5} - \sqrt{W^5 V^3})\beta(r^2 - \kappa) - \\ &- (V - W)(r\kappa W V' + r^2\beta V(V + W) - 2\kappa W V)],\end{aligned}$$

donde $h' \equiv dh/dr$ con h una función arbitraria y $V \equiv 1 + \kappa\rho$, $W \equiv 1 - \kappa p$.

Aún falta una ecuación para poder resolver el sistema: la ecuación de estado. Una vez especificada el sistema ya puede ser resuelto, quedando un sistema de ecuaciones de TOV modificado. En el límite $\kappa \rightarrow 0$ recuperamos las ecuaciones de TOV, como era de esperar.

3.2.2. Divergencia en la curvatura

Una conocida modificación a relatividad general son las teorías $f(R)$, donde sencillamente reemplazamos R por $f(R)$ en (2.1), siendo f una función arbitraria. Más detalles en [27]. En estas teorías existe el siguiente resultado: Para objetos compactos de simetría esférica modelados por un fluido ideal de ecuación de estado politrópica $p \sim \rho^\Gamma$, donde Γ es constante, los escalares de curvatura en la superficie del objeto

divergen si $\Gamma > 3/2$ [28]. La importancia en el análisis de los escalares de curvatura, es que al ser invariantes bajo transformaciones de coordenadas, son un buen referente si queremos saber si las divergencias son reales o sencillamente una mala elección de coordenadas. Aunque EBI no es una teoría $f(R)$, comparte ciertas similitudes con las ecuaciones de movimiento, por lo que es importante estudiar si este comportamiento patológico se da en la teoría.

Por motivos de simplicidad, calculamos el escalar de curvatura más sencillo $\bar{R} \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(g)$, asumiendo que $\rho \rightarrow 0$ en la superficie del objeto compacto, y en consecuencia, $p \rightarrow 0$. Usando las expresiones para α' , β' y p' anteriores, cerca de la superficie del objeto compacto obtenemos

$$\bar{R} \rightarrow \frac{\kappa}{4r\beta(r)} [\rho'(5\beta(r) - 1) + 2r\rho''] + \frac{33\kappa^3}{32\beta(r)} \rho'(r)^2 [\rho(r) + p(r)]. \quad (3.11)$$

En relatividad general este límite es nulo. La proporcionalidad a κ de los nuevos términos implica que son modificaciones propias de EBI. La presencia de las primeras y segundas derivadas de la densidad de energía indican que una discontinuidad en la distribución de materia, cambios demasiado bruscos o distribuciones muy pronunciadas generarán divergencias de la misma naturaleza que las existentes en $f(R)$ [28].

Conceptualmente, el origen de estos términos puede ser explicado a partir de las ecuaciones de campo. La ecuación (3.5) relaciona algebraicamente la métrica con la materia. Esquemáticamente (omitire índices y formalidades), su relación será $g \sim \rho$. Por construcción, la relación entre curvatura y métrica es $R \sim g''$. Entonces, la relación entre curvatura y materia será de $R \sim \rho''$, que es lo observado explícitamente en (3.11) y es el origen de las divergencias. En el caso de relatividad general, la ecuación de movimiento para $g_{\mu\nu}$ relaciona $g'' \sim \rho$. Por lo tanto, curvatura y materia se relacionaran como $R \sim \rho$. Así, los comportamientos bruscos, discontinuos o pro-

nunciados de la distribución de materia no conllevarán divergencias en la curvatura en relatividad general.

Vale la pena ver unos ejemplos con ecuaciones de estado explícitas. Para una ecuación de estado politrópica $p(r) = \sigma\rho(r)^\Gamma$, los términos dominantes en (3.11) serán

$$\bar{R} \approx -\frac{5\kappa}{8\sigma^2\Gamma^2\beta(r)r^2} \left(\beta(r) - \frac{1}{5} \right) \rho(r)^{3-2\Gamma} (-1 + \beta(r)), \quad (3.12)$$

por lo que tenemos un buen comportamiento de la curvatura siempre y cuando $\Gamma < 3/2$ (durante el desarrollo de esta tesis otro grupo de investigación publicó un trabajo que confirmó este resultado [29]).

Podemos modelar una esfera dura (densidad constante) con la distribución $\rho(r) = \rho_0 (\pi/2 - \arctan[(r - r_s)/\varepsilon])$ donde ρ_0 es la densidad de energía en el centro del objeto, r_s es el radio del objeto y ε es un parámetro de longitud que mientras más pequeño se hace la aproximación de $\rho(r)$ a la distribución de una esfera dura es mejor. En este caso los términos dominantes en (3.11) serán

$$\bar{R} \approx -\frac{5\kappa\rho_0}{4\varepsilon r_0}.$$

Mientras mejor es la aproximación, la curvatura tomará valores más grandes cerca de la superficie.

3.3. Conclusiones

Como se dijo al principio de esta sección, el Principio de Finitud es un buen criterio en los desarrollos de la física teórica. EBI aún teniendo las interesantes propiedades cosmológicas con las que cuenta, no logra describir de forma satisfactoria objetos que relatividad general modela sin mayores complicaciones. Podríamos hacer

una discusión sobre la validez de asumir que la materia cercana a la superficie del objeto compacto se comporta como un fluido ideal (una discusión de esas características para las teorías $f(R)$ se da en [30]), pero la importancia de esta discusión quizás se vea disminuída frente a la robustez de relatividad general donde estas discusiones son innecesarias. Bajo este punto de vista, EBI es por lo menos una teoría incompleta.

La relación algebraica entre métrica y materia es la causante de la singularidad en la superficie. El problema se vería solucionado si le agregásemos más dinámica a la teoría. EBI nos permite agregar invariantes más novedosos en la acción del tipo $[\Gamma(g) - \Gamma(f)]^2$, donde $\Gamma(f)$ es la conexión construída a partir de f . Estos términos han sido estudiados en [31]. Sin embargo, la complejidad de las ecuaciones de movimiento aumenta ostensiblemente, y el problema se hace difícil de abordar sin fuertes motivaciones para hacerlo.

Capítulo 4

Gravedad con campos auxiliares

El tratamiento dado a EBI en la sección anterior mostró resultados que hacen dudar sobre su viabilidad como teoría. Tal vez, buscando y estudiando la misma teoría pero re-expresada de otra forma nos de pistas de como solucionar o sobrellevar estos resultados indeseados.

Vale la pena introducir las teorías de gravedad con campos auxiliares (TGCA). Un ejemplo de TGCA (y el caso que estudiaremos) es

$$S[g, Q, \Psi] = \int \sqrt{|g|} R(g) + U(g_{\mu\nu}, Q) + S_M(g_{\mu\nu}, \Psi), \quad (4.1)$$

donde hemos agregado el campo auxiliar Q (que su forma y naturaleza por ahora nos tiene sin cuidado), y la densidad tensorial de peso adecuado $U(g_{\mu\nu}, Q)$ que no tiene términos cinéticos derivados de Q . Las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{\partial}{\partial Q} U(g_{\mu\nu}, Q) = 0, \quad (4.2)$$

$$G_{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} U(g_{\mu\nu}, Q) = T_{\mu\nu}. \quad (4.3)$$

De la primera ecuación podemos en principio resolver para Q y luego reemplazar en (4.1).

Un caso interesante es suponer que Q es un tensor de rango dos, $Q \equiv q_{\mu\nu}$. Este tipo de formulación se puede entender como una teoría compuesta por dos métricas,

un concepto ampliamente estudiado. Massive Gravity [32–37] es una teoría de dos métricas, una dinámica y otra fija, rompiendo así la covariancia que se esperaría de una teoría de gravitación. Si agregamos un término cinético de Einstein Hilbert para la métrica que antes era fija, este problema se soluciona, pero hemos dotado de más grados de libertad a la teoría. Este tipo de teorías se les denomina Bigravity [38–41].

Las TGCA con $Q \equiv q_{\mu\nu}$ es exactamente el paso intermedio: La segunda métrica no cuenta con término cinético pero se asume dinámica. De esta forma no rompemos covariancia y no agregamos más grados de libertad. Notablemente, EBI corresponde a una de estas teorías [42]. Es razonable así investigar en este rumbo si estamos tratando de identificar soluciones o alternativas a EBI.

En [43], las TGCA son estudiadas de forma general. Los autores concluyen (1) que si Q no se describe en función de los campos de materia el sistema es idénticamente igual a relatividad general más un término de constante cosmológica y (2) la presencia de materia en la descripción de Q hace aparecer términos en la ecuación de movimiento para $g_{\mu\nu}$ que son derivadas de los campos de materia (y que en el capítulo anterior vimos que generan divergencias para ciertas distribuciones de materia).

Los autores asumen que de la ecuación de movimiento (4.2) Q puede ser resuelto en su totalidad en función de las otras variables del sistema. Sin embargo, esto no es necesariamente así: se puede dar el caso que de la ecuación para Q ,

$$\frac{\partial}{\partial Q} U(g_{\mu\nu}, Q) = 0 \quad (4.4)$$

sólo obtengamos

$$U = U(g_{\mu\nu}, \bar{Q}),$$

donde \bar{Q} representa un objeto que no podemos fijar a partir de (4.4).

Para aclarar un poco la discusión , supongamos un potencial dado por

$$U(g_{\mu\nu}, q_{\mu\nu}) = \sqrt{|g|} (\alpha_1 g_{\alpha\beta} q^{\alpha\beta} - \alpha_2 q_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}). \quad (4.5)$$

Antes de continuar, es necesario aclarar las motivaciones de la forma de este potencial.

(1) El campo auxiliar Q ha tomado la forma de un tensor de rango 2, $q_{\mu\nu}$. Es el caso que nos interesa, pues EBI se puede formular como una TGCA bimétrica. (2) La forma más general de $U(g_{\mu\nu}, q_{\mu\nu})$ estará dada por [44]

$$U(g_{\mu\nu}, q_{\mu\nu}) = \sqrt{W(q_{\mu\nu}, g_{\mu\nu})} f(X_1, \dots, X_n), \quad (4.6)$$

donde $\sqrt{W(g_{\mu\nu}, q_{\mu\nu})}$ es una densidad tensorial de peso apropiado y $f(X_1 \dots X_n)$ es una función arbitraria de los m invariantes $X_m \equiv (q^{\mu\nu} g_{\mu\nu})^m$, donde $0 \leq m \leq D$, siendo D el número de dimensiones en que estamos trabajando (cualquier invariante con $m > D$ puede ser descrito como combinación lineal de los invariantes con $m \leq D$; este es un resultado del teorema de Caley-Hamilton). En mi caso ocuparé también los invariantes $Y_m = (g^{\mu\nu} q_{\mu\nu})^m$, ya que su uso facilita algunos casos particulares.

Volvamos a nuestro ejemplo (4.5). La ecuación (4.2) es equivalente a

$$\alpha_1 g_{\mu\nu} + \alpha_2 q_{\alpha\mu} g^{\alpha\beta} q_{\beta\nu} = 0. \quad (4.7)$$

Para hacer más gráfico nuestro ejemplo, supondremos

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = f(dx_1^2 + dx_2^2), \quad (4.8)$$

$$q_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = w dx_1^2 + 2y dx_1 dx_2 + z dx_2^2. \quad (4.9)$$

Reemplazando esto en (4.7), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$(w^2 + y^2)\alpha_2 + \alpha_1 f^2 = 0, \quad (4.10)$$

$$(y^2 + z^2)\alpha_2 + \alpha_1 f^2 = 0, \quad (4.11)$$

$$\alpha_2 y(w + z) = 0. \quad (4.12)$$

Dirigamos nuestra atención a (4.12). Existen 2 soluciones a ella: Si $y = 0$, el sistema se reduce a $q_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$, obteniendo así que $U \propto \sqrt{|g|}$. Esto en (4.1) es un término de constante cosmológica. En cambio, si en (4.12) usamos $w = -z$, (4.10) y (4.11) se reducen a una sola ecuación,

$$(y^2 + z^2)\alpha_2 + \alpha_1 f^2 = 0, \quad (4.13)$$

donde solo podremos despejar una de las incógnitas (y ó z).

4.1. Potencial arbitrario

En esta sección resolveremos para un caso más general, mostrando en particular que la ecuación de campo para $g_{\mu\nu}$ no permite otra modificación que no sea un término de constante cosmológica.

La acción a investigar es

$$S[g, q] = \kappa \int \sqrt{|g|} R + \int \sqrt{|g|} U(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n), \quad (4.14)$$

donde nuevamente $X_n = (q_{\mu\nu} g^{\mu\nu})^n$, $Y_n = (q^{\mu\nu} g_{\mu\nu})^n$. Ciertamente se podría pensar en elementos de volumen más novedosos o generales que $\sqrt{|g|}$, pero es posible demostrar que al menos para dos tradicionales modificaciones (Apéndice I),

$$\sqrt{|g + \mathbf{q}|} U(X_1, \dots, Y_n) \rightarrow \sqrt{|g|} \tilde{U}(X_1, \dots, Y_n), \quad (4.15)$$

$$|g|^{1/2-m} |q|^m U(X_1, \dots, Y_n) \rightarrow \sqrt{|g|} \tilde{U}(X_1, \dots, Y_n). \quad (4.16)$$

Las ecuaciones (4.2) y (4.3) serán, respectivamente,

$$\frac{\partial}{\partial q_{\mu\nu}} U(X_1, \dots, Y_n) = 0, \quad (4.17)$$

$$\kappa G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} U(X_1, \dots, Y_n) g_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} U(X_1, \dots, Y_n) = 0. \quad (4.18)$$

No es difícil demostrar que (Apéndice II)

$$g_{\mu\alpha} \frac{\partial U}{\partial q_{\alpha\beta}} q_{\beta\nu} = \frac{\partial U}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (4.19)$$

que junto a (4.17) implica $\partial U / \partial g^{\mu\nu} = 0$, lo que deja (4.18) como

$$\kappa G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} U(X_1, \dots, Y_n) g_{\mu\nu} = 0, \quad (4.20)$$

y las identidades de Bianchi en la última relación implican que

$$[U(X_1, \dots, Y_n)]_{;\nu} g^{\mu\nu} = 0. \quad (4.21)$$

Como $U(X_1, \dots, Y_n)$ es un escalar, la última condición solo se satisface cuando $U(X_1, \dots, Y_n)$ es una constante. Así, (4.20) toma la forma de

$$G_{\mu\nu} + C_1 g_{\mu\nu} = 0, \quad (4.22)$$

que son las ecuaciones de Einstein más un término de constante cosmológica.

4.2. Conclusiones

Las divergencias en la curvatura de EBI nos llevaron a un estudio más profundo en su estructura. El hecho de que EBI es una teoría con una representación de TGCA, hizo que se procediera al estudio de este tipo de teorías. Los resultados expuestos en [43] abarcaban con cierta generalidad casi todos los casos, salvo el expuesto en este trabajo.

Se pudo comprobar que en el caso desarrollado la teoría no demuestra variantes respecto a Relatividad General, al menos para un término de interacción bastante general.

Capítulo 5

K-Inflation Afín

Uno de los mayores desafíos que tiene la cosmología es inflación [45]. No son pocas las alternativas propuestas para modelar y cuadrar este hipotético período del universo con las mediciones experimentales actuales. Un buen número de ellas se pueden encontrar en [46].

“K-inflation” [11] es una teoría que modela el período de inflación con un campo escalar ϕ . El modelo general es

$$S[g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{|g|} [R + p(\phi, X)], \quad (5.1)$$

donde $X \equiv \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$. Se le llama K-Inflation porque trabaja principalmente la idea de las consecuencias que pueden tener en inflación los términos cinéticos X . Notablemente, para un amplio rango de formas de $p(\phi, X)$ e independiente de las condiciones iniciales, la teoría tiene un proceso inflacionario del cuál se puede salir de forma natural.

Los regímenes donde K-Inflation se concentra son de fuertes curvaturas. Por supuesto que la naturaleza dual entre la gravedad de Eddington y relatividad general motiva la investigación de la descripción afín de K-Inflation, la que se le llamará como “K-Inflation Afín” (KIA).

En el capítulo 1 concluimos que EBI en su forma actual queda prácticamente descartada. La estructura de sus ecuaciones de movimiento son causantes de comportamientos anómalos y divergentes en su curvatura. Veremos que KIA no sufrirá de esta patología al nivel de sus ecuaciones de movimiento.

5.1. Principio de acción

La acción para KIA es

$$S[\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}, \phi] = \int d^4x \sqrt{|R_{\mu\nu}|} f(X), \quad (5.2)$$

donde $X = R^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi$. Por simplicidad, se investigará suponiendo que f solo depende de los términos cinéticos de ϕ . Esta acción es la construcción afín de K-Inflation.

La ecuación de movimiento para la conexión es

$$\left(\frac{1}{2} \sqrt{|R_{\mu\nu}|} R^{\mu\nu} f - \sqrt{|R|} f' \partial^{\mu} \phi \partial^{\nu} \phi \right)_{;\xi} = 0, \quad (5.3)$$

donde $f' = \partial f / \partial X$. Haciendo la definición

$$\sqrt{g} g^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{|R|} R^{\mu\nu} f - \sqrt{|R|} f' \partial^{\mu} \phi \partial^{\nu} \phi \quad (5.4)$$

la ecuación (5.3) se satisface siempre y cuando $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\xi} (g_{\xi\beta,\gamma} + g_{\xi\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\xi})$.

Nos serán útiles las siguientes propiedades:

$$\det(\delta_{\beta}^{\alpha} + u^{\alpha} u_{\beta}) = 1 + u^{\mu} u_{\mu},$$

donde u^{μ} es un vector arbitrario y

$$\begin{aligned} (M^{-1})^{\mu\nu} &= (A^{-1})^{\mu\nu} + V^{\mu} V^{\nu} \\ \Rightarrow M_{\mu\nu} &= A_{\mu\nu} + H V_{\mu} V_{\nu}, \end{aligned}$$

donde $M_{\mu\nu}$ y $A_{\mu\nu}$ son tensores arbitrarios, V^μ es un vector arbitrario y H un escalar cuya forma estará fijada por $(M^{-1})^{\mu\alpha}M_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$.

Usando estas propiedades en (5.4) y variando (5.2) respecto a ϕ podemos escribir las ecuaciones de campo respectivamente para Γ y ϕ como

$$\frac{f}{2}\sqrt{|\xi|}\left(R_{\mu\nu} + \frac{2f'}{f}\frac{\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi}{\xi}\right) = g_{\mu\nu}, \quad (5.5)$$

$$\left(\sqrt{|R|}f'R^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\right)_{,\nu} = 0, \quad (5.6)$$

donde $f' = \partial f/\partial X$, $\xi \equiv 1 - (2f'/f)X$.

Es interesante saber que si $f = 2/\Lambda\sqrt{1 + X/X_0}$, KIA es completamente equivalente a nivel de ecuaciones de movimiento con la teoría (Apéndice IV)

$$S[g] = \int \sqrt{|g|}\left(R(g) - 2\Lambda + \frac{1}{X_0}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right), \quad (5.7)$$

que es un término de Einstein-Hilbert más constante cosmológica acoplado minimalmente a un campo escalar sin masa y sin potencial. X_0 es una constante de dimensionalidad. Más tarde volveremos a este hecho.

La expresión (5.5) puede re-expresarse cómo

$$R_{\mu\nu} = -\frac{2f'}{f}\frac{\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi}{\xi} + \frac{2}{\sqrt{|\xi|}f}g_{\mu\nu} \quad (5.8)$$

y llevarse a la forma

$$G_{\mu\nu} = T(X)_{\mu\nu}, \quad (5.9)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y

$$T(X)_{\mu\nu} \equiv -\frac{2f'}{f}\frac{\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi}{\xi} + \left(\frac{f'}{f}\frac{\nabla^2\phi}{\xi} - \frac{2}{f\sqrt{|\xi|}}\right)g_{\mu\nu}, \quad (5.10)$$

con $\nabla^2\phi \equiv g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$.

Podemos identificar $T(X)_{\mu\nu}$ con un fluido ideal, definiendo

$$(\rho + p)u_\mu u_\nu = -\frac{2f'}{f} \frac{\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi}{\xi}, \quad (5.11)$$

$$p = \left(\frac{f'}{f} \frac{\nabla^2 \phi}{\xi} - \frac{2}{f\sqrt{|\xi|}} \right). \quad (5.12)$$

Finalmente, usando que $g^{\mu\nu}u_\mu u_\nu = -1$ y que $\nabla^2 \phi = 2X\xi/(f\sqrt{|\xi|})$, obtenemos

$$\rho = \frac{2}{f\sqrt{|\xi|}} \left(\frac{f'X}{f} + 1 \right), \quad (5.13)$$

$$p = \frac{2}{f\sqrt{|\xi|}} \left(\frac{f'X}{f} - 1 \right). \quad (5.14)$$

Para el caso $f' = 0$, $\rho = -p$ y (5.9) se reduce a $G_{\mu\nu} + (2/f)g_{\mu\nu} = 0$, que es lo que esperaríamos para la ecuación de estado de constante cosmológica.

Representar la materia como fluido ideal facilitará el análisis cosmológico de la teoría.

5.2. Cosmología

Asumiremos

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5.15)$$

$$\phi = \phi(t). \quad (5.16)$$

En este caso, podemos depurar las ecuaciones (5.5) en

$$g_{00} = \frac{f}{2} \frac{\sqrt{|\xi|}}{\xi} R_{00}, \quad (5.17)$$

$$g_{ij} = \frac{f}{2} \sqrt{|\xi|} R_{ij}, \quad (5.18)$$

donde $i, j = 1, 2, 3$. Defina $\dot{F} \equiv dF/dt$ para F función arbitraria. Como $R_{00} = -3\ddot{a}/a$ y $R_{ij} = 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}$, no es difícil llegar a la ecuación de Friedmann,

$$H^2 = \frac{2}{3f} \frac{[1 + (f'/f)X]}{\sqrt{|1 - (2f'/f)X|}}. \quad (5.19)$$

Depuramos la ecuación del campo ϕ (5.6):

$$\sqrt{|R|} f' R^{00} \dot{\phi} = C_1, \quad (5.20)$$

donde C_1 es una constante de integración. La ecuación anterior puede re-expresarse como (Apéndice III)

$$-\left(\frac{2}{f}\right)^3 \frac{f'^2 a^6}{\xi \sqrt{|\xi|}} X = C_1^2. \quad (5.21)$$

En este punto hay dos soluciones muy sencillas que es interesante exhibir.

5.2.1. Casos Particulares

Caso $f(X) = 2/\bar{\Lambda}$:

La expresión (5.19) se reduce a

$$H^2 = \bar{\Lambda}/3, \quad (5.22)$$

que es lo que esperabamos, ya que para este caso (5.2) es de la forma

$$S = \frac{2}{\bar{\Lambda}} \int d^4x \sqrt{|R|} \quad (5.23)$$

que es la acción de la gravedad de Eddington.

Caso $f(X) = (2/\bar{\Lambda})X^n$:

Las ecuaciones serán

$$H^2 = \frac{1}{3} \bar{\Lambda} \frac{1+n}{\sqrt{|1-2n|}} X^{-n}, \quad (5.24)$$

$$X^n = \left(\frac{4\bar{\Lambda} n^2}{C_1^2 (-1+2n) \sqrt{|1-2n|}} \right)^{n/(1+n)} a^{6n/(1+n)}. \quad (5.25)$$

A partir de aquí obtenemos

$$H^2 = \frac{\bar{\Lambda}}{3} \frac{1+n}{\sqrt{|1-2n|}} \left[\frac{4\bar{\Lambda}}{C_1^2 (-1+2n)\sqrt{|1-2n|}} n^2 \right]^{-n/(1+n)} a^{-6n/(1+n)}. \quad (5.26)$$

Claramente, el caso $n = 1/2$ ha de ser tratado de forma independiente. Por el momento no nos interesará en particular.

Si expandimos en torno $n = 0$ la última expresión obtenemos

$$H^2 = \frac{\bar{\Lambda}}{3} + \vartheta(n), \quad (5.27)$$

así, como esperabamos, para $n = 0$ recuperamos (5.22). Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene

$$a(t) \sim t^{(1+n)/(3n)}. \quad (5.28)$$

En particular, para $n = 2$ se obtiene el comportamiento asociado para $a(t)$ en la época dominada por radiación. Para $n = 1$ se obtiene el comportamiento en la época dominada por materia.

El hecho de que $f = 2/\Lambda$ sea equivalente a un universo vacío con constante cosmológica y que $f = (2/\Lambda)(X/X_0)^n$ sea una familia de soluciones que según n son capaces de representar distintas etapas del universo, podría llevarnos a pensar que la siguiente acción

$$S[\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, \phi] = \int dx^4 \sqrt{|R|} \left(\frac{2}{\Lambda} + \sum_{n=n_1}^{n_m} \alpha_n X^n \right) \quad (5.29)$$

(con α_n coeficientes arbitrarios y de la dimension adecuada) interpola entre inflación y diferentes etapas del universo, según la elección que hagamos de las potencias de X .

Sin embargo, cabe recalcar que esta proposición, aunque plausible, es ingenua. Por su definición, el comportamiento de $X = R^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ es en principio desconocido.

El vínculo entre el inverso de la curvatura y la tasa de cambio del campo no nos permite decir *a priori* cuál será la magnitud de X para cierto régimen, por lo tanto no podemos fijar un ordenamiento entre los diferentes regímenes tomando como criterio la magnitud de X . Esto se puede decir sólo después de resolver las ecuaciones.

Sin perjuicio de lo anterior, otra de las acciones interesantes a estudiar sería

$$S[g] = \int \sqrt{|R|} \left(\frac{2}{\Lambda_1} + \frac{2}{\Lambda_2} \left[\sqrt{1 + X/X_0} - 1 \right] \right), \quad (5.30)$$

donde Λ_1 y Λ_2 tienen dimensiones de constante cosmológica y X_0 es una constante de dimensionalidad. En este caso la intención de estudio es ver si esta acción puede interpolar entre un espacio De Sitter ($X/X_0 \ll 1$) y Relatividad General con constante cosmológica y un campo escalar sin masa ni potencial ($X/X_0 \gg 1$). Sin embargo, esta pendiente aún el significado de estos regímenes en la evolución cosmológica, y por ende, el real sentido físico que pudiese tener.

5.3. Conclusiones

K-Inflation afín (KIA) se presenta como una propuesta razonable de modelamiento cosmológico para el universo temprano. La dualidad entre la gravedad de Edington y relatividad general hace pensar que, para curvaturas fuertes, KIA podría mostrar efectos más novedosos que su precedente versión métrica, K-Inflation.

KIA, a diferencia de EBI, relaciona (por medio de sus ecuaciones de movimiento) $g'' \sim \rho$, donde g representa los campos métricos y ρ los campos de materia. Así, no tiene problemas de singularidades en la curvatura para distribuciones de materia discontinuas, con cambios bruscos ó muy pronunciadas. La patología presente en EBI en KIA es inexistente.

Cosmológicamente, KIA presenta para elecciones particulares de $f(X)$ analogías



evidentes con cosmología en relatividad general. Sin embargo, resultados más robustos de KIA (para $f(X)$ arbitrarias) están en actual investigación.

Capítulo 6

Conclusión

Gravedad de Eddington es una teoría dual a relatividad general. Las teorías estudiadas en este trabajo posiblemente heredan esta propiedad. Se puede presumir que en regímenes de fuertes curvaturas, estas teorías exhibirán dinámicas novedosas e interesantes que son inexistentes en relatividad general.

Aunque la teoría de Eddington-Born-Infeld (EBI) contempla interesante propiedades cosmológicas, la relación algebraica entre la métrica y la materia la hace fallar en el modelamiento de materia discontinua o de distribución muy pronunciada.

En el estudio de las teorías de gravedad con campos auxiliares (TGCA), donde EBI es un caso particular, se confirmó que estas patologías están presentes salvo en el caso trivial, donde la TGCA es relatividad general más un término de constante cosmológica. Esto reafirma que la forma actual de EBI es inviable como alternativa a relatividad general.

A diferencia de EBI, en K-Inflation Afín (KIA) la métrica se relaciona con la materia mediante una ecuación de segundo orden en la métrica. Así, KIA estaría libre de las patologías de EBI.

KIA es equivalente a un sistema de ecuaciones de Einstein con materia descrita por un fluido ideal. Esto resulta muy conveniente para estudiar su cosmología.

Para ciertos casos particulares, la cosmología de KIA muestra analogías con la cosmología en relatividad general.

Las motivaciones de KIA como una teoría plausible para modelar inflación debido a las fuertes curvaturas presentes en este hipotético período del universo, la estructura de sus ecuaciones de movimiento y su relación con la cosmología descrita en relatividad general la muestran como una novedosa y prometedora alternativa a relatividad general.

Capítulo 7

Apéndice

7.1. Apéndice I

Defina $\mathbf{A} \equiv A_{\nu}^{\mu}$. A partir de la relación

$$\det(\mathbf{A}) = \exp(\text{Tr}[\log \mathbf{A}]), \quad (7.1)$$

se puede derivar

$$\det(\mathbf{1} + \mathbf{A}) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{Tr}[\mathbf{A}^n]\right), \quad (7.2)$$

que en particular podemos expresar como

$$\det(\mathbf{1} + \mathbf{g}^{-1}\mathbf{q}) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} Y_n\right), \quad (7.3)$$

donde se ha definido $Y_n \equiv \text{Tr}[(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{q})^n]$. Por el teorema de Caley-Hamilton, la anterior expresión puede llevarse a

$$\det(\mathbf{1} + \mathbf{g}^{-1}\mathbf{q}) = \exp\left(\sum_{n=1}^D a_n Y_n\right), \quad (7.4)$$

donde D es la dimensión del espacio de matrices y a_n son coeficientes arbitrarios. La última expresión nos permite decir que

$$\det(\mathbf{1} + \mathbf{g}^{-1}\mathbf{q}) = F(Y_1, \dots, Y_D), \quad (7.5)$$

donde F es una función arbitraria. De esta forma, podemos reducir el elemento de volumen

$$\sqrt{|\mathbf{g} + \mathbf{q}|} = \sqrt{|g|} \sqrt{|\mathbf{1} + \mathbf{g}^{-1}\mathbf{q}|} \quad (7.6)$$

$$= \sqrt{|g|} \sqrt{F(Y_1, \dots, Y_D)}. \quad (7.7)$$

Si definimos $\mathbf{g}^{-1}\mathbf{q} = \mathbf{1} + \mathbf{M} \Rightarrow q^m = \det(\mathbf{1} + \mathbf{M})^m g^m$, podemos encontrar la siguiente relación,

$$g^{1/2-m} q^m = \sqrt{|g|} \det(\mathbf{1} + \mathbf{M})^m. \quad (7.8)$$

Usando (7.2) y que $\mathbf{M}^n \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{g}^{-1}\mathbf{q})^n$ de lo cuál se puede derivar fácilmente su traza, podemos reducir este elemento de volumen también a

$$g^{1/2-m} q^m = \sqrt{|g|} F(Y_1, \dots, Y_D). \quad (7.9)$$

7.2. Apéndice II

Defina $A \equiv A_{\nu}^{\mu}$. Consideremos que

$$\frac{\partial X_n}{\partial \mathbf{q}} = n(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{q})^{n-1}\mathbf{g}^{-1}, \quad (7.10)$$

$$\frac{\partial Y_n}{\partial \mathbf{q}} = -n(\mathbf{q}^{-1}\mathbf{g})^n\mathbf{q}^{-1}, \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial X_n}{\partial \mathbf{g}^{-1}} = n(\mathbf{q}\mathbf{g}^{-1})^{n-1}\mathbf{q}, \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial Y_n}{\partial \mathbf{g}^{-1}} = -n(\mathbf{g}\mathbf{q}^{-1})^n\mathbf{g}. \quad (7.13)$$

$$(7.14)$$

Con esto re-expresamos

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{g}^{-1}} = \sum_{n=1}^D n \left[\frac{\partial U}{\partial X_n} (\mathbf{q}\mathbf{g}^{-1})^{n-1}\mathbf{q} - \frac{\partial U}{\partial Y_n} (\mathbf{g}\mathbf{q}^{-1})^n\mathbf{g} \right], \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \sum_{n=1}^D n \left[\frac{\partial U}{\partial X_n} (\mathbf{g}^{-1}\mathbf{q})^{n-1}\mathbf{g}^{-1} - \frac{\partial U}{\partial Y_n} (\mathbf{q}^{-1}\mathbf{g})^n\mathbf{q}^{-1} \right]. \quad (7.16)$$

Manipulando (7.16),

$$\mathbf{g} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{q} = \sum_{n=1}^D n \left[\frac{\partial U}{\partial X_n} \mathbf{g}(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{q})^{n-1}\mathbf{g}^{-1}\mathbf{q} - \frac{\partial U}{\partial Y_n} \mathbf{g}(\mathbf{q}^{-1}\mathbf{g})^n \right], \quad (7.17)$$

$$= \sum_{n=1}^D n \left[\frac{\partial U}{\partial X_n} (\mathbf{q}\mathbf{g}^{-1})^{n-1}\mathbf{q} - \frac{\partial U}{\partial Y_n} (\mathbf{g}\mathbf{q}^{-1})^n\mathbf{g} \right], \quad (7.18)$$

$$= \frac{\partial U}{\partial \mathbf{g}^{-1}} \quad (7.19)$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{g} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{q} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{g}^{-1}}. \quad (7.20)$$



7.3. Apéndice III

Variando la acción

$$S[\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}, \phi] = \int dx^4 \sqrt{|R|} f(X) \quad (7.21)$$

respecto a el campo $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ obtenemos

$$\left[\frac{f}{2} \sqrt{|R|} \left(R^{\mu\nu} - \frac{2f'}{f} R^{\mu\alpha} \partial_{\mu} \phi R^{\nu\beta} \partial_{\nu} \phi \right) \right]_{;\xi} = 0, \quad (7.22)$$

cuya solución es

$$\frac{f}{2} \sqrt{|R|} \left(R^{\mu\nu} - \frac{2f'}{f} R^{\mu\alpha} \partial_{\mu} \phi R^{\nu\beta} \partial_{\nu} \phi \right) = \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \quad (7.23)$$

y $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ será la conexión de Levi-Civita.

Contrayendo (7.23) con $\partial_{\nu} \phi$,

$$\frac{f}{2} \left(1 - \frac{2f'}{f} X \right) \sqrt{|R|} R^{\mu\alpha} \partial_{\alpha} \phi = \sqrt{|g|} g^{\mu\alpha} \partial_{\alpha} \phi, \quad (7.24)$$

$$\left(\frac{f}{2f'} - X \right) \sqrt{|R|} f' R^{\mu\alpha} \partial_{\alpha} \phi = \sqrt{|g|} g^{\mu\alpha} \partial_{\alpha} \phi, \quad (7.25)$$

obtenemos

$$(\sqrt{|R|} f' R^{\mu\alpha} \partial_{\alpha} \phi)_{;\nu} = \left(\frac{2f'}{\xi f} \sqrt{|g|} g^{\mu\alpha} \partial_{\alpha} \phi \right)_{;\nu}. \quad (7.26)$$

7.4. Apéndice IV

Para $f = \frac{2}{\Lambda} \sqrt{1 + X/X_0}$ notamos que

$$\begin{aligned} \frac{f}{2} \sqrt{|\xi|} &= \frac{1}{\Lambda}, \\ \frac{2f'}{f\xi} &= \frac{1}{X_0}. \end{aligned}$$

Con esta información, no es difícil ver que la ecuación (5.5) pasa a ser

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla^2 \phi g_{\mu\nu} + \frac{1}{X_0} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = 0. \quad (7.27)$$

Para esta elección particular de f' , la ecuación (7.26) pasa a ser

$$(\sqrt{|R|} f' R^{\mu\nu} \phi_{,\nu})_{,\mu} = \left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \frac{\phi_{,\nu}}{X_0} \right)_{,\mu}. \quad (7.28)$$

El lado izquierdo de la ecuación anterior es idénticamente 0. De esta forma, obtenemos finalmente

$$\left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \phi_{,\nu} \right)_{,\mu} = 0. \quad (7.29)$$

No es difícil comprobar que estas dos ecuaciones son las mismas para la teoría

$$S[g] = \int \sqrt{|g|} \left(R - 2\Lambda + \frac{1}{X_0} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right) \quad (7.30)$$

Referencias

- [1] C. M. Will, *Living Rev.Rel.* **9**, 3 (2006).
- [2] A. G. Riess et al., *Astron.J.* **116**, 1009 (1998).
- [3] S. Perlmutter et al., *Astrophys.J.* **517**, 565 (1999).
- [4] D. Spergel et al., *Astrophys.J.Suppl.* **170**, 377 (2007).
- [5] D. Spergel et al., *Astrophys.J.Suppl.* **148**, 175 (2003).
- [6] M. Persic, P. Salucci y F. Stel, *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.* **281**, 27 (1996).
- [7] T. Harada, H. Iguchi y K.-i. Nakao, *Prog.Theor.Phys.* **107**, 449 (2002).
- [8] S. Carlip, *Rept.Prog.Phys.* **64**, 885 (2001).
- [9] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla y C. Skordis, *Phys.Rept.* **513**, 1 (2012).
- [10] A. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity* (The University Press, 1924).
- [11] C. Armendariz-Picon, T. Damour y V. F. Mukhanov, *Phys.Lett.* **B458**, 209 (1999).
- [12] B. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, 2009), segunda edición.

- [13] M. Banados, Eddington-Born-Infeld action and the dark side of general relativity, arXiv:0807.5088.
- [14] M. Ferraris y J. Kijowski, Lett.Math.Phys. **5**, 127 (1981).
- [15] N. J. Poplawski, Found.Phys. **39**, 307 (2009).
- [16] M. Born y L. Infeld, Proc.Roy.Soc.Lond. **A144**, 425 (1934).
- [17] A. Sternlieb, J.Phys.Conf.Ser. **437**, 012010 (2013).
- [18] E. Purcell y D. Morin, *Electricity and Magnetism*, Electricity and Magnetism (Cambridge University Press, 2013).
- [19] S. V. Ketov, Many faces of Born-Infeld theory, arXiv:hep-th/0108189.
- [20] S. Deser y G. W. Gibbons, Classical and Quantum Gravity **15**, L35 (1998).
- [21] J. A. Feigenbaum, P. G. Freund y M. Pigli, Phys.Rev. **D57**, 4738 (1998).
- [22] J. A. Feigenbaum, Phys.Rev. **D58**, 124023 (1998).
- [23] D. N. Vollick, Phys.Rev. **D72**, 084026 (2005).
- [24] M. Banados y P. G. Ferreira, Phys.Rev.Lett. **105**, 011101 (2010).
- [25] J. Oppenheimer y G. Volkoff, Phys.Rev. **55**, 374 (1939).
- [26] C. Misner, K. Thorne y J. Wheeler, *Gravitation: Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler*, Gravitation (W. H. Freeman, 1973).
- [27] T. P. Sotiriou y V. Faraoni, Rev.Mod.Phys. **82**, 451 (2010).
- [28] E. Barausse, T. P. Sotiriou y J. C. Miller, Class.Quant.Grav. **25**, 062001 (2008).

- [29] P. Pani y T. P. Sotiriou, *Phys.Rev.Lett.* **109**, 251102 (2012).
- [30] G. J. Olmo, *Phys.Rev.* **D78**, 104026 (2008).
- [31] M. Milgrom, *Phys.Rev.* **D80**, 123536 (2009).
- [32] M. Fierz y W. Pauli, *Proc.Roy.Soc.Lond.* **A173**, 211 (1939).
- [33] H. van Dam y M. Veltman, *Nucl.Phys.* **B22**, 397 (1970).
- [34] A. Vainshtein, *Phys.Lett.* **B39**, 393 (1972).
- [35] D. Boulware y S. Deser, *Phys.Rev.* **D6**, 3368 (1972).
- [36] C. de Rham y G. Gabadadze, *Phys.Rev.* **D82**, 044020 (2010).
- [37] S. Hassan y R. A. Rosen, *Phys.Rev.Lett.* **108**, 041101 (2012).
- [38] C. Isham, A. Salam y J. Strathdee, *Phys.Rev.* **D3**, 867 (1971).
- [39] T. Damour y I. I. Kogan, *Phys.Rev.* **D66**, 104024 (2002).
- [40] T. Damour, I. I. Kogan y A. Papazoglou, *Phys.Rev.* **D66**, 104025 (2002).
- [41] S. Hassan y R. A. Rosen, *JHEP* **1202**, 126 (2012).
- [42] J. H. Scargill, M. Banados y P. G. Ferreira, *Phys.Rev.* **D86**, 103533 (2012).
- [43] P. Pani, T. P. Sotiriou y D. Vernieri, *Gravity with Auxiliary Fields*, arXiv:1306.1835.
- [44] T. Damour y I. I. Kogan, *Phys.Rev.* **D66**, 104024 (2002).
- [45] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic Press (Academic Press, 2003).
- [46] K. A. Olive, *Phys.Rept.* **190**, 307 (1990).