

UCH-FC
MAG-F
M385
C1



Solitones discretos de superficie en medios periódicos y aperiódicos no-lineales

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias con mención en Física
Facultad de Ciencias

por

Alejandro Javier Martínez Ulloa

Enero, 2013

Director de Tesis: **Dr. Mario Ignacio Molina Galvez**

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Alejandro Javier Martínez Ulloa

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Física, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 27 de Septiembre de 2012.

Director de Tesis

Dr. Mario Molina

Handwritten signature in blue ink on a horizontal line.

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Nicolas Mujica (Presidente)

Handwritten signature in blue ink on a horizontal line.

Dr. Carlos Saavedra

Dr. Birger Seifert

Handwritten signature in blue ink on a horizontal line.

Dr. Rodrigo Vicencio

Dedicado a Gaspar... en quien pienso a cada minuto.



AGRADECIMIENTOS

Le agradezco a mi tutor Dr. Mario Molina quien ha cumplido un rol importante en estos últimos años en mi vida, tanto en términos académicos como personales. Otro académico importante a lo largo del desarrollo del magíster fue el Dr. Rodrigo Vicencio con quien tuve interesantes discusiones y logré aprender bastante sobre sistemas discretos. En general, también a todos los académicos que he tenido como profesores y en particular al Dr. Juan Alejandro Valdivia, de quien siempre he recibido palabras amistosas y que he valorado mucho. Me gustaría agradecer también a mis compañeros y amigos, aun cuando a la mayoría ya casi ni veo, pero se que me apoyan en cada paso que doy, entre ellos destaco a: Santiago Rojas, Uta Naether, Guillermo Retamales, Pablo Ortiz, Yair Zarate, Carolina Espinoza y Pedro Maldonado. Con la mayoría de ellos tuve el agrado de compartir gran parte de mi paso por la Licenciatura, una etapa importante en mi vida. También agradezco a mi familia que han sido de gran apoyo, en especial este último tiempo, y particularmente a mi madre quien me ha entregado muchas cosas en campos muy diversos y ha contribuido, en gran medida, al que yo esté aquí hoy.

Agradezco también al centro de óptica y fotónica (CEFOP, FB0824/2008), no solo por su apoyo económico a lo largo del magíster, si no también por la posibilidad que me brindo de viajar un par de veces a Concepción, donde conocí científicos de gran nivel. Así también como al núcleo milenio de óptica avanzada (P10-030-F) y a FONDECYT (proyectos 1080374 y 1070897) por su ayuda económica.

Índice

1. Introducción	1
2. Sistemas discretos no-lineales	5
2.1. Ecuación no-lineal de Schrödinger discreta	5
2.1.1. Estimación del acoplamiento en función de la distancia	8
2.2. Propiedades fundamentales de sistemas periódicos con acoplamiento a primeros vecinos	12
2.3. Solitones discretos	14
2.4. Resumen de este capítulo	16
3. Difusión en sistemas lineales con acoplamiento de largo alcance	17
3.1. Modelo	19
3.2. Difusión de un pulso delta	20
3.2.1. Difusión en un sistema infinito	21
3.2.2. Difusión en un sistema semi-infinito	27
3.3. Resumen de este capítulo	33
4. Acoplamiento de largo-alcance en sistemas semi-infinitos	35
4.1. Modelo	37

4.1.1. Ondas lineales en el regimen no-lineal: inestabilidad modulacional	39
4.2. Solitones discretos en arreglos con acoplamiento de largo-alcance . . .	45
4.2.1. Solitones en sistemas infinitos	46
4.2.2. Solitones en sistemas semi-infinitos	50
4.3. Generación dinámica de solitones discretos de superficie	56
4.4. Acoplamiento de alcance finito en arreglos semi-infinitos: arreglos zig-zag	58
4.5. Resumen de este capítulo	61
5. Sistemas Finitos Aperiódicos	63
5.1. Redes Cuasi-periódicas tipo Fibonacci	65
5.2. Redes inconmensurablemente moduladas	68
5.3. Adimensionalización	69
5.4. Solitones de Superficie	69
5.4.1. Modos en el Gap de reflexión total interna	73
5.4.2. Modos en el Gap de reflexión de Bragg	74
5.5. Dinámica de localización	76
5.6. Cuasi-periodicidad no-diagonal	81
5.7. Resumen de este capítulo	81
6. Conclusiones	84
A. Análisis de estabilidad lineal	94
B. Publicaciones	97

RESUMEN

En esta tesis se estudian las propiedades fundamentales de modos no-lineales de superficie en redes unidimensionales en presencia de acoplamiento de largo alcance y cuasi-periodicidad.

Nosotros mostramos que las propiedades de dichos modos dependen fuertemente del tipo de no-linealidad, ya sea enfocante o desenfocante, induciéndose en ambos tipos de sistemas una fuerte asimetría entre ambos regímenes no-lineales. Dichos resultados han sido calculados para sistemas realistas permitiendo así su verificación experimental en el futuro.

ABSTRACT

In this thesis, we study the fundamental properties of surface nonlinear modes in one-dimensional lattices in presence of long-range coupling and quasi-periodicity.

We show that the properties of surface nonlinear modes depend strongly of the kind of nonlinearity, namely focusing or defocusing, inducing in both type of systems a strong asymmetry between both nonlinear regimens. These results have been calculated for realistic systems allowing their experimental verification in the future.

Capítulo 1

Introducción

En la observación de un fenómeno existen distintas formas de describirlo desde un punto de vista físico. En muchos casos utilizar las ecuaciones más fundamentales puede no ser lo más óptimo dependiendo del propósito de la descripción. Para ilustrar esto podemos pensar en las ecuaciones de Maxwell que describen de manera completa los fenómenos electromagnéticos clásicos, pero donde sólo somos capaces de resolver de manera exacta un número limitado de ellos. Así cuando estamos frente a ondas electromagnéticas propagándose en medios complejos, las ecuaciones de Maxwell se vuelven intratables analíticamente y, en muchos casos, muy costosas computacionalmente, por lo que es necesario recurrir a aproximaciones apropiadas para cada caso cuando ello sea posible. Por otra parte, un evento interesante que ocurre recurrentemente en física es que las ecuaciones parecieran no estar constreñidas a un escenario físico particular, un ejemplo de esto es la ecuación de Schrödinger que describe la propagación de una partícula cuántica y que surge con otros nombres en diferentes contextos. Por ejemplo, en condensados de Bose-Einstein en la aproximación de campo medio (a temperatura cero) la ecuación no-lineal de Schrödinger (variante de la ecuación de Schrödinger) recibe el nombre de ecuación de Gross-Pitaevskii. Mientras que en óptica, en la aproximación paraxial de un campo escalar,

se conoce como ecuación de Helmholtz paraxial. También, la física de sistemas discretos ha sido un tópico de interés por muchos años debido, entre otras cosas, a que da origen a fenomenología completamente diferente a la presente en sistemas continuos homogéneos. Sistemas discretos periódicos pueden ser encontrados en contextos diferentes incluyendo física de la materia condensada [1], óptica [2, 3], condensados de Bose-Einstein [4], y metamateriales magnéticos [5], entre otros. En particular, arreglos de guías de onda acopladas y redes fotónicas constituyen un área de intensa actividad en investigación dado por la riqueza de fenómenos físicos que se manifiestan como combinación de efectos de discretitud, periodicidad, no-linealidad y efectos de superficie [2], entre otros. Adicionalmente, poseen un atractivo especial debido a sus potenciales aplicaciones tecnológicas relacionadas con la creación y control de la propagación de pulsos ópticos, paso previo para el diseño de mecanismos de *switching* multipuerto y enrutamiento de señales en dispositivos completamente ópticos [6]. Finalmente, la óptica discreta se ha convertido en un verdadero banco de pruebas para la observación directa de varios fenómenos asociados a la discretitud y los medios periódicos, como son, oscilaciones de Bloch [7], localización de Anderson [8], y solitones discretos [9], por nombrar algunos.

Un concepto recurrente a lo largo de esta tesis es el de localización, y se refiere a un proceso en que el sistema tiende a quebrar el principio de equipartición de la energía, permitiendo que algunos elementos del sistema contengan la mayor parte de ésta. Experimentos matemáticos pioneros relacionados con este concepto son los de Fermi, Pasta y Ulam [10], en los que observan, por primera vez, localización en una cadena de osciladores acoplados anarmónicamente; es decir, que unos pocos osciladores vibraban con gran amplitud, mientras que la mayoría presenta oscilaciones de baja amplitud. Posterior a esto se vuelve inmensamente intensa la búsqueda de

oscilaciones acotadas espacialmente (tipo solitón) en sistemas discretos; en particular, son numerosos los trabajos tanto matemáticos [11], como en diversas áreas en física, tales como, junturas superconductoras de Josephson [12], metamateriales magnéticos [5], cristales fotónicos [13], condensados de Bose-Einstein [14], entre otros. Muchos de estos trabajos se han centrado en estudiar estructuras localizadas en sistemas muy grandes (formalmente en redes infinitas), mientras que por otro lado un aspecto actual vinculado a las posibles aplicaciones tecnológicas de este tipo de soluciones ha motivado el estudio de dichas estructuras localizadas en sistemas finitos o semi-infinitos, en ambos casos surge el concepto de “borde” o “superficie”, que corresponde a la frontera o interfase entre el arreglo y el “ambiente” exterior. En este caso se rompe con la periodicidad del sistema (al menos cerca de la superficie) dando origen a numerosos efectos nuevos, el mas notable en el contexto de esta tesis es que en un sistema perfectamente periódico, semi-infinito, la superficie actua de forma “repulsiva” ante la formación de solitones de superficie [15, 16], dando origen a un umbral, o energía mínima requerida para excitarlos. Dicho umbral es independiente del tipo de no-linealidad (enfocante o desenfocante).

En esta tesis estudiamos las propiedades de solitones discretos de superficie, así como las regiones de existencia, estabilidad, umbrales estacionarios y dinámicos necesarios para excitarlos, centrándonos en dos clases de sistemas: primero estudiaremos en detalle la formación de solitones de superficie en sistemas con acoplamiento de largo alcance, para luego estudiar el caso de sistemas con acoplamiento sólo a primeros vecinos pero que presentan una modulación cuasi-periódica de la energía en cada sitio de la red. En el capítulo 2, introduciremos la ecuación no-lineal de Schrödinger discreta presentado estimaciones para el acoplamiento entre guías, mostrando que, en principio, es posible tener intercambio de energía entre guías

lejanas. Además, introducimos algunas propiedades fundamentales de arreglos perfectamente periódicos con acoplamiento sólo a primeros vecinos tanto en el régimen lineal como no-lineal. Luego, en el capítulo 3, abordaremos el problema de difusión de un pulso inicialmente localizado en una red con acoplamiento de largo alcance, encontrando expresiones generales para el desplazamiento cuadrático medio en redes infinitas y semi-infinitas. En el capítulo 4, estudiaremos las propiedades de solitones discretos en redes con acoplamiento exponencialmente decreciente y con acoplamiento a segundos vecinos, mostrando que el acoplamiento mas allá de primeros vecinos induce una fuerte asimetría entre las propiedades de ondas no-lineales en cada uno de los regímenes no-lineales. En el capítulo 5, estudiaremos las propiedades de solitones discretos en una clase de redes aperiódicas, denominadas redes cuasi-periódicas, donde la pérdida de periodicidad se introduce de forma determinista, distinto al modelo de Anderson donde el desorden se introduce mediante una distribución tipo ruido blanco. En este caso trataremos con dos modelos: las redes de Fibonacci y el modelo de Aubry-André, el primero se construye mediante reglas de sustitución y el segundo con una modulación externa. Probamos que, en esta clase de sistemas, también se origina una asimetría entre los modos no-lineales de superficie en cada régimen no-lineal. Además, observamos que surgen numerosas familias de modos no-lineales de superficie entre la estructura compleja de bandas y brechas para ambas elecciones de la cuasi-periodicidad. Estas familias dan origen a un escenario complejo de localización dinámica, presentando distintos tipos de soluciones: (i) regiones de alta localización, (ii) regiones de oscilaciones persistentes con múltiples constantes de propagación y (iii) regiones de oscilaciones caóticas. Finalmente, en el capítulo 6 concluimos la tesis y discutimos los resultados obtenidos.

Capítulo 2

Sistemas discretos no-lineales

2.1. Ecuación no-lineal de Schrödinger discreta

En física, la ecuación de Schrödinger resulta de particular interés dado que contiene una fenomenología inherente a una variada gama de escenarios, que van desde materia condensada hasta física de plasmas. En el presente capítulo mostraremos, brevemente, una vía para discretizar ecuaciones del tipo no-lineal de Schrödinger en presencia de potenciales periódicos. Extendiendo los cálculos presentes en la referencia [4], obtenemos una ecuación del tipo no-lineal de Schrödinger discreta, que será la que utilizaremos a lo largo de esta tesis. Además discutiremos algunas propiedades fundamentales lineales y no-lineales de sistemas discretos con acoplamiento solo a primeros vecinos.

La ecuación no-lineal de Schrödinger en una dimensión, escrita en cantidades adimensionales, viene dada por [3, 4]:

$$i\frac{\partial}{\partial \xi}\Phi(x, \xi) = \left(-D_0\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) + \chi|\Phi(x, \xi)|^2\right)\Phi(x, \xi), \quad (2.1)$$

donde ξ corresponde a la variable “dinámica” que depende del contexto físico en que aparezca esta ecuación. Por ejemplo en condensados de Bose-Einstein (BECs); esta ecuación es conocida como ecuación de Gross-Pitaevskii, y ξ corresponde al

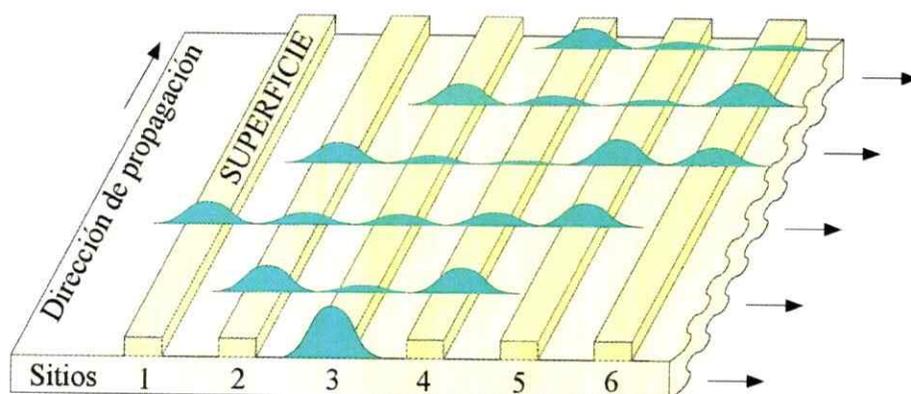


Figura 2.1: Esquema de la propagación de luz en un arreglo de guías de onda semi-infinito. Las flechas horizontales representan que sólo estamos viendo un corte cercano a la superficie.

tiempo que transcurre a lo largo del proceso que estamos describiendo. Por otro lado, en el contexto de óptica esta ecuación recibe el nombre de ecuación no-lineal de Helmholtz paraxial, y ξ es la coordenada a lo largo de la dirección de propagación del campo electromagnético. D_0 contiene las variables físicas asociadas a la difracción del campo $\Phi(x, \xi)$, $V(x)$ es el potencial externo al cual está sometido el campo y χ es el coeficiente no-lineal efectivo para el sistema continuo.

La figura 2.1 muestra, esquemáticamente, la propagación de un pulso óptico en un arreglo de guías de onda semi-infinito.

Luego, si consideramos $V(x)$ una función periódica con múltiples mínimos (equiespaciados, y Δ el vector de red) en las posiciones $\{x_m\}$, de modo que $V(x) = V(x \pm \Delta)$, resulta posible la expansión del campo Ψ como

$$\Phi(x, \xi) = \sum_m \psi_m(\xi) W_m(x), \quad (2.2)$$

donde $W_m(x) = W(x - x_m) \in \mathbb{R}$ (para todo m) es la función de Wannier asociada a los pozos (mínimos) del potencial y ψ_m es la amplitud compleja de la función de Wannier en el m -ésimo pozo. La figura 2.2 muestra, esquemáticamente, la expansión

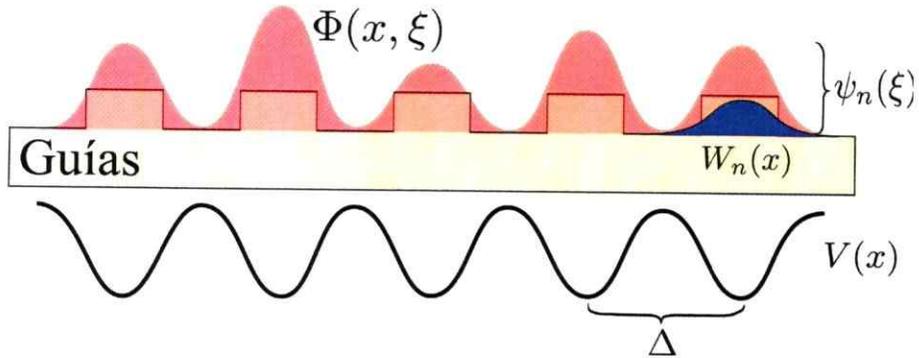


Figura 2.2: En rojo se muestra la forma característica del campo dentro de un sistema de guías de onda. En azul se muestra la función de Wannier y, esquemáticamente, se muestra el significado de la amplitud compleja ψ_n . En amarillo se muestra la variación espacial del índice de refracción. Notamos que el índice de refracción se relaciona con el potencial $V(x)$ de manera que los mínimos del potencial corresponden a los máximos del índice de refracción y a la inversa.

del campo $\Phi(x, \xi)$ dada por la ecuación (2.2) en un arreglo de guías de onda. Las funciones de Wannier típicamente surgen en sistemas periódicos perfectos (cristales) y corresponden a funciones localizadas espacialmente y centradas en cada uno de los sitios de la red. Permiten expandir las funciones de Bloch (autofunciones periódicas de la ecuación (2.1) de igual periodo de la red) asociadas a la primera banda de la forma:

$$W_R(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{-ikR} \Psi_k(x), \quad (2.3)$$

donde R es cualquier "vector" de red, N es el número de celdas primitivas en la estructura cristalina y k recorre la primera zona de Brillouin.

Las funciones de Wannier satisfacen las relaciones de ortogonalidad [4]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx W_m W_{m+\sigma} \approx 0, \quad (2.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx W_m^2 = 1, \quad (2.5)$$

para todo $\sigma \neq 0$ (entero) y m . De esta forma, reemplazando (2.2) en (2.1), proyectan-

do sobre W_n y utilizando las relaciones de ortogonalidad, obtenemos:

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial \xi} + \epsilon_n \psi_n + \sum_{\sigma \neq 0} C_{n,n+\sigma} \psi_{n+\sigma} + \gamma |\psi_n|^2 \psi_n = 0, \quad (2.6)$$

donde las constantes estan definidas como:

$$\epsilon_n \equiv - \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(D_0 \left(\frac{\partial W_n}{\partial x} \right)^2 + V(x) W_n^2 \right) \quad (2.7)$$

$$C_{n,n+\sigma} \equiv - \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(D_0 \left(\frac{\partial W_n}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial W_{n+\sigma}}{\partial x} \right) + V(x) W_n W_{n+\sigma} \right) \quad (2.8)$$

$$\gamma \equiv -\chi \int_{-\infty}^{\infty} dx W_n^4 \quad (2.9)$$

donde ϵ_n corresponde a la energía en el sitio n -ésimo y, posee una componente cinética y otra potencial, $C_{n,n+\sigma}$ es la tasa de intercambio de energía (acoplamiento) entre los sitios n y $n + \sigma$, destacamos que también posee un término cinético y otro de origen potencial y, finalmente, γ es el coeficiente no-lineal efectivo en el sitio n .

2.1.1. Estimación del acoplamiento en función de la distancia

En óptica es posible generar guías de onda con dependencia espacial muy similar a pozos rectangulares, o al menos guías de ondas donde el índice de refracción varía de forma discontinua en la interfase entre la guía y el medio externo. En particular, Snyder [17] desarrolla la teoría de modos acoplados para guías cilíndricas donde el índice de refracción varia discontinuamente entre dos valores, uno dentro de la sección cilíndrica y otro fuera. Allí calcula para dos guías cilíndricas el acoplamiento entre modos, estimando que presenta un decaimiento en función de la distancia como $(1/\sqrt{d})e^{-\kappa d}$, donde κ es una constante y d es la distancia entre las dos guías. De esta forma, para distancias lo suficientemente largas el acoplamiento decae exponencialmente. Por otra parte, en nuestro caso es posible estimar el acoplamiento mediante

evaluación directa de la ecuación (2.8) utilizando funciones de Wannier que capturen la física del decaimiento de la función de onda fuera de la guía, así, para guías donde el cambio del índice de refracción es abrupto en la interfase podemos considerar que el decaimiento de las funciones de Wannier resulta ser esencialmente el de una onda evanescente (exponencial). De esta manera, una buena función de prueba para el decaimiento de la función de Wannier y su derivada fuera de cada guía es:

$$W(x - x_n) = A e^{-\alpha|x-x_n|}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial W(x - x_n)}{\partial x} = -\alpha A \operatorname{sgn}(x - x_n) e^{-\alpha|x-x_n|}, \quad (2.11)$$

con A una constante de normalización y α la tasa de decaimiento de la función. Ahora bien, estamos interesados en evaluar cómo decae el acoplamiento con la distancia entre guías, en primera aproximación esto viene de la evaluación directa de (2.8), obteniendo

$$C^I(x_\sigma) = -A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha(|x|+|x-x_\sigma|)} [D_0 \alpha^2 \operatorname{sgn}(x) \operatorname{sgn}(x - x_\sigma) + V(x)], \quad (2.12)$$

donde hemos definido $C^I(x_\sigma) = C_{n,n+\sigma}$ para $n = 0$ (sin pérdida de generalidad). Debido a que las funciones son exponencialmente decrecientes vale pensar (en primera aproximación) que la integral tiene sentido en el rango $0 < x < x_\sigma$, siendo esencialmente cero en el resto de los casos. De esta forma, podemos escribir el acoplamiento como:

$$C^I(x_\sigma) \approx -A^2 F(x_\sigma) e^{-\alpha x_\sigma}, \quad (2.13)$$

con

$$F(x_\sigma) = \int_0^{x_\sigma} dx e^{-2\alpha x} (V(x) - D_0 \alpha^2). \quad (2.14)$$

En particular, en numerosos trabajos (por ejemplo referencia [18] y sus referencias) el potencial externo ha sido modelado como $V(x) = V_0 \sin^2(kx)$, utilizando este

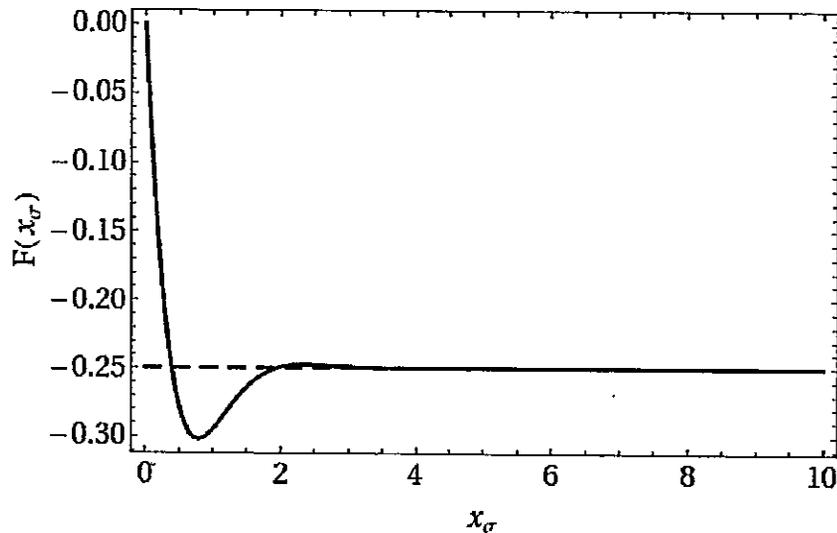


Figura 2.3: En línea continua se muestra F como función de x_σ , mientras que en la línea entrecortada el valor límite F_∞ . Los parámetros usados son: $D_0 = 1$, $\alpha = 1$, $V_0 = 2$ y $k = 1$.

potencial tenemos que

$$F(x_\sigma) = \frac{D_0\alpha}{2}(e^{-2\alpha x_\sigma} - 1) + \frac{e^{-2\alpha x_\sigma} V_0 [k^2(e^{2\alpha x_\sigma} - 1) + \alpha^2(\cos(2kx_\sigma) - 1) - k\alpha \sin(2kx_\sigma)]}{4\alpha(k^2 + \alpha^2)}, \quad (2.15)$$

con $F(x_\sigma)$ una función acotada que tiende, formalmente en el límite $x_\sigma \rightarrow \infty$, a

$$F_\infty = -\frac{D_0\alpha}{2} + \frac{V_0 k^2}{4\alpha(k^2 + \alpha^2)}. \quad (2.16)$$

Notamos que, la convergencia de (2.15) a (2.16) ocurre rápidamente (ver figura 2.3).

De esta forma se tiene que $F(x_\sigma) \approx F_\infty$ puede ser considerada una constante en la región de interés; así el acoplamiento puede ser escrito como:

$$C^I(x_\sigma) \approx -A^2 F_\infty e^{-\alpha x_\sigma}, \quad (2.17)$$

obteniéndose un decaimiento exponencial con la distancia entre guías.

Una aproximación un tanto más refinada del decaimiento de las funciones de

Wannier fuera de cada guía para el límite en que las guías tienden a ser mas "continuas" (similar al potencial que hemos utilizado para evaluar el acoplamiento) viene de considerar las funciones de Wannier tipo Gaussianas centradas en cada sitio, esta aproximación se deduce de expandir el potencial en cada guía (potencial simétrico entorno al centro de la guía) a orden x^2 , de manera tal que esencialmente tenemos guías tipo oscilador armónico y los modos fundamentales corresponden a Gaussianas de la forma:

$$W(x - x_n) = B e^{-\beta(x-x_n)^2}, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial W(x - x_n)}{\partial x} = -2\beta B(x - x_n) e^{-\beta(x-x_n)^2}, \quad (2.19)$$

donde B es una constante de normalización y β describe el decaimiento de la función fuera de la guía. En este caso también es posible evaluar directamente la ecuación (2.7), obteniendo

$$C^{II}(x_\sigma) = -B^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx [V(x) + 4\beta D_0 x(x - x_\sigma)] e^{-\beta[(x-x_\sigma)^2 + x^2]}. \quad (2.20)$$

Ahora bien, en este caso resulta más simple la evaluación de la función entre $-\infty$ e ∞ en lugar de restringirla al intervalo $(0, x_\sigma)$, de esta forma podemos reescribir (2.20) como:

$$C^{II}(x_\sigma) = -B^2 G(x_\sigma) e^{-\beta x_\sigma^2}, \quad (2.21)$$

con

$$G(x_\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} dx [V(x) + 4\beta D_0 x(x - x_\sigma)] e^{-2\beta(x^2 - x x_\sigma)}. \quad (2.22)$$

Nuevamente, si consideramos $V(x) = V_0 \sin^2(kx)$ se obtiene

$$G(x_\sigma) = -\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \left[D_0 (\beta x_\sigma^2 - 1) - \frac{V_0}{2} \left(\cos(kx_\sigma) e^{-\frac{k^2}{2\beta}} - 1 \right) \right] e^{\frac{\beta x_\sigma^2}{2}}, \quad (2.23)$$

por lo que el acoplamiento en este caso resulta

$$C^{II}(x_\sigma) = -B^2 g(x_\sigma) e^{-\frac{\beta x_\sigma^2}{2}}, \quad (2.24)$$

con $g(x_\sigma) = G(x_\sigma)e^{-\beta x_\sigma^2/2}$ una función que diverge sólo cuadráticamente cuando $x_\sigma \rightarrow \infty$. De modo que obtenemos que $C^{II}(x_\sigma)$ tiende a cero rápidamente cuando x_σ tiende a ∞ (ver figura 2.4).

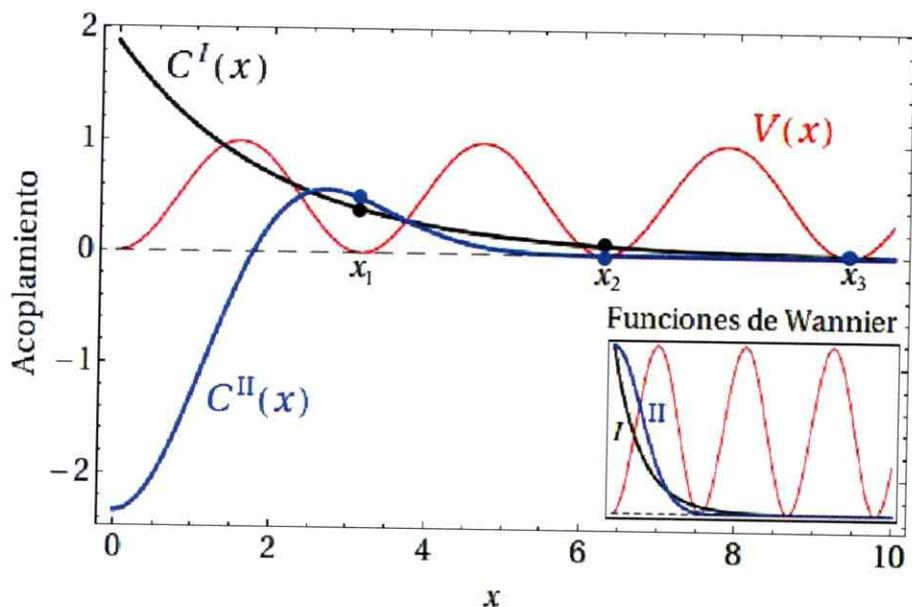


Figura 2.4: Acoplamiento en función de la posición x_σ para ambas aproximaciones. Los puntos sobre las curvas representan los valores del acoplamiento. Los parámetros usados son: $D_0 = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $V_0 = 2$ y $k = 1$. En negro se muestra C^I (amplificada por un factor 5), en azul C^{II} , en rojo el potencial $V(x)$. Los números bajo el potencial indican la posición de las guías σ relativas a la guía de referencia en $n = 0$. Además se muestran las funciones de Wannier de prueba usadas en cada uno de los cálculos (los colores están en correspondencia con los descritos anteriormente). Notar que los acoplamientos C^I y C^{II} sólo tienen sentido desde la primera guía ($n = 1$) en adelante, puesto que en $n = 0$ se encuentra el modo de referencia.

2.2. Propiedades fundamentales de sistemas periódicos con acoplamiento a primeros vecinos

Un límite usual de la ecuación (2.6) es considerar interacción de corto alcance, es decir, sólo a primeros vecinos. De esta forma, si el potencial es perfectamente



periódico obtenemos la llamada ecuación no-lineal de Schrödinger discreta (DNLS)

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial \xi} + C(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) + \gamma |\psi_n|^2 \psi_n = 0, \quad (2.25)$$

con C una constante. La ecuación DNLS posee varias propiedades interesantes. En particular, varias de ellas se desprenden de propiedades lineales ($\gamma = 0$). Nos detendremos brevemente a mencionar algunas de ellas.

En el régimen lineal ($\gamma = 0$) las autofunciones de la ecuación (2.25) tienen la forma de ondas $\psi_n = Ae^{i(kn + \lambda\xi)}$ extendidas a lo largo de todo el arreglo. Dichas ondas planas poseen relación de dispersión, velocidad de grupo y coeficiente de difracción dados por [2]:

$$\lambda(k) = 2C \cos(k), \quad (2.26)$$

$$v_g(k) \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial k} = -2C \sin(k), \quad (2.27)$$

$$D(k) \equiv \frac{\partial^2 \lambda}{\partial k^2} = -2C \cos(k), \quad (2.28)$$

de aquí se desprenden varias propiedades que enumeramos a continuación:

1. Los autovalores forman una banda acotada superiormente por $2C$ para $k = 0$ e inferiormente por $-2C$ para $k = \pm\pi$.
2. La velocidad de grupo permanece acotada presentando su máximo en $k = \pm\pi/2$, siendo éste $2C$.
3. Ondas con vector de onda $k = \pm\pi/2$ se propagan con cero difracción.

Por el momento sólo nos enfocaremos en la topología de las soluciones asociadas al borde de banda a modo de introducir los conceptos de ondas escalonadas y no escalonadas que utilizaremos recurrentemente en los capítulos posteriores.

En $k = 0$ (borde de banda superior) la función de onda viene dada por $\psi_n(\xi) = Ae^{i2V\xi}$, que corresponde a una onda coherente con todos los sitios en fase, esto es lo que llamamos una onda no escalonada (ver figura 2.5b). Por otra parte, en $k = \pi$ (borde de banda inferior) la función de onda viene dada por $\psi_n(\xi) = (-1)^n Ae^{-i2V\xi}$, esto es lo que llamamos una onda escalonada (ver figura 2.5a). En el límite $A \rightarrow 0$, el término $|\psi_n|^2$ en la ecuación (2.25) tiende a cero, por lo que para un sistema con respuesta no-lineal fija (típicamente éste es el escenario en óptica [2]), el régimen lineal es alcanzado por ondas de amplitud despreciable (o a lo menos $A < 1$). Mientras que el régimen no-lineal se logra para ondas de amplitud finita. Así, si consideramos un modo lineal y aumentamos su potencia la respuesta no-lineal del medio aumenta y podemos obtener distintos fenómenos, por un lado inestabilización de la onda extendida (inestabilidad modulacional, discutida en detalle en el capítulo 4), también es posible producir un corrimiento en la constante de propagación, en este caso si el modo lineal posee su constante de propagación λ en el interior de la banda lineal ocurren fenómenos de resonancia entre modos y las soluciones tienden a inestabilizarse y desaparecer rápidamente. Por el contrario, si la constante de propagación se encuentra en el borde de banda es posible producir un corrimiento causando que ésta escape de la banda lineal y se origine un fenómeno de auto-atrapamiento inducido por la no-linealidad.

2.3. Solitones discretos

En esta sección discutiremos brevemente algunas propiedades de modos no-lineales localizados en un sitio (ver figura 2.5). Este tipo de soluciones corresponden a ondas estacionarias de la ecuación DNLS, por lo que tienen el aspecto $\psi_n(z) = \phi_n e^{i\lambda z}$, con $\phi_n \in \mathbb{R}$ para todo n . Así obtenemos la versión “tiempo” independiente (estacionaria)

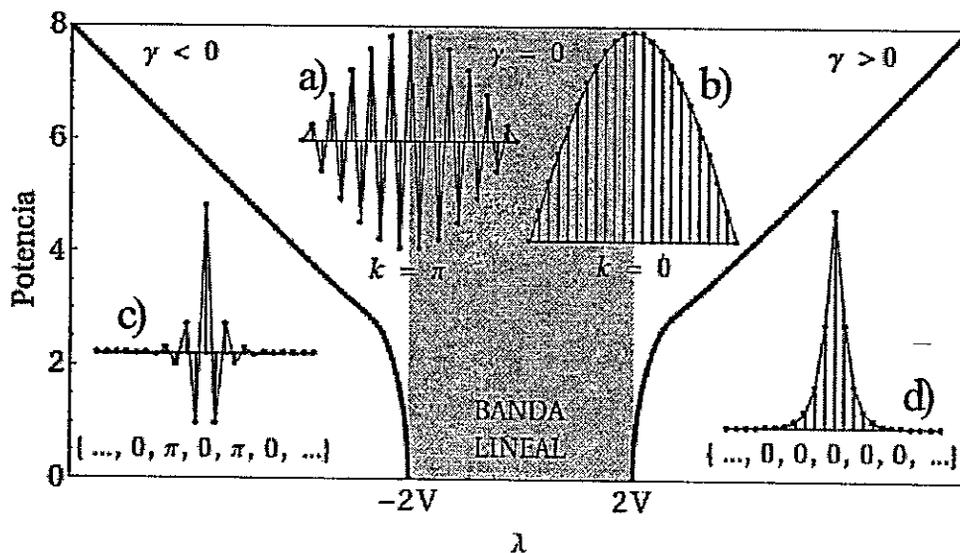


Figura 2.5: Banda lineal y región de existencia de solitones discretos centrados en un sitio (línea negra). En la figura se indican las regiones de no-linealidad positiva y negativa, así como la fase de los modos en cada régimen. Además se muestran ejemplos de perfiles de modos lineales en $k = 0$ (b) y $k = \pi$ (a) para una cadena finita y los correspondientes modos no-lineales asociados en el régimen de amplitud finita, (d) y (c), respectivamente.

de la ecuación DNLS

$$\lambda \phi_n = C(\phi_{n+1} + \phi_{n-1}) + \gamma \phi_n^3, \quad (2.29)$$

La figura 2.5 muestra un panorama completo de cómo surgen los solitones discretos (modos no-lineales centrados en un sitio) desde la banda lineal y de su estructura de fase. Es destacable que la fase de los solitones discretos corresponde justamente a la fase de los modos lineales en el respectivo borde de banda. Así, cuando la constante de propagación λ del modo no-lineal se aproxima al borde de banda lineal el modo tiende a deslocalizarse hasta converger a la distribución de amplitudes del modo lineal. Por el contrario, cuando la constante de propagación se aleja de la banda, el modo no-lineal localizado (solitón discreto) tiende a localizarse cada vez más y su

potencia crece, en particular, en el límite de alta localización se tiene que la constante de propagación y la intensidad del campo tienden a ser equivalentes. Esto último se entiende desde la ecuación (2.29) dado que cuando el modo tiende a localizarse fuertemente, la situación es equivalente a hacer tender a cero el acoplamiento C (límite anticontínuo), por lo que se tiene $\lambda \approx \gamma\phi_{n_c}^2$, donde n_c es el sitio donde está centrado el modo no-lineal localizado.

2.4. Resumen de este capítulo

En resumen, hemos presentado una deducción general de la ecuación no-lineal de Schrödinger discreta. Vimos que, es posible considerar formalmente, en cierto límite, acoplamiento más allá de primeros vecinos. Además, hemos encontrado expresiones que estiman el acoplamiento en función de la distancia haciendo uso de funciones de prueba tipo funciones de Wannier. Por otra parte, discutimos el límite de acoplamiento sólo a primeros vecinos (límite DNLS), con énfasis en sus propiedades lineales. Adicionalmente, describimos una clase de modos no-lineales centrados en un sitio, que serán los que estudiaremos a lo largo de esta tesis.

Capítulo 3

Difusión en sistemas lineales con acoplamiento de largo alcance

Uno de los problemas clásicos en el ámbito de los sistemas discretos es el de la difusión de una excitación inicialmente localizada a través de una red discreta en D -dimensiones, y en presencia de uno o varios efectos como: impurezas, defectos extendidos, no-linealidad, superficies, por nombrar algunos. La obvia importancia en muchas aplicaciones tecnológicas, que dependen de la propagación de una señal a través de un medio, explica la amplia cobertura que este tópico ha recibido en la literatura especializada.

Bajo la aproximación apropiada, muchos sistemas periódicos discretos con origen en distintos ámbitos, pueden ser descritos por algunas variantes de la ecuación de Schrödinger discreta (DS) [2]. De esta manera, todos ellos comparten una fenomenología común que emana de su carácter periódico: estructura de bandas, difracción discreta, oscilaciones de Bloch, localización dinámica, tunelaje Zener, entre otros [2].

Usualmente, la ecuación DS es usada en el límite de acoplamiento débil, donde la interacción entre las unidades constituyentes del sistema se asume distinta de cero solamente entre aquellas unidades que son primeras vecinas entre ellas. Esta es una buena aproximación en el caso donde el acoplamiento entre sitios decae rápidamente

con la distancia, como es el caso de los arreglos ópticos de guías de ondas donde el acoplamiento decae exponencialmente con la distancia entre guías. De todas formas, existen casos donde es posible ir mas allá de esta aproximación. Un ejemplo de eso son los resonadores de anillos truncados (SRRs), unidades constituyentes de los metamateriales magnéticos [5], donde la interacción básica entre los anillos es dipolar por naturaleza y, por lo tanto, el acoplamiento decrece como el inverso del cubo de la distancia mutua.

Cuando se consideran acoplamientos mas allá de primeros vecinos, el número de posibles rutas para el intercambio de energía aumenta. La evolución dinámica de excitaciones en redes finitas en una y dos dimensiones con acoplamiento anisotrópico, e incluyendo acoplamiento a segundos vecinos, ha sido ya explorada en [19] por medio del formalismo de funciones de Green. En el ámbito óptico, se han hecho observaciones experimentales recientes de la influencia del acoplamiento a segundos vecinos en arreglos de guías de onda lineales y no-lineales [20, 21]. En un contexto diferente, trabajos recientes [22], muestran que acoplamientos de largo alcance en sistemas de baja dimensión pueden inducir una transición de fase desde estados localizados a deslocalizados. Otro escenario interesante, modelado como un sistema discreto con acoplamiento de largo alcance, son las redes complejas [23], donde la distancia entre nodos no es necesariamente una cantidad física. Por ejemplo, en una red de computadores, los parámetros que pueden determinar la interacción entre nodos son el ancho de banda de los canales de comunicación, y la congestión de dichos canales.

En este capítulo implementamos un estudio analítico y numérico de la difusión de un pulso inicialmente localizado propagándose en una red discreta en una dimensión en presencia de acoplamiento de largo alcance arbitrario. Nos enfocamos en dos

casos de interés: (i) un pulso delta en el centro de un arreglo infinito, y (ii) un pulso delta localizado en la superficie de un arreglo semi-infinito. El trabajo analítico está centrado en la evaluación del desplazamiento cuadrático medio de la excitación a lo largo de la dirección de propagación, que es obtenido en forma *exacta* para el caso infinito, y en una forma aproximada para el caso semi-infinito.

3.1. Modelo

Consideremos la ecuación de Schrödinger discreta, que describe la propagación de ondas a lo largo de una red periódica en una dimensión (1D):

$$i \frac{d}{dz} \psi_n + \sum_{m \neq n} V_{n,m} \psi_m = 0, \quad (3.1)$$

donde ψ_n es la amplitud del campo complejo de la excitación en el sitio n -ésimo, z es la coordenada de propagación (“tiempo” en el modelo tight-binding para electrones, o “distancia longitudinal” para luz propagándose en arreglos de guías acopladas). El elemento de matriz $V_{n,m}$ denota el acoplamiento entre los sitios n -ésimo y m -ésimo. Este operador es periódico en el espacio y obedece $V_{n,m} = V_{m,n} = V_{|n-m|}$. El modelo (3.1) corresponde al punto de partida de muchos estudios concernientes con difusión de excitaciones en sistemas periódicos discretos, y se puede deducir desde varios escenarios distintos en física.

La ecuación (3.1) representa a un sistema Hamiltoniano, con

$$H = \sum_{n \neq m} \sum_m V_{n,m} [\psi_n \psi_m^* + \psi_n^* \psi_m],$$

y que además conserva la norma (potencia en óptica) de la función de onda

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\psi_n|^2,$$

que sin pérdida de generalidad podemos fijar a la unidad, $P = 1$. La relación de dispersión para ondas lineales es obtenida utilizando el ansatz de onda plana: $\psi_n = Ae^{i(kn+\lambda z)}$, y reemplazándolo en la ecuación (3.1), se obtiene

$$\lambda(k) = \sum_{m \neq n} V_{n,m} e^{ik(m-n)} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} V_m \cos(mk). \quad (3.2)$$

La convergencia de esta serie para todo valor de k exige restringir que V_n decrezca más rápido que $1/n$. A partir de (3.2) podemos obtener inmediatamente algunas propiedades básicas para $\lambda(k)$:

- $\lambda(k) = \lambda(-k)$ (simetría de la banda en torno a $k = 0$)
- $\lambda(k) = \lambda(k + 2\pi q)$, $q \in \mathbb{Z}$ (periodicidad de la banda)
- $\left. \frac{\partial \lambda(k)}{\partial k} \right|_{k=0} = \left. \frac{\partial \lambda(k)}{\partial k} \right|_{k=\pm\pi} = 0$ (velocidad de grupo nula en los bordes de banda)

Por otra parte, la evolución dinámica de un pulso inicialmente localizado en el sitio n_0 -ésimo la red; $\psi_n(0) = A_0 \delta_{n,n_0}$, puede ser caracterizado mediante su desplazamiento cuadrático medio (MSD):

$$\langle n^2 \rangle \equiv \frac{\sum_n (n - n_0)^2 |\psi_n(z)|^2}{\sum_n |\psi_n|^2}. \quad (3.3)$$

que da cuenta del "ancho" de la excitación.

3.2. Difusión de un pulso delta

A continuación estudiamos la difusión de un pulso tipo delta inicialmente localizado al interior de una red infinita y en el borde (*superficie*) de una red semi-infinita.

3.2.1. Difusión en un sistema infinito

En este caso $-\infty < n < \infty$ y $\psi_n(0) = A_0 \delta_{n,n_0}$. Sin pérdida de generalidad tomamos $n_0 = 0$. El límite de sistema infinito físicamente corresponde al caso cuando la excitación está inicialmente lo suficientemente lejos de los bordes de modo que el campo no se ve afectado por ellos. Usando la transformada de Fourier y la transformada de Laplace sobre la ecuación (3.1), obtenemos

$$F(k, \omega)[\omega + i\lambda(k)] = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}}, \quad (3.4)$$

en el espacio k - ω , con F el campo transformado. Luego, aplicando las transformadas inversas para volver al espacio n - z , es posible obtener una expresión formal para $\psi_n(z)$:

$$\psi_n(z) = \frac{A_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i[kn - \lambda(k)z]} dk, \quad (3.5)$$

donde $\lambda(k)$ es la relación de dispersión (3.2). Luego, reemplazando la ecuación (3.5) en (3.3), y utilizando las propiedades generales de $\lambda(k)$, obtenemos después de un poco de álgebra:

$$\langle n^2 \rangle = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{d\lambda(k)}{dk} \right)^2 dk \right] z^2. \quad (3.6)$$

Esta última expresión implica que la propagación de una excitación es siempre balística para todo tiempo. Por otra parte, definimos la "velocidad transversal" como el término encerrado entre paréntesis ($[\dots]$) en la ecuación (3.6), y notamos que depende sólo de la variación de la relación de dispersión (velocidad de grupo). Este resultado es también válido para una red en dimensión D , donde el mismo desarrollo puede ser implementado, siendo fácil probar que

$$\langle n^2 \rangle = \left[\frac{1}{v} \int_{FBZ} [\nabla_k \lambda(k)]^2 d^D k \right] z^2, \quad (3.7)$$

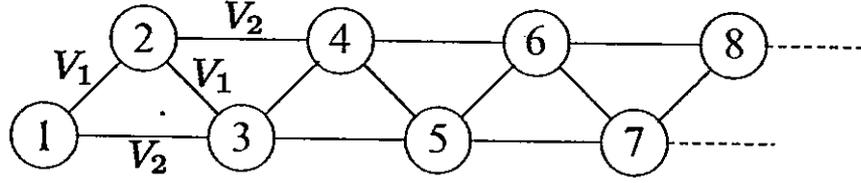


Figura 3.1: Configuración espacial de sitios en una red con acoplamiento a segundos vecinos (ver referencia [24]).

donde la integral es tomada sobre la primera zona de Brillouin (FBZ), con volumen v . Una expresión equivalente a la ecuación (3.7), en el “espacio real”, puede ser obtenida reemplazando (3.2) en (3.7), de este modo tenemos que

$$\langle n^2 \rangle = \left[\sum_{\mathbf{m}} m^2 |V_{0,\mathbf{m}}|^2 \right] z^2, \quad (3.8)$$

donde \mathbf{m} es la posición relativa al sitio inicialmente excitado $\mathbf{0}$ y $V_{0,\mathbf{m}}$ es el acoplamiento entre ambos sitios. Además se cumple con que: $V_{\mathbf{n},\mathbf{m}} = V_{-\mathbf{n},-\mathbf{m}}$.

A continuación calculamos, explícitamente, el MSD para algunos casos de interés.

Acoplamiento a segundos vecinos

Este es el caso más simple de un sistema con acoplamiento más allá de primeros vecinos, donde $V_1 = V$, $V_2 = \beta V$ y $V_{i>2} = 0$, con $\beta \in \mathbb{R}$, el peso de la interacción a segundos vecinos. La figura 3.1 muestra la distribución espacial necesaria de guías de onda para obtener el efecto de interacción a segundo vecinos. Estas configuraciones se conocen por el nombre de redes “zig-zag” [24]. Aquí la relación de dispersión (3.2) toma la forma

$$\lambda(k) = 2V[\cos(k) + \beta \cos(2k)], \quad (3.9)$$

esto implica, acorde a la ecuación (3.6), que el MSD viene dado por:

$$\langle n^2 \rangle = 2(1 + 4\beta^2)(Vz)^2. \quad (3.10)$$

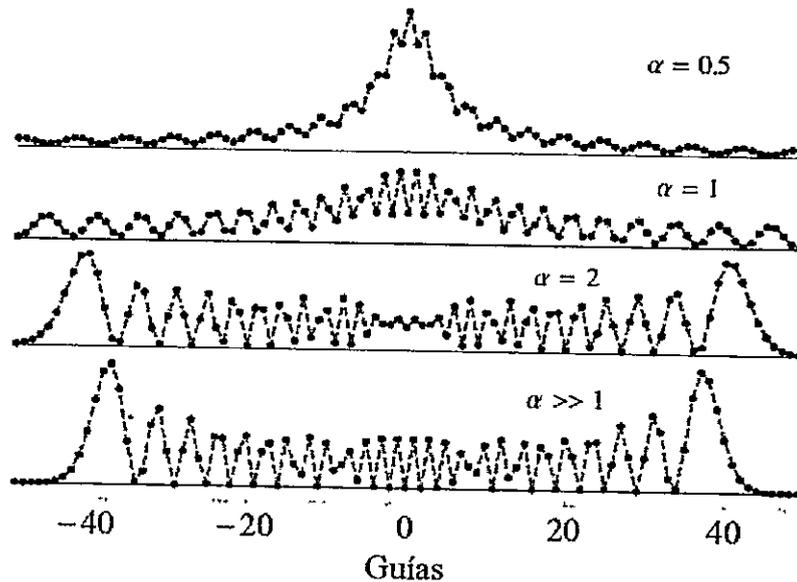


Figura 3.2: Acoplamiento exponencialmente decreciente: Patrón de difracción discreta en $Vz = 20$ para una condición inicial tipo delta en una red infinita, para diferentes valores del parámetro de largo-alcance α . Grandes (pequeños) valores de α corresponden a corto (largo) rango de interacción.

Notamos de esta forma que la inclusión de acoplamiento a segundos vecinos incrementa monótonamente la velocidad de propagación transversal. El mínimo de la velocidad de propagación transversal se alcanza cuando $\beta = 0$ (límite DNLS).

Acoplamiento exponencialmente decreciente

En este caso, el acoplamiento lo escogemos de la forma $V_{n,m} = Ve^{-\alpha(|n-m|-1)}$. Este acoplamiento es típico de sistemas de fibras ópticas, ya que depende del traslape evanescente entre los modos de fibras vecinas, el cual a su vez decrece exponencialmente con la distancia interguía. La constante V corresponde al acoplamiento a primeros vecinos, mientras que α es el parámetro de largo alcance. La relación de

dispersión lineal viene dada por:

$$\lambda(k) = V \left(\frac{e^\alpha \cos(k) - 1}{\cosh(\alpha) - \cos(k)} \right). \quad (3.11)$$

La figura 3.2 muestra algunos perfiles transversales de la función de onda tras una cierta distancia de propagación, para distintos valores del parámetro α . Notamos que, para pequeños valores de α , cierta "porción" del pulso permanece atrapada en torno a la posición inicial [25-27], en un tipo de cuasi-autoatrapamiento, mientras que la parte "no-atrapada" escapa desde el sitio inicial con velocidad mayor que en el caso de acoplamiento solo a primeros vecinos. Esto último puede ser formalizado rigurosamente mediante el cálculo del MSD via la ecuación (3.6) y utilizando (3.11), obteniendo

$$\langle n^2 \rangle = \frac{1}{2} \coth(\alpha) (\coth(\alpha) + 1)^2 (Vz)^2. \quad (3.12)$$

Esto implica que la velocidad transversal es mayor que 2, para todo valor de α finito. El efecto es más notorio en el rango $\alpha \leq 2$. (ver Fig. 3.3).

Acoplamiento tipo ley de potencia

Otro caso de interés es cuando la interacción de largo-alcance decae como una ley de potencia $V_{n,m} = V/|n-m|^\alpha$. Este caso ha sido estudiado numéricamente en [28,29], mostrando, entre otros resultados, que existe un valor crítico para α sobre el cual la propagación es siempre balística. Este valor crítico ha sido estimado en el intervalo $3/2 \leq \alpha_c \leq 2$. Nosotros probaremos que $\alpha_c = 3/2$.

En este caso la relación de dispersión puede ser escrita en término de funciones polilogarítmicas como:

$$\lambda(k, \alpha) = V [Li_\alpha(e^{ik}) + Li_\alpha(e^{-ik})] = 2V \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mk)}{m^\alpha}. \quad (3.13)$$

Para $\alpha = 1$ es posible obtener una forma explícita dada por

$$\lambda(k, 1) = -V \log |2 - 2 \cos(k)| . \quad (3.14)$$

Notamos que el logaritmo diverge para $k = 0$. Por otra parte, para $\alpha > 1$ el polilogaritmo permanece acotado para todo $k \leq \pi$. Aun así, la restricción para α es mayor si exigimos que el MSD permanezca finito para z finito. De este modo, reemplazando (3.13) en (3.6), obtenemos

$$\langle n^2 \rangle = 2\zeta(2(\alpha - 1)) (Vz)^2, \quad (3.15)$$

donde ζ es la función zeta de Riemann. Así, es necesario que $\alpha > 3/2$ para que MSD sea finito. La figura (3.3) muestra la velocidad transversal asociada a la difusión como función de α en comparación con los resultados obtenidos para el caso de acoplamiento exponencialmente decreciente.

En los tres casos examinados, la velocidad transversal asociada a la difusión es mayor que en el caso con sólo acoplamiento a primeros vecinos. La velocidad diverge en $\alpha = 0$ para el caso de acoplamiento exponencialmente decreciente, mientras que para el caso de ley de potencia existe un dominio $\alpha \in [0, 3/2]$ donde la velocidad diverge, esto incluye el caso $\alpha = 1$ donde la interacción es del tipo Coulombiana. Adicionalmente, para los casos exponenciales y de ley de potencia, notamos que cuando el rango de la interacción aumenta, se genera una especie de cuasi-auto-localización en la vecindad del sitio inicial. Las razones de tal comportamiento se discuten a continuación, usando el caso de acoplamiento exponencialmente decreciente, a modo de ejemplo.

Al aumentar el rango de la interacción, la concavidad de la relación de dispersión se reduce en torno a $k = \pm\pi$, de modo que la velocidad de grupo asociada a ondas con vector de onda en torno a $\pm\pi$ se vuelve cada vez mas pequeña. Por el contrario,

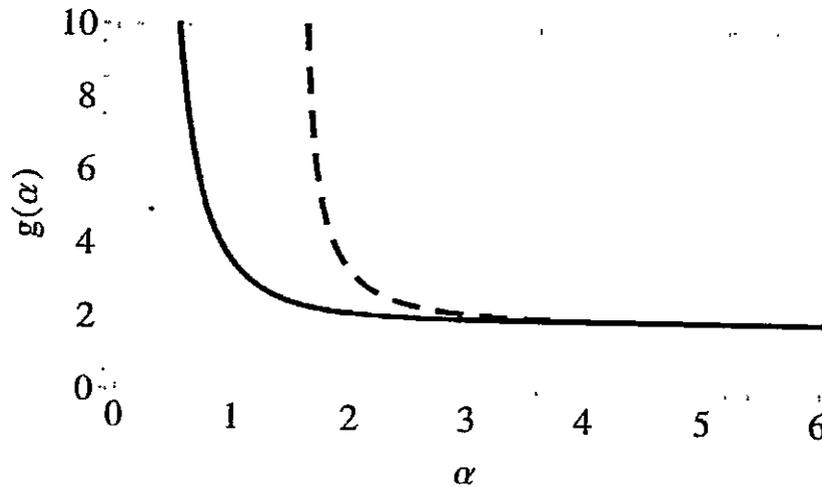


Figura 3.3: Velocidad transversal $g(\alpha)$ asociada a la propagación balística de excitaciones inicialmente localizadas en una red infinita como función del parámetro de largo-alcance. La línea sólida (entrecortada) corresponde al caso de acoplamiento exponencial (ley de potencia). En el caso exponencial la velocidad transversal corresponde a $g(\alpha) = \frac{1}{2} \coth(\alpha) (\coth(\alpha) + 1)^2$ (ecuación (3.12)), mientras que para el caso de ley de potencia la velocidad es $g(\alpha) = 2\zeta(2(\alpha - 1))$ (ecuación (3.15)).

en una pequeña vecindad entorno a $k = 0$, la concavidad tiende a diverger, de modo que la velocidad asociada a las ondas con vector de onda dentro de esa pequeña vecindad tenderá a aumentar dramáticamente. En particular, en el límite $\alpha \rightarrow 0$ la relación de dispersión tiende a una delta de Dirac $\lambda(k) = V[\delta(k) - 1]$, de modo que la velocidad de grupo es cero para todo $k \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$, mientras que la velocidad de grupo diverge en $k = 0$. Luego, dado que cualquier condición inicial, en particular la asociada al pulso tipo delta de Kronecker (completamente localizado), puede ser escrita como una superposición de todas las ondas lineales (base completa del sistema), el fenómeno de cuasi-localización lo entendemos como el conjunto de ondas con velocidad de grupo tendiendo a cero, mientras que la porción que escapa está asociada a los vectores de onda asociados a altas velocidades.

En el límite formal $\alpha = 0$ y para un sistema finito de N sitios, todos los sitios

están conectados unos con otros, y el alto grado de degeneración de la relación de dispersión (autovalores) fuerza la localización de las ondas tendiendo hacia la ejecución de oscilaciones incompletas entre el sitio inicialmente excitado y los demás. En este caso la dinámica puede ser mapeada a un dímero asimétrico [25]. Este sistema ha sido resuelto completamente [27] mediante el uso de funciones elípticas, mostrando que para N finito la localización lineal de la función de onda es parcial, mientras que para $N \rightarrow \infty$ tiende a ser completa.

3.2.2. Difusión en un sistema semi-infinito

En este caso la red se extiende de $n = 1$ hasta $n \rightarrow \infty$. La condición inicial es $\psi_n(0) = A\delta_{n,1}$; es decir, la excitación es situada inicialmente en el borde de la red. Este sistema es formalmente equivalente a una red infinita con condición de borde: $\psi_n(z) = 0 \forall z, n \leq 0$. La pérdida de simetría traslacional sugiere que no es posible escribir directamente una solución $\psi_n(z)$ similar a la ecuación (3.5). El caso con acoplamiento a primeros vecinos es una excepción, pudiéndose obtener una solución cerrada mediante el método de imágenes [30]. En este caso, la condición de borde no es tan limitante ya que solo exige que $\psi_0(z) = 0$ para todo z , y puede ser satisfecha considerando el sistema infinito con dos deltas como condición inicial ubicadas en $n = \pm 1$ y fase opuesta. De esta forma, la propagación del campo para $n > 0$ puede ser descrita como la superposición de ambas fuentes:

$$\psi_n^s(z) = \psi_n(z) - \psi_{n+2}(z), \quad (3.16)$$

donde $\psi_n(z)$ representa la solución (3.5), y el super índice s denota la solución del sistema semi-infinito. Así, el campo ψ_n^s puede ser escrito explícitamente como:

$$\psi_n^s(z) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - e^{-2ik}) e^{i[kn - \lambda(k)z]} dk. \quad (3.17)$$

Cuando consideramos acoplamiento de mayor alcance, la ecuación (3.17) ya no satisface la condición de borde, lo que se puede ver fácilmente dado que el campo para $n > 0$ está acoplado con el campo para $n < 0$ debido al rango del acoplamiento.

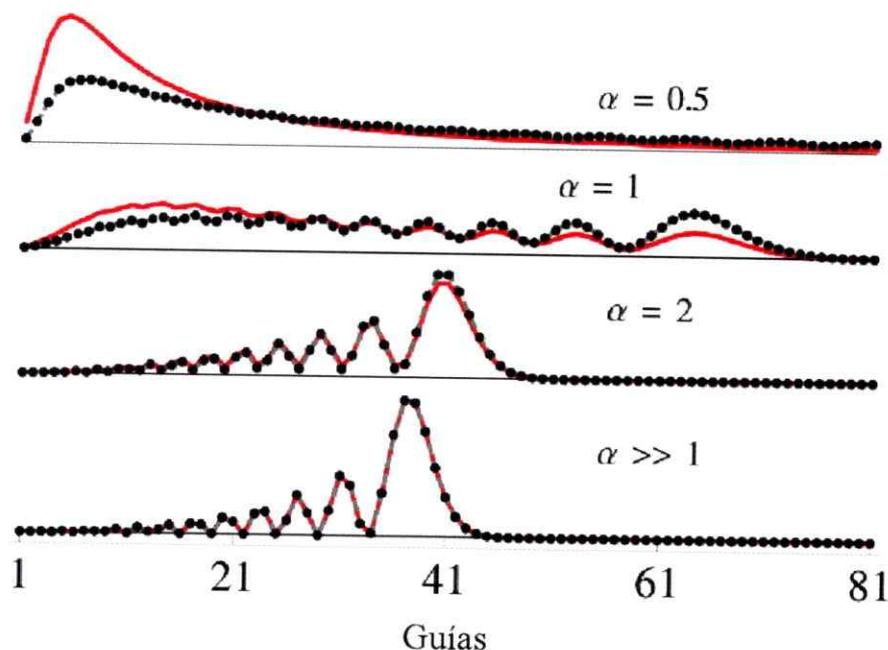


Figura 3.4: Patrón de difracción discreto en $Vz = 20$ para una excitación inicialmente localizada en el borde de un arreglo semi-infinito como función del parámetro de largo-alcance α , para una red con acoplamiento exponencialmente decreciente. La línea roja corresponde a la aproximación dada por la ecuación (3.17), mientras que los puntos y línea gris a la solución numérica via integración directa de la ecuación (3.1).

Sin embargo, tras una serie de integraciones numéricas directas de muchos casos, se observa que la ecuación (3.17) provee de una buena aproximación al comportamiento asintótico ($z \rightarrow \infty$) para el caso general, ver figura 3.4. Reemplazando (3.17) en (3.1) en el límite semi-infinito se obtiene tras un poco de álgebra

$$\langle n^2 \rangle^s \approx \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(k) \left(\frac{d\lambda(k)}{dk} \right)^2 dk \right] z^2, \quad (3.18)$$

válida para $z \gg 1$. Como era de esperar, lo que obtenemos es el comportamiento

asintótico balístico esperable para todos los casos, luego de un tiempo transiente relacionado con los efectos repulsivos de la superficie.

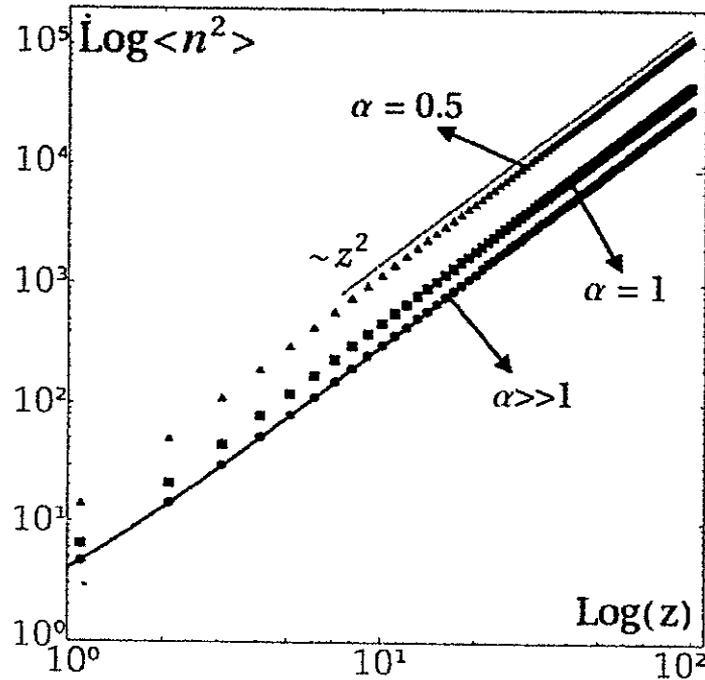


Figura 3.5: MSD en escala logarítmica para distintos valores del parámetro de acoplamiento de largo alcance α en el caso de una red exponencialmente decreciente. Los puntos corresponden a las simulaciones numéricas via integración directa de la ecuación (3.1), la línea negra viene de la solución aproximada utilizando el método de imágenes descrito por la ecuación (3.17), mientras que la línea gris muestra la pendiente asociada a z^2 (solo como una guía visual).

Ecuación (3.18) también puede ser expresada en el espacio real, reemplazando (3.2) en (3.18) obtenemos

$$\langle n^2 \rangle^s \approx \left[3V_1 + 2 \sum_{m=2}^{\infty} m^2 V_m^2 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} m(m+2) V_m V_{m+2} \right] z^2. \quad (3.19)$$

Este resultado asintótico es confirmado mediante integración directa de la ecuación (3.1) para todos los casos de la subsección anterior, usando una condición inicial tipo

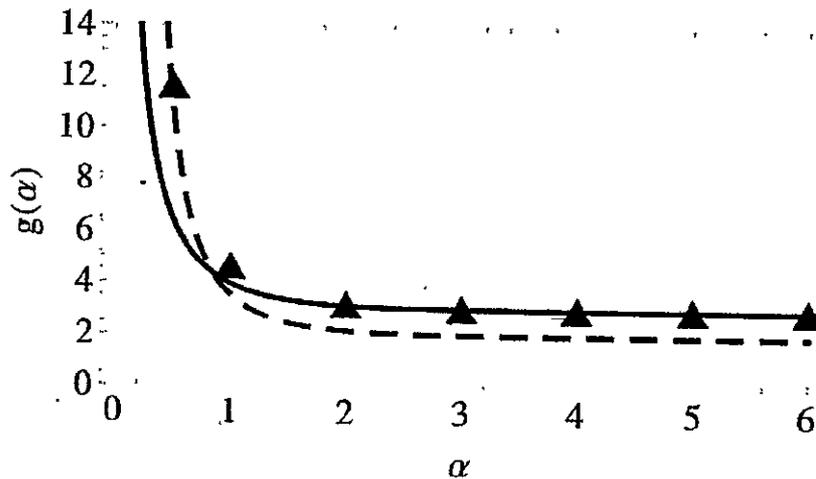


Figura 3.6: Velocidad transversal asociada a la propagación balística como función del parámetro de largo-alcance α , para una excitación inicialmente localizada en la superficie de un arreglo semi-infinito en una red con acoplamiento exponencialmente decreciente. En triángulos se muestran los valores numéricos obtenidos via integración directa de la ecuación (3.1), mientras que en línea continua la aproximación analítica dada por la ecuación (3.20), y en línea entrecortada la solución obtenida para el sistema infinito, dada por la ecuación (3.12).

delta en la superficie de una red semi-infinita y comparando con la aproximación (3.18). La figura 3.5 muestra la comparación entre el MSD para el caso exponencialmente decreciente. En este caso, el comportamiento asintótico es descrito por

$$\langle n^2 \rangle^s \approx 3 \coth(\alpha) (Vz)^2. \quad (3.20)$$

En la figura 3.6 se muestra la comparación entre esta aproximación y los resultados numéricos. Notamos que para $\alpha \geq 1$, la aproximación otorga un buen ajuste para los resultados numéricos, mientras que para $\alpha < 1$, la solución exacta para la red infinita dada por la ecuación (3.12), constituye un mejor ajuste que la aproximación semi-infinita. Esto se puede entender dado que en el régimen de acoplamiento de largo-alcance en el límite $\alpha \rightarrow 0$, el borde pierde su sentido puesto que cada sitio está acoplado a cada uno de los demás sitios de la red.

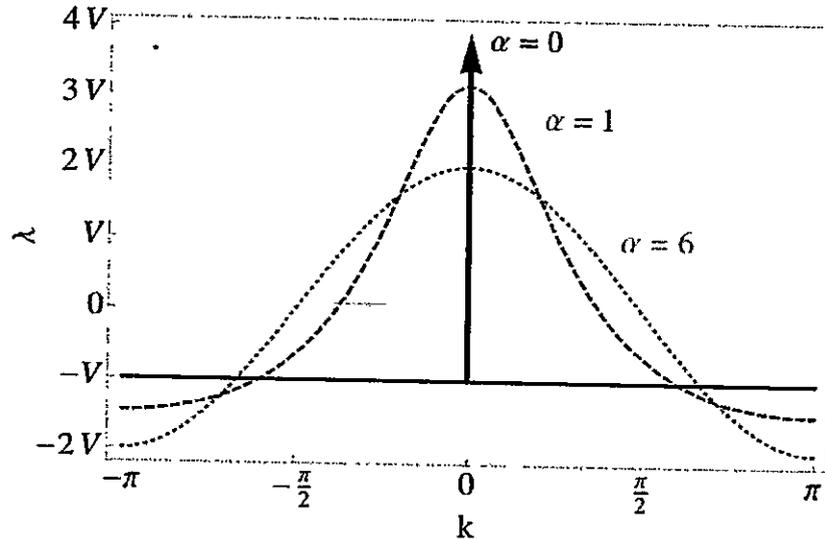


Figura 3.7: Relación de dispersión para el régimen lineal para distintos valores del parámetro de acoplamiento de largo-alcance para el caso de redes con acoplamiento exponencialmente decreciente.

Ahora, discutimos propiedades difractivas de redes con acoplamiento de largo-alcance. Para redes con acoplamiento exponencialmente decreciente, la ecuación (3.1) toma la forma explícita:

$$i \frac{d}{dz} \psi_n + V \sum_{m \neq n} e^{-\alpha(|n-m|-1)} \psi_m = 0, \quad (3.21)$$

y la relación de dispersión para ondas planas es justamente la calculada en la subsección anterior, dada por (3.11). Algunos casos son graficados en la Fig. 3.7 para distintos valores de α . En el límite $\alpha \rightarrow \infty$ se recupera el caso usual de arreglos con acoplamiento a primeros vecinos $\lambda_\infty = 2V \cos(k)$. Por otra parte, los bordes de banda están ubicados en $\lambda_{min} \equiv \lambda(\pm\pi, \alpha) = -2V/[1+e^{-\alpha}]$ y $\lambda_{max} \equiv \lambda(0, \alpha) = 2V/[1-e^{-\alpha}]$, donde se ha asumido $N \rightarrow \infty$. De esta forma, el ancho de la banda lineal viene dado

por:

$$B(\alpha) \equiv \lambda_{max} - \lambda_{min} = 2V(1 + \coth(\alpha)). \quad (3.22)$$

En el límite $\alpha \rightarrow 0$ la relación de dispersión converge a $\lambda_0 = V[\delta(k) - 1]$, donde δ corresponde a la delta de Dirac, y el ancho de la banda lineal diverge.

Discutamos la difracción discreta en este tipo de arreglo. Primero, para el caso de primeros vecinos ($\alpha \rightarrow \infty$), ha sido demostrado que para $k = \pm\pi/2$ es posible propagar un pulso con cero difracción. Este es un tema de por sí interesante ya que abre las puertas a la creación de arreglos que presentan difracción reducida, cancelada o revertida, esto mediante la juiciosa modificación de la geometría espacial a lo largo de la dirección de propagación del arreglo [31]. En nuestro caso, cuando uno incluye acoplamiento mas allá de primeros vecinos, y dependiendo del valor de los parámetros, es posible tener más que un solo "ángulo" en el que la difracción es cancelada (tal es el caso de arreglos con acoplamiento a segundos vecinos [20]). Para el caso de acoplamiento exponencialmente decreciente, lo podemos calcular explícitamente mediante el cálculo de la segunda derivada de la relación de dispersión que da cuenta de la difracción. En este caso buscamos un k_c tal que $\partial^2 \lambda / \partial k^2|_{k=k_c} = 0$, esto se da para:

$$k_c = \pm \arccos \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{8 + \cosh^2(\alpha)} - \cosh(\alpha) \right) \right], \quad (3.23)$$

k_c define la frontera entre las regiones de difracción "normal" y difracción "anómala". Por otro lado, en sistemas con acoplamiento sólo a primeros vecinos la velocidad de grupo de las ondas posee cotas bien definidas, dadas por $\pm 2V$, mientras que en el caso de acoplamiento exponencialmente decreciente existe un dominio (k_-, k_+) en los que la velocidad de grupo excede $2V$, ver figura 3.8.

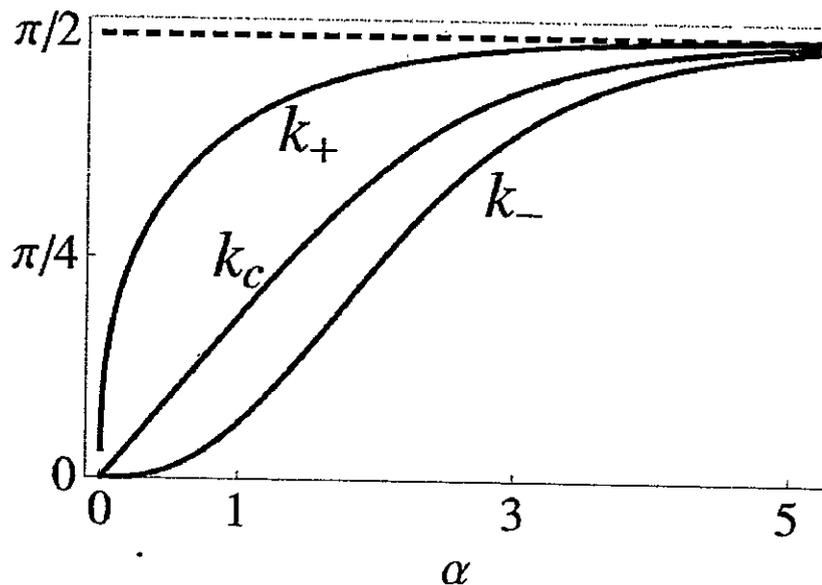


Figura 3.8: Vectores de onda k_c , k_+ y k_- como función del parámetro de acoplamiento de largo-alcance para redes con acoplamiento exponencialmente decreciente. Un pulso con vector de onda k_c se propagará con cero difracción a lo largo de la red.

3.3. Resumen de este capítulo

En resumen, hemos examinado la propagación de una excitación tipo delta inicialmente localizada en el centro de una red infinita y en el borde de una red semi-infinita en presencia de acoplamiento de largo-alcance. Para el caso infinito, encontramos una expresión explícita para el desplazamiento cuadrático medio que muestra que la propagación es balística para todo tiempo y para toda elección de acoplamiento permitido; es decir, tal que la relación de dispersión permanezca acotada y con derivada continua. Se encontró, además, que la velocidad transversal depende sólo de la derivada de la relación de dispersión promediada sobre todos los vectores de onda. Para la excitación en el borde de un arreglo semi-infinito, deducimos una aproximación asintótica basada en el método de imágenes que predice la propagación balística para

longitudes de propagación suficientemente largas. Adicionalmente, encontramos que existe buen acuerdo entre esta expresión y los resultados numéricos.

Finalmente, se discutieron propiedades generales de ondas lineales para el caso de redes con acoplamiento exponencialmente decreciente, tales como: ancho y fronteras de la banda lineal, y condiciones para propagación con cero difracción. Se obtuvo que el ancho de la banda lineal aumenta monótonamente cuando el rango del alcance de la interacción aumenta; en particular, cuando $\alpha \rightarrow 0$ el ancho diverge debido a que la banda diverge en una dirección (en $k = 0$). Además, obtenemos que el vector de onda k_c asociado a pulsos con cero difracción se mueve de $k = \pi/2$ (acoplamiento sólo a primeros vecinos) a $k = 0$ (todos los sitios igualmente conectados) monótonamente; ésto acompañado del surgimiento de una vecindad en torno a k_c donde la velocidad de grupo es mayor que $2V$ (velocidad máxima en el regimen de acoplamiento a primeros vecinos).

Capítulo 4

Acoplamiento de largo-alcance en sistemas semi-infinitos

Un alto número de trabajos se ha enfocado en el caso de guías de onda no-lineales acopladas débilmente entre ellas, donde el traslape entre modos en cada una de las guías es pequeño, y la no-linealidad es estrictamente local. Por una parte, resultados experimentales y teóricos recientes, como condensados de Bose-Einstein (BECs) con interacción dipolar [32] y localización de luz discreta en cristales líquidos nemáticos [33], muestran sistemas realistas donde los efectos no-locales son importantes. Las consecuencias de considerar interacciones no-locales pueden ser bastante interesantes; por ejemplo, no-linealidad no-local tiende a estabilizar varios tipos de ondas no-lineales, como solitones oscuros en BECs dipolares en tres dimensiones [34], solitones espaciales en arreglos monótonamente modulados en cristales líquidos nemáticos [33], vórtices ópticos [35], solitones dipolares rotatorios [36], y azimutones [37]. Un tipo de interacción de largo-alcance que será de interés para nosotros son los efectos de interacción dispersiva de largo-alcance, este tema ha sido desarrollado en algunos contextos y para algunos casos de este tipo de interacción, como en cadenas de osciladores anarmónicos donde se han estudiado los efectos de incluir dispersión como ley de potencia [38–41]. En sistemas ópticos existen algunos trabajos teóricos

y experimentales donde se ha estudiado el efecto de incluir interacción a segundos vecinos, es decir, entre modos a dos guías de distancia [20, 24]. En particular se ha probado, formalmente, para un sistema lineal con una impureza no-lineal, que es posible mediante la inclusión de acoplamiento a segundos vecinos reducir o aumentar la potencia mínima necesaria para excitar modos no-lineales localizados [42].

Por otra parte, la superficie actúa como un defecto en el sistema, rompiendo la simetría traslacional en el caso de sistemas periódicos. De esta forma, la función de onda debe adaptarse a esta nueva condición de borde e interactuar con ella. Por ejemplo, en un sistema en una dimensión descrito por la ecuación de Schrödinger no-lineal discreta con interacción a primeros vecinos se ha probado que solitones discretos en sistemas infinitos pueden existir para potencias tendiendo a cero. Mientras que en presencia de superficie existe un mínimo de potencia bajo el cual no es posible excitar solitones de superficie. Lo anterior independiente del signo de la no-linealidad [15]. Este efecto ha sido asociado a una interacción repulsiva entre la superficie y el potencial atractivo auto-inducido.

Este capítulo está organizado de la siguiente forma, primero introducimos nuestro modelo para arreglos de guías de onda no-lineales con interacción exponencialmente decreciente. Luego, discutimos algunos resultados para solitones discretos en sistemas infinitos y estudiamos el caso de ondas no-lineales localizadas en la superficie de un arreglo semi-infinito, enfocándonos principalmente en la asimetría que induce la interacción de largo alcance entre los casos no-lineales enfocante y desenfocantes. Seguido de esto, estudiaremos los efectos dinámicos relacionados a la inclusión de acoplamiento de largo-alcance, mostrando consistencia con los resultados obtenidos para soluciones estacionarias. Finalmente, discutimos los resultados.

4.1. Modelo

En el marco de la aproximación de modos acoplados, la evolución del campo óptico en un arreglo de guías de onda no-lineal cúbica (Kerr) con acoplamiento mas allá de primeros vecinos puede ser descrita por una ecuación no-lineal de Schrödinger discreta:

$$i \frac{d\psi_n}{dz} + \sum_{m \neq n} V_{n,m} \psi_m + \gamma |\psi_n|^2 \psi_n = 0, \quad (4.1)$$

donde ψ_n es la amplitud del modo fundamental de la guía n -ésima, z corresponde a la distancia de propagación a lo largo del arreglo, γ es el parametro no-lineal, y el coeficiente $V_{n,m}$ es el acoplamiento entre las guías n -ésima y m -ésima. Consistentemente con la aproximación de modos acoplados, consideraremos $V_{n,m}$ como $V_{n,m} = V e^{-\alpha(|n-m|-1)}$ al igual que uno de los casos del capítulo anterior, donde V es el usual coeficiente de acoplamiento a primeros vecinos y $\alpha > 0$ es el parámetro de acoplamiento de largo-alcance que define el rango de la interacción. Para valores grandes de α recobramos esencialmente el límite de acoplamiento sólo a primeros vecinos (usual límite DNLS), mientras que al disminuir α el rango del acoplamiento aumenta.

Una justificación para la elección de este modelo viene dada por evidencia experimental. En particular, en guías de Silicio escritas utilizando un laser de femtosegundo, se probó empíricamente que el acoplamiento sigue una ley exponencial con la distancia, de la forma:

$$C = A e^{-\frac{d}{\sigma}} + C_0, \quad (4.2)$$

donde C es el acoplamiento efectivo asociado al intercambio de energía entre un par de guías separadas una distancia d (ver referencia [43]). Esta dependencia funcional

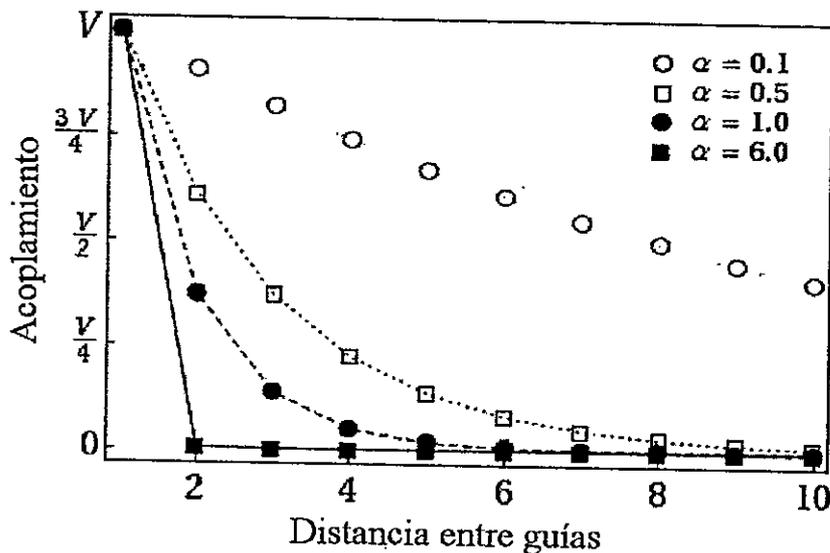


Figura 4.1: Acoplamiento entre guías para distintos valores de α para el caso exponencialmente decreciente. Las líneas están presentes sólo para ayuda visual.

del acoplamiento es acorde a la intuición, dado que en óptica el campo entre guías se acopla mediante ondas evanescentes que intercambian energía, dichas ondas son tales que no se propagan en el medio entre las guías, por lo que se amortiguan y poseen una envolvente exponencialmente decreciente, así, la porción de energía que es capaz de compartir cada guía con sus vecinas decae exponencialmente con la distancia. La figura 4.1 muestra la dependencia del acoplamiento con la distancia entre guías en nuestro modelo para distintos valores del parámetro de acoplamiento de largo alcance.

Por otra parte, la potencia (norma), definida como $P = \sum_n |\psi_n|^2$, es una cantidad conservada tanto en el régimen no-lineal, como en el caso lineal ($\gamma = 0$), y la utilizaremos para caracterizar los modos no-lineales.

Estamos interesados en soluciones estacionarias de la forma $\psi_n(z) = \phi_n e^{i\lambda z}$, reem-

plazando en la ecuación (4.1), obtenemos

$$\lambda\phi_n = V \sum_{m \neq n} e^{-\alpha(|n-m|-1)} \phi_m + \gamma\phi_n^3, \quad (4.3)$$

donde $\phi_n \in \mathbb{R}$ y λ es la constante de propagación del modo no-lineal.

En el capítulo anterior discutimos las propiedades lineales de este modelo. De particular interés en el estudio de ondas no-lineales es el impacto de la banda lineal sobre la región de existencia de modos no-lineales. Como vimos antes, la relación de dispersión en este caso viene dada por

$$\lambda(k, \alpha) = V \left(\frac{e^\alpha \cos(k) - 1}{\cosh(\alpha) - \cos(k)} \right), \quad (4.4)$$

y los bordes de banda se encuentran en

$$\lambda_{min} \equiv \lambda(\pm\pi, \alpha) = -\frac{2V}{1 + e^{-\alpha}}, \quad (4.5)$$

$$\lambda_{max} \equiv \lambda(0, \alpha) = \frac{2V}{1 - e^{-\alpha}}, \quad (4.6)$$

donde λ_{min} corresponde al borde de banda inferior, mientras que λ_{max} es el borde de banda superior. Las ondas no-lineales corresponden a oscilaciones que no resuenan con el espectro lineal [11] de modo que su constante de propagación λ no estará contenida dentro del espectro lineal. Así, la región de existencia de modos no-lineales se restringe a $\lambda \in \{-\infty, \lambda_{min}\} \cup \{\lambda_{max}, \infty\}$, y su tamaño se reduce monotonamente al aumentar el rango del acoplamiento (disminuir α).

4.1.1. Ondas lineales en el regimen no-lineal: inestabilidad modulacional

Para excitaciones de baja intensidad el sistema responde prácticamente de manera lineal, de modo que la teoría desarrollada en el capítulo anterior es suficiente para describir la evolución del campo. Por otra parte, cuando la intensidad aumenta la

respuesta del medio se torna no-lineal y la dinámica es compleja. Una pregunta en este límite es: ¿qué tipos de ondas viven en el régimen no-lineal?. En principio uno espera que la equipartición de energía siga siendo válida y existan ondas extendidas no-lineales que repartan su energía entre todos (o un gran número) de sitios en el sistema, similar a lo que ocurre con las ondas planas lineales. Un cálculo que permite generar intuición respecto a que tipo de ondas viven en el régimen no-lineal consiste en estudiar la estabilidad de las ondas planas en el régimen no-lineal. Notamos que la onda plana $\psi_n(z) = Ae^{i(kn+\lambda_{NL}z)}$ es solución de la ecuación (4.1), con $\lambda_{NL}(k) = \lambda(k) + \gamma|A|^2$, donde λ corresponde a la relación de dispersión lineal (4.4). Esto se puede probar explícitamente al reemplazar la onda plana en la ecuación (4.1), donde se obtiene

$$-\lambda_{NL}(k)A + A \sum_{m \neq n} V_{n,m} e^{ik(m-n)} + \gamma|A|^2 A = 0. \quad (4.7)$$

Usando la forma general de la relación de dispersión lineal $\lambda(k) = \sum_{m \neq n} V_{n,m} e^{ik(m-n)}$, podemos reescribir esta última ecuación como

$$-\lambda_{NL}(k)A + A\lambda(k) + \gamma|A|^2 A = 0. \quad (4.8)$$

En esta sección denotaremos a λ por λ_L para distinguir explícitamente la relación de dispersión lineal de la no-lineal.

Perturbando el campo de la forma

$$\bar{\psi}_n(z) = [A + \delta_n(z)] e^{i(kn+\lambda_{NL}z)}, \quad (4.9)$$

donde $\bar{\psi}_n$ representa el campo perturbado y δ_n la perturbación en el sitio n -ésimo, con $|\delta_n| \ll 1$ para todo n . Reemplazando (4.9) en (4.1) podemos escribir al orden lineal en δ_n :

$$i \frac{d}{dz} \delta_n - \lambda_{NL} \delta_n + \sum_{m \neq n} V_{n,m} e^{ik(m-n)} \delta_m + \gamma (2|A|^2 \delta_n + A^2 \delta_n^*)$$

$$+ (-\lambda_{NL}A + A\lambda_L + \gamma|A|^2A) = 0, \quad (4.10)$$

donde el último paréntesis resulta cero por la ecuación (4.8). Así, obtenemos el siguiente par de ecuaciones para (4.10) y su compleja conjugada

$$i\frac{d}{dz}\delta_n - \lambda_{NL}\delta_n + \sum_{m \neq n} V_{n,m}e^{ik(m-n)}\delta_m + \gamma(2|A|^2\delta_n + A^2\delta_n^*) = 0, \quad (4.11)$$

$$-i\frac{d}{dz}\delta_n^* - \lambda_{NL}\delta_n^* + \sum_{m \neq n} V_{n,m}e^{-ik(m-n)}\delta_m^* + \gamma(2|A|^2\delta_n^* + A^2\delta_n) = 0, \quad (4.12)$$

donde el super-índice * denota el complejo conjugado. Por otra parte, si consideramos que la perturbación δ_n corresponde a una modulación de la forma:

$$\delta_n = (\epsilon_1 e^{iKn} + \epsilon_2 e^{-iKn}) e^{gz}, \quad (4.13)$$

donde K es el número de onda asociado a la modulación, $g \in \mathbb{C}$ la constante de propagación de la perturbación, y ϵ_i cantidades complejas, podemos reescribir las ecuaciones anteriores de una forma conveniente para ϵ_1 , ϵ_2 y sus conjugadas como:

$$[ig - \lambda_{NL}(k) + \lambda_L(k+K) + 2\gamma|A|^2] \epsilon_1 + \gamma|A|^2 \epsilon_2^* = 0, \quad (4.14)$$

$$[ig - \lambda_{NL}(k) + \lambda_L(k-K) + 2\gamma|A|^2] \epsilon_2 + \gamma|A|^2 \epsilon_1^* = 0, \quad (4.15)$$

$$[-ig - \lambda_{NL}(k) + \lambda_L(k+K) + 2\gamma|A|^2] \epsilon_1^* + \gamma|A|^2 \epsilon_2 = 0, \quad (4.16)$$

$$[-ig - \lambda_{NL}(k) + \lambda_L(k-K) + 2\gamma|A|^2] \epsilon_2^* + \gamma|A|^2 \epsilon_1 = 0, \quad (4.17)$$

donde hemos usado la paridad de la relación de dispersión lineal ($\lambda_L(k) = \lambda_L(-k)$).

Es importante notar aquí que la estabilidad de la onda plana estará definida por el exponente g de modo que tenemos dos casos:

$\text{Re}\{g\} > 0 \rightarrow$ La perturbación crece al aumentar z (inestable).

$\text{Re}\{g\} < 0 \rightarrow$ La perturbación decrece al aumentar z (estable).

Notamos que, el caso $\text{Re}\{g\} = 0$ corresponde a un caso marginal, donde la perturbación permanece acotada.

El sistema de ecuaciones descrito por (4.14-4.17) puede ser escrito en forma matricial

$$\mathbf{M}\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} (ig + \xi_1) & 0 & 0 & \gamma|A|^2 \\ 0 & \gamma|A|^2 & (ig + \xi_2) & 0 \\ 0 & (-ig + \xi_1) & \gamma|A|^2 & 0 \\ \gamma|A|^2 & 0 & 0 & (-ig + \xi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_1^* \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_2^* \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad (4.18)$$

aquí hemos definido ξ_1 y ξ_2 de la siguiente manera

$$\xi_1(k, K) = -\lambda_{NL}(k) + \lambda_L(k + K) + 2\gamma|A|^2, \quad (4.19)$$

$$\xi_2(k, K) = -\lambda_{NL}(k) + \lambda_L(k - K) + 2\gamma|A|^2, \quad (4.20)$$

Buscamos soluciones no triviales del sistema descrito por (4.18), de modo que exigimos que el determinante de \mathbf{M} sea cero, obteniendo la siguiente ecuación para g :

$$g^4 + g^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\gamma^2|A|^4) + (\gamma^2|A|^4 - \xi_1\xi_2)^2 = 0, \quad (4.21)$$

y resolviendo para g^2 se obtiene

$$g_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[2\gamma^2|A|^4 - \xi_1^2 - \xi_2^2 \pm \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 [(\xi_1 + \xi_2)^2 - 4\gamma^2|A|^4]} \right]. \quad (4.22)$$

Casos de particular interés son las ondas lineales que viven en los bordes de banda de la relación de dispersión en $k = 0$ o $k = \pi$. En este caso es posible obtener una expresión mucho más compacta debido que $\xi_1 = \xi_2 \equiv \xi$, obteniendo

$$g_{0,\pi}^2 = \gamma^2|A|^4 - \xi^2. \quad (4.23)$$

Algunas gráficas de las regiones de inestabilidad para los distintos regímenes no-lineales se muestran en la figura 4.2.

Notamos que para $\alpha \gg 1$ (límite de acoplamiento solo a primeros vecinos) los resultados son idénticos para $k = 0$ y $k = \pi$. En $k = 0$ y $\alpha \rightarrow \infty$ recobramos exactamente lo observado experimentalmente [44] para arreglos de guías de onda

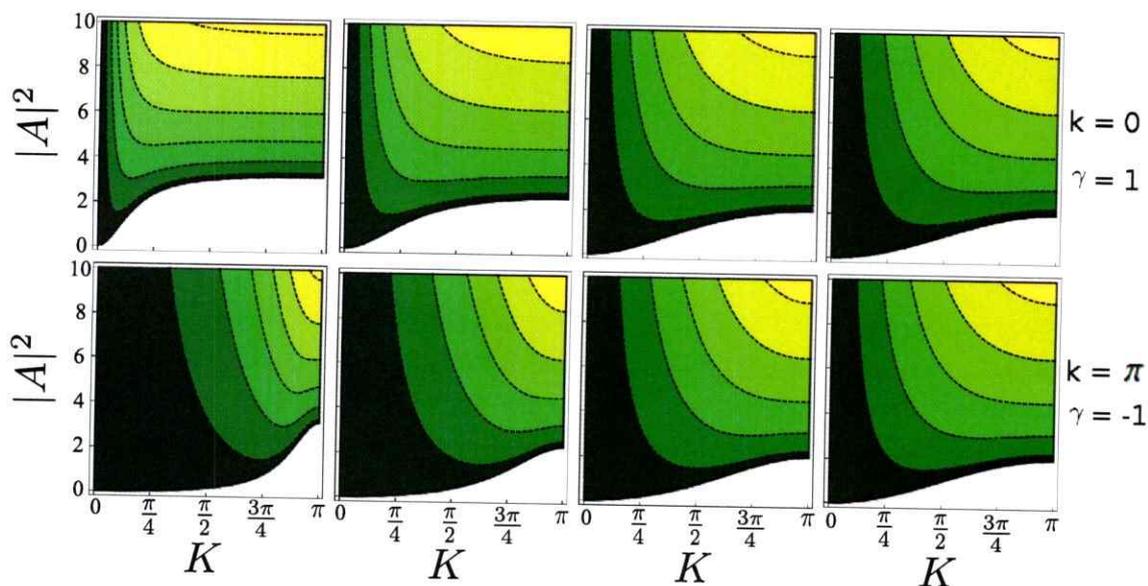


Figura 4.2: Regiones donde está presente la inestabilidad modulacional en el espacio $\{|A|^2, K\}$ para los casos $\{k = 0, \gamma = 1\}$ (arriba) y $\{k = \pi, \gamma = -1\}$ (abajo), y distintos valores de α señalados en la figura. En blanco se muestran las regiones donde las ondas planas son estables, mientras que en degradé las regiones de inestabilidad representando de oscuro a claro zonas de menor a mayor inestabilidad.

con acoplamiento a primeros vecinos. Ejemplos de evolución numérica para distintos valores de los parámetros se muestran en la Fig. 4.3, aquí podemos observar que, en el régimen no-lineal enfocante ondas del tipo no escalonadas ($k = 0$) extendidas generan estructuras espacialmente localizadas que oscilan rápidamente en la dirección de propagación y donde, típicamente, la energía está centrada en un sitio. Por el contrario, en el régimen no-lineal desenfocante el medio tiende a inducir la inestabilización de ondas escalonadas ($k = \pi$) dando origen a estructuras con características similares a las ya mencionadas. Además, obtenemos desde la ecuación (4.23) e integrando numéricamente la ecuación (4.1) (ver figura 4.3), que la inestabilidad modulacional no se encuentra presente en $\{k = 0, \gamma < 0\}$ y $\{k = \pi, \gamma > 0\}$, ya que $\text{Re}\{g\} = 0$ para todo α . Esto trae consigo un par de consecuencias, la primera es que el sistema no tiende a localizar espontáneamente energía en el régimen enfo-

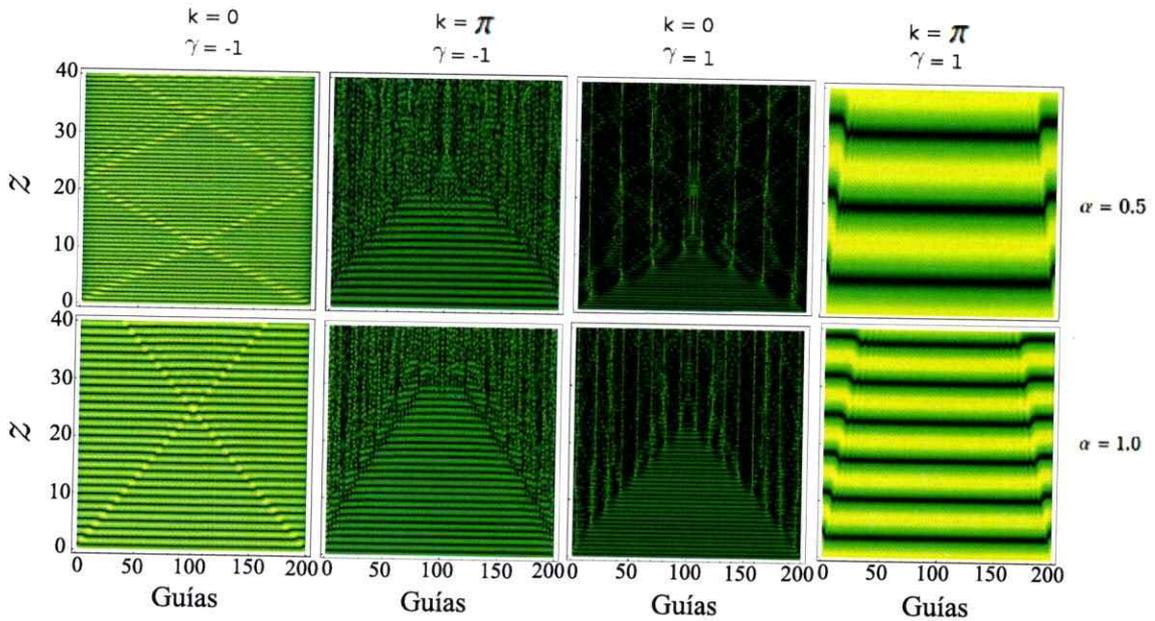


Figura 4.3: Ejemplos de propagación de ondas planas ($A = 1$) en el régimen no-lineal para distintos parámetros señalados en la figura en un arreglo de 200 sitios y distancia de propagación $z_{max} = 40$. En los gráficos se muestra $|\text{Re}\{\psi_n\}|$ para una mejor visualización de las oscilaciones a lo largo de la dirección de propagación. Notamos que, el error numérico en la integración de la ecuación (4.1), se puede descomponer en la base asociada a las perturbaciones δ_n , de modo que en todos los gráficos están presentes todos los valores de K posibles.

cante (desenfocante) en forma de ondas del tipo no escalonadas (escalonadas). Esto es consistente con que desde el límite anti-contínuo ($V \rightarrow 0$) uno tiene que $\lambda \rightarrow \gamma\phi_n^2$, lo que implica que λ y γ deben tener el mismo signo, por lo que las excitaciones no-lineales viven a lo menos en $\{\lambda > 0, \gamma > 0\} \cup \{\lambda < 0, \gamma < 0\}$. Una segunda consecuencia corresponde a la topología de otro tipo de soluciones no-lineales, que no es discutida en esta tesis, llamados solitones oscuros [45] que corresponden a ondas deslocalizadas del tipo $\phi_n = A \tanh[A(n - n_c)]e^{i\theta n}$, donde n_c es el centro de la solución y θ denota la estructura de fase: $\theta = 0$ para solitones oscuros no escalonados y $\theta = \pi$ para solitones oscuros escalonados. Teniéndose que, dado que los solitones oscuros corresponden principalmente a ondas extendidas de alta amplitud, este tipo

de soluciones poseen fase $\theta = 0$ para el régimen desenfocante y $\theta = \pi$ para el régimen enfocante, que es donde dicho tipo de ondas planas es estable.

4.2. Solitones discretos en arreglos con acoplamiento de largo-alcance

En esta sección examinaremos en detalle los efectos de acoplamiento de largo-alcance sobre la creación y estabilidad de modos localizados no-lineales ($\gamma \neq 0$) con énfasis en modos no-lineales de superficie que resulta ser el tema principal de esta tesis. Pero antes, discutiremos brevemente la fenomenología presente en redes infinitas.

Modos localizados no-lineales de un peak corresponden a soluciones reales de la ecuación (4.3) cuya envolvente decae en torno al sitio de mayor amplitud de la solución. Este tipo de soluciones puede obtenerse integrando la ecuación (4.3) mediante métodos iterativos, un ejemplo resulta ser el método de Newton-Raphson en varias variables. Aquí hay varias estrategias que se pueden seguir dependiendo del tipo de soluciones que estemos buscando. Para fijar ideas discutiremos brevemente un caso, consideremos un sistema infinito descrito por la ecuación (4.1) en el límite $\alpha \rightarrow \infty$ (solo interacción a primeros vecinos). Esta ecuación posee soluciones no-lineales exponencialmente localizadas en un sitio con constante de propagación fuera de la banda lineal $\lambda(k) = 2V \cos(k)$. Dichas soluciones se pueden construir desde el límite anti-continuo $V \rightarrow 0$, partiendo desde una semilla correspondiente a un solo sitio excitado con potencia P y con $P, \lambda \gg 2V$ (borde superior de la banda lineal), de modo que para un cierto set $\{P, \lambda\}$ encontramos una solución. Luego, autoconsistentemente es posible resolver para un punto cercano en el espacio de parámetros e iterando el procedimiento construir una familia completa de soluciones

no-lineal es caracterizada por una cierta curva paramétrica $P(\lambda)$ en el espacio P - λ . Por otra parte, físicamente estamos interesados en soluciones estables, esto lo exploramos siguiendo el método descrito en el Apéndice A (similar al análisis de inestabilidad modulacional) para determinar la estabilidad lineal de una solución, de modo que es posible caracterizar la estabilidad de cada una de las soluciones contenidas en $P(\lambda)$.

4.2.1. Solitones en sistemas infinitos

En el caso de una red infinita el sistema presenta invariancia traslacional; ésto nos permite centrarnos en cualquiera de las ecuaciones que describen la propagación del campo en las distintas guías sin pérdida de generalidad. Estaremos enfocados en estudiar sólo soluciones no-lineales de un peak centradas en un sitio.

Primero estudiaremos el régimen no-lineal enfocante, esto quiere decir $\gamma > 0$ y $\lambda > 0$. La figura 4.4 muestra la relación entre potencia y constante de propagación $P(\lambda)$ junto con algunos perfiles de modos no-lineales para familias de soluciones centradas en un sitio, para distintos valores del parámetro de acoplamiento de largo-alcance α . Para valores de $\alpha > 5$, la curva de potencia es indistinguible desde el caso usual con interacción a primeros vecinos, donde los modos no-lineales son altamente localizados para potencias altas, mientras que para constantes de propagación cercanas a la banda lineal los modos tienden a deslocalizarse. Cuando α es menor que $\alpha_c \approx 1.69$, la curva de potencia presenta un cambio de concavidad, asociado a un cambio en la estabilidad de los modos no-lineales, estos ocurren cuando la derivada de $P(\lambda)$ se hace cero. Además, surge la aparición de una región de bi-estabilidad donde es posible tener transición dinámica entre estados en cada una de las ramas estables [38]. Figura 4.5 muestra un típico diagrama de bifurcación para este caso. Por otra parte, el

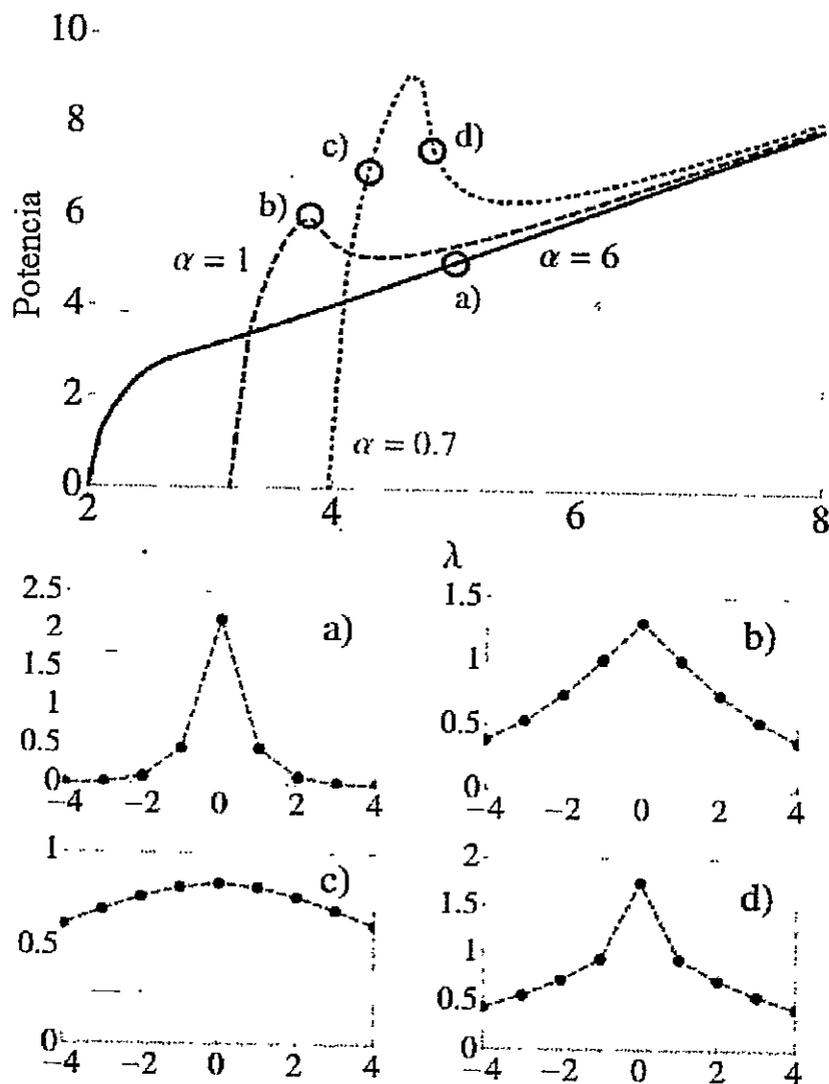


Figura 4.4: Arriba se muestra la potencia normalizada en función de la constante de propagación λ para distintos valores de α en el régimen enfocante ($\gamma = 1$). Abajo, las figuras a), b), c) y d), son ejemplos de modos no-lineales localizados en un sitio, para los parámetros indicados por círculos (en la figura de arriba). El rango del acoplamiento en cada caso es: a) $\alpha = 6$, b) $\alpha = 1$ y c) y d) $\alpha = 0.7$.

mínimo de la curva $P(\lambda)$ es denominado un umbral de potencia. Este umbral aumenta monótonamente al disminuir el valor de α . Por otra parte, en general para todo α ,

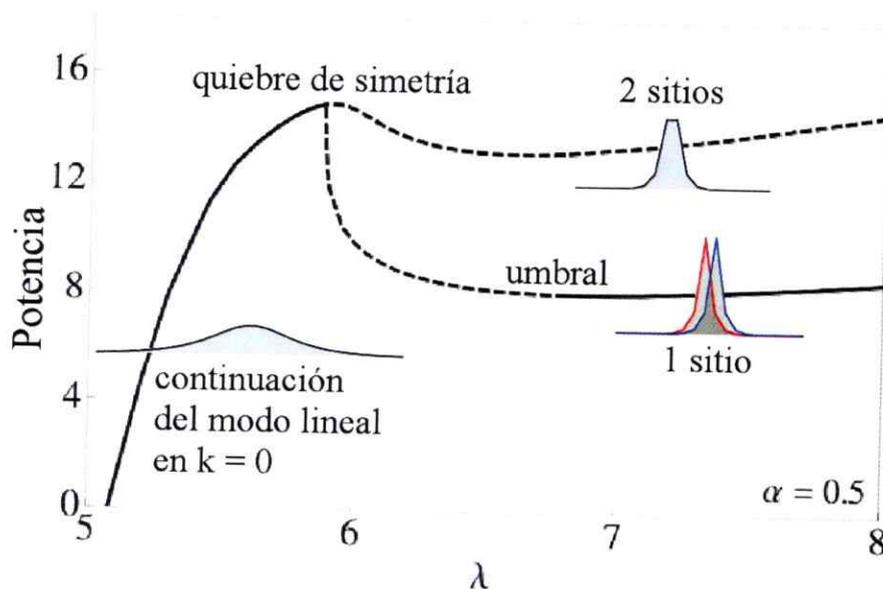


Figura 4.5: Diagrama de bifurcación para soluciones enfocantes. La línea entrecortada indica soluciones inestables, mientras que la línea continua denota soluciones estables.

los modos no-lineales tienden a deslocalizarse cuando su constante de propagación se aproxima a la banda lineal (ver figura 4.5). Una observación interesante es que en el caso enfocante, el acoplamiento de largo alcance tiende a deslocalizar a los modos no-lineales (ver figura 4.4). Además la estabilidad de las soluciones puede extraerse desde el diagrama $P(\lambda)$ donde $\partial P/\partial\lambda > 0$ implica estable, mientras que $\partial P/\partial\lambda < 0$ implica inestable [46].

Ahora bien, para el caso de sistemas con acoplamiento solo a primeros vecinos es bien sabido que la ecuación (4.3) es invariante ante la transformación $(\lambda, \gamma, \psi_n) \rightarrow (-\lambda, -\gamma, (-1)^n \psi_n)$, de modo que los resultados obtenidos para el régimen enfocante son fácilmente extrapolables al régimen desenfocante. Para el caso en que consideramos acoplamiento de largo alcance esto ya no es posible puesto que para que el sistema presente invariancia es necesario exigir $V_{n,m} = (-1)^{n-m-1} V_{n,m}$, lo cual implica $V_{n,m} = 0$ salvo para $n - m$ un entero par, el que no es nuestro caso. De esta

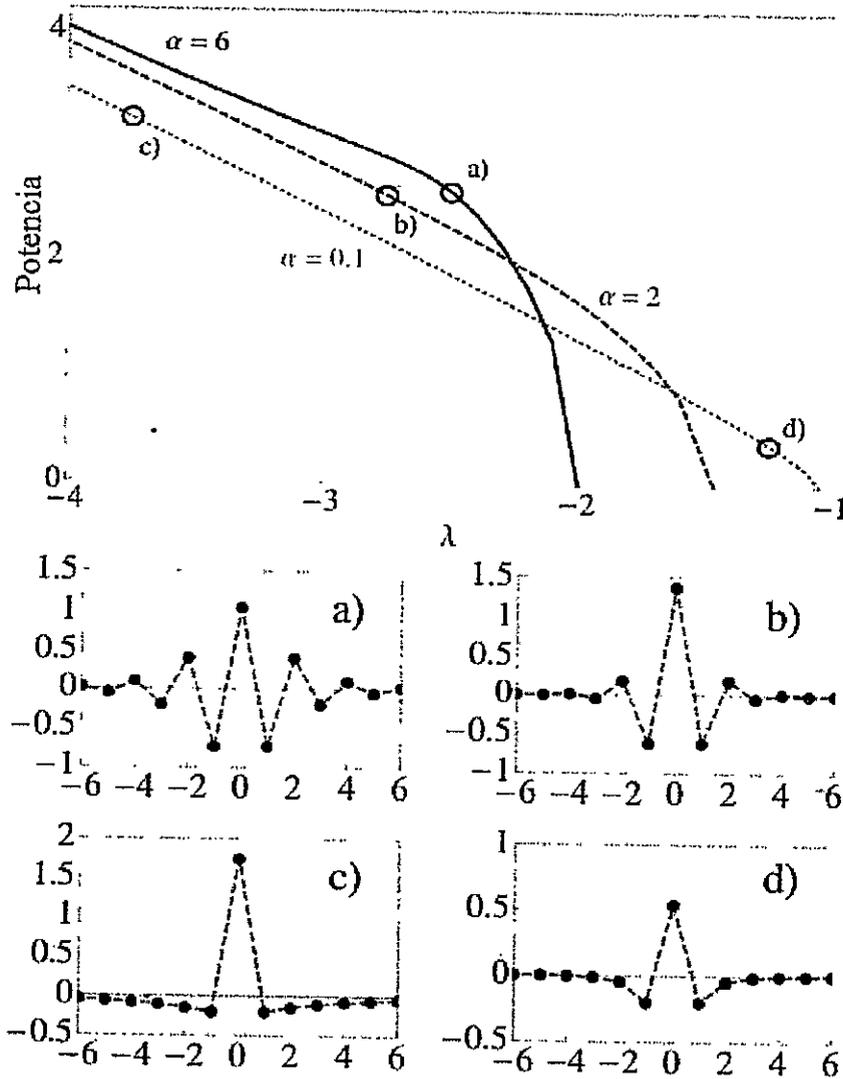


Figura 4.6: Arriba se muestra la potencia normalizada en función de la constante de propagación λ para distintos valores de α en el régimen desenfocante ($\gamma = -1$). Abajo, las figuras a), b), c) y d), son ejemplos de modos no-lineales localizados en un sitio, para los parámetros indicados por círculos (en la figura de arriba). El rango del acoplamiento en cada caso es: a) $\alpha = 6$, b) $\alpha = 2$ y c) y d) $\alpha = 0.1$.

forma, el régimen no-lineal desenfocante debe ser estudiado como un caso aparte en este sistema. Nuestros cálculos numéricos en el caso desenfocante son presenta-

dos en la figura 4.6 donde es posible observar que el comportamiento es opuesto al caso enfocante. Por una parte, las soluciones en el caso desenfocante son siempre estables para todo α y toda potencia; además, las curvas no presentan umbral para ningún valor de α (no hay cambio en la derivada de $P(\lambda)$). Es interesante notar, en este caso, que la fase de las soluciones no-lineales cambia abruptamente de comportamiento al incluir interacción de largo alcance (ver figuras 4.6), donde se observa que para α "grande" la fase tiene un comportamiento escalonado, típico de soluciones desenfocantes, mientras que para α "pequeño" la fase tiende a una estructura más compleja. Esto lo discutiremos en la siguiente sección con más detalle en el caso de modos no-lineales de superficie.

4.2.2. Solitones en sistemas semi-infinitos

En este caso seguiremos un esquema similar al utilizado en la sección anterior para encontrar solitones discretos con la salvedad de que incluimos una restricción extra dada por $\psi_n = 0$ para $n \leq 0$, a modo de generar una superficie efectiva sobre el sistema. La primera observación que hacemos es que el comportamiento en el caso enfocante y desenfocante sigue siendo opuesta (ver Fig. 4.7). En presencia de superficie los modos no-lineales típicamente poseen umbral (P_{Th}) debido a que no existe dentro de la banda lineal un modo que comparta simetría, desde donde puedan bifurcar solitones de superficie. Al incluir acoplamiento de largo alcance se observa que dicho umbral crece monótonamente al aumentar el rango del acoplamiento en el caso enfocante, mientras que decrece monótonamente al aumentar el rango del acoplamiento en el caso desenfocante. Dicho umbral trae consigo cambio en la estabilidad de la solución, teniendo en ambos regímenes no-lineal que las soluciones son estables para $\partial P / \partial |\lambda| > 0$.

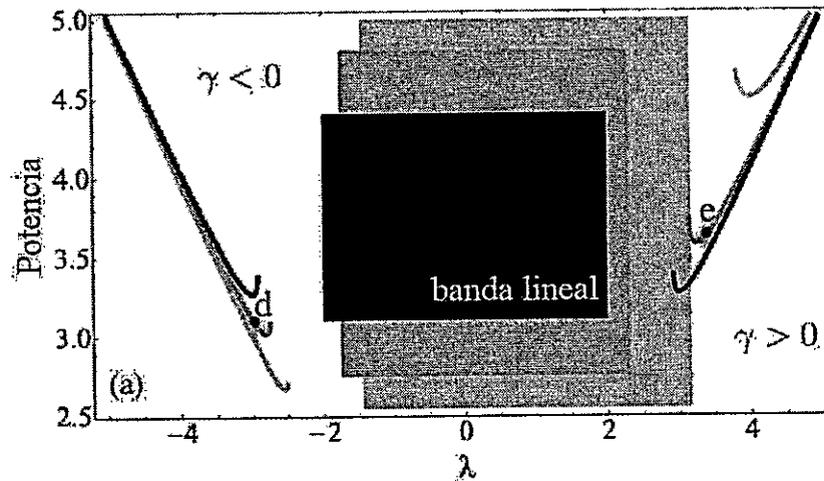


Figura 4.7: Diagrama de potencia en función de la constante de propagación λ incluyendo las bandas lineales (rectángulos) para distintos valores del parámetros de acoplamiento de largo-alcance α , en negro $\alpha = 6$, gris oscuro $\alpha = 2$ y gris claro $\alpha = 1$, para los casos enfocante y desenfocante y fijando $V = 1 = |\gamma|$.

Por otra parte, una explicación para la asimetría en los umbrales en los distintos regímenes no-lineales puede ser extraída estudiando los perfiles de las soluciones cerca del punto de bifurcación. Para ésto consideramos un modo de la forma general $\{\psi_n\} = \psi_0\{1, \epsilon, \beta, \xi, \dots\}$, con $1 > |\epsilon| > |\beta| > |\xi| > \dots$. Reemplazando este *ansatz* en la ecuación 4.3 para $n = 1$ (primer sitio), obtenemos $\lambda = V(\epsilon + \beta e^{-\alpha} + \xi e^{-2\alpha} + \dots) + \gamma \psi_0^2$. Dado que las soluciones no-lineales que buscamos viven fuera de la banda lineal, soluciones localizadas centradas en la superficie podrían bifurcar, en principio, exactamente desde el borde de banda lineal, dependiendo del signo de la no-linealidad. Discutamos primero el caso de soluciones no escalonadas ($\gamma > 0$) y tratemos de estimar el P_{Th} en términos de α . Ha sido reportado [2] que cuando los modos no-lineales se aproximan a la banda lineal ($\lambda \rightarrow \lambda_{max}$) la potencia decrece y se vuelven extendidos (deslocalizados). Esto implica que en éste límite tendremos $\epsilon, \beta, \xi, \dots \rightarrow 1$ (éste límite es opuesto a lo que ocurre en alta localización donde $\epsilon, \beta, \xi, \dots \rightarrow 0$), por lo

tanto, la constante de propagación del modo no-lineal tiende a $\lambda \rightarrow V/(1-e^{-\alpha}) + \gamma\psi_0^2$. Esto implica que, para $\psi_0 \rightarrow 0$ se tiene que $\lambda < \lambda_{max} = 2V/(1-e^{-\alpha})$ lo cual es una contradicción, puesto que el modo no-lineal no se origina dentro de la banda lineal. Esto último sugiere que $V/(1-e^{-\alpha})$ y $\gamma\psi_0^2$ deben estar, al menos, dentro del mismo orden de magnitud, es decir, $\gamma\psi_0^2 \approx V/(1-e^{-\alpha})$. Luego, como ψ_0^2 es directamente proporcional a la potencia del modo no-lineal, se tiene que $P_{Th} \sim 1/(1-e^{-\alpha})$ como estimación del umbral. Observamos que el comportamiento del umbral es monotonamente decreciente en función de α , presentando una divergencia en $\alpha = 0$ y permaneciendo acotado para $\alpha > 0$, fenomenológicamente idéntico al comportamiento observado numéricamente. Por otra parte, para modos no-lineales escalonados ($\gamma < 0$) la situación es diferente. Como mencionamos antes no existe una transformación trivial entre estados escalonados y no escalonados, como ocurre en el caso de acoplamiento a primeros vecinos. Por otra parte, típicamente en el régimen desenfocante los modos no-lineales al aproximarse a la banda lineal ($\lambda \rightarrow \lambda_{min}$) presentan una topología de fase similar a la del modo asociado al borde de banda lineal, de manera tal que en este caso se tiene que $\epsilon, -\beta, \xi, \dots \rightarrow -1$, por lo que la constante de propagación del modo no-lineal tiende a $\lambda \rightarrow -V/(1+e^{-\alpha}) - |\gamma|\psi_0^2$. Para $\psi_0 \rightarrow 0$, se tiene que $\lambda > \lambda_{min} = -2V/(1+e^{-\alpha})$, lo cual resulta en una contradicción puesto que los modos no-lineales bifurcan a lo más desde el borde de la banda lineal, pero no dentro de ella. Por lo que en este caso se tiene que $V/(1+e^{-\alpha})$ y $|\gamma|\psi_0^2$ deben ser, al menos, del mismo orden de magnitud, es decir, $V/(1+e^{-\alpha}) \approx |\gamma|\psi_0^2$, de modo que el umbral se comporta como $P_{Th} \sim 1/(1+e^{-\alpha})$. De esta forma obtenemos que para $\gamma < 0$, el umbral crece monótonamente con α , teniéndose que el umbral permanece acotado para todo α . Notamos que nuestras estimaciones analíticas se ajustan perfectamente al comportamiento observado numéricamente (ver figura 4.7).

Por otra parte, estamos interesados en caracterizar el comportamiento de los modos no-lineales a medida que nos alejamos de la superficie. Para $\gamma > 0$ y lejos de la superficie, la relación entre la potencia y la constante de propagación λ muestra (como discutimos en la sección anterior) una región de biestabilidad para $\alpha < 1.69$. Esto es similar a lo observado en modelos con interacción a segundos vecinos [24], y lo interpretamos como un aumento de la dimensionalidad efectiva del sistema; ésto, por la similitud de dichos resultados con los presentes en arreglos en dos dimensiones rectangulares, dond  siempre existe umbral. Además, la inclusión de acoplamiento más allá de primeros vecinos en una dimensión trae consigo más rutas por donde el sistema es capaz de intercambiar energía, algo así como un aumento en el número de coordinación de la red. Por otro lado, para $\alpha < 1.69$ el umbral que surge para modos no-lineales lejos de la superficie tiende a disminuir a medida que nos acercamos a la superficie, un ejemplo de ésto se muestra en la figura 4.8 para $\alpha = 1$, de modo que el sistema tiende a favorecer la localización de energía en la superficie (contrario a lo que ocurre usualmente en arreglos con acoplamiento a primeros vecinos [15]). Adicionalmente, la asimetría se sigue manifestando para $\gamma < 0$, donde el umbral para excitar modos no-lineales aumenta a medida que nos acercamos a la superficie, obteniendo (como mencionamos en la sección anterior) que lejos de la superficie los modos no-lineales no poseen umbral para todo α . La observación en este caso resulta idéntica a lo presente usualmente en arreglos con acoplamiento sólo a primeros vecinos.

Ahora analizaremos la fase de los modos no-lineales en los distintos regímenes no-lineales. Numéricamente observamos que para $\gamma > 0$ los modos preservan una estructura no escalonada para todo α . Mientras que para $\gamma < 0$ los modos no-lineales pierden su estructura escalonada sobre un cierto valor de la potencia que

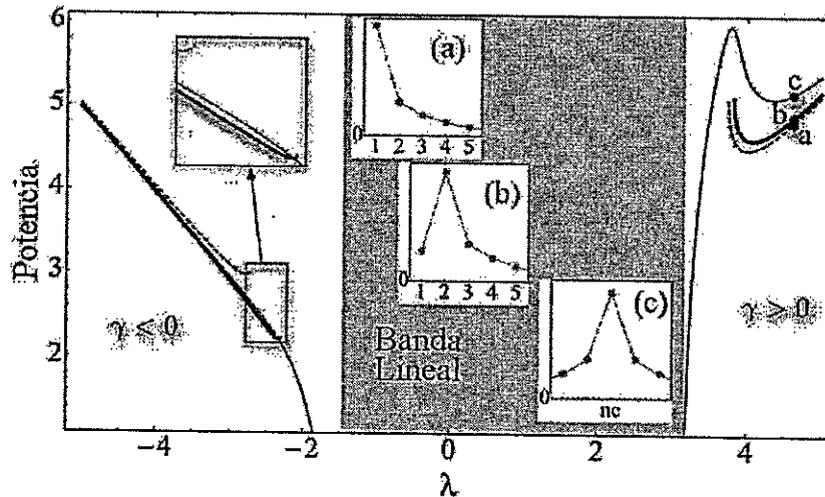


Figura 4.8: Diagrama de potencia en función de la constante de propagación para modos centrados en $n = 1$ [(a) línea entre-cortada], $n = 2$ [(b) línea continua delgada] y $n = n_c$ [(c) línea continua gruesa]. $V = 1 = |\gamma| = \alpha$ y $N = 2n_c = 100$.

depende de α (ver figura 4.6). En la figura 4.9 se muestra la región de existencia de soluciones escalonadas y no escalonadas en el espacio $\alpha - \lambda$. Aquí se muestra también que en general los modos no-lineales de superficie existen a una distancia finita de la banda lineal. Para $\gamma < 0$ observamos una pérdida de la fase sin un patrón definido, por ejemplo, para ciertos valores de α la fase escalonada cambia en $n = 3$, observándose un patrón de la forma: $\{0, \pi, \pi, \pi, 0, \pi, 0, \dots\}$. Mientras que en otros casos el cambio en la estructura de fase puede ocurrir en otro sitio lejano a la superficie. Debido a que los modos no-lineales que son de nuestro interés corresponden a funciones rápidamente decrecientes con la distancia es que resulta (pensando en una verificación experimental) complicada una medida de la fase lejos de la superficie; por lo que, estudiamos cuando la fase en el sitio $n = 3$ cambia, como un indicador de la pérdida de topología (sin fase trivial) en la zona central del modo no-lineal. La figura 4.9 muestra un ejemplo de modo no-lineal con fase: $\{0, \pi, \pi, \pi, \pi, \pi, \pi, \dots\}$, presente

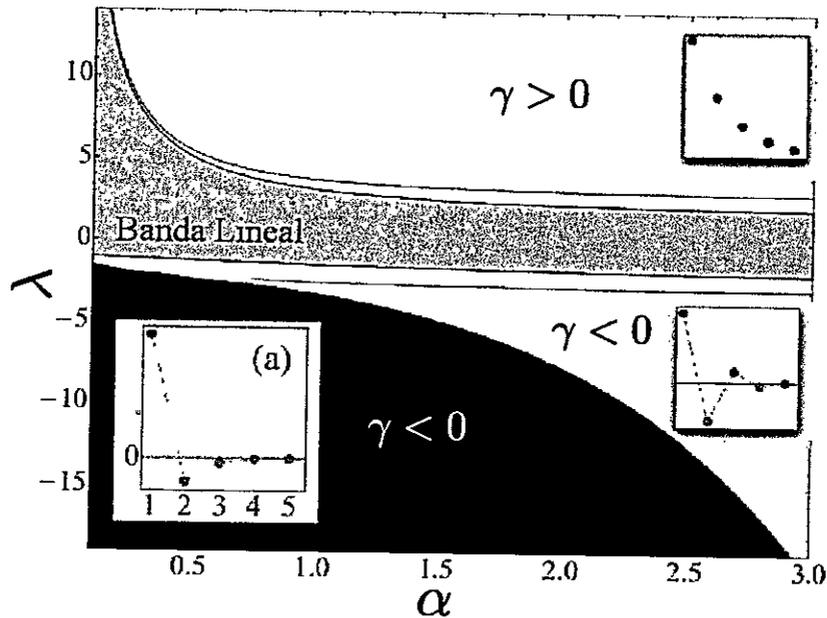


Figura 4.9: Región de existencia en el espacio α - λ . La región gris clara corresponde a soluciones no-escalonadas ($\lambda > 0$) y escalonadas ($\lambda < 0$). La región gris oscura denota la banda lineal, mientras que las regiones blanca son lugares donde no existen soluciones no-lineales de superficie. La región negra muestra el espacio donde viven soluciones no-lineales de superficie con fase no bien definida. (a) Muestra un ejemplo de algunas de las soluciones que se pueden encontrar en la region negra.

en el límite $\alpha \rightarrow 0$. Otra observación es que la pérdida de la fase escalonada no es detectada en los diagramas de potencia en función de la constante de propagación.

Para entender desde la ecuación (4.3) el comportamiento inesperado de la fase en $\gamma < 0$ podemos acudir a la aproximación de modos fuertemente localizados. Esta aproximación es válida cuando la constante de propagación está lejos de la banda lineal, de esta forma el modo no-lineal se puede escribir como: $\{\psi_n\} = \psi_0\{1, \epsilon, \beta, 0, \dots\}$, con $1 \gg |\epsilon| \gg |\beta|$. Nosotros centraremos nuestro análisis en β como un indicador del cambio de fase. Si insertamos el ansatz en la ecuación (4.3) y resolvemos para el sitio $n = 3$ obtenemos $\beta \approx V(\epsilon + e^{-\alpha})/(\lambda - \gamma\psi_0^2\beta^2)$. Desde el límite anticontinuo,

nosotros sabemos que soluciones de alta potencia corresponden, esencialmente, a excitaciones de un sólo sitio, más una cola que decae exponencialmente. Por esto, en primera aproximación se tiene que, $|\lambda| > |\gamma|\psi_0^2$. De esta forma, si $\gamma > 0$, también $\lambda, \epsilon > 0$, imponiendo que $\beta > 0$ para todo α , lo cual es completamente consistente con lo obtenido numéricamente y muestra que las soluciones enfocantes son siempre no escalonadas. Por el contrario, cuando $\gamma < 0$, también $\lambda, \epsilon < 0$, por lo que el signo de β dependerá del balance $|\epsilon| - e^{-\alpha}$. Para α fijo, este balance podría ser negativo para soluciones de alta potencia puesto que $\epsilon \rightarrow 0$. Por lo que para α "grande" se espera que el cambio en la estructura de fase ocurra para constantes de propagación "grandes", mientras que en el límite opuesto, α "pequeño", el cambio en la estructura de fase se espera que ocurra cercano a la banda. Esta estimación ajusta perfectamente con los resultados numéricos mostrados en la curva blanca de la figura 4.9.

4.3. Generación dinámica de solitones discretos de superficie

En esta sección nos interesa estudiar el impacto de la interacción más allá de primeros vecinos en la generación dinámica de solitones discretos de superficie, para esto resolvemos la ecuación (4.1) utilizando una condición inicial totalmente localizada tipo delta: $\psi_n(0) = \sqrt{P_0}\delta_{n,1}$, donde P_0 es la potencia. Para un valor de α y P_0 fijo, calculamos el promedio de la intensidad del campo en la guía inicialmente excitada:

$$f = \frac{1}{P_0 z_{max}} \int_0^{z_{max}} |A_1(z)|^2 dz. \quad (4.24)$$

f corresponde a un buen indicador de la localización del campo [42]; donde $f = 1$ significa que la excitación permanece a lo largo de la distancia de propagación com-

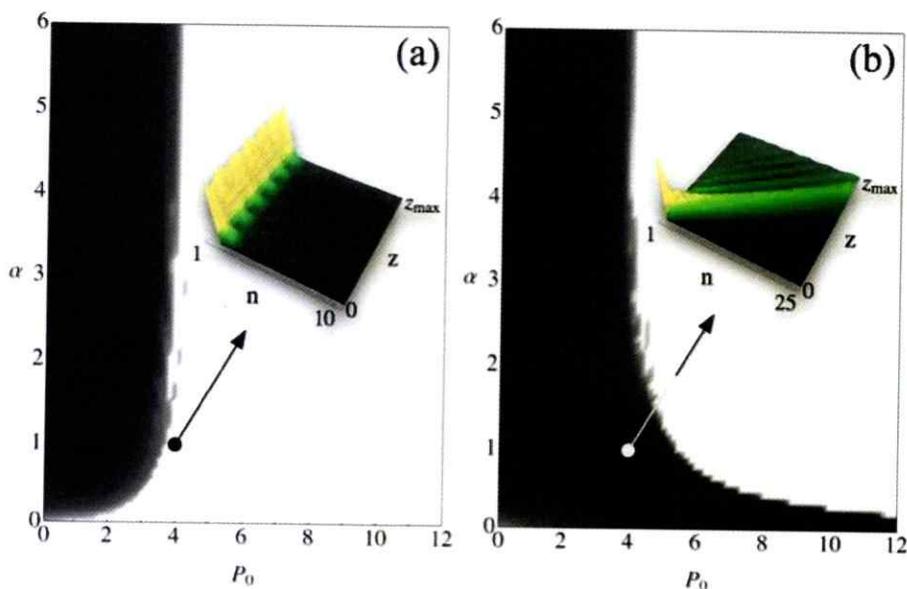


Figura 4.10: Intensidad promedio a lo largo de la guía inicialmente excitada en el espacio P_0 - α . (a) y (b) corresponden a $\gamma < 0$ y $\gamma > 0$, respectivamente. Regiones negras y blancas denotan regiones donde $f \approx 0$ y $f \approx 1$, respectivamente. Figuras interiores muestran la propagación dinámica para $\alpha = 1$ y $P_0 = 4$ en ambos regímenes no-lineales.

pletamente localizada, mientras que $f = 0$ da cuenta de difracción, típicamente observado a muy baja no-linealidad. Resultados para f como función de α y P_0 se muestran en la figura 4.10. Destacamos nuevamente el comportamiento diametralmente opuesto para los distintos regímenes no-lineales. Mientras que para $\gamma > 0$ un incremento en el rango del acoplamiento se traduce en un incremento en el umbral necesario para excitar dinámicamente una estructura localizada, en $\gamma < 0$ ocurre lo opuesto, de modo que al disminuir α disminuye el umbral dinámico requerido para excitar estructuras localizadas. Esta contraintuitiva asimetría se vuelve particularmente notable entorno a $\alpha \approx 1$ (ver simulaciones mostradas en la figura 4.10). Además, estos resultados están en total correspondencia con los obtenidos en la sección anterior para modos estacionarios no-lineales.

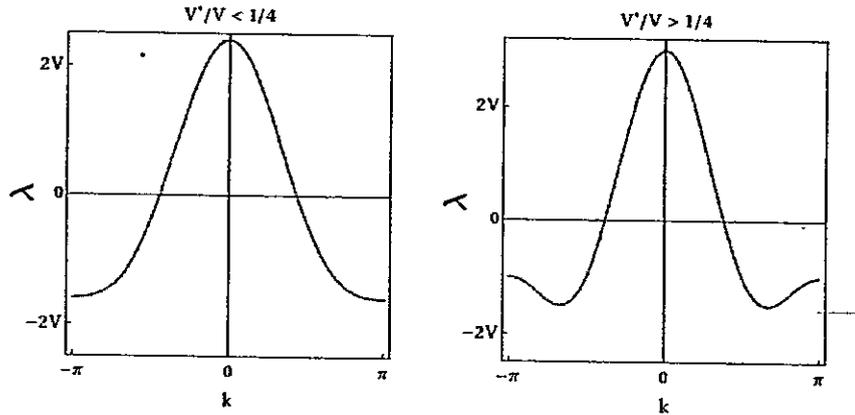


Figura 4.11: Relación de dispersión lineal para el caso de arreglos zig-zag antes (izquierda) y después (derecha) del valor crítico del acoplamiento a segundos vecinos.

4.4. Acoplamiento de alcance finito en arreglos semi-infinitos: arreglos zig-zag

En esta sección, discutiremos el caso especial de considerar sólo acoplamiento a primeros y segundos vecinos (llamados arreglos zig-zag), a modo de mostrar la robustez de los resultados obtenidos. Este escenario tiene la particularidad que ha sido testeado experimentalmente en óptica y se han observado solitones discretos en arreglos de guías de ondas [19]. En óptica el acoplamiento a segundos vecinos se logra mediante la distribución espacial de las guías en el arreglo (ver figura 3.1).

La ecuación que describe la propagación del campo en este caso es

$$i \frac{d\psi_n}{dz} + V(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) + V'(\psi_{n+2} + \psi_{n-2}) + \gamma|\psi_n|^2\psi = 0, \quad (4.25)$$

donde V es el acoplamiento a primeros vecinos y V' el acoplamiento a segundos vecinos. Aquí exigimos que $\psi_{n<0} = 0$ para tener un sistema semi-infinito. La relación de dispersión para ondas planas en este caso viene dada por:

$$\lambda(k) = 2V \cos(k) + 2V' \cos(2k), \quad (4.26)$$

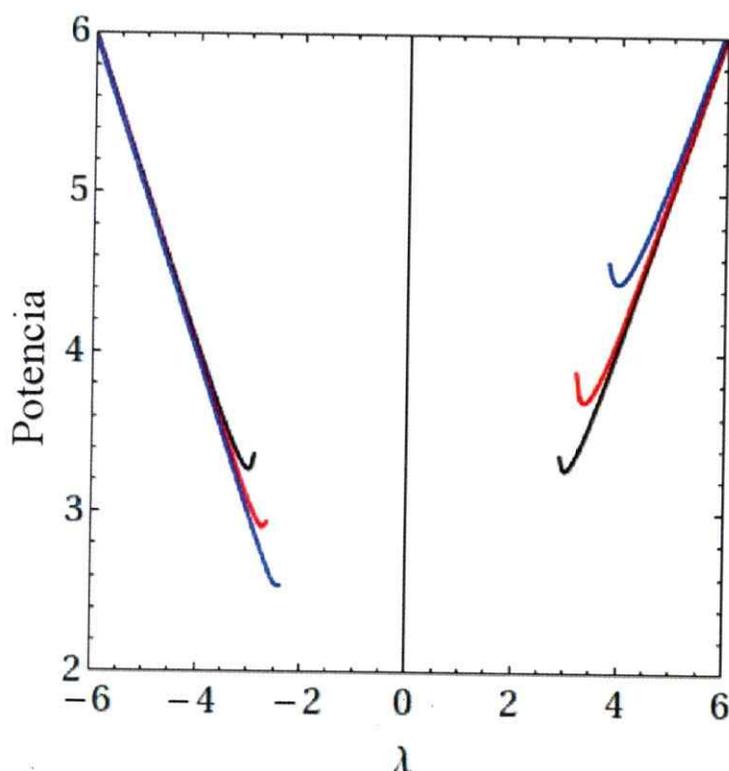


Figura 4.12: Diagrama de potencia en función de la constante de propagación λ para un arreglo zig-zag. Soluciones con $\lambda < 0$ ($\lambda > 0$) corresponden al régimen no-lineal desenfocante (enfocante). En negro $\beta = 0$, en rojo $\beta = 0.2$ y en azul $\beta = 0.5$.

y los bordes de banda se encuentran en

$$\lambda_+ = 2V(1 + \beta), \quad (4.27)$$

$$\lambda_- = \begin{cases} -2V(1 - \beta), & \beta \leq \beta_c \\ -V/(4\beta) - 2V\beta, & \beta > \beta_c \end{cases}, \quad (4.28)$$

donde hemos definido $\beta = V'/V$, y $\beta_c = 1/4$. λ_+ y λ_- es el máximo y mínimo de la relación de dispersión, respectivamente. La figura 4.11 muestra ejemplos de la relación de dispersión antes y después de β_c .

En este caso también se observa un comportamiento opuesto en los umbrales de los modos no-lineales (ver figura 4.12), donde al igual que para el caso de acoplamiento exponencialmente decreciente el umbral crece (decrece) monótonamente al incre-

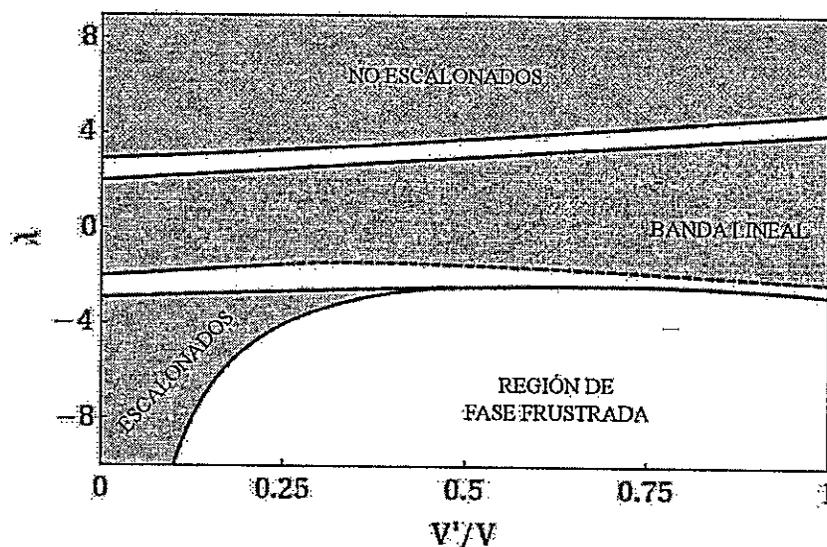


Figura 4.13: Región de existencia de soluciones escalonadas y no-escalonadas y banda lineal en un sistema zig-zag en función del acoplamiento a segundos vecinos.

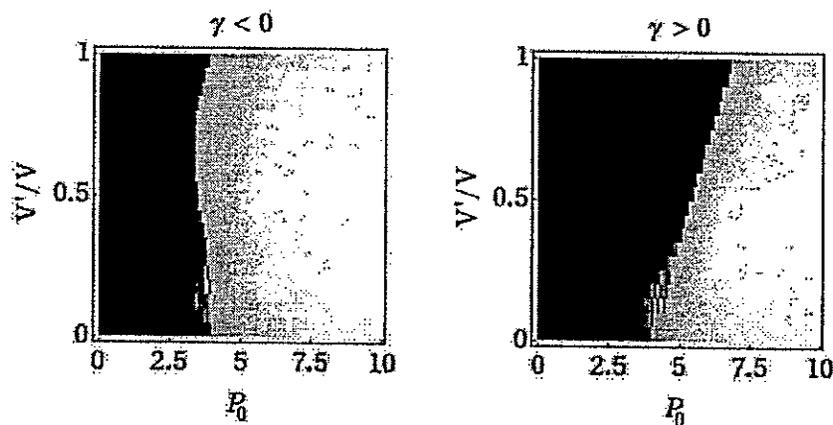


Figura 4.14: Promedio de la intensidad del campo en la guía inicialmente excitada para los distintos regímenes no-lineales. En negro $f = 0$, mientras que en blanco $f = 1$.

mentar el rango del acoplamiento en el régimen enfocante (desenfocante).

Así también, la región de existencia de los modos no-lineales (ver figura 4.13) presenta un comportamiento similar al caso exponencialmente decreciente, observándose

que para $\gamma > 0$ los modos no escalonados existen a una distancia finita de la banda lineal, para todo valor de β sin cambiar su topología. Para $\gamma < 0$, los modos escalonados existen solo en una región acotada, tendiendo a cero para $\beta > 0.45$. Fuera de ésta región se tienen soluciones con estructura de fase compleja (frustrada), pero los cambios en la fase ocurren a nivel local debido a que el acoplamiento es esencialmente de alcance finito.

Finalmente, dinámicamente se observa también la fuerte asimetría entre los regímenes no-lineales (ver figura 4.14). Para $\gamma > 0$ se observa un incremento monótono del umbral en la medida que incrementa el acoplamiento a segundos vecinos, mientras que para $\gamma < 0$, el comportamiento del umbral no es monótono, disminuyendo en el rango $\beta \in (0, 0.6)$, y luego, para $\beta > 0.6$ el umbral aumenta.

4.5. Resumen de este capítulo

Probamos que, en el límite de excitaciones de baja potencia (regimen lineal), el acoplamiento de largo alcance puede modificar sustancialmente la relación de dispersión de ondas planas, afectando a las propiedades difractivas del arreglo. Esta modificación abrupta en la relación de dispersión trae consigo una asimetrización en las propiedades de excitaciones no-lineales, tales como, la región de existencia, la estabilidad y los umbrales de potencia necesarios para excitar modos no-lineales en los distintos regímenes no-lineales. Además, para $\gamma < 0$ (no-linealidad desenfocante) observamos que al incluir acoplamiento más allá de primeros vecinos la fase del modo no-lineal pierde su estructura escalonada, característica del límite de acoplamiento sólo a primeros vecinos, surgiendo soluciones que presentan una estructura compleja en la fase. En lo que se refiere al umbral necesario para excitar modos no-lineales, numéricamente probamos que existe una correspondencia entre

los umbrales obtenidos en el análisis estacionario con los obtenidos tras integración directa de la ecuación de movimiento usando una condición inicial completamente localizada. Adicionalmente, verificamos que las propiedades encontradas en el caso de acoplamiento exponencialmente decreciente son propias de sistemas con acoplamiento más allá de primeros vecinos, observando en un arreglo zig-zag asimetría entre los umbrales en los distintos regímenes no-lineales, pérdida de la fase escalonada en $\gamma < 0$ y un comportamiento opuesto en cuando a cómo se modifica la región de existencia de modos no-lineales al incluir acoplamiento a segundos vecinos.

Capítulo 5

Sistemas Finitos Aperiódicos

Como hemos mencionado en los capítulos anteriores, sistemas discretos y, en particular arreglos de guías de onda y redes fotónicas, han sido útiles para estudiar y observar la fenomenología general asociada a la localización de ondas por medio de la interacción entre no-linealidad, periodicidad (o la pérdida de ella), desorden, efectos de bordes, geometría y dimensionalidad. Entre otros fenómenos, han permitido la observación directa de la localización de Anderson [8,47,48], estados de Tamm truncados en redes ópticas [16,49], y efectos de borde en localización de Anderson [50]. Este último problema resulta ser realmente complicado de abordar desde un punto de vista analítico y muy costoso computacionalmente debido a que es necesario realizar estadística sobre un gran número de redes generadas aleatoriamente. Existe una clase especial de sistemas que emulan a un sistema desordenado, pero con propiedades distintas, estos son los llamados sistemas cuasi-periódicos, que corresponden a un tipo de pérdida de periodicidad más débil que la presente en sistemas con desorden descorrelacionado (Anderson), y que generan el “desorden” mediante mecanismos deterministas. Existen varios mecanismos distintos, pero nosotros nos centraremos en estudiar dos casos: el modelo de Fibonacci y el modelo de Aubry-André (A-A). El primero consiste en aplicar sucesivamente un set finito de reglas de

sustitución de forma iterativa de modo de generar una secuencia aperiódica. El segundo método consiste en aplicar una modulación periódica sobre la red, con período inconmensurable con el período de la red, de modo que se genera una red aperiódica.

Efectos de cuasi-periodicidad en sistemas discretos han sido estudiados, por ejemplo, en la interfase entre un metal y una red de Fibonacci, donde se ha probado que es posible excitar ondas localizadas [51]. También, para un arreglo de guías cuasi-periódico del tipo Aubry-André, la transición de localización ha sido observada experimentalmente [52], acorde a la predicción teórica previa [53]. Además, y en contraste con sistemas periódicos, la cuasi-periodicidad da origen al surgimiento de modos lineales de superficie [54] y a una rica estructura auto-similar de bandas y gaps [55]. Por esta razón, la región de existencia (en el espacio de parámetros) de solitones discretos de superficie se espera que aumente en sistemas cuasi-periódicos respecto al caso periódico.

Por otra parte, concerniente a la interacción entre desorden y superficie, Szameit *et al.* [50] observaron experimentalmente que en un arreglo de guías de onda truncado la localización es más débil en las superficie del arreglo que lejos de éste. Esto para un mismo grado de desorden. Este resultado refuerza la idea de que en una dimensión la superficie actúa de forma "repulsiva" frente a excitaciones no-lineales [15]. Pero la historia no es tan simple, trabajos recientes [56] extienden los estudios de Szameit, explorando la interacción entre superficie, desorden y no-linealidad, encontrando que la superficie puede actuar de forma repulsiva sólo en cierto rango de parámetros, dependiendo del peso relativo entre no-linealidad y desorden: para no-linealidad débil y un desorden "moderado", la localización es menor en la superficie que lejos de ella, en concordancia con los resultados experimentales presentes en [50]. Por el contrario, cuando el desorden es lo suficientemente fuerte y/o la no-linealidad también lo es,



localizar energía en la superficie puede resultar menos costoso que lejos de ella.

La propagación del campo en las guías de ondas es descrita por $E(x, z) = \sum_n E_n(z)\phi_n(x)$, donde E_n es la amplitud del modo $\phi_n(x)$ de la guía n -ésima. De esta forma, la evolución de la amplitud de los modos vendrá dada por:

$$\left(i\frac{d}{dz} + \epsilon_n\right) E_n + V(E_{n+1} + E_{n-1}) + \gamma|E_n|^2 E_n = 0, \quad (5.1)$$

donde $\{\epsilon_n\}$ es una secuencia aperiódica.

En este capítulo, nos centraremos en estudiar la interacción entre efectos de superficie, cuasi-periodicidad, y no-linealidad. Este capítulo está organizado de la siguiente manera: primero describiremos el esquema general donde trabajaremos y explicaremos en detalle los distintos mecanismos generadores de cuasi-periodicidad que utilizaremos. Luego, mostraremos la estructura de bandas y gaps para los distintos casos y discutiremos las regiones de existencia de solitones discretos de superficie, calculando distintas familias de solitones en distintos gaps y estudiando su estabilidad. Finalmente, exploraremos las propiedades dinámicas de este modelo, evaluando el efecto de la superficie y comparandolo con el caso de sistemas infinitos. Además, discutiremos el caso de cuasi-periodicidad en el acoplamiento entre guías de ondas.

5.1. Redes Cuasi-periódicas tipo Fibonacci

El primer caso corresponde a arreglos formados mediante la aplicación sucesiva de una regla de substitución. Existen varias alternativas, entre las más populares se encuentran las reglas de Fibonacci que vienen dadas por: $A \rightarrow AB$ y $B \rightarrow A$. De este modo, partiendo con una cierta semilla, por ejemplo $\epsilon_0 = \epsilon_a$, es posible obtener una sucesión aperiódica de constantes de propagación. Las primeras cinco iteraciones entregan las siguientes sucesiones:

Generación 0:	ϵ_a	Largo 1
Generación 1:	$\epsilon_a \epsilon_b$	Largo 2
Generación 2:	$\epsilon_a \epsilon_b \epsilon_a$	Largo 3
Generación 3:	$\epsilon_a \epsilon_b \epsilon_a \epsilon_a \epsilon_b$	Largo 5
Generación 4:	$\epsilon_a \epsilon_b \epsilon_a \epsilon_a \epsilon_b \epsilon_a \epsilon_b \epsilon_a$	Largo 8
Generación 5:	$\epsilon_a \epsilon_b \epsilon_a \epsilon_a \epsilon_b \epsilon_a \epsilon_b \epsilon_a \epsilon_b \epsilon_a \epsilon_b \epsilon_a$	Largo 13

donde los largos van de acuerdo a la sucesión de Fibonacci. Otra forma de representar la construcción de las secuencias en cada iteración es mediante la concatenación de secuencias sucesivas, es decir, $w_n = w_{n-1}w_{n-2}$, donde w_n corresponde a la secuencia generada tras n aplicaciones sucesivas de las reglas de sustitución. Esta representación es útil para darnos cuenta que todas las generaciones comparten los mismos elementos iniciales y lo que cambia, iteración tras iteración, es sólo la *cola* de la sucesión. El primer valor de la sucesión corresponde al valor de la constante de propagación en el borde de nuestro arreglo semi-infinito. En secciones posteriores veremos que es posible re-expresar ϵ_a y ϵ_b en términos de un único parámetro adimensional apropiado ϵ .

En la práctica, experimentalmente y computacionalmente, los arreglos de guías de onda son de tamaño finito, emulando la situación semi-infinita en el límite $N \gg 1$, de modo que nosotros sólo aplicaremos un número finito de veces las reglas de sustitución.

Los modos lineales ($\gamma = 0$) se obtienen reemplazando $A_n(z) = A_n e^{i\lambda z}$ y reduciendo la ecuación (5.1) a un problema de autovalores. En el límite $N \rightarrow \infty$, se ha probado que el espectro lineal converge a una estructura fractal, con dos "bandas" principales (ver Fig 5.1), cada una con una estructura interna autosimilar de bandas y gaps [55]. Por su parte, los autoestados también manifiestan dicha fractalidad, mostrando un patrón autosimilar en concordancia con la aperiodicidad del sistema. Entre estos autoestados se encuentra un número infinito de modos localizados en la superficie. Por otro lado, en el límite de sistemas finitos, el número de autoes-

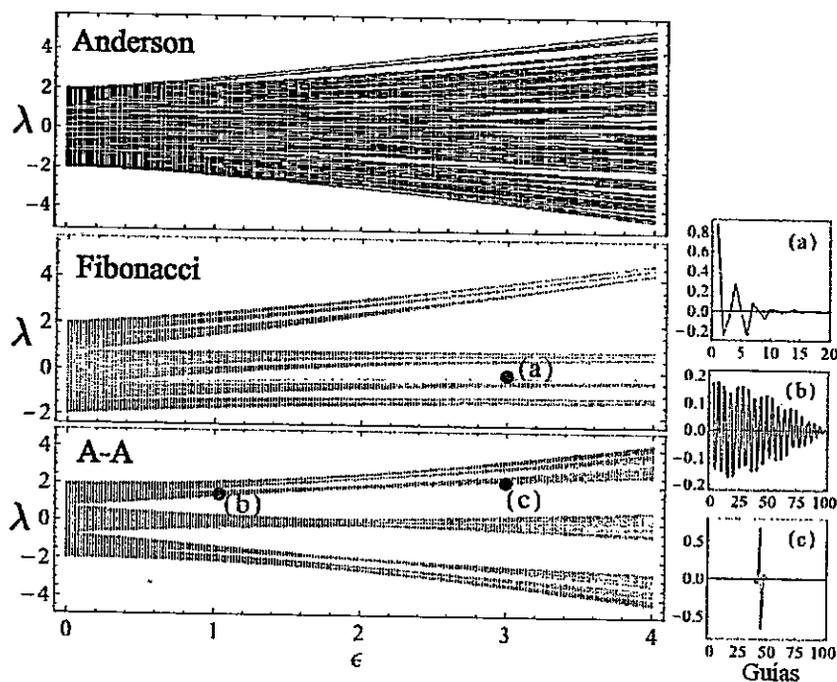


Figura 5.1: Espectro lineal ($\gamma = 0$) como función de ϵ para el modelo de Anderson, Fibonacci y Aubry-André desde arriba hacia abajo, respectivamente. En el modelo de Anderson se considera ϵ_n como un número al azar (desde una distribución tipo ruido blanco) entre $-\epsilon$ y ϵ para todo n . Para el modelo A-A, $\chi = (\sqrt{5} + 1)/2$. (a) Modo lineal de superficie para el modelo de Fibonacci. (b) y (c) muestran ejemplos de modos asimétricos extendidos ($\epsilon = 1$) antes de la transición y modo localizado lineal ($\epsilon = 3$) después de la transición, respectivamente, para el mismo autovalor en el modelo A-A.

tados localizados en la superficie depende fuertemente del tamaño del arreglo. Los autovalores de dichos estados se ubican dentro del espectro lineal como puntos *aislados*, similar a lo que ocurre con estados ligados a impurezas. La determinación de cuántos autoestados lineales de superficie existen para un N fijo resulta ser un problema complejo y que no será tratado en el contexto de esta Tesis. Nuestro trabajo se centrará en un sistema de $N = 89$ guías de ondas, donde encontramos al menos un autoestado localizado en la superficie (ver figuras 5.1).

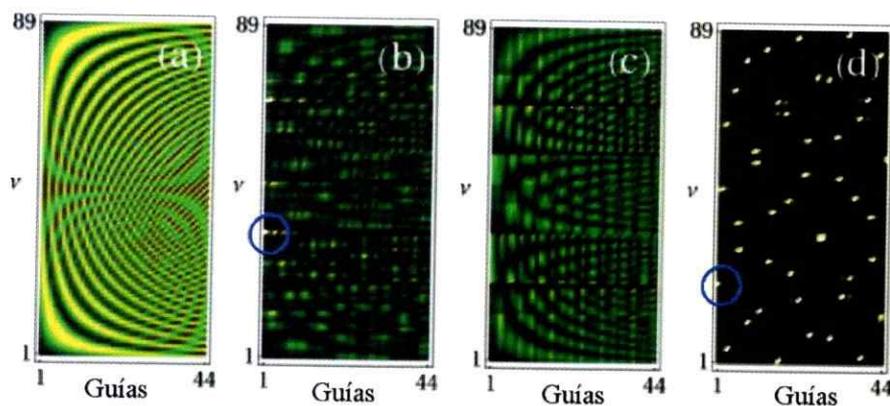


Figura 5.2: Distribución espacial de intensidades de los modos lineales para (a) un arreglo completamente periódico, es decir, $\epsilon = 0$ en ambos modelos, (b) un arreglo de Fibonacci para $\epsilon = 1$, (c) y (d) un arreglo de AA antes ($\epsilon = 1$) y después ($\epsilon = 3$) de la transición de localización, respectivamente. Los círculos azules denotan modos lineales de superficie. Aquí sólo se muestran los modos truncados hasta la guía 44 para una mejor visualización de los modos de superficie. El parámetro ν etiqueta los modos en orden creciente de sus autovalores (constantes de propagación).

5.2. Redes incommensurablemente moduladas

Otra vía para generar un arreglo cuasi-periódico es mediante la modulación espacial de las constantes de propagación de manera incommensurada con el periodo natural del sistema discreto. Un ejemplo interesante de esto es el modelo de Aubry-André [52], donde la constante de propagación en cada guía de onda es tomada como:

$$\epsilon_n = \epsilon_0 + \eta \cos(2\pi n\chi), \quad (5.2)$$

donde ϵ_0 es la constante de propagación del sistema sin modulación, η es el peso de la modulación, y χ es la razón entre el período de la modulación y el período natural de la red. El modelo se ha construido de forma tal que tendremos un arreglo cuasi-periódico cuando χ sea un número irracional. En el caso lineal ($\gamma = 0$) el modelo A-A tiene la particularidad que muestra una transición de localización en $|\eta/V| = 2$,

es decir, para $|\eta/V| < 2$, todos los autoestados son extendidos, mientras que para $|\eta/V| > 2$, todos los autoestados son localizados (ver figura 5.2). En el regimen de estados localizados el espectro lineal forma una estructura fractal y está compuesto sólo de puntos *aislados*, de tal modo que su complemento es un conjunto denso [57,58].

5.3. Adimensionalización

Por simplicidad, estamos interesados en re-escribir una versión mas compacta en términos de parámetros de la ecuación (5.1), esto es posible mediante la transformación $E_n(z) = \sqrt{V/\gamma} A_n(\xi) e^{i\phi\xi}$, con $\xi = Vz$. De esta forma, la ecuación resulta:

$$\left(i \frac{d}{d\xi} + \delta_n \right) A_n + (A_{n+1} + A_{n-1}) + \text{sgn}(\gamma) |A_n|^2 A_n = 0, \quad (5.3)$$

donde $\delta_n = (\epsilon_n/V) - \phi$ y γ positivo (negativo) denota el caso no-lineal enfocante (desenfocante). Mediante una juiciosa elección de ϕ uno puede describir ambos modelos. Para el modelo de Fibonacci definimos ϕ como ϵ_a/V , obteniendo $\delta_n = 0$ o $\epsilon = (\epsilon_b - \epsilon_a)/V$, mientras que para el modelo AA, nosotros definimos $\phi = \epsilon_0/V$, obteniendo $\delta_n = \epsilon \cos(2\pi n\chi)$, con $\epsilon = \eta/V$. ϵ corresponde al parámetro de control relevante en ambos modelos y, da cuenta del peso del potencial cuasi-periódico.

Al igual que en las secciones anteriores, la potencia $P = \sum_n |A_n|^2$ es una cantidad conservada, y será el parámetro que utilizaremos para caracterizar las distintas familias de modos no-lineales.

5.4. Solitones de Superficie

En esta sección, al igual que en el capítulo cuatro, estamos interesados en soluciones no-lineales estacionarias que sean localizadas en la superficie del arreglo. Dichas soluciones corresponden a funciones del tipo $A_n(z) = A_n e^{i\lambda z}$, obteniendo

el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas acopladas:

$$-\lambda A_n + (A_{n+1} + A_{n-1}) + \delta_n A_n + \text{sgn}(\gamma) |A_n|^2 A_n = 0, \quad (5.4)$$

donde consideraremos A_n como una cantidad real para todo n . La ecuación (5.4) es invariante ante la transformación de simetría $(\lambda, \gamma, \epsilon, A_n) \rightarrow (-\lambda, -\gamma, -\epsilon, (-1)^n A_n)$. Esto resulta muy útil al momento de realizar una descripción numérica del sistema, puesto que sólo es necesario explorar la mitad del espacio $\lambda - \epsilon$. De esta forma, distinguimos dos familias de soluciones no-lineales independientes entre si: los modos no-lineales del tipo-I, que viven en: $\{\gamma > 0, \epsilon > 0\} \cup \{\gamma < 0, \epsilon < 0\}$, y los modos no-lineales del tipo-II, que viven en: $\{\gamma > 0, \epsilon < 0\} \cup \{\gamma < 0, \epsilon > 0\}$. A lo largo de nuestro análisis, fijaremos $\epsilon > 0$ y cambiaremos el signo de γ para encontrar las distintas familias de modos no-lineales de superficie presentes en el sistema.

La ecuación (5.4) es resuelta mediante el método de Newton-Raphson en varias variables usando el límite anticontínuo (sistema desacoplado o alta potencia) como punto de partida para encontrar de manera autoconsistente las distintas ramas de soluciones no-lineales. La estabilidad de las soluciones es caracterizada mediante un análisis estándar de estabilidad lineal. Siguiendo el Apéndice A, dada una solución no-lineal obtenida por medio del método de Newton-Raphson, realizamos una perturbación en la amplitud de la forma: $A_n(\xi) = [A_n + \psi_n(\xi)]e^{i\lambda\xi}$, con $|\psi_n| \ll 1$, donde ψ_n es una cantidad compleja que satisface la ecuación:

$$i \frac{d}{d\xi} \psi_n = (\lambda - \delta_n) \psi_n - (\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) - \text{sgn}(\gamma) A_n^2 (2\psi_n + \psi_n^*), \quad (5.5)$$

donde los autoestados de esta ecuación corresponden a funciones de la forma: $\psi_n(\xi) = \psi_n e^{i\Omega\xi}$, de modo que la ausencia o presencia de autovalores con parte imaginaria distinta de cero, determinan la estabilidad o inestabilidad, respectivamente, de la solución $\{A_n\}$.

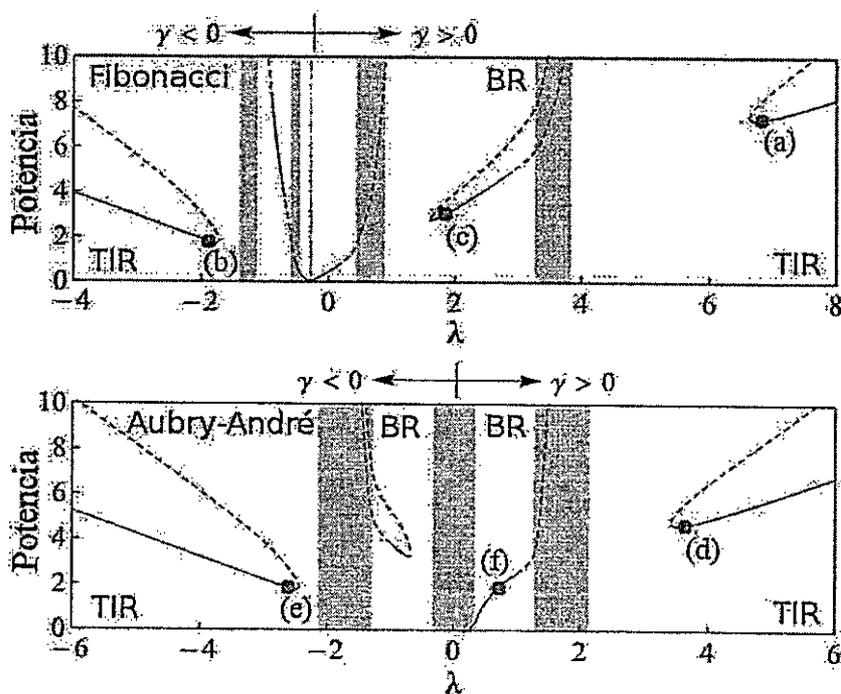


Figura 5.3: Relación entre potencia y constante de propagación para diferentes familias de solitones discretos de superficie en ambos regímenes no-lineales para $\epsilon > 0$. El signo del parámetro no-lineal γ está descrito en la figura. Las curvas solidas muestran soluciones estables, mientras que las curvas entrecortadas denotan soluciones inestables. (Arriba) Modelo de Fibonacci para $\epsilon = 3$ y (abajo) modelo A-A para $\epsilon = 1$.

La figura 5.3 muestra la potencia contenida en el modo no-lineal como función de la constante de propagación λ para diferentes familias de modos no-lineales de superficie que existen en los diferentes gaps para los modelos de Fibonacci y A-A. Observamos que estos modos se originan mediante dos mecanismos: (i) bifurcación tangente, usualmente observada en los modos presentes en los gaps externos, surgiendo una rama estable y una inestable (línea continua y entrecortada, respectivamente). Aquí, el ambiente local es el que predomina sobre las propiedades del modo no-lineal, mientras que el tamaño del arreglo no juega un rol significativo. (ii) El otro mecanismo

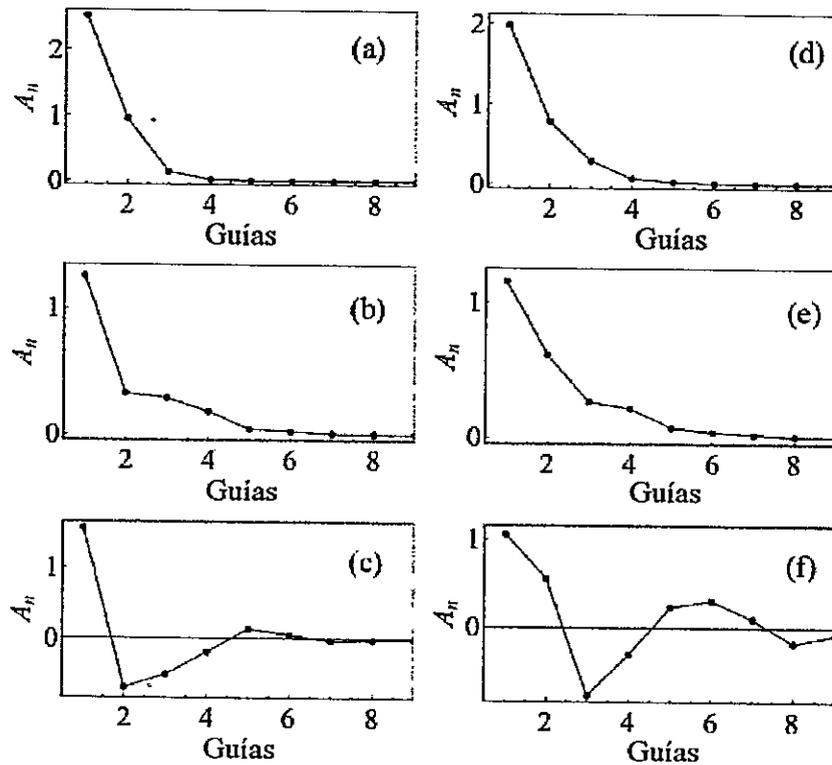


Figura 5.4: Modos no-lineales de superficie estables para los valores de potencia y constante de propagación marcados en la Fig. 5.3. Columna izquierda: Modelo de Fibonacci. Columna derecha: modelo AA.

corresponde a familias de modos no-lineales que bifurcan desde modos lineales (auto-funciones), sólo dos tipos de modos lineales permiten este tipo de bifurcación: modos lineales localizados en la superficie o modos asimétricos extendidos (ver figuras 5.1 y 5.2). Uno de los comportamientos más interesantes de la Fig. 5.3 es la fuerte asimetría entre el caso enfocante y desenfocante, para la misma distribución $\{\epsilon_n\}$. Esto es resultado de que las familias de soluciones del tipo-I y tipo-II corresponden a soluciones totalmente independientes entre sí.

En la Fig. 5.4, mostramos ejemplos de modos de superficie para valores de los parámetros en las distintas regiones marcadas en la Fig. 5.3. Notamos que dichas

soluciones lucen cualitativamente similares en ambos modelos. A continuación describimos en mayor detalle las características de modos en los distintos gaps.

5.4.1. Modos en el Gap de reflexión total interna

A estos modos los llamaremos modos TIR, correspondientes a soluciones altamente localizadas en la superficie; además, la constante de propagación asociada a este tipo de soluciones esta ubicada en el gap mas externo, correspondiendo de esta forma a soluciones que oscilan rápidamente en la dirección de propagación. En dicho gap dominan, principalmente, los efectos de localización mediante no-linealidad. Estos modos están caracterizados por requerir un mínimo de potencia (umbral) para existir. Este umbral presenta distintos comportamientos tras la inclusión de la modulación cuasi-periódica sobre el sistema. En el caso de modos del tipo-I se tiene que el umbral aumenta monótonamente con $|\epsilon|$ en ambos modelos. Mientras que para modos del tipo-II tenemos comportamientos opuestos entre los distintos modelos, por un lado el umbral decrece monotonamente para el modelo de Fibonacci, pero en el modelo AA tenemos que para $|\epsilon| \approx 2.59$ existe un umbral mínimo $P_{Th} \approx 1.25$ (ver Fig. 5.5).

Por otra parte, el análisis de estabilidad lineal revela que todos los modos TIR presentan cambio de estabilidad cuando $\partial P / \partial |\lambda| = 0$, donde la bifurcación ocurre. La estabilidad del modo está también asociada a la posición relativa del "centro de masa" de la solución: En soluciones estables (figuras 5.4), el centro de masa está cercano a la superficie, mientras que soluciones inestables presentan centro de masa más cercano a la segunda guía.

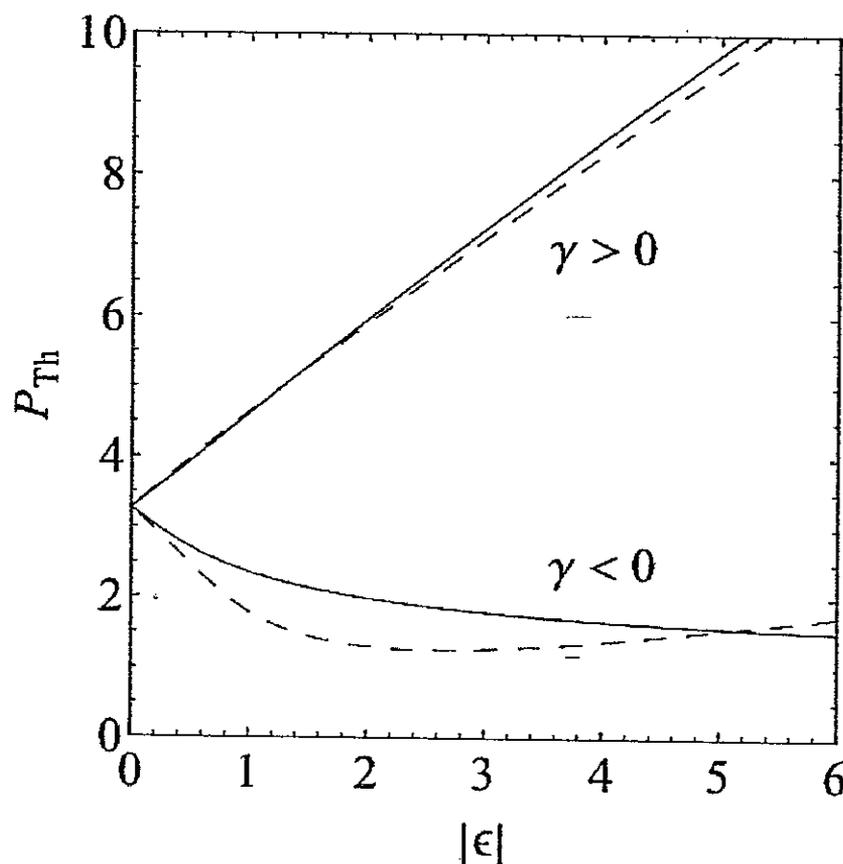


Figura 5.5: Potencia mínima necesaria para excitar modos no-lineales localizados en la superficie del gap TIR como función de $\epsilon > 0$ para no-linealidad enfocante y desenfocante. Curvas sólidas (entrecortadas) corresponden al modelo de Fibonacci (Aubry-André). $\gamma > 0$ está asociado a los modos del tipo-I, mientras que $\gamma < 0$ está asociado a los modos del tipo-II.

5.4.2. Modos en el Gap de reflexión de Bragg

Estos modos residen en los gaps internos, donde los efectos de reflexión de Bragg predominan. En estas regiones, la localización es resultado combinado de la no-linealidad y las reflexiones producidas por la estructura aperiódica. Estos modos son menos localizados que los TIR (ver figuras 5.4) y no necesariamente requieren de una potencia mínima para existir. Así, modos que no bifurcan desde modos lineales

presentan umbral sobre el cual es posible excitarlos, mientras que los modos que bifurcan desde modos lineales (figuras 5.1a y 5.1b) no poseen umbral. En este caso, la presencia de no-linealidad produce un corrimiento en la constante de propagación del modo lineal, llevando su energía dentro del gap y dando origen a un modo de superficie no-lineal.

En el caso de Fibonacci, el número de modos lineales de superficie o asimétricos que puede dar a origen a modos no-lineales de superficie es función del número de sitios N . En particular, para $N = 89$, tenemos un único modo lineal localizado en la superficie (ver figura 5.1), del cual bifurcan solitones del tipo-I y del tipo-II, como se muestra en la Fig. 5.3. Por otra parte, para el modelo AA, tenemos una transición de localización en $|\epsilon| = 2$, de modo que la fenomenología es totalmente diferente. Por una parte, antes de la transición ($|\epsilon| < 2$), los modos lineales son extendidos y sólo uno de ellos es asimétrico, con un máximo en torno a la superficie (ver Fig. 5.1). Después de la transición ($|\epsilon| > 2$), todos los modos se vuelven localizados y sólo uno de ellos se encuentra localizado en la superficie del arreglo (ver Fig. 5.2), permitiendo, que bifurque un modo no-lineal de superficie desde él. Cuando la no-linealidad está presente, a medida que aumenta la potencia la constante de propagación asociada a las soluciones se mueve por los gaps monótonamente. Dado que la constante de propagación, en este caso, se encuentra en un gap entre dos minibandas, las soluciones sufren un tipo de inestabilidad oscilatoria producida cuando la constante de propagación se aproxima a la banda. Esta inestabilidad se manifiesta como un fenómeno de resonancia entre el modo lineal asociado a la constante de propagación del borde de banda con la cola del modo no-lineal, esto debido a que al ser soluciones localizadas en la superficie, la cola del modo es de baja amplitud, por lo que los efectos no-lineales son despreciables y por tanto tenemos principalmente una

dinámica regida por ecuaciones lineales. La inestabilidad trae consigo dos efectos: (i) deslocalización del modo no-lineal, incrementando la intensidad del campo en la cola, y (ii) sincronización de la fase del modo no-lineal con la del modo lineal del borde de banda. Comportamientos similares han sido reportados en sistemas continuos con potenciales periódicos [59–62] y también en sistemas discretos binarios [63, 64]; este último, es particularmente interesante puesto que es un sistema discreto periódico con dos bandas, por lo que resulta el escenario más simple para explorar fenómenos discretos presentes en sistemas de múltiples bandas.

5.5. Dinámica de localización

Ahora estamos interesados en estudiar el impacto de la modulación cuasi-periódica sobre la evolución dinámica de una condición inicial localizada en la superficie del arreglo, comparándolos con los resultados obtenidos lejos de la superficie. Para esto, integramos la ecuación (5.3) numéricamente con una condición inicial $A_n(0) = \sqrt{P}\delta_{n_0, n}$, con $n_0 = 1$ para la excitación en la superficie. Para el caso lejos de la superficie, tendremos diferentes ambientes locales entorno a la condición inicial dependiendo de la elección de n_0 , por lo que promediaremos los resultados para distintas elecciones aleatorias de n_0 .

Al igual que en el capítulo anterior, utilizaremos como indicador de localización dinámica el promedio de la intensidad del campo en la guía inicialmente excitada:

$$f = \frac{1}{P\xi_{max}} \int_0^{\xi_{max}} |A_1(\xi)|^2 d\xi, \quad (5.6)$$

esta cantidad la calcularemos como función de ϵ y la potencia P , tras una cierta distancia de propagación fija $\xi_{max} = 20$, debido a que las distancias de propagación en sistemas realistas son pequeñas. En este caso, sólo para visualizar la información

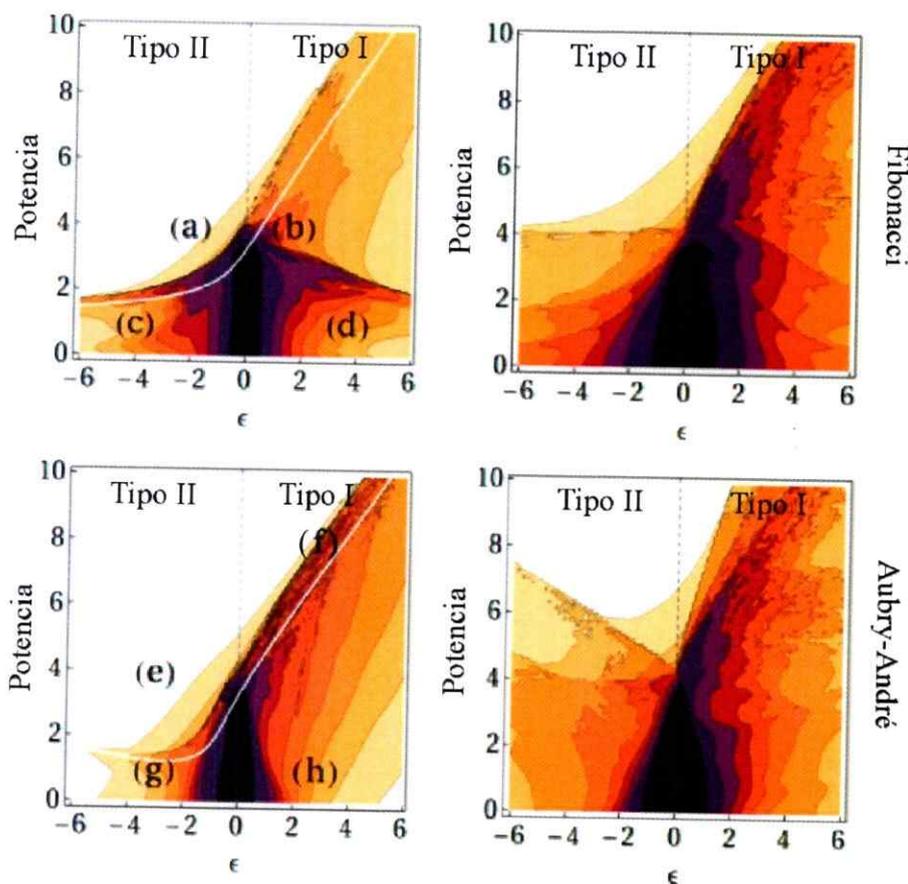


Figura 5.6: f como función de ϵ tras una distancia de propagación $\xi_{max} = 20$. Arriba: Modelo de Fibonacci. Abajo: modelo AA. Los gráficos de la izquierda corresponden a la excitación en la superficie ($n_0 = 1$), mientras que los gráficos de la derecha muestran la situación promedio para 3 guías distintas escogidas aleatoriamente. Regiones oscuras y claras muestran baja y alta localización, respectivamente. Las curvas blancas denotan la potencia mínima encontrada en el caso estacionario que se muestra en la figura 5.5. Los puntos marcados con letras de la a) a la h), muestran los casos presentes en la Fig. 5.7.

de forma más compacta, fijaremos $\gamma > 0$ y cambiaremos el signo de ϵ para estudiar los distintos modos no-lineales del tipo-I y del tipo-II. La figura 5.6 muestra f para los distintos modelos.

Lo primero que notamos desde la figura 5.6 es que ambos modelos (Fibonacci y A-A) muestran un comportamiento cualitativamente similar en cuanto a la fracción

de campo localizado a lo largo de la propagación como función de ϵ . Uno de los efectos más interesantes que podemos destacar es que en promedio es requerida una menor potencia para excitar modos no-lineales en la superficie que lejos de ella. Específicamente, notamos que para una cierta potencia fija, es necesario un menor peso de la modulación cuasi-periódica (menor ϵ) para obtener localización en la superficie que lejos de la superficie y, de la misma forma, para un valor de ϵ fijo, es requerida menos potencia en la superficie que lejos de ella para obtener localización.

Ahora bien, estudiemos con mayor detalle el caso en que la excitación es puesta en la superficie. En este caso notamos una correspondencia entre los umbrales estacionarios calculados en la sección anterior (línea blanca de la figura 5.6 que corresponde a las curvas presentes en la figura 5.5) y el umbral dinámico para excitar solitones asociados a la brecha externa. Siendo el umbral dinámico siempre mayor que el umbral estacionario. Esto se entiende debido a que el proceso de localización en sistemas hamiltonianos involucra un proceso transiente en que el pulso libera una cierta cantidad de energía en forma de ondas difractadas de baja amplitud que solo dispersan, mientras que el "núcleo" de la solución converge a una onda no-lineal localizada de menor potencia que el pulso inicialmente inyectado, esto porque el sistema conserva la potencia total.

Es también interesante notar la asimetría entre $\epsilon > 0$ (modos del tipo-I) y $\epsilon < 0$ (modos del tipo-II). Esta asimetría está en concordancia con lo obtenido para el régimen estacionario. Como era de esperar, en la región donde dominan los efectos no-lineales (gap exterior), $f \rightarrow 1$, indicando que la condición inicial resulta cercana a la forma de los modos no-lineales que viven en dicho gap. Mientras que para baja potencia y alta cuasi-periodicidad se obtienen regiones de localización débil en la superficie. Para muy baja potencia, el pulso tiende a difractar hasta cierto valor crítico

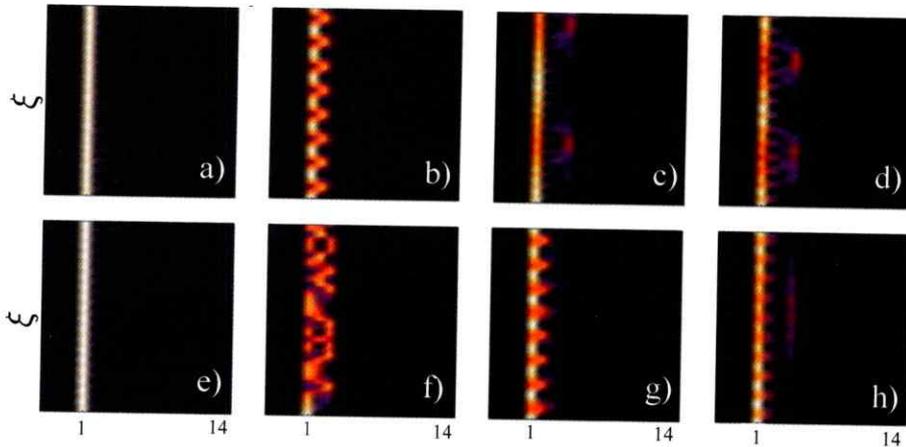


Figura 5.7: Evolución dinámica de una condición inicial tipo delta. Se muestra en forma de densidad la intensidad $|A_n(z)|^2$. Los gráficos (a)-(d) corresponden al caso del modelo de Fibonacci, mientras que (e)-(h) corresponden al caso del modelo AA. Aquí utilizamos los siguientes parámetros: $\xi_{max} = 20$ y $N = 89$.

de ϵ , donde la estructura aperiódica domina y el pulso tiende a quedar atrapado tras sucesivas reflexiones cerca de la superficie. Todas estas regiones están separadas entre si por lugares donde no existen soluciones localizadas en la superficie, por lo que el campo es expulsado de la superficie, pero debido a la estructura aperiódica, difracta o queda atrapado mayoritariamente cerca de la superficie.

Algunos ejemplos de propagaciones en las diferentes regiones mostradas en la figura 5.6 (para excitaciones en la superficie) son mostradas en la Fig. 5.7. Adicionalmente, calculamos la densidad espectral (ver Fig. 5.8), definida como

$$g(\lambda) = \frac{\sum_n |\bar{A}_n(\lambda)|^2}{\text{Max} \left\{ \sum_n |\bar{A}_n(\lambda)|^2 \right\}}, \quad (5.7)$$

donde $\bar{A}_n(\lambda) \equiv \sum_{k=0}^{K-1} A_n(\xi_k) e^{-2\pi i \lambda \xi_k / \xi_{max}}$, con $\{\xi_k\}_{k=0}^{K-1}$ una partición, de K puntos, del intervalo $[0, \xi_{max}]$. El factor $\text{Max} \left\{ \sum_n |\bar{A}_n(\lambda)|^2 \right\}^{-1}$ representa el inverso del máximo de $\sum_n |\bar{A}_n(\lambda)|^2$, de modo que $g(\lambda)$ permanece acotada entre 0 y 1, para todo λ .

A continuación, se describen los distintos casos posibles de propagación:

- Soluciones de alta potencia que son fuertemente localizadas en la superficie

y están asociadas a los modos TIR (ver figuras 5.7a y 5.7e). Aquí la localización incrementa monótonamente con la potencia. En la figura 5.8, la región A corresponde a la densidad espectral asociada a dinámicas de este tipo.

- Soluciones de superficie que oscilan persistentemente entre dos sitios, con constante de propagación que depende del valor de ϵ (ver figuras 5.7b y 5.7g). En este caso hemos calculado la transformada de Fourier de estas soluciones observando que la constante de propagación asociada a la dinámica transversal (constante de propagación secundaria) es más pequeña que la constante de propagación asociada a la dinámica a lo largo de la dirección de propagación (constante de propagación primaria), que domina finalmente la dinámica. Al incrementar $|\epsilon|$ el proceso de intercambio de energía entre guías es menos favorecido, observándose una disminución en la componente secundaria en la transformada de Fourier. La potencia de este tipo de soluciones es menor que las asociadas al modos no-lineales TIR. Este tipo de soluciones es similar a las descritas en [65] para redes binarias, donde la dinámica estable de modos que comparten periódicamente potencia con otros sitios ha sido demostrada.
- Soluciones de baja potencia que muestran múltiples constantes de propagación (ver figuras 5.7c, 5.7d, 5.7h y 5.8C), que involucra oscilaciones rápidas entre sitios cercanos (como en la figuras 5.7b y 5.7g) y oscilaciones lentas entre sitios lejanos a la superficie.
- Oscilaciones caóticas (ver figura 5.7f) donde la oscilación no presenta un patrón definido. Estas soluciones permanecen acotadas entre regiones de alta localización y baja localización en el diagrama $P_0 - \epsilon$ de la figura 5.6. Se observa, en la densidad espectral (5.8B), que un alto número de constantes de

propagación participan en la dinámica.

5.6. Cuasi-periodicidad no-diagonal

Por completitud, es interesante discutir los efectos de aplicar una modulación sobre los acoplamientos entre las guías en lugar de sobre sus constantes de propagación. En este caso la ecuación involucrada en la dinámica es:

$$i \frac{dA_n}{d\xi} + V_{n+1}A_{n+1} + V_nA_{n-1} + \gamma|A_n|^2A_n = 0 \quad (5.8)$$

donde V_n denota el acoplamiento entre las guías $n - 1$ y n . Este modelo ha sido discutido en numerosos papers para el caso en que el acoplamiento sigue las reglas de sustitución de Fibonacci, de modo tal que: $\{V_n\} = \{V_a, V_b, V_a, V_a, V_b, V_a, V_b, \dots\}$.

Los resultados que se obtienen en esta clase de modelos son cualitativamente similares a los obtenidos para cuasi-periodicidad diagonal (el caso discutido principalmente en esta Tesis). La diferencia principal es que este modelo es invariante ante la transformación: $(\lambda, \gamma, A_n) \rightarrow (-\lambda, -\gamma, (-1)^n A_n)$, al igual que la ecuación de Schrödinger discreta usual. De esta manera, se tiene que las propiedades de los modos no-lineales son las mismas en ambos regímenes no-lineales (enfocante y desenfocante), a diferencia de la asimetría observada en los casos de las secciones anteriores.

5.7. Resumen de este capítulo

Hemos estudiado la interacción entre no-linealidad, cuasi-periodicidad, y efectos de superficie en arreglos semi-infinitos de guías de ondas en una dimensión con no-linealidad cúbica (tipo Kerr). Aquí hemos estudiado dos tipos distintos de mecanismos para generar cuasi-periodicidad, modelo de Fibonacci y modelo de Aubry-André. En ambos casos hemos encontrado distintas familias de soluciones estables no-lineales

localizadas en la superficie, y comparamos la factibilidad de excitarlas dinámicamente. Ambos modelos muestran comportamientos cualitativamente similares en el régimen no-lineal, caracterizados por modos de alta potencia (en los gaps externos) que son altamente localizados en la superficie del arreglo, y modos de baja potencia (en los gaps internos) que oscilan persistentemente entre algunos sitios cercanos a la superficie. Una de las observaciones principales es la fuerte asimetría presente entre los regímenes no-lineales enfocante y desenfocante para una misma distribución $\{\epsilon_n\}$, que puede ser medida experimentalmente utilizando técnicas similares a las usadas en la referencia [52]. Además, probamos que la fenomenología presente en medios desenfochantes puede ser observada en sistemas enfocantes mediante la elección correcta de la modulación aperiódica. Por ejemplo, en el caso del modelo de Aubry-André, donde la modulación de la red es dada por $\eta \cos(2\pi n\chi)$, si escogemos $\eta > 0$ en un sistema enfocante, entonces para explorar la fenomenología desenfocante, es suficiente con cambiar $\eta \rightarrow -\eta$, equivalente a tener $\{\eta > 0, \gamma < 0\}$. Por otra parte, hemos observado que la superficie actúa de manera favorable al momento de excitar ondas no-lineales localizadas, obteniendo que el umbral dinámico es menor en la superficie que lejos de ella.

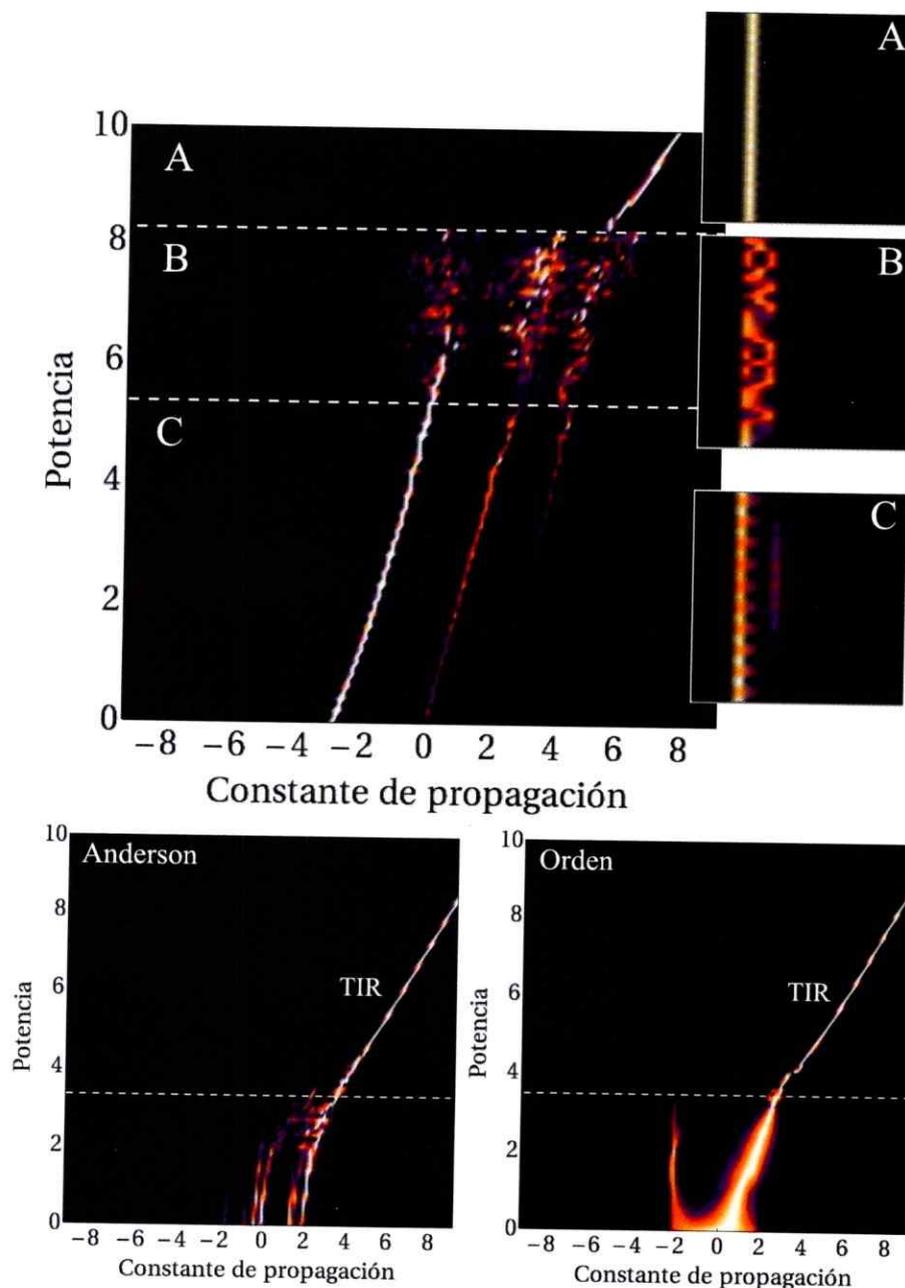


Figura 5.8: Densidad espectral $g(\lambda)$ para distintas potencias. (Arriba) Modelo A-A para $\epsilon = 3$. Se observan las distintas dinámicas descritas en el texto: A) localización en el gap TIR, B) oscilaciones caóticas y C) oscilaciones con múltiples constantes de propagación, junto con ejemplos de propagación en cada una de las regiones. (Abajo) Densidad espectral para el modelo de Anderson (una realización) y para una red sin modulación (DNLS). En el caso de Anderson, ϵ_n es un número (real) al azar entre -1 y 1 .

Capítulo 6

Conclusiones

En la presente tesis hemos estudiado las propiedades de sistemas lineales y no-lineales en presencia de cambios en la topología del espacio discreto. Encontramos, principalmente, una fuerte e inusual asimetría entre los distintos regímenes no-lineales, que no está presente en sistemas totalmente periódicos y con acoplamiento solo a primeros vecinos. Estudiamos dos mecanismos por los cuales se induce esta asimetría: primero, mediante la inclusión de acoplamiento mas allá de primeros vecinos, observando este fenómeno incluso en sistemas con acoplamiento a segundos vecinos, lo cual abre su verificación experimental en el contexto de la óptica, y segundo, mediante una modulación espacial de la energía en cada sitio. En este último caso nos basamos en una clase de sistemas llamados sistemas cuasi-periódicos donde la modulación es aparentemente desordenada, pero generada de forma totalmente determinista.

En el capítulo 3 estudiamos las propiedades difractivas de ondas lineales en arreglos con acoplamiento de largo alcance, encontrando expresiones analíticas para el desplazamiento cuadrático medio (MSD) de un pulso inicialmente localizado en una cadena infinita, obteniendo condiciones sobre el acoplamiento y la relación de dispersión, para tener propagación balística en sistemas con acoplamiento de largo

alcance. Además, evaluamos el MSD en forma exacta en algunos casos de interés como: acoplamiento a segundos vecinos, acoplamiento exponencialmente decreciente y acoplamiento tipo ley de potencia. En este último caso demostramos que existe una cota para el exponente de la ley de potencia que restringe los posibles decaimientos del acoplamiento en los cuales tenemos propagación balística generalizando los resultados obtenidos en [28]. En el caso de excitaciones inicialmente localizadas en la superficie de un arreglo semi-infinito, encontramos, vía método de imágenes, una expresión aproximada para el comportamiento asintótico del MSD que se comporta en correspondencia con los resultados numéricos obtenidos vía integración directa de la ecuación de Schrödinger discreta; en este caso también obtenemos condiciones para propagación balística para distancias de propagación lo suficientemente largas.

En el capítulo 4, consideramos un sistema no-lineal discreto con acoplamiento de largo alcance. Nos enfocamos, principalmente, en el caso de acoplamiento exponencialmente decreciente debido a que en óptica se ha observado que el acoplamiento varía exponencialmente con la distancia entre guías, discutiendo también nuestros resultados en el caso de arreglos con acoplamiento a segundos vecinos debido a su particular interés en óptica. Aquí probamos que el acoplamiento de largo alcance induce una asimetría en el sistema. Por un lado, en el régimen lineal, la banda lineal se asimetriza tendiendo a diverger superiormente y permaneciendo acotada inferiormente a medida que se aumenta el rango del acoplamiento. Por otra parte, los modos no-lineales de superficie presentan comportamientos opuestos en sus umbrales, presentando un incremento (decrecimiento) en el umbral en el régimen enfocante (desenfocante) a medida que aumenta el rango del acoplamiento. Dicho comportamiento en los umbrales es verificado mediante integración directa de la ecuación de Schrödinger correspondiente simulando la propagación de un pulso inicialmente

localizado. Además, se observa pérdida de la fase escalonada para solitones discretos desenfocantes sobre un cierto valor de la potencia, en dependencia fuerte de la constante de acoplamiento de largo alcance.

Por último, en el capítulo 5 estudiamos el problema de excitaciones de superficie en presencia de potenciales cuasi-periódicos, mostrando que modulaciones espaciales del índice de refracción (en particular modulaciones cuasi-periódicas) también producen fuertes e inesperadas asimetrías en las propiedades de ondas no-lineales de superficie enfocantes y desenfocantes. Además, dada la estructura compleja de bandas y gaps presentes en esta clase de modelos, mostramos la existencia de múltiples familias de soluciones de superficie estables presentes en los distintos gaps, algunas de ellas de baja potencia. Probamos también dinámicamente, utilizando una condición inicial fuertemente localizada, que dichas soluciones de superficie no-lineales dejan un remanente en la dinámica que interactúa de manera compleja con la estructura de la red, observando (dependiendo los parámetros): (i) oscilaciones fuertemente localizadas de alta potencia (asociadas al gap externo TIR), (ii) oscilaciones de múltiples constantes de propagación que pueden oscilar entre 2 o más sitios (asociadas a los gaps internos BR) y (iii) oscilaciones caóticas (asociadas al paso por las "bandas").

Concluimos de esta forma que la localización de excitaciones no-lineales en la superficie de un arreglo semi-infinito resulta un proceso fuertemente dependiente de la topología de la red y la naturaleza de la no-linealidad. En particular, es posible tener ciertas configuraciones donde resulte mucho más favorable excitar modos de superficie para un cierto tipo de no-linealidad, mientras que en el caso opuesto resulte más costoso. Un primer indicador (sin ser el definitivo) es el estudio de las ondas lineales, donde la asimetría típicamente se manifiesta en los bordes de banda, definiendo estos cotas para las regiones de existencia de los modos no-lineales y, eventualmente,

diferencias en los umbrales necesarios para excitar dichas soluciones. Por otra parte, observamos que este fenómeno está fuertemente relacionado con la pérdida de la simetría $\{\lambda, \gamma, \psi_n\} \rightarrow \{-\lambda, -\gamma, (-1)^n \psi_n\}$, que resulta ser un segundo indicador de posible asimetrización de los regímenes no-lineales en el sistema.

Referencias

- [1] A. J. Sievers and S. Takeno, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 970 (1988).
- [2] F. Lederer, G. I. Stegeman, D. N. Christodoulides, G. Assanto, M. Segev, and Y. Silberberg, *Phys. Rep.* **463**, 1 (2008).
- [3] Y. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fiber to Photonic Crystals* (Academic Press, San Diego, CA, 2003).
- [4] A. Trombettoni and A. Smerzi, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2353 (2001).
- [5] C. Denz, S. Flach and Yu. Kivshar, *Nonlinearities in periodic structures and metamaterials*, Springer Series in Optical Sciences 150.
- [6] R. Vicencio, Tesis de doctorado, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile (2004).
- [7] R. Morandotti, U. Peschel, J. S. Aitchison, H. S. Eisenberg, and Y. Silberberg, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4756 (1999).
- [8] T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman, and M. Segev, *Nature (London)* **446**, 52 (2007).
- [9] D. K. Campbell, S. Flach and Y. S. Kivshar, *Phys. Tod.* **57**, 43 (2004).

- [10] E. Fermi, J. Pasta and S. Ulam, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM.
- [11] S. Flach and A. V. Gorbach, *Phys. Rep.* **467**, 1 (2008).
- [12] P. Binder, D. Abraimov, A. V. Ustinov, S. Flach and Y. Zolotaryuk, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 745 (2000).
- [13] S. F. Mingaleev and Y. S. Kivshar, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5474 (2001).
- [14] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, T. Castin and C. Salomon, *Science* **269**, 1290 (2002).
- [15] M. I. Molina, R. A. Vicencio, and Yu. S. Kivshar, *Opt. Lett.* **31**, 1693 (2006).
- [16] C. R. Rosberg, D. N. Neshev, W. Krolikowski, A. Mitchell, R. A. Vicencio, M. I. Molina, and Yu. S. Kivshar, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 083901 (2006).
- [17] A. W. Snyder, *Opt. Lett.* **62**, 1267 (1972).
- [18] Y. V. Kartashov, V. A. Vysloukh and L. Torner, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 073901 (2006).
- [19] A. Szameit, T. Pertsch, S. Nolte, A. Tünnermann and F. Lederer, *Phys. Rev. A* **77**, 043804 (2008).
- [20] F. Dreisow, A. Szameit, M. Heinrich, T. Pertsch, S. Nolte and A. Tünnermann, *Opt. Lett.* **33**, 2689 (2007).
- [21] A. Szameit, R. Keil, F. Dreisow, M. Heinrich, T. Pertsch, S. Nolte and A. Tünnermann, *Opt. Lett.* **34**, 2838 (2009).

- [22] P. A. Morais, J. D. Andrade Jr., E. M. Nascimento and M. L. Lyra, *Phys. Rev. E* **84**, 041110 (2011).
- [23] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez and D.-U. Hwang, *Phys. Rep.* **424**, 175 (2006).
- [24] N. K. Efremidis and D. N. Christodoulides, *Phys. Rev. E* **65**, 056607 (2002).
- [25] M. I. Molina, *Mod. Phys. Lett. B* **13**, 225 (1999).
- [26] G. P. Tsironis, *Phys. Lett. A* **375**, 1304 (2011).
- [27] E. Perakis and G. P. Tsironis, *Phys. Lett. A* **375**, 676 (2011).
- [28] H. N. Nazareno and P. R. de Brito, *Phys. Rev. B* **60**, 4629 (1999).
- [29] L. Borland, J. G. Menchero and C. Tsallis, *Phys. Rev. B* **61**, 1650 (2000).
- [30] K. G. Makris and D. N. Christodoulides, *Phys. Rev. E* **73**, 036616 (2006).
- [31] H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti and J. S. Aitchison, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1863 (2000).
- [32] M. Klawunn and L. Santos, *Phys. Rev. A* **80**, 013611 (2009).
- [33] A. Fratalocchi and G. Assanto, *Phys. Rev. E* **72**, 066608 (2005).
- [34] R. Nath, P. Pedri, and L. Santos, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 210402 (2008).
- [35] A. A. Minzoni, N. F. Smyth, Z. Xu, and Y. S. Kivshar, *Phys. Rev. A* **79**, 063808 (2009).
- [36] S. Lopez-Aguayo, A. S. Desyatnikov, Y. S. Kivshar, S. Skupin, W. Krolikowski, and P. Bang, *Opt. Lett.* **31**, 1100 (2006).

- [37] S. Lopez-Aguayo, A. S. Desyatnikov, and Y. S. Kivshar, *Opt. Express* **14**, 7903 (2006).
- [38] Yu. B. Gaididei, S. F. Mingaleev, P. L. Christiansen, and K. Ø. Rasmussen, *Phys. Lett. A* **222**, 152 (1996).
- [39] K. Ø. Rasmussen, P. L. Christiansen, M. Johansson, Yu. B. Gaididei, and S. F. Mingaleev, *Physica D* **113**, 134 (1998).
- [40] S. F. Mingaleev, Yu. B. Gaididei, and F. G. Mertens, *Phys. Rev. E* **58**, 3833 (1998).
- [41] S. Flach, *Phys. Rev. E* **58**, R4116 (1998).
- [42] M. Molina, *Phys. Rev. B* **67**, 054202 (2003).
- [43] A. Szameit, F. Dreisow, Th. Pertsch, S. Nolte, and A. Tünnermann, *Opt. Exp.* **15**, 1579 (2007).
- [44] J. Meier, G. O. Stegeman, D. N. Christodoulides, Y. Silberberg, R. Morandotti, H. Yang, G. Salamo, M. Sorel, and J. S. Aitchison, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 163902 (2004).
- [45] M. Johansson and Yu. S. Kivshar, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 85 (1999).
- [46] N.G. Vakhitov and A.A. Kolokolov, *Radiophys. Quantum Electron.* **16**, 783 (1973).
- [47] T. Pertsch et. al., *Phys. Rev. Lett.* **93**, 053901 (2004).

- [48] Yoav Lahini, Assaf Avidan, Francesca Pozzi, Marc Sorel, Roberto Morandotti, Demetrios Christodoulides and Yaron Silberberg, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 013906 (2008).
- [49] E. Smirnov et al., *Opt. Lett.* **31**, 2338 (2006).
- [50] A. Szameit, Y. V. Kartashov, P. Zeil, F. Dreisow, M. Heinrich, R. Keil, S. Nolte, A. Tünnerman, V. A. Vysloukh and L. Torner, *Opt. Lett.* **35**, 1172 (2010).
- [51] Xiao-Ning Pang, Jian-Wen Dong, and He-Zhou Wang, *J. Opt. Soc. Am* **27**, 2009 (2010).
- [52] Y. Lahini, R. Pugatch, F. Pozzi, M. Sorel, R. Morandotti, N. Davidson and Y. Silberberg, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 013901 (2010).
- [53] S. Aubry and G. André, *Ann. Isr. Phys. Soc.* **3**, 133 (1980).
- [54] E. S. Zijstra, A. Fasolino and T. Janssen, *Phys. Rev. B* **59**, 302 (1999).
- [55] Qian Niu and Franco Nori, *Phys. Rev. B* **42**, 10329 (1990).
- [56] M. I. Molina, N. Lazarides and G. P. Tsironis, *Phys. Rev. E* **85**, 017601 (2012).
- [57] J. Avron, Simon B, *Duke Math. J.* **50**, 369 (1983).
- [58] Y. Last, *Commun. Math. Phys.* **164**, 421 (1994).
- [59] A. A. Sukhorukov and Yu. S. Kivshar, *Opt. Lett.* **27** 2112 (2002).
- [60] A. A. Sukhorukov and Yu. S. Kivshar, *Opt. Lett.* **28**, 2345 (2003).
- [61] A. A. Sukhorukov and Yu. S. Kivshar, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 113902 (2003).

- [62] A. A. Sukhorukov, Yu. S. Kivshar, H. S. Eisenberg and Y. Silberberg, *IEEE J. Quantum Electron.* **39**, 31 (2003).
- [63] Mario I. Molina, Ivan L. Garanovich, Andrey A. Sukhorukov and Yuri S. Kivshar, *Opt. Lett.* **31**, 2332 (2006).
- [64] Rodrigo A. Vicencio and Magnus Johansson, *Phys. Rev. A* **79**, 065801 (2009).
- [65] M. Johansson and A. V. Gorbach, *Phys. Rev. E* **70**, 057604 (2004).

Apéndice A

Análisis de estabilidad lineal

Sabemos que estudiar la estabilidad lineal de los solitones discretos es suficiente para determinar si una solución es estable o inestable en la mayoría de los casos (salvo en situaciones marginales), esto debido a que si los modos no-lineales son estables (inestables) linealmente, implica que también son estables (inestables) no-linealmente. En general, a lo largo de esta Tesis, nos bastará con estudiar este caso.

La ecuación más general que abarca todos los casos estudiados en esta Tesis para un sistema finito de N sitios, es:

$$i\frac{d}{dz}\psi_n + \sum_{m \neq n} V_{n,m}\psi_m + \epsilon_n\psi_n + \gamma|\psi_n|^2\psi_n = 0 \quad (\text{A.1})$$

Las soluciones estacionarias de (A.1) corresponden a ondas discretas de la forma: $\psi_n(z) = \phi_n e^{i\lambda z}$, con $\{\phi_n\}$ un elemento de \mathcal{R}^N . De modo que la ecuación "tiempo" independiente a resolver es:

$$-\lambda\phi_n + \sum_{m \neq n} V_{n,m}\phi_m + \epsilon_n\phi_n + \gamma|\phi_n|^2\phi_n = 0 \quad (\text{A.2})$$

Ahora bien, consideremos una perturbación en la amplitud del campo ψ_n de la forma $\psi_n^p(z) = (\phi_n + \delta_n(z))e^{i\lambda z}$, con $\psi_n^p(z)$ el campo perturbado y $\delta_n(z)$ la perturbación, tal que $|\delta_n| \ll 1$ para todo n . Reemplazando esto en (A.1) y linealizando, se

obtiene:

$$\begin{aligned} & \left(-\lambda\phi_n + \sum_{m \neq n} V_{n,m}\phi_m + \epsilon_n\phi_n + \gamma\phi_n^3 \right) \\ & + \left(i\frac{\partial\delta_n}{\partial z} + (\epsilon_n - \lambda)\delta_n + \sum_{m \neq n} V_{n,m}\delta_m + \gamma\phi_n^2(2\delta_n + \delta_n^*) \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Notamos que, el primer paréntesis de (A.3) corresponde a (A.2), de modo que la ecuación asociada a la perturbación resulta:

$$i\frac{\partial\delta_n}{\partial z} + (\epsilon_n - \lambda)\delta_n + \sum_{m \neq n} V_{n,m}\delta_m + \gamma\phi_n^2(2\delta_n + \delta_n^*) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Luego, si consideramos la perturbación en una forma general, es decir, separandola en parte real e imaginaria:

$$\phi_n = X_n + iY_n \quad (\text{A.5})$$

con X_n e Y_n cantidades reales, es posible escribir dos ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial X_n}{\partial z} + \sum_{m \neq n} V_{n,m}Y_m + \epsilon_n X_n + (\gamma C_n^2 - \lambda)Y_n = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial Y_n}{\partial z} - \sum_{m \neq n} V_{n,m}X_m + \epsilon_n Y_n - (3\gamma C_n^2 - \lambda)X_n = 0 \quad (\text{A.7})$$

o en términos matriciales

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{y} = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{B}\mathbf{x} = 0 \quad (\text{A.9})$$

o

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x} = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{y} = 0 \quad (\text{A.11})$$

con

$$\mathbf{x} = \{X_n\} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{y} = \{Y_n\} \quad (\text{A.13})$$

$$A_{n,l} = \sum_{m \neq n} V_{n,m} \delta_{m,l} + \epsilon_n \delta_{n,l} + (\gamma C_n^2 - \lambda) \delta_{n,l} \quad (\text{A.14})$$

$$B_{n,l} = \sum_{m \neq n} V_{n,m} \delta_{m,l} + \epsilon_n \delta_{n,l} + (3\gamma C_n^2 - \lambda) \delta_{n,l} \quad (\text{A.15})$$

con $A_{n,l}$ y $B_{n,l}$ las componentes de \mathbf{A} y \mathbf{B} , respectivamente, y $\delta_{n,m}$ la delta de Kronecker. Notamos además que los autovalores de \mathbf{AB} son los mismo que los autovalores de \mathbf{BA} . De esta forma, los autovalores de \mathbf{AB} nos entregan la información respecto a la estabilidad de los modos no-lineal. Para modos inestables se tiene que la parte imaginaria de los autovalores representan una medida de cuan inestable es el modo no-lineal $\{\psi_n\}$.

Apéndice B

Publicaciones

PHYSICAL REVIEW A 82, 053820 (2010)

Strong asymmetry for surface modes in nonlinear lattices with long-range coupling

Alejandro J. Martínez, Rodrigo A. Vicencio, and Mario I. Molina

Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago, Chile and Center for Optics and Photonics, Universidad de Concepción, Casilla 4016, Concepción, Chile

(Received 28 July 2010; published 16 November 2010)

We analyze the formation of localized surface modes on a nonlinear cubic waveguide array in the presence of exponentially decreasing long-range interactions. We find that the long-range coupling induces a strong asymmetry between the focusing and defocusing cases for the topology of the surface modes and also for the minimum power needed to generate them. In particular, for the defocusing case, there is an upper power threshold for exciting staggered modes, which depends strongly on the long-range coupling strength. The power threshold for dynamical excitation of surface modes increases (decreases) with the strength of long-range coupling for the focusing (defocusing) cases. These effects seem to be generic for discrete lattices with long-range interactions.

DOI: 10.1103/PhysRevA.82.053820

PACS number(s): 42.81.Qb, 05.45.Yv, 42.65.Tg, 42.65.Wi

PHYSICAL REVIEW A 85, 013807 (2012)

Surface solitons in quasiperiodic nonlinear photonic lattices

Alejandro J. Martínez and Mario I. Molina

Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago, Chile and Center for Optics and Photonics (CEFOP), Casilla 4016, Concepción, Chile

(Received 28 June 2011; revised manuscript received 12 November 2011; published 4 January 2012)

We study discrete surface solitons in semi-infinite, one-dimensional, nonlinear (Kerr), quasiperiodic waveguide arrays of the Fibonacci and Aubry-André types, and explore different families of localized surface modes, as a function of optical power content ("nonlinearity") and quasiperiodic strength ("disorder"). We find a strong asymmetry in the power content of the mode as a function of the propagation constant, between the cases of focusing and defocusing nonlinearity, in both models. We also examine the dynamical evolution of a completely localized initial excitation at the array surface. We find that, in general, for a given optical power, a smaller quasiperiodic strength is required to effect localization at the surface than in the bulk. Also, for fixed quasiperiodic strength, a smaller optical power is needed to localize the excitation at the edge than inside the bulk.

DOI: 10.1103/PhysRevA.85.013807

PACS number(s): 42.25.Dd, 42.65.Tg, 42.65.Sf

Diffusion in infinite and semi-infinite lattices with long-range coupling

Alejandro J Martínez^{1,2} and Mario I Molina^{1,2}

¹ Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago, Chile

² Center for Optics and Photonics (CEFOP), University of Concepción, Casilla 4016, Concepción, Chile

E-mail: mmolina@uchile.cl

Received 13 February 2012, in final form 8 April 2012

Published 21 June 2012

Online at stacks.iop.org/JPhysA/45/275204

Abstract

We prove that for a one-dimensional, infinite periodic lattice, with long-range coupling among sites, the diffusion of an initial delta-like pulse in the bulk is ballistic at all times, with a 'speed' that depends on the 'smoothness' of the dispersion relation. We obtain a closed-form expression for the mean square displacement (MSD), and show some relevant examples including finite-range coupling, exponentially decreasing coupling and power-law decreasing coupling. For the case of an initial excitation at the edge of the lattice, we find an approximate expression for the MSD that predicts ballistic behavior at long times in agreement with numerical results.

PACS numbers: 42.25.Bs, 63.10.+a, 66.30.--h, 42.79.Gn

Las siguientes corresponden a colaboraciones realizadas a lo largo del magíster:

June 1, 2012 / Vol. 37, No. 11 / OPTICS LETTERS 1865

Nonlinear localized modes in Glauber–Fock photonic lattices

A. J. Martínez,^{1,2,*} U. Naether,^{1,2} A. Szameit,³ and R. A. Vicencio^{1,2}

¹*Departamento de Física and MSI-Nucleus on Advanced Optics, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago, Chile*

²*Center for Optics and Photonics (CEFOP), Casilla 4016, Concepción, Chile*

³*Institute of Applied Physics, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Max-Wien-Platz 1, 07743 Jena, Germany*

*Corresponding author: amartinez@cefop.cl

Received January 18, 2012; revised March 27, 2012; accepted March 27, 2012;
posted March 28, 2012 (Doc. ID 161786); published May 21, 2012

We study a nonlinear Glauber–Fock lattice and the conditions for the excitation of localized structures. We investigate the particular linear properties of these lattices, including linear localized modes. We investigate numerically nonlinear modes centered in each site of the lattice. We found a strong disagreement of the general tendency between the stationary and the dynamical excitation thresholds. We define a new parameter that takes into account the stationary and dynamical properties of localized excitations. © 2012 Optical Society of America
OCIS codes: 190.0190, 190.5530, 190.6135, 230.4320.

Enhanced distribution of a wave-packet in lattices with disorder and nonlinearity

Uta Naether¹, Santiago Rojas-Rojas¹, Alejandro J. Martínez¹, Simon Stützer², Andreas Tünnermann², Stefan Nolte², Mario I. Molina¹, Rodrigo A. Vicencio¹, and Alexander Szameit²

¹*Departamento de Física, MSI-Nucleus on Advanced Optics, and Center for Optics and Photonics (CEFOP), Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago, Chile*

²*Institute of Applied Physics, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Max-Wien-Platz 1, 07743 Jena, Germany*

unaether@u.uchile.cl

Abstract: We show, numerically and experimentally, that the presence of weak disorder results in an enhanced energy distribution of an initially localized wave-packet, in one- and two-dimensional finite lattices. The addition of a focusing nonlinearity facilitates the spreading effect even further by increasing the wave-packet effective size. We find a clear transition between the regions of enhanced spreading (weak disorder) and localization (strong localization).

© 2012 Optical Society of America

OCIS codes: (070.7345) Wave propagation; (130.2790) Guided waves; (190.0190) Nonlinear Optics.

Self-trapping transition in nonlinear cubic lattices

Uta Naether, Alejandro J. Martínez, Diego Guzmán-Silva, Mario I. Molina, and Rodrigo A. Vicencio
*Departamento de Física, MSI-Núcleo on Advanced Optics,
and Center for Optics and Photonics (GEFOP),
Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago, Chile*
(Dated: October 15, 2012)

We explore the fundamental question about the critical nonlinearity value needed to dynamically localize energy in diverse discrete nonlinear (Kerr) lattices. A simple criterium is developed - for the case of an initially localized excitation - that defines the transition regions in parameter space ("dynamical tongues") from a delocalized to a localized profile. An estimate of the critical nonlinearity value for which this transition occurs is obtained with numerical computations performed in one-, two-, and three-dimensional nonlinear lattices. We discuss the validity and possible extensions of this criterium to more complex lattices.

PACS numbers: 42.25.Dd, 42.65.Tg, 72.15.Rn