

TEORIA DE RENORMALIZACION PERTURBATIVA

Tesis
Entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los
requisitos para optar al grado de
Magister en Ciencias Físicas

por

GUILLERMO PALMA AGUIRRE

1986

Director de Tesis: DR. PATRICIO CORDERO

Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

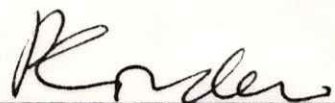
I N F O R M E D E A P R O B A C I O N
T E S I S D E M A G I S T E R

Se informa a la Comisión de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el candidato:

GUILLERMO OCTAVIO PALMA AGUIRRE

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Físicas

Patrocinante de Tesis:
Dr. Patricio Cordero S.

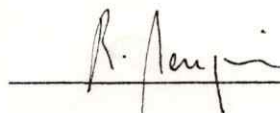


Comisión Informante de Tesis:

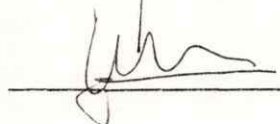
Dn. Jaime Roessler B.



Dr. Rafael Benguria D.



Dr. Jorge Zanelli I.



AGRADECIMIENTOS

Agradezco en forma muy especial a mi tutor, Sr. Patricio Cordero S. por su leal apoyo, confianza y preocupación constante por mi formación.

A mi familia

A Soledad

I N D I C E

	pág.
1. INTRODUCCION	1
2. DEFINICIONES Y ASPECTOS GENERALES	6
a. Definición de exponentes críticos	6
b. Teoría de Campo Medio	10
c. Renormalización en espacio real	15
d. Renormalización en espacio de momentum	29
3. TEORIA DE PERTURBACIONES	36
a. Método perturbativo general de renorma- lización en espacio real	36
b. Resultados	49
c. Apendices	65
4. CONCLUSION Y COMENTARIOS	72
5. BIBLIOGRAFIA	74

RESUMEN

Basándonos en una idea intuitiva debida a Hirsch y Nazenko desarrollamos un método perturbativo aplicable al grupo de renormalización para sistemas definidos en redes a temperatura cero. Esto permite una prescripción sistemática para estudiar el comportamiento crítico de sistemas definidos en red además de una forma de aproximarse orden a orden a los valores físicos para los exponentes críticos de tales sistemas.

Se estudia un primer ejemplo, el Ising con campo transversal (TIM) en dimensión uno hasta segundo orden en teoría de perturbaciones. También basados en el método de reducción dimensional se estudia el modelo de Ising en dimensión 2 y se calcula el punto crítico de Onzager.

1. INTRODUCCION

Empezamos con una pequeña reseña histórica que sirve como motivación para el estudio de los fenómenos críticos en Mecánica Estadística.

En 1850 R. Clausius formula definitivamente las leyes de la termodinámica (1), basado en las cuales en 1873, Gibbs emprendió la tarea de caracterizar la familia de estados de equilibrio de un sistema físico cualquiera (2) y (3). Estas ideas de Gibbs entusiasmaron rápidamente a Maxwell, quien escribe un capítulo completo acerca de esto en su libro "Teoría del Calor" (4). Sin embargo, aparte de Maxwell, fue escasa la influencia de Gibbs en sus contemporáneos del siglo XIX. El mensaje de los primeros trabajos de Gibbs puede resumirse en la afirmación: "Los estados de equilibrio de una sustancia termodinámica forman una variedad diferenciable que representa el gráfico de una función convexa en S (la entropía) y V (volumen), llamada U (energía).

En sus trabajos posteriores, Gibbs estudió también la existencia y caracterización de puntos críticos en el sentido de la termodinámica (coexistencia de fases), descripción de estados metaestables, fenómenos físico-químicos de la capilaridad, fuerza electromotriz y catálisis, hasta llegar a establecer en 1902 la Mecánica Estadística tal como la conocemos ahora.

Paralelamente, Van der Waals deriva una ecuación de estado

que describe una transición líquido-gas, la cual junto con las ideas de Maxwell dan un modelo cuantitativo en acuerdo razonable con la evidencia experimental. De aquí se derivaría, años mas tarde, la ley de estados correspondientes que es mas general que la ecuación de Van der Waals.

Contribuciones importantes también fueron hechas por Maxwell y Boltzmann al problema del equilibrio en mecánica estadística y muestran como se obtienen las leyes termodinámicas a partir de la dinámica microscópica.

Posteriormente, Curie-Weiss en 1907, construyen una teoría de campo medio para el ferromagnetismo, en la cual se supone interacción de spines a través de un campo efectivo (campo molecular), el cual es proporcional al promedio de la magnetización del sistema. Si las interacciones de la molécula con otras es aproximada por un potencial efectivo de rango infinito y ruete blindaje, se obtienen los resultados de Van der Waals con pequeñas mejoras. Por esto el modelo es equivalente a uno con interacción de rango infinito. Este modelo aunque incorrecto, permite cualitativamente al menos, una primera visión acerca de fenómenos críticos y del comportamiento de las cantidades termodinámicas en las vecindades de una transición de fase.

Para el modelo de Lenz-Ising en dimensión uno, Ising demostró en 1924 que no hay magnetización espontánea ($M(H=0)=0$) y conjeturó que lo mismo valdría para redes en dimensión dos y tres. Sin embargo, en 1936 R. Pierls demuestra para una red 2

dimensional la existencia de una temperatura T llamada temperatura crítica o de Curie, bajo la cual la magnetización espontánea no se anula.

Basado en argumentos de dualidad Kramer-Wannier en 1941, calculan esta temperatura obteniendo la solución $\sinh(2\psi_c) = 1$, con $\psi = J/kT_c$ que es la correcta.

En 1944 Onsager obtiene una fórmula explícita para la energía libre en el modelo de Ising, en dimensión dos para campo magnético nulo para todo valor de la temperatura. Encuentra una divergencia logarítmica en el calor específico para $T=T_c$.

Posteriormente en 1952 Lee y Yang (5) demuestran, para una clase grande de sistemas definidos en red, que las transiciones de fase ocurren sólo para campo magnético externo nulo. Además, demuestran algunos teoremas sobre la existencia de límite termodinámico de algunos sistemas.

Sólo en la década de los 60 se ha desarrollado la teoría general de sistemas de spines definidos en redes con Miracle sole, Ruelle, Robinson y Lanford, quienes estudian modelos que consideran spines acoplados a un número arbitrario de vecinos con interacciones similares a las del modelo de Lenz-Ising.

Actualmente existen tres enfoques complementarios:

- i) Resolución de modelos exactamente solubles
- ii) Teorema de existencia de transiciones de fase en diferentes modelos:
- iii) Grupo de renormalización

Esta última es iniciada en 1965 por Widom-Fisher, con su hipótesis fundamental: cerca de la temperatura crítica T_c las magnitudes termodinámicas F , C , M , se comportan como una simple función de $(T-T_c)$, donde se llama exponente crítico. Usando métodos independientes, se establecieron ciertas desigualdades entre los exponentes críticos: Rushbrooke, Griffiths, Buckingham-Gunton; experimentalmente se observaba que dichas desigualdades se saturaban, es decir se satisfacían como igualdades en diversos materiales ferromagnéticos.

En 1965 Widom, Domb y Hunter introdujeron un esquema matemático muy simple, pero físicamente no justificado, del cual se obtenían las igualdades de los exponentes críticos. A esta hipótesis se la llamó hipótesis de escalamiento estático y esencialmente afirma que la energía libre del sistema se comporta como una función homogénea de sus variables, lo cual reproducía la evidencia experimental que ha sido caracterizada con el nombre de Universalidad.

Sólo en 1966 Kadanoff, Fisher, Wilson introducen la idea de grupo de renormalización basados en la idea de reducir grados de libertad sin quitar información física. Esto es físicamente plausible ya que a pesar de que los fenómenos críticos son un problema de longitudes de onda grande, dado que la longitud de correlación es infinita en $T=T_c$, solo algunos de ellos son relevantes en una vecindad de la transición de fase.

En los años 70 despertó gran interés el aplicar las ideas

del grupo de renormalización en espacio real para sistemas definidos de redes. Wilson, uno de los pioneros en su estudio del problema de Kondo, Drell, Weinstein y Yankielowicz estudian el Ising con campo transversal a temperatura cero. En esta línea Hirsch y Mazenko proponen un método de como mejorar las prescripciones de los autores anteriores. Sin embargo hay inconsistencias en su trabajo además de ambigüedades en sus resultados, a pesar de esto la idea es físicamente interesante.

Este es nuestro principal foco de interés, el desarrollar un método consistente que permita sistematizar y mejorar orden a orden las técnicas del grupo de renormalización.

Se empieza en capítulo II dando una rápida descripción de transiciones de fase a través de la definición de los exponentes críticos, un modelo teórico simple que describa la fenomenología asociada y finalmente la definición más formal de renormalización en espacio real y momentum.

En el capítulo III se plantea el problema general de encontrar un método perturbativo de renormalización en espacio real y se encuentra una solución explícita hasta segundo orden. Se concluye este capítulo con dos ejemplos, el Ising unidimensional con campo transversal y Ising simple en red cuadrada bi-dimensional.

2. DEFINICIONES Y ASPECTOS GENERALES

a. Definición de exponentes críticos y desigualdades rigurosas

Experimentalmente las cantidades termodinámicas se comportan como una potencia de la temperatura reducida

$$\tau = \frac{T - T_c}{T_c} \quad (1)$$

es decir, se anulan o son divergentes para $\tau = 0$

A continuación se muestra una tabla con las definiciones de los diferentes exponentes críticos (6).

TABLA 1

Exponente	Nombre	Sist. Líquido		Sist. Magnéticos	
		Definición	Valor Exp.	Definición	Valor Exp.
$\alpha(\alpha')$	Calor específico	$P=P_c, \rho=\rho_c$ $C_V \sim T^{-\alpha} \quad T > T_c$ $C_V \sim (-T)^{-\alpha'} \quad T < T_c$		$H=0, M=0$ $C_H \sim T^{-\alpha} \quad T > T_c$ $C_H \sim (-T)^{-\alpha'} \quad T < T_c$	
β	Parámetro de orden	$P=P_c$ $\xi_L - \xi_E \sim (-T)^\beta$	0.346±0.01	$H=0$ $M \sim (-T)^\beta$	0.33±0.03
$\gamma(\gamma')$	Función respuesta isotérmica.	$P=P_c, \rho=\rho_c$ compresión $K_T \sim T^{-\gamma} \quad T > T_c$ $K_T \sim (-T)^{-\gamma'} \quad T < T_c$	1.37±0.2	$H=0, M=0$ susceptibilidad $\chi_T \sim T^{-\gamma} \quad T > T_c$ $\chi_T \sim (-T)^{-\gamma'} \quad T < T_c$	~1.33±0.3 ~1.24
δ	Isoterma crítica	$T=T_c$ $P-P_c \sim \rho-\rho_c ^\delta \text{sqn}$ $(\rho-\rho_c)$	41±0.1	$T=T_c$ $H \sim M^\delta \text{sqnM}$	44±0.4
$\nu(\nu')$	Longitud de correlación	$P=P_c, \rho=\rho_c$ $\xi \sim T^{-\nu} \quad T > T_c$ $\xi \sim (-T)^{-\nu'} \quad T < T_c$		$H=0, M=0$ $\xi \sim T^{-\nu} \quad T > T_c$ $\xi \sim (-T)^{-\nu'} \quad T < T_c$	0.65±0.3
η	Función de correlación	$T=T_c, P=P_c, \rho=\rho_c$ $G(x) = x ^{-(d-2+\eta)}$		$T=T_c, H=0, M=0$ $\Gamma(x) = x ^{-(d-2+\eta)}$	0.07±0.0

Donde la longitud de correlación se define a partir de la función correlación para dos partículas

$$\Gamma(x) \sim e^{-|x|/\xi} \quad |x| \rightarrow \infty \quad (2)$$

ξ = longitud de correlación

Los nueve exponentes anteriormente definidos están relacionados a través de desigualdades que han sido establecidas por diferentes métodos (7).

$$\text{Desig. de Reishbrooke: } \alpha' + 2\beta + \sigma' \geq 2 \quad (3)$$

$$\text{Desig. de Griffiths : } \alpha' + \beta(1+\delta) \geq 2$$

$$\gamma' \geq \beta(\delta-1)$$

$$\gamma(\delta+1) \geq (2-\alpha)(\delta-1)$$

$$\text{Buckingham-Gunton} \quad d \left(\frac{\delta-1}{\delta+1} \right) \geq 2 - \tau_1$$

donde d es la dimensión del sistema.

Los dos hechos notables que motivaron las ideas de grupo de renormalización son:

i) A pesar que en principio los exponentes podrían ser diferentes para distintos materiales, experimentalmente se observa (8) que son iguales con gran precisión para un amplio rango de ellos. Esta propiedad se conoce con el nombre de Universalidad; muestra que para el comportamiento crítico los detalles de la dinámica juegan un rol secundario y que es más importante el comportamiento cooperativo que resulta común para todos los sistemas cerca del punto crítico.

ii) Las desigualdades (3) se cumplen experimentalmente como igualdades:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \alpha' \\
 \nu &= \nu' \\
 \gamma &= \gamma' \\
 \alpha &= 2 - \nu d \\
 \beta &= \gamma / (d-1) \\
 \gamma &= \nu(2-\eta) \\
 \alpha &= 2-2\nu-\gamma \\
 \delta &= (d+2-\eta)/(d-2+\eta)
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

y por lo tanto, de los nueve exponentes sólo dos resultan independientes.

Este último resultado motivó que Widom, Domb y Hunter (3) introdujeran una hipótesis físicamente injustificada pero que reproducía el comportamiento experimental.

Esta hipótesis se expresa simplemente exigiendo que el potencial de Gibbs fuese una función homogénea generalizada cerca de la temperatura crítica:

$$G(\lambda^{a_\tau} \tau, \lambda^{a_H} H) = \lambda G(\tau, H) \tag{5}$$

donde a_τ y a_H son parámetros, H campo magnético

Esto se conoce con el nombre de Hipótesis de escalamiento estático.

b. Teoría de Campo Medio (Landau)

Landau propuso un modelo fenomenológico que permitía entender cualitativamente estos hechos experimentales.

Landau no especifica la dinámica del sistema, plantea una forma intuitiva para la energía libre cerca de la temperatura crítica. Para esto, se basa en lo siguiente:

- i) Dado que la magnetización espontánea se anula para $T = T_c$, plantea una expansión de la energía libre en términos de la magnetización $\underline{M}(X)$ para campo magnético externo débil.
- ii) Sólo hay interacciones spin-spin, de donde aparecen sólo potencias pares de \underline{M} en la expansión, excepto el acoplamiento con el campo magnético H .
- iii) Dado que cerca de la temperatura crítica la longitud de correlación es muy grande, M debe ser una función "suave" de \underline{x} . Por lo tanto, se retiene sólo hasta términos $(\nabla \underline{M})^2$.

El modelo que planteó, conocido como Landau-Ginzburg tiene la forma:

$$F = F_0(T) + \int d^3x \left[\underline{M}^2(\underline{x}) \frac{1}{2} r(T) + \frac{1}{4} M^4(\underline{x}) U(T) + (\nabla \underline{M})^2 - \underline{H}(\underline{x}) \cdot \underline{M}(\underline{x}) \right]$$

donde $F_0(T)$ es la energía libre para $M = 0$.

Se busca entonces extremar el funcional (6) $F = F[M]$

De donde:

$$\underline{H}(\underline{x}) = \{ r(T) + U(T) M^2(\underline{x}) - 2\nabla^2 \} \underline{M}(\underline{x})$$

Cuando el campo magnético aplicado es uniforme (7) tiene una solución con M uniforme:

$$\left[r(T) + U(T) M_z^2 \right] M_x = H_z \quad (8)$$

donde \hat{z} es la dirección del campo magnético aplicado.

En el límite de $H \rightarrow 0$, las soluciones de (8) son:

$$M_z = 0 \quad (9a)$$

$$M_z = \pm \sqrt{-\frac{r(T)}{U(T)}} \quad (9b)$$

la solución (9a) corresponde a $T > T_c$, y la energía libre es mínima sólo si $r > 0$, $U > 0$.

La solución (9b) corresponde a $T < T_c$ con magnetización espontánea, y la energía libre es mínima sólo si $r < 0$ y $U < 0$.

Gráficamente

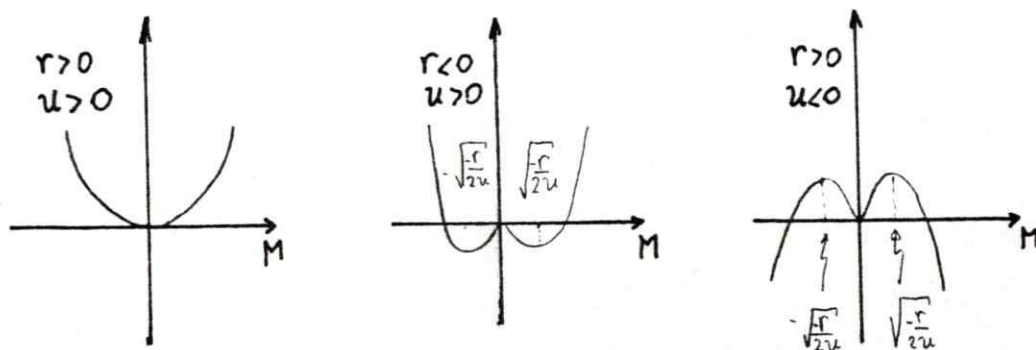


FIG. 2

Landau supuso la siguiente forma para $r(T)$ y $U(T)$:

$$r(T) = a(T - T_c) \quad (10)a,b$$

$$U(T) \sim c(T - T_c) > 0 \quad \text{si } T < T_c$$

Con esto se obtiene

i) Magnetización espontánea

$$M_0 = \sqrt{-\frac{\gamma(T)}{U(T)}} \sim (-t)^{1/2} \quad t = \text{temp. reducida}$$

de donde:

$$\beta = 1/2$$

ii) Susceptibilidad magnética

$$\chi'(t) = \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_{H=0} \quad (12)$$

Si $t > 0$, $M = 0$, se tiene

$$\chi(t) = \frac{1}{\gamma(t)} \sim \frac{1}{a_1} t^{-1} \quad (13)$$

Si $t < 0$, $M = \sqrt{-\frac{\gamma(t)}{U(t)}}$ se tiene

$$\chi(t) = \frac{-1}{2\gamma(t)} \sim \frac{1}{2a} (-t)^{-1} \quad (14)$$

$$\gamma = \gamma' = 1 \quad (15)$$

iii) Magnetización como función del campo aplicadoPara $t = 0$

$$H = U_0 M^0 \Rightarrow \delta = 3 \quad (16)$$

iv) Calor específico

$$\text{Si } t > 0 \quad F(M, t) \Big|_{H=0} = 0$$

$$t < 0 \quad F(M, t) \Big|_{H=0} = -\frac{r^2(t)}{4U(t)} - \text{cte } t^2 \quad (17)$$

$$\text{de donde } \alpha = \alpha' = 0 \quad (18)$$

v) Función correlación

$$g(\underline{r}-\underline{r}') = \langle [M_z(\underline{r}) - \langle M_z(\underline{r}) \rangle] [M_z(\underline{r}') - \langle M_z(\underline{r}') \rangle] \rangle \quad (19)$$

usando la ecuación (6) se obtiene la ecuación diferencial para g , si

$T > T_c$ y $\underline{H} = 0$:

$$(4r(T) - 2\nabla^2)g(\underline{r}, \underline{r}') = (kT) \delta^{(3)}(\underline{r}, \underline{r}') \quad (20)$$

la cual tiene solución:

$$g(\underline{r}-\underline{r}') = |\underline{r}-\underline{r}'|^{-(d-2)} \exp(-|\underline{r}-\underline{r}'|/\xi) \quad (21)$$



donde d es la dimensión y la longitud de correlación ξ

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2r(T)}} \sim t^{-1/2} \quad (22)$$

Resumiendo los resultados de la teoría de campo medio:

<u>Exp. crítico</u>	<u>Teoría del Campo Medio</u>	<u>Ising cuadrado exacto</u>
β	1/2	1/8
γ, γ'	1	7/4
δ	3	15
α, α'	0	0
ν, ν'	1/2	1
η	0	1/4

A pesar de las serias discrepancias con la solución exacta este mo delo simple permite calcular todas las cantidades termodinámicas relevantes y verificar formas de reescalamiento.

Sin embargo, ésta no puede ser una teoría correcta pues es indepen diente de la dimensión del espacio, lo cual contradice las evidencias ex perimentales.

c) Renormalización en espacio real

i) Motivación

Dado que cerca de la temperatura crítica T_c la longitud de correlación es muy grande, y diverge para $t = T_c$, los fenómenos críticos representan una clase de problemas que involucra muchos grados de libertad, lo cual hace imposible un cálculo directo ya que se debería tomar en cuenta todos los acoplamientos que se produzcan en bloques con dimensión igual al orden de magnitud de la longitud de correlación ξ , lo cual corresponde a volúmenes ξ^d con d la dimensión del sistema.

La idea básica de reducir paso a paso los grados de libertad manteniendo la física del sistema invariante es debida a Kadanoff (9).

Para mayor claridad pensemos en un sistema tipo Ising definido en una red de dimensión d y espaciamento elemental a . Si agrupamos los espines en bloques tal que el volumen sea menor que ξ^d con ξ longitud de correlación, los espines estarán fuertemente correlacionados y por lo tanto, podemos suponer que el spin total del bloque puede tomar sólo dos valores $\pm S'_k$ de los muchos permitidos, los cuales están comprendidos entre $L^d, (L-1)^d, \dots, -L^d$ con $L > 1$, fracción de aumento del espaciamento elemental. Luego el spin del bloque será $\alpha \hat{S}_k$, α representa el factor de reescalamiento del spin, de aquí concluimos que el sistema formado por estos bloques se comporta nuevamente como un sistema de Ising donde se han reescalado los espines y el espaciamento elemental se ha incrementado por un factor L . Al expresar la longitud de correlación en unidades del nuevo espaciamento de red, ésta se ha reducido en un factor $1/L$.

Iterando este proceso se puede reducir el número de grados de libertad hasta tener un problema soluble por algún método estándar.

ii) Definición formal

Sea un sistema definido en una red de espaciamiento elemental a descrito por un hamiltoniano \hat{H} con variables σ . Entonces la función partición del sistema está dada por:

$$Z = \text{Tr}_{\sigma} e^{-\beta \hat{H}} \quad (1)$$

donde Tr_{σ} es la traza sobre variables σ .

Se introduce el grupo de renormalización a través de la transformación $T(\sigma, \mu)$, que satisface

$$\text{Tr}_{\mu} T(\sigma, \mu) = \hat{1}_{\sigma} \quad (2)$$

μ representa la variable del sistema renormalizado y se define el hamiltoniano del nuevo sistema $H'(\mu)$ y G a través de la relación:

$$e^{-\beta(G + \hat{H}'(\mu))} = \text{Tr}_{\sigma} \left(T[\sigma, \mu] e^{-\beta \hat{H}(\sigma)} \right) \quad (3)$$

Con esta definición y (2) la densidad de energía libre del sistema resulta ser invariante

$$F = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln(Z_N) \text{ en el límite termodinámico} \quad (4)$$

Lo cual garantiza que la física del sistema no cambia al hacer este proceso de renormalización.

A partir de la relación (3) se define una transformación analítica entre las constantes de acoplamiento que aparecen en el hamiltoniano:

$$K'_\alpha = K'_\alpha (K_\beta) \quad (5)$$

Lo cual es equivalente a obtener un nuevo hamiltoniano H' al hacer un cambio de escala $r' = r/L$, es decir

$$H' = R_\lambda [H] \quad (6)$$

donde R_λ es la transformación de renormalización, la cual no posee inverso pero sí satisface

$$R_\lambda R_{\lambda'} = R_{\lambda\lambda'} \quad (\text{semi-grupo}) \quad (7)$$

Podemos entonces escribir (5):

$$K' = R_\lambda [K] \quad (8)$$

y se desea encontrar H^* que sea invariante frente a la transformación R_λ de grupo de renormalización o equivalentemente K^* tal que

$$K^* = R_\lambda (K^*) \quad (9)$$

y de aquí se puede estudiar el comportamiento crítico como veremos a continuación.

iii) Superficie crítica

A partir de la relación para el punto fijo H^* :

$$R_L(H^*) = H^* \quad (1)$$

suponiendo analiticidad de R en torno a H^* , se tiene:

$$R_L(H^* + \epsilon Q) \approx H^* + \epsilon L_L Q + O(\epsilon^2) \quad (2)$$

con $\epsilon \ll 1$

Queremos encontrar los operadores propios de L y sus autovalores.

Para eso observamos que:

$$R_{L_1} R_{L_2} (H^* + \epsilon Q) = H^* + \epsilon L_{L_1} L_{L_2} Q + O(\epsilon^2) \quad (3)$$

usando la propiedad (7) obtenemos:

$$L_{L_1 L_2} = L_{L_1} L_{L_2} \quad (4)$$

luego, si $\{\lambda_j(L)\}_{j \in I}$ es el conjunto de autovalores de L :

$$\lambda_j(L_1) \lambda_j(L_2) = \lambda_j(L_1 L_2) \quad (5)$$

si suponemos que λ es diferenciable respecto de L , la solución única de (5) es:

$$\lambda_j(L) = L^Y j \quad (6)$$

con Y_j independiente de L .

Para interpretar la relación (6) consideremos una base de operadores W_α que representa acoplamiento con un número arbitrario de vecinos, entonces:

$$\hat{H} = \sum_{\alpha} K_{\alpha} W_{\alpha} \quad (7)$$

K_{α} son las constantes de acoplamiento.

De (3) tenemos:

$$H' = R_L \left(\sum_{\alpha} K_{\alpha} W_{\alpha} \right) \approx R_L \left(\sum_{\alpha} K_{\alpha}^* + \delta K_{\alpha} W_{\alpha} \right) \quad (8)$$

$$= R_L \left(H^* + \sum_{\alpha} \delta K_{\alpha} W_{\alpha} \right) \quad (9)$$

Donde hemos hecho:

$$H^* = \sum_{\alpha} K_{\alpha}^* W_{\alpha} \quad (10)$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} H' &= H^* + \sum_{\alpha} \delta K_{\alpha} L_L W_{\alpha} \\ &= H^* + \sum_{\alpha\beta} \delta K_{\alpha} L_L_{\alpha\beta} W_{\beta} \end{aligned} \quad (11)$$

suponiendo que L_L es diagonalizable:

$$L_L_{\alpha\beta} = D_{\alpha\sigma} \lambda_{\sigma} D_{\sigma\beta}^{-1} \quad (12)$$

Definiendo:

$$U_{\sigma} = \delta K_{\alpha} D_{\alpha\sigma} \quad (13)$$

$$Q_{\sigma} = D_{\sigma\beta}^{-1} W_{\beta}$$

Obtenemos:

$$H' = H^* + \sum_{\sigma} \lambda_{\sigma} U_{\sigma} Q_{\sigma} \quad (14)$$

En efecto se tiene:

$$L_L Q_\sigma = \lambda_\sigma Q_\sigma \quad (15)$$

Luego de (11) obtenemos:

$$\delta K'_\beta = \sum_\alpha \delta K_\alpha (L_L)_{\alpha\beta} \quad (16a)$$

es decir:

$$L_{\alpha\beta} = \frac{\partial K'_\alpha}{\partial K_\beta} K^* \quad (16b)$$

De (6) vemos que al aplicar reiteradamente R_L los U resultan ser:

$$U'_i = L^{nY_i} U_i \quad (17)$$

esto motiva clasificar los (U_i, Q_i) según su dimensión anómala Y_i :

Se dice que (U_i, Q_i) son:

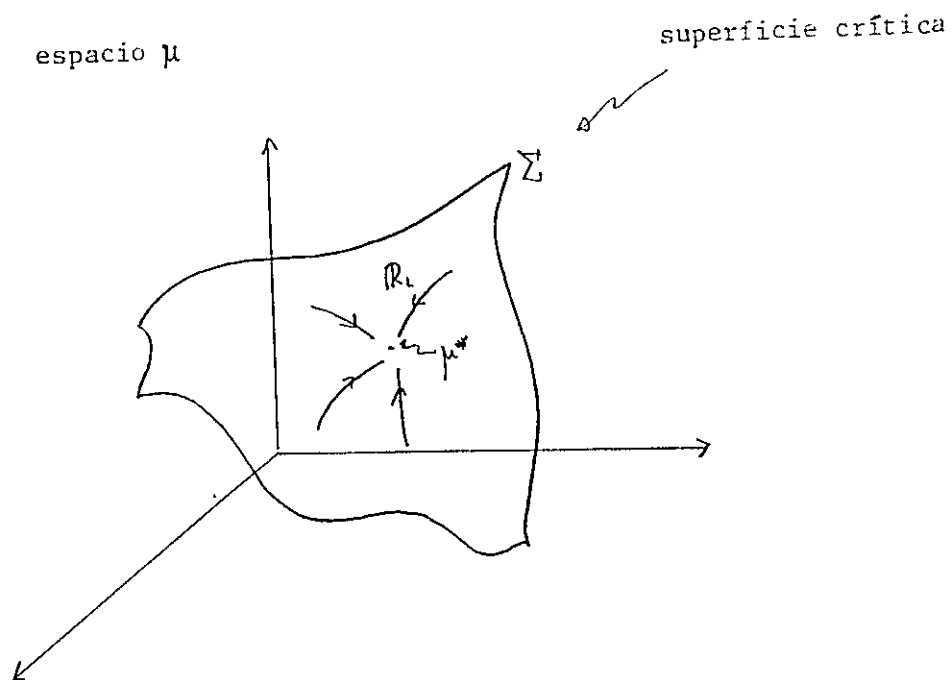
$$\begin{aligned} &\text{relevantes si } Y_i > 0 \quad (U_i \text{ crece}) \\ &\text{irrelevantes si } Y_i < 0 \quad (U_i \text{ decrece}) \\ &\text{marginales si } Y_i = 0 \quad (U_i \text{ invariante}) \end{aligned} \quad (18)$$

Si H no posee pares relevantes, entonces la aplicación reiterada de R conducirá a un H^* , el cual es el punto fijo estable (atractor).

Si H posee al menos un par relevante, entonces el punto fijo H^* será inestable, ya que al aplicar reiteradamente la transformación a H éste se alejará exponencialmente.

Por lo tanto, H^* es punto fijo estable respecto de las variables irrelevantes e inestable respecto de las relevantes. Por ello se dice

que los U_i irrelevantes son las coordenadas del subespacio cuyos puntos H son atraídos hacia H^* , se la llama superficie crítica (10).



iv) Obtención de los exponentes críticos

La hipótesis fundamental consiste en que la función energía libre $f(K)$ puede separarse en una parte regular f_R y otra singular f_S en el sentido que en las vecindades del punto crítico las cantidades termodinámicas que divergen (y están definidas en términos de las derivadas de f) están dominadas por las contribuciones que provienen de $f_S(K)$.

La hipótesis de escalamiento es:

$$f_S(K) = \left(\frac{N'}{N}\right) f_S(K) \quad (1)$$

donde (K,N) caracteriza al sistema original, N número de puntos de la red.

K constantes de acoplamiento

(K' N') caracteriza al sistema reescalado.

Supongamos que hay una variable relevante U_1 que originalmente es pequeña, luego existe cierto

$$U_1' = L^{nY_1} U_1 = 1 \quad (2)$$

de donde

$$L^{-n} = U_1^{1/Y_1} \quad (3)$$

sustituyendo en (17)

$$U_i' = (L^n)^{Y_i} U_i = U_1^{-Y_i/Y_1} U_i \quad (4)$$

De donde (1) se puede escribir:

$$\begin{aligned} f_S(U_i) &= L^{-nd} f_S(U_i') \\ &= L^{-nd} f_S(1, U_1^{-Y_2/Y_1} U_2, U_1^{-Y_3/Y_1} U_3, \dots) \\ &= U_1^{d/Y_1} \left(\frac{U_2}{U_1^{Y_2/Y_1}}, \frac{U_3}{U_1^{Y_3/Y_1}}, \dots \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Para el caso que existan 2 variables relevantes $U_1 = t$ (temperatura reducida) y $U_2 = h$ campo magnético de 5) obtenemos:

$$f_S(\tau, h) = \begin{cases} |\tau|^{d/Y_t} Y_1(h/|\tau|^\Delta) \\ |h|^{d/Y_H} Y_2(\tau/|h|^{1/\Delta}) \end{cases} \quad (6) \text{ a) } \cdot$$

donde: $\Delta = Y_H/Y_t$ (7)

Dado que $C_h \sim \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} \Big|_{h=0}$ $M = \left(\frac{\partial f}{\partial h} \right)_{h=0}$ $X = \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_{h=0}$ (8)

Se obtiene de (6):

$$C_h = \frac{d}{Y_t} \left(\frac{d}{Y_t} - 1 \right) |\tau|^{d/Y_t - 2} Y_1(0)$$

$$M = Y_1'(0) |\tau|^{d/Y_t - Y_H/Y_t} \quad (9)$$

$$X = Y_1''(0) |\tau|^{d/Y_t - 2Y_H/Y_t}$$

$$M = Y_2(0) \frac{d}{Y_H} h^{d/Y_H - 1}$$

Usando las definiciones dadas en 2. a) para los exponentes críticos y comparando con (9), obtenemos:

$$\alpha = 2 - d/Y_t$$

$$\beta = \frac{d - Y_H}{Y_t}$$

$$\gamma = (2Y_h - d) / Y_t \quad (10)$$

$$\delta = Y_h / (d - Y_h)$$

Por lo tanto, datos Y_h e Y_t , todos los exponentes críticos pueden ser determinados. Inversamente eliminando Y_h e Y_t se verifica en forma directa que se satisfacen las igualdades entre los exponentes críticos como aparece en §2a).

Para el modelo de Ising en $d=2$, se sabe que

$$Y_t = 1 \quad (11)$$

$$Y_h = 15/8$$

Por último, la longitud de correlación del sistema es reescalada según:

$$\xi[R_L(K)] = \frac{1}{L} \xi(K) \quad (12)$$

y por tanto si $K=K_c$ punto fijo, de (12) $\xi(K_c) = \infty$ como debe ser.

Linealizando $R(K)$ en K_c :

$$R(K) = R(K_c) + \lambda(K - K_c) \quad (13)$$

con

$$\lambda_L = \left(\frac{\partial R}{\partial K} \right)_{K_c} = L \quad (14)$$

Además de la definición del exponente ν :

$$\xi(K) \sim (K - K_c)^{-\nu} \quad (15)$$

obtenemos:

$$\frac{\xi[R(K)]}{\xi(K)} = \left[\frac{R(K) - K_c}{K - K_c} \right]^{-\nu} \quad (16)$$

de donde se deduce que

$$\nu = L_n L / L_n \lambda_L \quad (17)$$

A pesar que no es manifiesta de independencia del exponente ν del factor de reescalamiento $L = a'/a$ en efecto de iii) (6) se tiene

$$\nu = \frac{L_n L}{L_n \lambda_L} = \frac{1}{\gamma_i} \quad (18)$$

v) Ejemplo

Considerando el modelo de Ising con campo magnético (11) definido por el hamiltoniano

$$H(K, H, \{S\}) = - \sum_i (K S_i S_{i+1} + h S_i) \quad (1a)$$

la función partición está dada por:

$$Z = \sum_{\{S\}} e^{-\beta H(K, h, \{S\})} \quad (1b)$$

al formar bloques de spin e introducir la transformación $T(S, S')$:

$$Z = \sum_{\{S'\}} \sum_{\{S\}} T(S, S') e^{-\beta H(K, h, \{S\})} \quad (2)$$

donde T debe satisfacer:

$$\sum_{\{S'\}} T(S, S') = 1 \quad (3)$$

y además,

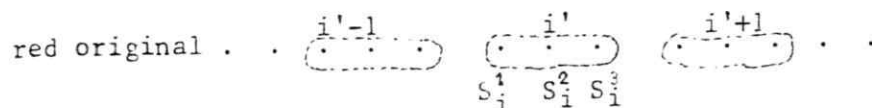
$$T(S, S') = \begin{cases} 1 & \text{Si la configuración } \{S'\} \text{ es "compatible" con la} \\ & \text{configuración } \{S\} \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases} \quad (4)$$

De modo que se debe inventar un $T(S, S')$ que cumpla con los dos requisitos mínimos (3) y (4), tal elección no es única (12), una vez hecho es to el problema de renormalización consiste en expresar

$$\sum_{\{S\}} T(S, S') e^{-\beta H(K, \{S\})} \text{ como } e^{f_0 - \beta H(K', \{S'\})} \quad (5)$$

donde f_0 se interpreta como energía libre por sitio.

Consideremos celda de 3 sitios:



red isomorfa

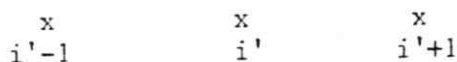


FIG. 1

Podemos escoger T de acuerdo a la Ley de la mayoría"

$$T(S'S') = \prod_{i'} \frac{1}{2} [1 + \text{Sgn } S'_i (S_i^1 + S_i^2 + S_i^3)] \quad (6)$$

Luego, dada la configuración s' en la red isomoria (valor de $S_{i'}^1$ en la celda i') sólo contribuyen las configuraciones siguientes:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 : S_{i'}^1 &= S_{i'}^2 = S_{i'}^3 = S_{i'}^1, \\
 \sigma_2 : -S_{i'}^1 &= S_{i'}^2 = S_{i'}^3 = S_{i'}^1, \\
 \sigma_3 : S_{i'}^1 &= -S_{i'}^2 = S_{i'}^3 = S_{i'}^1, \\
 \sigma_4 : S_{i'}^1 &= S_{i'}^2 = -S_{i'}^3 = S_{i'}^1,
 \end{aligned} \tag{7}$$

y por tanto:

$$\sum_{\{S\}} T(S, S') e^{-\beta H(S)} = \sum_{\{s\}} e^{-\beta H(S)} \tag{8}$$

Ahora efectuamos la suma (8) explícitamente y de acuerdo a (5) igualamos con $e^{f_0 - \beta H(S', K')}$. Comparando factores linealmente independientes se obtiene:

$$\begin{aligned}
 3e^{K'} + e^{-3K'} &= e^{f_0 - K'} \\
 e^{3H+3K'} + 2e^{H-K'} + e^{2H-K'} &= e^{f_0 + K' + H'} \\
 e^{3H+3K'} + 2e^{-H-K'} + e^{2H-K'} &= e^{f_0 + K' - H'}
 \end{aligned} \tag{9}$$

donde: (K, H) son las constantes de acoplamiento de la red original.

La solución del sistema (9) es:

$$K' = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left[\frac{(e^{2h+3K} + 2e^{-K} + e^{h-K})^{1/2} (e^{-2h+3K} + 2e^{-K} + e^{-h-K})^{1/2}}{(3e^K + e^{-3K})} \right] \quad (10)a$$

$$h' = h + \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{e^{2h+3K} + 2e^{-K} + e^{h-K}}{e^{-2h+3K} + 2e^{-K} + e^{-h-K}} \right) \quad (10)b$$

$$f_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} (e^{2h+3K} + 2e^{-K} + e^{h-K})^{1/2} (e^{-2h+3K} + 2e^{-K} + e^{-h-K})^{1/2} (3e^K + e^{-3K}) \quad (10)c$$

El punto fijo satisface $h'=h$ esto implica $h^*=0$ y de (10)a obtenemos:

$$\begin{aligned} K^* &= 0, \infty \\ h^* &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

y luego el punto fijo es trivial en este caso:

$$v = \frac{\operatorname{Ln} L}{\operatorname{Ln} \left(\frac{\partial K'}{\partial K} \right)_{K^*}} = \begin{cases} 0 & K^* = 0 \\ \infty & K^* = \infty \end{cases} \quad (12)$$

ya que $K^* = \infty$ representa temperatura nula, es decir los spines del sistema están alineados de donde la longitud de correlación es infinita.

Mencionamos finalmente que a partir de la expresión para la energía libre

$$f(\underline{k}, \underline{h}) = \frac{1}{2} f_0(\underline{k}, \underline{h}) + f(\underline{k}', \underline{h}') \quad (13)$$

y (10) se puede calcular numéricamente $f(\underline{k})$ (13)

d) Renormalización en espacio de momentum

Para fijar ideas consideremos un sistema definido en una red de d dimensión y espacio elemental L , cuya dinámica está dada por el hamiltoniano $H[\sigma]$ con variables de spin $\vec{\sigma}$.

A partir de $H[\sigma]$ queremos construir un hamiltoniano de bloque. Para ello a partir de la definición de las componentes de Fourier de σ

$$\sigma_{\underline{c}} = L^{-d/2} \sum_{\underline{K}} e^{i\underline{K} \cdot \underline{c}} \sigma_{\underline{K}} \quad (1)$$

$$\sigma_{\underline{K}} = L^{-d/2} \sum_{\underline{c}} e^{-i\underline{K} \cdot \underline{c}} \sigma_{\underline{c}} \quad (2)$$

donde la suma sobre \underline{K} es sobre los L^d puntos que están en la primera zona de Brillouin. Hacemos un cambio de variables. La distribución de probabilidad para las nL^d nuevas variables aleatorias $\sigma_{\underline{iK}}$ es $\exp(-\hat{\mathcal{H}})$.

Ahora usamos la idea básica de Renormalización, esto es que cerca de la temperatura crítica, la longitud de correlación es muy grande, por lo tanto las excitaciones que contribuyen con mayor importancia son

aquellas cuya longitud de onda asociada es grande. Esto significa que de las componentes de Fourier e^{iK} sólo nos interesaremos en aquellas cuyo número de onda K es menor que Δ . Por lo tanto, la distribución de probabilidad para estas variables se obtiene integrando sobre el resto

$$P'_\alpha \int \prod_{i, K > \Delta} d\sigma_{iK} e^{-\beta \hat{H}(\sigma)} = e^{-\beta \hat{H}(\sigma)} \quad (3)$$

Por lo tanto, dado que fluctuaciones de spin con escala menor que $2\pi/\Delta$ no pueden ser detectadas de (3), la resolución espacial para \hat{H} es justamente el valor el cual lo identificamos como el tamaño del bloque:

$$b = 2\pi/\Delta \quad (4)$$

Entonces podemos ahora definir

$$\sigma(\underline{x}) = L^{-d/2} \sum_{K < \Delta} \sigma_K e^{iK \cdot \underline{x}} \quad (6)$$

el cual especifica la configuración de spin a una distancia $\sim 1/\Delta$

Este procedimiento de obtener un hamiltoniano de bloque \hat{H}_b a partir de uno definido en una red \hat{H} se conoce como la transformación de Kadanoff. Simbólicamente:

$$\hat{p}^{\hat{H}_b}[\sigma] = K_b \hat{p}^{\hat{H}}[\sigma] \quad (6)$$

Se puede iterar este proceso y obtener $\hat{H}''[\sigma]$ a partir de $\hat{H}[\sigma]$ definiendo bloques aún más grandes, por ejemplo combinar S^d bloques:

$$\hat{H}''[\sigma] = K_S \hat{H}[\sigma] \quad (7)$$

y la distribución de probabilidad está dada por:

$$e^{-\beta \hat{H}''[\sigma]} = \int_{i, \Lambda > K > \Lambda/S} d\sigma_{iK} e^{-\beta \hat{H}[\sigma]} \quad (8)$$

de donde se obtiene la propiedad de semi-grupo de las transformaciones K:

$$K_S \beta \hat{H}[\sigma] = K_S K_b \beta \hat{H}[\sigma] = K_{Sb} \beta \hat{H}[\sigma] \quad (9)$$

A partir de la transformación K del "grupo" de renormalización se puede obtener el comportamiento crítico del sistema de manera análoga a como se hizo en la parte d. (1)

En resumen, a través de este proceso de sumar sobre las excitaciones con longitud de onda menor que un cierto límite $2\pi\Lambda^{-1}$ se obtiene un hamiltoniano de bloque, el cual posee una escala b . * Observamos de (3) que en esta transformación interviene T como el resto de constantes de acoplamiento J, h... Sin embargo, debido a que las interacciones entre bloques de spin es de corto alcance (dado que se debe a interacciones de los spines las cuales se supusieron de corto alcance), y, que depende del comportamiento de un número finito de spines b^d en muchos bloques no puede haber comportamiento singular. Esto permite afirmar que el hamiltoniano de bloque es una función suave de T y los parámetros de acoplamiento

* de aquí se define una transformación regular de T y las constantes de acoplamiento K_b (R.G.T), la cual contiene la información acerca del comportamiento crítico del sistema.

Como ejemplo, consideremos el modelo gaussiano, el cual se obtiene suavizando la distribución de probabilidad de spin en el modelo de Ising. En efecto, haciendo:

$$2 \delta(S_{\underline{n}}^2 - 1) \rightarrow e^{-\frac{c}{2} S_{\underline{n}}^2 - \tilde{u} S_{\underline{n}}^4} \quad u > 0 \quad (1)$$

$$u = -c/4$$

se obtiene una distribución continua para $S_{\underline{n}}$ la cual converge en el límite $c \rightarrow \infty$ y $\tilde{u} \rightarrow \infty$ a la delta de Dirac salvo factor de normalización.

La función partición para este modelo está dada por:

$$Z = \prod_{\underline{n}} \int_{\mathbb{R}} dS_{\underline{n}} e^{K \sum_{n,i} S_{\underline{n}} S_{\underline{n}+i} - \frac{c}{2} \sum_{\underline{n}} S_{\underline{n}}^2 - \tilde{u} \sum_{\underline{n}} S_{\underline{n}}^4} \quad (2)$$

donde \underline{n} rotula un sitio en una red d dimensional y $S_{\underline{n}}$ corresponde al operador de spin del sitio \underline{n} . El índice \underline{i} rotula el acoplamiento con los sitios vecinos.

Reescribiendo (2)

$$Z = \prod_{\underline{n}} \int_{\mathbb{R}} dS_{\underline{n}} e^{-\frac{K}{2} \sum_{\underline{n}, \underline{i}} (S_{\underline{n}} - S_{\underline{n}+\underline{i}})^2 + (Kd - \frac{c}{2}) \sum_{\underline{n}} S_{\underline{n}}^2 - u \sum_{\underline{n}} S_{\underline{n}}^4} \quad (3)$$

ahora hacemos el cambio de variable:

$$\sigma_{\underline{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\underline{n}} S_{\underline{n}} e^{-i\vec{q} \cdot \underline{n}} \quad (4)$$

donde \vec{q} es el vector en la red recíproca que pertenece a la primera zona de Brillouin y N representa el número de sitios en la red original.

Usando las identidades

$$\frac{1}{N} \sum_{\vec{n}} e^{i\vec{n} \cdot (\vec{q} - \vec{q}')} = \delta_{\vec{q}\vec{q}'} \quad (5a)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{n} - \vec{n}')} = \delta_{\vec{n}\vec{n}'} \quad (5b)$$

se obtiene

$$\sum_{\vec{n}} S_{\vec{n}}^2 = \sum_{\vec{q}} \sigma_{\vec{q}} \sigma_{-\vec{q}} \quad (6)$$

$$\sum_{\vec{n}, i} (S_{\vec{n}+\vec{i}} - S_{\vec{n}})^2 = \sum_{\vec{q}} \sigma_{\vec{q}} \sigma_{-\vec{q}} \sum_{i=xyz} |e^{i\vec{q} \cdot \vec{i}} - 1|^2 \quad (7)$$

$$\sum_{\vec{n}} S_{\vec{n}}^4 = \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3} \sigma_{\vec{q}_1} \sigma_{\vec{q}_2} \sigma_{\vec{q}_3} \sigma_{-(\vec{q}_1 - \vec{q}_2 - \vec{q}_3)} \quad (8)$$

De acuerdo a la hipótesis básica que las contribuciones más importantes son aquellas excitaciones que poseen longitud de onda larga hacemos la aproximación:

$$\sum_{i=x,y,z} |e^{i\vec{q} \cdot \vec{i}} - 1|^2 \approx \vec{q}^2 \quad (8)$$

y reescalando $\sigma_{\vec{q}}$ como: $\sqrt{K} \sigma_{\vec{q}}$ (9)

De donde el hamiltoniano queda:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \sum_{\underline{m}} \sigma_{\underline{q}_{\underline{m}}} \sigma_{-\underline{q}_{\underline{m}}} (q_{\underline{m}}^2 + r) - u \sum_{\underline{m}_1, \underline{m}_2, \underline{m}_3} \sigma_{\underline{q}_{\underline{m}_1}} \sigma_{\underline{q}_{\underline{m}_2}} \sigma_{\underline{q}_{\underline{m}_3}} \sigma_{-\underline{q}_{\underline{m}_1} - \underline{q}_{\underline{m}_2} - \underline{q}_{\underline{m}_3}} \quad (10)$$

donde:

$$r = : (c-2Kd)/K \quad u = : u/K \quad (11)$$

con d la dimensión del sistema.

Dado que la transformación (4) es unitaria:

$$\prod_n \int_{\mathbb{R}} dS_{\underline{n}} \rightarrow \prod_{\underline{m}} \int_{\mathbb{R}} d\sigma_{\underline{q}_{\underline{m}}} \quad (12)$$

con esto la función partición queda:

$$Z = \prod_{\underline{m}} \int_{\mathbb{R}} d\sigma_{\underline{q}_{\underline{m}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\underline{m}} \sigma_{\underline{q}_{\underline{m}}} \sigma_{-\underline{q}_{\underline{m}}} (q_{\underline{m}}^2 + r) - u \sum_{\underline{m}_1, \underline{m}_2, \underline{m}_3} \sigma_{\underline{q}_{\underline{m}_1}} \sigma_{\underline{q}_{\underline{m}_2}} \sigma_{\underline{q}_{\underline{m}_3}} \sigma_{-\underline{q}_{\underline{m}_1} - \underline{q}_{\underline{m}_2} - \underline{q}_{\underline{m}_3}} \right\} \quad (13)$$

Tomando el límite $N \rightarrow \infty$ el espaciado de la red recíproca (entre los $\underline{q}_{\underline{m}}$) converge a cero.

En este límite la expresión (13) se transforma en una integral funcional para Z :

$$Z = \int_{\sigma} e^{-\frac{1}{2} \int_{\vec{q}} \sigma_{\vec{q}} \sigma_{-\vec{q}} (q^2 + r) - u \int_{\vec{q}_1} \int_{\vec{q}_2} \int_{\vec{q}_3} \sigma_{\vec{q}_1} \sigma_{\vec{q}_2} \sigma_{\vec{q}_3} \sigma_{-\vec{q}_1 - \vec{q}_2 - \vec{q}_3}} \quad (14)$$

Donde:

$$\int_{\vec{q}} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \dots \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \frac{d}{\pi} q_i \quad (15)$$

El modelo gaussiano se obtiene haciendo $u=0$ en (14). Es exactamente renormalizable (y exactamente soluble), aunque los valores para los exponentes críticos corresponden a los medidos por la teoría de campo medio que cuantitativamente son malos. La inclusión del término de cuarto orden hace que el modelo sea soluble sólo en teoría de perturbaciones, lo cual conduce a la conocida "expansión ϵ ".

El cálculo es standard y puede verse en (14).

3.

a. Método perturbativo general de renormalización en espacio real

Consideremos un sistema físico cuya dinámica está dada a través del hamiltoniano \hat{H}_σ definido en una red de puntos $M = \{m\}$ cuyas variables son operadores de sitio $\hat{\sigma}_m$.

Basándose en la idea de bloques de Kadanoff se busca construir un nuevo hamiltoniano, el cual es definido en un sub-conjunto de puntos $N \subset M$ que denotamos por $\{p\}$, que corresponden a celdas del antiguo sistema, cuyas variables son operadores de punto $\hat{\mu}_p$. La relación entre \hat{H}_σ y \hat{H}_μ es definida a través de una transformación de grupo de renormalización. La nueva red tendrá un espaciamiento $s(>1)$ veces mayor que la original. El índice p rotula una celda que incluye S^d sitios de la red original, donde d es la dimensión del sistema.

Esquemáticamente

	<u>Hamiltoniano</u>	<u>Variables</u>	<u>Nombre de Sitios</u>
Original	\hat{H}_σ	$\hat{\sigma}_m$	$\{m\} = M$
Después de la acción de GR	\hat{H}_μ	$\hat{\mu}$	$\{p\} = N$

Queremos estudiar el comportamiento crítico del sistema en la vecindad de temperatura cero, físicamente es razonable que éste estará determinado fundamentalmente por el estado base y primer estado excitado. Esta

hipótesis fundamental debida a Hirsh y Mazenko (15), permite una prescripción para definir la transformación del grupo de renormalización de modo de garantizar que ambos estados sean invariantes.

Esto se hace a través de una transformación $T[\mu/\sigma]$ que es un producto tensorial de vectores que pertenecen al espacio de Hilbert original \mathcal{H}_σ y el que se obtiene bajo la acción del G.R. \mathcal{H}_μ . La definición de T es dada a través de la condición

$$\hat{H}_\sigma T[\mu/\sigma] = \hat{H}_\mu T[\mu/\sigma] \quad (1)$$

Ésto, junto con la condición de normalización:

$$\text{Tr}_\sigma T[\mu/\sigma] T^+[\mu/\sigma] = \hat{1}_\mu \quad (2)$$

donde Tr_σ : traza sobre variables σ
permite obtener \hat{H}_μ

$$\hat{H}_\mu = \text{Tr}_\sigma (\hat{H}_\sigma T[\mu/\sigma] T^+[\mu/\sigma]) \quad (3)$$

Consideremos entonces la red original σ y formemos bloques de tamaño arbitrario .



FIG. 1

Con esto separamos el hamiltoniano del sistema H-:

$$\hat{H}_\sigma = \hat{H}_\sigma^0 + \lambda \hat{V}_\sigma \quad (4)$$

donde:

H_σ^0 = hamiltoniano intra-celda

V_σ = interacción entre celdas

y realizamos (1) orden a orden en teoría de perturbaciones en λ , entonces

$$T[\mu/\sigma] = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i T_i[\mu/\sigma] \quad (5)_{a,b}$$

$$\hat{H}_\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i H_\mu^{(i)}$$

Sustituyendo en (1) e igualando potencias en λ obtenemos:

orden cero: $H_\sigma^0 T_0 = H_\mu^0 T_0$

orden uno: $(H_\sigma^0 - H_\mu^0) T_1 = (H_\mu^{(1)} - V_\sigma) T_0 \quad (6)_{a,b,c}$

orden $k > 1$: $(H_\sigma^0 - H_\mu^0) T_k = (H_\mu^{(1)} - V_\sigma) T_{k-1} + \sum_{j=0}^{k-2} H_\mu^{(k-j)} T_j$

De las relaciones (6) está dado inductivamente T_k si se conoce los órdenes inferiores y además H_μ hasta orden k .

i) Orden cero:

Sea

$$\hat{H}_\sigma = \sum_m \hat{H}_\sigma^0(m) + \sum_{n \neq m} v_{nm} \hat{A}_\sigma(m) \hat{A}_\sigma(n) \quad (7)$$

el hamiltoniano definido en una red cuyos puntos son rotulados por el índice n .

A continuación formamos bloques en la red original y rotulamos nuevamente:

$$m = (p, a)$$

p : índice de celda

a : lugar en la celda

Agrupando se tiene:

$$\hat{H}_\sigma = \sum_p \hat{H}_\sigma^0(p) + \sum_{\substack{(p,a) \\ (p',a')}} v_{pp',(a,a')} \hat{A}_\sigma(p,a) \hat{A}_\sigma(p',a') \quad (9)$$

Suponiendo que T_σ puede ser escrito como producto tensorial de vectores de celda.

$$T_\sigma = \bigotimes_p T_\sigma(p) \quad (10)$$

Usamos ahora la expresión:

$$\hat{H}_\mu = \text{Tr}(H_\sigma T_\sigma T_\sigma^+) \quad (11)$$

que se demuestra más tarde (eq. 27) que es válida hasta primer orden, introduciendo (9) y (10) en (11), obtenemos:

$$\hat{H}_\mu = \sum_P \text{Tr}_\sigma A_\sigma^0(P) T_o(P) T_o^+(P) + \sum_{(P,P',a,a')} V_{PP'}(a,a') \hat{A}_\mu(P,a) \hat{A}_\mu(P',a') \quad (12)$$

donde:

$$\hat{A}_\mu(P,a) = \text{Tr}_\sigma \hat{A}_\sigma(P,a) T_o(P) T_o^+(P) \quad (13)$$

La condición que debe satisfacer $T_o(P)$ de modo que el hamiltoniano sea invariante de forma, está dada por:

$$\hat{A}_\mu(P,a) = f_P(a) \hat{A}_\mu(P) \quad (14)$$

donde:

$f_P(a)$ es un número

$\hat{A}_\mu(P)$ es funcionalmente el mismo que $\hat{A}_\sigma(m)$, excepto que opera en un subespacio de Hilbert \mathcal{H}_μ del espacio original \mathcal{H}_σ

Luego, haciendo

$$H_\mu^0(P) = \text{Tr}_\sigma H_\sigma^0(P) T_o(P) T_o^+(P) \quad (15)$$

se obtiene

$$\hat{H}_\mu = \sum_P H_\mu^0(P) + \sum_{P,P'} \bar{V}_{PP'} \hat{A}_\mu(P) \hat{A}_\mu(P') \quad (16)$$

donde

$$\bar{V}_{PP'} = \sum_{a,a'} f_P(a) f_{P'}(a') V_{PP'}(a,a') \quad (17)$$

lo cual garantiza que la forma del hamiltoniano es invariante hasta primer orden.

Imponemos además la normalización para T_0 :

$$\text{Tr}_0(T_0[\mu/\sigma]T_0^+[\mu/\sigma]) = \hat{1}_\mu \quad (18)$$

ii) Ordenes superiores

Dado que T_0 fue escogido de modo que el estado base y el primer estado excitado fuesen invariantes, el operador $(\hat{H}_\sigma^0 - \hat{H}_\mu^0)$ que aparece en (6) es singular y por lo tanto no es posible invertirlo para despejar T_k .

Notemos además, que de (18) la condición de normalización resulta:

$$1 = 1 + \lambda \text{Tr}(T_1 T_0^+ + T_0 T_1^+) + \lambda^2 \text{Tr}(T_2 T^+ + T_1 T_1^+ + T_0 T_2^+) + O(\lambda^3) \quad (19)$$

Por consistencia:

$$\text{Tr}(T_1 T_0^+ + T_0 T_1^+) = 0 \quad (20)$$

podemos escoger las combinaciones para T con coeficientes reales, lo cual se verá explícitamente en la forma matricial del problema.

Por lo tanto obtenemos:

$$\text{Tr}(T_1 T_0^+) = 0 \quad (21)$$

$$\text{Tr}(T_2 T_0^+) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(T_1 T_1^+) =: S \quad (22)$$

además de (22):

$$T_2 = S T_0 + \tilde{T}_2 \quad (23)a$$

donde \tilde{T}_2 es tal que

$$\text{Tr}(\tilde{T}_2 T^+) = 0 \quad (23)b$$

Analizamos la condición (21), sea T_0 definido por:

$$T_0 = \sum_i |i\rangle^0 |\mu_i\rangle \quad (24)$$

Sea \mathcal{H}_σ^0 ($|i\rangle^0$) el espacio engendrado por los vectores $|i\rangle^0 \in \mathcal{H}_\sigma$, entonces si

$$T_1[\mu/\sigma] = \sum_i |i\rangle^{(1)} |\mu_i\rangle \quad (25)$$

La condición (21) implica:

$$\langle i | i \rangle^{(1)} = 0 \quad (26)$$

es decir, la corrección perturbativa a $|i\rangle^0$ pertenece al espacio ortogonal al \mathcal{H}_σ^0 ($|i\rangle^0$)[⊥]. Pero justamente en este sub-espacio de \mathcal{H}_σ el operador $(\hat{H}_\sigma^0 - \hat{H}_\mu^0)$ es invertible. En efecto, de (6)a,b obtenemos:

$$\hat{H}_\sigma^0 = \text{Tr}(H_\sigma^0 T_0 T_0^+) \quad (27)a$$

$$\hat{H}_\mu^{(1)} = \text{Tr}(\hat{V}_\sigma T_0 T_0^+) \quad (27)b$$

Ahora, de (6)c:

$$\text{Tr}(H_\sigma^0 T_2 T_0^+) - H_\mu^0 \text{Tr}(T_2 T_0^+) = - \text{Tr}(V_\sigma T_1 T_0^+) + H_\mu^{(2)} \quad (28)$$

donde se ha usado (18) y (21).

Sustituyendo (23) en (28), obtenemos:

$$\hat{H}_\mu^{(2)} = \text{Tr}(V_\sigma T T_\sigma^+) + \hat{S}, H_\mu^{(0)} \quad (29)$$

iii) Forma matricial

Sea

$$\hat{A}_\sigma(P, a) = \sum_{\nu\delta} K_{\nu\delta}(a) |\nu\rangle_P \langle\delta| \quad (30)$$

donde $\{|\nu\rangle_P\}_\nu$: conjunto completo de estados de celda P.

Escribimos T como un producto general en $\sigma \times \mu$:

$$T_{\mu/\sigma} = \sum_{\nu\mu} \tilde{d}_{\nu\mu} |\nu\rangle_\sigma \langle\mu| \quad (31)$$

$\{|\nu\rangle\}$: conjunto completo de autoestados de \hat{H}_σ

$\langle\mu\rangle$: conjunto completo de autoestados de \hat{H}_μ

Imponemos condiciones de borde cíclicas (Toroidales) en la red original y suponemos que no hay ningún punto privilegiado.

Tomemos:

$$\hat{A}_\sigma(m) = \sum_{\nu\delta} |\nu\rangle_m \langle\delta| C_{\nu\delta} \quad (32)$$

y hacemos el ansatz para T_σ :

$$T_\sigma [\mu/\sigma] = \sum_P T_\sigma^P [\mu/\sigma] \quad (33)$$

donde:

$$T_o^P[\mu/\sigma] =: T_o(P) = \sum_{\nu, \mu} d_{\nu\mu} |\nu\rangle_P \otimes |\mu\rangle_P \quad (34)$$

$\{|\nu\rangle\}$ conjunto completo de estados de $\hat{H}_\sigma^0(P)$

$\{|\mu\rangle\}$ conjunto completo de estados de $\hat{H}_\mu^0(P)$

Con estas definiciones obtenemos:

$$\hat{A}_\mu(P, a) = \text{Tr}[\hat{A}_C(P, a) T_o(P) T_o^\dagger] = \sum_{\epsilon\delta\mu_\alpha\mu_\beta} k_{\epsilon\delta}(a) d_{\delta\mu_\alpha} d_{\epsilon\mu_\beta}^* |\mu_\alpha\rangle_P \langle\mu_\beta| \quad (35)$$

definiendo:

$$f_{\mu_\alpha\mu_\beta}(a) = \sum_{\epsilon\delta} k_{\epsilon\delta}(a) d_{\delta\mu_\alpha} d_{\epsilon\mu_\beta}^* \quad (36)$$

la condición (14) para T_o se expresa:

$$f_{\mu_\alpha\mu_\beta}(a) = f_P(a) C_{\mu_\alpha\mu_\beta} \quad (37)$$

En forma explícita la ecuación para $d_{\delta\mu_\alpha}$ es:

$$\sum_{\epsilon\delta} k_{\epsilon\delta}(a) d_{\delta\mu_\alpha} d_{\epsilon\mu_\beta}^* = f_P(a) C_{\mu_\alpha\mu_\beta} \quad (38)$$

junto con la condición de normalización:

$$\sum_{\delta} d_{\delta\mu_\alpha} d_{\delta\mu_\beta}^* = \delta_{\mu_\alpha\mu_\beta} \quad (39)$$

Observación

Notemos que si $\mu_\alpha \in I_{r\mu} =: \{ \epsilon \in N/n < v_\mu \}$, entonces existen 2 $(v_\mu)^2$ ecuaciones en (38) y (39). Sin embargo, existen 2 $(v_\sigma \cdot v_\mu)$ incógnitas. Luego, hay $2v_\mu (v_\sigma - v_\mu)$ constantes arbitrarias en principio. De donde la elección de T_0 no es única.

Se puede obtener un sistema cuadrado imponiendo:

$$d_{\delta\mu_\alpha} = 0 \quad v_\delta > \mu_\alpha \quad (40)$$

obtenemos:

$$\hat{H}_\sigma^0 = \sum_P H_\sigma^0(P) = \sum_P (\sum_{v_P} E_{v_P}^0 |v_P\rangle_P \langle v_P|) \quad (41)$$

de donde:

$$\hat{H}_\mu^0(P) = \sum_{\mu_\alpha \mu_\beta} g_{\mu_\alpha \mu_\beta} |\mu_\alpha\rangle_P \langle \mu_\beta| \quad (42)$$

donde:

$$g_{\mu_\alpha \mu_\beta} = \sum_{v_P} E_{v_P}^0 d_{v_P \mu_\alpha} d_{v_P \mu_\beta}^* \quad (43)$$

También se tiene:

$$H_\mu^{(1)} = \sum_{\mu_\alpha \mu_\beta} T'_{\mu_\alpha \mu_\beta}(a) |\mu_\alpha\rangle_P \langle \mu_\beta| \quad (44)$$

con

$$T'_{\mu_\alpha \mu_\beta}(a) = \sum_{v \in \epsilon} K_{v \in}(a) d_{\epsilon \mu_\alpha} d_{v \mu_\beta}^* \quad (45)$$

usando (39) obtenemos:

$$H_{\mu}^{(1)} = \sum_{(P,a)(P',a')} V_{PP'}(a,a') f_P(a) f_{P'}(a') \hat{A}_{\mu}^P \hat{A}_{\mu}^{P'} \quad (46)$$

tal como debe ser.

Observación

Es posible escoger

$$d_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \quad (42)$$

y con ello garantizar (39) y (38) ya que

$$K_{\mu\alpha\mu\beta}(a) = f_P(a) C_{\mu\alpha\mu\beta} \quad (48)$$

ecuación que corresponde a la hipótesis original de simetría tradicional.

iv) Cálculo de T_1

Sea $|\tau_P^\circ\rangle$

$$H_{\mu}^{\circ}(P) |\tau_P^\circ\rangle = E_{\tau_P^\circ} |\tau_P^\circ\rangle \quad (49)$$

y si $|\tau^\circ\rangle = \bigotimes_P |\tau_P^\circ\rangle$ entonces:

$$\hat{H}_{\mu} |\tau^\circ\rangle = E_{\tau^\circ} |\tau^\circ\rangle \quad (50)a$$

con

$$E_{\tau^\circ} = \sum_P E_{\tau_P^\circ} \quad (50)b$$

escribimos en forma general:

$$T_1 [\mu/\sigma] = \sum_{\tau} |v_{\tau}\rangle^{(1)} |\tau\rangle \quad (52)$$

se obtiene:

$$(\hat{H}_{\sigma}^0 - E_{\tau}^0) T_1 = (\hat{H}_{\mu}^{(1)} - \hat{V}_{\sigma}) T_0 \quad (53)$$

Haciendo el producto interno en \mathcal{H}_{μ}^0 con $(|\mu\rangle^0)^+$

$$(\hat{H}_{\sigma}^0 - E_{\mu}^0) |v_{\mu}\rangle^{(1)} = E_{\mu}^{(1)} |v_{\sigma}\rangle^0 - \hat{V}_{\sigma} |v_{\mu}\rangle^0 \quad (53)$$

donde

$$\langle \mu | \hat{H}_{\mu}^{(1)} | \mu \rangle = E_{\mu}^{(1)} \quad (54)$$

Tomando elementos de matriz en (53) obtenemos:

$$(E_{\nu}^0 - E_{\mu}^0) \langle \nu | v_{\mu} \rangle^{(1)} = E_{\mu}^{(1)} \langle \nu | v_{\sigma} \rangle^0 - \langle \nu | \hat{V}_{\sigma} | v_{\mu} \rangle^0 \quad (55)$$

De acuerdo a (26) sólo interesa la conexión perturbativa en $\mathcal{H}_{\sigma}^0 (|i\rangle^0)^+$,
sin embargo si $|v\rangle^0 \in \mathcal{H}_{\sigma}^0 (|i\rangle^0)$ entonces

$$E_{\mu}^{(1)} \langle v_{\tau} | \tau_s \rangle^0 = \langle v_{\tau} | \hat{V}_{\sigma} | v_{\mu} \rangle^0 \quad (56)$$

lo cual dice que los autovalores a primer orden coinciden con los originales, lo cual es consistente con la elección de T_0 .

Ahora si $|v\rangle^0 \in \mathcal{H}_{\sigma}^0 (|i\rangle^0)^{\perp}$ obtenemos:

$$|v_{\mu}\rangle^{(1)} = \sum_{|v\rangle^0} \frac{\langle v | \hat{V}_{\sigma} | v_{\mu} \rangle^0}{E_{\nu}^0 - E_{\mu}^0} |v\rangle^0 \quad (57)$$

donde (*) significa suma sobre $|\nu\rangle \in \mathcal{H}_\sigma(|i\rangle)^\perp$

Evaluamos ahora el elemento de matriz $[\hat{V}_\sigma]_{\nu\delta}$ dado que:

$$\hat{V}_\sigma = \sum_{\substack{PP' \\ aa''}} V_{PP',(a,a')} \hat{A}_\sigma(P,a) \hat{A}_\sigma(P',a') \quad (58)$$

tenemos

$$[\hat{V}_\sigma]_{\nu\delta} = \sum_{(Pa)(P'a')} V_{PP',(a,a')} \langle \nu_P | \hat{A}_\sigma(P,a) | \delta_P \rangle \langle \nu_{P'} | \hat{A}_\sigma(P',a') | \delta_{P'} \rangle \delta_{P' \mu_P \delta_{P''}} \quad (59)$$

donde $\bar{P}^* \equiv \bar{P}$
 $\bar{P} \quad \bar{P} \neq P, P'$

Por lo tanto, la forma explícita hasta segundo orden está dada por:

$$T_1 = \sum_{i,a}^* - \frac{\langle \alpha | \hat{V}_\sigma | i \rangle^\circ}{\epsilon_a^\circ - \epsilon_i^\circ} |\alpha\rangle^\circ |\mu_i\rangle \quad (61)$$

con $\sum_{i,a}^* = \sum_{i,\mu \in \mathcal{H}_\sigma(|i\rangle)^\circ}$

Además:

$$\hat{S} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j,\alpha}^* \frac{\langle j | \hat{V}_\sigma | \alpha \rangle^\circ}{\epsilon_\alpha^\circ - \epsilon_j^\circ} \frac{\langle \alpha | \hat{V}_\sigma | i \rangle^\circ}{\epsilon_\alpha^\circ - \epsilon_i^\circ} |\mu_i\rangle \langle \mu_j| \quad (62)a$$

$$\text{Tr}[\hat{V}_\sigma T_\mu T_\sigma^\dagger] = - \sum_{i,j,\mu}^* \langle j | \hat{V}_\sigma | i \rangle^\circ \frac{\langle i | \hat{V}_\sigma | j \rangle^\circ}{\epsilon_i^\circ - \epsilon_j^\circ} | \mu_i \rangle \langle \mu_j | \quad (62)b$$

luego basta evaluar los elementos de matriz (55) y sustituir en (62) para obtener \hat{H}_μ hasta segundo orden.

b. Resultados

I. Modelo de Ising unidimensional en un campo transversal

El hamiltoniano del sistema está dado por

$$\hat{H}_\sigma = \frac{1}{2} \epsilon_0 \sum_j \hat{\sigma}_z(j) - \Delta_0 \sum_j \hat{\sigma}_x(j) \hat{\sigma}_x(j+1) \quad (1)$$

donde:

$\frac{1}{2} \epsilon_0$ = constante de acoplamiento con un campo magnético externo transversal.

Δ_0 = constante de acoplamiento entre primeros vecinos en la red.

Este sistema posee una transición de fase de segundo orden (16) entre el estado base no degenerado en el límite de acoplamiento fuerte ($\Delta_0/\epsilon_0 \rightarrow 0$) que describe un conjunto de espines no interactuando con función de onda.

$$|0\rangle = \prod_j \binom{0}{1}(j) \quad (2)a$$

y densidad de energía $\epsilon = -\epsilon_0/2$ (2)b

y el estado fundamental doblemente degenerado del límite opuesto de acoplamiento débil: $\epsilon_0/\Delta_0 \rightarrow 0$

$$|0\rangle = \begin{cases} \Pi|+\rangle_j(j) = \Pi \frac{1}{\sqrt{2}} \binom{1}{1}(j) \\ \Pi|-\rangle_j(j) = \Pi \frac{1}{\sqrt{2}} \binom{1}{-1}(j) \end{cases} \quad (3a)$$

la transición ocurre para $\epsilon_0 = 2\Delta_0$. El comportamiento del parámetro de orden, en este caso magnetización, está dado por:

$$\langle \sigma_x \rangle = (1 - (\epsilon_0/2\Delta_0)^2)^{1/8} H(1 - (\epsilon_0/2\Delta_0)) \quad (4)$$

donde H función escalón de Heaviside.

i) Siguiendo el esquema del capítulo anterior, formamos bloques de 2 sitios y diagonalizamos el hamiltoniano intra-celda exactamente:

$$\begin{array}{cccccccccccc} x & x & x & x & x & x & \begin{array}{c} \text{celda } p \\ \boxed{x \quad x} \\ a=0 \quad a=4 \end{array} & x & x & x & x & x \\ & & & & & & & & & & & j \end{array}$$

$$\hat{H} = \sum_P \hat{H}_O^o(P) + \sum_P \hat{V}_{PP+1} \quad (5)$$

donde:

$$\hat{H}_O^o(P) = \epsilon_2 \{ \hat{\sigma}_z(P,0) + \hat{\sigma}_z(P,1) \} - \Delta_0 \hat{\sigma}_x(P,0) \hat{\sigma}_x(P,1) \quad (6a)$$

$$\hat{V}_{PP+1} = -\Delta_0 \hat{\sigma}_x(P,1) \hat{\sigma}_x(P+1,0) \quad (6b)$$

Se ha reducido con un par de índices: $j \rightarrow (P, a)$

Los autoestados de $\hat{H}_0^a(P)$ están dados por:

$$|0\rangle_P = \frac{1}{\sqrt{1+a_0^2}} (|\downarrow\downarrow\rangle_P + a_0 |\uparrow\uparrow\rangle_P) \quad E_0^0 = -\sqrt{\Delta_0^2 + \epsilon_0^2}$$

$$|1\rangle_P = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle_P + |\downarrow\uparrow\rangle_P) \quad E_1^0 = -\Delta_0$$

(7) a, b, c, d

$$|2\rangle_P = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|\uparrow\downarrow\rangle_P + |\downarrow\uparrow\rangle_P) \quad E_2^0 = \Delta_0$$

$$|3\rangle_P = \frac{1}{\sqrt{1+a_0^2}} (|\uparrow\uparrow\rangle_P - a_0 |\downarrow\downarrow\rangle_P) \quad E_3^0 = \sqrt{\Delta_0^2 + \epsilon_0^2}$$

con

$$a_0 = \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \epsilon_0^2} - \epsilon_0}{\Delta_0} \equiv \sqrt{1+Y_0^2} - Y_0 \quad (8)$$

Con el par de reserva el estado base y el primer estado excitado, escogemos T_0 como:

$$T_0[\mu|\sigma] = \otimes_p T_0(p) = \prod_p [|0\rangle_p^0 \otimes |\downarrow\rangle_p + |1\rangle_p^0 |\uparrow\rangle_p] \quad (9)$$

Es fácil ver que:

$$T_{r\sigma} [T_o(P) T_o^+(P)] = \hat{H}_1(P) \quad (10)$$

y, además:

$$\hat{\sigma}_{\mu_x}(P, a) = f_p(a) \hat{\sigma}_{\mu_x}(P) \quad (11)$$

lo cual muestra que (9) es una buena solución para T_o .

ii) Orden cero

Debemos evaluar:

$$H_\mu^0 =: T_{r\sigma} (H_\sigma^0 T_o T_o^+) \quad (12)$$

Dada la separación de T_o según (9), H_μ^0 se separa en "sitios P":

$$\hat{H}_\mu^0 = \sum_P \hat{H}_\mu^0(P) \quad (13)$$

con:

$$H_r^0(P) = -\frac{1}{2} [\Delta_o + \sqrt{\Delta_o^2 + \epsilon_o^2}] \hat{H}_r(P) + \frac{1}{2} [\sqrt{\Delta_o^2 + \epsilon_o^2} - \Delta_o] \hat{\sigma}_{rx}(P) \quad (14)$$

lo cual mantiene la forma original definiendo:

$$\epsilon_1 = \sqrt{\Delta_o^2 + \epsilon_o^2} - \Delta_o \quad (15)$$

iii) Primer orden

Se tiene:
$$\hat{H}_\mu^{(1)} = T_{r\sigma} (\hat{V}_\sigma T_o T_o^+) \quad (16)$$

de donde:
$$H_{\mu}^{(1)} = -\Delta_0 \delta^2 \sum_P \hat{\sigma}_{\mu x}^{(P)} \hat{\sigma}_{\mu x}^{(P+1)} \quad (17)$$

con:
$$\delta = \frac{j + a_0}{\sqrt{2(1+a_0^2)}} \quad (18)$$

Hasta primer orden se tiene:

$$\hat{H}_{\mu} = \lambda \hat{H}_{\mu} + \frac{\epsilon_1}{2} \sum_P \hat{\sigma}_{\mu z}^{(P)} - \Delta_1 \sum_P \hat{\sigma}_{\mu x}^{(P)} \hat{\sigma}_{\mu x}^{(P+1)} \quad (19)$$

con:

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left\{ \Delta_0 + \sqrt{\epsilon_0^2 + \Delta_0^2} \right\} \quad (20a)$$

$$\Delta_1 = \Delta_0 \frac{(1+a_0^2)}{2(1+a_0^2)} \quad (20b)$$

$\hat{H}_{\mu}^{(1)}$ posee la misma forma que la original (1)

Tenemos entonces a primer orden que (15) y (20) definen la transformación de grupo de renormalización para este modelo. Iterando obtenemos:

$$\epsilon_{n+1} = \sqrt{\epsilon_n^2 + \Delta_n^2} - \Delta_n \quad (21a)$$

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n \frac{(1+a_n^2)}{2(1+a_n^2)} \quad (21b)$$

Ahora, buscamos punto fijo para $Y =: \epsilon/\Delta$

$$y_{n+1} = \frac{\epsilon_{n+1}}{\Delta_{n+1}} = \frac{4(\sqrt{1+y_n^2}-1)(1-y_n\sqrt{1+y_n^2}+y_n^2)}{(1+\sqrt{1+y_n^2}-y_n)^2} =: F(y_n) \quad (22)$$

Después de un poco de álgebra se reduce a encontrar solución de la ecuación cúbica:

$$3Y^3 - 8Y^2 + 4Y - 8 = 0 \quad (23)$$

la solución es:

$$Y_c = 2.5534 \dots \quad (24)$$

comparando con la solución exacta: $Y_c = 2$, obtenemos:

$$\% \text{ error} = 27.7\%$$

Este es el mismo resultado obtenido por un método standard a la Kadanoff (17).

Definimos: $R(Y) = F(Y) - Y$

Graficando R, obtenemos:

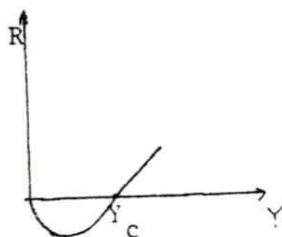


FIG.

Observamos que en la región $R(\gamma) < 0$, γ decrece en cada iteración, según la Figura $\gamma < \gamma_c$, lo cual conduce a un hamiltoniano efectivo que corresponde a acoplamiento débil. Por otra parte, si $\gamma > \gamma_c$, sucesivas iteraciones conducen a $\gamma = \infty$ dado que $R(\gamma) > 0$, este corresponde al límite de acoplamiento fuerte. Por lo tanto, sistemas descritos por el hamiltoniano (1) en las cuales $\gamma < \gamma_c$ son teorías con estado fundamental degenerado y rompimiento espontáneo de simetría.

Observamos además que $\gamma = 0, \infty$ también son puntos fijos para F (22); sin embargo, son puntos fijos estables que según la teoría general, no son físicamente de interés. Sólo el punto $\gamma_c = 2.55..$ representa un punto fijo de interés (inestable), donde la longitud de correlación del sistema diverge.

Calculamos a continuación el parámetro de orden:

$$\langle \hat{\sigma}_x(\epsilon_0/\Delta_0) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\Delta_N}{\Delta_0}} \hat{\sigma}_x \quad (27)$$

donde N es el número de iteraciones, se obtiene:

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle \approx [1 - (\gamma/\gamma_c)^2]^{0.39} \quad (28)$$

lo cual no es malo comparado con el resultado exacto:

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = [1 - (\gamma/2)^2]^{0.425} \quad (29)$$

iii) Segundo Orden

Debemos evaluar $H_{\mu}^{(2)} = \hat{H}_{\mu}^{(2)} + [S^{(2)}, H_{\mu}^0]$ (30)

donde:

$$\hat{H}_{\mu}^{(2)} = T_{r\sigma}(\hat{V}_{\sigma} T_1 T_0^+) \quad (31a)$$

$$\hat{S} = -\frac{1}{2} T_r(T_1 T_1^+) \quad (31b)$$

Tenemos:

$$\hat{S} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j,\alpha}^* \frac{\langle j | \hat{V}_{\sigma} | \alpha \rangle^0}{\epsilon_{\alpha}^0 - \epsilon_j^0} \frac{\langle \alpha | \hat{V}_{\sigma} | i \rangle^0}{\epsilon_{\alpha}^0 - \epsilon_i^0} | \mu_i \rangle \langle \mu_j | \quad (32)$$

dado que:

$$\hat{V}_{\sigma} = -\Delta_0 \sum_P \hat{V}_{P,P+1} \quad \text{se tiene:}$$

$$\langle \alpha | \hat{V}_{\sigma} | i \rangle^0 = -\Delta_0 \sum_{P,P+1} \langle \alpha_P | \sum_{P+1} \alpha_{P+1} | \hat{V}_{P,P+1} | i_{P+1} \rangle_{P+1}^0 | i_P \rangle_P^0 \left(\prod_{\bar{P}}^* \sum_{i_{\bar{P}}^{\alpha_{\bar{P}}}} \sum_{i_{\bar{P}+1}^{\alpha_{\bar{P}+1}}} \right) \quad (33)$$

Usando el mismo argumento con el elemento de matriz $\langle j | \hat{V}_{\sigma} | \alpha \rangle^0, | j \rangle^0$ y $| \alpha \rangle^0$ pueden diferir en a lo más dos celdas consecutivas ($\tilde{P}, \tilde{P}+1$), pero ambas no pueden ser diferentes de ($P, P+1$). Por tanto existen 3 posibilidades:

$$\hat{S} = \hat{S}_I + \hat{S}_{II} + \hat{S}_{III} \quad (34)$$

Donde:

$$S_I^{(2)} = \frac{-\Delta^2}{2} \sum_P \left\{ \sum_{\substack{j_{p-1}, j_p \\ i_{p-1}, \alpha_p \\ j_{p+1}, i_p, i_{p+1}}} \frac{{}^\circ\langle j_{p-1} | {}^\circ\langle j_p | \hat{V}_{p-1,p} | i_{p-1} \rangle_{p-1} | \alpha_p \rangle_p}{\epsilon_{\alpha_p}^\circ + \epsilon_{i_{p-1}}^\circ - \epsilon_{j_p}^\circ - \epsilon_{j_p}^\circ - \epsilon_{j_{p-1}}^\circ} \right.$$

$$\left. \frac{{}^\circ\langle \alpha_p | {}^\circ\langle j_{p+1} | \hat{V}_{p,p+1} | i_p \rangle_p | i_{p+1} \rangle_{p+1}}{\epsilon_{\alpha_p}^\circ + \epsilon_{j_{p+1}}^\circ - \epsilon_{i_p}^\circ - \epsilon_{i_{p+1}}^\circ} \times |\mu_{i_{p-1}} \rangle | \mu_{i_p} \rangle | \mu_{i_{p+1}} \rangle \langle \mu_{j_{p+1}} | \langle \mu_{i_p} | \langle \mu_{j_{p-1}} | \right.$$

$$S_{II}^{(2)} = \sum_{\substack{j_p, j_{p+1}, \alpha_p \\ i_p, i_{p+1}, \alpha_{p+1}}} \frac{{}^\circ\langle j_p | {}^\circ\langle j_{p+1} | \hat{V}_{p,p+1} | \alpha_p \rangle_p | \alpha_{p+1} \rangle_{p+1}}{\epsilon_{\alpha_p}^\circ + \epsilon_{\alpha_{p+1}}^\circ - \epsilon_{j_p}^\circ - \epsilon_{j_{p+1}}^\circ} \times \frac{{}^\circ\langle \alpha_p | {}^\circ\langle \alpha_{p+1} | \hat{V}_{p,p+1} | i_p \rangle_p | i_{p+1} \rangle_{p+1}}{\epsilon_{\alpha_p}^\circ + \epsilon_{\alpha_{p+1}}^\circ - \epsilon_{i_p}^\circ - \epsilon_{i_{p+1}}^\circ}$$

$$|\mu_{i_p} \rangle | \mu_{i_{p+1}} \rangle \langle \mu_{j_p} | \langle \mu_{j_{p+1}} |$$

(35) a, b, c

Evaluamos T_1

$$T_1 = - \sum_{i, \alpha} \frac{{}^\circ\langle \alpha | V_\sigma | i \rangle^\circ}{\epsilon_\alpha^\circ - \epsilon_i^\circ} | \alpha \rangle^\circ | \mu_i \rangle \quad (36)$$

$$= \sum_p \left\{ \left(-\frac{\delta\beta}{2} \frac{C}{E} |1\rangle_p |2\rangle_{p+1} + \frac{\delta\beta}{2} \frac{C}{E} |2\rangle_p |1\rangle_{p+1} - \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{1+E\Gamma c} |2\rangle_p |2\rangle_{p+1} \right)^\dagger_p^\dagger_{p+1} \right.$$

$$+ \left(\frac{\delta\beta}{2} \frac{C}{E} |1\rangle_p |3\rangle_{p+1} + \frac{\delta\beta}{2} |2\rangle_p |0\rangle_{p+1} + \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{1+E\Gamma c} |2\rangle_p |3\rangle_{p+1} \right)^\dagger_p^\dagger_{p+1}$$

$$+ \left(-\frac{\delta\beta}{2} |0\rangle_p |2\rangle_{p+1} + \frac{\delta\beta}{2} \frac{C}{E} |3\rangle_p |1\rangle_{p+1} - \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{1+E\Gamma c} |3\rangle_p |2\rangle_{p+1} \right)^\dagger_p^\dagger_{p+1}$$

$$+ \left(\frac{\delta\beta}{2} |0\rangle_p |3\rangle_{p+1} + \frac{\delta\beta}{2} |3\rangle_p |0\rangle_{p+1} + \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{1+E\Gamma c} |3\rangle_p |3\rangle_{p+1} \right)^\dagger_p^\dagger_{p+1} \quad (37)$$

donde:

$$E = -\frac{1}{\Delta_0} \quad C = -\frac{1}{\sqrt{\Delta_0^2 + \epsilon_0^2}} \quad \delta = \frac{1 + a_0}{\sqrt{2(1+a_0^2)}} \quad \beta = \frac{-1 + a_0}{\sqrt{2(1+a_0^2)}} \quad (32)$$

A continuación se obtiene \hat{S} y de allí (Apéndice 1)

$$[\hat{S}, \hat{H}_r] = \sum_p \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{E} \right) \frac{\hat{\sigma}_z(p)}{\beta} i \{ (\lambda_-^2 - \lambda_+^2) [\hat{\sigma}_x(p-1) \hat{\sigma}_y(p+1) + \hat{\sigma}_y(p-1) \hat{\sigma}_x(p+1)] \} \quad (39)$$

$$\text{Donde } \lambda_{\pm} = \frac{\delta\beta}{2} \frac{C}{E} (-1 \pm \frac{E}{C}) \quad (40)$$

Ahora calculamos $\hat{H}_\mu^{(2)} = T_r [V_C T_1 T_0^+]$ se obtiene: (Apéndice 2)

$$\begin{aligned} \hat{H}_r^{(2)} = & -\Delta_0 \sum_p \frac{\delta\beta}{2} \hat{\sigma}_z(p) \{ 2\lambda_+ \hat{\sigma}_x(p-1) \hat{\sigma}_x(p+1) + i\lambda_- [\hat{\sigma}_x(p-1) \hat{\sigma}_y(p+1) + (x \leftrightarrow y)] \} \\ & - \Delta_0 \sum_p \{ \delta\beta\lambda_- \hat{\sigma}_z(p) + \delta\beta\lambda_+ \hat{\mu}_p - \beta^2 a_3 \hat{\mu}(p) \hat{\mu}(p+1) \} \end{aligned} \quad (41)$$

Finalmente, al excluir los operadores irrelevantes se obtiene:

$$\hat{H}_\mu^{(2)} = \frac{1}{2} \epsilon_1 \sum_p \hat{\sigma}_z(p) = \Delta_1 \sum_p \hat{\sigma}_x(p-1) \hat{\sigma}_x(p) \quad (42)$$

Comparando con (4) definimos la transformación del grupo de renormalización:

$$\epsilon_1^{(1)} = \frac{\nu}{2} \frac{(\delta\beta)^2}{E} \left[\frac{C}{E} - 1 \right] \quad (43)a,b$$

$$\Delta_1^{(2)} = \Delta_0 (\delta^2 \nu \lambda_+)$$

De donde se obtiene la relación de recurrencia:

$$y_{n+1} = \frac{\epsilon_{n+1}}{A_{n+1}} = \frac{(\sqrt{1+y_n^2}-1) + (\delta_n \beta_n)^2 [-1 + (1+y_n^2)^{-1/2}] y_n / 2}{\delta_n^2 + (\delta_n \beta_n)^2 [1 + (1+y_n^2)^{-1/2}] \delta_n^2 y_n / 2} =: F(y_n) \quad (44)$$

donde:

$$\delta_n = \frac{1+a_n}{\sqrt{2(1+a_n^2)}} \quad \beta_n = \frac{1-a_n}{\sqrt{2(1+a_n^2)}} \quad a_n = \sqrt{1+y_n^2} - y_n \quad y_n = -2(\delta_n \beta_n) \quad (45)$$

la relación de recurrencia (44) posee un punto fijo inestable en:

$$y_c = 1.946 \quad (46)$$

lo cual representa un 26% de error respecto del resultado exacto.

11. Ising 2 dimensiones

Usando la identificación a una dirección de la red como eje temporal de acuerdo con el esquema de E. Fradkin, L. Susskind (18), el modelo de Ising en este límite resulta formalmente equivalente a un sistema mecánico-cuántico con un hamiltoniano bien definido. Este método se ilustra usando el formalismo de la matriz transferencia (1).

El hamiltoniano del sistema está dado por:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{r}} \left\{ \frac{1}{2} \beta_t [\hat{\sigma}_3(\vec{r}) - \hat{\sigma}_3(\vec{r} + \hat{n}_t)]^2 - \beta_z \hat{\sigma}_3(\vec{r}) \hat{\sigma}_3(\vec{r} + \hat{n}_z) \right\} \quad (1)$$

definido en una red cuadrada:

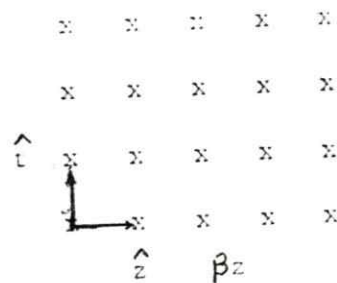


FIG. 1

Es sabido que este modelo tiene una transición de fase ⁽⁴⁾. En el espacio de parámetros (β_t, β_z) hay una curva crítica, la cual separa la fase ordenada (ferromagnética) de la desordenada (paramagnética). Esta curva está dada por:

$$\sinh(2\beta_z) \sinh(2\beta_t) = 1 \quad (2)$$

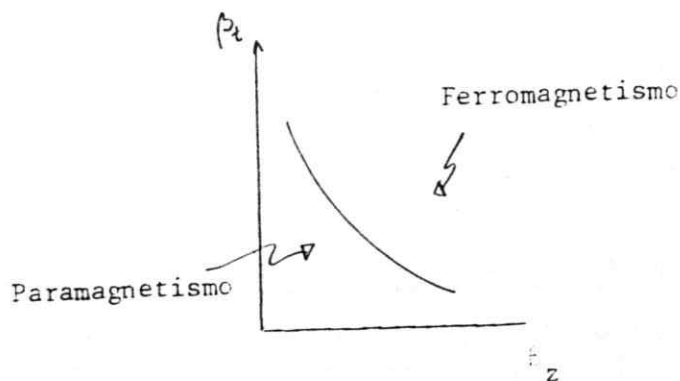


FIG. 2

Usando el método de la matriz transferencia para tomar el límite tiempo continuo, se escribe el lagrangiano para un par de filas

$$\hat{L} = \frac{\beta_t}{2} \sum_n [\hat{S}_3(n) - \hat{O}_3(n)]^2 - \frac{\beta_z}{2} \sum_n [\hat{S}_3(n) \hat{S}_3(n+1) + \hat{O}_3(n) \hat{O}_3(n+1)] \quad (3)$$

donde S y O repre $\begin{matrix} \times & \times & \times & \times & \times & \sigma(n) \\ \times & \times & \times & \times & \times & S(n) \end{matrix}$ sentan el spin en las filas.

FIG. 3

La matriz transferencia es de dimensión $2^N \times 2^N$.

La diagonal está dada por $S_3(n) = \sigma_3(n) \quad \forall n$, luego

$$T_{\text{diag}} = \exp\left\{\beta_z \sum_n \sigma_3(n) \sigma_3(n+1)\right\} \quad (4)$$

los términos fuera de la diagonal se clasifican según el número de sitios en los cuales $S_3(n) = -\sigma_3(n)$.

Por ejemplo, para 1 sitio

$$T_1 = \exp(-2\beta_t) \exp\{-E(\sigma, S)\beta_z\} \quad (5)$$

donde $E(\sigma, S)$ es la suma de energía de las 2 filas independientes.

Para n sitios:

$$T_n = \exp\{-2n\beta_t\} \exp\{-E(\sigma, S)\beta_z\} \quad (6)$$

Ahora tomamos el límite al continuo:

$$\beta_1 \rightarrow \infty \quad \beta_2 \rightarrow \lambda e^{-2\beta t} \quad (7)$$

Se obtiene de (5) y (6):

$$\begin{aligned} T_{diag} &\rightarrow 1 + \lambda e^{-2\beta t} \sum_n \hat{\sigma}_3(n) \hat{\sigma}_3(n+1) \\ T_1 &\rightarrow e^{-2\beta t} + O(e^{-4\beta t}) \\ &\vdots \\ T_n &\rightarrow e^{-2n\beta t} + O(e^{-2(n+1)\beta t}) \end{aligned} \quad (8)$$

Identificamos ahora T con el operador infinitesimal de evolución temporal:

$$T = e^{-\tau H} \approx 1 - \tau H + O(\tau^2) \quad (9)$$

Identificando $\tau = e^{-2\beta t}$ (10)

(*) el espaciado infinitesimal en la dirección temporal se obtiene:

$$T = 1 + \tau \left[\lambda \sum_n \hat{\sigma}_3(n) \hat{\sigma}_3(n+1) + \sum_n \sigma_1(n) \right] + O(\tau^2) \quad (11)$$

de donde el sistema cuántico está descrito por el hamiltoniano:

$$\hat{H} = - \sum_n \hat{\sigma}_3(n) \hat{\sigma}_3(n+1) - \sum_n \hat{\sigma}_1(n) \quad (12)$$

*La conexión entre el espaciamiento τ y $e^{-2\beta t}$ entrega una estimación cualitativa de la cantidad de reescalamientos en t que son necesarios para compensar la anisotropía cuando β_z crece.

En el espacio (β_t, β_z) existe un conjunto de curvas caracterizadas por tener igual longitud de correlación. En particular la curva crítica ($\xi = \infty$). El parámetro λ puede ser usado para rotular esas curvas. Entonces, se puede relacionar cualquier punto en la línea simétrica $\beta_t = \beta_z$ con la teoría que se obtiene al tomar este límite tiempo continuo.

El comportamiento asintótico es invariante a lo largo de una línea para λ fijo. Los puntos de la línea simétrica corresponden a diferentes temperaturas de la red clásica de Ising, por lo tanto se puede relacionar cada temperatura del modelo isotrópico con un único modelo cuántico con valor λ definido.

Generalmente valores grandes de λ corresponden a valores pequeños de β y viceversa.

Por lo tanto, podemos usar el resultado §3. (4a) obtenido para el sistema cuántico que corresponde al límite tiempo continuo del modelo de Ising 2-dimensional definido en una red cuadrada.

Usando la ecuación (2) en el límite (7) y luego evaluando en el punto crítico:

$$\beta_t = \sinh^{-1}(\sqrt{\lambda_c}) = 0.43 \quad (13)$$

que representa un 2.2% de error respecto al valor exacto.

También se puede calcular β_c a partir de la condición $\beta_t = \beta_z$ en

el límite (7), de donde:

$$\lambda_c = \beta_c e^{2\beta_c} \quad (14)$$

se obtiene

$$\beta_c = 0.42 \text{ que representa un } 4.7\% \text{ de error.}$$

APENDICE 1.

Cálculo de $[\hat{S}, \hat{H}^c]$

Reescribimos (37) en forma compacta:

$$T_n = - \sum_p \left(\sum_j \hat{a}_j(p) T_L^j(p) T_R^j(p+1) \frac{\pi}{\bar{p}}^* T_0(\bar{p}) \right) \quad (1)$$

donde como siempre $\frac{\pi}{\bar{p}}^* \equiv \pi$ (2)
 $\bar{p} \quad \bar{p} \neq p, p+1$

y $\hat{a}_j(p)$ es un escalar en el espacio de Hilbert \mathcal{H}_σ

Luego:

$$\hat{S} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sum_{p, i, j} \hat{a}_i(p) T_L^i(p) T_R^i(p+1) \frac{\pi}{\bar{p}}^* T_0(\bar{p}) a_j(p) T_L^{j+}(p) T_R^{j+}(p+1) \frac{\pi}{\bar{p}}^* T_0^+(p) \right] \quad (3)$$

$$=: \hat{J}_I + \hat{J}_{II} + \hat{J}_{III} \quad (4)$$

Nuevamente $(p, p+1)$ debe coincidir en al menos un lugar con $p, p+1$

Usemos la notación:

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle_p |\uparrow\rangle_{p+1} &=: \uparrow & |\uparrow\rangle_p |\downarrow\rangle_{p+1} &=: \downarrow \\ |\downarrow\rangle_p |\uparrow\rangle_{p+1} &=: \uparrow & |\downarrow\rangle_p |\downarrow\rangle_{p+1} &=: \downarrow \end{aligned} \quad (5)$$

i) Evaluamos \hat{J}_I :

$$\hat{J}_I = -\frac{1}{2} \sum_{p, i, j} \hat{a}_i \hat{a}_j \text{Tr} [T_0(p-1) T_L^{j+}(p-1)] \times \text{Tr} [T_L^i(p) T_R^j(p)] \times \text{Tr} [T_R^i(p+1) T_0^+(p+1)] \quad (6)$$

con $j=1,4,7,10$ $i = 2,5,8,11$ el resto se anula.

Se tiene:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Tr}[T_0 T_L^{1*}] = \mathcal{N} & \text{Tr}[T_R^2 T_0^+] = \mathcal{V} \\
 \text{Tr}[T_0 T_L^{4*}] = \mathcal{N} & \text{Tr}[T_R^5 T_0^+] = \mathcal{N} \\
 \text{Tr}[T_0 T_L^{7*}] = \mathcal{V} & \text{Tr}[T_R^8 T_0^+] = \mathcal{V} \\
 \text{Tr}[T_0 T_L^{10*}] = \mathcal{V} & \text{Tr}[T_R^{11} T_0^+] = \mathcal{N} \\
 \text{Tr}[T_L^2 T_R^{1*}] = \downarrow & \text{Tr}[T_L^2 T_R^{7*}] = \downarrow \\
 \text{Tr}[T_L^5 T_R^{4*}] = \downarrow & \text{Tr}[T_L^5 T_R^{8*}] = \downarrow \\
 \text{Tr}[T_L^8 T_R^{7*}] = \uparrow & \text{Tr}[T_L^8 T_R^{10*}] = \uparrow \\
 \text{Tr}[T_L^{11} T_R^{10*}] = \uparrow & \text{Tr}[T_L^{11} T_R^{11*}] = \uparrow
 \end{array} \quad (7)$$

Sumando se obtiene:

$$\hat{J}_I = -\frac{1}{2} \sum_p \left\{ \hat{G}_2(p) [(a_2+a_5) \hat{G}_x(p-1) + i(a_2-a_5) \hat{G}_y(p-1)] [(a_2+a_5) \hat{G}_x(p+1) + i(a_5-a_2) \hat{G}_y(p+1)] \right\} \quad (8)$$

ii) Evaluamos J_{III}

$$\hat{J}_{III} = -\frac{1}{2} \sum_{P_{ij}} \hat{a}_i \hat{a}_j \text{Tr}[T_L^i(P) T_0^+(P)] \times \text{Tr}[T_R^j(P+1) T_L^{j*}(P+1)] \times \text{Tr}[T_0^+(P+2) T_R^{j*}(P+2)] \quad (9)$$

$$i = 1, 4, 7, 10 \quad j = 2, 5, 8, 11$$

Se tiene:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Tr} [T_L^4 T_0^+] = \checkmark & \text{Tr} [T_0 T_k^2] = \checkmark \\
 \text{Tr} [T_L^4 T_0^+] = \checkmark & \text{Tr} [T_0 T_k^{5^+}] = \checkmark \\
 \text{Tr} [T_L^3 T_0^+] = \checkmark & \text{Tr} [T_0 T_k^{6^+}] = \checkmark \\
 \text{Tr} [T_L^{10} T_0^+] = \checkmark & \text{Tr} [T_0 T_k^{11^+}] = \checkmark \\
 \text{Tr} [T_k^1 T_L^2] = \downarrow & \text{Tr} [T_k^1 T_L^{5^+}] = \downarrow \\
 \text{Tr} [T_k^4 T_L^6] = \uparrow & \text{Tr} [T_k^4 T_L^{11^+}] = \uparrow \\
 \text{Tr} [T_k^3 T_L^7] = \downarrow & \text{Tr} [T_k^3 T_L^{5^+}] = \downarrow \\
 \text{Tr} [T_k^{10} T_L^8] = \uparrow & \text{Tr} [T_k^{10} T_L^{11^+}] = \uparrow
 \end{array}$$

(10)

Sumando:

$$\hat{J}_{III} = -\frac{1}{8} \sum_p \left\{ \hat{G}_z(p) [(a_L + a_S) \hat{G}_z(p+1) + i(a_L - a_S) \hat{G}_y(p+1)] [(a_L + a_S) \hat{G}_z(p-1) + i(a_L - a_S) \hat{G}_y(p-1)] \right\} \quad (11)$$

Luego:

$$\hat{J}_I + \hat{J}_{III} = \sum_p -\frac{1}{4} \hat{G}_z(p) [\lambda^2 \hat{G}_z(p-1) \hat{G}_z(p+1) + \lambda^2 \hat{G}_y(p-1) \hat{G}_y(p+1)] \quad (12)$$

Análogamente:

$$\hat{J}_{II} \sim \alpha \sum_p \hat{U}(p) \hat{U}(p+1) + \beta \sum_p \hat{G}_z(p) + \gamma \sum_p \hat{G}_z(p) \hat{G}_z(p+1) \quad (13)$$

y dado que

$$\hat{H}_\mu^0 = -\frac{1}{2} [\Delta_0 + \sqrt{\Delta_0^2 + \epsilon_0^2}] \sum_p \hat{U}(p) + \frac{1}{2} [\sqrt{\Delta_0^2 + \epsilon_0^2} - \Delta_0] \sum_p \hat{G}_{\mu z}(p) \quad (14)$$

 \hat{J}_{II} no contribuye, ya que $[\hat{H}_\mu^0, \hat{J}_{II}] = 0$

Además, dado que si

$$\begin{aligned}
 STU &= : [\hat{S}(p-1) \hat{T}(p) \hat{U}(p+1), \sum_p \hat{G}_2(p)] \\
 &= [\hat{S}(p-1), \hat{G}_2(p-1)] \hat{T}(p) \hat{U}(p+1) + [\hat{T}(p), \hat{G}_2(p)] \hat{S}(p-1) \hat{U}(p+1) \\
 &\quad + [\hat{U}(p+1), \hat{G}_2(p+1)] \hat{S}(p-1) \hat{T}(p)
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Usando la relación de conmutación:

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i \epsilon_{jkl} \sigma_l
 \tag{17}$$

Se obtiene:

$$[\hat{S}, \hat{H}_\mu^0] = \sum_p \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{E} \right) \frac{\hat{G}_2^{(p)}}{p} i \{ (\lambda_-^2 - \lambda_+^2) [\hat{G}_x(p-1) \hat{G}_y(p+1) + (x \leftrightarrow y)] \}
 \tag{18}$$

$$\text{con } \lambda_{\pm} = \frac{8\beta}{2} \frac{E}{c} \quad (-1 = E/c)
 \tag{19}$$

y por tanto resultan ser operadores irrelevantes que no contribuyen a $H_L^{(2)}$.

APENDICE 2.

Cálculo de $\hat{H}_M^{(2)}$

Tenemos

$$\hat{H}_L^{(2)} = \text{Tr} [\hat{V}_\sigma T_A T_O^+] = -\Delta \sum_P (\hat{H}_I + \hat{H}_{II} + \hat{H}_{III}) \quad (1)$$

ii) Evaluamos H_I

$$H_I = \sum_{i,p} \hat{G}_i \text{Tr} [T_L^i(p-1) T_O^+(p-1)] \times \text{Tr} [\hat{V}_L(p) T_R^i(p) T_O^+(p)] \times \text{Tr} [\hat{V}_R(p+1) T_O(p+1) T_O^+(p+1)] \quad (2)$$

Se tiene:

$$\text{Tr} [T_L^i T_O^+] = \begin{cases} \uparrow & i=1,4 \\ \downarrow & i=7,10 \end{cases}$$

$$\text{Tr} [\hat{V}_R T_O T_O^+] = S \hat{G}_x$$

$$\text{Tr} [V_L T_R^i T_O^+] = \begin{cases} \beta \downarrow & i=1,7 \\ \beta \uparrow & i=4,10 \end{cases} \quad (3)$$

Sumando:

$$H_I = \sum_P \frac{S\beta}{2} \hat{G}_z(p) \hat{G}_x(p+1) [\lambda + \hat{G}_x(p-1) + i\lambda - \hat{G}_y(p-1)] \quad (4)$$

ii) H_{III}

$$H_{III} = \sum_{p,i} \hat{G}_i \text{Tr} [\hat{V}_L(p) T_O(p) T_O^+(p)] \times \text{Tr} [\hat{V}_R(p+1) T_L^i(p+1) T_O^+(p+1)] \times \text{Tr} [T_R^i(p+2) T_O^+(p+2)] \quad (5)$$

$$i = 2, 5, 8, 11$$

$$\text{Tr}[T_k^i T_0^+] = \begin{cases} \uparrow & i=2,8 \\ \downarrow & i=5,11 \end{cases}$$

$$\text{Tr}[\hat{V}_L T_0 T_0^+] = S \hat{\sigma}_x$$

$$\text{Tr}[\hat{V}_R^{(p+1)} T_L^{(p+1)} T_0^{(p+1)}] = \begin{cases} -\beta \downarrow & i=2,5 \\ \beta \uparrow & i=8,11 \end{cases}$$

(6)

Agrupando:

$$\hat{H}_{III} = \sum_p \frac{S\beta}{2} \hat{\sigma}_z^{(p+1)} \hat{\sigma}_z^{(p)} [\lambda_+ \hat{\sigma}_x^{(p+2)} - \lambda_- \hat{\sigma}_y^{(p+2)}] \quad (7)$$

Luego:

$$\hat{H}_I + \hat{H}_{III} = \sum_p \frac{S\beta}{2} \hat{\sigma}_z^{(p)} \{ 2\lambda_+ \hat{\sigma}_x^{(p-1)} \hat{\sigma}_x^{(p+1)} + 2\lambda_- [\hat{\sigma}_x^{(p-1)} \hat{\sigma}_y^{(p+1)} + (x \leftrightarrow y)] \} \quad (8)$$

iii) Evaluamos H_{II}

$$\hat{H}_{II} = \sum_{p,i} \hat{\alpha}_i \text{Tr}[\hat{V}_L^{(p)} T_L^{(p)} T_0^+(p)] + \text{Tr}[\hat{V}_R^{(p+1)} T_R^{(p+1)} T_0^+(p+1)] \quad (9)$$

Se tiene:

$$\text{Tr}[V_L T_L^i T_0^+] = \begin{cases} S \downarrow & i=1,4 \\ S \uparrow & i=7,10 \\ \beta \downarrow & i=2,3,5,6 \\ \beta \uparrow & i=8,9,11,12 \end{cases} \quad \text{Tr}[\hat{V}_R T_R^i T_0^+] = \begin{cases} S \uparrow & i=5,11 \\ S \downarrow & i=2,8 \\ -\beta \downarrow & i=1,3,7,9 \\ \beta \uparrow & i=4,6,10,12 \end{cases} \quad (10)$$

De donde:

$$\hat{H}_{II} = \sum_p \left\{ -a_3 \beta^2 \hat{\mathbb{I}}(p) \hat{\mathbb{I}}(p+1) + \delta \beta \lambda_4 \hat{\mathbb{I}}(p) + \delta \beta \lambda_2 \hat{\sigma}_2(p) \right\} \quad (11)$$

De (8) y (11) se obtiene (41).

4. CONCLUSION Y COMENTARIOS

Existen muchas formas diferentes de estudiar comportamiento crítico de un sistema basándose en técnicas del grupo de renormalización. Sin embargo, dos objeciones plantean los autores Hirsh y Mazenko (15), ya que no existe una prescripción sistemática de cómo construir las ecuaciones del grupo de renormalización y, segundo cómo mejorar los resultados obtenidos por algunos de estos esquemas. En este trabajo se presenta una respuesta alternativa a estas objeciones, esto se hace a través de teoría de perturbaciones que permite intuir físicamente qué está ocurriendo y en forma más precisa, qué grados de libertad son relevantes cerca de la región crítica, expresiones algebraicas que no se obtienen por métodos como Monte-Carlo de simulación numérica.

La ventaja respecto de trabajos anteriores, es que la convergencia parece ser muy rápida, obteniendo a 2° orden sólo un 2.27% de error en el Ising transversal unidimensional para el parámetro de orden $\gamma = \epsilon_0 / L_0$ y Kankielowicz (17) con un 27,7% de error o el cálculo perturbativo de H&M en (15), con un 9% de error.

Otro punto importante es que este método permite el estudio aproximado de la superficie crítica, ya que de la expansión perturbativa se obtienen los operadores irrelevantes que la caracterizan.

Finalmente, a partir del hecho bien establecido (16) que el comportamiento crítico de un modelo Ising transversal a temperatura cero en dimensión d es igual al comportamiento crítico del modelo Ising a

temperatura no nula en dimensión $(d+1)$, permite estudiar el Ising 2 y 3 dimensional a partir de modelos más simples.

El resultado para el punto crítico del Ising 2-dimensional en red cuadrada a través del Ising-transversal en dimensión uno da un error del 4,7% respecto de la solución exacta de Onsager.

Todo esto muestra que es correcta la teoría de perturbaciones que se está haciendo y motiva para hacer otros cálculos como los que se menciona, es decir, punto crítico para el sistema tridimensional o el estudio detallado de la superficie crítica.

5. BIBLIOGRAFIA

- (1) R. Clausius, "Über die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze.
Ostwald's Klassiker Nr. 99.
- (2) J.W. Gibbs, Graphical Methods in the Thermodynamics of Fluids.
Transactions of the Connecticut Academy II (1973) 309-342 Coll
Works I 1-32.
- (3) A. Method of Geometrical Representation of the Thermodynamic
Properties of substances by means of Surfaces.
Transactions of the Connecticut Academy II (1973) Coll. Works
33-54.
- (4) J.C. Maxwell. Theory of Heat. D. Appleton N.Y. (1975).
- (5) T.D. Lee and C.N. Yang. Phys. Rev. 87, 3 (1952)
Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions.
- (6) Bombi-Hu. Phys. Report, 91, 5 (1982).
- (7) R.B. Griffiths. J. of Chemical Phys. 43, 6 (1965).

- (8) Stanley. Phase Transitions and Critical Phenomena, Oxford 1971, pag. 10.
- (9) L.P. Kadanoff. Phys. Rev. Letters 23 (1969), 1430.
- (10) Shang-Keng Ma. Modern Theory of Critical Phenomena. Benjamin 1976.
- (11) M.P. Nightingale and A.H.'t Hooft, Physica 77 (1974) 390.
- (12) T. Niemeijer and J.M.J. Van Leeuwen, Physica (Utrech) 71, 17 (1974).
- (13) M.P. Nightingale. Physica 83A (1976) 561-572.
- (14) K.G.Wilson and J. Kogut. Phys. Report 12, 2 (1974)
- (15) J.E. Hirsh and G.F. Mazenko. Phys. Rev. B. 19, 5 (1979).
- (16) S. Bhattacharya and P. Ray. Phys. Lett. 101 A, 7 (84)
- (17) S.D. Drell, M. Weinstein and S. Yonkielowicz. Phys. Rev. D. 16,6 (77)
- (18) E. Fradkin and L. Susskind. Phys. Rev. D. 17, 10 (1978)