



Localización en sistemas lineales: Estudio en las redes tipo Sawtooth, Lieb y variaciones

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias Físicas
Facultad de Ciencias

por

Luis Esteban Alejandro Morales Inostroza

Marzo, 2016

Director de Tesis: **Dr. Rodrigo A. Vicencio Poblete**

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Luis Esteban Alejandro Morales Inostroza

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Físicas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 11 de Marzo de 2016.

Director de Tesis

Dr. Rodrigo Vicencio Poblete

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Felipe Barra

Dr. Edward Arevalo



AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mis padres, hermanos y familiares quienes siempre han sido un apoyo incondicional y constante a lo largo de mi carrera y a todos los que tuvieron que ver con que esta tesis llegara a buen termino, especialmente al Grupo de Óptica de la Universidad de Chile, por que allí encontré además de un grupo de trabajo, un ambiente en el que me sentí realmente muy cómodo. Particularmente agradecer al profesor Rodrigo Vicencio por el apoyo que sentí de su parte.

Mi permanencia en el plan de Magister en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile fue posible gracias al financiamiento otorgado por el programa iniciativa científica milenio ICM Grant No. RC-130001, el programa de Financiamiento Basal de CONICYT Grant No. FB0824 y la beca de pedagogía otorgada por el Departamento de Física de la Facultad de Ciencias de la universidad de Chile.

Índice

1. Introducción	1
2. Ecuación lineal tipo Schrödinger	6
2.1. Difracción en un medio unidimensional homogéneo	10
2.2. Difracción en un medio unidimensional periódico	13
3. Ecuación lineal discreta tipo Schrödinger	16
4. Potenciales periódicos y teoría de Floquet-Bloch	25
4.1. Método de expansión en ondas planas	28
5. Arreglos de guías periódicos: Modelo discreto	35
5.1. Red unidimensional ordenada	36
5.2. Red 2D rectangular ordenada	41
5.3. Método del dibujo	44
6. Arreglo de guías con geometría Sawtooth	47
6.1. Excitación experimental de arreglos Sawtooth con luz roja de 637nm: Condición inicial localizada	57
6.2. Simulación del modelo continuo en arreglos de guías Sawtooth con luz roja de 637nm: Condición inicial localizada	62

	v
7. Arreglo de guías con geometría Lieb	67
7.1. Experimentos con luz verde, $\lambda = 532\text{nm}$	75
8. Condiciones para crear arreglos con bandas planas	81
8.1. Red Sawtooth	84
8.2. Red Lieb	85
8.3. Acoplamientos a segundos vecinos	86
8.4. Anisotropía en la red	87
8.5. Desorden en la energía de sitio	89
8.6. Acoplamientos negativos	90
8.7. Sistemas con múltiples bandas planas	90
8.7.1. Combinación de estados de diferentes bandas planas	92
8.8. Ejemplo en el modelo continuo	93
9. Conclusiones	96

RESUMEN

En esta tesis se estudia, teórica y experimentalmente, las condiciones para localizar luz utilizando el concepto de bandas planas en sistemas de arreglos de guías de ondas ópticas completamente periódicos, los que pueden ser descritos con la teoría acoplada de modos o modelo "tight-binding" óptico. Particularmente, se estudian las condiciones en que geometrías del tipo Sawtooth y Lieb exhiben una banda plana en su espectro lineal, al considerar sólo interacción a primeros vecinos. En este contexto discreto, se establecieron las condiciones para poder crear sistemas que posean tantas bandas planas como se requiera, estudiándose también qué tan robustas son estas redes frente a modificaciones en su homogeneidad o en su periodicidad. Además, se explora vía simulaciones numéricas en el modelo continuo, la factibilidad de la propagación experimental de luz en uno de los arreglos propuestos.

ABSTRACT

In this thesis we study, theoretically and experimentally, the localization of light using the concept of flat bands in fully periodic optical waveguide arrays, that can be described in the coupled mode theory or optical tight-binding model. We studied particularly the conditions in which Sawtooth and Lieb geometries show a flat band in their linear spectrum, when just nearest neighbor interactions are considered. In this discrete context, we established the conditions to create flat bands systems with as many flat bands as required, and we studied the robustness of these lattices when modifications in the homogeneity or in the periodicity of the lattices is considered. Additionally, we explore by numerical simulations, in the continuous model, the factibility of experimental propagation of light in one of these lattices.

Capítulo 1

Introducción

El concepto de estructura de bandas tiene su origen en física del estado sólido. En 1928, Felix Bloch desarrolló una teoría para explicar la conducción eléctrica en sólidos cristalinos [1]. Previamente, la misma teoría había sido desarrollada en un contexto puramente matemático por George William Hill (1877), Gaston Floquet (1883), y Alexander Lyapunov (1892). Bloch, explicó que un electrón sometido a un potencial periódico sólo puede tener ciertas energías dependiendo de la geometría del potencial y de las interacciones que se consideren para éste. La energía, en función del cuasi-momento \vec{k} del electrón, se organizan en una estructura de “bandas y gaps” de energía [2], y corresponden a las energías permitidas y prohibidas de los electrones en el sistema, respectivamente. Análogamente, al propagar luz linealmente polarizada en un medio periódico, esta exhibe una estructura de “bandas y gaps” en su constante de propagación [3–5]. Los modos que pertenecen a estas bandas, conocidos como modos de Bloch, son extendidos en todo el sistema. Cuando la luz viaja en un medio periódico las propiedades de difracción de ésta, cambian drásticamente con respecto a cuando la luz viaja en un medio isotrópico. En un medio homogéneo (continuo), la difracción de la luz está gobernada por la longitud de onda y el ancho espacial del haz, siendo sólo débilmente afectada por el índice de refracción del material (tam-

bién es independiente del ángulo de propagación, debido a la invarianza traslacional del medio homogéneo). Por otra parte cuando la luz se propaga en un medio periódico, con un periodo del orden de la longitud de onda, su dinámica está gobernada por los modos de Bloch excitados en el sistema, lo que lleva a que la difracción de la luz dependa del ángulo de incidencia en el medio, ya que para distintos ángulos se excitarán distintos modos de Bloch cuya velocidad de difracción dependerá de la relación de dispersión característica del sistema. Cuando la luz se propaga en un sistema óptico periódico, tal como los arreglos de guías de ondas [6], ésta exhibe un comportamiento característico de un sistema discreto. En este tipo de sistemas, la luz se supone fuertemente atrapada en cada guía de ondas, y los modos de Bloch del sistema (en principio considerados infinitos), se aproximan por un conjunto finito de modos (o súper modos), los cuales se forman a partir de combinaciones de los modos fundamentales de cada una de las guías, como resultado, el sistema se "discretiza". Las propiedades de difracción de un sistema discreto fueron estudiadas teóricamente por primera vez por Jones et al. en 1965 [7], y observadas experimentalmente en 1973 por S. Smoekh et al. [8]. Uno de los resultados más relevantes predichos teóricamente y observados experimentalmente en este contexto, se da cuando se considera una condición inicial localizada en un sólo sitio del arreglo. Bajo estas condiciones, la luz difracta en el arreglo separándose en dos lóbulos principales que viajan en direcciones opuestas [9] con una rapidez límite dada por la estructura de bandas, fenómeno conocido como difracción discreta y que no tiene análogo en medios homogéneos.

Por otra parte, el control del flujo de la luz en arreglos fotónicos es un tema de interés fundamental, debido a la importancia científica y tecnológica que esto conlleva. En el contexto de sistemas discretos, en 1988 Christodoulides et al. [10] sugirieron

la idea de que la luz podría auto atraparse en los arreglos de guías de ondas, si se incluía una respuesta no-lineal del material. Este auto-atrapamiento compite con la difracción natural de la luz en el sistema, como consecuencia del balance entre estos factores, existen modos no lineales fuertemente localizados (ocupando sólo unos pocos sitios del arreglo), conocidos como solitones discretos, los cuales no difractan a medida que se propagan a lo largo del arreglo. Posteriormente, este tipo de soluciones no lineales fueron observadas experimentalmente en sistemas de arreglos de guías fotónicas, en una y dos dimensiones [9, 11, 12]. Otra manera en que se ha logrado confinar la luz, es mediante la inclusión de desorden en los arreglos de guías (este desorden puede ser en el contraste de índice de refracción o en la separación de las guías). En 1958, Anderson [13], demostró teóricamente que la función de onda de un electrón es exponencialmente localizada para cualquier grado de desorden, lo que afecta fuertemente las propiedades de transporte en este tipo de sistemas. En el contexto de medios ópticos desordenados, se ha observado experimentalmente localización de Anderson en una y dos dimensiones en cristales fotónicos [14, 15]. La inclusión de no linealidad o desorden en los arreglos de guías de onda, así como la inclusión de impurezas [16, 17], permiten localizar energía. Sin embargo, en el modelo discreto, lineal y completamente periódico. Se encuentra además que existen geometrías no convencionales de los arreglos de guías en las cuáles la estructura de ciertas bandas puede ser completamente plana [18, 19], y se encuentra que los modos que pertenecen a estas bandas, son compactos (esto es, sólo tienen amplitud no nula en unos pocos sitios de la red). Al combinar modos correspondientes a estas bandas, se obtienen estados lineales del sistema que son fuertemente localizados. Este es el caso de las redes tipo Sawtooth y Lieb, donde ambas poseen una banda plana y también, al menos, una banda difractante.

Existen diversas formas experimentales de generar redes ópticas periódicas de diversas geometrías, como son el método de inducción en cristales fotorrefractivos [20], o la técnica de escritura con láser de femtosegundos [6, 21–24]. Esta última consiste en crear guías de ondas vía una redensificación de una sección del cristal por medio de un láser pulsado de baja potencia, lo que cambia el índice de refracción permanentemente en la zona de enfoque del haz. Debido a la flexibilidad de la última técnica mencionada, se pueden fabricar en principio arreglos de guías con cualquier geometría, lo que abre grandes posibilidades para estudiar el comportamiento fundamental de la luz [25–28]. En este contexto, se ha propuesto el desafío de transmitir experimentalmente imágenes no difractantes [19], usando el concepto de bandas planas, en redes creadas con la técnica de escritura con láser de femtosegundos, pensando en una posible aplicación tecnológica. Para responder esta pregunta es necesario estudiar numéricamente la propagación de los modos de la banda plana de estas dos redes, desde la teoría de modos acoplados o aproximación discreta, pero también a partir de la ecuación paraxial de Helmholtz o modelo continuo [29], que describe más fielmente el experimento, para de esta forma poder evaluar la factibilidad de la propagación experimental en un sistema realista.

Las propiedades lineales de un sistema periódico, están completamente determinadas por la estructura de bandas del sistema particular que se estudie. Existen un variado número de geometrías que poseen una banda plana en su espectro lineal, como son la red de Lieb [18], Kagome [19], Sawtooth [30], etc., todas estas geometrías han sido extensamente estudiadas. Las explicaciones de la formación de las bandas planas en este tipo de sistemas, usualmente se fundamentan en las propiedades que

debe tener una banda específica del sistema. Para formular las condiciones necesarias para la formación de una banda plana, generalmente, se trabaja en el espacio de las frecuencias espaciales [31–36]. Con el fin de entender la formación de las bandas planas de un sistema lineal discreto, se desarrolla un criterio, a partir de la geometría espacial de los arreglos de guías. Utilizando, la propiedades de discretitud de los arreglos de guías de ondas (esto es, interacciones discretas entre sitios de la red), se puede controlar la difracción de una condición inicial específica, manipulando vía cancelación de fase la ecuación dinámica de ciertos sitios en la red.

Capítulo 2

Ecuación lineal tipo Schrödinger

Para entender el comportamiento de los fenómenos lineales en sistemas ópticos, es necesario considerar la teoría de ondas electromagnéticas propagándose en medios dieléctricos. El objetivo de este capítulo es obtener las ecuaciones básicas que gobiernan la propagación de la luz en medios ópticos periódicos. En la sección 2.1, se estudia analíticamente la propagación de la luz en un medio homogéneo, y en la sección 2.2 se estudia vía simulaciones numéricas el comportamiento de la luz en un medio unidimensional periódico.

El comportamiento de la radiación electromagnética en un medio dieléctrico está descrito por las ecuaciones de Maxwell,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.4)$$

Donde \vec{E} y \vec{H} son el campo eléctrico y magnético, respectivamente. La densidad de corriente \vec{J} y la densidad de carga ρ , representan las fuentes del campo electro-

magnético. En ausencia de cargas libres en el medio, se tiene que $\vec{J} = \vec{0}$ y $\rho = 0$. Los vectores de flujo de densidad \vec{D} y \vec{B} son la respuesta del medio frente al campo eléctrico y magnético, respectivamente, y vienen dados por las siguientes relaciones constitutivas

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (2.5)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}. \quad (2.6)$$

Donde ϵ_0 y μ_0 son la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética del vacío, respectivamente, y \vec{P} y \vec{M} son las polarizaciones inducidas eléctricas y magnéticas. En general, los sistemas de guías de ondas que trabajamos en esta tesis (creados con la técnica de escritura con láser de femtosegundos en cristales de Silicio [6]) se consideran materiales no magnéticos, en los que $\vec{M} = \vec{0}$.

Las ecuaciones de Maxwell pueden usarse para obtener la ecuación de ondas, que describe la propagación de la radiación electromagnética en un medio dado. Si aplicamos el producto cruz a la ecuación (2.1) y utilizamos las ecuaciones (2.2), (2.5) y (2.6), se pueden despejar los términos de \vec{B} y \vec{D} , de tal forma de escribir una

ecuación para el campo eléctrico,

$$\begin{aligned}
 -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\
 &= \mu_0 \frac{\partial (\nabla \times \vec{H})}{\partial t} \\
 &= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \\
 &= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{\partial t} \right) \\
 &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}.
 \end{aligned}$$

Si definimos $c^2 \equiv \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$, y aplicamos la identidad vectorial

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} (\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V},$$

entonces podemos escribir la ecuación de ondas de la forma,

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

En donde se ha considerado que en los cristales de Silicio no hay cargas libres ($\rho = 0$). La función vectorial \vec{P} es la que describe la respuesta del medio frente al campo eléctrico aplicado. En el caso de los cristales de Silicio, como en muchos otros materiales, esta respuesta es lineal [29], y viene dada por

$$P(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t - t') \cdot E(\vec{r}, t') dt'. \quad (2.8)$$

La expresión anterior es válida en la aproximación de dipolo-eléctrico, y asume que la respuesta del medio es local. Cuando consideramos haces continuos la dependencia temporal viene dada por una onda plana de frecuencia definida. A continuación buscamos encontrar los modos espaciales del campo electromagnético de un haz

polarizado en la dirección arbitraria \hat{e} de un medio isotrópico, para esto, se plantea como ansatz una solución general de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left[\tilde{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} + c.c. \right] \hat{e} \quad (2.9)$$

En donde $\tilde{E}(\vec{r}) = A(\vec{r}) e^{i\beta_0 z}$, $\beta_0 = k_0 n_0 = 2\pi n_0 / \lambda$, es la constante de propagación en términos de la longitud de onda $\lambda = 2\pi c / \omega$ y n_0 es el índice de refracción nominal del material. Así, a partir de la ecuación (2.8), podemos escribir la polarización como,

$$P(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t - t') \cdot A(\vec{r}) e^{i\beta_0 z} e^{-i\omega t'} dt'. \quad (2.10)$$

A partir de esto podemos construir el ansatz para polarización en la dirección \hat{e} de la forma:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left[P(\vec{r}) e^{-i\omega t} + c.c. \right] \hat{e}. \quad (2.11)$$

Introduciendo las ecuaciones (2.9) y (2.11) en (2.7) resulta,

$$e^{i\beta_0 z} e^{-i\omega t} \left\{ i2\beta_0 \frac{\partial A}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 A + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta_0^2 \right) A + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right\} = \quad (2.12)$$

$$-\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[- \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_0 \chi^{(1)}(t - t') A e^{i\beta_0 z} e^{-i\omega t'} \right]$$

Haciendo el cambio de variable $t - t' = l$, y evaluando la derivada temporal, la expresión anterior toma la forma,

$$e^{i\beta_0 z} e^{-i\omega t} \left\{ i2\beta_0 \frac{\partial A}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 A + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta_0^2 \right) A + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right\} = -\frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) A e^{i\beta_0 z} e^{-i\omega t}.$$

En donde $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, corresponde al operador Laplaciano transversal y $\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)$ es la transformada de Fourier de la susceptibilidad eléctrica de primer orden.

En la aproximación paraxial, en donde se considera que la amplitud del campo eléctrico varía lentamente a lo largo de la dirección de propagación, podemos despreciar la segunda derivada $\left| \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right| \ll 2\beta_0 \left| \frac{\partial A}{\partial z} \right|$. Entonces reordenando, la ecuación anterior resulta,

$$i2\beta_0 \frac{\partial A}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 A + \frac{w^2}{c^2} (1 + \tilde{\chi}^{(1)}(w)) A - \beta_0^2 A = 0. \quad (2.13)$$

La definición de la constante dieléctrica [37] en función de la frecuencia esta dada por $\varepsilon(w) = 1 + \tilde{\chi}^{(1)} = (n(x, y) + i\alpha c/2w)^2$, donde $n(x, y) = n_0 + \Delta n(x, y)$ corresponde al índice de refracción del sistema (considerado constante en la dirección de propagación), y α es el coeficiente de absorción lineal. Si despreciamos las pérdidas, es decir $\alpha = 0$, entonces, $\varepsilon(x, y) = n_0^2 + 2n_0\Delta n(x, y) + \Delta n^2(x, y)$. En los arreglos de guías de ondas, el cambio del índice de refracción entre las guías y el material nominal es pequeño [$\Delta n(x, y) \ll 1$], por lo que podemos aproximar $\varepsilon(x, y) \approx n_0^2 + 2n_0\Delta n(x, y)$, y de la definición de $\beta_0 \equiv k_0 n_0$, podemos escribir la ecuación dimensional lineal tipo Schödinger o ecuación paraxial de Helmholtz de la forma:

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_0} \nabla_{\perp}^2 A + k_0 \Delta n(x, y) A = 0, \quad (2.14)$$

en donde $k_0 = 2\pi/\lambda$.

2.1. Difracción en un medio unidimensional homogéneo

Con el fin de comparar el comportamiento de la luz en un medio homogéneo y en un medio periódico, en esta sección estudiaremos el comportamiento espacial genérico de la ecuación (2.14) en un medio homogéneo. Si consideramos un sistema

unidimensional, con un índice de refracción homogéneo ($n(x) = 0$), la ecuación (2.14) toma la forma,

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{1}{2k_0 n_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}. \quad (2.15)$$

Esta ecuación se puede resolver analíticamente en el espacio de Fourier, aplicando la transformada:

$$A(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(w_x, z) e^{-iw_x x} dw_x. \quad (2.16)$$

En donde w_x es una variable muda (le hemos asignado el subíndice x , debido a que representa las frecuencias espaciales). Reemplazando (2.16) en (2.15), tenemos que,

$$\begin{aligned} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} e^{-iw_x x} dw_x &= \frac{\beta_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -w_x^2 \tilde{A} e^{-iw_x x} dw_x, \\ i \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} &= -\beta_1 w^2 \tilde{A} e^{-iw_x x}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

En donde $\beta_1 \equiv 1/2k_0 n_0$. La ecuación (2.17) tiene como solución general

$$\tilde{A}(z, w_x) = \tilde{A}(w_x, 0) e^{-i\beta_1 w_x^2 z}. \quad (2.18)$$

Luego la solución del sistema se encuentra utilizando la ecuación (2.16) con,

$$\tilde{A}(w_x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x, 0) e^{iw_x x} dx. \quad (2.19)$$

Si consideramos como condición inicial un perfil gaussiano [29], de la forma:

$$A(x, 0) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}, \quad (2.20)$$

en donde σ_0 es el ancho espacial de la Gaussiana (definido como el ancho en que la intensidad es cae a $1/e$), utilizando las ecuaciones (2.16), (2.18) y (2.19), podemos encontrar la evolución de la condición inicial a lo largo de la distancia de propagación.

$$A(x, z) = \frac{\sigma_0^2}{(\sigma_0^2 - i\frac{\beta_1}{2}z)^{1/2}} \cdot \exp\left(\frac{x^2}{2(\sigma_0^2 - i\frac{\beta_1}{2}z)}\right), \quad (2.21)$$

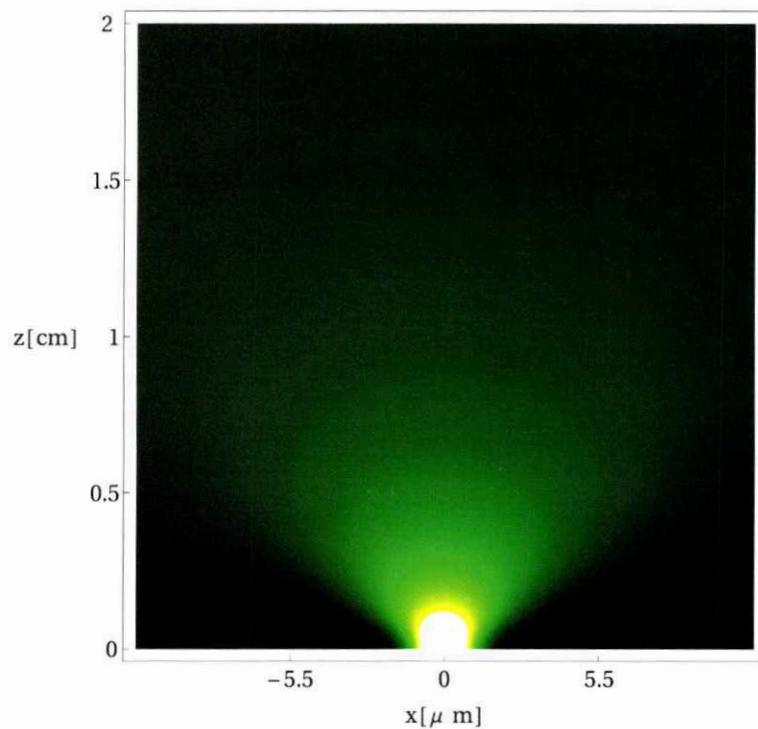


Fig. 1. Difracción de una condición inicial gaussiana de luz verde ($\lambda = 532$ nm), de ancho espacial $\sigma_0 = 2$ [μm], en un cristal homogéneo de Silicio, con $n_0 = 1.45067$.

como el sistema es conservativo, la potencia se mantiene constante, por lo que la condición inicial se ensancha a lo largo de la dirección de propagación; sin embargo, el máximo de intensidad siempre está en el mismo lugar espacial, en el centro de la Gaussiana. Este comportamiento se conoce como difracción y proviene del término dispersivo espacial dado por ∇_{\perp}^2 . En la Fig.1 se gráfica la evolución espacial de la función (2.21), en donde se aprecia el ensanchamiento de la condición inicial a lo largo de la dirección de propagación, y se observa como el centro de intensidad o el máximo de la función, siempre se mantiene en el centro.



2.2. Difracción en un medio unidimensional periódico

En óptica existen diversas formas de generar medios periódicos para la luz. Entre ellos está el método de inducción en cristales fotorrefractivos, por ejemplo, en cristales de Niobato de Stroncio Bario (SBN), donde al aplicar un patrón de interferencia óptico, la densidad de electrones libres del cristal adquiere la periodicidad del patrón de interferencia. Esto cambia el índice de refracción efectivo en las zonas de interferencia constructiva y destructiva del patrón óptico, generando un medio con índice de refracción periódico para la luz [20]. Otra técnica, que ha sido ampliamente utilizada en el último tiempo, es la técnica de escritura con láser de femtosegundos [6], que consiste en crear guías de ondas redensificando una sección del sustrato, con esta técnica se puede fabricar en principio cualquier geometría de arreglos de guías ópticas, lo que abre grandes posibilidades de estudiar el comportamiento fundamental de la luz en diversas configuraciones [25–28].

Por ejemplo, en el caso de los cristales SBN, interfiriendo dos ondas planas se puede construir un potencial de la forma $n(x) = n_a \cos^2(\frac{\pi}{p_x}x)$, en donde p_x es el periodo y n_a es el máximo de la modulación del índice de refracción [20]. En los arreglos de guías escritos con la técnica de escritura con láser de femtosegundos se puede generar un potencial más abrupto, al crear una estructura unidimensional ordenada de guías de ondas [20]. Cuando propagamos luz en un medio como los mencionados anteriormente, la ecuación (2.14) toma la forma

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + k_0 n(x) A = 0.$$

Esta ecuación sólo tiene solución analítica para ciertas funciones del índice de

refracción $n(x)$. Pero en general, cuando tratamos con funciones espaciales del índice de refracción como las que se fabrican con la técnica por escritura con láser de femtosegundos, no existe solución analítica, por lo que se requiere implementar algún método numérico como por ejemplo el "Split-Step Fourier Method" [38].

Consideremos un medio unidimensional con el índice de refracción periódico en el espacio, de la forma que se esquematiza en la Fig. 2. El comportamiento de la luz, cambia dramáticamente cuando viaja en un medio periódico como este, en comparación a cuando viaja en un medio homogéneo, como se puede ver al comparar las Figs. 1 y 3. En un medio homogéneo, la luz se expande a lo largo de la dirección de propagación, pero conserva la mayor parte de la potencia en el centro, en contraste, cuando la luz viaja en un medio periódico como el esquematizado en la Fig. 2, la luz difracta en dos lóbulos a lo largo de la dirección de propagación (ver Fig.3), este fenómeno es conocido como difracción discreta [9], y no tiene un análogo en medios homogéneos (se analizará más profundamente en los capítulos 4 y 5). A diferencia de los medios homogéneos, en donde la magnitud de la difracción esta fija para una cierta longitud de onda, en los arreglos periódicos, la magnitud de la difracción puede ser controlada, cambiando la geometría de los potenciales periódicos.

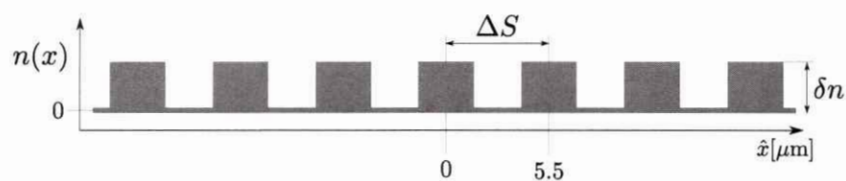


Fig. 2. Esquema del índice de refracción utilizado, en donde $\Delta S = 5.5[\mu\text{m}]$ (distancia de separación de las guías de onda) y $\delta n = 7 \times 10^{-2}$ (contraste de índice de refracción).

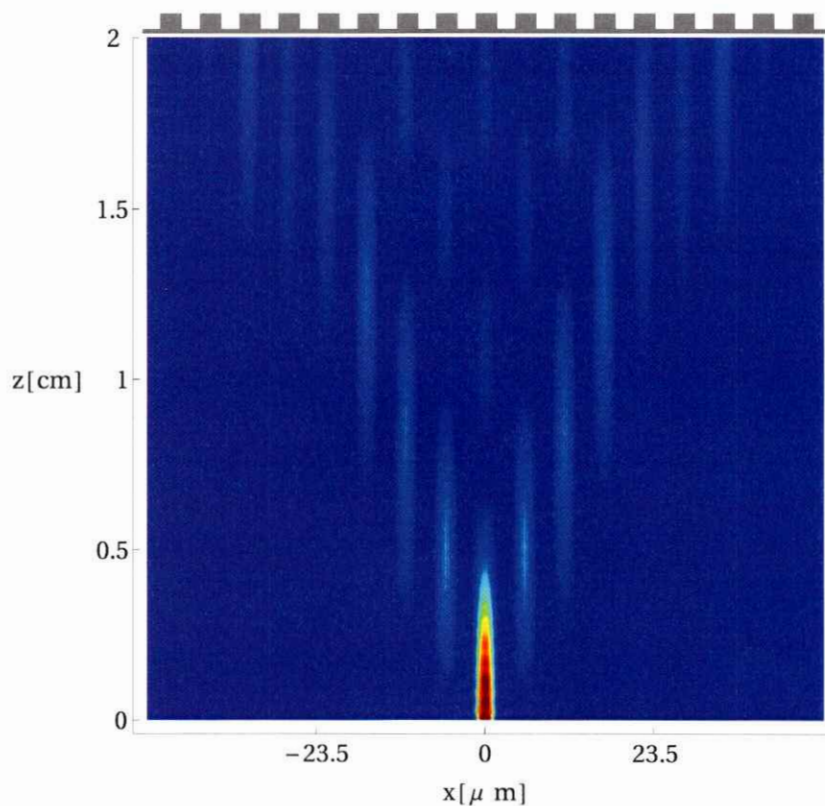


Fig. 3. Simulación numérica del modelo (2.14), en donde se muestra la difracción discreta de una condición inicial gaussiana de luz verde ($\lambda = 532 \text{ nm}$), de ancho espacial $\sigma_0 = 2 [\mu\text{m}]$, en un cristal de Silicio con índice de refracción periódico en la dirección x .

Capítulo 3

Ecuación lineal discreta tipo Schrödinger

En la Teoría de modos acoplados o aproximación discreta, la luz se considera como fuertemente localizada en cada guía de onda, de tal forma que podemos aproximar el campo eléctrico continuo por una superposición de campos eléctricos fuertemente localizados en cada guía. Además, consideramos que la interacción lineal viene dada por las evanescentes de los modos de cada guía, por lo que el campo eléctrico en cada guía interactúa efectivamente solo con los vecinos más cercanos. Los sistemas de arreglos de guías fabricados con la técnica de escritura con láser de femtosegundos [6] son ideales para trabajar en esta aproximación, ya que en estos la luz es confinada fuertemente en la guía, por lo que se puede “discretizar” aún más su comportamiento incrementando el contraste de índice de refracción o la separación entre guías. En este tipo de sistemas el control experimental de estos parámetros es muy preciso.

Consideremos primero el caso en que la luz viaja en un medio sin polarización ($\vec{P} = \vec{0}$), entonces la ecuación 2.7 toma la forma:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

Proponemos como solución una onda plana monocromática con frecuencia tem-

poral w y una expansión en los modos transversales normales del sistema.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_j \left[\vec{f}_j(x, y) a e^{j(k_z z - wt)} + c.c. \right]. \quad (3.2)$$

En donde k y w representa la constante de propagación en la dirección de propagación y la frecuencia temporal en cada guía, respectivamente. a es la amplitud y $\vec{f}_j(x, y)$ representa la forma transversal del modo j . Reemplazando (3.2) en (3.1), obtenemos la relación:

$$a \left(\nabla_{\perp}^2 - k_z^2 + \frac{w^2}{c^2} \right) \vec{f}_j(x, y) = \vec{0}. \quad (3.3)$$

Inspirados en el ansatz (3.2) cuando consideramos un medio con polarización, proponemos como modos de la ecuación (2.7) un ansatz de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_j \left[\vec{f}_j(x, y) a(z) e^{i(k_z z - wt)} + c.c. \right], \quad (3.4)$$

con $a(z)$ la función que describe la amplitud a lo largo de la dirección de propagación y en principio, varía lentamente.

Si consideramos ahora un sistema "discreto", es decir un sistema en el que podemos modelar al campo eléctrico fuertemente localizado en cada guía de ondas, entonces tenemos:

$$\vec{E}, \vec{P} \rightarrow \vec{E}_{\alpha}^{\nu}, \vec{P}_{\alpha}^{\nu},$$

con,

$$\vec{E}_{\alpha}^{\nu}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_j \left[\vec{f}_{\alpha, j}^{\nu}(x, y) a_{\alpha, j}^{\nu}(z) e^{i(k_z z - wt)} + c.c. \right], \quad (3.5)$$

$$\vec{P}_{\alpha}^{\nu}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi_{\alpha}^{(1), \nu} \vec{E}_{\alpha}^{\nu}(\vec{r}, t). \quad (3.6)$$

En donde el subíndice α y el supraíndice ν representan el lugar de origen y el lugar de evaluación del campo eléctrico, respectivamente. $\chi_\alpha^{(1),\nu}$, representa la susceptibilidad eléctrica de primer orden ($\chi^{(1)}$) en cada guía del arreglo. Como se puede apreciar, el campo eléctrico que se ha considerado como "local" es continuo en todo el espacio. En la derivación que sigue consideramos sólo interacción con los vecinos más cercanos, pero la generalización cuando se considera interacción con otras guías de onda del sistema se puede extender de manera directa [39]. Aplicando el ansatz (3.5) al lado izquierdo de la ecuación (2.7), obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \bar{P}_\alpha^\nu}{\partial t^2} &= \left(\overbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}}^{\nabla_\perp^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \right) \frac{1}{2} \sum_j \left[\bar{f}_{\alpha,j}^\nu(x,y) a_{\alpha,j}^\nu(z) e^{i(k_z z - \omega t)} + c.c. \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_j \left[\left\{ a_{\alpha,j}^\nu(z) \left(\overbrace{\nabla_\perp^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2}}^{=0} \right) \bar{f}_{\alpha,j}^\nu(x,y) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \bar{f}_{\alpha,j}^\nu(x,y) \left(\frac{\partial^2 a_{\alpha,j}^\nu(z)}{\partial z^2} + 2ik_z \frac{\partial a_{\alpha,j}^\nu(z)}{\partial z} \right) \right\} e^{i(k_z z - \omega t)} + c.c. \right] \\
 &\simeq \frac{1}{2} \sum_j \left[i2k_z \bar{f}_{\alpha,j}^\nu(x,y) \frac{\partial a_{\alpha,j}^\nu(z)}{\partial z} e^{i(k_z z - \omega t)} + c.c. \right].
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

En donde se ha utilizado la ecuación (3.3), que es válida para todos los modos $\bar{f}_{\alpha,j}^\nu(x,y)$. En la última etapa se ha incluido la aproximación de que la envolvente del campo eléctrico $a_{\alpha,j}^\nu(z)$ varía lentamente en la dirección de propagación z , esto es :

$$\left| \frac{\partial^2 a_{\alpha,j}^\nu}{\partial z^2} \right| \ll 2k_z \left| \frac{\partial a_{\alpha,j}^\nu}{\partial z} \right|.$$

Por simplicidad, para trabajar el lado derecho de la ecuación (2.7), consideraremos el caso de dos guías de ondas puestas una al lado de otra (dímero), que puede ser extendido directamente al caso de N guías [39]. Entonces reemplazamos el ansatz

(3.6) y escribimos el lado derecho de la ecuación de la primera guía :

$$\begin{aligned}\bar{P}_\alpha^\nu(\vec{r}, t) &= \frac{\epsilon_0}{2} \chi_\alpha^{1,\nu} \bar{E}_\alpha^\nu(\vec{r}, t). \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \chi_\alpha^{1,\nu} \sum_j \left[\left(\bar{f}_{1,j}^1(x, y) a_{1,j}^1(z) + \bar{f}_{2,j}^1(x, y) a_{2,j}^1(z) \right) e^{i(k_z z - \omega t)} + c.c. \right].\end{aligned}$$

Al introducir este ansatz en la ecuación (2.7) y reordenar los factores, la ecuación (2.7) toma la forma:

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_\alpha^\nu}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2$$

$$\begin{aligned}\bar{0} &= \frac{1}{2} \sum_j \left[\left\{ i2k_z \bar{f}_{1,j}^1(x, y) \frac{\partial a_{1,j}^1}{\partial z} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\omega^2}{c^2} \chi_1^{1,1} \left(\bar{f}_{1,j}^1(x, y) a_{1,j}^1(z) + \bar{f}_{2,j}^1(x, y) a_{2,j}^1(z) \right) \right\} e^{i(k_z z - \omega t)} + c.c. \right].\end{aligned}$$

Si consideramos un haz polarizado en la dirección \hat{e} , y guías de onda monomodales (esto es, guías de ondas en que sólo el primer modo excitado sea posible ($j=1$) lo que se logra calibrando el contraste de refracción [6]), entonces la ecuación de ondas resulta:

$$i2k_z f_{1,1}^1(x, y) \frac{\partial a_{1,1}^1}{\partial z} + \frac{\omega^2}{c^2} \chi_1^{1,1} f_{1,1}^1(x, y) a_{1,1}^1(z) + f_{2,1}^1(x, y) a_{2,1}^1(z) = 0.$$

Multiplicamos esta ecuación por el complejo conjugado de la función $f_{1,1}^1$ e integramos sobre el plano xy para eliminar la dependencia transversal, obtenemos la ecuación dinámica para la guía uno del dímero:

$$i \frac{\partial a_1}{\partial z} + \nu a_1 + V a_2 = 0,$$

en donde $a_1 = a_{1,1}^1(z)$, $a_2 = a_{2,1}^1(z)$, y se definen las constantes:

$$\begin{aligned} p &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_{1,1}^1|^2 dx dy, \\ V_w &= \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{1,1}^{1,*} f_{2,1}^1 dx dy, \\ \beta &= \frac{w^2}{2k_z c^2} \chi_1^{1,1}(w), \\ V &= \frac{w^2}{2k_z c^2} \chi_1^{1,1}(w) V_w = CV_w, \end{aligned}$$

β representa la constante de propagación en la guía y V el acoplamiento lineal entre las guías vecinas y corresponde a una integral de superposición entre las formas de los modos transversales. Evidentemente la ecuación para el sitio dos se obtiene de manera análoga.

$$i \frac{\partial a_2}{\partial z} + \beta a_2 + V a_1 = 0.$$

Podemos generalizar esta ecuación, considerando una cadena unidimensional de N sitios, en el que consideramos acoplamientos sólo a vecinos cercanos, obteniendo:

$$i \frac{\partial a_n}{\partial z} + \beta a_n + V(a_{n-1} + a_{n+1}) = 0. \quad (3.8)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación lineal de Schrödinger o DLS por sus siglas en ingles, y tiene una solución exacta [40] dada por :

$$a_n = A i^n J_n(2Vz), \quad (3.9)$$

en donde J_n es la función de Bessel de orden n , y A la amplitud. La evolución dinámica de esta función se muestra en la Fig. 4 (a), en donde se muestra la evolución dinámica de la amplitud de la función de ondas en cada guía de un arreglo unidimensional. En general, el modelo (3.8) describe muy bien la fenomenología de la luz en sistemas ópticos discretos pero también es ampliamente usado en otras ramas

de la física como para describir la excitaciones de polaritones [41], plasmones [42], o átomos fríos en redes ópticas [30], entre otros. En el caso de sistemas ópticos, en las guías escritas con la técnica de escritura con láser de femtosegundos la relación entre las simulaciones numéricas utilizando el modelo discreto (3.10) y los experimentos, es casi uno a uno [ver comparación de la Fig.4 (a) y Fig. 4 (b)] debido al control preciso de los parámetros experimentales que se puede obtener con esta técnica. Cabe mencionar además que bajo los parámetros apropiados el modelo discreto (3.10) y el modelo continuo (2.14) describen la misma fenomenología como se puede ver de la comparación entre la Fig.3 y Fig.4(a).

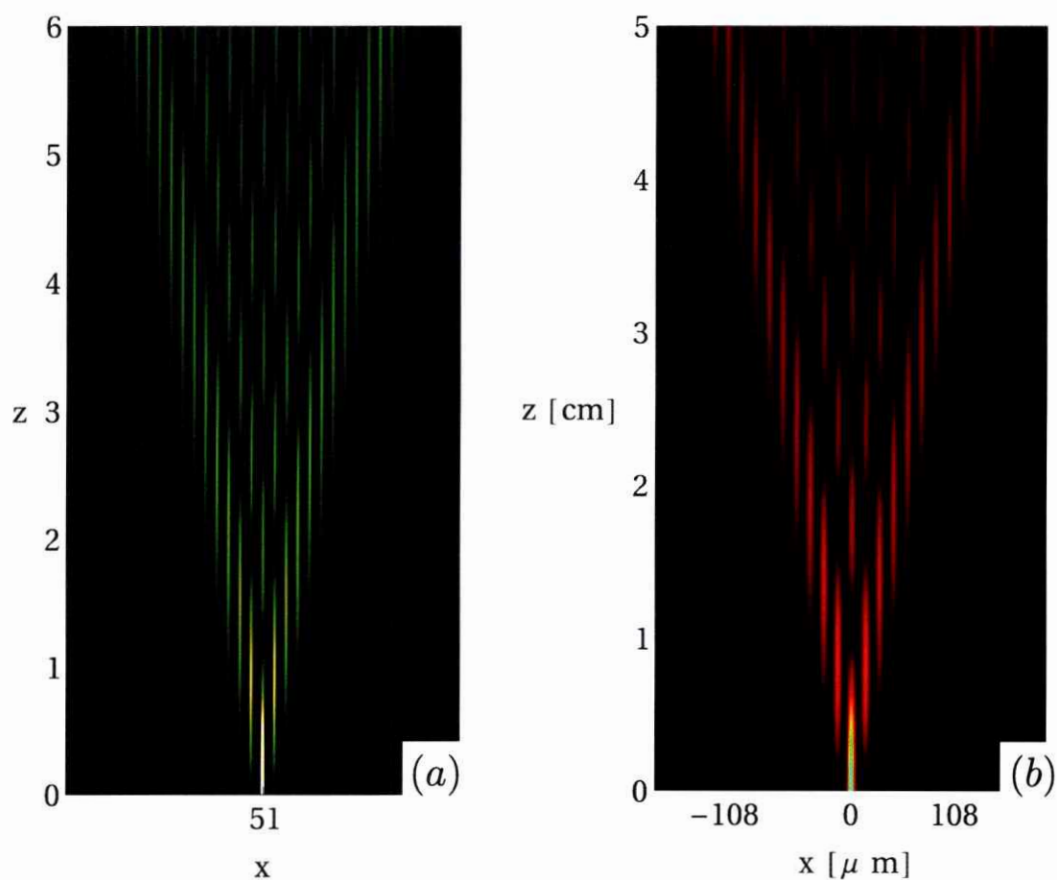


Fig. 4. (a) Simulación numérica de la difracción discreta de una condición inicial tipo delta en un arreglo de 100 guías de ondas. (b) Barrido experimental a lo largo de la dirección de propagación, de la difracción discreta de una condición inicial tipo delta con luz roja (633 nm), en un arreglo unidimensional de guías, escritas en un cristal de Silicio con la técnica de escritura con láser de femtosegundos. La separación de las guías es de $18\mu\text{m}$ y el largo en z es de 5 cm.

El modelo (3.8) se puede generalizar a un sistema de geometría genérica en las dos dimensiones transversales [39], obteniéndose una ecuación conocida como ecuación discreta lineal de Schrödinger generalizada:

$$i\frac{\partial a_{\vec{n}}}{\partial z} + \beta_{\vec{n}}a_{\vec{n}} + \sum_{\vec{m} \neq \vec{n}} V_{\vec{n},\vec{m}}a_{\vec{m}} = 0, \quad (3.10)$$

en donde el subíndice \vec{n} y \vec{m} los vectores de posición de cada guía en el arreglo. Cuando se tiene un sistema en el que todas las guías de onda son idénticas, el factor β puede ser absorbido si multiplicamos la ecuación por $e^{i\beta z}$. Luego hacemos el cambio de variable trivial $u_n(z) = a_n(z)e^{i\beta z}$ con lo que se obtiene la ecuación:

$$i\frac{\partial u_{\vec{n}}}{\partial z} + \sum_{\vec{m} \neq \vec{n}} V_{\vec{n},\vec{m}}u_{\vec{m}} = 0. \quad (3.11)$$

Con el modelo (3.10) se ha chequeado el comportamiento fundamental de la luz en diversos sistemas discretos obteniéndose un excelente acuerdo entre lo predicho fenomenológicamente por el modelo y los resultados experimentales. Además se han creado análogos ópticos del comportamiento de electrones en sistemas periódicos como oscilaciones de Bloch [43], aisladores topológicos [27], tunelaje de Landau-Zener [44], localización de Anderson [15], etc. Esto debido a la gran plasticidad de la técnica, ya que en principio se puede construir cualquier geometría en las dos dimensiones transversales.

Cuando se inyecta una condición inicial localizada en un sistema de arreglos de guías, esta excita incoherentemente todos los modos del sistema que tengan una amplitud distinta de cero en el sitio excitado (se profundiza sobre este tema en el Capítulo 5), lo que y la dinámica que se observa se denominado difracción discreta y constituye uno de los resultados más relevantes en el área de medios periódicos. En

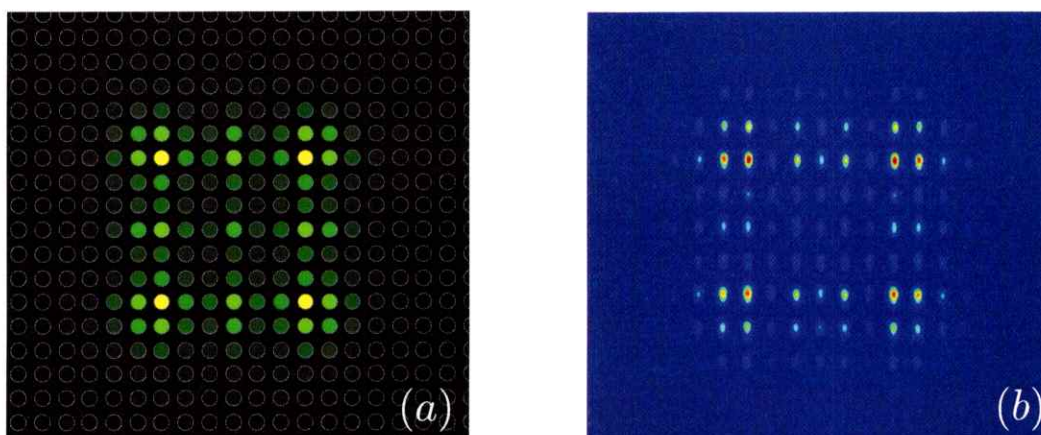


Fig. 5. (a) Perfil output simulado de difracción discreta utilizando una condición inicial tipo delta en un arreglo 2D rectangular. (b) Perfil output experimental de la difracción discreta de una condición inicial tipo delta con luz roja (633 nm) en un arreglo rectangular escrita en un cristal de Silicio.

una dimensión, la condición inicial se separa en dos lóbulos (ver Fig. 4), fenómeno conocido como difracción discreta. En el caso de un arreglo bidimensional con geometría rectangular [45] (ver Fig. 5), la condición inicial se separa en cuatro lóbulos principales, que se entiende debido a la geometría particular de esta red, como la superposición de dos difracciones unidimensionales ortogonales.

Capítulo 4

Potenciales periódicos y teoría de Floquet-Bloch

El concepto de estructura de bandas tuvo comienzo en el contexto de física del estado sólido; En donde se encuentra que para un electrón sometido a un potencial periódico las energías posibles en función del cuasi-momento \vec{k} del sistema se organizan en una estructura de bandas permitidas de energía y “gaps” o energías prohibidas, que resultan de interferencia destructiva de la función de onda del electrón. En este contexto, revisaremos el formalismo necesario para explicar estos conceptos, para después hacer el símil con un sistema periódico óptico. La ecuación de Schrödinger tiempo dependiente que describe la dinámica de un electrón en un potencial $U(\vec{r}, t)$ viene dada por:

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \tilde{\psi} + U(\vec{r}, t) \tilde{\psi}, \quad (4.1)$$

en donde m es la masa de la partícula, $\hbar \equiv h/2\pi$ con h la constante de Planck. Con esta ecuación se estudiará el caso de una sola partícula inmersa en un potencial periódico.

Primero analizaremos el caso de una partícula en el espacio libre, es decir $U(\vec{r}, t) = 0$, las soluciones de la ecuación (4.1) vienen dadas por $\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{i\frac{E_k}{\hbar}t}$. Aplicando

este ansatz en la ecuación (4.1) se obtiene la relación entre la energía y el vector de ondas:

$$E(k) = \frac{\hbar^2 |\vec{k}|^2}{2m}. \quad (4.2)$$

Ahora, si consideramos un potencial tiempo independiente $U(\vec{r}, t) \rightarrow U(\vec{r})$, la ecuación (4.1) se puede reordenar como sigue:

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar^2} \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}, t) \right)}_{\hat{H}} \tilde{\psi}.$$

Esta ecuación, tiene como solución genérica de la parte temporal:

$$\tilde{\psi} = \psi(\vec{r}) e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}.$$

Al introducir esta solución en la ecuación (4.1), obtenemos la ecuación de Schrödinger tiempo independiente:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U(\vec{r}, t) \psi = \epsilon \psi, \quad (4.3)$$

en donde ϵ corresponde a los autovalores del operador Hamiltoniano particular que se considere, por lo que dado un potencial arbitrario, para encontrar las posibles energías del sistema, se tendrá que resolver un problema de autovalores.

Consideremos a continuación el caso de un potencial unidimensional periódico, tal que $U(x) = U(x + T)$, con T el periodo del potencial. Para este tipo de potenciales, se puede aplicar el teorema de Floquet-Bloch [46] (que es uno de los teoremas más relevantes en la física del estado sólido). Que establece que la función de onda del electrón tendrá la misma periodicidad que el potencial:

$$\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} u_{\vec{k}}(\vec{r}), \quad (4.4)$$



en donde $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ se conoce como la función de Floquet-Bloch (FB) y satisface que $u_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{T}) = u_{\vec{k}}(\vec{r})$. Al reemplazar este ansatz en la ecuación (4.3) y considerar un potencial unidimensional, tenemos el siguiente problema de autovalores:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + ik_x \frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\hbar^2}{2m} k_x^2 + U(x) \right] u_x = \epsilon u_x. \quad (4.5)$$

Los autovalores de este problema representan las energías posibles en función del cuasi momento k_x , la relevancia del teorema de Floquet-Bloch radica en que la función de onda adquiere la misma periodicidad que el potencial, lo que permite hacer una expansión en series de Fourier para trabajar en el espacio recíproco [46], en donde $\frac{\partial^n}{\partial x^n} \rightarrow k_x^n$ (esta expansión se hará mas adelante en este capítulo, en un contexto óptico). Para mostrar la similitud entre el comportamiento de un electrón en un potencial tiempo independiente, y la luz en un medio con índice de refracción homogéneo en la dirección de propagación, basta con introducir los siguientes cambios de variable en la ecuación (4.1):

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &\rightarrow A, \\ t &\rightarrow z \\ \hbar &\rightarrow 1, \\ U(x, y) &\rightarrow -k_0 n(x, y), \\ 2m &\rightarrow 2k_0 n_0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

con lo que se obtiene

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_0} \nabla_{\perp}^2 A + k_0 n(x, y) A = 0.$$

Notamos inmediatamente que esta última ecuación corresponde a la ecuación paraxial de Helmholtz (2.14) anteriormente derivada en el Capítulo.2.

Matemáticamente las ecuaciones (4.1) y (2.14) son equivalentes, y es de esperar entonces que el teorema de Floquet-Bloch se aplique también en sistemas ópticos. De hecho, el teorema de Floquet-Bloch da cuenta de las propiedades que adquiere la función de onda debido a la periodicidad de un potencial, independiente de su naturaleza; por lo tanto, un sistema óptico cuyo índice de refracción es una función periódica de las coordenadas transversales a la dirección de propagación, tendrá los mismos modos que un electrón inmerso en un potencial tiempo independiente y periódico. En lo que sigue derivaremos el problema de autovalores para encontrar los modos espaciales de un sistema óptico partiendo directamente desde las ecuaciones de Maxwell (2.1-2.4).

4.1. Método de expansión en ondas planas

Para resolver el problemas de autovalores planteado en la sección anterior, que nos entregará las frecuencias posibles en función del cuasi momento \vec{k} , derivaremos las ecuaciones para el campo magnético en un medio periódico (las ecuaciones para el campo eléctrico se obtendrán directamente a partir de éstas utilizando las ecuaciones de Maxwell). Para calcular, es conveniente trabajar en el espacio de Fourier, ya que según el teorema de Floquet-Bloch, es posible expandir la función de onda en una serie de Fourier. Entonces, tomamos como ansatz para un campo magnético monocromático:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r})e^{-i\omega t}. \quad (4.7)$$

La expansión en serie de la función $\vec{H}(\vec{r})$ viene dada por:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \vec{H}_{\vec{G}} e^{i(\vec{k}+\vec{G})\cdot\vec{r}}, \quad (4.8)$$

donde \vec{k} es un vector de onda arbitrario en la primera zona de Brillouin de la red recíproca [46], y $\vec{H}_{\vec{G}}$ son los coeficientes de Fourier de la expansión del campo magnético.

Si tomamos el producto cruz en la ecuación (2.2), y considerando un medio sin cargas ni corrientes libres (esto es, $\vec{M} = \vec{0}$ y $\vec{J} = \vec{0}$), entonces utilizando directamente las ecuaciones (2.1), (2.2), (2.5) y (2.6), se obtiene:

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} \times \vec{H} \right] = \frac{w^2}{c^2} \vec{H}. \quad (4.9)$$

Consideraremos para la derivación de las ecuaciones, una polarización del transversal eléctrico (TE), esto es $\vec{E} = \{E_x, E_y, 0\}$ y $\vec{H} = \{0, 0, H_z\}$, entonces $\vec{H} \rightarrow H_z \hat{z}$. Cuando consideramos un medio con un índice de refracción dependiente de \vec{r} , entonces $\epsilon \rightarrow \epsilon(\vec{r})$. Esta función determina la periodicidad del sistema (el análogo óptico del potencial atómico), entonces expandimos esta función en su serie de Fourier de la forma:

$$\frac{1}{\epsilon(\vec{r})} = \sum_{\vec{G}'} \bar{\epsilon}_{\vec{G}'} e^{i(\vec{G}'\cdot\vec{r})}, \quad (4.10)$$

donde $\bar{\epsilon}_{\vec{G}'}$ corresponden a los coeficientes de Fourier de la serie. Reemplazando (4.8)

y (4.10) en (4.9), obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}} H_{\vec{G}} e^{i(\vec{k}+\vec{G})\cdot\vec{r}} \hat{z} &= \vec{\nabla} \times \left[\left(\sum_{\vec{G}'} \bar{\epsilon}_{\vec{G}'} e^{i(\vec{G}')\cdot\vec{r}} \right) \vec{\nabla} \times \left(\sum_{\vec{G}} H_{\vec{G}} e^{i(\vec{k}+\vec{G})\cdot\vec{r}} \right) \right] \\
 &= \vec{\nabla} \times \left[\left(\sum_{\vec{G}'} \bar{\epsilon}_{\vec{G}'} e^{i(\vec{G}')\cdot\vec{r}} \right) \left(\sum_{\vec{G}} H_{\vec{G}} i[(\vec{k} + \vec{G}) \times \hat{z}] e^{i(\vec{k}+\vec{G})\cdot\vec{r}} \right) \right] \\
 &= \vec{\nabla} \times \left[\sum_{\vec{G}, \vec{G}'} \bar{\epsilon}_{\vec{G}'} H_{\vec{G}} i[(\vec{k} + \vec{G}) \times \hat{z}] e^{i[\vec{k}+(\vec{G}+\vec{G}')]\cdot\vec{r}} \right] \\
 &= - \sum_{\vec{G}, \vec{G}'} \bar{\epsilon}_{\vec{G}'} H_{\vec{G}} [(\vec{k} + (\vec{G} + \vec{G}')) \times (\vec{k} + \vec{G}) \times \hat{z}] e^{i[\vec{k}+(\vec{G}+\vec{G}')]\cdot\vec{r}}
 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de rótulo $\vec{G}'' = \vec{G}' + \vec{G}$, se obtiene:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}} H_{\vec{G}} e^{i(\vec{k}+\vec{G})\cdot\vec{r}} \hat{z} = - \sum_{\vec{G}, \vec{G}''} \bar{\epsilon}_{\vec{G}''-\vec{G}} H_{\vec{G}} [(\vec{k} + \vec{G}'') \times (\vec{k} + \vec{G}) \times \hat{z}] e^{i[\vec{k}+\vec{G}'']\cdot\vec{r}} \quad (4.11)$$

Luego aplicamos la identidad vectorial,

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C},$$

con lo que se obtiene,

$$[(\vec{k} + \vec{G}'') \times (\vec{k} + \vec{G}) \times \hat{z}] = ((\vec{k} + \vec{G}'') \cdot \hat{z})(\vec{k} + \vec{G}) - ((\vec{k} + \vec{G}'') \cdot (\vec{k} + \vec{G}))\hat{z} \quad (4.12)$$

El primer término en la izquierda de la ecuación (4.12) es cero debido a la ortogonalidad entre los vectores. Haciendo un nuevo cambio de variables $\vec{G} \rightarrow \vec{G}'$ y $\vec{G}'' \rightarrow \vec{G}$, e insertando el resultado (4.12) en la ecuación (4.11), obtenemos

$$\frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}} H_{\vec{G}} e^{i(\vec{k}+\vec{G})\cdot\vec{r}} \hat{z} = \sum_{\vec{G}, \vec{G}'} \bar{\epsilon}_{\vec{G}-\vec{G}'} H_{\vec{G}'} (\vec{k} + \vec{G}') \cdot (\vec{k} + \vec{G}) e^{i[\vec{k}+\vec{G}']\cdot\vec{r}} \hat{z}.$$

Reordenando los términos, y juntando las sumatorias llegamos el problema de autovalores, para el transversal eléctrico (TE):

$$\frac{\omega^2}{c^2} H_{\vec{G}} = \sum_{\vec{G}'} \bar{\epsilon}_{\vec{G}-\vec{G}'} H_{\vec{G}'} (\vec{k} + \vec{G}') \cdot (\vec{k} + \vec{G}). \quad (4.13)$$

Podemos hacer el mismo análisis para deducir que ocurre con el transversal magnético (TM), en donde consideramos $\vec{H} = \{H_x, H_y, 0\}$ y $\vec{E} = \{0, 0, E_z\}$. $\vec{H}(\vec{r})$ pertenece a el plano xy , y es perpendicular al campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ que está en la dirección \hat{z} ; además, cada onda plana en la expansión debe tener su campo magnético perpendicular a la dirección de propagación de la onda plana dada por \vec{k} . Así $\vec{H}_{\vec{G}}$ está en la dirección del vector unitario

$$\hat{h}_{\vec{G}} = \frac{(\vec{k} + \vec{G}) \times \hat{z}}{|\vec{k} + \vec{G}|}.$$

Usando esto, y siguiendo el mismo procedimiento anterior llegamos a la ecuación de autovalores para el transversal magnético (TM):

$$\frac{\omega^2}{c^2} H_{\vec{G}} = \sum_{\vec{G}'} \bar{\epsilon}_{\vec{G}-\vec{G}'} H_{\vec{G}'} \left| \vec{k} + \vec{G}' \right| \left| \vec{k} + \vec{G} \right|. \quad (4.14)$$

El campo eléctrico también se puede expandir en una serie de Fourier de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \vec{E}_{\vec{G}} e^{i(\vec{k} + \vec{G}) \cdot \vec{r}}. \quad (4.15)$$

Para encontrar los coeficientes de Fourier $\vec{E}_{\vec{G}}$ se puede utilizar directamente las

ecuaciones de Maxwell (2.1) que relaciona el campo magnético con el campo eléctrico,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= i\omega\mu_0\vec{H} \\ \vec{\nabla} \times \left[\sum_{\vec{G}} \vec{E}_{\vec{G}} e^{i(\vec{k}+\vec{G})\cdot\vec{r}} \right] &= i\omega\mu_0 \sum_{\vec{G}} \vec{H}_{\vec{G}} e^{i(\vec{k}+\vec{G})\cdot\vec{r}} \\ i(\vec{k} + \vec{G})\vec{E}_{\vec{G}} &= i\omega\mu_0\vec{H}_{\vec{G}}, \\ \vec{E}_{\vec{G}}, \vec{H}_{\vec{G}} &\rightarrow E_{\vec{G}}\hat{h}_{\vec{G}}, H_{\vec{G}}\hat{h}_{\vec{G}} \\ E_{\vec{G}} &= \frac{\omega\mu_0}{|\vec{k} + \vec{G}|} H_{\vec{G}}.\end{aligned}$$

Hemos escrito el campo eléctrico en función del campo magnético, y este último podemos encontrarlo a partir de las ecuaciones (4.13) y (4.14), las cuales tienen una dependencia explícita de los coeficientes de Fourier de la expansión de la permitividad eléctrica. En general, estos coeficientes se encuentran numéricamente, ya que la función $\frac{1}{\epsilon(\vec{r})}$ representa una geometría arbitraria que en general, no tiene expresión analítica, entonces los coeficientes $\bar{\epsilon}_{\vec{G}}$ vienen dados por

$$\bar{\epsilon}_{\vec{G}} = \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\epsilon(\vec{r})} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} d\vec{r}. \quad (4.16)$$

donde A , corresponde al factor de normalización. Como caso particular y para entender el significado de toda la deducción anterior calculamos la estructura de bandas de un sistema unidimensional con una función de la permitividad eléctrica $\epsilon(\vec{r})$ escalonada, como la que se muestra en la Fig.6.

Para calcular los coeficientes de Fourier de la función $\frac{1}{\epsilon(\vec{r})}$, es necesario aproximar la suma infinita de ondas planas de la ecuación (4.16) por un número mínimo de ondas planas tal que el error en la reconstrucción del potencial sea pequeño. A continuación, para el potencial esquematizado en la Fig.6, se generó una expansión en 60 coeficientes de Fourier, lo que genera un potencial reconstruido en el espacio

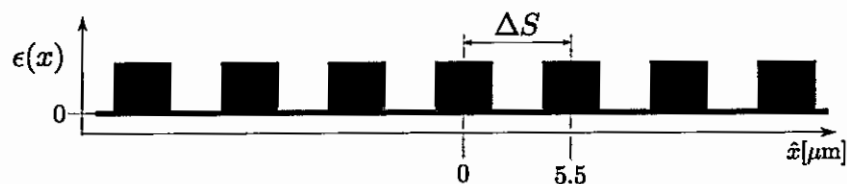


Fig. 6. Esquema de la función de permitividad eléctrica, para un sistema óptico unidimensional, ΔS representa la separación de las guías de onda.

real como el que se muestra en la Fig.7. Al calcular el espectro de soluciones, es notable la diferencia que se aprecia al compararlo a las soluciones cuando se tiene un medio con índice de refracción homogéneo. Allí todas las energías son posibles como se puede ver en el esquema de zona reducida de la Fig8 (b) y corresponde al análogo óptico de el caso de un electrón en el espacio libre. Por otra parte como se puede ver en la Fig. 8 (a), cuando se considera un potencial periódico se abren ciertos espacios en las energías posibles, dando lugar a la estructura de bandas del sistema. Estos espacios conocidos como "gaps" [46] corresponden a las energías prohibidas del sistema, y se pueden entender (desde el modelo de Kronny Penny [46]) como los lugares en que los autovalores se tornan complejos. Por lo tanto, no existirán modos propagantes en el sistema, pero si soluciones evanescentes. En la Fig. 8 se muestra la comparación entre las energías permitidas para un sistema óptico unidimensional homogéneo y un sistema óptico unidimensional periódico. las zonas en gris de la Fig. 8(a) corresponden a las energías prohibidas del sistema periódico que revela una profunda diferencia entre ambos sistemas, ya que como se ve en la Fig. 8(b) para un medio óptico homogéneo todas las energías están permitidas.

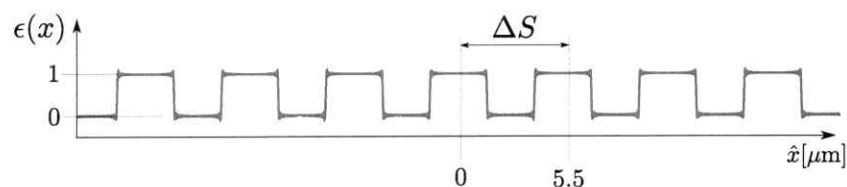


Fig. 7. Esquema de la función de permitividad eléctrica, para un sistema óptico unidimensional, reconstruida con una expansión de 60 coeficientes de Fourier, ΔS representa la separación de las guías de onda.

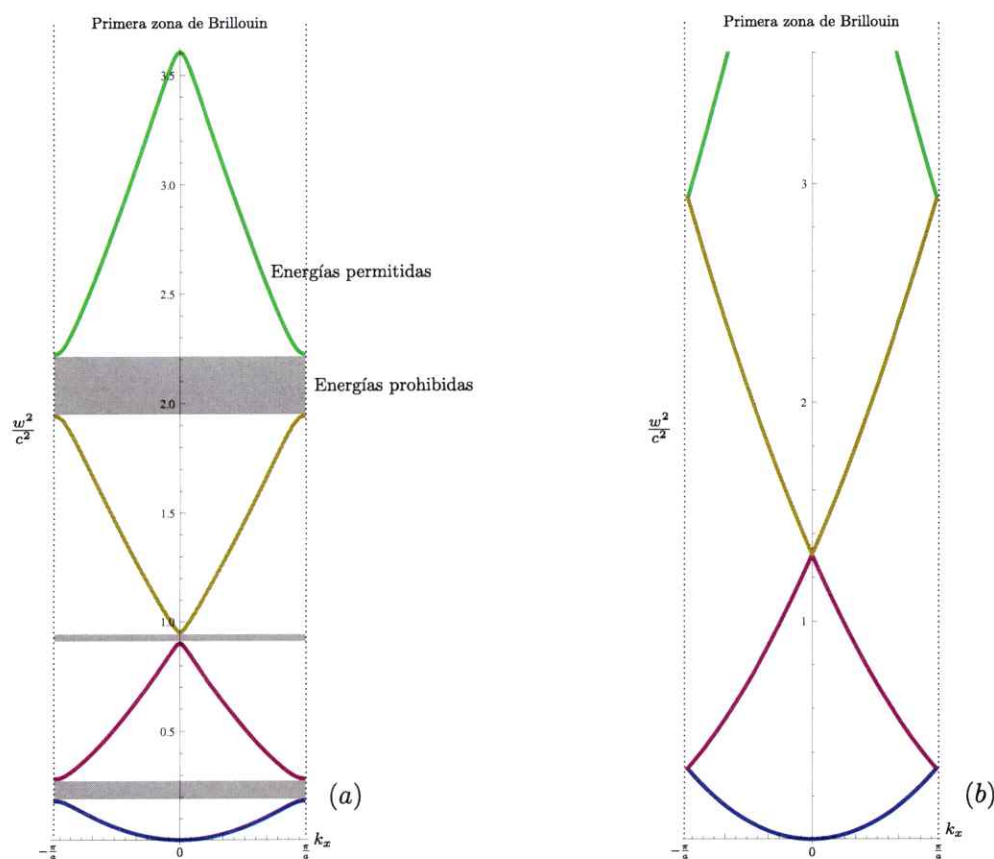


Fig. 8. (a) Estructura de bandas del transversal eléctrico (TE) en el esquema de zona reducida, de un sistema óptico unidimensional con índice de refracción periódico. (b) Estructura de bandas en el esquema de zona reducida, de un sistema óptico unidimensional con índice de refracción homogéneo.

Capítulo 5

Arreglos de guías periódicos: Modelo discreto

Los sistemas ópticos periódicos, de manera análoga a un electrón en un potencial periódico presentan una estructura de bandas en función del “cuasimomento” \vec{k} . En los sistemas ópticos discretos, modelados con la ecuación (3.10), como los arreglos de guías de ondas fabricados con la técnica de escritura con láser de femtosegundos, cada guía es construida para que soporte sólo el modo fundamental ($TM_{0,0}$). Luego son las combinaciones de amplitud y fase de los modos de las guías, lo que da lugar a los modos del sistema global o (supermodos) [ver Fig. 9]. Así, en un sistema discreto periódico de guías de ondas, se puede encontrar una base de modos lineales del sistema y se puede definir entonces el concepto de bandas permitidas de propagación y zonas prohibidas o “gaps”. Si bien es cierto que en el modelo (3.10) se trabaja en el régimen espacial, (la variable dinámica de la ecuación es la dirección de propagación no el tiempo), el tratamiento matemático es exactamente el mismo que para el caso de un electrón en un potencial periódico, por lo que todo lo que hemos visto en los capítulos anteriores se aplica perfectamente. Para encontrar entonces los modos y frecuencias posibles de propagación para la luz en la dirección de propagación, tenemos que encontrar la base de modos del sistema. Partiremos analizando dos casos

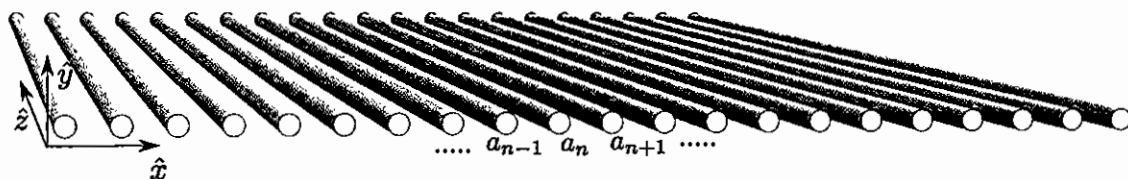


Fig. 9. Esquema de un arreglo unidimensional periódico de guías de onda.

que resultarán ilustrativos para entender estos conceptos y aplicarlos más adelante en esta tesis.

5.1. Red unidimensional ordenada

Las cadenas unidimensionales han sido extensamente estudiadas en sistemas periódicos, tanto en el régimen lineal como no-lineal [9], ya que representa la geometría periódica más simple, pero que es útil para obtener intuición sobre que ocurrirá en sistemas más complejos. Consideraremos una red unidimensional ordenada a un conjunto de guías de ondas equiespaciadas, cada una de ellas con el mismo índice de refracción, como se ilustra en la Fig. 9.

El sistema descrito por el modelo (3.10) es completamente lineal, por lo que inspirados en la solución (4.7), proponemos como ansatz una expansión en los modos normales del sistema, de la forma:

$$a_{\vec{n}}(z) = a_{\vec{n}} e^{-i\beta z}, \text{ con } a_{\vec{n}} = A_{\vec{n}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{n}}. \quad (5.1)$$

En donde $A_{\vec{n}}$ corresponde a la amplitud del sitio \vec{n} -simo del modo estacionario, $\vec{n} = \{a_x x, a_y y\}$ es la posición en el espacio de la \vec{n} -sima guía de ondas, con respecto a un eje de coordenadas arbitrario, pero además, representa el índice para identificar cada guía. β es la constante de propagación en la dirección de propagación y,

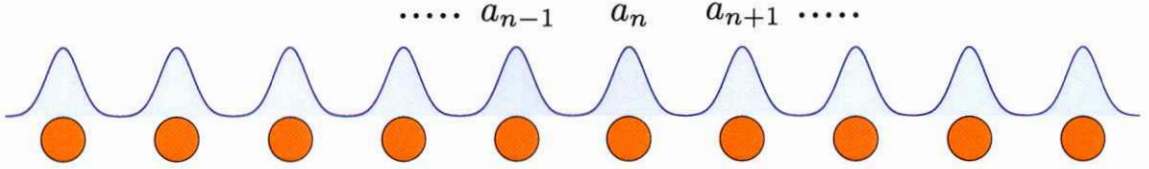


Fig. 10. Esquema de las funciones de onda del modelo discreto en cada guía de un arreglo periódico unidimensional.

finalmente, \vec{k} es el vector de onda. Notemos que debido a que los arreglos de guías sólo tienen periodicidad en las direcciones ortogonales a la dirección de propagación \hat{z} , entonces las componentes no nulas del vector de onda \vec{k} que se obtienen del producto interno $\vec{k} \cdot \vec{n}$ para cualquier geometría son k_x y k_y . Para el caso de una red unidimensional $n_{\vec{r}} \rightarrow n$, y la ecuación (3.10) para cada guía toma la forma,

$$i \frac{\partial a_n}{\partial z} + \beta_n a_n + \sum_{m \neq n} V_{n,m} a_m = 0. \quad (5.2)$$

Si consideramos que todas las guías de ondas tienen el mismo, podemos usar el modelo (3.11) y eliminar el parámetro β en la ecuación (5.2), con lo que el modelo queda como:

$$i \frac{\partial a_n}{\partial z} + \sum_{m \neq n} V_{n,m} a_m = 0. \quad (5.3)$$

Luego, para encontrar los modos del sistema tenemos que reemplazar el ansatz (5.1) en la ecuación (5.2), para cada sitio de la celda unitaria, ya que según el teorema de Floquet-Bloch toda la información de los modos normales del sistema esta contenida en la celda unitaria [46]. De manera análoga al caso continuo visto en el capítulo 5, el procedimiento anterior nos conducirá a un problema de autovalores, que dependerá de cada geometría en particular, (cada geometría posee una celda unitaria distinta), y de cuantos vecinos cercanos consideremos en la descripción. En

principio, toda la información de la geometría del sistema y de las interacciones que puede tener cada guía de ondas y por lo tanto, la información de la dinámica del sistema está contenida en la matriz de acoplamientos $V_{n,m}$.

Consideremos el caso de una red unidimensional en la cual sólo están permitidas las interacciones con los vecinos más cercanos (esto se puede justificar dependiendo de los parámetros de longitud de onda de la luz, la distancia de propagación total, el contraste del índice de refracción entre las guías y el índice de refracción nominal del material o la distancia de separación entre las guías). Modificando cualquiera de los parámetros mencionados anteriormente, tenemos que en la sumatoria de la parte derecha de la ecuación (5.2) sólo sobrevivirán dos términos, ya que la matriz $V_{n,m}$ tiene sólo dos términos no nulos que son, en el caso de la guía n -sima los términos $m = n + 1$ y $m = n - 1$. Además todas las guías de onda son exactamente iguales por lo que el acoplamiento de la guía n es el mismo con la guía $n + 1$ que con la guía $n - 1$, y es dado por V , con lo que la ecuación (5.2) se reescribe como,

$$i \frac{\partial a_n}{\partial z} + V(a_{n-1} + a_{n+1}) = 0. \quad (5.4)$$

Con el fin de encontrar la relación entre las componentes transversales del vector de onda \vec{k} y la constante de propagación en la dirección de propagación \hat{z} , reemplazamos el ansatz (5.1) y nos queda:

$$\begin{aligned} \beta A e^{-i\beta z} e^{i a_x k_x} &= AV(e^{i(a_x-1)k_x} + e^{i(a_x+1)k_x}) e^{-i\beta z} \\ \beta(k_x) &= 2V \cos(a_x k_x). \end{aligned} \quad (5.5)$$

La ecuación (5.5) describe la relación entre el vector de onda en la dirección transversal \hat{x} y la constante de propagación en la dirección \hat{z} para un sistema discreto infinito. En la en Fig.11 se muestra la estructura de bandas de la constante de propagación

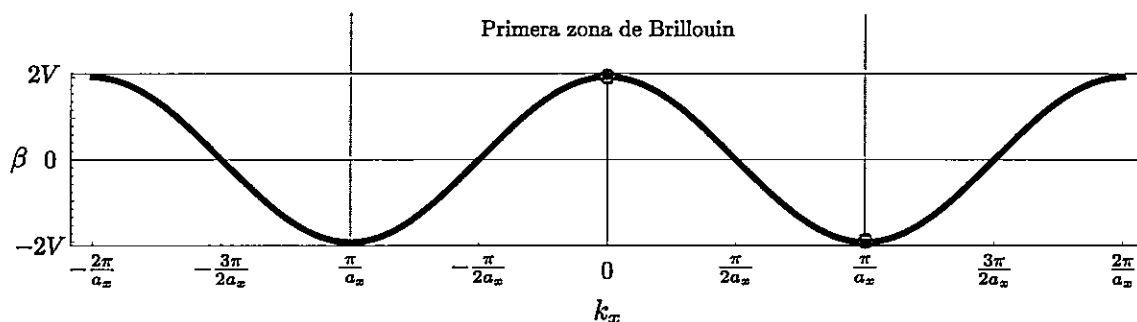


Fig. 11. Estructura de bandas de un sistema discreto unidimensional ordenado.

en el límite discreto, esta tiene una cota mínima dada por $-2V$ y una cota máxima dada por $2V$, y corresponde a una aproximación de la primera banda de un sistema continuo. Además, de la definición de la velocidad de grupo: $v_g = \frac{d\beta}{dk_x}$, se deriva que la máxima velocidad de las ondas que se propagan en este sistema es $v_{max} = |2V/a_x|$, lo que ocurre para,

$$\sin(a_x k_x) = 1 \Rightarrow k_x = \pm \frac{\pi}{2a_x} m, \text{ con } m \in \mathbb{Z}, \quad (5.6)$$

cuando consideramos un sistema finito, aún podemos proponer el ansatz (5.1) como solución o modos estacionarios del sistema, la diferencia vendrá dada por las condiciones de borde, las cuales se considerarán fijas en esta tesis. Los modos normales que se encuentran en este caso, se pueden entender como los modos normales de una cuerda para una red 1D. A continuación en la Fig.12 se muestran tres modos que corresponden al primer, segundo y último modo lineal de la cadena unidimensional, respectivamente.

Cuando se inyecta una condición inicial fuertemente localizada, esto es, por ejemplo, inyectar luz sólo en una guía de la red, entonces se excitan incoherentemente todos los modos normales que tengan amplitud distinta de cero en esa guía, lo que se traduce en que la condición inicial comienza a difractar debido a que todos los modos

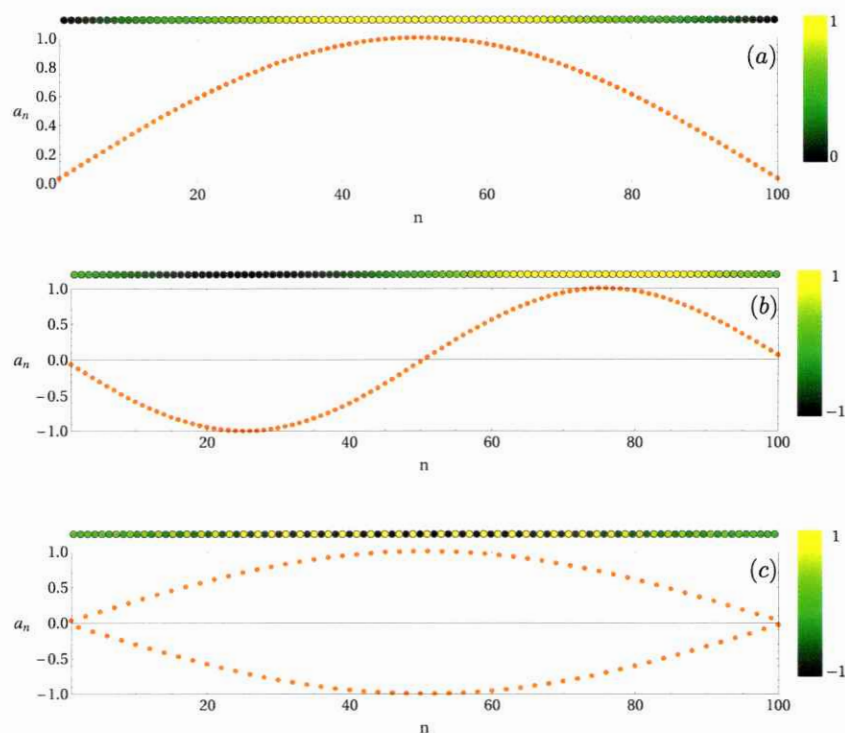


Fig. 12. Ejemplos de tres modos lineales de un arreglo de guías unidimensional de 100 sitios: (a) Modo fundamental. Este modo corresponde al punto naranja superior marcado en la primera zona de Brillouin en la Fig.11. (b) Segundo modo. (c) Modo “staggered”. Este modo corresponde al punto naranja inferior marcado en la primera zona de Brillouin en la Fig.11.

tienen frecuencias distintas. Esto se conoce como difracción discreta y muestra entre otras cosas lo bien que este modelo puede reproducir la fenomenología observada experimentalmente (ver comparación de la Fig.4 (a) y (b)).

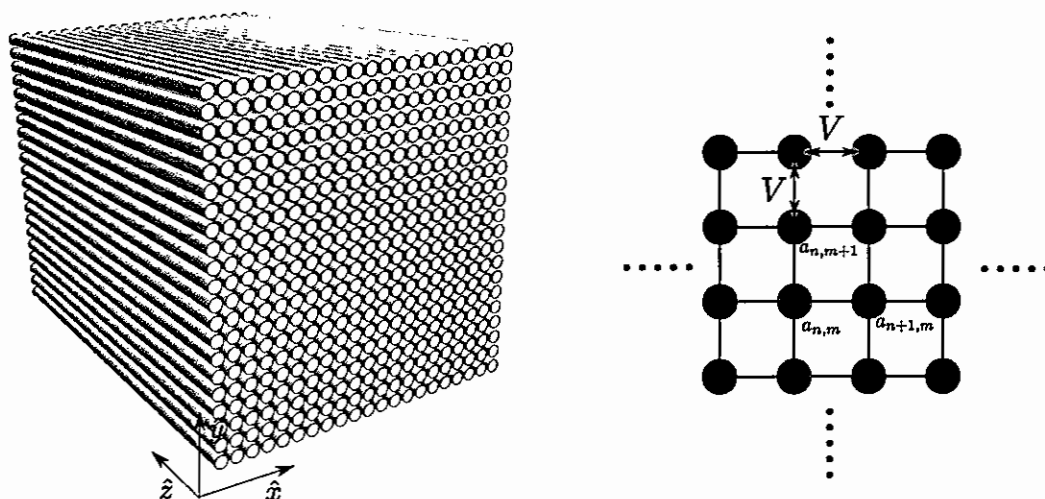


Fig. 13. Esquema de la red rectangular ordenada.

5.2. Red 2D rectangular ordenada

Si pensamos en arreglos de guías bidimensionales descritos por el modelo discreto o “Tight-binding” óptico, es conveniente, por simplicidad, y para ganar intuición, comenzar con la geometría bidimensional rectangular, la que ha sido ampliamente estudiada en muchas ramas de la física de sistemas periódicos [45], y se puede entender como una repetición periódica de un arreglo unidimensional. En esta sección se mostrará a modo de ejemplo la estructura de bandas de la red rectangular y los modos estacionarios asociados a una red finita. Consideremos una red de guías de ondas con geometría rectangular (ver Fig.13), en que todas las guías de onda tienen el mismo índice de refracción y que, además, están equiespaciadas, por lo que podemos modelar el sistema con la ecuación (3.11). Si además consideramos acoplamientos sólo con los vecinos cercanos, entonces la ecuación que describe la variación de la amplitud en cualquier sitio de un arreglo de guías con geometría rectangular

vendrá dada por:

$$i \frac{\partial a_{n,m}}{\partial z} + V (a_{n+1,m} + a_{n-1,m} + a_{n,m+1} + a_{n,m-1}) = 0.$$

Reemplazando el ansatz (5.1) en todos los sitios de la celda unitaria, obtenemos la relación de dispersión o las bandas del sistema:

$$\beta = 2V [\cos(a_x k_x) + \cos(a_y k_y)]. \quad (5.7)$$

Para el caso de una red ordenada en donde todas las guías son exactamente iguales y todas están equiespaciadas, el parámetro $a_x = a_y = a$. En la Fig.14, se grafica la estructura de bandas del arreglo de guías de onda 2D rectangular. Como podemos ver, a diferencia del caso de una red unidimensional, las constantes de propagación en este caso van desde $-4V$ como cota inferior a $4V$ como cota superior. La velocidad de grupo en este sistema tiene como cota superior $4|V|/a$ y se obtiene considerando,

$$\sin(ak_x) = 1 \text{ y } \sin(ak_y) = 1 \Rightarrow k_x, k_y = \pm \frac{\pi}{2a} m, \text{ con } m \in \mathbb{Z}.$$

Al igual que en el arreglo unidimensional las frecuencias del sistema se ordenen de menor a mayor. Cuando se considera un sistema finito, el ansatz (5.1) lleva a un problema de autovalores con el cuál se determinan los modos y las frecuencias. A modo de ejemplo, en la Fig. 15, se muestran cuatro modos lineales de un arreglo 2D rectangular, calculados numéricamente.

Cuando se propaga una condición inicial localizada tipo delta en un sitio de la red, esta excita incoherentemente a todos los modos del sistema que tengan amplitud distinta de cero en el sitio, y el resultado de esto es la difracción a lo largo de la dirección de propagación de la condición inicial. En la Fig. 5 se muestra la difracción discreta de una condición inicial localizada en un sitio de en un arreglo 2D rectangular. Debido a la simetría particular de este arreglo de guías, la difracción discreta se puede expresar como la superposición de dos patrones difractantes unidimensionales.

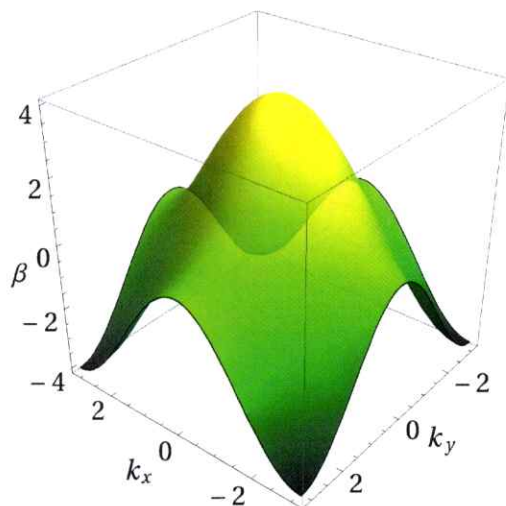


Fig. 14. Estructura de banda de la red rectangular en el modelo discreto en la primera zona de Brillouin.

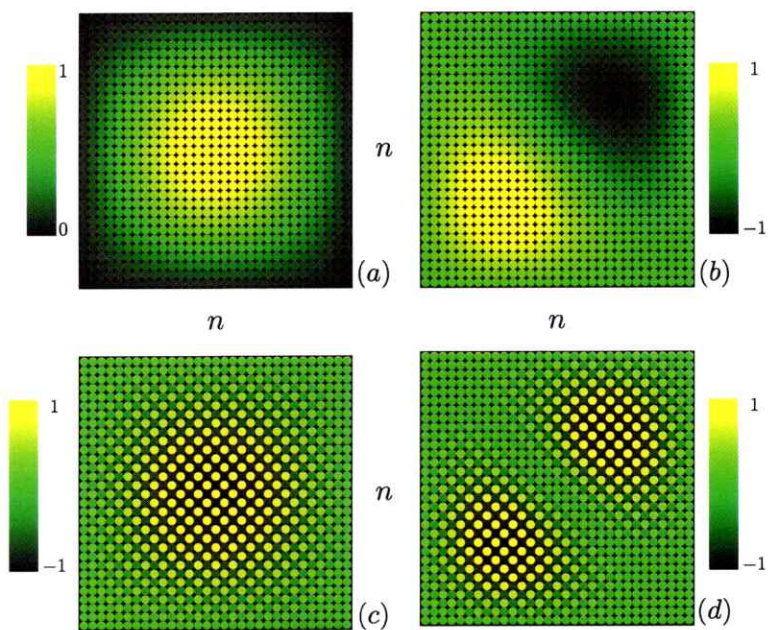


Fig. 15. Ejemplos de cuatro modos lineales de un arreglo de guías 2D rectangular de 31×31 sitios: (a) Modo fundamental de una red rectangular. (b) Segundo modo de la red rectangular. (c) Modo “starggered”. (d) Modo “starggered” con dos lóbulos.

5.3. Método del dibujo

En las secciones anteriores de este capítulo, se discutió el problema de redes infinitas y cómo encontrar el espectro de bandas, reemplazando el ansatz (5.1) en todos los sitios de la celda unitaria de la geometría bajo estudio. En el caso de redes finitas el espectro de bandas y los modos del sistema se encuentran de una manera análoga, pero hay que tomar en consideración las condiciones de borde. Así, para encontrar los modos y constantes de propagación permitidas, se considera como celda unitaria todo el sistema y entonces se reemplaza el ansatz (5.1) en cada sitio de la red en estudio. En este punto resolver el problema computacionalmente resulta engorroso cuando se consideran redes con geometrías no convencionales con distintas condiciones de borde, ya que fijar las condiciones de borde resulta muy específico para cada red, es por esto que en esta sección se estudia un método con el cual las condiciones de borde del sistema se pueden fijar para cualquier geometría de los arreglos de guías; simplemente, asignando un valor límite o "cut-off" de vecinos cercanos que se quiere considerar para escribir las ecuaciones de cada sitio de la red.

Supongamos una red de N sitios con geometría y bordes arbitrarios. Consideremos que esta red se modela con la ecuación (3.10); es decir, las guías de onda pueden tener distintos índices de refracción y no necesariamente deben estar equiespaciadas, lo que implica directamente que las constantes de acoplamiento entre distintos sitios pueden ser distintas. Para encontrar los modos estacionarios del sistema, tomamos toda la red como una celda unitaria, por lo que al reemplazar el ansatz (5.1) en la ecuación diferencial de cada guía de la red, el problema se reduce a un problema de autovalores, en donde la ecuación para el sitio \vec{n} -simo del arreglo toma la forma,

$$\beta A_{\vec{n}} = \sum_{\vec{m}}^N V_{\vec{n},\vec{m}} A_{\vec{m}}. \quad (5.8)$$

Donde $A_{\vec{n}}$ representa la amplitud del modo estacionario en la guía \vec{n} -sima, y $V_{\vec{n},\vec{m}}$ corresponde al coeficiente que acopla al sitio \vec{n} con el sitio \vec{m} . En este punto es posible mapear el problema de una red genérica, en principio bidimensional a una red unidimensional haciendo $\vec{n} \rightarrow n$, pero considerando que los acoplamientos $V_{n,m}$ vendrán dados por la geometría original de la red. Con este mapeo, la ecuación (5.8) toma la forma:

$$\beta A_n = \sum_{m=1}^N V_{n,m} A_m. \quad (5.9)$$

La ecuación (5.9) describe el comportamiento de cada sitio de la red, y como se puede ver, en la sumatoria están considerados todos los sitios como si fuera una red unidimensional, pero con la salvedad que los coeficientes $V_{n,m}$ son calculados con las distancias entre guías del sistema original. En los arreglos de guías ópticos típicos, se encuentra que el coeficiente de acoplamiento $V_{n,m}$ decae exponencialmente en función de la distancia de separación entre las guías [6], esta función se puede obtener y ajustar experimentalmente y entonces los coeficientes $V_{n,m}$ se pueden calcular conociendo la distancia de separación entre un par de guías arbitrarias.

Cuando consideramos todos los sitios del sistema, es conveniente escribir la ecuación (5.9) de forma matricial,

$$\beta \vec{A} = \hat{V} \vec{A}, \quad (5.10)$$

donde $\vec{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots, A_N\}$ y \hat{V} es una matriz de $N \times N$, que almacena la información de los acoplamientos, energías de sitio y geometría del sistema. Entonces los autovectores y autovalores de la matriz \hat{V} serán los modos estacionarios y las constantes de propagación permitidas del sistema, respectivamente. El método del dibujo, consiste en asignar dinámicamente los coeficientes de la matriz \hat{V} , construyendo o "dibujando" la red en el espacio real. Así, se puede calcular la distancia

entre dos guías de onda n y m , y asignar el coeficiente $V_{n,m}$ a la matriz \hat{V} que describe el acoplamiento. El número de coeficientes distintos de cero que posea cada fila de la matriz \hat{V} dependerá del “cut-off” que se decida considerar para el sistema discreto. Recordando que el coeficiente de acoplamiento decae exponencialmente con la distancia de separación, este “cut-off” usualmente sólo considera los vecinos más cercanos, que son los más relevantes en la dinámica.

El método del dibujo, resulta especialmente cómodo y útil, cuando se trabaja en arreglos de guías con mediano o bajo número de sitios, y que tengan bordes no triviales, que resulte engorroso escribir directamente sus interacciones. Cabe mencionar que la desventaja que presenta este método, es que para asignar cada fila de la matriz \hat{V} de forma genérica (es decir, que no dependa de la geometría del arreglo de guías en particular) se tiene que calcular la distancia de separación entre todas las guías del sistema para poder asignar los valores de los coeficientes $V_{n,m}$, por lo que para sistemas muy grandes el tiempo de cálculo de estos coeficientes resulta considerable.

Capítulo 6

Arreglo de guías con geometría Sawtooth

La propagación de ondas en redes fotónicas, es bien entendida para sistemas convencionales [47, 48], donde la curvatura del espectro lineal se manifiesta por ejemplo, cuando se excita el sistema con una condición inicial localizada en un sólo sitio central del arreglo. Esta condición inicial excita todos los modos lineales que tienen amplitud distinta de cero en este sitio inicial, por lo que la dinámica está absolutamente dominada por una superposición lineal incoherente de estos modos. Por otra parte, existe una clase de sistemas no convencionales (con al menos dos sitios en la celda unitaria) que poseen un espectro lineal en donde al menos una banda puede ser completamente plana. Los ejemplos bidimensionales más comunes son la red tipo Kagome y tipo Lieb, que poseen dos bandas dispersivas y una banda completamente plana. Muy recientemente, la inducción experimental de la red Kagome [49] y sus propiedades no lineales fueron estudiadas [50]. Las propiedades lineales de la red Lieb, fueron estudiadas teóricamente y observadas experimentalmente [18], mostrando que el transporte depende fuertemente del sitio particular que se excita debido a los modos que son efectivamente excitados. Los modos que pertenecen a la banda plana son altamente degenerados y no difractan a través de la red, debido a que la

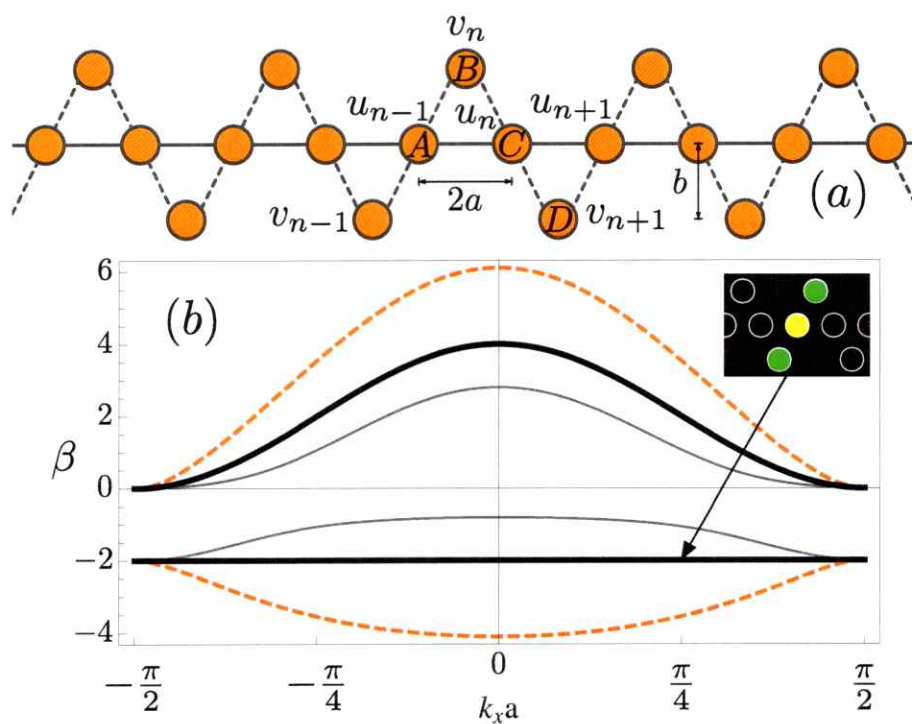


Fig. 16. (a) Red Sawtooth. Las interacciones lineales están denotadas por líneas continuas y discontinuas. (b) Espectro lineal de la red Sawtooth, para $\delta = 0.75$ (Delgada), $\sqrt{2}$ (Gruesa), and 2.5 (Discontinua). $V_1 = 1$.

curvatura de la banda es completamente cero. Los modos de banda plana tienen la misma constante de propagación, y una combinación de ellos se propagará sin ninguna distorsión a lo largo de la red, como una superposición lineal coherente [19,51]. Se ha demostrado que los estados de banda plana ocupan un espacio reducido de la red (del orden de la celda unitaria) y son compactos [33], es decir no tienen decaimiento exponencial. La excitación de este tipo de estados ha sido mostrada recientemente en el red tipo Lieb [51, 52], como describiremos en el Capítulo 7.

Existen varias redes cuasi-unidimensionales que muestran una banda plana y cu-

yas propiedades lineales intrínsecas no han sido exploradas experimentalmente. Por ejemplo, el modelo Sawtooth [53] tiene un origen matemático y consiste en una serie de triángulos iguales, orientados formando una red (también conocida como la red triangular [54]). En este modelo los sitios de los vértices de cada triángulo sólo interactúan con los sitios de la base de cada triángulo, por lo que este modelo no tiene un significado físico real, ya que no es posible evitar trivialmente la interacción entre los vértices de triángulos consecutivos. Una realización física de este modelo se puede obtener alternando los triángulo hacia arriba y hacia abajo, de tal forma de efectivamente alejar los vértices y evitar de esta manera el acoplamiento entre ellos. En la Fig.16 se muestra un esquema, en donde la celda unitaria esta formada por los sitios: A, B, C y D . Este modelo ha sido usado para describir las propiedades de $YCuO_{2.5}$ [55], que es una realización realista de esta red. Estudios recientes en esta red incluyen excitaciones topológicas cuánticas [56], así como condensación de Bose-Einstein en sistemas con banda plana [57]. Por otra parte, los estados lineales de superficie, usualmente se forman debido a defectos efectivos en el borde de la red. Existe un gran y largo debate acerca de la naturaleza de los estados de superficie y si ellos corresponden a estados tipo Tamm [58] o Shockley [59]; sin embargo, no hay ninguna distinción física aparte de la aproximación que describe al fenómeno. Usualmente los estados Tamm, en el modelo discreto, provienen de defectos en la superficie. Como ejemplo, estados Tamm no lineales fueron observados por encima de un umbral crítico de potencia en redes fotónicas homogéneas [60]. Además, la ausencia de vecinos cercanos en la superficie afecta la constante de propagación y permite la aparición de estados de borde localizados [61]. Los estados tipo Shockley usualmente se asocian con el cruce de orbitales atómicos o del traslape de bandas adyacentes [62].

En la red tipo Sawtooth no hay ondas que se propaguen en la dirección vertical, entonces el sistema puede ser trivialmente reducido y descrito por una celda unitaria que contenga sólo dos sitios $A = C$ y $B = D$, exactamente como en el modelo Sawtooth original. En la aproximación de teoría acoplada de modos (3.10), podemos describir la red Sawtooth por las dos ecuaciones de la celda unitaria:

$$\begin{aligned} -i\frac{\partial u_n}{\partial z} &= V_1(u_{n+1} + u_{n-1}) + V_2(v_n + v_{n-1}) , \\ -i\frac{\partial v_n}{\partial z} &= V_2(u_{n+1} + u_n) . \end{aligned} \quad (6.1)$$

En donde u_n y v_n representan la amplitud del campo en la fila central de la red (sitios A) y en la fila de arriba/abajo (sitios B), respectivamente, como se muestra en la Fig.16. V_1 y V_2 representan las constantes de acoplamiento horizontales y diagonales respectivamente, y su valor está determinado por la geometría del arreglo ya que los acoplamientos decaen exponencialmente en función de la distancia entre sitios [6]. Por simplicidad definimos el coeficiente $\delta \equiv V_2/V_1$ para describir los distintos regímenes de transporte de la red Sawtooth. Como se puede ver en la Fig.16, la geometría es tal que la distancia horizontal (d_h) entre los sitios A y B es a , mientras que la distancia entre dos sitios A es $2a$, y la distancia vertical entre los sitios A y B viene dada por b , que es la que variaremos para cambiar el valor del parámetro de control δ .

Las soluciones lineales del problema se encuentran reemplazando el anzats: $\{u_n(z), v_n(z)\} = \{\bar{A}, \bar{B}\} \exp(ik_x x_n) \exp(i\beta z)$ en las ecuaciones (6.1); es decir, ondas que se propagan en la dirección horizontal de la red, con \bar{A} y \bar{B} las amplitudes en cada sitio de la celda unitaria, respectivamente, y $x_n \equiv an$ correspondiendo a la posición horizontal de las guías. Así, obtenemos la relación de dispersión o espectro lineal de bandas de

la red tipo Sawtooth:

$$\beta(k_x) = V_1 \left[\cos(2k_x a) \pm \sqrt{1 + 4(\delta^2 - 1) \cos^2(k_x a) + 4 \cos^4(k_x a)} \right] .$$

Este sistema posee dos bandas lineales, con diferentes curvaturas y diferentes anchos. La Fig. 16 (b) muestra el espectro lineal de la geometría tipo Sawtooth en la primera zona de Brillouin, para tres valores representativos de δ . Observamos que para valores del parámetro δ entre 0 y 1, el "gap" que separa las bandas es pequeño y el sistema tiende a comportarse como un arreglo unidimensional. Para un valor crítico $\delta_c = \sqrt{2}$, el espectro de bandas se reduce a $\beta(k_x) = 4V_1 \cos^2(k_x a)$ y $-2V_1$; esto es, la banda inferior es constante y completamente plana [ver la línea gruesa en la Fig. 16 (b)]. Los estados que pertenecen a esta banda no dispersiva, y totalmente degenerada, tienen amplitud distinta de cero sólo en tres sitios $\{\dots, 0, 0, -1, \sqrt{2}, -1, 0, 0, \dots\}$ como muestra el inserto en la Fig. 16(b) (el color negro significa no luz). Estos estados localizados pueden ubicarse en cualquier región de la red y todos poseen la misma constante de propagación (para graficar simplídicamente perfiles teóricos y numéricos proyectamos los sitios de la red Sawtooth en una red unidimensional con rotulo \bar{n}).

Cuando se tiene un arreglo de guías con geometría Sawtooth, tal que el parámetro $\delta > \delta_c$ las curvaturas de la banda superior e inferior son opuestas, por lo que las ondas planas que pertenecen a cada banda viajarán con velocidades distintas en magnitud, y opuestas en dirección. Por otra parte, cuando se tiene un arreglo tal que $\delta < \delta_c$, ambas bandas tienen la misma dirección de la curvatura por lo que las ondas planas de ambas bandas viajan en la misma dirección pero con velocidades distintas. Mostramos este comportamiento, en la Fig.17, donde graficamos los perfiles de salida de una condición inicial gaussiana $a_n(0) = A_0 \exp[-(n - n_c)^2 / \sigma_0^2] \exp[ik_x a(n - n_c)]$,

para la misma distancia de propagación $z = z_m a x$ (equivalente al largo del arreglo). Donde A_0 representa la amplitud y σ_0 al ancho efectivo de la gaussiana (En nuestras simulaciones $\sigma_0 = 60$, lo que equivale a 20 sitios en el arreglo); k_x corresponde al vector de onda transversal, que le asigna una estructura de fase a la condición inicial permitiendo el movimiento de la condición inicial en el arreglo en dos haces. En todos los casos se observa que el haz puesto como condición inicial se divide. Para $\delta < \delta_c$, los dos frentes de onda se propagan en la misma dirección, con velocidades bajas debido a la curvatura de las bandas [ver Fig. 17 (a)]. Cuando $\delta = \delta_c$ [ver Fig. 17 (b)], se observa que una porción de la condición inicial queda atrapada debido a la excitación de la banda plana no difractante del sistema, mientras que también se observa que parte de la condición inicial se propaga a través de la red, debido a la excitación de la banda difractante. Vemos que para $k_x \approx \pi/4$, ambos frentes están bien separados y poseen casi la misma amplitud, esto es, un sistema divisor de haces basado en el concepto de bandas planas. Para $\delta > \delta_c$ observamos la separación de los dos frentes de onda en direcciones opuestas debido al cambio en la curvatura de la banda inferior [ver Fig.17 (c)]. Los frentes de onda son efectivamente separados en una manera controlada en los dos últimos casos.

Para estudiar las propiedades generales de transporte en este sistema, exploremos la excitación de guías individuales en el centro y en la superficie del arreglo. La Fig.18 muestra diferentes barridos para diferentes condiciones iniciales obtenidas integrando numéricamente el modelo (6.1). Construimos una red de $N = 100$ sitios, con bordes tipo A y B en los extremos izquierdo y derecho respectivamente, para estudiar la excitación de estados lineales de superficie. En la Fig.18 (a) y (b), se muestra la tendencia a localizar luz cuando se tiene una red tal que $\delta \approx \sqrt{2}$. Una

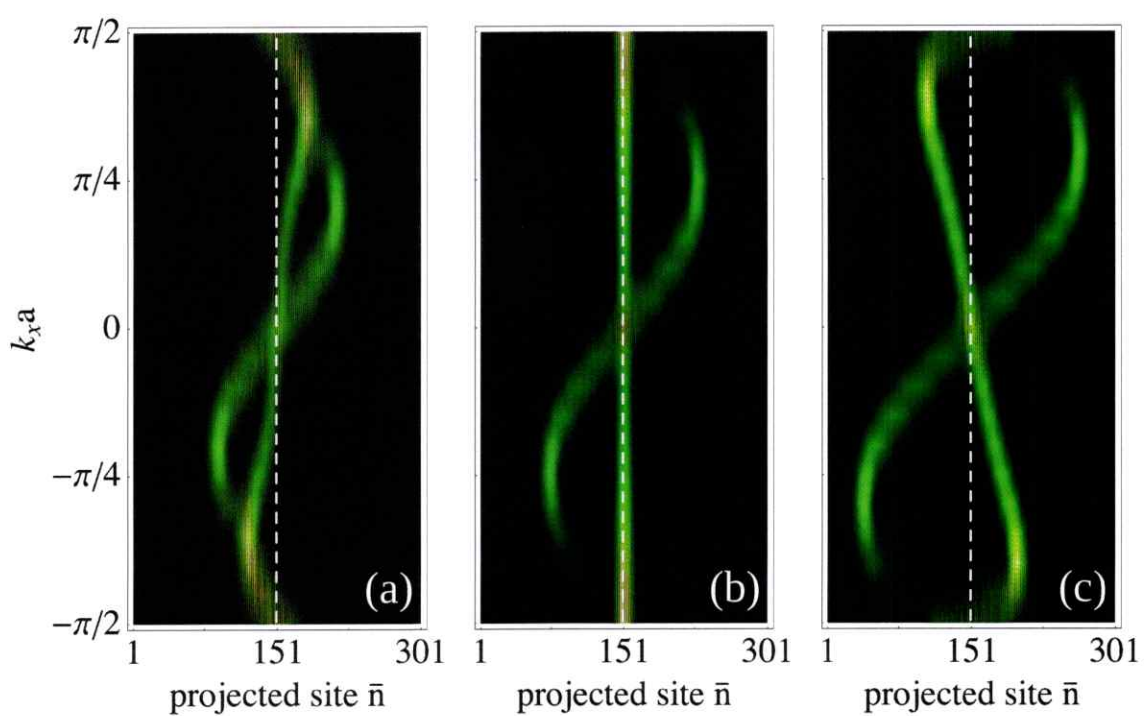


Fig. 17. Perfil de intensidad output proyectado vs el vector de onda k_x para: (a) $\delta = 0.75$. (b) $\delta = \sqrt{2}$. (c) $\delta = 2.5$, la posición inicial n_c esta dada por la lineal discontinua blanca.

condición inicial localizada excita fuertemente la banda inferior, lo que es evidente cuando se observa el perfil de intensidades. Cerca del parámetro crítico δ_c , es posible excitar la fenomenología de banda plana y el perfil que se observa a la salida se reduce a un área muy pequeña, incluyendo radiación que proviene principalmente de la banda superior (esto se puede ver en las altas velocidades de la radiación de fondo, asociada con la pendiente de la banda superior). Por lo tanto, variando la razón entre los acoplamientos δ , somos capaces de rastrear la tendencia a localizar energía en esta geometría, y atrapar luz en una región muy pequeña del espacio. Cuando excitamos la superficie del arreglo, notamos que la evolución es bastante diferente. Cuando excitamos el borde tipo *A*, observamos una tendencia a localizar luz más radiación de fondo que proviene, principalmente, de la banda superior. Por otro lado, cuando excitamos el borde tipo *B*, no observamos una clara tendencia a localizar; más bien, patrones elongados que decaen desde el borde.

Motivados por el comportamiento de la luz en esta red, calculamos el espectro lineal de una red finita con geometría Sawtooth. Diagonalizando la matriz que resulta del problema de autovalores (ver Capítulo 5), podemos encontrar el espectro de bandas numéricamente para una red Sawtooth finita, en función de la razón de entre los acoplamientos δ . Considerando una red de $N = 100$ sitios, con la que encontramos 100 autovectores y 100 autovalores. Notamos que las bandas encontradas analíticamente $\beta(k_x)$ para una red infinita, coinciden perfectamente con los resultados encontrados numéricamente pero, además, aparece un estado en el “gap” entre bandas que no se había predicho en la red infinita [ver la línea roja en la Fig.19(a)] (es importante mencionar que cuando la red tiene dos bordes tipo *A*, aparecen dos estados degenerados ubicados en cada borde). Los modos con este au-

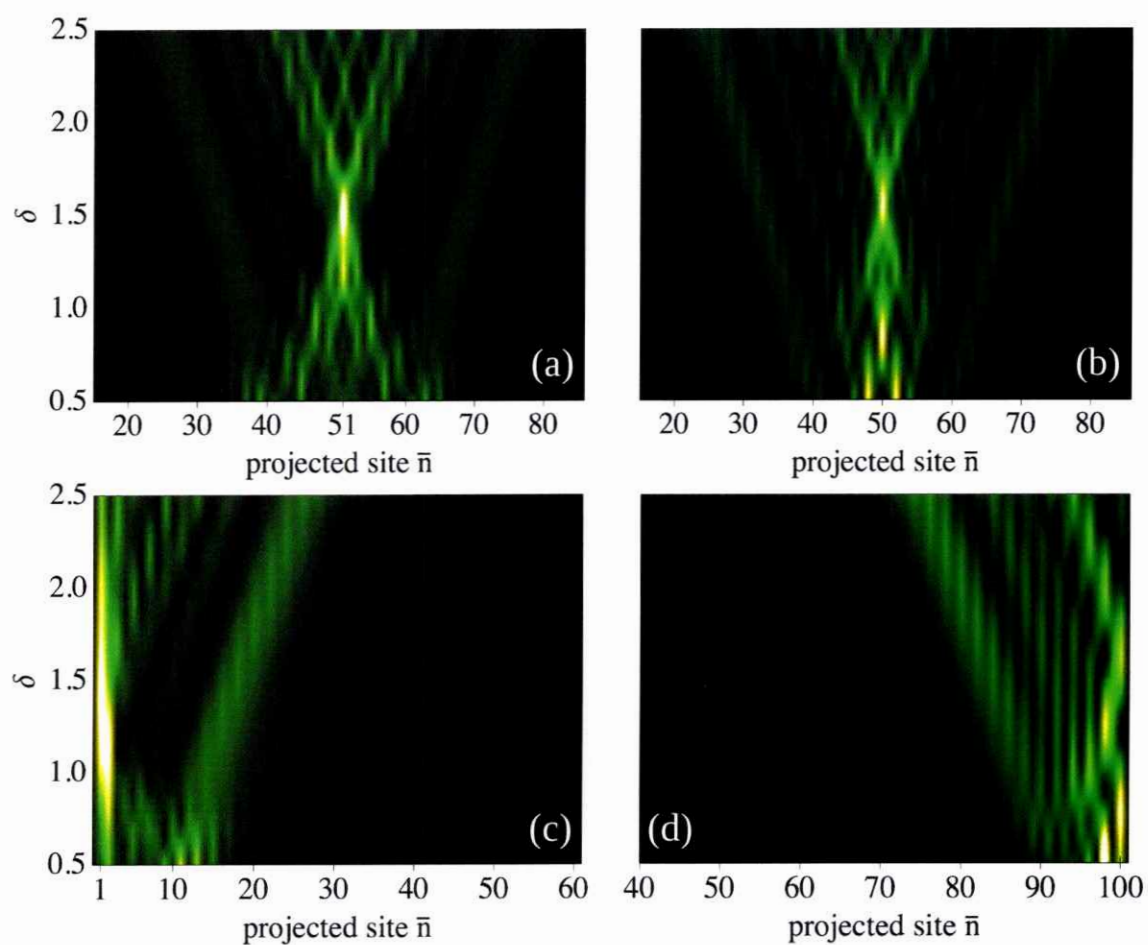


Fig. 18. Perfil del intensidad versus δ para excitaciones en: (a) Sitio A en el centro, (B) Sitio B en el centro, (c) Borde con sitio A , (d) Borde con sitio B .

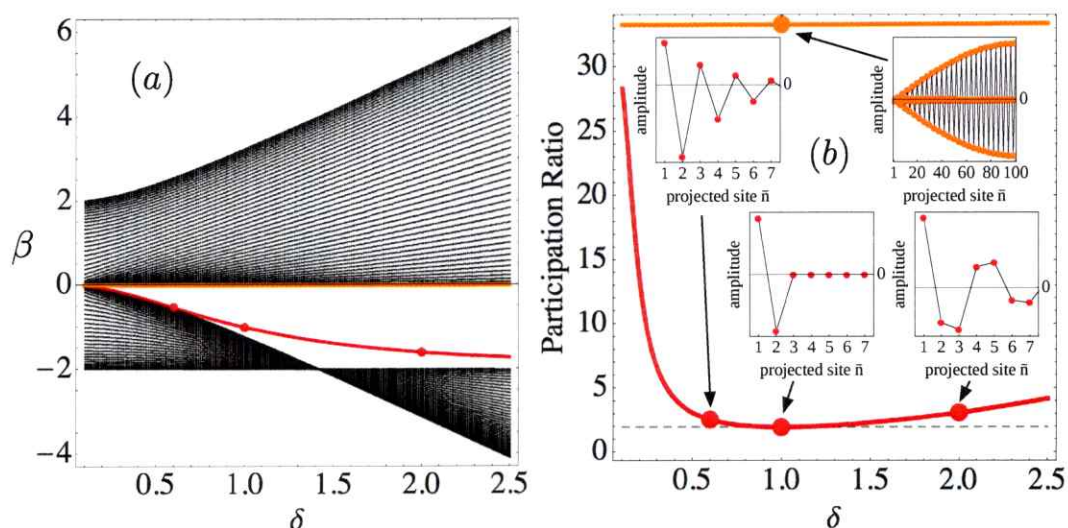


Fig. 19. (a) Espectro lineal vs δ . (b) Raz3n de participaci3n vs δ . Se muestran adem3s ejemplos de modos correspondientes a cuatro puntos indicados.

tovalor, son localizados en el espacio y decaen desde la superficie hacia el centro como se muestra en la Fig.19(b). En la misma figura se muestra la raz3n de participaci3n $R \equiv (\sum_{n=1}^N |u_n|^2)^2 / (\sum_{n=1}^N |u_n|)^4$ de estos estados en funci3n del par3metro δ , como podemos ver de la l3nea roja en la Fig.19(b), esta tiene un m3nimo cuando $\delta = 1$, siendo exactamente igual a $R = 2$; esto es, el estado s3lo ocupa dos sitios de la red, que tienen igual amplitud pero distinta fase. Para $\delta < 1$ la raz3n de participaci3n incrementa r3pidamente debido al l3mite con la cadena unidimensional, en donde no existen estados de superficie. Los estados en este caso tienen una fase “staggered” y el pick principal se mueve desde el borde hacia el centro. Para $\delta > 1$ la raz3n de participaci3n crece lentamente y los estados de superficie mantienen su alto grado de localizaci3n, adquiriendo una estructura de fase no trivial: $0, \pi, \pi, 0, 0, \dots$ [ver Fig.19 (b)]. El resto de los modos lineales [los puntos negros en el la Fig.19(a)] tienen una raz3n de participaci3n del orden del tama3o del sistema, siendo por tanto extendidos. Sin embargo existen ciertos modos que decaen desde el borde tipo B de manera

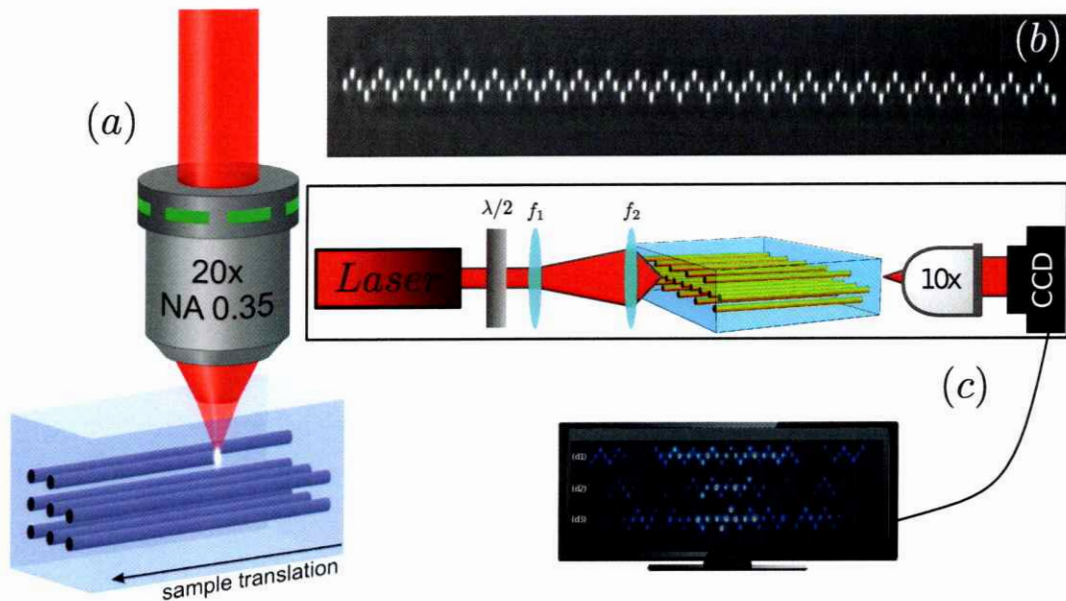


Fig. 20. (a) Técnica de escritura con láser de femtosegundos. (b) Imagen microscópica de la red fotónica Sawtooth. (c) Setup experimental para estudiar el transporte en esta red.

lineal más que exponencial, estos modos pertenecen al borde inferior de la banda superior [línea naranja en la Fig.19(a) y (b)].

6.1. Excitación experimental de arreglos Sawtooth con luz roja de 637nm: Condición inicial localizada

Con el fin de explorar si las propiedades de transporte en el centro y en el borde de la red Sawtooth predichas con el modelo discreto pueden ser o no observadas en un sistema real, propagamos luz en arreglos de guías de ondas fabricados con la técnica de escritura con láser de femtosegundos [6], con una distancia de propagación de 10 cm. En la Fig. 20 (b) se muestra el setup experimental para estudiar las redes fotónicas. Inyectamos luz en una guía específica de un arreglo Sawtooth

(Experimentalmente contamos con 5 arreglos para estudiar la dinámica), enfocando fuertemente un láser con una lente de distancia focal corta (≈ 5 cm). En la cara de salida del cristal tomamos imágenes utilizando un objetivo microscopio $10\times$ y una cámara CCD. Para los primeros experimentos utilizamos luz roja con $\lambda = 637$ nm, polarizada horizontalmente. Las realizaciones experimentales de la red Sawtooth, fueron construidas todas con la misma distancia horizontal entre sitios $a = 10\mu\text{m}$. Para variar el coeficiente δ se varía la distancia vertical $b \approx \{13, 15, 15.2, 15.4, 18\}\mu\text{m}$ de tal forma que los parámetros δ asociados a estas realizaciones experimentales son $\delta \approx \{1.04, 1.84, 1.87, 1.94, 2.19\}$ para $\lambda = 637$ nm. Es conveniente definir el parámetro $D_s \equiv b/a$, para referirnos a cada realización. Primero estudiamos el transporte excitando los sitios A y B del centro de la red, como se muestra en las Figs.21 y 22. Se observa como el transporte en la red es gobernado por las dos bandas del modelo discreto. Similar a las simulaciones discretas, la banda superior es débilmente excitada en comparación con la banda inferior que produce menos difracción. Experimentalmente, observamos claramente los diferentes regímenes. Cuando tenemos un arreglo Sawtooth con distancias verticales pequeñas [ver Figs.21(a) y 22(a)], la luz se dispersa a través del arreglo mostrando un claro "gap" entre las dos bandas dispersivas. Cuando incrementamos la distancia vertical b y δ es cercano a δ_c [ver Figs. 21 (b),(c),(d) y 22 (b),(c),(d)], se observa como la luz tiende a quedar atrapada en el centro de la red debido a la excitación de los modos de la banda inferior, lo que es un indicador de la reducción de la curvatura de esta banda. La banda superior es excitada sólo débilmente, observándose como los modos de esta banda escapan de la zona en donde se inyectó la condición inicial. Para $\delta < \delta_c$, el área de difracción se reduce y la luz se concentra en la fila central del arreglo, con un perfil más homogéneo [ver Figs. 21 (e) y 22 (e)]. Todas estas observaciones están en perfecto acuerdo con

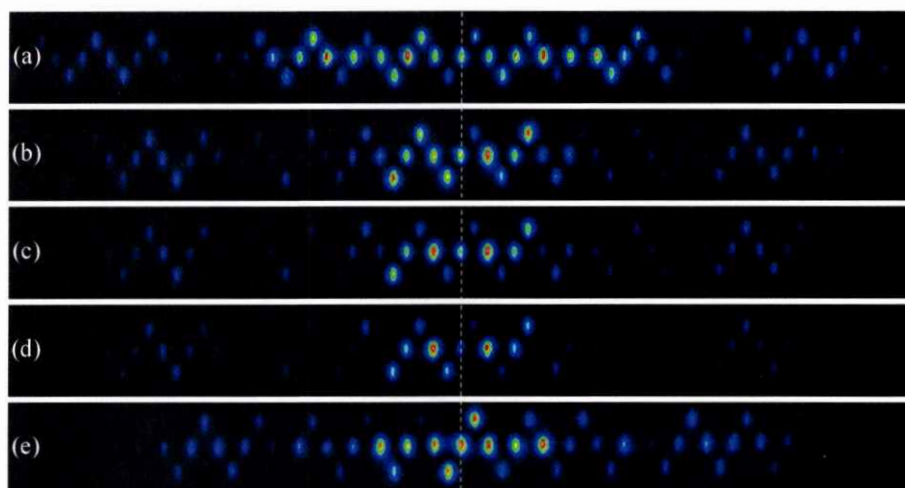


Fig. 21. Perfil de luz experimental tomado en la cara de salida del cristal con la geometría Sawtooth, para una excitación inicial en un sitio tipo A del centro de los arreglos con parámetros D_s : (a) 1.3, (b) 1.5, (c) 1.52, (d) 1.54, (e) 1.8.

los resultados numéricos mostrados en la Figs.18(a) y (b).

A continuación, estudiamos la excitación en los bordes tipo A y tipo B . Para los bordes tipo A como se muestra en la Fig.23 (la línea discontinua indica el lugar de la condición inicial que consiste en iluminar solo un sitio de la red) observamos un perfil fuertemente localizado, que está en acuerdo con nuestras simulaciones numéricas mostradas en la Fig.18(b). Este perfil localizado corresponde esencialmente a la excitación del modo de borde predicho por el modelo discreto en la Fig.19(a) y (b). Experimentalmente se observa una clara diferencia de fase π (región oscura) entre la amplitud del sitio de borde A ($\bar{n} = 1$) y las amplitudes del primer sitio B ($\bar{n} = 2$) y el segundo sitio A ($\bar{n} = 3$) (estas dos últimas amplitudes claramente están en fase, ya que en la imagen saturada se puede ver como la región entre guías no es cero). La estructura de fase del perfil observado se puede estudiar mediante la interferencia del

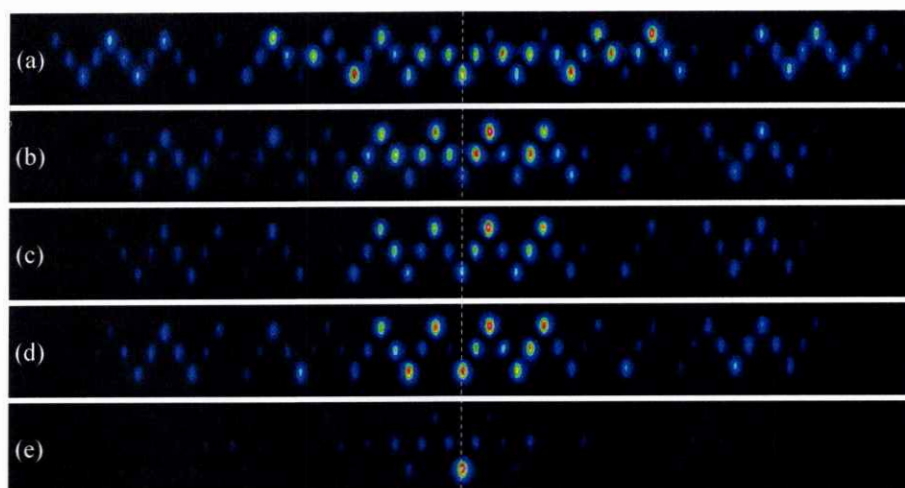


Fig. 22. Perfil de luz experimental tomado en la cara de salida del cristal con la geometría Sawtooth, para una excitación inicial en un sitio tipo B del centro de los arreglos, con parámetros D_s : (a) 1.3, (b) 1.5, (c) 1.52, (d) 1.54, (e) 1.8.

perfil de salida y una onda plana, como se puede ver en la Fig.23(b) este patrón es similar a la estructura de fase predicha para el modo de borde en el modelo discreto para $\delta = 1$ (en el barrido del parámetro δ experimentalmente, sólo se tiene $\delta > 1$, por lo que sólo se observa un tipo de estructura de fase). Finalmente, excitamos el borde tipo B de los arreglos, obteniéndose los perfiles de salida mostrados en la Fig.24. Como era de esperar, observamos un perfil elongado y decayendo desde el borde B , debido a la excitación de los modos del borde inferior de la banda superior del sistema. En esta región existe un conjunto de modos lineales extendidos ($R \approx N$), que decaen desde el borde tipo B , y que son bien excitados por la condición inicial. La razón de participación de estos estados decrece cuando decrece el parámetro δ por lo tanto el perfil espacial observado también decrece, como se observa en la fig.24 (b) y (c).

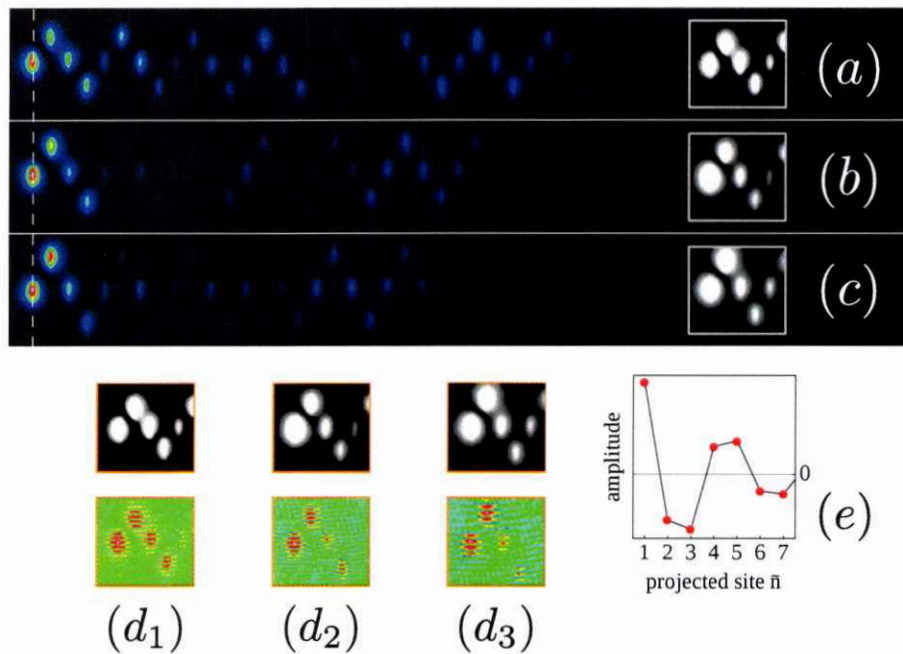


Fig. 23. Perfil de luz experimental tomado en la cara de salida del cristal con geometría Sawtooth, para una excitación inicial localizada en un sitio tipo A del borde de los arreglos, con parámetros D_s : (a) 1.3, (b) 1.52, (c) 1.8; (d) Patrones de interferencia del perfil de salida con una onda plana: (d_1) $D_s = 1.3$, (d_2) $D_s = 1.52$, (d_3) $D_s = 1.8$; (e) Modo localizado en la superficie encontrado en el modelo discreto.

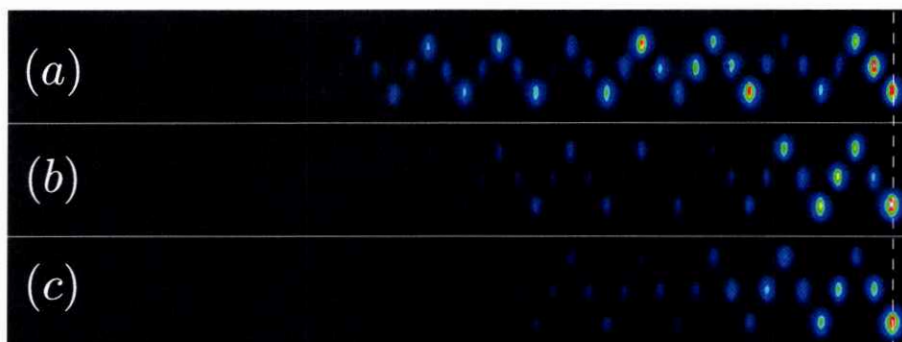


Fig. 24. Perfil de luz experimental tomado en la cara de salida del cristal con geometría Sawtooth, para una excitación inicial en un sitio tipo B del borde de los arreglos, con parámetros D_s : (a) 1.3, (b) 1.52, (c) 1.8.

6.2. Simulación del modelo continuo en arreglos de guías Sawtooth con luz roja de 637nm: Condición inicial localizada

Para corroborar la fenomenología encontrada en el modelo discreto y validar el comportamiento experimental, resolvemos numéricamente la ecuación lineal de Schrödinger (2.14), para luz roja (637nm). Construimos una función de índice de refracción $n(x, y)$ en Silicio [$n_0 = 1.46071$ para luz roja (637nm)], como un arreglo de guías con la geometría de Sawtooth [ver Fig. 25], con un contraste de índice de refracción entre las guías y material nominal de 5×10^{-4} para luz roja. La separación horizontal de las guías es tomada como $a = 10\mu\text{m}$, y se hace un barrido en la separación vertical, para encontrar la transición en donde el sistema muestra fenomenología de banda plana $b \approx \{13, 15, 15.2, 15.4, 18\}\mu\text{m}$. Las Figs.26 y 27 muestran los perfiles de la simulación, después de 10 cm de propagación, para una condición inicial localizada en una guía tipo A y tipo B del centro del arreglo, respectivamente. Como se puede observar la simulación continua describe casi perfectamente la observación

experimental y la fenomenología predicha teóricamente por el modelo discreto. Al igual que en los experimentos, se observa la misma tendencia a localizar luz cuando $\delta \approx \delta_c$, para una excitación en un sitio tipo A del centro del arreglo o en un sitio tipo B del centro del arreglo. De la misma forma, cuando se inyecta una condición inicial localizada en los bordes, las simulaciones numéricas del modelo (2.14), reproducen muy bien los resultados experimentales, y la fenomenología descrita por el modelo discreto. Como se puede ver en la Fig.28(a)-(c) el perfil después de 10 cm de una condición inicial en el borde tipo A del arreglo, tiene la misma estructura de fase en los primeros cuatro sitios (esto se puede ver al igual que en los experimentos al saturara las imágenes). Para una condición inicial localizada en el borde tipo B del arreglo, también se observa un excelente acuerdo entre las simulaciones numéricas y los resultados experimentales.

Las propiedades de transporte y localización encontradas teóricamente utilizando el modelo discreto (3.10) fueron corroboradas con simulaciones del modelo continuo (2.14) y observadas experimentalmente, en arreglos de guías de ondas fabricadas con la técnica de escritura con láser de femtosegundos. La transición en que un arreglo de guías con la geometría Sawtooth exhibe una banda plana fue observada tanto teórica como experimentalmente, pero adicionalmente se fabricaron más muestras experimentales (utilizando parámetros ajustados mediante simulaciones continuas), con el fin de observar más precisamente la transición de la banda plana en esta geometría.

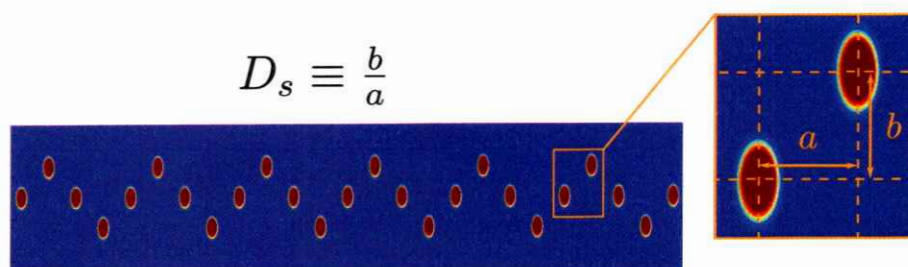


Fig. 25. Esquema del índice de refracción $n(x, y)$ con geometría Sawtooth utilizado en las simulaciones continuas.

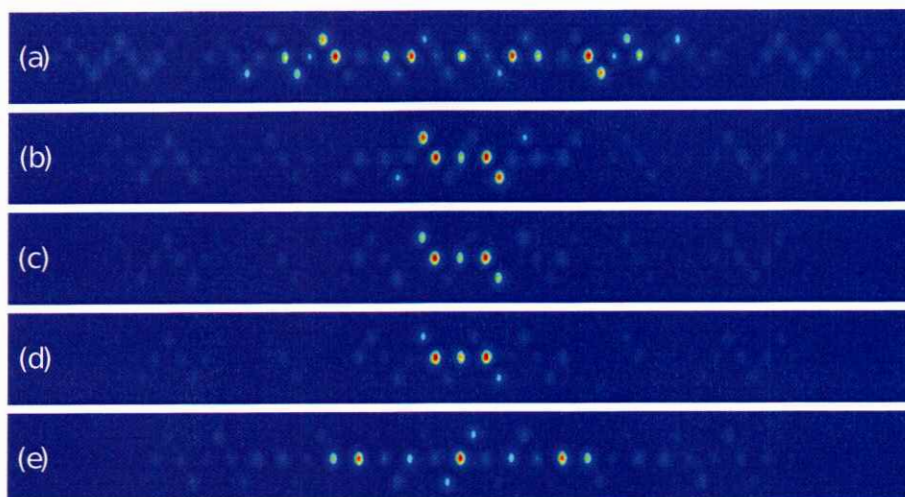


Fig. 26. Simulación numérica del modelo (2.14) con luz roja (637nm), después de 10 cm de propagación, para un índice de refracción $n(x, y)$ con la geometría Sawtooth, para una excitación inicial en un sitio tipo A del centro de los arreglo con parámetros D_s : (a) 1.3, (b) 1.5, (c) 1.52, (d) 1.54, (e) 1.8.

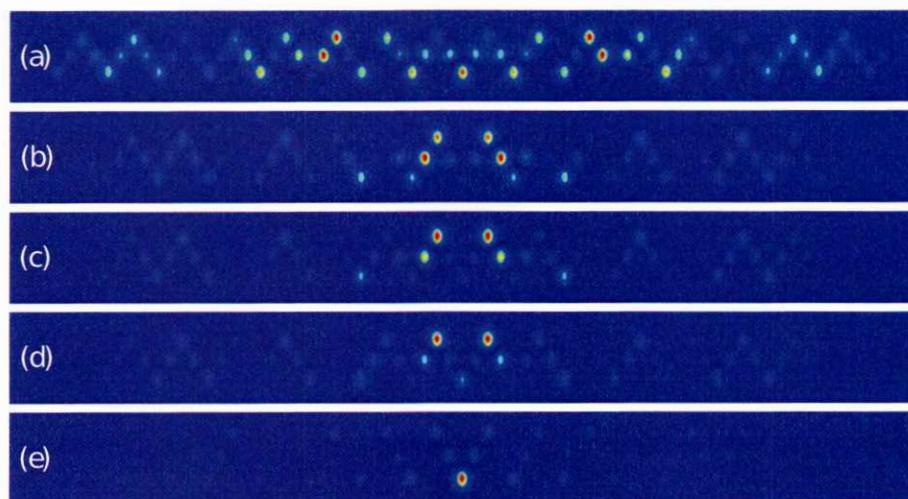


Fig. 27. Simulación numérica del modelo (2.14) con luz roja (637nm), después de 10 cm de propagación, para un índice de refracción $n(x, y)$ con la geometría Sawtooth, para una excitación inicial en un sitio tipo B del centro de los arreglo con parámetros D_s : (a) 1.3, (b) 1.5, (c) 1.52, (d) 1.54, (e) 1.8.

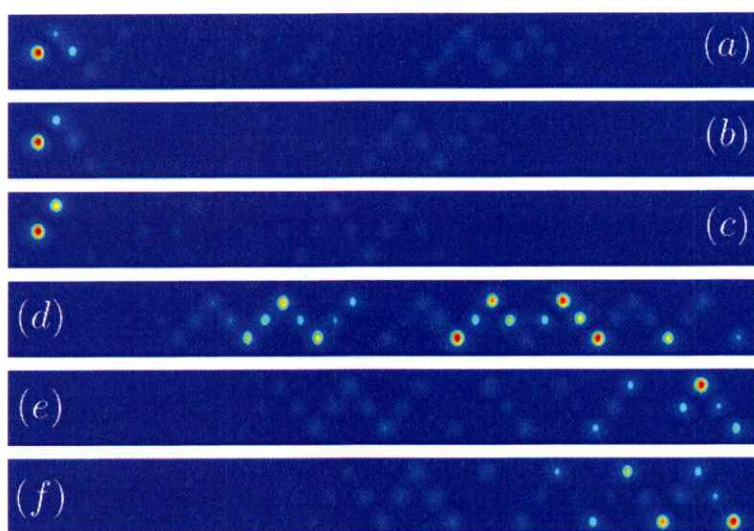


Fig. 28. Simulación numérica del modelo (2.14) con luz roja (637nm), después de 10 cm de propagación, para un índice de refracción $n(x, y)$ con la geometría Sawtooth. Condición inicial en un sitio tipo A del borde de los arreglo con parámetros D_s : (a) 1.3, (b) 1.52, (c) 1.8. Condición inicial en un sitio tipo B del borde de los arreglo con parámetros D_s : (d) 1.3, (e) 1.52, (f) 1.8.

Capítulo 7

Arreglo de guías con geometría Lieb

La localización de excitaciones en redes periódicas usualmente se obtiene con defectos que pueden ser localizados, extendidos, lineales o no lineales, o simplemente desorden, con el fin de generar estados localizados. Sin embargo, existe otra forma de lograr localización, en donde la red permanece perfectamente periódica, pero es capaz de soportar estados localizados (compactos, sin decaimiento exponencial). En estos casos es posible encontrar entidades extremadamente localizadas que no difractan en absoluto, y que existen debido a una perfecta cancelación de fase debido a la geometría singular del sistema. Esto implica que es posible usar combinaciones de estos modos, para transmitir o localizar información en regiones específicas de la red, sin ninguna distorsión. Una red tipo Lieb [como la mostrada en la Fig.29(a)] corresponde a una red cuadrada a la que se le ha quitado periódicamente un sitio de la red. Uno de los más famosos ejemplos de esta geometría son los planos superconductores de Cuprato CuO_2 [63,64], habiendo otros óxidos que se ordenan de esta forma. El interés inicial por esta geometría comenzó cuando fue descubierto el ferromagnetismo en sistemas en que la banda plana no estaba llena [65]. Más tarde se demostró que el ferromagnetismo en esta red era robusto ante la excitación de

ondas de spin [66]. Esta red también muestra propiedades topológicas inusuales; por ejemplo, la banda plana de este sistema permanece plana bajo la acción de un campo magnético por razones topológicas [67]. La banda plana de este sistema se intercepta con dos bandas dispersivas en un punto de Dirac. En la presencia de no linealidad tipo Kerr el sistema exhibe difracción cónica en los conos de Dirac [68, 69]. Recientemente se ha estudiado también el efecto de desorden correlacionado en esta red [70]. La red de Lieb puede ser creada de diferentes formas: manipulando átomos fríos [36, 71, 72] con redes ópticas creadas o mediante la técnica de escritura de guías de ondas con láser de femtosegundos [6]. La presencia de una banda plana, en el espectro lineal de la red tipo Lieb, implica la existencia de estados totalmente degenerados, por lo que la superposición de éstos tiene cero difracción en la dinámica. Esto permite la formación de estructuras tipo anillos de cuatro sitios [ver líneas discontinuas en Fig.29 (a)], que están completamente localizados en el espacio, y que representan un estado localizado dentro de la banda lineal. La formación de estos estados localizados proviene de los modos altamente degenerados con frecuencia cero, como fue demostrado recientemente en el contexto sistemas quirales conectados a la banda [73]. En estos sistemas existen estados con energía cero, en donde la función de onda tiene una amplitud finita solo en uno de los subsistemas definidos por la simetría de la quiralidad. Cuando el sistema es acoplado a una banda de energía continua, algunos de los estados permanecen localizados. Estos estados localizados corresponden a estados localizados en el continuo (BIC), originalmente predichos para potenciales sin invarianza traslacional [74]. Sin embargo, el concepto de BIC ha sido expandido a diferentes tipos de potenciales, pero conservando la propiedad principal que los estados permanecen localizados espacialmente, tal como se ha estudiado recientemente, teóricamente [75, 76] y experimentalmente [77–80], en

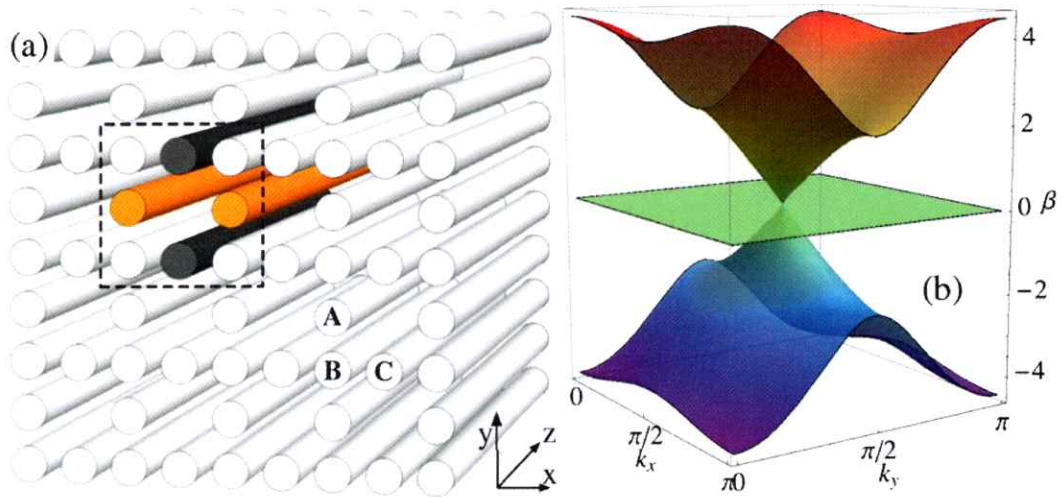


Fig. 29. (a) Red tipo Lieb, en donde los sitios A , B , C forman la celda unitaria. La línea discontinua encierra el estado tipo anillo de cuatro sitios. (b) Espectro lineal de una red tipo Lieb anisotrópica, con $V_y = 2V_x$.

diferentes configuraciones fotónicas.

En este capítulo mostramos, teórica y experimentalmente, la existencia de un nuevo estado localizado, que reside en una banda lineal de la geometría tipo Lieb perfectamente periódica. Estos estados se pueden considerar como un tipo especial de BIC que pueden estar localizados en cualquier posición de la red; lo que es una propiedad especial de los estados de banda plana. Estas entidades compactas no difractan, lo que permite poder transmitir información sin distorsión en un canal óptico [19].

Para describir la propagación de la luz a lo largo de la dirección \hat{z} , en una red fotónica tipo Lieb de guías de onda débilmente acopladas, utilizamos el modelo (3.11) asumiendo que todas las guías de onda son idénticas; por lo tanto, todas poseen la misma constante de propagación $\beta_{\vec{n}} = \beta_0$. En este modelo, consideramos interacción

sólo entre vecinos cercanos. Para obtener el espectro lineal, reemplazamos el ansatz (5.1) en los sitios de la celda unitaria de la red de Lieb [A , B y C en fig.29 (a)]. Para ser más general y respetar las condiciones anisotrópicas experimentales, consideramos el caso más general en que el coeficiente de acoplamiento vertical (V_y) y el coeficiente de acoplamiento horizontal (V_x) son distintos. Para los tres sitios de la celda unitaria construimos las ecuaciones dinámicas considerando un vector de Bloch bi-dimensional de la forma $\vec{k} = \{k_x, k_y\}$. Resolviendo el problema de autovalores, encontramos el espectro lineal o bandas del sistema, que vienen dadas por:

$$\beta(\vec{k}) = 0, \pm \sqrt{V_x^2 \cos^2(k_x) + V_y^2 \cos^2(k_y)}. \quad (7.1)$$

En la Fig.29(b), se muestra el espectro de bandas en la primera zona de Brillouin. Dos bandas son dispersivas (curvatura distinta de cero), y poseen una simetría agujero-partícula [81], donde para cada \vec{k} existen dos frecuencias $\pm\beta(\vec{k})$. Observamos que para $V_y > V_x$, las bandas dispersivas muestran una curvatura diferente dependiendo de la dirección del vector de onda \vec{k} donde, en general, debido a la anisotropía, las ondas se propagan más rápido en la dirección \hat{y} . Estas dos bandas difractantes están conectadas por un punto de Dirac en $\beta = 0$. Exactamente en este punto se conectan con una banda completamente plana (no dispersiva). Las interacciones diagonales entre guías las consideramos despreciables en nuestra aproximación, para mantener las propiedades de banda plana [69]. Esta aproximación está bien justificada por las condiciones experimentales.

En general, los modos lineales de los sistemas periódicos continuos son extendidos en todo el sistema. Sin embargo, los sistemas de banda plana permiten la formación de entidades compactas [33]. En la red tipo Lieb, cualquier anillo cerrado del arreglo [como el mostrado en la Fig.29(a)] puede soportar un estado de banda plana, donde

la amplitud del sitio B es cero, y la amplitud en los demás sitios satisface la relación $V_x C = -V_y A$. Una medida del grado de localización se puede obtener a partir de la razón de participación R , que vale 1, para un estado que ocupe sólo un sitio, y N para un estado completamente deslocalizado (en donde N es el número de sitios del arreglo de guías). En nuestro caso, el modo anillo, tiene una razón de participación $R \leq 4$; esto es, constituye un estado muy localizado, que aparece sólo debido a la geometría de este arreglo completamente periódico. Este nuevo tipo de estados tipo BIC pueden ser encontrados en cualquier posición del arreglo, propagándose sin difracción a lo largo de la dirección de propagación. Además cualquier combinación lineal de estos estados será completamente coherente y también viajará sin ninguna distorsión, permitiendo la transmisión de información con una alta fidelidad.

Los modelos tipo "tight-binding" como el modelo (3.11), son conocidos por describir muy bien la fenomenología en cierto límite de los sistemas reales que tienen interacciones a corto alcance (débilmente acoplados) [12, 48]. Sin embargo, la descripción de sistema real, requiere de otros métodos para describir la dinámica de la luz. Nuestra meta es encontrar las condiciones óptimas, para observar la fenomenología descrita por el modelo discreto, evitando interacciones extras que destruyan las propiedades del sistema [69] y, por lo tanto, impidan la observación de los estados lineales compactos. Con el fin de acercarnos a las condiciones experimentales reales, estudiamos la dinámica en la red tipo Lieb usando una aproximación continua (2.14) (ecuación paraxial de Helmholtz). Una vez fijada la geometría (en nuestro caso, las guías de ondas tienen un perfil fuertemente elíptico [18], esto se traduce en una fuerte anisotropía: $V_y \sim 2V_x$), tenemos esencialmente dos parámetros libres, la longitud de onda y el máximo del contraste de índice de refracción $\delta n \equiv \max|\Delta n(x, y) - n_0|$. Al igual que en el capítulo anterior, implementamos un

método de propagación de haces para resolver el modelo (2.14), y estudiar la propagación de la luz tanto en la dirección transversal como en la dirección longitudinal de un arreglo tipo Lieb con periodo de red de $40\mu\text{m}$, y una distancia de propagación de 10 cm (ambos parámetros corresponden a nuestras muestras experimentales). Consideramos luz verde $\lambda = 532\text{ nm}$, debido a que el coeficiente de acoplamiento es suficientemente débil para ignorar el acoplamiento diagonal que destruiría la banda plana [69], pero suficientemente fuerte como para que exista dinámica en el sistema. Por lo tanto, en este rango podemos estudiar un sistema realista que se acerque más a las propiedades predichas por el modelo (3.10).

Los resultados de las simulaciones realizadas, para distintas condiciones iniciales con esta longitud de onda se muestran en la Fig.30. Primero, en Fig.30(a) se muestra el perfil output después de excitar un sitio tipo B de la red con una condición inicial localizada sólo en este sitio. Observamos un área de difracción pequeña que es una indicación de interacción débil entre sitios (tight-binding). Además, se observa que este perfil es fuertemente anisotrópico, siendo mayormente orientado en la dirección vertical. En la Fig.30(b), observamos como un modo anillo (esto es, cuatro sitios excitados con una fase relativa de π entre dos sitios excitados contiguos) puede ser excitado eligiendo un contraste de índice de refracción δn adecuado (se realizaron múltiples simulaciones para encontrar que el óptimo δn para luz verde es $\delta n \geq 0.67 \times 10^{-3}$). En la Fig.30(c) observamos como un modo anillo con la amplitud correcta, pero sin la información de fase, es destruido y difracta en la red. Esto muestra la importancia de la estructura de fase (π), para excitar eficientemente el estado de banda plana del sistema. Finalmente, como prueba de que estamos excitando numéricamente un modo anillo, generamos una combinación coherente de

estados, sumando dos estados contiguos en la red y propagándolos en la red. En la Fig.30(d) se observa el perfil de salida que muestra una propagación casi perfecta de una combinación de estados tipo anillo. También generamos diferentes combinaciones lineales simples y complejas y todas ellas se propagan sin distorsión apreciable.

La condición inicial compacta, tipo anillo, es una solución del modelo discreto (3.10). En el caso del modelo continuo (2.14), cuando ponemos esta condición inicial, no solo excita los modos localizados del sistema, si no que también mucho otros modos dispersivos, pero en menor medida (despreciable en nuestras simulaciones), y que se traducen en radiación de fondo. Realizamos un análisis de la transformada longitudinal de Fourier y estudiamos el espectro de frecuencias excitadas en la dinámica. Observamos la presencia de un gran peak en la región de la banda plana, y excitaciones menores en las bandas superiores. Incrementando el contraste de índice de refracción δn , notamos que el peak en la banda plana incrementa mientras el gap entre bandas cercanas se ensancha.

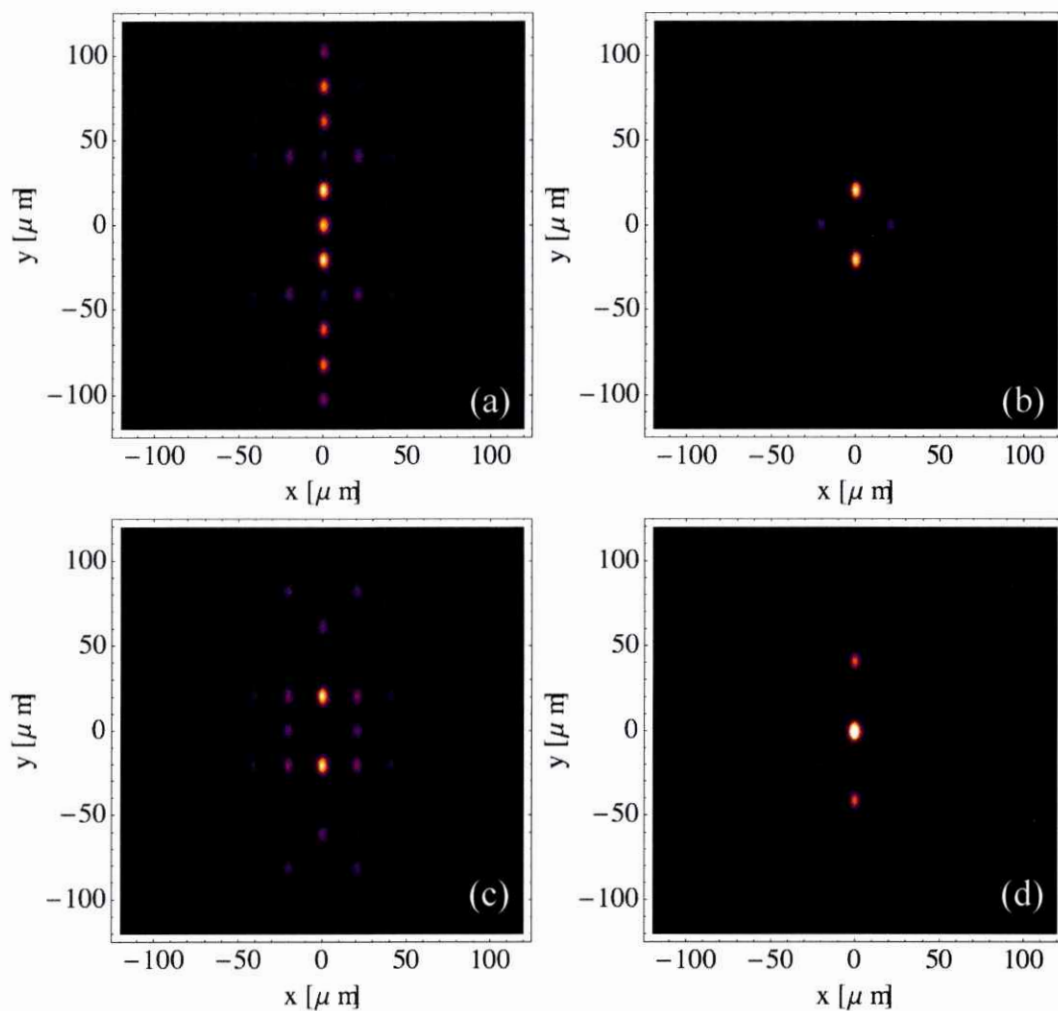


Fig. 30. Perfil simulado de intensidad en la cara de salida del cristal para diferentes condiciones iniciales: (a) Excitación en un sitio tipo *B* del centro del arreglo. (b) Excitación tipo modo anillo. (c) Excitación tipo modo anillo, sin estructura de fase. (d) Dos modos anillos sumados. $\lambda = 532$ nm, $d = 20$ μm , $\delta n = 0.7 \times 10^{-3}$ y $L = 10$ cm.

7.1. Experimentos con luz verde, $\lambda = 532\text{nm}$

Para realizar los experimentos, fabricamos una red fotónica tipo Lieb usando la técnica de escritura con láser de femtosegundos, en un cristal de Silicio de 10 cm de largo [6], como se esquematiza en la Fig.31(a). Para testear la calidad de la red lanzamos luz blanca en la cara de entrada y tomamos una imagen en la cara de salida del cristal [ver Fig.31(b)]. En esta figura se observan los modos de propagación de cada guía, las cuales muestran una notable elipticidad que afecta fuertemente la interacción entre vecinos cercanos. Observamos más luz evanescente entre los sitios verticales que entre los sitios horizontales [ver la figura inserta en Fig.31 (b)], debido a la anisotropía efectiva de los acoplamientos ($V_y > V_x$).

La observación experimental de los modos anillo, requiere superar muchos retos, que están relacionados con la preparación de la condición inicial. Esencialmente se requiere la creación del patrón correcto en fase y amplitud, para poder inyectarlo como condición inicial en la cara de entrada del arreglo. En la Fig.31(c) se describe el setup experimental. Se utilizó un modulador espacial de transmisión (SLM), para modular simultáneamente la amplitud y fase de un haz ancho. Dividimos la pantalla del modulador en dos partes. En la primera parte (región A), se moduló la amplitud del haz, eligiendo la variación del ángulo de dos polarizadores (P). Se generó un patrón de varios discos de luz con un radio y geometría dados (de tal forma de acoplarlo con las guías de ondas en la cara de entrada del cristal). Después de esta modulación de amplitud, se hace pasar esta imagen generada por la segunda mitad del modulador (SLM), para modular el perfil de amplitud en fase (0 o π). Esta modulación se realiza en la región B, ajustando dos pares de rotadores de polarización y dos polarizadores como se muestra en la región B de Fig31(c) (todos

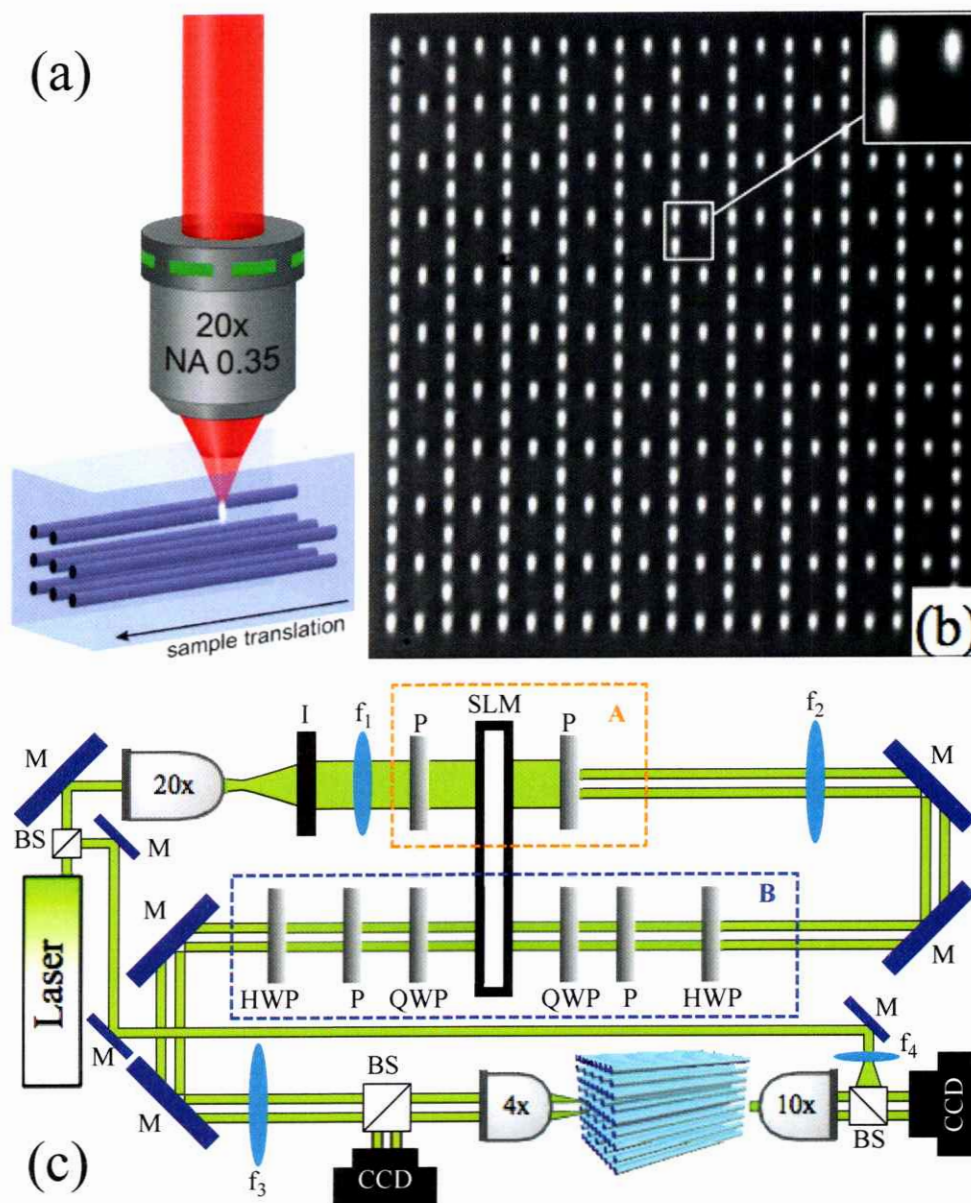


Fig. 31. (a) Técnica de escritura con láser de femtosegundos. (b) Imagen de la red de la cara de salida de la red tipo Lieb para propagación de luz blanca. (c) Setup experimental para estudiar la propagación de patrones de luz en la red tipo Lieb.



los componentes fueron cuidadosamente ajustados para optimizar la fase requerida, así como la amplitud del perfil [82]). Después de este proceso, obtenemos un patrón modulado en fase y en amplitud. En el experimento, la luz es elegida polarizada en la dirección horizontal \hat{x} , con el fin de obtener un área de difracción mayor [83]. Finalmente inyectamos el patrón modulado en la cara de entrada del arreglo fotonico tipo Lieb, utilizando un microscopio objetivo (MO) 4 \times y observamos el perfil en la cara de entrada con una cámara CCD, después de ser reflejado por un divisor de haces. Obtenemos el perfil en la cara de salida usando un MO 10 \times . Para estudiar la estructura de fase de los diferentes perfiles, se genera un patrón de interferencia entre el perfil en la cara de salida (o entrada) y un haz ancho (onda plana).

Comenzamos estudiando la excitación de una condición inicial localizada en un sitio tipo B del centro del arreglo, que es la condición inicial que excita mejor las bandas dispersivas del sistema [18]. Inyectamos luz en el centro del arreglo y el patrón de difracción observado se muestra en la Fig.32(a). Encontramos un excelente acuerdo con los resultados numéricos [ver Fig.30(a)], que es muy importante para la calibración del contraste efectivo del índice de refracción en nuestras simulaciones. Después de esta prueba, preparamos una condición inicial tipo modo anillo simétrico, esto es cuatro discos con igual amplitud y fase relativa de π entre los discos y observamos la propagación casi perfecta de este estado [ver Fig.32(b)]. Como el input no es exactamente el modo del sistema, éste relaja hasta la configuración no simétrica observada, debido a la anisotropía en el arreglo. Mediante interferencia del perfil en la cara de entrada y el perfil en la cara de salida con un haz ancho, observamos que la estructura de fase se conserva [ver la imagen inserta en Fig.32(b)]: existe una fase relativa de π entre los sitios del anillo excitado. Esto muestra de manera muy clara que la fenomenología predicha por el modelo discreto puede ser observada en

un sistema real. La estructura de fase del modo es clave, esto se puede ver si excitamos el mismo perfil en amplitud pero sin la información de fase como se muestra en Fig.32(c). El perfil de intensidades muestra una clara destrucción de la condición inicial localizada, debido a la excitación de las bandas dispersivas. Este experimento está en un excelente acuerdo con nuestras simulaciones numéricas como se muestra en Fig.30(c), con una diferencia entre los perfiles debido principalmente a las imperfecciones experimentales del método de fabricación y a la simetría de la condición inicial que no es totalmente perfecta.

Finalmente, para probar la excitación de los modos anillos como estados estacionarios y su uso potencial para transmitir información óptica en regiones reducidas de la red, se combinan modos anillos en diferentes configuraciones. Primero, se confirman los resultados numéricos de la Fig.30(d), preparando una condición inicial compuesta por dos modos anillos sumados verticalmente, y se observa su propagación en Fig.32(d1). Esto muestra experimentalmente lo robusto que resulta la aplicación del modelo discreto. Este patrón posee la misma estructura anisotrópica predicha para la suma de dos modos. Además, probamos con otras combinaciones lineales. En Fig.32(d2) se observa la propagación de dos modos anillos diagonales que no interactúan. También estudiamos la propagación de patrones más complejos sumando linealmente modos anillos en distintos sitios de la red. Construimos y propagamos una combinación de cuatro anillos sumados [ver Fig.32(d3)] y cuatro anillos sumados horizontalmente y restados verticalmente [ver Fig.32(d4)]. Todas las combinaciones lineales de modos probadas se propagan casi perfectamente en el arreglo, mostrando lo robusto que puede resultar este sistema. Seleccionando cuidadosamente la estructura de fase y de amplitud, se puede generar un código óptico

para transmitir información [84], basado en los modos de banda plana de este sistema.

Los modos anillo compactos que corresponden a la banda plana de la red tipo Lieb encontrados con el modelo discreto, fueron ratificados vía simulaciones numéricas utilizando el modelo continuo (2.14) y observados experimentalmente para una distancia finita en arreglos de guías de onda fabricados con la técnica de escritura con láser de femtosegundos. Estos modos compactos se utilizarón como “bits” para la generación (sumar o restar modos anillos en fase y en contra fase en distintos sitios del arreglo fotónico tipo Lieb) de un código que permita codificar información óptica, vía modos de la banda plana de esta geometría.

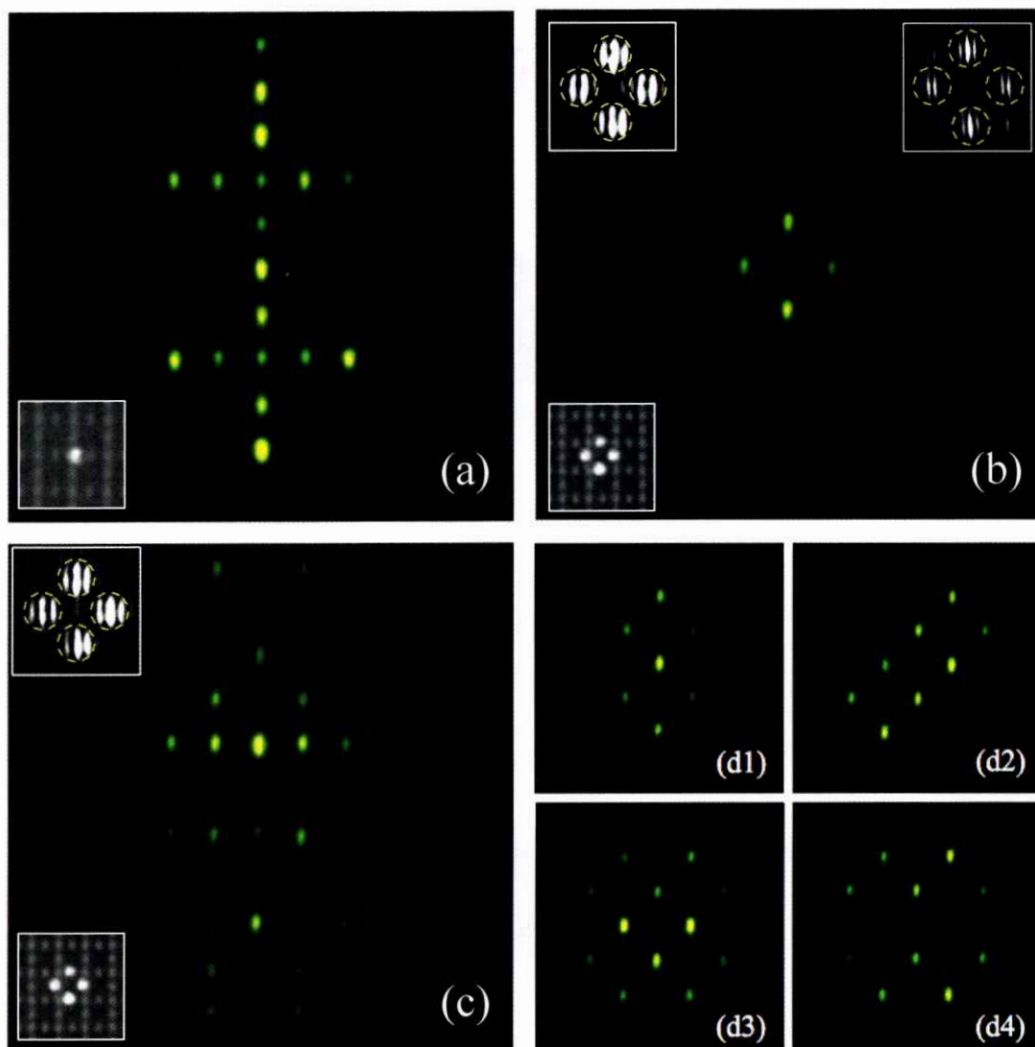


Fig. 32. Perfil experimental de intensidad en la cara de salida del cristal para diferentes condiciones iniciales: (a) Excitación en un sitio tipo *B* del centro del arreglo. (b) Excitación tipo modo anillo. (c) Excitación tipo modo anillo, sin la estructura de fase. (d) Estados compuestos por suma de anillos. Los graficos incertos en (b) y (c) muestran el interferograma, que da cuenta de la estructura de fase del modo. $\lambda = 532 \text{ nm}$, $d = 20 \text{ }\mu\text{m}$, $\delta n = 0.7 \times 10^{-3}$ y $L = 10 \text{ cm}$.

Capítulo 8

Condiciones para crear arreglos con bandas planas

La localización de luz en sistemas periódicos ha sido estudiada en distintos contextos físicos, y de distintas maneras como son el caso de localización de Anderson [13] y localización por impurezas (que pueden ser geométricas o de no linealidad [16]). Basados en nuestra experiencia previa con las redes tipo Lieb, Sawtooth y otras como Kagome [19], proponemos un criterio geométrico para crear arreglos de guías, de tal forma que las geometrías propuestas, posean bandas planas en su espectro lineal, pero más aún, estudiamos como manipular el concepto de bandas planas, para entender como diseñar sistemas, que posean tantas bandas planas como se requiera. En un sistema completamente periódico y simétrico descrito por el modelo (3.10), las propiedades particulares de cada geometría están determinadas por la matriz de acoplamientos $V_{\vec{n},\vec{m}}$. Como se describió [ver Capítulo .5], los modos de Bloch del sistema se encuentran al solucionar el modelo (3.10), con el ansatz estacionario de la forma $a_{\vec{n}} = A_{\vec{n}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{n}) \exp(i\beta z)$. Al insertar este ansatz en los sitios de la celda unitaria del sistema, se llega a la relación de dispersión o estructura de bandas correspondiente del sistema en particular. Sistemas que poseen bandas planas han sido extensamente estudiados en distintas áreas de la física [32, 41, 42], debido

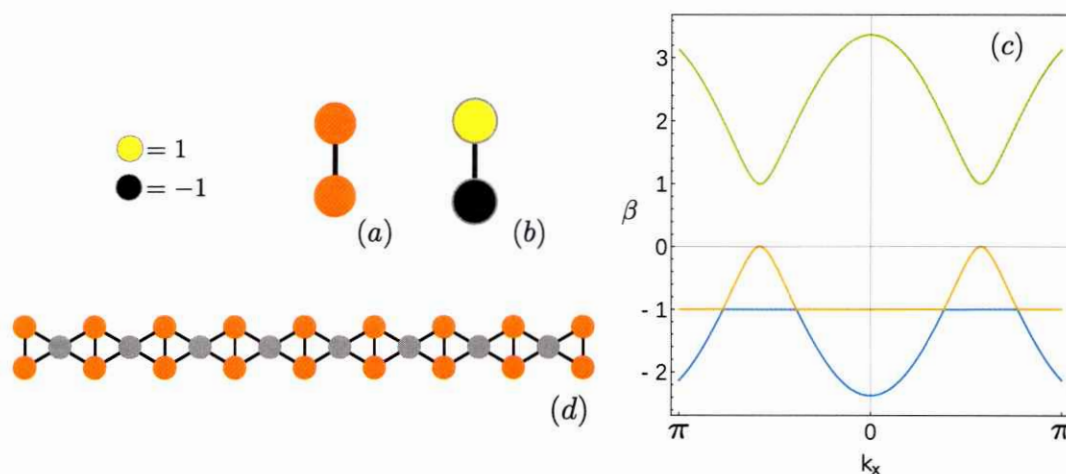


Fig. 33. (a) Red-unitaria de la red diamante. (b) Modo de la red-unitaria que satisface el criterio de banda plana. (c) Espectro Lineal de la red diamante. (d) Red diamante. Los sitios plomos corresponden a los sitios conectores.

a las propiedades extraordinarias que muestran. Existen diversas formas de crear geometrías que posean bandas planas en su espectro lineal [31–36]. En este trabajo entregamos una receta a partir del espacio real (posiciones de las guías de ondas) para generar geometrías que presenten un número de bandas planas que puede ser escogido arbitrariamente. La idea es generar geometrías uniendo mini-redes, a través de sitios conectores que preserven una simetría que denominamos de banda plana, y que consiste en que la ecuación dinámica de estos sitios, dada por el modelo (3.10), se mantenga idénticamente cero.

Por simplicidad y a modo de ejemplo de como funciona nuestra receta, partimos explicando el caso de un dímero como mini-red [ver Fig.33(a)]. Los modos lineales estacionarios de un dímero son $\{+, +\}$ y $\{+, -\}$. Al pegar un dímero vertical mediante sitios conectores para formar una red, como se muestra en la Fig. 33(d), el modo estacionario $\{+, -\}$ del dímero vertical [ver Fig.33(b)] aislado será una solución

estacionaria del nuevo sistema, debido a la discretitud del modelo (3.10), ya que la ecuación dinámica que describe el cambio en la amplitud de cualquier sitio conector es siempre cero cuando ponemos como condición inicial el modo $\{+, -\}$ del dímero, en cada elemento dimeral de la nueva red. Entonces la luz queda localizada en esa porción de la red y, debido a que el sistema creado (red tipo diamante) es periódico, existirán tantos modos compactos como repeticiones de la mini-red. Entonces el nuevo sistema tendrá una banda plana; en este caso ubicada en $\beta = -1$.

La simetría en la ecuación del sitio conector, es la clave para formar redes con bandas planas. Si pensamos en cualquier geometría de la mini-red y en los modos estacionarios de esta, entonces la simetría de banda plana, depende de la mini-red, y consiste en que la ecuación de todos los sitios conectores de la red sea siempre nula, cuando se evalúe algún modo estacionario de la mini-red. Entonces, cualquier modo estacionario que satisfaga la simetría, será un modo de la banda plana de la nueva red (la red formada por los conectores y las mini-redes). Una de las muchas formas de asegurar que esto suceda es que los sitios conectores, sean elegidos de tal forma que conecten con un nodo de un modo estacionario de la mini-red; entonces este modo estacionario será el modo de la banda plana de la red total ya que cumplirá con la simetría necesaria en la ecuación dinámica del sitio conector. Por supuesto el método descrito anteriormente no es único, pero cuando se puede aplicar, asegura la existencia de la banda plana. Dependiendo de la configuración de los conectores, no todos los modos estacionarios de una mini-red conservarán la simetría necesaria en los sitios conectores, es decir para la misma mini-red existen distintas configuraciones de los conectores que mantendrán la simetría, para distintos modos estacionarios de la mini-red. Siguiendo nuestro criterio, para construir una red que posea una o más bandas planas en su espectro lineal, necesitamos una mini-red y conectores. La mini-red

es independiente de la celda unitaria. La elección de la mini-red no es única; por ésto, llamaremos red-unitaria a la mini-red de menor dimensión con la que se pueda crear el sistema y mantener las bandas planas según este criterio. Existen geometrías como Lieb, Sawtooth o Sub, etc, en las que los mismos sitios conectores, si se unen con sitios de la red-unitaria, pueden ser considerados como una nueva red-unitaria. Ésto no representa ningún problema, ya que el sistema solo poseerá tantos modos como repeticiones distintas de la red-unitaria, incluyendo las redes unitarias que se pueden formar con los mismos sitios conectores, cuando el sistema es totalmente homogéneo. A modo de ejemplo a continuación se muestra como crear las redes Sawtooth y Lieb a partir de este concepto.

8.1. Red Sawtooth

El caso de la geometría tipo Sawtooth, se puede ver como una colección de trímeros rotados [ver Fig.34(a)] y pegados por un sitio conector [corresponde al sitio plomo en la Fig.34(d)]. Para aplicar la receta, calculamos en la aproximación a primeros vecinos los modos estacionarios de un trímero: $\{+, 0, -\}$, $\{+, \sqrt{2}, +\}$, $\{-, \sqrt{2}, -\}$. La receta, exige que la ecuación dinámica de cualquier sitio conector debe ser cero, cuando se inyecte como condición inicial un modo de la red-unitaria. Debido a las fases respectivas de cada modo del trímero, el modo $\{-, \sqrt{2}, -\}$ [ver Fig.34(b)], es el único que puede satisfacer la simetría. Cuando reemplazamos este modo, como condición inicial en el modelo (3.10), se tiene que que la ecuación estacionaria de

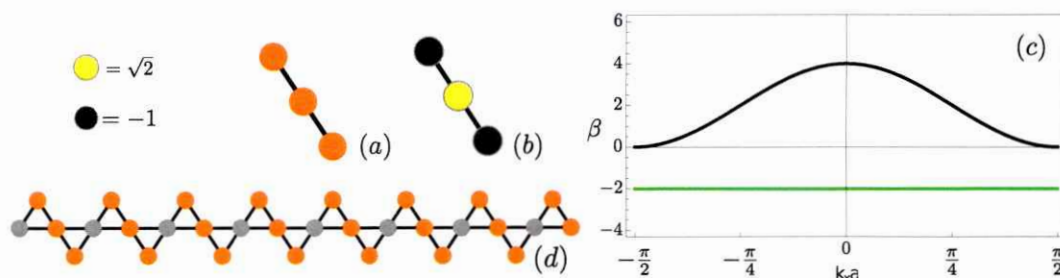


Fig. 34. (a) Red-unitaria de la red Sawtooth. (b) Modo de la red-unitaria que satisface el criterio de banda plana. (c) Espectro lineal de la red Sawtooth para $V_2/V_1 = \sqrt{2}$. (d) Red Sawtooth. Los sitios plomos corresponden a los sitios conectores.

cualquier sitio conector viene dada por

$$\begin{aligned}
 -i \frac{da_c}{dz} &= V_1 a_{n,m} + V_2 a_{n-1,m+1}. \\
 0 &= -V_1 + V_2 \sqrt{2} \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \sqrt{2}.
 \end{aligned}
 \tag{8.1}$$

Donde V_1 y V_2 corresponden a los acoplamientos horizontales y diagonales de la red (esquematisados como líneas continuas en la Fig.34(d)), respectivamente. Las ecuaciones 8.1 muestran la condición necesaria para que el la geometría tipo Sawtooth tenga banda plana. Ésta condición fue encontrada de otra manera en el Capítulo. 6 y muestra como esta receta puede llegar de manera más sencilla al mismo resultado.

8.2. Red Lieb

La red-unitaria tipo Lieb [ver Fig.35 (a)], se pueden conectar como se muestra en la Fig. 35(c), para formar una red completa tipo Lieb. Con esta configuración de los sitios conectores (puntos plomos en la Fig.35 (c)), la ecuación dinámica de los sitios conectores es siempre cero cuando elegimos como condición inicial el modo mostrado en fig.35 (b), ya que los conectores coinciden justamente con los nodos de

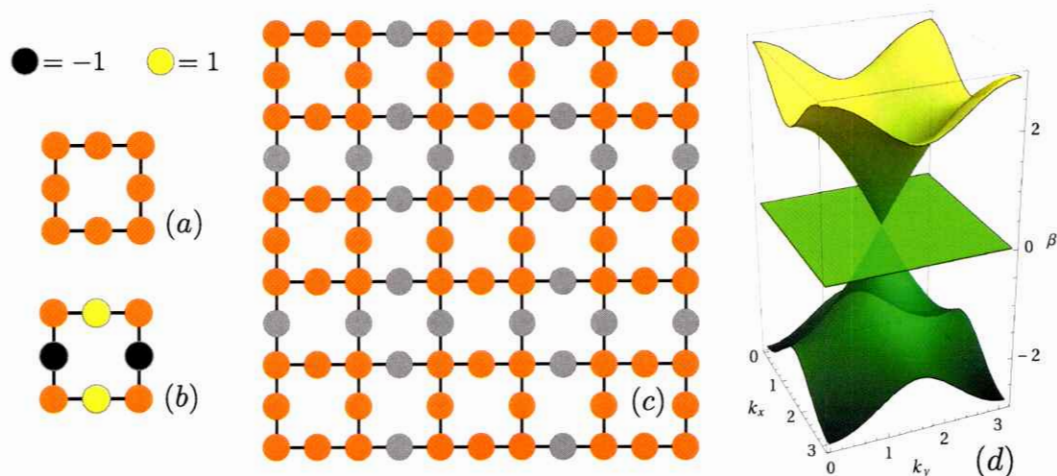


Fig. 35. (a) Red-unitaria de la red de Lieb. (b) Modo de la red-unitaria que satisface el criterio de banda plana. (c) Espectro lineal de la red de Lieb. (d) Red de Lieb. Los sitios plomos corresponden a los sitios conectores.

este modo de la red-unitaria de Lieb, lo que asegura la simetría. Como podemos apreciar inmediatamente, para esta geometría el sitio conector puede formar una red-unitaria si se cambia el sistema de referencia, debido a que todos los sitios son exactamente iguales.

8.3. Acoplamientos a segundos vecinos

La simetría en la ecuación dinámica de los conectores, es todo lo que necesita el sistema para tener una banda plana. No todas las redes mantienen su banda plana cuando se consideran acoplamientos a segundos vecinos [69], como ejemplos están los casos de las redes tipo Stub, Sawtooth, Lieb o Kagome. Pero esto no es un problema intrínseco de las bandas planas es sólo que la geometría de estas redes no es la adecuada. Para poder construir redes que soporten bandas planas a segundos vecinos, no es necesario agregar ningún ingrediente extra a nuestra receta,

simplemente tenemos que elegir apropiadamente la configuración de los conectores para asegurar que cuando se tome en cuenta por ejemplo el acoplamiento diagonal, la ecuación dinámica de éstos siga siendo nula, si se pone como condición inicial un modo de la red-unitaria. Esto sucede, por ejemplo, en el caso de la red B_1 [ver Fig. 36(c)]. Esta red se construye a partir de la red-unitaria tipo Lieb, pero la configuración de los sitios conectores es distinta, por lo que el modo mostrado en la Fig.35(b) no satisface la simetría en el sitio conector. Con esta nueva configuración, el sistema posee una banda plana con frecuencia cero a primeros vecinos [ver Fig.36(d)], y el modo de la red-unitaria que satisface la simetría del sitio conector es distinto al de la red tipo Lieb. La simetría del modo de la banda de este sistema [ver fig.36 (b)], también es un modo de la red unitaria cuando se considera acoplamiento a segundos vecinos, pero además conserva la simetría en el sitio conector cuando, por lo que será un modo de la red final.

8.4. Anisotropía en la red

La anisotropía en los acoplamientos o en la energía de sitio puede destruir la banda plana de un sistema creado con nuestra receta, si se rompe la simetría en la ecuación de los sitios conectores. En esta sección estudiaremos cuales son las condiciones necesarias para construir un sistema con anisotropía y que tenga banda plana. Si pensamos en el problema desde un principio; es decir, si queremos construir un sistema que posea banda plana para una cierta configuración de anisotropía en la red-unitaria, entonces se tendrá que calcular de nuevo los modos de la red-unitaria, con la anisotropía correspondiente (ya sea en la energía de sitio o en los acoplamientos), para poner los sitios conectores de tal forma que conserven la simetría en su ecuación dinámica con las nuevas condiciones. Es decir, la simetría del sitio conector es de

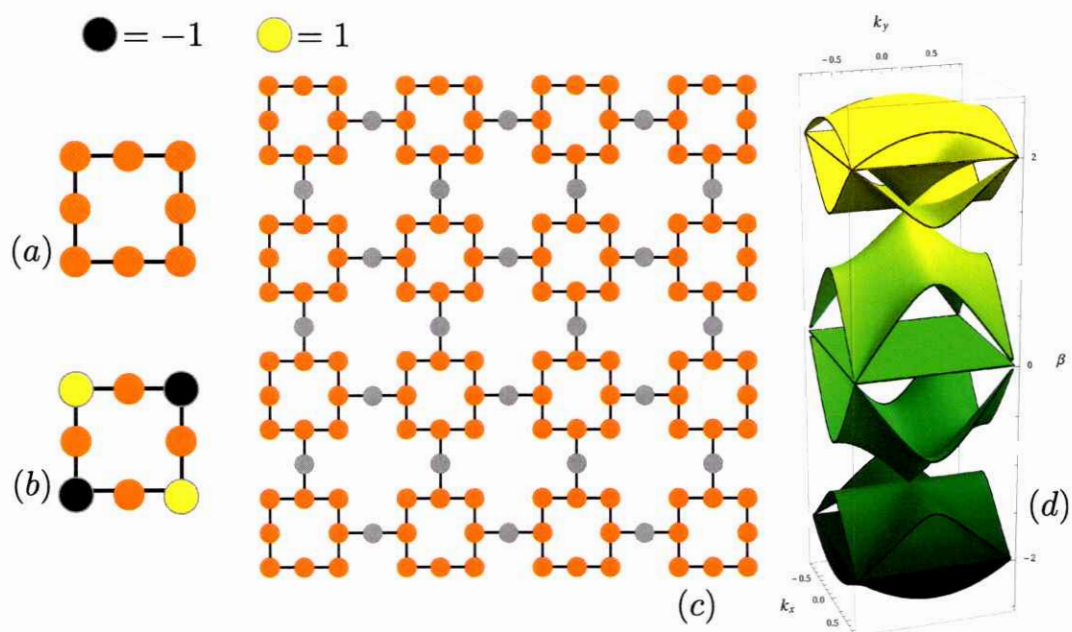


Fig. 36. (a) red-unitaria de la red B_1 . (b) Modo de la red-unitaria que satisface el criterio de banda plana. (C) Red total. (d) Espectro lineal de la red B_1 . Los sitios plomos corresponden a los sitios conectores.

nuevo clave en este problema, y se puede aplicar todo lo que hemos discutido antes a estos sistemas; es decir, podemos crear redes que posean bandas planas considerando anisotropías. Por otra parte, si lo que se requiere es analizar lo que ocurre con la anisotropía en un sistema ya definido, basta con obtener la red-unitaria del sistema y chequear si se satisface la simetría en los sitios conectores; ésto, depende de la red en particular. Por ejemplo, redes tipo Lieb soportan ciertos tipos de anisotropía en los acoplamientos [18], mientras que la red de Kagome pierde las propiedades de banda plana cuando se considera anisotropía en los acoplamientos.

8.5. Desorden en la energía de sitio

En esta sección se estudia la influencia del desorden en un sistema con banda plana que puede ser creado con nuestra receta y, por lo tanto, al que es aplicable este razonamiento. Si incluimos desorden en la energía de sitio de la red-unitaria, manteniendo iguales los acoplamientos en todas las direcciones, entonces la ecuación del sitio conector será siempre distinta de cero, debido a la falta de simetría en los modos de la red-unitaria. Así, podemos saber inmediatamente que cualquier geometría cuya banda plana puede ser descrita como redes unitarias cuyos sitios tengan interacción, entonces el desorden automáticamente destruirá la banda plana, lo que sucede con redes como Kagome, Lieb, Sawtooth, Stub, etc. El problema anterior se puede ajustar cambiando los acoplamientos (como en el caso de la red de Sawtooth), de tal forma de compensar la anisotropía de la energía de sitio para mantener nula la ecuación dinámica del sitio conector. Por otra parte, si el desorden es por cada red-unitaria (es decir en la red-unitaria todo es simétrico, pero entre redes unitarias hay desorden), entonces existirán estados compactos en cada red-unitaria. Éstos no formarán una banda plana, por que tendrán distintas frecuencias debido a que tienen

distintos acoplamientos y/o energías de sitio, pero serán no difractantes ya que conservarán la simetría en el sitio conector. Finalmente, existen geometrías como la red diamante [85] en las que se omite el acoplamiento entre los sitios de la red-unitaria, lo que da lugar a que cualquier amplitud en la red-unitaria sea un modo, en este tipo de sistemas, el desorden no juega ningún papel, ya que basta con ajustar las amplitudes de los sitios de la red-unitaria para compensar la anisotropía provocada por el desorden.

8.6. Acoplamientos negativos

Existen formas de lograr acoplamientos negativos en sistemas ópticos discretos [86,87], entonces nos preguntamos si nuestra receta se puede aplicar para construir sistemas con banda plana, en las que se consideren acoplamientos negativos. La influencia que tiene un acoplamiento negativo en la simetría de la ecuación dinámica de los conectores, es simplemente agregarle un signo negativo o una fase a los sitios que estén acoplados negativamente. Visto de otra forma, sólo cambia la fase en los modos de la red-unitaria que forma la red total, por lo que para construir bandas planas en sistemas con acoplamientos negativos, basta con calcular los modos de la red-unitaria y acoplar estas de tal forma que conserven la simetría en los sitios conectores, es decir lo mismo que en un sistema normal.

8.7. Sistemas con múltiples bandas planas

El número de bandas planas que posea la red-final estará determinada por el número de modos estacionarios de la red-unitaria que satisfagan la simetría en los sitios conectores, sin cambiar su configuración. Entonces podemos construir redes que posean más de una banda plana, asegurando que más de un modo de la red-

unitaria satisfaga la simetría en los sitios conectores. A continuación presentamos dos tipos de cadenas cuasi 1- D (ribbons) contruidos de tal forma que la simetría en los sitios conectores se conserva para dos y tres modos, lo que da lugar a un sistema con dos y tres bandas planas, respectivamente. Las dos redes mencionadas anteriormente fueron diseñadas para mantener sus bandas planas incluso cuando se considera que los acoplamientos verticales y horizontales son distintos y considerando también interacciones diagonales (esto ya que experimentalmente existe una anisotropía en los acoplamientos debido a la técnica de fabricación). En la Fig.37(d) se muestra la red tipo B_2 , debido a la simetría de la red, dos modos estacionarios de la red-unitaria [ver Fig.37(b)] satisfacen el criterio de banda plana en los sitios conectores. El espectro lineal para acoplamiento a primeros vecinos se muestra en fig.37 (c), donde se observan dos bandas planas con una en $\beta = -2$ y la otra en $\beta = 0$. En la Fig.38(d) se muestra la red tipo B_3 , debido a la simetría de la red, tres modos estacionarios de la red-unitaria [ver Fig.38(b)] satisfacen el criterio de banda plana en los sitios conectores. El espectro lineal para acoplamiento a primeros vecinos se muestra en la Fig.38(c), donde se observan tres bandas planas, una con frecuencia $\beta = -(1 + \sqrt{2})$, otra con frecuencia $\beta = -1$ y una última con frecuencia $\beta = -1 + \sqrt{2}$.

Es posible también construir redes bidimensionales con este mismo criterio. Por ejemplo, usando el la red-unitaria de Lieb, pero eligiendo una configuración distinta de los conectores se construye la red B_1 [ver Fig.36]. En general, si el sistema es bi o tridimensional, será la discretización de las ecuaciones la que dará lugar a la generación de estos sistemas de bandas planas, por lo que este criterio es independiente de la dimensión de la red. Por otra parte, debido a la discretización del sistema, es posible crear redes no periódicas uniendo distintos tipos de redes-unitarias con sitios conectores. Un sistema como este, tiene estados localizados, debido a que la

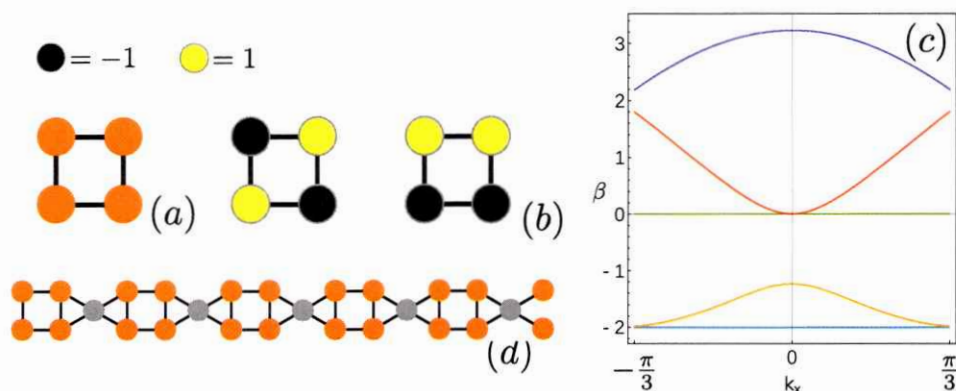


Fig. 37. (a) Red-unitaria de la red B_2 . (b) Modos de la red-unitaria que satisfacen el criterio de banda plana. (c) Espectro lineal de la red B_2 . (d) Red B_2 . Los sitios plomos corresponden a los sitios conectores.

ecuación de los sitios conectores es siempre nula; es decir, satisface la simetría necesaria siempre, pero no formarán una banda plana ya que el sistema no es periódico y los distintos estados localizados poseen distintas frecuencias (es posible sin embargo construir sistemas con múltiples bandas planas simplemente ajustando las energías de sitios de las redes unitarias).

8.7.1. Combinación de estados de diferentes bandas planas

En un sistema con múltiples bandas planas, es posible combinar y propagar condiciones iniciales formadas por distintas combinaciones de los estados de las bandas planas del sistema. Como los distintos estados tienen distintas frecuencias, entonces la condición inicial oscilará pero, debido a la simetría en el sitio conector, la condición inicial no podrá escapar de la red-unitaria. En la Fig.39(a), se muestra el estado preparado como combinación lineal de los estados de las tres bandas planas de la red B_3 . En la Fig.39(b) se muestra como esta combinación oscila en la red-unitaria del sistema debido a las diferentes frecuencias que componen la condición inicial, pero

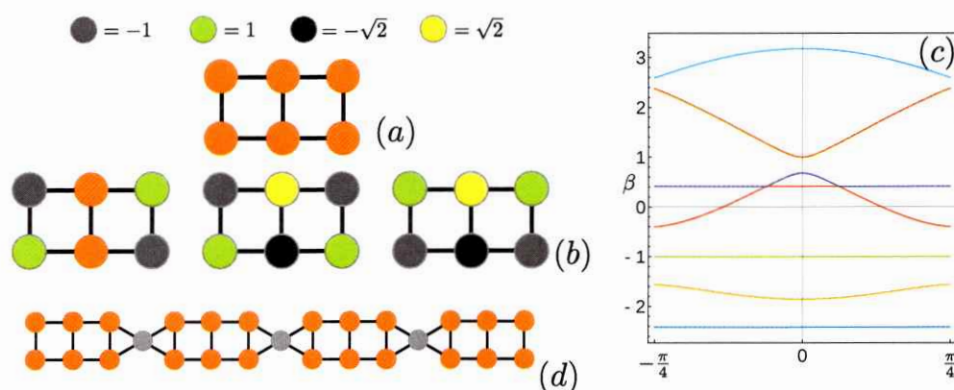


Fig. 38. (a) Red-unitaria de la red B_3 . (b) Modos de la red-unitaria que satisfacen el criterio de banda plana. (c) Espectro lineal de la red B_3 . (d) Red B_3 . Los sitios plomos corresponden a los sitios conectores.

no pudiendo escapar de la red-unitaria debido a la simetría en el sitio conector. En la Fig.39(c) se muestran las frecuencias excitadas en la dinámica, como se observa solo se excitan tres frecuencias del sistema, que corresponden exactamente a las tres frecuencias de los modos de las bandas planas puestas como condición inicial.

8.8. Ejemplo en el modelo continuo

En el modelo discreto todos los modos encontrados en la aproximación a primeros vecinos o a segundos vecinos sobreviven a cualquier distancia, pero en el modelo continuo (2.14) (que describe más fielmente los experimentos) los estados de banda plana no son solución exacta del sistema y sólo sobreviven por una cierta distancia. La ventaja que presentan los sistemas de banda plana como las redes B_1 , B_2 o B_3 es que, como su banda plana persiste en el modelo discreto cuando se consideran acoplamientos a segundos vecinos, en el experimento o en el modelo continuo el modo de estos sistemas se propagará una distancia mayor sin tender a difractar. En esta sección, se muestran los resultados de la simulación numérica realista de luz verde

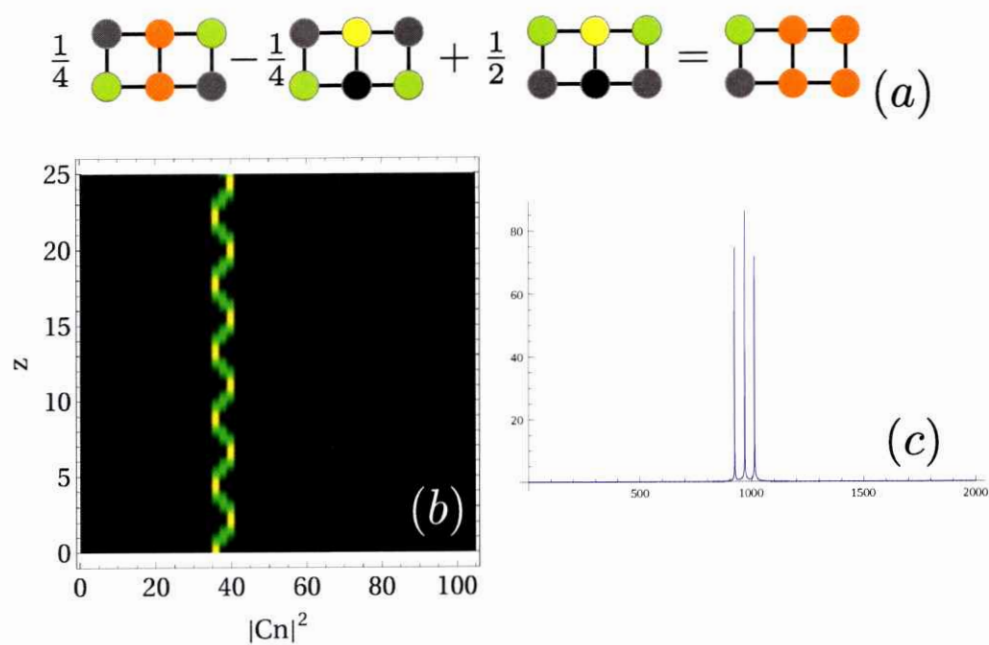


Fig. 39. (a) Condición inicial tipo suma de modos de las distintas bandas planas de la red B_3 . (b) Oscilación en la dirección de propagación. (c) Transformada de Fourier de la dinámica.

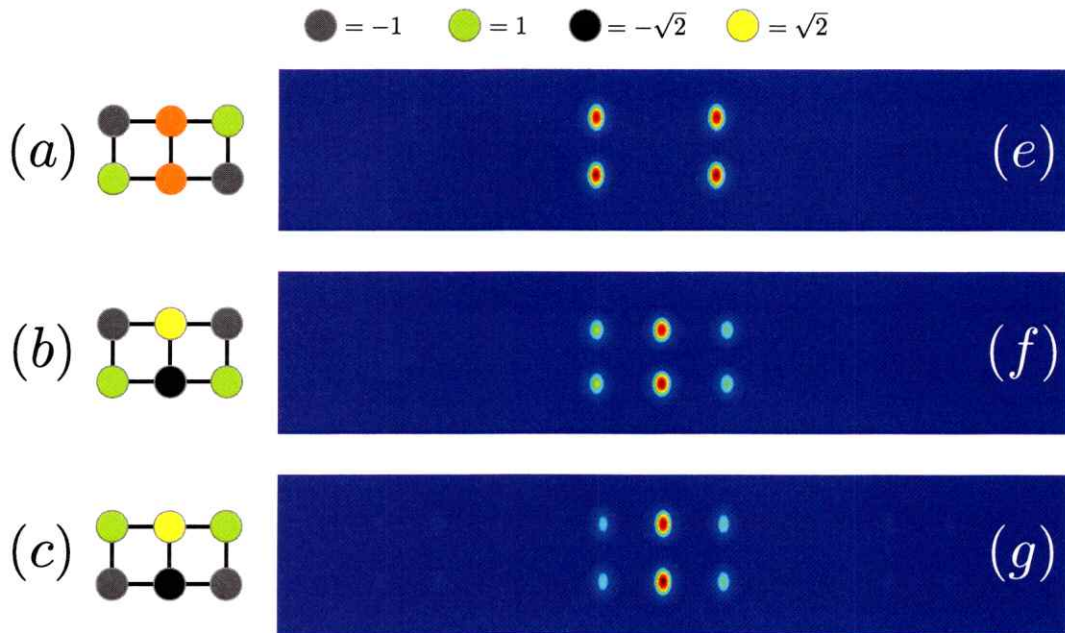


Fig. 40. Simulación del modelo (2.14) para un índice de refracción $n(x, y)$ con la geometría de la red B_3 , $\lambda = 532\text{nm}$, $n_0 = 1.4067$. (a), (b), (c) Modos del modelo discreto puestos como condición inicial en el modelo continuo. (d), (e), (f) Perfil transversal de la luz después de una propagación de 20 cm.

(532 nm) de la propagación de los tres modos que pertenecen a las bandas planas de la red B_3 , en la que la distancia horizontal y vertical entre sitios es de $20\mu\text{m}$. En la Fig40 se muestran los perfiles de intensidad después de 20 cm de propagación. Como se puede apreciar en las Figs.36(d)-(f) los estados permanecen completamente localizados, lo que concuerda perfectamente con lo esperado, ya que las bandas planas de la geometría B_3 permanecen planas cuando se considera acoplamiento a segundos vecinos.

Capítulo 9

Conclusiones

En este trabajo de tesis se estudiaron las propiedades lineales de arreglos de guías de ondas periódicos con geometrías no convencionales. A partir de las ecuaciones de Maxwell, se dedujo la ecuación lineal tipo Schrödinger o ecuación paraxial de Helmholtz, y se analizó la difracción de luz en un medio homogéneo y en un medio periódico, para contrastar el comportamiento entre ambos. Cuando la luz viaja en un medio homogéneo, ésta difracta a lo largo de la dirección de propagación, conservando el máximo de la energía en el centro. Éste comportamiento cambia dramáticamente cuando la luz viaja en un medio periódico, en donde una excitación inicial localizada de un sólo sitio se separa en dos lóbulos principales, fenómeno conocido como difracción discreta y que no tiene análogo en un medio homogéneo. Además, se calculó la estructura de bandas que tiene la luz en un medio periódico unidimensional, para dejar en evidencia la estructura de “bandas y gaps” que tiene la luz cuando viaja en un medio como éste, de manera análoga al caso de un electrón inmerso en un potencial periódico. Cuando el medio periódico es tal que la luz se puede considerar fuertemente localizada en cada una de las guías de ondas, la interacción entre éstas vendrá dada por las evanescentes de los modos de cada guía. Así, el modelo continuo se puede aproximar utilizando teoría acoplada de modos o un modelo discreto. En

este se deriva una ecuación lineal tipo Schrödinger (DLS) que describe la dinámica de la luz viajando en este tipo de medios. Utilizando este modelo se estudian las redes tipo Sawtooth y Lieb que, bajo la aproximación de interacción a vecinos cercanos (esto se justifica ya que el acoplamiento entre las guías de onda es débil), se encuentra que exhiben una banda plana en su espectro lineal. Los modos que provienen de la banda plana de cualquier red son compactos y todos tienen la misma constante de propagación, por lo que una combinación lineal de ellos se propaga sin difractar en los arreglos. Para la red tipo Sawtooth se estudió cómo el cambio en los parámetros geométricos de esta red altera la estructura de bandas del sistema (cambiando de manera continua la curvatura de la banda inferior), encontrándose que para un valor $\delta < \delta_c$, las ondas planas pertenecientes a las dos bandas lineales viajan en la misma dirección; mientras que para $\delta > \delta_c$ las ondas planas de la banda inferior viajan en la dirección opuesta a las ondas planas que pertenecen a la banda superior. Se analizó también, como la banda inferior de esta geometría llega a ser completamente plana cuando la razón entre los coeficientes de acoplamiento diagonal y vertical de las guías de onda es igual a $\sqrt{2}$. Adicionalmente, se estudió la propagación de excitaciones localizadas en el centro y en el borde de esta geometría, encontrándose que la banda plana del sistema afecta fuertemente el transporte en esta red. En los bordes de esta geometría se encuentra que existe un modo localizado que proviene de la discretitud y la cancelación de fase entre ondas provenientes de distintos sitios de la red. Finalmente, se estudió por medio de simulaciones del modelo continuo, la factibilidad de observar las propiedades predichas en el modelo discreto con luz roja (633 nm), lográndose un excelente acuerdo entre éste y las simulaciones numéricas del modelo continuo y los resultados experimentales.

Para la geometría tipo Lieb, se calculó la estructura de bandas del sistema en la

aproximación discreta, y se obtuvieron los modos que pertenecen a la banda plana de esta red. Se analizó vía simulaciones numéricas del modelo continuo, la factibilidad de propagar estos modos con luz verde (532 nm) en arreglos de guías de ondas creados con la técnica de escritura con láser de femtosegundos. Se observó experimentalmente, que los modos de la banda plana viajan casi perfectamente en los arreglos. Además, se propagaron experimentalmente combinaciones lineales de estos modos en el sistema, observándose en todos los casos que una propagación de estos en la red es casi perfecta. Con el fin de propagar información óptica, se generó un código usando los modos anillo de la banda plana de esta red como "bits". Finalmente, se desarrolló una receta teórica utilizando el modelo discreto, para crear redes de guías de ondas que posean múltiples bandas planas en su espectro lineal. Se analizó como el método propuesto, puede ser utilizado para crear redes cuyas bandas planas sean robustas frente a anisotropías de la red, acoplamientos a segundos vecinos e incluso ciertos tipos de desorden. Adicionalmente, se simuló para luz verde (532 nm), utilizando el modelo continuo, la propagación de los tres modos pertenecientes a las bandas planas de la red tipo B_3 , encontrándose que estos modos son capaces de propagarse por más de 20 cm en un sistema realista, sin sufrir una distorsión apreciable. Como futuro desafío, se plantea la posibilidad de medir experimentalmente en las redes propuestas en el Capítulo 8, las propiedades de transporte y localización predichas en esta tesis. Además, se plantea el desafío de propagar luz cuántica en estos tipos de redes para observar el comportamiento de propiedades fundamentales de la luz en diversas geometrías periódicas.

Referencias

- [1] F., B. über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern z. *Phys.* **52**, 555–600 (1928).
- [2] Kittel., C. Introduction to solid state physics (2005).
- [3] Ho, K. M., Chan, C. T. & Soukoulis, C. M. Existence of a photonic gap in periodic dielectric structures **65**, 3152–3155 (1990).
- [4] Yeh, P., Yariv, A. & Hong, C.-S. Electromagnetic propagation in periodic stratified media'. I. General theory. *Josa* **67**, 438 (1977).
- [5] Plihal, M. & Maradudin, A. A. Photonic band structure of two-dimensional systems: The triangular lattice. *Physical Review B* **44**, 8565–8571 (1991).
- [6] Szameit, A. & Nolte, S. Discrete optics in femtosecond-laser-written photonic structures. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **43**, 163001 (2010).
- [7] Jones, A. L. Coupling of optical fibers and scattering in fibers. *J. Opt. Soc. Am.* **55**, 261271 (1965).
- [8] Somekh S., Y. A. G. H. L. H. R. G., Garmire E. Channel optical waveguide directional couplers. *Appl. Phys. Lett.* **22**, 4648 (1973).

- [9] Christodoulides, D. N., Lederer, F. & Silberberg, Y. Discretizing light behaviour in linear and nonlinear waveguide lattices. *Nature* **424**, 817–23 (2003).
- [10] Christodoulides D. N., J. R. I. Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides. *Opt. Lett.* **13**, 794796 (1988).
- [11] Fleischer, J. W., Segev, N. K., Mordechai ad Efremidis & Christodoulides, D. N. Observation of two-dimensional discrete solitons in optically induced nonlinear photonic lattices. *Nature* **422**, 147–150 (2003).
- [12] Lederer, F. *et al.* Discrete solitons in optics. *Physics Reports* **463**, 1–126 (2008).
- [13] Anderson, P. W. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical Review* **109**, 1492–1505 (1958).
- [14] McGurn, A., Christensen, K., Mueller, F. & Maradudin, A. Anderson localization in one dimensional randomly disordered optical systems that are periodic on average. *Physical Review B* **47**, 120–125 (1993).
- [15] Segev, M., Silberberg, Y. & Christodoulides, D. N. Anderson localization of light. *Nature Photonics* **7**, 197–204 (2013).
- [16] Molina, M. & Tsironis, G. Nonlinear impurities in a linear chain. *Review, Physical and Communication, Physical Review B* **47**, 330–333 (1993).
- [17] Tsironis, G., M.I., M. & D., H. Generalized nonlinear impurity in a linear chain. *Physical Review E* **50**, 6–9 (1994).
- [18] Guzmán-Silva, D. *et al.* Experimental observation of bulk and edge transport in photonic Lieb lattices. *New Journal of Physics* **16**, 063061 (2014).

- [19] Vicencio, R. A. & Mejía-Cortés, C. Diffraction-free image transmission in kagome photonic lattices. *Journal of Optics* **16**, 015706 (2014).
- [20] Terhalle, B. *Controlling Light in Optically induced Photonic Lattices* (2011).
- [21] Schaffer, C. B., Brodeur, A. & Mazur, E. Laser-induced breakdown and damage in bulk transparent materials induced by tightly focused femtosecond laser pulses. *Measurement Science and Technology* **12**, 1784–1794 (2001).
- [22] Chan, J. W., Huser, T., Risbud, S. & Krol, D. M. Structural changes in fused silica after exposure to focused femtosecond laser pulses. *Optics letters* **26**, 1726–1728 (2001).
- [23] Streltsov, A. M. & Borrelli, N. F. Study of femtosecond-laser-written waveguides in glasses. *Journal of the Optical Society of America B* **19**, 2496 (2002).
- [24] Chan, J., Huser, T., Risbud, S. & Krol, D. Modification of the fused silica glass network associated with waveguide fabrication using femtosecond laser pulses. *Applied Physics A: Materials Science & Processing* **76**, 367–372 (2003).
- [25] Weimann, S., Kartashov, Y. V., Vysloukh, V. a., Szameit, A. & Torner, L. Observation of asymmetric solitons in waveguide arrays with refractive index gradient. *Optics Letters* **39**, 3694 (2014).
- [26] Estevez, J. O. *et al.* Demonstration of photon Bloch oscillations and Wannier-Stark ladders in dual-periodical multilayer structures based on porous silicon. *Nanoscale research letters* **7**, 413 (2012).
- [27] Rechtsman, M. C. *et al.* Photonic Floquet topological insulators. *Nature* **496**, 196–200 (2013).

- [28] Shadbolt, P., Mathews, J. C. F., Laing, A. & O'Brien, J. L. Testing foundations of quantum mechanics with photons. *Nature Physics* **10**, 278–286 (2014).
- [29] Paul L. Kelley, I. P. K. & Govind P. Agrawal, G. P. *Nonlinear fiber optics* (2001).
- [30] Zhang, T. & Jo, G.-B. One-dimensional sawtooth and zigzag lattices for ultracold atoms. *Nature Publishing Group* 1–7 (2015).
- [31] Deng, S., Simon, A. & Köhler, J. The origin of a flat band. *Journal of Solid State Chemistry* **176**, 412–416 (2003).
- [32] Miyahara, S., Kubo, K., Ono, H., Shimomura, Y. & Furukawa, N. Flat-bands on partial line graphs: Systematic method for generating flat-band lattice structures. *Journal of the Physical Society of Japan* **74**, 1918–1921 (2005).
- [33] Bergman, D. L., Wu, C. & Balents, L. Band touching from real-space topology in frustrated hopping models. *Physical Review B* **78**, 125104 (2008).
- [34] Hyrkäs, M., Apaja, V. & Manninen, M. Many-particle dynamics of bosons and fermions in quasi-one-dimensional flat-band lattices. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* **87**, 1–12 (2013).
- [35] Flach, S., Leykam, D., Bodyfelt, J. D., Matthies, P. & Desyatnikov, A. S. Detangling flat bands into Fano lattices. *EPL (Europhysics Letters)* **105**, 30001 (2014).
- [36] Apaja, V., Hyrkäs, M. & Manninen, M. Flat bands, Dirac cones, and atom dynamics in an optical lattice. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* **82**, 3–6 (2010).

- [37] Kivshar, Y. S. & Agrawal, G. P. *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, vol. 1 (2003).
- [38] Weideman, J. A. C. & Herbst, B. M. Split-step methods for the solution of the nonlinear schrödinger equation. *Society for Industrial and Applied Mathematics* **23** (1986).
- [39] Vicencio, R. *Ph.D. Tesis Universidad de Chile* (2004).
- [40] Jones, A. L. *Coupling of Optical Fibers and Scattering in Fibers*, vol. 65 (1965).
- [41] Jacqmin, T. *et al.* Direct Observation of Dirac Cones and a Flatband in a Honeycomb Lattice for Polaritons. *Physical Review Letters* **112**, 116402 (2014).
- [42] Nakata, Y., Okada, T., Nakanishi, T. & Kitano, M. Observation of flat band for terahertz spoof plasmons in a metallic kagomé lattice. *Physical Review B* **85**, 205128 (2012).
- [43] Sapienza, R. *et al.* Optical analogue of electronic Bloch oscillations. *Physical review letters* **91**, 263902 (2003).
- [44] Breid, B. M., Witthaut, D. & Korsch, H. J. Bloch-Zener oscillations (2006).
- [45] Naether, U. *et al.* Enhanced distribution of a wave-packet in lattices with disorder and nonlinearity. *Optics express* **21**, 927–34 (2013).
- [46] Kittel, C. *Introduction to Solid State of Physics* (2001).
- [47] Lederer, F. *et al.* Discrete solitons in optics. *Physics Reports* **463**, 1–126 (2008).
- [48] Flach, S. & Gorbach, A. V. Discrete breathers Advances in theory and applications. *Physics Reports* **467**, 1–116 (2008).

- [49] Boguslawski, M., Rose, P. & Denz, C. Nondiffracting kagome lattice. *Applied Physics Letters* **98**, 061111 (2011).
- [50] Vicencio, R. A. & Johansson, M. Discrete flat-band solitons in the kagome lattice. *Phys. Rev. A* **87**, 061803 (2013).
- [51] Vicencio, R. A. *et al.* Observation of Localized States in Lieb Photonic Lattices. *Physical Review Letters* **114**, 245503 (2015).
- [52] Mukherjee, S. *et al.* Observation of a localized flat-band state in a photonic lieb lattice. *Phys. Rev. Lett.* **114**, 245504 (2015).
- [53] Nakamura, T. & Kubo, K. Elementary excitations in the Δ chain. *Phys. Rev. B* **53**, 6393–6400 (1996).
- [54] Sen, D., Shastry, B. S., Walstedt, R. E. & Cava, R. Quantum solitons in the sawtooth lattice. *Phys. Rev. B* **53**, 6401–6405 (1996).
- [55] Walstedt, R. E., Cava, R. J., Bell, R. F., Krajewski, J. J. & Peck, W. F. ^{63}Cu nmr study of conducting delafossites. *Phys. Rev. B* **49**, 12369–12372 (1994).
- [56] Blundell, S. & Núñez-Regueiro, M. Quantum topological excitations: from the sawtooth lattice to the Heisenberg chain. *The European Physical Journal B* **31**, 453–456 (2003).
- [57] Huber, S. D. & Altman, E. Bose condensation in flat bands. *Phys. Rev. B* **82**, 184502 (2010).
- [58] Interface (Tamm) minibands in superlattices. *Surface Science* **264**, L223–L226 (1992).

- [59] Shockley, W. On the surface states associated with a periodic potential. *Phys. Rev.* **56**, 317–323 (1939).
- [60] Rosberg, C. R. *et al.* Observation of surface gap solitons in semi-infinite waveguide arrays. *Phys. Rev. Lett.* **97**, 083901 (2006).
- [61] Plotnik, Y. *et al.* Observation of unconventional edge states in 'photonic graphene'. *Nature materials* **13**, 57–62 (2014).
- [62] Malkova, N., Hromada, I., Wang, X., Bryant, G. & Chen, Z. Transition between tamm-like and shockley-like surface states in optically induced photonic superlattices. *Phys. Rev. A* **80**, 043806 (2009).
- [63] Emery, V. J. Theory of high- t_c superconductivity in oxides. *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2794–2797 (1987).
- [64] Scalettar, R. T., Scalapino, D. J., Sugar, R. L. & White, S. R. Antiferromagnetic, charge-transfer, and pairing correlations in the three-band hubbard model. *Phys. Rev. B* **44**, 770–781 (1991).
- [65] Lieb, E. H. Two theorems on the hubbard model. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1201–1204 (1989).
- [66] Kusakabe, K. & Aoki, H. Ferromagnetic spin-wave theory in the multiband hubbard model having a flat band. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 144–147 (1994). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.72.144>.
- [67] Aoki, H., Ando, M. & Matsumura, H. Hofstadter butterflies for flat bands. *Phys. Rev. B* **54**, R17296–R17299 (1996).

- [68] Leykam, D., Bahat-Treidel, O. & Desyatnikov, A. S. Pseudospin and nonlinear conical diffraction in Lieb lattices. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* **86**, 195422 (2012).
- [69] Diebel, F., Leykam, D., Kroesen, S., Denz, C. & Desyatnikov, A. S. Observation of conical diffraction in photonic lieb lattices. In *Advanced Photonics*, NW3A.1 (Optical Society of America, 2014).
- [70] Bodyfelt, J. D., Leykam, D., Danieli, C., Yu, X. & Flach, S. Flatbands under Correlated Perturbations. *Physical Review Letters* **113**, 1–5 (2014).
- [71] Shen, R., Shao, L. B., Wang, B. & Xing, D. Y. Single Dirac cone with a flat band touching on line-centered-square optical lattices. *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics* **81**, 2–5 (2010).
- [72] Goldman, N., Urban, D. F. & Bercioux, D. Topological phases for fermionic cold atoms on the lieb lattice. *Phys. Rev. A* **83**, 063601 (2011).
- [73] Mur-Petit, J. & Molina, R. A. Chiral bound states in the continuum. *Phys. Rev. B* **90**, 035434 (2014).
- [74] Voo, K.-K. & Chu, C. S. Localized states in continuum in low-dimensional systems. *Phys. Rev. B* **74**, 155306 (2006).
- [75] Bulgakov, E. N. & Sadreev, A. F. Bound states in the continuum in photonic waveguides inspired by defects. *Phys. Rev. B* **78**, 075105 (2008).
- [76] Molina, M. I., Miroschnichenko, A. E. & Kivshar, Y. S. Surface bound states in the continuum. *Phys. Rev. Lett.* **108**, 070401 (2012).

- [77] Marinica, D. C., Borisov, A. G. & Shabanov, S. V. Bound states in the continuum in photonics. *Phys. Rev. Lett.* **100**, 183902 (2008).
- [78] Plotnik, Y. *et al.* Experimental observation of optical bound states in the continuum. *Phys. Rev. Lett.* **107**, 183901 (2011).
- [79] Weimann, S. *et al.* Compact surface fano states embedded in the continuum of waveguide arrays. *Phys. Rev. Lett.* **111**, 240403 (2013).
- [80] Corrielli, G., Della Valle, G., Crespi, A., Osellame, R. & Longhi, S. Observation of surface states with algebraic localization. *Phys. Rev. Lett.* **111**, 220403 (2013).
- [81] He, J. *et al.* Zero modes around vacancies in topological insulators and topological superconductors on the honeycomb lattice with particle-hole symmetry. *Phys. Rev. B* **87**, 075126 (2013).
- [82] Moreno, I., Velsquez, P., Fernández-Pousa, C. R., Sánchez-Lpez, M. M. & Mateos, F. Jones matrix method for predicting and optimizing the optical modulation properties of a liquid-crystal display. *Journal of Applied Physics* **94**, 3697–3702 (2003).
- [83] Rojas-Rojas, S. *et al.* Analytical model for polarization-dependent light propagation in waveguide arrays and applications. *Phys. Rev. A* **90**, 063823 (2014).
- [84] Chia Wei Hsu, S. *et al.* Observation of trapped light within the radiation continuum. *Nature* **90**, 188191 (2013).
- [85] Mukherjee, S. & Thomson, R. R. Observation of localized flat-band modes in a one-dimensional photonic rhombic lattice **1**, 1–5 (2015).

- [86] Efremidis, N. K. *et al.* Wave propagation in waveguide arrays with alternating positive and negative couplings. *Phys. Rev. A* **81**, 053817 (2010).
- [87] Zeuner, J. M. *et al.* Negative coupling between defects in waveguide arrays. *Opt. Lett.* **37**, 533–535 (2012).