

MAG-F
LMS
C-1

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

ESTUDIO DEL EFECTO DE LAS CONDICIONES DE BORDE
SOBRE EL MOVIMIENTO DE UN CUERPO
EN UN FLUIDO

Tesis para optar al grado de
Magister en Ciencias Físicas.

RAUL LABBE MORALES



PATROCINANTE: DR. CARLOS INFANTE BARROS.

ABRIL 1987.

Escuela de Postgrado
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

I N F O R M E D E A P R O B A C I O N
T E S I S D E M A G I S T E R

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias
que la Tesis de Magister presentada por el candidato

RAUL SANTIAGO LABBE MORALES

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito
para el grado de Magister en Ciencias Físicas.

Patrocinante de Tesis:

Dr. Carlos Infante B.

Carlos Infante B.

Comisión Informante de Tesis:

Dr. Herbert Massman L.

Herbert Massman L.

Dra. Maria Cristina Depassier

M. Cristina Depassier

Dn. Germán Kremer E.

Germán Kremer E.



A mi esposa
Victoria
Y a mis hijos
Lorena, Alejandra y
Camilo.



AGRADECIMIENTOS

Muy especialmente, deseo agradecer al Dr. Carlos Infante por su inapreciable y generosa ayuda, sin la cual no hubiese sido posible finalizar este trabajo.

Deseo agradecer también al Dr. Arturo Menchaca, por haber propuesto el tema de esta tesis, y por su valiosa ayuda en el desarrollo y realización de la parte experimental de la misma.



INDICE

Introducción	6
Capítulo I: Mediciones sobre una esfera cayendo en el aire.	9
Capítulo II: Formulación hidrodinámica.	15
Capítulo III: Solución numérica de la ecuación de Navier-Stokes.	23
Capítulo IV: Resultados y conclusiones.	30
Apéndice A: Resultados obtenidos en las mediciones.	43
Apéndice B: Instrumentación.	48
Apéndice C: Programas	54
Referencias	72



INTRODUCCION

La determinación de la fuerza de arrastre (Drag) que ejerce un fluido sobre un cuerpo en movimiento en su seno es un antiguo problema de la mecánica de fluidos. De acuerdo con Pruppacher y Klett¹, los primeros intentos de solución de tal problema se dan desde mediados del siglo pasado (Stokes, 1851) y comienzos del presente (Oseen, 1910). En tales trabajos se encuentran soluciones para el drag sobre una esfera realizando aproximaciones sobre la ecuación de Navier-Stokes (ver Landau y Lifshitz², Cap. 2). En épocas más recientes, junto a diversas aproximaciones analíticas al problema, hacen su aparición los primeros intentos de solución numérica de la ec. de Oseen para una esfera moviéndose en un fluido (Pearcey and McHugh (1955), Bourot (1969))^{*}. En el estudio realizado por Hamielec et al.³ (1967), en que se resuelve la ecuación de Navier-Stokes por medio de diferencias finitas, se encuentra que la soluciones así obtenidas concuerdan bastante bien con los resultados experimentales. Recientemente han aparecido algunos trabajos en los que se aplican métodos numéricos para resolver la ecuación de Navier-Stokes no estacionaria, para cilindros rectangulares moviéndose en un fluido incompresible, en los que se informa de un buen acuerdo con resultados experimentales^{4,5}.

(*) Citados por Pruppacher y Klett



Un problema no menos antiguo es el de la determinación del efecto de la presencia de las paredes de un tubo en el drag sobre una esfera que se mueve por su interior, llamado "efecto pared"⁴. Se ha encontrado experimentalmente que cuando se deja caer una esfera, por ejemplo, por el interior de un tubo lleno con algún fluido, la velocidad terminal que se mide en tales condiciones difiere apreciablemente de la observada cuando el medio se puede considerar, para todos los efectos prácticos, infinito.

El presente trabajo consiste en el estudio del movimiento de un cuerpo en un fluido bajo la influencia de condiciones de contorno definidas. El objetivo es establecer cómo es afectado el movimiento cuando dichas condiciones son cambiadas de manera prescrita. Para tal efecto se utiliza, en una primera etapa, una pelota de ping-pong, la cual se deja caer por el interior de un tubo. Las variaciones en las condiciones de contorno están dadas por la utilización de tubos de distinto diámetro. La cantidad relevante a ser determinada aquí es la velocidad terminal en el interior del tubo, con la finalidad de establecer alguna relación funcional entre esta cantidad y el diámetro del tubo.

La segunda etapa consiste en resolver numéricamente la ecuación estacionaria de Navier-Stokes para una esfera moviéndose en el interior de un tubo, en el seno de un fluido. Este estudio se realiza para números de Reynolds comprendidos entre 0 y 10. Aunque existen trabajos experimentales⁴ relativos al efecto de las paredes del recipiente sobre el movimiento de esferas cayendo en un líquido viscoso, estos se han realizado para números de Reynolds mucho menores que la unidad. Por otro lado, los trabajos teóricos acerca del problema se han limitado al estudio de la ecuación de Stokes (Wakiya, 1957;

Brenner and Happel, 1958)*, a la cual se reduce la ecuación estacionaria de Navier-Stokes cuando se desprecia el término convectivo de la aceleración. Esto limita automáticamente la validez de los resultados a regímenes para los cuales el número de Reynolds es mucho menor que la unidad. La finalidad de este estudio numérico es establecer cómo es afectada la distribución de presión y el drag sobre la esfera cuando se varía el diámetro del tubo, es decir algo análogo a lo realizado en la parte experimental, aunque en otro intervalo de números de Reynolds (N_R). En efecto, los valores que toma N_R en el estudio experimental varían entre 5.9×10^3 y 1.2×10^4 , aproximadamente, por lo cual se espera que el régimen de movimiento del fluido (aire, en el caso que estamos considerando) sea completamente turbulento, en contraste con el régimen laminar que caracteriza dicho movimiento para números de Reynolds bajos (es decir, del orden de 70 o menores).

La limitación de este estudio a números de Reynolds menores que 10 obedece a razones de tipo práctico, esencialmente. Se sabe que los resultados obtenidos con la ecuación estacionaria de Navier-Stokes son válidos, en lo que se refiere al cálculo del drag, para números de Reynolds hasta 200, aproximadamente. El problema reside en que la convergencia del proceso iterativo usado para resolver el problema numérico se hace más y más lenta a medida que aumenta el valor de N_R , con lo cual el tiempo de computación crece hasta límites que hacen impracticable el cálculo con los recursos computacionales que se usaron para este trabajo (ver capítulo IV).

CAPITULO I

Mediciones sobre una esfera cayendo en el aire.

1.- Teoría. El aire ejerce sobre todo cuerpo que se mueve a través de él una fuerza \vec{f}_r que tiende a frenar el movimiento. Podemos suponer que tal fuerza es proporcional al cuadrado² de la velocidad y con sentido opuesto:

$$\vec{f}_r = -Cv^2\hat{v} . \quad [1]$$

Así, la ecuación de movimiento para la caída de una esfera, suponiendo el sentido positivo de su coordenada x hacia abajo, está dada por:

$$m\dot{v} = -Cv^2 + (m - m_A)g , \quad [2]$$

donde m_A es la masa del aire desplazado. En nuestro caso es $m_A = \rho_A V \approx 3.2 \times 10^{-2} \text{g}$ (ρ_A : densidad del aire, V : volumen de la esfera), que es despreciable frente a la masa de la esfera utilizada (una pelota de ping-pong, $m = 2.66 \text{g}$); en consecuencia, podemos despreciar el empuje del aire en la ec. de movimiento. La constante C se puede expresar en términos de la velocidad terminal v_T , con lo que [2] se reduce a

$$\dot{v} = g(1 - v^2/v_T^2) \quad [3]$$

Si es v_0 la velocidad en $t = 0$, la solución de [3] es

$$v(t) = \begin{cases} v_T \tanh(gt/v_T + C_0) & ; \quad v_0 < v_T \\ v_T \coth(gt/v_T + C_1) & ; \quad v_0 > v_T \end{cases} \quad [4-a]$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{v_T^2}{g} \left(\ln(\cosh(gt/v_T + C_0)) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{v_T^2}{v_T^2 - v_0^2}\right) \right) & ; \quad v_0 < v_T \\ \frac{v_T^2}{g} \left(\ln(\cosh(gt/v_T + C_0)) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{v_T^2}{v_T^2 - v_0^2}\right) \right) & ; \quad v_0 > v_T \end{cases} \quad [4-b]$$

donde: $C_0 = \tanh^{-1}(v_0/v_T)$; $C_1 = \coth^{-1}(v_0/v_T)$.

De [4-a] y [4-b] se encuentra v como función de x , la distancia caída:

$$v(x) = v_T \sqrt{1 + \left(\frac{v_0^2}{v_T^2} - 1 \right) \exp\left(-\frac{2gx}{v_T^2}\right)} \quad [5]$$

La expresión [5] es válida para cualquier valor positivo de v_0 , y ha sido verificada experimentalmente¹⁰, obteniéndose para la velocidad terminal un valor con una incerteza estimada en un 2%. Tal valor para v_T resulta de un ajuste mediante mínimos cuadrados de la expresión [5] a los resultados experimentales.

2.- Experimento. Se hizo caer una pelota de Ping-Pong por el interior de un tubo con el fin de estudiar el efecto de la variación del diámetro del tubo sobre la velocidad terminal. El montaje usado es el que se muestra en la fig. 1. La pelota de ping-pong se dejó caer desde una cierta altura por encima de la entrada del tubo y se instalaron dos detectores, separados a una distancia de 10 cm uno del otro, en la salida del tubo. Las señales entregadas por los dos detectores

se usaron para alimentar un conversor tiempo-amplitud (ver apéndice B) cuya salida de control alimentaba a su vez el gatillo de un escalador HF616, funcionando en el modo "check" (esto permite usar el oscilador interno del escalador como reloj). Mediante una calibración basada en los resultados de la Ref. 10 (ver apéndice A) fue posible transformar las lecturas del escalador a tiempos de tránsito entre los detectores, a partir de los cuales se obtiene la velocidad media de la pelota entre los detectores. La velocidad así medida coincide,

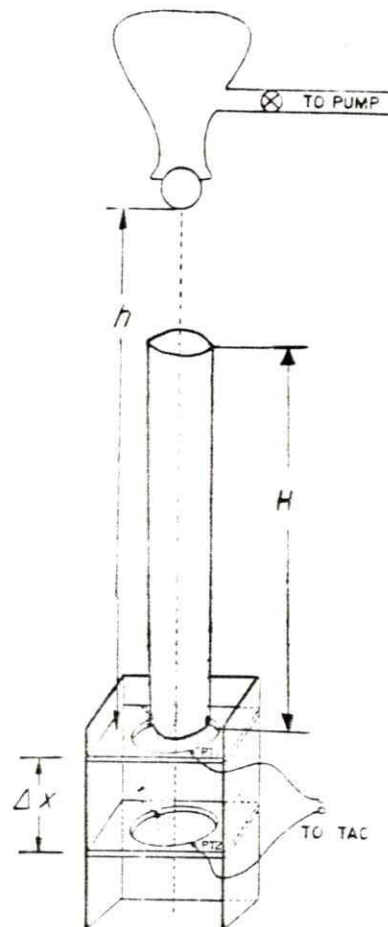


Figura 1.- Montaje experimental para las mediciones.
($H = 110.5$ cm.)

esencialmente, con la velocidad instantánea en el plano medio entre los dos detectores, es decir, 5 cm más abajo de la salida del tubo. La velocidad v_E a la entrada se calcula usando [5] con $v_0 = 0$. La velocidad a la salida se calcula despejando v_0 en [5] con $x = 5$ cm y para v_T el valor dado en la ref. 10.

Ahora bien, se puede suponer que dentro del tubo la ecuación que gobierna la caída sigue siendo [3]; pero con una velocidad terminal v_T' distinta de v_T , el valor sin tubo. Si en [5] ponemos $v_0 = v_E$

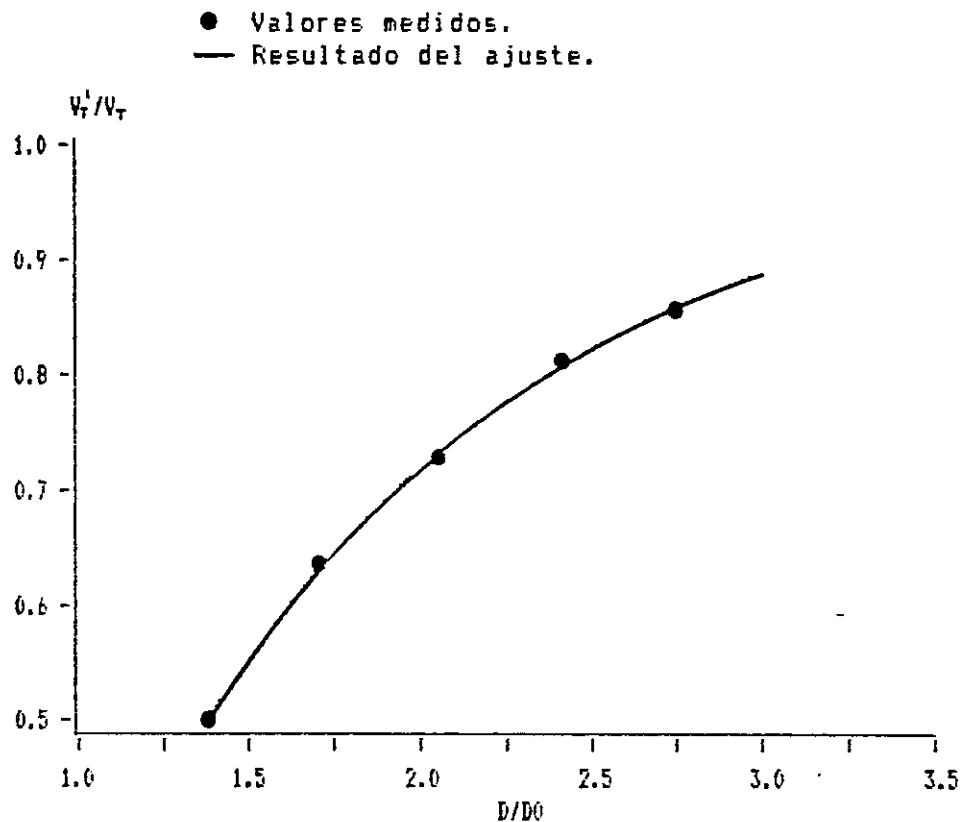


Figura 2.- Razón entre las velocidades terminales con y sin tubo (v_T'/v_T) en función de la razón entre los diámetros del tubo y de la esfera (D/D_0). El error asociado a los valores experimentales es de un 2%, aproximadamente.

y $v = v_{\infty}$ se obtiene para v_T' la siguiente ecuación:

$$v_T'^2 - v_{\infty}^2 - (v_T'^2 - v_{\infty}^2) \exp(-2gH/v_T'^2) = 0 \quad [6]$$

donde H es la longitud del tubo.

La fig. 2 muestra un gráfico de v_T' vs D, el diámetro del tubo. Los puntos representan los valores experimentales, mientras que la curva es un ajuste de mínimos cuadrados a los datos. Para esto se usó una función de la forma

$$v_T'(D) = v_T (1 - A e^{-BD}) \quad [7]$$

donde A y B son los parámetros ajustables y D es el diámetro del tubo. Lo notable de la expresión [7], aparte de la muy buena representación que da de las mediciones es que, si se deja v_T como un tercer parámetro ajustable, se obtiene para éste un valor que difiere en un 3% (aprox.) del valor medido para la velocidad terminal. Esto sugiere que [7] pudiera tener un carácter algo más relevante que el de ser meramente una función que se ajusta de manera adecuada a los resultados del experimento. Ajustes realizados con otras funciones de comportamiento cualitativamente semejante al de la función [7] dieron resultados considerablemente más malos. Se hicieron pruebas con dos expresiones:

$$v_T'(D) = v_T (1 - A/D - B/D^2) \quad y \quad [8-a]$$

$$v_T'(D) = v_T (1 - A/(D^2 + BD + C)) \quad [8-b]$$

Notemos que la función [8-b] tiene tres parámetros, a pesar de lo cual no se consigue una curva que represente adecuadamente los resultados de las mediciones .

Para terminar, una acotación acerca del tipo de régimen de movimiento del aire que circunda a la esfera que cae. Como se sabe, se puede caracterizar el régimen de movimiento de un fluido a través del número de Reynolds N_R (la definición se puede encontrar en el Cap. II). En el caso que nos ocupa, N_R varía entre 5.9×10^3 y 1.2×10^4 . El intervalo de flujo laminar para una esfera es $0 < N_R < 70$. Para valores mayores, el flujo alrededor de la esfera deja de ser estacionario, aunque se observa periodicidad en las fluctuaciones de la velocidad del fluido. A medida que aumenta N_R , van apareciendo nuevas frecuencias de fluctuación que se superponen a las ya existentes. Este proceso continúa hasta un punto en que las fluctuaciones de la velocidad en el entorno de la esfera se complican a tal punto que el movimiento se hace completamente aperiódico. Para tales valores de N_R el flujo es completamente turbulento. En el intervalo de variación de N_R para el caso que nos ocupa se espera que sea este último el estado de movimiento del aire circundante (Ver Landau & Lifschitz, Cap. III)².

CAPITULO I I

Formulación hidrodinámica.

1.- Ecuaciones de la mecánica de fluidos. Un fluido puede ser considerado como un medio continuo que se puede describir mediante dos cantidades termodinámicas propias de él, por ejemplo: la presión $p(x,y,z,t)$ y la densidad $\rho_m(x,y,z,t)$, más una función que dé la distribución de velocidades $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z,t)$ (véase, por ejemplo, Landau y Lifschitz², Vol. 6, cap. I). Si se conocen las cantidades anteriores, el estado de movimiento del fluido está completamente determinado.

Las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos son:

La ecuación de continuidad (conservación de la masa)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_m + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{v}) = 0 \quad [1]$$

y la ecuación de movimiento²

$$\rho_m \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}), \quad [2]$$

donde: ρ_m = densidad

\vec{v} = velocidad

p = presión

η, ζ = coeficientes de viscosidad.

Si se considera que el fluido es incompresible (se puede conside-

rar que un fluido es incompresible si las velocidades involucradas en el movimiento son mucho menores que la velocidad del sonido en el fluido en cuestión), entonces $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, con lo que se obtiene

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = -\frac{1}{\rho_m} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad [3]$$

conocida como ecuación de Navier-Stokes. Acá η es la llamada viscosidad dinámica, en tanto $\nu = \eta/\rho_m$ es la viscosidad cinemática.

Estamos interesados aquí en las soluciones estacionarias de [3], esto es, aquellas para las que $\partial \vec{v} / \partial t = 0$ para todo valor de t ; luego debemos encontrar las soluciones de las ecuaciones

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = -\frac{1}{\rho_m} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad [4-a]$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad [4-b]$$

con condiciones de contorno apropiadas.

2.- Formulación del problema. Consideremos una esfera de radio a moviéndose dentro de un tubo infinito de radio b , en el seno de un fluido. Se elige la velocidad de la esfera como $\vec{v} = -v_0 \hat{z}$. Equivalentemente, puede considerarse que la esfera está fija en el origen y el tubo se mueve con velocidad $\vec{v} = v_0 \hat{z}$. Para recuperar el sistema original basta una transformación a un sistema de referencia solidario al tubo. Dada la simetría del problema, se puede decir que la distribución de velocidades en el fluido debe tener la forma

$$\vec{v} = v_r(r, z) \hat{r} + v_z(r, z) \hat{z}$$

es decir, las cantidades involucradas en la descripción del sistema no dependen de la coordenada ϕ . Definamos

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{v_0} \quad (\text{velocidad adimensional})$$

$$p = \frac{r}{a}, \quad \zeta = \frac{z}{a}, \quad \vec{\nabla}' = a\vec{\nabla} \quad (\text{coordenadas adimensionales})^*$$

$$p' = \frac{P}{\rho_m v_0} \quad (\text{presión adimensional}).$$

De este modo, la ecuación de Navier-Stokes estacionaria queda

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla}' \vec{u} = -\vec{\nabla}' p + \frac{1}{N_R} \nabla'^2 \vec{u}, \quad [5]$$

donde $N_R = v_0 a / \nu$ es el número de Reynolds.

Tomando el rotor de [5] es posible eliminar la presión. Usando algunas identidades vectoriales, se llega a

$$\vec{\nabla}' \times (\vec{u} \times \vec{\omega}) - \frac{1}{N_R} \vec{\nabla}' \times (\vec{\nabla}' \times \vec{\omega}) = 0, \quad [6]$$

donde $\vec{\omega} = \vec{\nabla}' \times \vec{u}$ es la vorticidad. En términos de $\vec{u} = u_r \hat{r} + u_z \hat{z}$,

(*) Ya que el coeficiente de viscosidad ζ no interviene más en la ecuación de Navier-Stokes, se usará en adelante esta letra para denotar la coordenada adimensional asociada al eje z.

$$\frac{1}{Nr} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} \right) +$$

$$- u_z \frac{\partial \omega}{\partial z} - u_r \frac{\partial \omega}{\partial r} - \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) = 0 \quad [7]$$

$$\omega = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} . \quad [8]$$

Es posible definir ahora una función $\varphi(r, z)$ (función de corriente) tal que sus derivadas estén relacionadas con las componentes de la velocidad^{1,2}. En coordenadas cilíndricas, la ecuación de continuidad es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial}{\partial z} u_z = 0$$

o bien

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial}{\partial z}(ru_z) = 0 . \quad [9]$$

La función de corriente se define de modo que

$$ru_r = \frac{\partial \varphi}{\partial z} ; \quad ru_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

con lo que [9] se satisface automáticamente. Entonces, las componentes de la velocidad están dadas por

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} ; \quad u_z = - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} . \quad [10]$$

Reemplazando [10] en [8] y [9] se obtiene finalmente el sistema

de ecuaciones que φ y ω deben satisfacer:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\rho} \left(1 - N_r \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + \frac{N_r \partial \varphi}{\rho \partial \rho} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho^2} \left(1 - N_r \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) \omega = 0 \quad [11-a]$$

$$\omega = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} . \quad [11-b]$$

Las condiciones de contorno se establecen como sigue:

-En la superficie de la esfera:

$$u_r = u_z = 0 ; \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0 \quad \text{allí.}$$

-En la superficie del cilindro:

$$u_z = 1 ; \quad u_r = 0 .$$

-En los límites $|\xi| \rightarrow \infty$

$$u_z = 1 ; \quad u_r = 0 .$$

Es posible poner condiciones para φ (y no para sus derivadas) partiendo de las ecuaciones [10]. Lejos de la esfera

$$u_z = 1 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\rho, \xi) = -\frac{1}{2} \rho^2 + h(\xi),$$

pero, en $|\xi| \rightarrow \infty$ φ no depende de ξ , luego

$$\varphi(\rho, \xi) = -\frac{1}{2} \rho^2 + \text{cte} .$$

Poniendo la constante igual a cero, se tiene

$$\varphi(p, \xi) = -\frac{1}{2} p^2 ; \quad |\xi| \rightarrow \infty . \quad [12]$$

Así, $\varphi(0, \xi) = 0$, para $|\xi| > 1$ y sobre la superficie de la esfera; sobre el cilindro $\varphi(b/a, \xi) = -(1/2)(b/a)^2$. En $|\xi| \rightarrow \infty$ la condición de contorno está dada por [12].

3.- Evaluación de la fuerza sobre la esfera. Una vez obtenidas las funciones $\varphi(p, \xi)$ y $\omega(p, \xi)$, la fuerza sobre la esfera se calcula a partir del tensor de esfuerzos (stress tensor). En coordenadas cilíndricas está dado por²

$$\sigma_{rr} = -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \qquad \sigma_{r\phi} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = -p + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} \right) \qquad \sigma_{\phi z} = \eta \left(\frac{v_\phi}{z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} \right)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad \sigma_{zr} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) .$$

Las componentes de la fuerza sobre la esfera están dadas por

$$F_k = \sum_j \int_S \sigma_{kj} n_j ds , \quad [13]$$

donde k y j barren las coordenadas r, ϕ, z y $\hat{n} = n_r \hat{r} + n_\phi \hat{\phi} + n_z \hat{z}$ es el vector normal al elemento de superficie ds , dirigido hacia adentro. Dada la simetría del problema, sólo la componente z de la fuerza es distinta de cero; así

$$F_z = \int_S (\sigma_{zr} n_r + \sigma_{zz} n_z) ds \quad [14]$$

($\sigma_{z\phi} = 0$ por razones de simetría).

En forma adimensional, los elementos relevantes del tensor σ son:

$$\sigma_{zr}' = \frac{1}{N_R} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \rho} + \frac{\partial u_r}{\partial \xi} \right)$$

$$\sigma_{zz}' = -p' + \frac{2}{N_R} \frac{\partial u_z}{\partial \xi}$$

En términos de φ y ω se tiene

$$\sigma_{zr}' = \frac{1}{N_R} \left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \omega \right)$$

$$\sigma_{zz}' = -p' + \frac{2}{\rho N_R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \rho}$$

La componente z de la fuerza sobre la esfera está constituida por dos términos: uno debido a la presión (f_p) y el otro debido a la fricción (f_f) asociada a la viscosidad del fluido. El cálculo de f_p requiere el conocimiento de la presión en cada punto de la superficie de la esfera. Esta se puede obtener de la ecuación [4-a], integrando el gradiente de presión a lo largo de la línea de corriente central. Como la integración a lo largo del camino frente a la esfera contribuye sólo con una constante a la presión sobre la superficie, basta integrar desde el punto más bajo de ésta, ya que

en el cálculo de la fuerza debida a la presión no contribuye el fondo de presión constante sobre la superficie; solamente las variaciones lo hacen. Así, la presión p_s sobre la superficie es, salvo constante,

$$p_s'(\lambda) = \frac{1}{N_R} \int_{\lambda=1}^{\lambda} \left(\hat{r} \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} - \hat{z} \left(\frac{\omega}{\rho} + \frac{\partial \omega}{\partial \rho} \right) \right) \cdot \frac{d\vec{l}}{d\lambda} d\lambda \quad [13]$$

con λ : parámetro de la curva a lo largo de la cual se integra.

El valor de f_p se obtiene integrando la presión sobre la superficie de la esfera. Como sólo nos interesa la componente z de la la fuerza, se tiene:

$$f_p = - \int_S p_s' n_z ds \quad [14]$$

Para evaluar f_p se debe integrar σ_{zr}' y σ_{zz}' sobre la superficie de la esfera, ya que, por simetría, los otros términos no contribuyen. Así, el valor de f_r es:

$$f_r = \frac{1}{N_R} \int_S \left(\left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} - \omega \right) n_r - \frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta \partial \rho} n_z \right) ds \quad [15]$$

De este modo, se obtiene la fuerza que ejerce el fluido sobre la esfera, que es $f_z = f_p + f_r$. Esta, claro está, es una fuerza adimensional. La fuerza F_z está dada por $F_z = \rho_m v_0^2 a^2 f_z$.

C A P I T U L O I I I

Solución numérica de la ecuación de Navier-Stokes.

1.- Introducción. Se han hecho numerosos intentos para resolver la ecuación de Navier-Stokes estacionaria (ec. [4-a], Cap. II). El principal problema radica en que esta ecuación no es lineal, por lo que no es posible la aplicación de los métodos tradicionales para la búsqueda de soluciones. Por esta razón, todos los intentos de solución analítica se basan en la búsqueda de soluciones en la forma de expansiones asintóticas, o bien, en solucionar otra ecuación que se aproxime a la ecuación de Navier-Stokes en algún límite (para más detalles, ver ref. 1). Una alternativa a los métodos aproximados de solución consiste en construir un esquema de diferencias finitas para la ecuación y resolver este sistema mediante métodos numéricos. Los artículos^{2,4,5,7,8} que tratan acerca de esta forma de afrontar el problema muestran resultados que superan ampliamente a los obtenidos por otros métodos.

2.- El método de diferencias finitas. Un esquema de diferencias finitas para una ecuación diferencial dada (ordinaria o en derivadas parciales) se construye reemplazando en ella todas las derivadas por expresiones que involucran diferencias entre los valores de la función en puntos separados una cierta distancia finita⁹.

El esquema utilizado en este trabajo es, esencialmente, el de diferencias centrales, en el que las derivadas parciales se aproximan por las expresiones siguientes:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \approx \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0-h, y_0)}{2h} \quad [1-a]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \approx \frac{f(x_0+h, y_0) + f(x_0-h, y_0) - 2f(x_0, y_0)}{h^2} \quad [1-b]$$

donde f es una función de dos variables con derivadas continuas hasta tercer orden, a lo menos. Las expresiones para las derivadas con respecto a la variable y se escriben de manera análoga. Las expresiones [1-a] y [1-b] son exactas hasta segundo orden en h . Para construir esquemas de diferencias finitas para las ecuaciones [11-a] y [11-b] del capítulo anterior, se utilizó la siguiente metodología:

a) Se reemplaza la región donde se quiere encontrar la solución por una malla de puntos definida por

$$x_i = x_A + ih, y_j = y_A + jh, \quad i=0, \dots, N; \quad j=0, \dots, M \quad [2]$$

donde h es el espaciado de la malla. Las relaciones [2] representan una región rectangular $S = [x_A, x_B] \times [y_A, y_B]$ con $x_A = x_0$, $x_B = x_N$, $y_A = y_0$ y $y_B = y_M$. Los puntos (x, y) , que antes podían recorrer toda la región S pueden tomar ahora sólo los valores (x_i, y_j) .

b) Toda función $f(x, y)$ definida en la región S se representa por los valores f^i_j que toma en los puntos (x_i, y_j) , es decir, $f^i_j = f(x_i, y_j)$.

c) Las derivadas parciales que aparecen en la ecuación original se substituyen por expresiones del tipo [1-a, b]. A modo de ejemplo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{f^{i+1}_j - f^{i-1}_j}{2h} \quad [3-a]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_s, y_s) = \frac{f^{i+1}_j + f^{i-1}_j - 2f^i_j}{h^2}. \quad [3-b]$$

Con lo anterior, se tiene que la ecuación diferencial original se transforma en un sistema de NxM ecuaciones con NxM incógnitas. Si se fijan condiciones de contorno sobre la frontera de la región donde se busca la solución se obtienen en definitiva (N-2)x(M-2) ecuaciones con igual número de incógnitas, que pueden ser resueltas numéricamente.

3.- Versión en diferencias finitas de la ec. de Navier-Stokes. En el capítulo anterior la ecuación de Navier-Stokes fue transformada en un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales acopladas (ecs. [11-a,b]). Aplicando en ellas la metodología mencionada en el párrafo anterior se obtuvo, inicialmente,

$$\begin{aligned} & \omega^i_{s+1} + \omega^i_{s-1} + \omega^{i+1}_s + \omega^{i-1}_s + 4\omega^i_s + \\ & + \left(h - \frac{N_R}{2}(\varphi^i_{s+1} - \varphi^i_{s-1}) \right) (\omega^i_{s+1} - \omega^i_{s-1}) / (2h(i-1)) \\ & + N_R(\varphi^{i+1}_s - \varphi^{i-1}_s) (\omega^i_{s+1} - \omega^i_{s-1}) / (4h(i-1)) \\ & - \frac{\omega^i_j}{h(i-1)^2} \left(h - \frac{N_R}{2}(\varphi^i_{s+1} - \varphi^i_{s-1}) \right) = 0 \end{aligned} \quad [4-a]$$

$$\begin{aligned} & \varphi^i_{s+1} + \varphi^i_{s-1} + \varphi^{i+1}_s + \varphi^{i-1}_s - 4\varphi^i_s \\ & - (\varphi^{i+1}_s - \varphi^{i-1}_s) / (2(i-1)) = (i-1)h^3\omega^i_s, \end{aligned} \quad [4-b]$$

donde $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, M$. N es un entero que determina el diá-

metro del tubo, en tanto M da el largo.

Para resolver este sistema de ecuaciones se usó el método de sobrerrelajación sucesiva asimétrica (USSOR)*. Este consiste en reemplazar, para cada valor de (i,j), el valor actual de la función en (i,j) por otro valor calculado en términos de los valores en los puntos vecinos. Si se recorre la malla un cierto número de veces realizando el proceso anterior en cada punto, es de esperar (en el mejor de los casos) que el proceso converja a un conjunto de valores para φ^i_j y ω^i_j , que satisfagan las ecuaciones [4-a,b]. De la ec. [4-b] se calcula el nuevo valor de φ^i_j , φ^{*i}_j :

$$\varphi^{*i}_j = - \left(\left(1 - \frac{1}{2(i-1)} \right) \varphi^{i+1}_j + \left(1 + \frac{1}{2(i-1)} \right) \varphi^{i-1}_j + \varphi^{i+1}_{j+1} + \varphi^{i-1}_{j-1} - (i-1)h^2 \omega^i_j \right) \quad [5-a]$$

Los valores de ω^{*i}_j , que deben usarse para modificar los viejos valores se calculan como sigue:

$$\omega^{*i}_j = \left(\omega^{i+1}_j + \omega^{i-1}_j + \left(1 + \frac{1}{2(i-1)} \right) \omega^{i+1}_j + \left(1 - \frac{1}{2(i-1)} \right) \omega^{i-1}_j + \left((\varphi^{i+1}_j - \varphi^{i-1}_j) (\omega^{i+1}_{j+1} - \omega^{i-1}_{j-1}) - (\varphi^{i+1}_{j-1} - \varphi^{i-1}_{j+1}) (\omega^{i+1}_j - \omega^{i-1}_j) \right) \left(\frac{N\kappa}{4h(i-1)} \right) + \frac{N\kappa \omega^i_j}{4h(i-1)^2} (\varphi^{i+1}_j - \varphi^{i-1}_j) \right) \frac{(i-1)^2}{1 + 4(i-1)^2} \quad [5-b]$$

La expresión [5-b] da un valor para la vorticidad en términos de su valor en los puntos vecinos, el valor anterior en el mismo punto, y los valores de φ en los puntos vecinos. Naturalmente, se pueden escribir otras expresiones para ω^{*i}_j . Luego de algunas pruebas con

otras expresiones (que condujeron a resultados catastróficos) se encontró que [5-b] permite una convergencia relativamente rápida al proceso iterativo (con la modificación indicada en el apéndice C).

4.- El proceso iterativo. Damos aquí una breve descripción de la secuencia de operaciones realizadas para resolver el problema numérico (en el apéndice C se puede ver el programa computacional utilizado). Básicamente podemos resumir el proceso en las siguientes etapas:

a) Se establece un conjunto de valores iniciales φ_0^i, ω_0^i , para todo i, j . La longitud del tubo se establece de acuerdo a un criterio empírico: se resuelve el problema con un cierto largo de tubo y se determinan los valores de la coordenada ξ para los cuales las cantidades involucradas ya no dependen de ésta coordenada. Estos son entonces los valores que se usan para definir el mencionado largo. Los valores de φ en la frontera de la región de integración se establecen de acuerdo con las condiciones de borde dadas en el capítulo anterior.

b) Se recorren todos los puntos de la malla que no se encuentran en la frontera, modificando en cada uno de ellos los valores de φ y ω según aquellos calculados usando las ecs. [5-a,b].

c) Se calcula la vorticidad en el manto del cilindro y sobre la superficie de la esfera usando la ec. [4-b]. En el extremo del cilindro que se encuentra frente a la esfera se impone la condición $\omega(p, \xi) = 0$. En el extremo opuesto, la condición $\partial\omega/\partial\xi = 0$.

d) Cada cierto número de iteraciones se evalúa la ec. [4-a]. Si los valores de φ y ω fuesen solución de ésta, el resultado sería cero para cada punto (i, j) (en realidad, como es obvio, tal cosa nunca ocurre). Para medir qué tan cerca se está de la solución, se suman los valores absolutos de los residuos sobre toda la malla (salvo en la frontera). El proceso se detiene cuando se ha completado un cierto

número de iteraciones (cuando no hay convergencia), o bien, cuando el valor máximo de las diferencias $|\omega' - \omega|$ son menores que un cierto valor máximo admitido. Si no se cumplen estas condiciones, se continúa el proceso desde el paso b).

e) Se evalúa la fuerza ejercida por el fluido sobre la esfera.

5.- Convergencia del proceso. Como se mencionó antes, la convergencia del proceso descrito arriba no está garantizada. En efecto, si en el paso d) se substituye directamente ω' , por ω^{*1} , sucede que el proceso diverge. Para conseguir estabilizar el cálculo, lo que se suele hacer es introducir un factor de amortiguamiento β de modo que los nuevos valores de las funciones quedan dados por

$$\omega' = \omega - \beta(\omega - \omega^*) .$$

con $\beta < 1$ en caso de inestabilidad (cuando el sistema es estable se puede acelerar la convergencia poniendo $\beta > 1$). En nuestro caso, se utilizó un factor de amortiguamiento diferente para los barridos en una y otra dirección (esta es la razón del nombre de este método). Debemos mencionar que los anterior no fue suficiente para lograr una buena estabilidad del proceso. La razón es que el esquema de diferencias centrales conduce a soluciones oscilatorias en el caso de ecuaciones de primer orden. Efectivamente, este comportamiento se observó en nuestro caso en la zona de la región de integración alejada de la esfera, donde las segundas derivadas con respecto a ξ de la vorticidad tienden a anularse. Aún poniendo un factor de amortiguamiento bastante chico (con lo cual la convergencia se hace muy lenta), surgen oscilaciones en la vorticidad en la dirección z , sobre todo para números de Reynolds grandes, para los cuales los términos de

primer orden se hacen más importantes. La solución de este problema se consiguió reemplazando las derivadas de primer orden con respecto a ξ de la vorticidad en [4-a] por una combinación de diferencias centrales con diferencias "hacia atrás", con lo cual se eliminó totalmente el problema (Ver apéndice C para más detalles).

6.- Tratamiento del contorno de la esfera. Como es obvio, al usar coordenadas cilíndricas se obtiene una red rectangular de puntos en p y ξ (en nuestro caso, por haber usado el mismo espaciado en p y ξ , la red es cuadrada). Como no se puede acomodar una esfera en una malla tal de modo que no haya puntos de ésta a distancias distintas de h de la superficie en las direcciones z y r , se procedió a deformar el contorno de la esfera, aproximándolo por una superficie de revolución obtenida a partir de una curva construida con segmentos de recta (véase la figura 1 del siguiente capítulo). La otra manera de afrontar este problema consiste en construir expresiones aproximativas para las derivadas que tengan en cuenta la no uniformidad de la red en la vecindad de la esfera, puesto que en este caso se debe incluir puntos en la superficie que no corresponden a puntos de la malla original. Esto es completamente adecuado cuando se tiene que determinar una sola función en la malla, pero estimamos que, para el caso nuestro, en que hay dos funciones involucradas, las aproximaciones a realizar en el cálculo en tales puntos y el tratamiento mismo representan una complicación que no se vería compensada por un mejoramiento substancial en los resultados.

Por brevedad, de aquí en adelante, cuando nos refiramos a la esfera, deberá entenderse que estamos hablando del sólido de revolución mencionado en el párrafo anterior.

CAPITULO IV

Resultados y conclusiones.

1.- Soluciones para distintos diámetros y números de Reynolds. Se muestran en este capítulo los distintos resultados obtenidos al variar el diámetro del tubo y el número de Reynolds. Se resolvió el problema para valores del diámetro del tubo entre 1.5 y 4.0 veces el diámetro de la esfera, en tanto el número de Reynolds fue variado entre 2.0 y 10.0 en cada caso. La región de integración se puede ver en la Fig. 1. La malla utilizada tiene un máximo de 51x401 puntos,

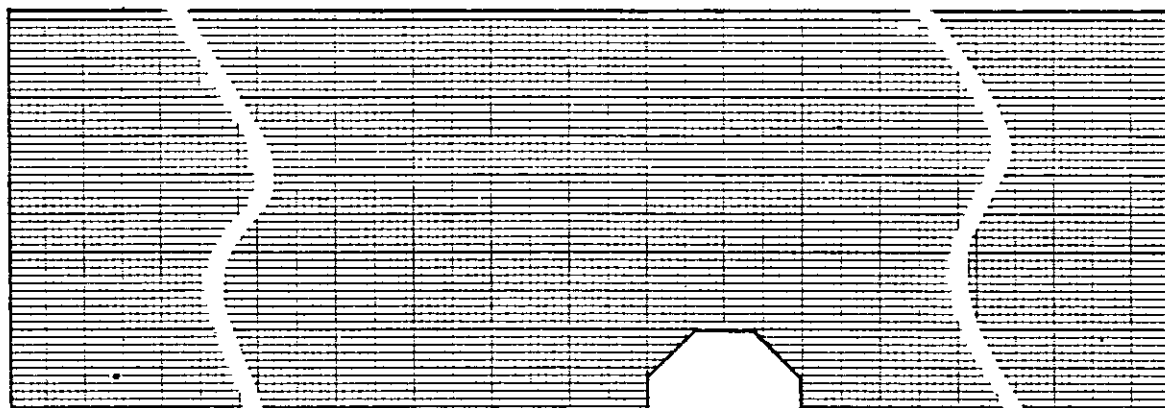


Fig. 1. Región de integración, con una malla de 51x251 puntos.
(El radio del cilindro es 5 veces el de la esfera).

aunque los cálculos finales fueron realizados tomando a lo más 300 puntos en la dirección longitudinal (en el caso en que el radio del cilindro se tomó igual a cuatro veces el radio de la esfera).

La figura 2a) muestra la situación inicial para las líneas de corriente. Esta corresponde a la solución trivial del problema cuando no hay esfera en el interior de tubo (es decir, todo el fluido simplemente se mueve con la misma velocidad de las paredes del tubo, y la vorticidad es cero en todas partes). Es claro entonces que el único lugar donde esta solución no satisface las ecuaciones [4-a,b] del cap. 3 ni las condiciones de borde es justamente la superficie de la esfera. En la figura 2b) podemos ver la configuración de las líneas de corriente al final del proceso iterativo. Podemos apreciar allí la presencia de un remolino detrás de la esfera, aunque también se encuentra que para números de Reynolds bajos y radios del tubo cercanos al de la esfera, se forma un remolino menor frente a ella (ver figura 3). Es muy probable que este sea un efecto introducido por la presencia de aristas en el objeto utilizado para aproximar la esfera, en combinación con la cercanía de las paredes del tubo. De hecho, se observa que al aumentar suficientemente el radio del tubo el remolino frontal tiende a desaparecer, como se puede apreciar en la fig. 3c).

En la figura 4 se pueden ver las distribuciones de presión sobre la superficie de la esfera para distintos valores del radio del cilindro y del número de Reynolds. En esta figura, λ representa el parámetro utilizado para el camino de integración (véase el recuadro en la fig. 4a)), y los valores de la presión (adimensional) están referidos al asignado en el punto $\lambda = 1$, escogido como $p' = 0$. Una comparación de las figuras 4a) y 4b) muestra claramente el drástico efecto que tienen las variaciones del diámetro del tubo sobre la

distribución superficial de presión, en comparación con el efecto -mucho más leve- de las variaciones en el número de Reynolds.

Cabe hacer notar el efecto de las aristas sobre la distribución de presión en la superficie; en las figuras se ha indicado con flechas los valores de λ en los cuales se ubican. Compárense las curvas de las figuras 4a,b) con la de la figura 4c), obtenida para una esfera sin deformar en un medio infinito³.

2.- Efecto del tubo sobre la fuerza de arrastre. Como se dijo en el Capítulo II, la integración del tensor de esfuerzos sobre la superficie de la esfera permite obtener la fuerza F_z que el fluido ejerce sobre ésta. Por haber tomado la versión adimensional de σ , lo que obtenemos resulta ser, esencialmente, lo que en la literatura se conoce como coeficiente de drag² ($C_D = 2F/p_\infty v^2 A$; F : drag, p_∞ : densidad del fluido, v : velocidad, A : área de la sección transversal al flujo). En consecuencia, tenemos $f_z = \pi C_D/2$. Según Landau & Lifschitz² (pag. 171), para una esfera en un fluido infinito se ha obtenido experimentalmente $C_D \cong 14$ para $N_R = 2$, con una disminución monótona hasta $C_D \cong 4$ para $N_R = 10$. Los resultados obtenidos aquí dan valores muy parecidos cuando el radio del tubo es unas 4 veces el de la esfera, aunque el comportamiento con la variación del número de Reynolds es bastante diferente en el intervalo estudiado.

En la figura 5 pueden verse algunos gráficos que muestran cómo varía el drag de fricción, el drag de presión (ambos adimensionales, según fueron definidos en el Cap. II) y la suma de ambos (curva inferior, intermedia y superior, respectivamente). Se indica allí la dependencia de f_F , f_P y f_z en el número de Reynolds para distintos valores del R . La figura 6a) es un resumen de los resultados obtenidos para f_z en función de N_R (la curva de trazos representa los

valores experimentales para una esfera [$=\pi(D/2)$], en tanto en 6b) podemos apreciar la dependencia en R para tres valores de N_R . Por último, en la figura 7a) se puede ver la superficie construida con los datos hasta aquí obtenidos. Esta representa la función $f_z(R/a, N_R)$. El drag no adimensional F_z se obtiene de aquí como $F_z = \rho_m v^2 a^2 f_z(R/a, N_R)$. La figura 7b) es una representación de F_z para $\rho_m = a = 1$ y $v = N_R$.

La intersección de la superficie F_z con planos $F_z = Cte$ permite obtener una familia de curvas análogas a la curva experimental mostrada en el capítulo I. Quedaría por hacer este trabajo, cuya finalidad sería doble:

a) Establecer si la dependencia funcional de estas curvas en la velocidad es o no la misma que la encontrada experimentalmente. Con esto se podría ver si el efecto de la presencia del tubo es puramente geométrico, o bien, si el régimen de movimiento (laminar en este estudio numérico, turbulento en el experimento) cambia substancialmente la mencionada dependencia funcional.

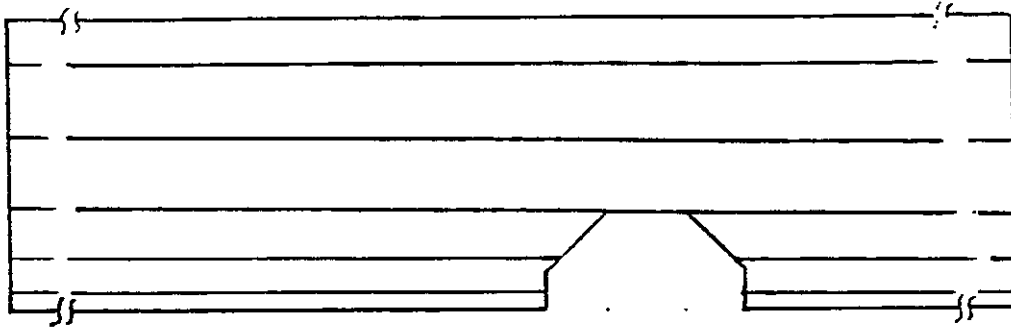
b) Encontrar, al menos para el caso estacionario, la dependencia funcional en los parámetros (N_R y R) para la velocidad terminal de un objeto como el usado aquí cuando cae por el interior de un tubo lleno con un fluido viscoso. Sería interesante, además, realizar este estudio para una esfera real (no deformada), ya que los resultados obtenidos podrían ser verificados experimentalmente sin grandes dificultades. Del estudio realizado parece desprenderse que las aristas introducidas por la deformación de la esfera tienen alguna influencia sobre $f_z(R/a, N_R)$. La verificación experimental de los resultados obtenidos de este modo se ve más difícil, ya que cabe esperar que la orientación usada para la esfera deformada no sea la

más estable durante la caída, si es que existe una orientación estable para un objeto tal en caída a través de un fluido.

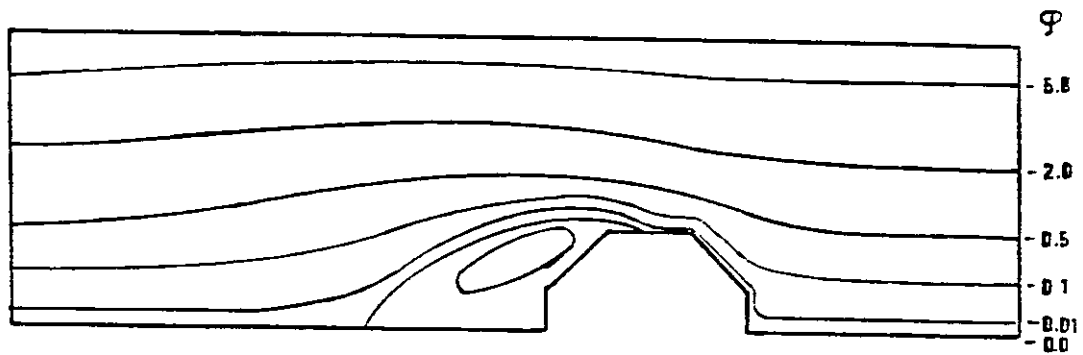
Estimamos que, al menos a) se podría realizar siempre que se disponga de más valores para f_z en los intervalos considerados para N_R y R (se calcularon 30 puntos en total). No se calcularon más valores fundamentalmente por la magnitud del tiempo de computación requerido para la obtención de cada punto (en el peor de los casos, a lo menos 5 horas de cpu en un computador IBM 370, entre 2 y 5 días en un Cromemco SYSTEM THREE. Los resultados mostrados aquí fueron obtenidos en este último).

Por otro lado, teniendo las condiciones para realizar lo anterior, se podría atacar, aparentemente sin problemas, al menos la primera parte de b), lo que permitiría considerar esencialmente finalizada una parte de los objetivos planteados.

Por último, sería interesante extender este estudio para el caso de régimen turbulento. El principal impedimento consiste, por ahora, en la cantidad de memoria que requeriría un cálculo computacional de tal naturaleza, unido esto al tiempo de cpu implicado.



a) Situación inicial para la líneas de corriente.

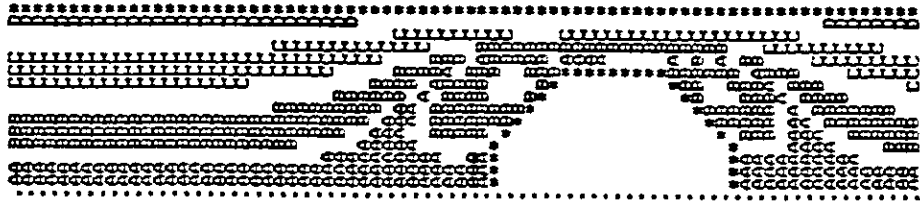


b) Líneas de corriente al término del proceso iterativo.

Fig. 2.

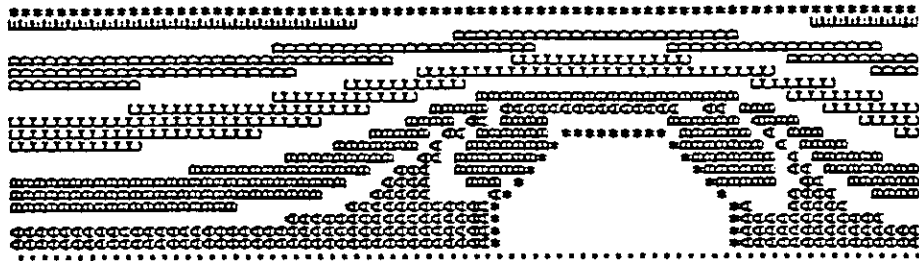
← Dirección del flujo.

R=1.6 REYNOLDB=1



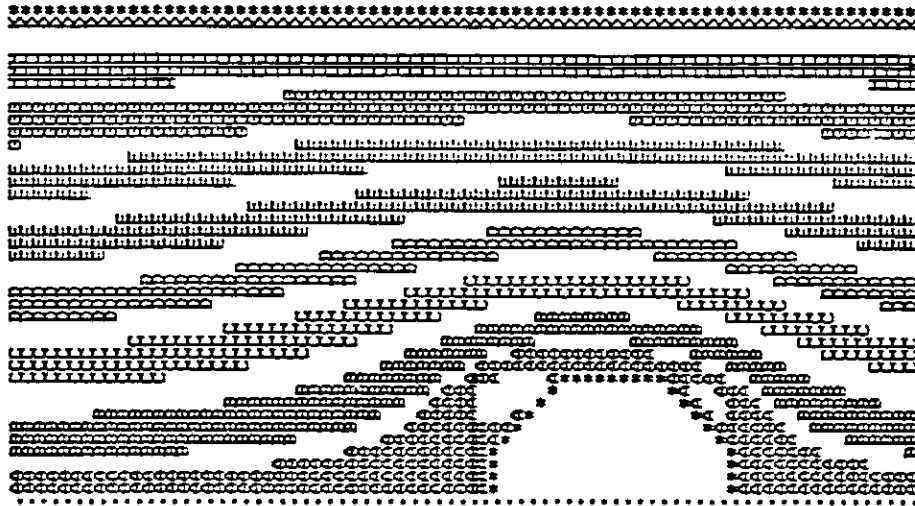
a) Líneas de corriente para R = 1.6.

R = 2.1 REYNOLDB = 1



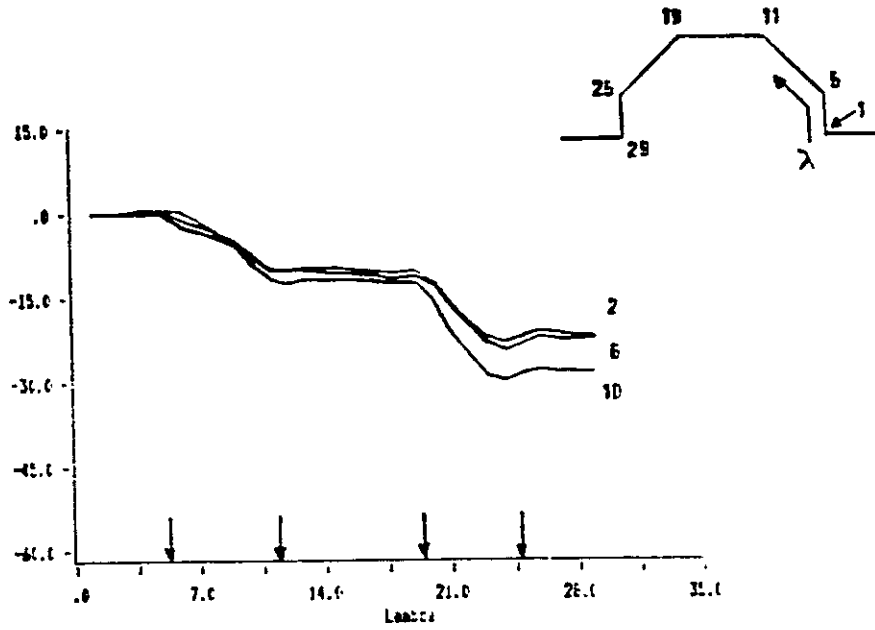
b) Id. para R = 2.1

R = 4.1 REYNOLDB = 1

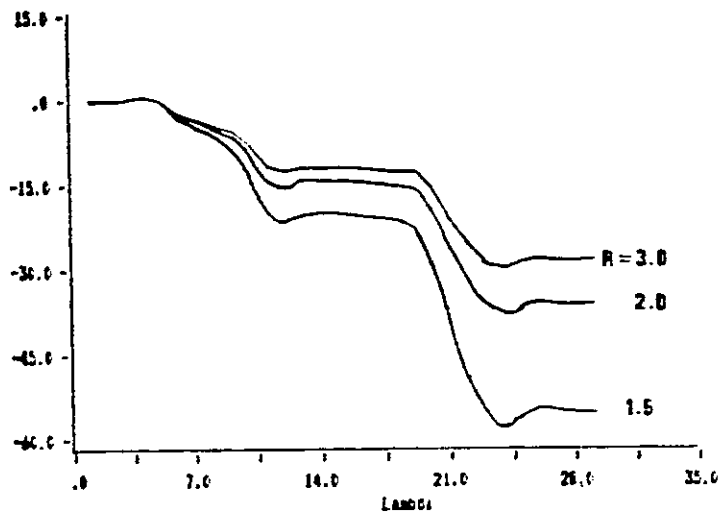


c) Id. para R = 4.1 (note que el remolino frontal ha disminuido significativamente).

Fig. 3.



a) Distribución de presión en la superficie para $R = 3.1$, $N_R = 2, 6$ y 10 .



b) Id. para $N_R = 10$ y $R = 1.6, 2.1$ y 4.1 .

Fig. 4.

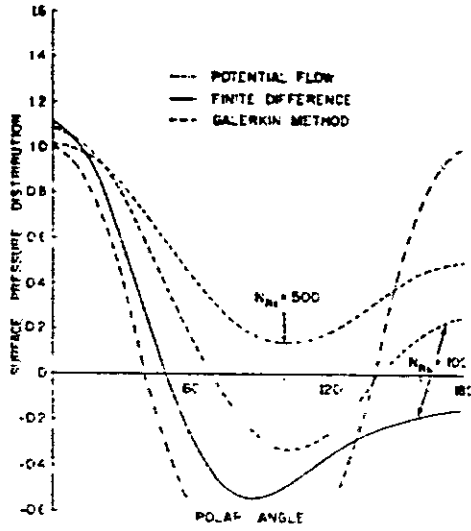


Fig. 6 Surface pressure distributions predicted by Galerkin and finite-difference methods compared with potential flow theory (zero mass efflux)

Fig. 4.- c) Distribución superficial del presión para una esfera no deformada en un medio infinito. $N_{Re} = 50$, $\theta=0$ corresponde al punto $\lambda = 1$ en tanto $\theta=180^\circ$ corresponde al punto $\lambda = 29$.

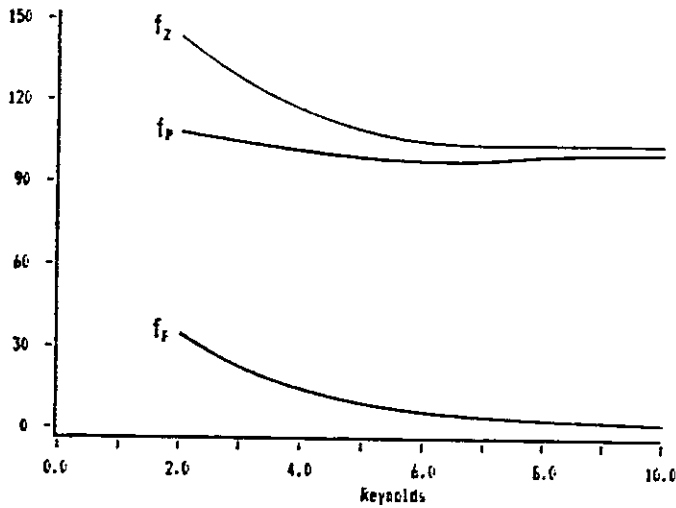
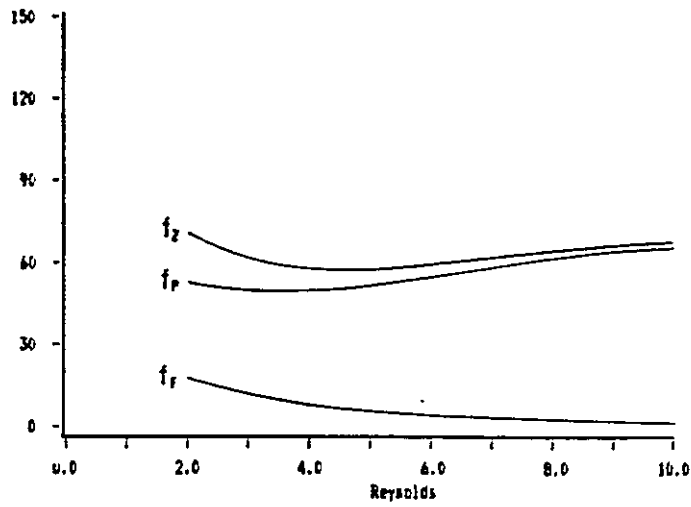
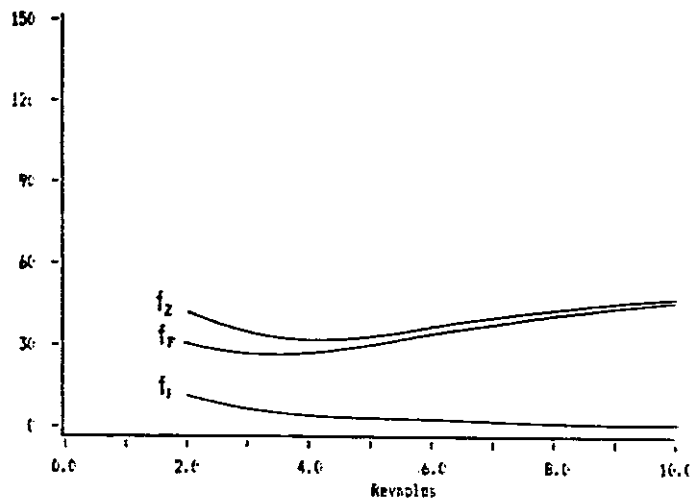


Fig. 5.- a) f_F , f_P y $f_Z = f_F + f_P$ para $R = 1.6$ en función de N_{Re}

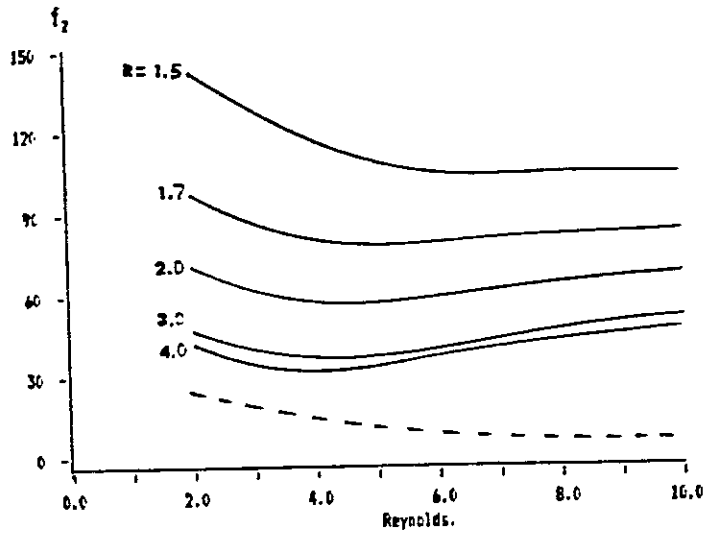


b) f_F , f_F y $f_z = f_F + f_F$ para $R = 2.1$ en función de N_R .

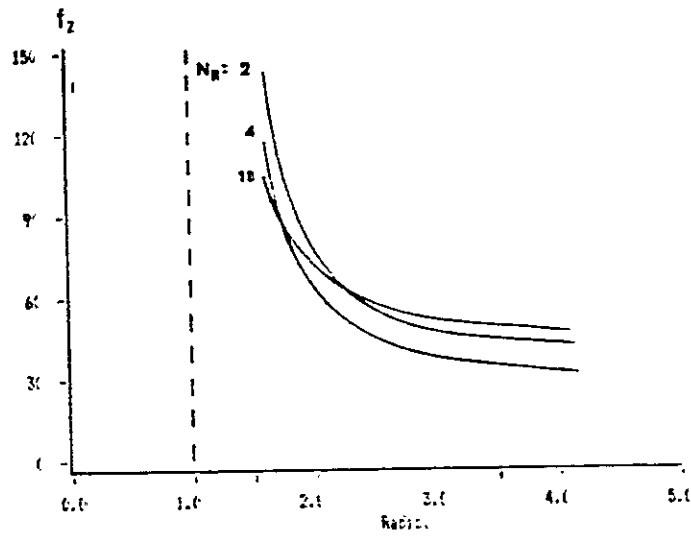


c) f_F , f_F y $f_z = f_F + f_F$ para $R = 4.1$ en función de N_R .

Fig. 5.

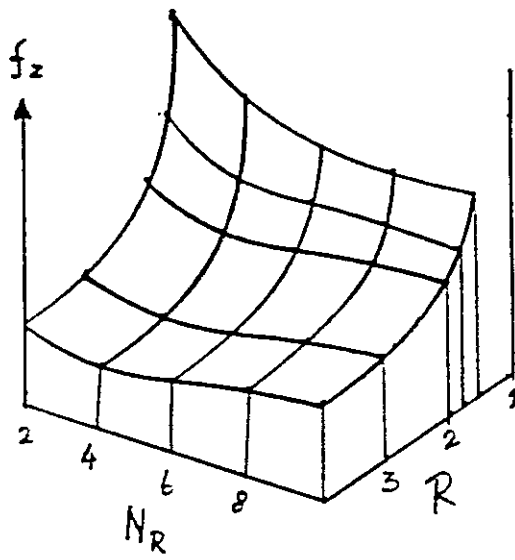


a) f_z como función de N_R para $R = 1.5, 1.7, 2.0, 3.0$ y 4.0

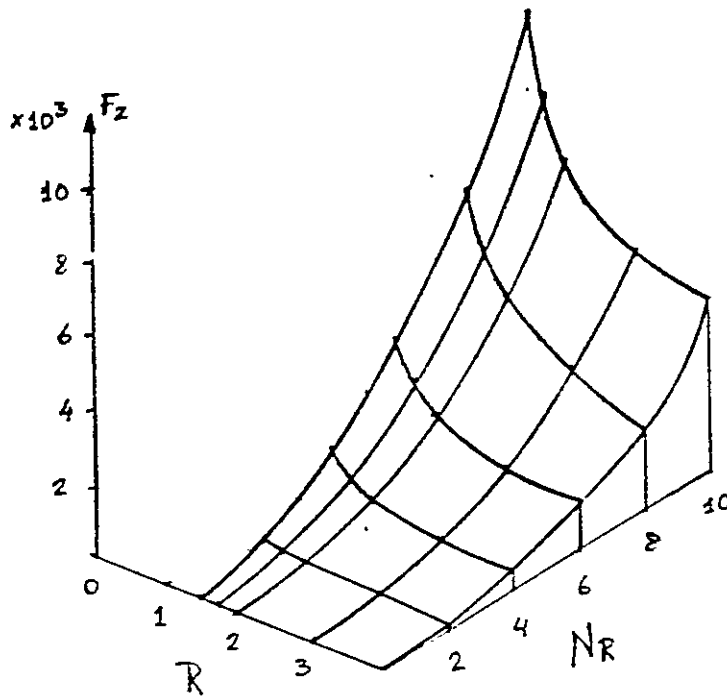


b) f_z como función de R para $N_R=2, 4$ y 10 .

Fig. 6.



a) Superficie f_z como función de N_R y R .



b) Superficie F_z como función de N_R y R .

Fig. 7.

3.- Conclusiones y Discusión. Se ha utilizado un esquema de diferencias finitas para aproximar la ecuación de Navier-Stokes estacionaria para un problema de flujo confinado. Las soluciones encontradas muestran un comportamiento afín con los resultados obtenidos experimentalmente para esferas moviéndose en un fluido infinito. Por otro lado el método de solución empleado muestra una convergencia razonablemente rápida para números de Reynolds bajos, y sin los problemas de oscilación asociados a los esquemas basados puramente en diferencias centrales.

Aunque no se llegó a comparar los resultados de este cálculo con el obtenido en el experimento descrito en el Capítulo 1, cabe esperar que el comportamiento sea cualitativamente semejante al encontrado allí, en lo que se refiere a la dependencia de la velocidad terminal como función del diámetro del tubo. El objetivo buscado inicialmente a través del análisis numérico era el de dar una interpretación física a los parámetros A y B en la función usada para ajustar los resultados experimentales o, en su defecto, hacerlo al menos para el caso de régimen laminar. Creemos que bastaría para tal efecto calcular un mayor número de puntos con el fin de construir una superficie $F_z(R/a, N_R)$ sobre una base más confiable que los 30 puntos calculados aquí.

A P E N D I C E A

Resultados obtenidos en las mediciones.

En la fig. 1 del cap. I se puede ver el montaje utilizado para la obtención de los datos. La siguiente tabla muestra los promedios, sobre diez mediciones en la mayor parte de los casos, de las lecturas obtenidas en el escalador para distintos diámetros de tubo (D) y para diferentes alturas (h) [El error porcentual es $\sim 0.5\%$].

Tabla I.- Datos obtenidos del montaje mostrado en la Fig. 1

(D y h están en centímetros)

D \ h	113.0	187.5	271.0	381.0	470.0
5.1	1839.5	1596.6	1416.0	1306.0*	--
6.3	1745.0	1446.9	1269.6	1136.4	1070.0
7.6	1688.2	1388.0	1212.5	1071.7	1014.7
8.9	1649.2	1347.3	1176.9	1044.7	980.4
10.2	1638.1	1327.7	1158.0	1030.8	962.4
Sin tubo	1622.7	1305.9	1129.5	998.8	929.5

Los datos de la tabla anterior se transforman a diferencias de tiempo Δt valiéndose de los resultados mostrados en su última fila junto con los que se obtuvieron en la referencia 10. Allí se encontró

(*) Este valor representa el promedio de sólo dos mediciones.

que la relación entre la velocidad y la distancia recorrida durante la caída está dada por:

$$v(y) = v_T [1 - \exp(-2gy/v_T^2)]^{1/2} \quad [1]$$

Considerando que $\Delta x/\Delta t$ corresponde esencialmente a la velocidad en $y = h + \Delta x/2$, introducimos este valor de y en [1] y lo igualamos a $\Delta x/\Delta t$, es decir, $v(h + \Delta x/2) = \Delta x/\Delta t$, de donde se obtiene que $\Delta t = \Delta x / [v(h + \Delta x/2)]$. Esta última ecuación nos permite obtener una calibración para los intervalos Δt tal que las velocidades evaluadas a partir de la última fila de la tabla I concuerdan con los que se encontraron en un trabajo anterior¹⁰, como debe ser. Se encuentra para Δt la relación

$$\Delta t = 0.013172139 * N + 0.85111419 \quad [2]$$

donde N el número de cuentas en el escalador (valores en la tabla I). El coeficiente de correlación resultó ser $r = 0.99956$.

La tabla II, construida usando [2], da los valores de la velocidad en el plano medio entre los dos detectores, es decir, 5cm más abajo de la salida del tubo, en función de los distintos diámetros.

Del conjunto de velocidades de la tabla II se pueden obtener las velocidades v_e a la salida del tubo. Se utiliza para tal efecto la ecuación [5] del capítulo I, poniendo como velocidad final la que se mide en el plano medio entre los detectores. Se despeja entonces v_o , que corresponde a la velocidad en la salida del tubo. Las velocidades v_e a la entrada del tubo se calculan usando [1].

Tabla II.- Velocidades en el plano medio entre los detectores, obtenidas de la ec [2]. ($h' = h + 5cm$)

D \ h'	118.0	192.5	276.0	386.0	475.0
5.1	387.72	457.01	512.75	553.90	
6.3	419.54	502.27	569.01	632.12	669.11
7.6	433.12	522.63	594.45	668.11	703.40
8.9	442.99	537.70	611.50	684.37	726.48
10.2	445.88	545.27	620.95	693.06	739.22
Sin tubo	449.95	553.94	635.77	713.91	763.68

La tabla III muestra todos estos resultados. Además se han indicado, entre paréntesis, los valores de las velocidades en $y = h$ cuando no hay tubo, calculados usando [1], con en fin de probar la confiabilidad de la corrección para v_m realizada usando [3] y [4], y, en cierto modo, la calibración dada por [2].

Ahora bien, es posible reducir los datos de la tabla III a cinco valores, si suponemos que la ecuación de movimiento en el interior del tubo aún es la que rige la caída cuando no hay tubo, pero con una velocidad terminal distinta v_T' . Para tal efecto usamos la ecuación [5] de cap. I, poniendo v_E como velocidad inicial, v_B como velocidad final y H, el largo del tubo, como distancia caída. Esto nos permite establecer una ecuación para v_T' , la velocidad terminal dentro del tubo. Se obtiene como resultado la ecuación [6] del cap. I, que reproducimos aquí:

$$v_T'^2 - v_B^2 + (v_E^2 - v_T'^2) \exp(-2gH/v_T'^2) = 0 \quad [3]$$

Tabla III.- Velocidades a la entrada y a la salida del tubo.

En la segunda fila se ha indicado la velocidad de entrada al tubo, para cada columna de datos.

h	113.0	187.5	271.0	381.0	470.0
D \ (v _E)	69.83	372.38	514.75	632.37	698.38
5.1	377.01	448.68	505.92	548.02	
6.3	410.01	495.18	563.46	627.79	665.41
7.6	424.04	516.04	589.41	664.40	700.25
8.9	434.23	531.46	606.79	680.92	723.68
10.2	437.21	539.20	616.41	689.75	736.22
Sin tubo	441.40	548.06	631.50	710.92	761.42
	(442.66)	(548.76)	(632.80)	(711.71)	(758.67)

Introduciendo los datos de la tabla III en [3] es posible obtener numéricamente valores para v_T . La tabla IV muestra los resultados de este procedimiento. El buen acuerdo de los valores obtenidos para cada diámetro del tubo con cinco parejas distintas de velocidades de entrada y salida da cierta confianza en la última hipótesis introducida.

La última columna de la tabla IV nos permite estimar el error final producto de las mediciones y los procedimientos de análisis usados aquí. Cada uno de los números de la mencionada columna debió ser igual a la velocidad terminal sin tubo: 948 [cm/s]. En todo caso, se puede decir que, dentro del error experimental, tales valores coinciden con este último.

Tabla IV.- Velocidades terminales dentro del tubo. Las dos últimas filas indican el promedio y la máxima desviación porcentual asociada a cada valor.

h \ D	5.1	6.3	7.6	8.9	10.2	S/T
113.0	480.0	620.02	718.54	822.51	861.45	925.90
167.5	495.74	623.06	711.01	800.64	858.39	940.57
271.0	499.42	622.83	706.94	782.18	833.93	937.36
381.0	484.28	621.63	722.84	784.27	823.23	942.64
470.0	----	619.19	703.65	779.74	832.05	965.71
$\langle v_T \rangle$	489.86	621.35	712.60	793.84	841.81	942.44
% dsv.	1.6	0.25	1.0	2.0	1.8	1.4

Finalmente, ajustamos a los valores promedio de v_T' de la tabla IV una función con, en principio, dos parámetros a optimizar. La función que dió buenos resultados es

$$v_T'(D) = v_T (1 - A e^{-BD}) \quad [3]$$

donde A y B son los parámetros, $v_T = 948$ [cm/s] es la velocidad terminal sin tubo y D es el diámetro del tubo. Un ajuste de A y B mediante mínimos cuadrados arroja los valores $A = 2.031679$, $B = 0.281161$ con un error cuadrático medio $E = 18.07$. Es posible aún dejar v_T como parámetro ajustable; así, un ajuste de los tres parámetros da $A = 1.797258$, $B = 0.2517307$ y $v_T = 977.3$ [cm/s], con $E = 11.3$. Vemos que la velocidad terminal encontrada de este modo difiere sólo un 3.1% de 948 [cm/s], que es el valor medido con anterioridad.

A P E N D I C E B

Instrumentación.

1.- Introducción. El conversor tiempo-amplitud (TAC) tiene como función transformar el intervalo de tiempo que pudiera haber entre dos pulsos llegados a sus entradas en un pulso de duración fija (100ps) y de amplitud proporcional a la diferencia de tiempo entre los pulsos de entrada. En el diseño de este instrumento se agregó además una segunda salida cuya función es entregar un pulso de amplitud fija (10V), con una duración igual al intervalo entre los pulsos de entrada. Esta última salida puede ser utilizada para controlar un escalador o bien un timer, mientras que la primera (TAC) es adecuada para almacenar datos en un multicanal.

2.- Descripción del circuito. La figura B-1 muestra el circuito del TAC. Allí se muestran, como parte del circuito de entrada, dos fototransistores (PT1 y PT2) para la generación de los pulsos de entrada. (Esta disposición se utilizó específicamente para la medición de velocidades). Estos fototransistores se encuentran iluminados continuamente por una fuente de luz adecuada, de modo que, cuando un objeto pasa frente a ellos, interrumpiendo la iluminación, se genera un pulso positivo en el colector de cada uno. El pulso proveniente desde PT1 es amplificado por el operacional OA1, que funciona aquí como comparador de voltaje. La salida de OA1 cambia el estado de la salida de OA3 -normalmente positiva- al estado de voltaje negativo. Esto produce un voltaje de -5 V en la entrada de R₇, iniciándose

entonces una rampa de voltaje con pendiente $5/(R_T C_0)$ [V/s] en la salida de OA4. El amplificador operacional OA4, junto con R_T y $C_0=0.1\mu\text{F}$, constituye un integrador cuya salida es una rampa positiva en tanto la entrada en R_T sea -5V . Esta rampa crece hasta que la luz incidente sobre PT2 es interrumpida. Entonces, la salida de OA2 restablece la salida de OA3 a su estado normal de tensión positiva, con lo cual la entrada en R_T se anula y la salida del integrador se convierte en una rampa de pendiente mucho menor que la anterior (menor que 10^{-5} veces el valor previo). Se obtiene este valor mediante el ajuste del potenciómetro de $50\text{ k}\Omega$. La necesidad de existencia de esta pequeña rampa positiva tiene su origen en el método usado para restablecer el integrador a su estado con salida nula. El transistor Q1 puede descargar al condensador C_0 siempre que el voltaje en el extremo de salida sea mayor que el que hay en el extremo de entrada. En estas condiciones, cuando la tensión en C_0 es mayor que la tensión de saturación de Q1, la corriente de descarga fluye esencialmente a través del colector y el emisor del transistor cuando hay una pequeña corriente de base. Esto produce una muy rápida descarga de C_0 hasta el valor de saturación de Q1 ($\sim 0.3\text{V}$). En una segunda etapa, cuando ya no fluye corriente de colector en Q1, la descarga de C_0 continua en virtud de la corriente aplicada en la base de Q1, la que produce una rampa negativa en el integrador que cesa cuando la unión base-colector del transistor se polariza en la dirección de conducción. En ese momento, deja de fluir corriente en la unión base-emisor de Q1, con lo que se detiene el proceso de descarga. Como la tensión de polarización directa de las junturas de los transistores bipolares son levemente distintas, cabe esperar que permanezca una pequeña carga remanente en C_0 . Este es efectivamente el caso: la

tensión remanente en el integrador es de aproximadamente 30 mV, que es, en todo caso, 10 veces menor que el voltaje de saturación de Q1. Ahora bien, la razón para mantener una pequeña rampa positiva en el integrador es que, de este modo, se asegura que la tensión en el extremo de salida sea siempre mayor que la de entrada en el integrador, con lo cual se consigue reproducir en forma esencialmente idéntica las condiciones iniciales al comienzo de cada proceso de carga de C_0 . Claramente, esto no se puede garantizar si, por alguna razón (deriva térmica u otra), hubiera una tensión negativa en la salida del integrador respecto de su entrada.

La salida del TAC y el reset del integrador son controlados por el LM556 (Dual Timer). Durante la transición desde el estado de salida negativa a positiva en OA3, el colector de Q2 produce un pulso negativo que dispara el primer timer del LM556, apareciendo entonces en el pin 9 un pulso de $\sim 12V$, 100 μs de duración, el cual controla la etapa de salida del TAC, constituida por OA5 y OA6. El borde de bajada del pulso de 100 μs dispara el segundo timer del LM556, produciéndose entonces un pulso de 10 ms de duración que restablece la salida del integrador a su estado de cero volts, quedando el TAC listo para un nuevo ciclo. Para eliminar la deriva ocasionada por la rampa lenta, la salida del integrador es anulada al comienzo de cada nuevo ciclo a través del diferenciador que va desde la salida de OA1 a la base de Q1.

Otros componentes del circuito son: Z1, un diodo Zener que junto a D5 (cuya función es proporcionar compensación térmica a Z1) entregan tensión regulada para establecer -5V (con la ayuda del potenciómetro de 1 kohm) en la entrada de R_T . Con esto se logra hacer la salida del TAC independiente de las tensiones de alimenta-

ción, que pueden ser de +12V, -12V a +15V, -15V. Por otro lado, el diodo de silicio D9, de baja capacitancia y baja corriente inversa, mantiene a potencial cero la salida del tac mientras OA4 realiza la integración.

Comportamiento.- La linealidad del TAC fue probada con el instrumento trabajando con $R_T = 200\text{kohm}$, lo cual da un intervalo máximo de 40 ms para 12V en la salida. Los amplificadores de entrada fueron alimentados con parejas de pulsos separadas por intervalos variables, y la salida almacenada en un multicanal. La salida de control para timer fue usada para alimentar el gatillo de un escalador HP616 trabajando en el modo "check" a una frecuencia conocida ($\approx 75\text{ kHz}$). El comportamiento observado resultó ser lineal para pulsos de hasta 12V en la salida, con un coeficiente de correlación $r=0.999999$ y un offset despreciable. Las mediciones pudieron ser reproducidas en múltiples ocasiones posteriores con una precisión de un canal en 1024. La figura B-2 muestra las tensiones en distintos lugares del circuito en función del tiempo.

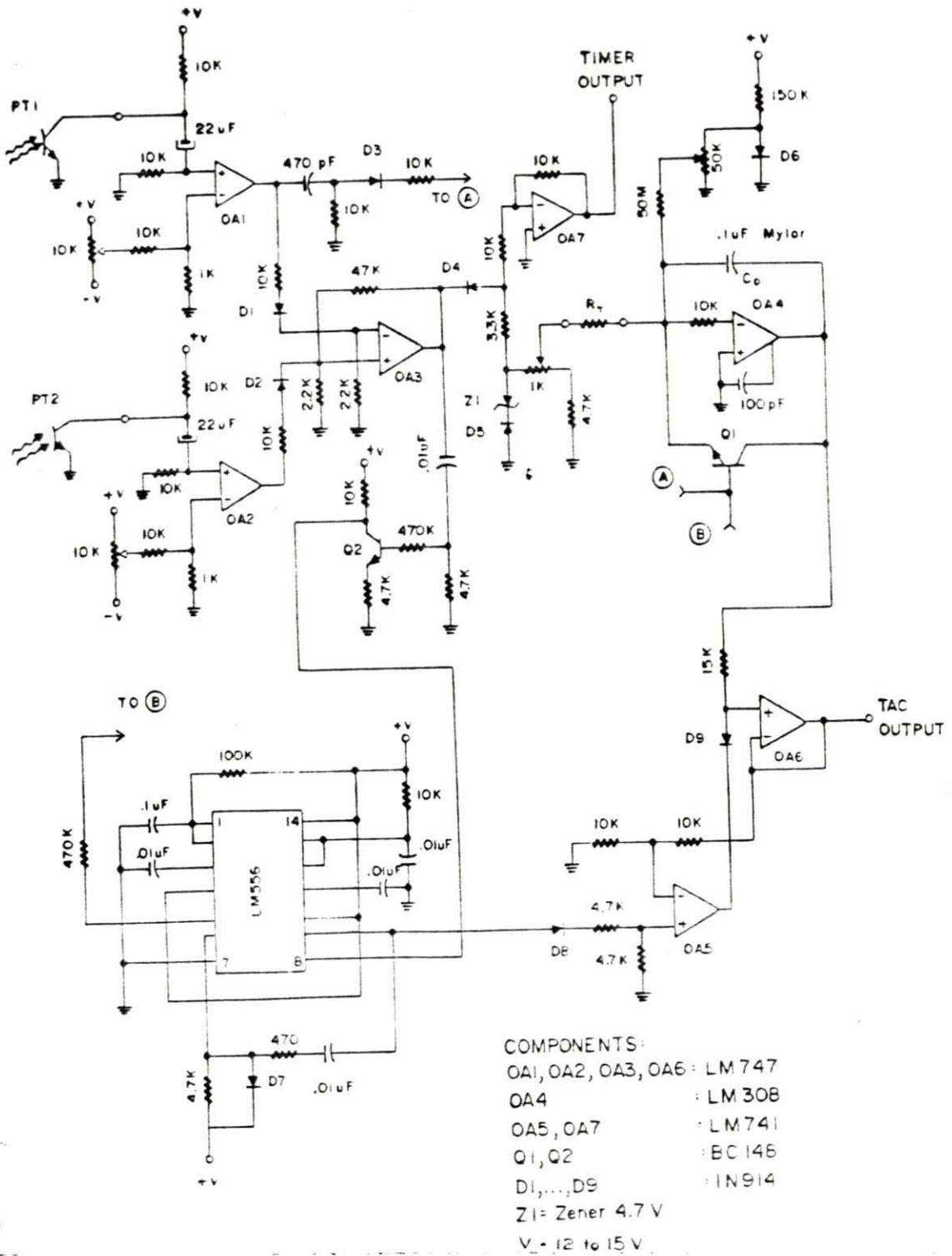


Figura B-1.- Diagrama del circuito del TAC. Todas la resistencias en Ohms.

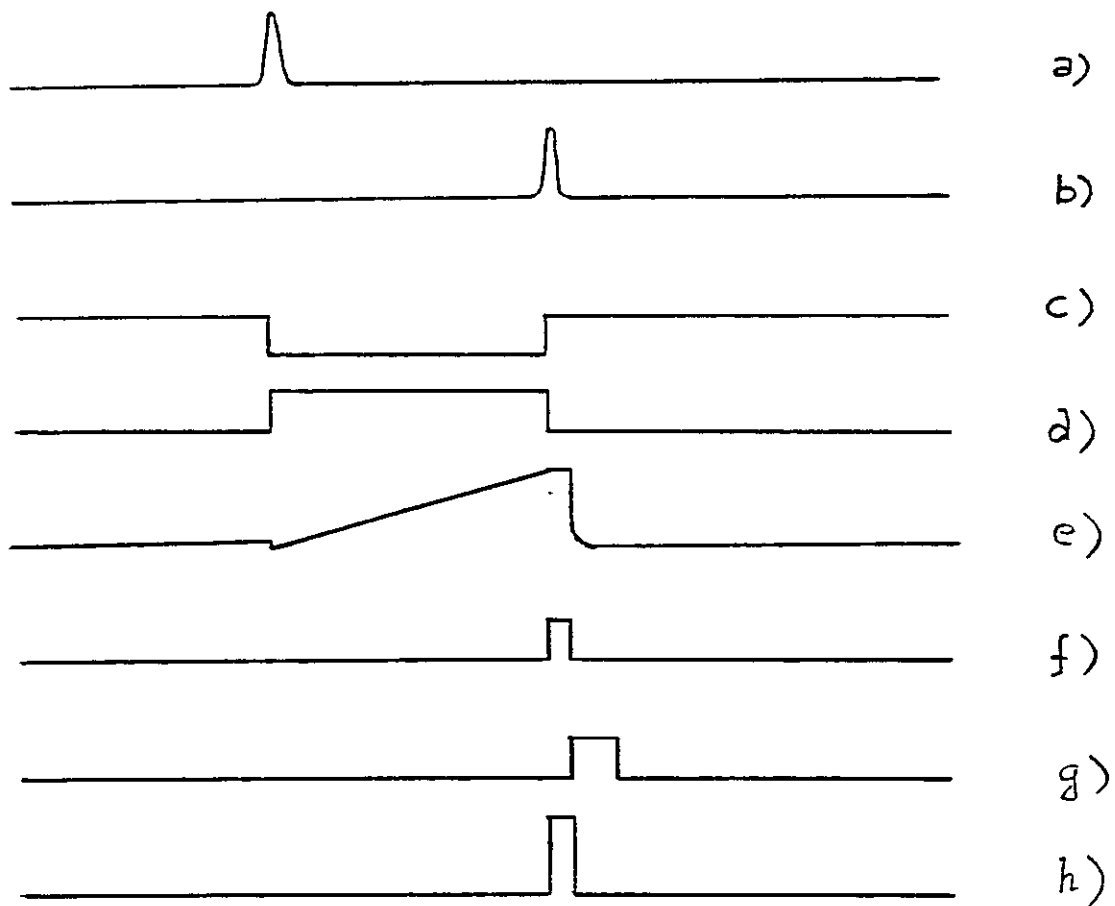


Figura B-2.- Tensiones presentes en distintos lugares del circuito en funcion del tiempo: a) Entrada de DA1

- b) Entrada de DA2
- c) Salida de DA3
- d) Salida de DA7 (Timer output)
- e) Salida de DA4
- f) Pin 9 del LM556
- g) Pin 5 del LM556
- h) Salida de DA6 (TAC output)

vorticidad: la evalúa usando los valores
vecinos de la función de corriente [F1])
OMEGA1 (Cálculo de la vorticidad en la frontera,
utilizada por FVORT)

NOTA: La expresión usada para reemplazar las derivadas respecto a ξ
de la vorticidad en la ec [11-a] del cap. 2 es:

$$\Delta \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = n \left(\frac{\gamma}{2} \omega^{i,j+n} + (1-\gamma) \omega^{i,j} - \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \omega^{i,j-n} \right) \quad [11]$$

$n = 1$ para los barridos en una dirección (avance)

$n = -1$ para los barridos en la dirección opuesta (retroceso)

El factor γ toma algún valor entre 0 y 1. Para $\gamma = 0$, [11] se reduce a
expresión tipo diferencia "hacia atrás", en tanto para $\gamma = 1$ se
obtiene la expresión tipo diferencia central. En el programa se puso
 $\gamma = 0.5$

```

C
C      SOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION DE NAVIER STOKES
C      PARA UN PROBLEMA CON SIMETRIA AZIMUTAL
C
C      METODO      : SOBRERRELAJACION SUCESIVA ASIMETRICA (USSOR)
C
C      - PARAMETROS LEIDOS POR EL PROGRAMA.
C
C      RADIO      : RADIO DEL CILINDRO
C      NVUELT     : NUMERO DE ITERACIONES
C      REN        : NUMERO DE REYNOLDS
C      BETA0      : FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO PARA LA VORTICIDAD
C      GAMA       : FACTOR DE PESO PARA LA COMBINACION
C                  [DERIVADA CENTRAL] + [DERIVADA HACIA ATRAS] EN dw/dz
C      ASIM       : ASIMETRIA USADA
C      NPRMAX     : SE IMPRIME ABSRES, ..., ETC., CADA NPRMAX ITERACIONES
C      NBAK      : SE GRABAN RESULTADOS INTERMEDIOS CADA NBAK ITERACIONES
C

```

```

BLOCK DATA
DIMENSION I11(21),I12(21)
COMMON/R3/ I11,I12
DATA I11/2,6,7,8,9,10,9*11,10,9,8,7,6,2/
DATA I12/5,6,7,8,9,10,9*11,10,9,8,7,6,5/
END

```

```

C
C *****          MAIN          *****
C

```

```

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
CHARACTER*2 RESP
DIMENSION FI(51,401),OMEGA(51,401)
DIMENSION I11(21),I12(21)
DIMENSION NPRTI(8),NPRTF(8)
COMMON/R1/ FI,OMEGA
COMMON/R2/ DELTA,REN
COMMON/R3/ I11,I12
COMMON/R4/ N,N1,M,MC,M1,M2
COMMON/P1/ RES,ABSRES,GAMA,SN,NS,NCRES
DATA NPRTI/ 1,14,27,40,53,66,79,92/
DATA NPRTF/13,26,39,52,65,78,91,104/
OPEN(1,FILE='PROMPT.NAVIER',STATUS='NEW',BUFFERED='UNBUFFERED')
OPEN(3,FILE='DATOS.NAVIER',STATUS='OLD')
OPEN(4,FILE='DRAG.NAVIER',STATUS='NEW',BUFFERED='UNBUFFERED')
OPEN(6,FILE='GRAF.NAVIER',STATUS='NEW',BUFFERED='UNBUFFERED')
OPEN(7,FILE='STREAM.NAVIER',STATUS='NEW',BUFFERED='UNBUFFERED')
OPEN(8,FILE='VORTIC.NAVIER',STATUS='NEW',BUFFERED='UNBUFFERED')
OPEN(9,FILE='NAVIER.STOKES',STATUS='NEW',FORM='UNFORMATTED',
1  BUFFERED='UNBUFFERED')

```

```

C
C *****          DEFINICION DE CONSTANTES          *****
C
C

```

```

WRITE(1,*) 'INGRESE H0'
READ(3,*) H0
IF(H0 .GT. 40.000) H0 = 40.000
IF(H0 .LT. 10.000) H0 = 10.000
A0      = 1.000
DELTA   = 0.100
M=IDINT(H0/DELTA+1.000)
IF(M.GT.401) M = 401
MC      = M/3
M1      = MC-10
M2      = MC+10
M1M1    = M1-1
RES     = 0.000
ABSRES  = 0.000
DDM     = 0.000
DDMMAX  = 0.000
IDMMAX  = 2
JDDMAX  = 2
NGI     = M1-15
NGF     = 2*(M2-M1)+M2
NPRDM   = 0
NCRES   = 1
NC      = 0

```

```

C
C *****
C

```

```

WRITE(1,*) ' Leemos resultado anterior? (Si, No)'
READ(3,121) RESP
IF(RESP .EQ. 'NO' .OR. RESP .EQ. 'no') GOTO 198
OPEN(5,FILE='CALC.NAVIER',STATUS='OLD',FORM='UNFORMATTED')
READ(5) FI,OMEGA
CLOSE(5)
GOTO 2199

```

```

C
C ***** Establecimiento de la condicion inicial *****
C

```

```

198 DO 10 J=1,M
      DO 9 I=1,51
          RI=DBLE(I-1)*DELTA
          FI(I,J) =-RI*RI/2.000
          JJ=0
          IF(J.GE.M1 .AND. J.LE.M2) JJ=II2(J-M1M1)
          IF(I.LE.JJ) FI(I,J)=0.000
          OMEGA(I,J)=0.000
9      CONTINUE
10     CONTINUE
      FI(1,MC) = 8.8888D+88
      OMEGA(1,MC) = 8.8888D+88

```

```

C
C *****
C

```

```

2199 INTER = 0
      WRITE(1,*) 'Ingreso RO, NVUOLT, REN, BETA0, GAMA, ASIM, NPRMAX,NBAK'
      READ (3,*) RO,NVUOLT,REN,BETA0,GAMA,ASIM,NPRMAX,NBAK
C
C ***** RADIO DEL CILINDRO *****
C
      N = IDINT(RO/DELTA)
      IF(N.GT.50) N = 50
      N1 = N+1
C
C *****
C
C ***** REGION DE CALCULO *****
C
      JJI = 2
      JJF = M-1
      JJIPF = JJI + JJF
C
C*****
C
      WRITE(1,101) RO,H0,DELTA,A0
      WRITE(7,101) RO,H0,DELTA,A0
      WRITE(8,101) RO,H0,DELTA,A0
      WRITE(1,102) N,N1,M,MC,M1,M2,REN
      WRITE(7,102) N,N1,M,MC,M1,M2,REN
      WRITE(8,102) N,N1,M,MC,M1,M2,REN
C
C COMIENZA EL CALCULO
C
      DO 12 JJJ=1,NVUOLT
C
      CADA NBAK BARRIDOS SE GUARDAN RESULTADOS INTERMEDIOS
C
      INTER = INTER + 1
      IF(INTER .LT. NBAK) GOTO 56
      INTER = 0
      PRINT *, JJJ
      IF(JJJ .EQ. NVUOLT) GOTO 56
      OPEN(5,FILE='CALC.NAVIER',STATUS='OLD',FORM='UNFORMATTED')
      WRITE(5) FI,OMEGA
      CLOSE(5)
C
C ----- CALCULO DE LAS FUNCIONES FI Y OMEGA -----+
C
      56      NPROM = NPROM + 1
      IF(NPROM .EQ. NPRMAX) NCRES = 2
C
C ***** UNA PASADA EN CADA SENTIDO *****
C
      DO 1984 LCR=1,2

```



```

C
C *****
C
C          GOTO(12,240),NCRES
240      NPRM  = 0
          NCRES = 1
C
C -----+
C
C    12 CONTINUE
C
C ***** CALCULO DEL DRAG *****
C
C 9697 CALL DRAG(R0)
C
C      RES  = RS
C      ABSRES = ABSRS
C      DOM  = DM
C      DOMMAX = DMMAX
C
C ***** SE ALMACENAN LOS VALORES DE INTERES *****
C          PARA EL CALCULO DEL DRAG *
C
C      J00 = MC - 14
C      J01 = MC + 14
C      DO 6000 J=J00,J01
C          WRITE(9)(FI(I,J),I=1,15)
C          WRITE(9)(OMEGA(I,J),I=1,15)
6000 CONTINUE
C
C *****
C *****
C
C      CALL BRAF(R0,JJJ,NGI,NGF)
C      WRITE(1,*) ' Se imprimen resultados? (Si,No)'
C      READ(3,121) RESP
C      IF (RESP.EQ.'NO' .OR. RESP.EQ.'no' .OR. RESP.EQ.'No') GOTO 5555
C      WRITE(7,4859) R0,REN,NVUELT
C      WRITE(8,4859) R0,REN,NVUELT
C
C      IMPRESION DE RESULTADOS
C
C      DO 4450 K=1,B
C          NI = NPRTI(K)
C          NF = MINO(NPRTF(K),NI)
C          DO 4420 J=NGI,NGF
C              WRITE(7,111)(FI(I,J),I=NI,NF)
4420 CONTINUE
C          WRITE(7,113)
C          DO 4425 J=NGI,NGF
C              WRITE(8,111)(OMEGA(I,J),I=NI,NF)
4425 CONTINUE

```

```

        WRITE(8,113)
        IF (FLOAT(N1-NPRTF(K))) 5555,5555,4450
4450 CONTINUE
C
5555 DO 3891 K=4,8
        IF(K .EQ. 5) 60TD 3891
        WRITE(K,3332)
        WRITE(K,3333) ABSRES,OMMAX0,OMEGA2(IOMMAX,JOMMAX),JJJ,NVUOLT
        WRITE(K,278) IOMMAX,JOMMAX,OMMAX,IOMMAX,JOMMAX,DOMMAX,TEST,REN
3891 CONTINUE
        WRITE(1,*) ' Parar? (Si,No)'
        READ(3,121) RESP
        IF(RESP.EQ.'NO'.OR. RESP.EQ.'no') 60TD 2199
        CLOSE(1)
        CLOSE(3)
        CLOSE(4)
        CLOSE(6)
        CLOSE(7)
        CLOSE(8)
        CLOSE(9)
        OPEN(5,FILE='CALC.NAVIER',STATUS='OLD',FORM='UNFORMATTED')
        WRITE(5) FI,OMEGA
        CLOSE(5)
        STOP
C
C
101 FORMAT(/' R0= ',F5.2,' H0= ',F6.2,' DELTA= ',F4.2,' A0= ',F6.3)
102 FORMAT(/' N= ',I3,' N1= ',I3,' M= ',I3,' MC= ',I3,
1      ' M1= ',I3,' M2= ',I3,' REN= ',F8.4//)
111 FORMAT(13E10.3)
112 FORMAT(/,39(' +'),//)
113 FORMAT(/,39(' -'),/)
121 FORMAT(A2)
278 FORMAT(' IOMMAX(',I3,',',I3,')=',OPG10.3,' DOMMAX(',I3,',',I3,
1      ')=',G10.3,' TEST=',G10.3,' REN=',F4.1)
3332 FORMAT(/)
3333 FORMAT(' ABSRES=',G12.5,' OMMAX0=',G12.5,' OMEGA2=',G12.5,2X,I4,1X,I4)
4859 FORMAT(/,' R0 = ',F4.1,' REN = ',F4.1,' NVUOLT = ',I4//)
C
C
        END

```



```

C
C      Calculo de FI usando los cuatro primeros vecinos
C
FUNCTION FI1(I,J)
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  DIMENSION FI(51,401),OMEGA(51,401)
  COMMON/R1/ FI,OMEGA
  COMMON/R2/ DELTA,REN
  COMMON/R4/ N,N1,M,MC,M1,M2
  FLIM1=DBLE(I-1)
  AUX1 = 0.5D0/FLIM1
  TER1 = ( 1.0D0 - AUX1 ) * FI(I+1,J)
  TER2 = ( 1.0D0 + AUX1 ) * FI(I-1,J)
C
C      DELTA**3 = 0.001 -----
C      \:/
  TER3 = FI(I,J+1) + FI(I,J-1) - 0.001D0*FLIM1*OMEGA(I,J)
  FI1 = ( TER1 + TER2 + TER3 ) / 4.0D0
  RETURN
  END
C
C      Calculo de la vorticidad en el punto actual
C
FUNCTION OMEGA0(I,J)
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  DIMENSION FI(51,401),OMEGA(51,401)
  COMMON/R1/ FI,OMEGA
  COMMON/R2/ DELTA,REN
  COMMON/R4/ N,N1,M,MC,M1,M2
  COMMON/P1/ RES,ABSRES,GAMA,SN,NS,NCRES
  FLIM1 = DBLE(I-1)
  FLIM12 = FLIM1*FLIM1
  RENSDL = REN*5.0D0
  GAMA2 = GAMA*0.5D0
  A = 1.0D0 - RENSDL*(FI(I,J+1)-FI(I,J-1))
  B = RENSDL*(FI(I+1,J) - FI(I-1,J))
  F = 4.0D0 + A/FLIM12 - SN*B*(1.0D0 - GAMA)/FLIM1
C
  T1 = OMEGA(I+1,J) + OMEGA(I-1,J) + OMEGA(I,J+1) + OMEGA(I,J-1)
  T2 = A*(OMEGA(I+1,J)-OMEGA(I-1,J))/(2.0D0*FLIM1)
  T3 = SN*B*(GAMA2*OMEGA(I,J+NS) - (1.0D0-GAMA2)*OMEGA(I,J-NS))/FLIM1
  T4 = -F*OMEGA(I,J)
C
  OMEGA0 = ( T1 + T2 + T3 ) / F
C
  IF(NCRES .EQ. 1) RETURN
C
  1/DELTA*DELTA = 100.0D0-----\
  \
  RESID = (T1 + T2 + T3 + T4)*100.0D0
  ABSRES = DABS(RESID)

```

```
RES = RES+RESID
ABSRES = ABSRES+ARESID
```

```
C
RETURN
END
```

```
C
C   Calculo de OMEGA usando los valores vecinos de FI
C
```

```
FUNCTION OMEGA2(I,J)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION FI(51,401),OMEGA(51,401)
COMMON/R1/ FI,OMEGA
COMMON/R2/ DELTA,REN
COMMON/R4/ N,N1,M,MC,M1,M2
FLIM1 = DBLE(1-1)
R1 = DELTA*FLIM1
TER1 = (FI(I+1,J)+FI(I-1,J)+FI(I,J+1)+FI(I,J-1)-4.0D0*FI(I,J))*100.0D0
TER2 = (FI(I+1,J)-FI(I-1,J))/0.2D0
```

```
C
OMEGA2 = TER1/R1 - TER2/(R1*R1)
```

```
C
RETURN
END
```

```
C
C   Calculo de la vorticidad en la frontera
C
```

```
SUBROUTINE FVORT
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION FI(51,401),OMEGA(51,401)
DIMENSION II1(21),II2(21)
COMMON/R1/ FI,OMEGA
COMMON/R2/ DELTA,REN
COMMON/R3/ II1,II2
COMMON/R4/ N,N1,M,MC,M1,M2
M1M1 = M1-1
LL=M-1
```

```
C
C   Se calcula la vorticidad en el manto del cilindro
C
```

```
DO 12 J=2,LL
    OMEGA(N1,J) = OMEGA1(N1,J)
```

```
12 CONTINUE
```

```
C
C   A continuacion se calcula la vorticidad sobre la esfera.
C
```

```
DO 14 J=M1,M2
    KI=II1(J-M1M1)
    KF=II2(J-M1M1)
    DO 13 I=KI,KF
        OMEGA(I,J) = OMEGA1(I,J)
```

```

13      CONTINUE
14      CONTINUE
C
C      Finalmente se establece la condicion de derivada respecto
C      de z nula para la vorticidad y la funcion de corriente en
C      el extremo posterior del cilindro.
C
      DO 17 I=2,N1
          OMEGA(I,M) = OMEGA(I,M-1)
          FI(I,M)    = FI(I,M-1)
C
17      CONTINUE
      RETURN
      END
C
C      CALCULO DE LA VORTICIDAD EN LA FRONTERA
C
FUNCTION OMEGA1(I,J)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION FI(51,401),OMEGA(51,401)
COMMON/R1/ FI,OMEGA
COMMON/R2/ DELTA,REN
COMMON/DRV/ DRFI,D2RFI,DZFI,D2ZFI
CALL DERIV(I,J)
RI      = DBLE(I-1)*DELTA
OMEGA1 = (D2RFI + D2ZFI)/RI - DRFI/(RI*RI)
RETURN
END
C
C      Calculo de derivadas parciales en la frontera
C
SUBROUTINE DERIV(I,J)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION FI(51,401),OMEGA(51,401)
DIMENSION I11(21),I12(21)
COMMON/R1/ FI,OMEGA
COMMON/R2/ DELTA,REN
COMMON/R3/ I11,I12
COMMON/R4/ N,N1,M,MC,M1,M2
COMMON/DRV/ DRFI,D2RFI,DZFI,D2ZFI
COMMON/DRG/ DROM,DZOM
M1M1 = M1-1
JM1C = IABS(J-MC)
IF(I .EQ. N1) GOTO 880
IF(JM1C.EQ.10) GOTO 870
IF(JM1C.LT.10 .AND. JM1C.GT.4) GOTO 890
IF(JM1C.LE.4) GOTO 880
C
870  NN2=2
      GOTO 210
880  NN2=1
      GOTO 220

```

```

890 NN2=2
    60TD 220
C
210 DRFI=(FI(I+1,J)-FI(I-1,J))/( 2.0D0 *DELTA)
    DROM=(OMEGA(I+1,J)-OMEGA(I-1,J))/( 2.0D0 *DELTA)
    D2RFI=(FI(I+1,J)+FI(I-1,J)- 2.0D0 *FI(I,J))/(DELTA*DELTA)
    60TD 230
220 NS = 1
    IF(I.EQ.N1) NS = -1
    SN = DBLE(NS)
    DRFI=SN*( - 3.0D0*FI(I,J) + 4.0D0*FI(I+NS,J) - FI(I+2*NS,J))
1      / ( 2.0D0*DELTA )
    DROM=SN*( - 3.0D0*OMEGA(I,J) + 4.0D0*OMEGA(I+NS,J) - OMEGA(I+2*NS,J))
1      / ( 2.0D0*DELTA )
    D2RFI=( FI(I,J) - 2.0D0*FI(I+NS,J) + FI(I+2*NS,J) )/(DELTA*DELTA)
230 60TD(235,240),NN2
235 DZFI=(FI(I,J+1)-FI(I,J-1))/( 2.0D0 *DELTA)
    DZOM=(OMEGA(I,J+1)-OMEGA(I,J-1))/( 2.0D0 *DELTA)
    D2ZFI=(FI(I,J+1)+FI(I,J-1)- 2.0D0 *FI(I,J))/(DELTA*DELTA)
    60TD 250
240 MS = -1
    IF(J.GE.MC) MS = 1
    SM=DBLE(MS)
    DZFI=SM*( - 3.0D0*FI(I,J) + 4.0D0*FI(I,J+MS) - FI(I,J+2*MS) )
1      / ( 2.0D0 *DELTA )
    DZOM=SM*( - 3.0D0*OMEGA(I,J) + 4.0D0*OMEGA(I,J+MS) - OMEGA(I,J+2*MS) )
1      / ( 2.0D0 *DELTA )
    D2ZFI=( FI(I,J) - 2.0D0*FI(I,J+MS)+ FI(I,J+2*MS) )/(DELTA*DELTA)
250 CONTINUE
    RETURN
    END

```

```

C
C   Subrutina para graficar Fi
C

```

```

SUBROUTINE GRAF(RADIO,NVUULT,NG1,NGF)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
CHARACTER*1 BLANCO,ASTER,CHAR(9),PUNTO,LINEA(78)
DIMENSION FI(51,401),OMEGA(51,401)
DIMENSION I11(21),I12(21)
DIMENSION FFI(9),DELTFI(9)
COMMON/R1/ FI,OMEGA
COMMON/R2/ DELTA,REN
COMMON/R3/ I11,I12
COMMON/R4/ N,N1,M,MC,M1,M2
DATA FFI/0.7D-2,0.12D+0,0.5D+0,0.11D+1, 2.0D0 ,0.32D+1,
1      0.45D+1,0.6D+1,0.8D+1/
DATA DELTFI/0.14D-1,0.7D-1,0.15D+0,0.2D+0,0.3D+0,0.38D+0,
1      0.5D+0,0.5D+0,0.7D+0/
DATA CHAR/'A','B','C','D','E','F','G','H','K'/
DATA ASTER,BLANCO,PUNTO/'*',' ','.'/
WRITE(6,300) RADIO,REN,NVUULT

```

```

300 FORMAT(/, '      RADIO = ',F5.2,'      REYNOLDS = ',F6.2,9X,15,/)
      IF(N1.GT.78) N1=78
      M1M1 = M1-1
      DO 20 I=2,78
          LINEA(I) = BLANCO
20  CONTINUE
      LINEA(N1) = ASTER
      LINEA(1) = PUNTO
      DO 100 JJ=NGI,NGF
          J = NGI+NGF-JJ
          KI = 2
          KF = 2
          IF( J.GE.M1 .AND. J.LE.M2 ) GOTO 8
          GOTO 9
8  KI = IJ1(J-M1M1)
      KF = IJ2(J-M1M1)
9  DO 50 I=KI,N
          DO 40 L=1,9
              FMIN = FFI(L) - DELTFI(L)
              FMAX = FFI(L) + DELTFI(L)
              FIIJ = DABS(FI(I,J))
              IF(      (FIIJ.GT.FMIN)
1             .AND. (FIIJ.LT.FMAX)
2             .AND. (I.NE.1)      )
3             LINEA(I) = CHAR(L)
              IF(      (J.GE.M1 .AND. J.LE.M2)
1             .AND. (I.GE.KI  .AND. I.LE.KF)
2             .AND. (I.NE.1)      )
3             LINEA(I) = ASTER
40  CONTINUE
50  CONTINUE
      WRITE(6,110) (LINEA(LJ),LJ=1,N1)
      DO 80 I=2,N
          LINEA(I) = BLANCO
80  CONTINUE
100 CONTINUE
110 FORMAT(1X,B2A1)
      WRITE(6,200)
200 FORMAT(//1X,7B('=')//)
      RETURN
      END

```



```

C
C   CALCULO DEL DRAG SOBRE LA ESFERA
C
SUBROUTINE DRAG(RADIO)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 NR,NZ
DIMENSION F1(51,401),OMEGA(51,401)
DIMENSION P(29),W1(29),W2(29),C(29),DPDRAG(29),DSDRAG(29)
DIMENSION NR(29),NZ(29),DSDL(29)
DIMENSION II(29),JJ(29)
COMMON/R1/ F1,OMEGA
COMMON/R2/ DELTA,REN
COMMON/R4/ N,N1,M,MC,M1,M2
COMMON/DRV/ DRFI,D2RFI,DZFI,D2ZFI
COMMON/DRS/ DROM,DZOM
DATA NR/5*0.0D0,6*-0.70710678D0,8*-1.0D0,6*-0.70710678D0,4*0.0D0/
DATA NZ/5*1.0D0,6*0.70710678D0,8*0.0D0,6*-0.70710678D0,4*-1.0D0/
DATA W1/11*1.0D0,8*0.0D0,10*-1.0D0/
DATA W2/5*0.0D0,20*1.0D0,4*0.0D0/
DATA DSDL/5*1.0D0,6*1.41421356D0,8*1.0D0,6*1.41421356D0,4*1.0D0/
PI = 3.14159265359D0

```

```

C
C   DEFINICION DE LA SUPERFICIE
C

```

```

DO 100 LAMBDA=6,24
      JJ(LAMBDA)=M1+LAMBDA-5
100  CONTINUE
DO 105 LAMBDA=1,5
      JJ(LAMBDA)=M1
      JJ(30-LAMBDA)=M2
105  CONTINUE
DO 110 LAMBDA=1,11
      II(LAMBDA)=LAMBDA
      II(30-LAMBDA)=LAMBDA
110  CONTINUE
DO 120 LAMBDA=12,18
      II(LAMBDA)=11
120  CONTINUE

```

```

C
C   DEFINICION DE LAS ABSISAS PARA LA INTEGRACION
C

```

```

DO 125 LAMBDA=1,29
      C(LAMBDA) = DBLE(LAMBDA-1)*DELTA
125  CONTINUE

```

```

C
C   CALCULO DE LA PRESION
C

```

```

P(1) = 0.0D0
CALL DERIV(II(2),JJ(2))
F = DZOM
P(2) = F*DELTA/ 2.0D0

```

```

DO 30 LAMBDA=3,28
  RI = DBLE(II(LAMBDA))*DELTA
  RI1 = DBLE(II(LAMBDA-1))*DELTA
  CALL DERIV(II(LAMBDA),JJ(LAMBDA))
  DP1=W1(LAMBDA)*DZOM-W2(LAMBDA)*(OMEGA(II(LAMBDA),JJ(LAMBDA)))/RI
1    + DROM)
  CALL DERIV(II(LAMBDA-1),JJ(LAMBDA-1))
  DP2=W1(LAMBDA-1)*DZOM-W2(LAMBDA-1)
1    *(OMEGA(II(LAMBDA-1),JJ(LAMBDA-1)))/RI1 + DROM)
  F = F+DP1+DP2
  P(LAMBDA) = F*DELTA/ 2.0D0
30 CONTINUE
  CALL DERIV(II(28),JJ(28))
  F = F-DZOM
  P(29)=F*DELTA/ 2.0D0
C
C  YA SE TIENE LA PRESION.
C  AHORA CALCULAMOS EL DRAG DE PRESION
C
  DPDRAG(1)= 0.0D1
  DO 40 LAMBDA = 2,29
    RI=DBLE(II(LAMBDA) - 1)*DELTA
    DPDRAG(LAMBDA)= 2.0D0*PI*NZ(LAMBDA)*DSDL(LAMBDA)*RI
1    *P(LAMBDA)
40 CONTINUE
  CALL DLINT(29,C,DPDRAG,PDRAG)
C
C  AHORA CALCULAMOS EL DRAG ASOCIADO A LA FRICCION
C
  DO 320 LAMBDA=6,24
    RI=DBLE(II(LAMBDA)-1)*DELTA
    CALL DERIV(II(LAMBDA),JJ(LAMBDA))
    SGMAZR=( 2.0D0 *DZRF1/RI - OMEGA(II(LAMBDA),JJ(LAMBDA)))/REN
    DZF10=DZF1
    CALL DERIV(II(LAMBDA)+1,JJ(LAMBDA))
    DZF11=DZF1
    CALL DERIV(II(LAMBDA)+2,JJ(LAMBDA))
    DZF12=DZF1
    DZRZF1=(-3.0D0*DZF10+4.0D0*DZF11-DZF12)/(2.0D0*DELTA)
    SGMAZZ= - 2.0D0*DZRZF1/(RI*REN)
    DSDRAG(LAMBDA)=-2.0D0*PI*(SGMAZR*NR(LAMBDA)+SGMAZZ*NZ(LAMBDA))
1    *RI*DSDL(LAMBDA)
320 CONTINUE
  DO 330 K=1,5
    DSDRAG(K)=0.0D0
    DSDRAG(30-K)=0.0D0
330 CONTINUE
C
C  AHORA CALCULAMOS EL DRAG DE FRICCION.
C
  CALL DLINT(29,C,DSDRAG,SDRAG)

```

```

C
WRITE(4,300) RADIO,REN
WRITE(4,510) PDRAG,SDRAG
WRITE(4,500)(K,P(K),K=1,29)
RETURN

C
300 FORMAT(' RADIO=',F5.2,' REYNOLDS=',F6.2)
510 FORMAT(' PDRAG=',G11.4,' SDRAG=',G11.4)
500 FORMAT(3X,12,5X,1PE10.3)

C
END

C
C -----
C
C Subrutina de integracion numerica ( DLINT )
C
C -----
C
SUBROUTINE DLINT(NF,P,FP,SFP)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION P(NP),FP(NP)
DIMENSION X(4),F(4)
SFP=0.0D0
NF=NF-3
DO 100 I=1,NF
    X(1)=P(I)
    X(2)=P(I+1)
    X(3)=P(I+2)
    X(4)=P(I+3)
    F(1)=FP(I)
    F(2)=FP(I+1)
    F(3)=FP(I+2)
    F(4)=FP(I+3)
    NC=1
    IF(I.GT.1) NC=2
    IF(I.EQ.NF) NC=3
    CALL AREA(NC,X,F,DA)
    SFP=SFP+DA
100 CONTINUE
RETURN
END

C
C Calculo de elementos de area
C
SUBROUTINE AREA(NCTRL,X,F,DA)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 N
DIMENSION X(4),F(4),N(4),GAMA(4,4),DX(4,4)
DIMENSION A(4),B(4),C(4),D(4)

C
C Definicion de GAMA(I,J) Y DX(I,J)
C

```



```

DO 100 J=1,4
  DO 99 I=1,4
    GAMA(I,J)= 1.000
    IF(I.EQ.J) GAMA(I,J)=0.000
    DX(I,J)=X(I)-X(J)
    IF(I.EQ.J) DX(I,J)= 1.000
99    CONTINUE
100  CONTINUE
C
C  Inicializacion de A(I),B(I),C(I),D(I)
C
  DO 200 I=1,4
    A(I) = 0.000
    B(I) = 0.000
    C(I) = 1.000
    D(I) = 1.000
200  CONTINUE
C
C  Calculo de A(I), B(I), C(I) Y D(I)
C
  DO 450 I=1,4
    DO 400 J=1,4
      A(I)=A(I)+X(J)*GAMA(I,J)
      DO 350 K=1,4
        B(I)=B(I)+X(J)*X(K)*GAMA(I,J)
          *GAMA(I,K)*GAMA(J,K)
1      CONTINUE
350    IF(I.NE.J) C(I)=C(I)*X(J)
      D(I)=D(I)*DX(I,J)
400    CONTINUE
      B(I)=B(I)/ 2.000
450  CONTINUE
C
C  Definicion de los limites de integracion para cada
C  elemento de area
C
  GOTO(500,510,520),NCNTRL
500  XA=X(1)
     XB=X(3)
     GOTO 550
510  XA=X(2)
     XB=X(3)
     GOTO 550
520  XA=X(2)
     XB=X(4)
550  A2=XA*XA
     B2=XB*XB
     DELTA4=B2*B2-A2*A2
     DELTA3=B2*XB-A2*XA
     DELTA2=B2-A2
     DELTA =XB-XA

```

```

C
C  Calculo de la integral de la parte dependiente de
C  X en el polinomio de interpolacion de lagrange
C
      DO 600 I=1,4
          N(I)=DELTA4/4.0D0-DELTA3*A(I)/3.0D0+DELTA2*B(I)/2.0D0-DELTA*C(I)
600  CONTINUE
C
C  Evaluacion del elemento de area
C
      DA=0.0D0
      DO 700 I=1,4
900  DA=DA+F(I)*N(I)/D(I)
      RETURN
      END

```

REFERENCIAS

- 1.- H. R. Pruppacher and J. D. Klett, "Microphysics of Clouds and precipitations". D. Reidel, 1978.
- 2.- L. D. Landau and E. M. Lifschitz, "Fluid Mechanics". Pergamon Press, 1956
- 3.- A. E. Hamielec, T. W. Hoffman and L. Ross, A.I.Ch.E.J. 13, No.2, 212-219(1967).
- 4.- R. W. Davis and E. F. Moore, J. Fluid Mech. 116, 475-506(1982).
- 5.- R. W. Davis, E. F. Moore and L. P. Purtell, The Phys. of Fluids 27, 46-59(1984).
- 6.- P. R. Mason and M. J. Moloney, Am. J. of Phys. 45, 305(1977).
R. Landenberg, Ann. Phys. (Leipz.) 23, 447-458(1907)
H. Faxen, Ark. Mat. Astron. Fys, 17, No.27(1923).
S. Wakiya, J. Phys. Soc. Jpn. 12, 1130(1957); 12, 1318(1957).
H. Brenner and J. Happel, J. Fluid Mech. 4, 195(1958).
- 7.- A. E. Hamielec and J. D. Raal, The Phys. of Fluids 12, No.1, 11-17(1969).
- 8.- B. P. Le Clair, A. E. Hamielec and H. R. Pruppacher, J. of Atm. Sci. 27, 308-315(1970).
- 9.- L. Lapidus and G. F. Pinder, "Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering". John Wiley & Sons, 1982.
- 10.- M.E. Brandan, M. Gutiérrez, R. Labbé and A. Menchaca-Rocha, Am. J. Phys. 52, 890 (1984).