



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ÁRBOLES Y CAMINOS EN SUBGRAFOS ALEATORIOS DE TORNEOS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

ALONSO CANCINO TABOADA

PROFESORA GUÍA:
MAYA STEIN

PROFESOR CO-GUÍA:
MATÍAS PAVEZ SIGNÉ

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
HIEP HAN
MARCOS KIWI KRAUSKOPF

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por:

CMM ANID PIA AFB170001,
CMM ANID BASAL ACE210010,
CMM ANID BASAL FB210005.

SANTIAGO DE CHILE

2022

ÁRBOLES Y CAMINOS EN SUBGRAFOS ALEATORIOS DE TORNEOS

El presente trabajo define un modelo de subgrafos aleatorios de torneos T_p y desarrolla técnicas que combinan ideas de grafos aleatorios, de torneos y de teoría extremal para encontrar ciertas familias de subestructuras en T_p con alta probabilidad.

A lo largo del trabajo se demuestra la aparición de caminos y árboles orientados de tamaño lineal, con grado máximo y altura acotados, en el grafo orientado aleatorio T_p , para todo torneo T , y todo p suficientemente grande. Esto sienta un precedente sobre las clases de estructuras que es posible encontrar en subgrafos aleatorios de torneos T_p .

Se analiza también el largo máximo de un camino dirigido T_p que aparece con alta probabilidad, y se verifica que para todo T , es de al menos tamaño $\frac{np}{4}$, para todo $0 \leq p \leq 1$.

*A mi familia y a Catalina,
que siempre estuvieron ahí.*

Saludos

Agradecimientos

Agradezco profundamente a Maya y a Matías, por su siempre alegre disposición, sin quienes este trabajo no podría haber sido posible.

Agradezco también de todo corazón a mi familia, que a pesar de la distancia siempre me apoyaron en mi interés por la matemática, agradezco también a Catalina, por ser una gran compañera, alumbrando el camino frente a mi siempre que lo necesitara, y a su familia, quienes me acogieron de brazos abiertos durante la pandemia, a pesar de nuestras diferencias.

Tabla de Contenido

1. Motivación y resultados principales	1
1.1. El problema de embedding en grafos	1
1.2. Torneos	3
1.3. Resultados	3
2. Introducción	6
2.1. Notación	6
2.2. Grafos Aleatorios	7
2.3. Grafos orientados y Torneos	8
2.4. Regularidad	10
2.5. Esquema de la demostración de los teoremas principales	12
3. Demostraciones	14
3.1. Caminos dirigidos en T_p	14
3.2. Estrellas en subgrafos aleatorios de torneos	15
3.3. Cantidad lineal de caminos pequeños	16
3.4. Cantidad lineal de árboles pequeños.	19
3.5. Caminos orientados en T_p	22
3.6. Árboles orientados en T_p	26
3.6.1. Definiciones y conjetura de contracción	26
3.6.2. Antecedentes para la Conjetura 3.16	27
3.6.3. Herramientas	29
3.6.4. Mapeo de arborescencias constantes en torneos	30
3.6.5. Demostración del Teorema 1.12	32
4. Conclusión y preguntas abiertas	36
Bibliografía	38

Índice de Ilustraciones

1.1.	Torneo transitivo en 6 vértices.	3
2.1.	Propiedad de ‘feedback’ de un median order, ver Lema 2.9.	9
3.1.	Aplicamos iterativamente el Lema 3.11, encontrando matchings de Δ -estrellas que cubren cada intervalo.	20
3.2.	Se aplicaría el Lema 3.11 entre $\bigcup_{j=0}^i I_j$ y I_{i+1} , encontrando un matching de Δ -estrellas que cubre $\bigcup_{j=0}^i I_j$, con direcciones alternantes.	22
3.3.	En cada paso, a P_i le asignaremos un camino en \mathcal{D}_j que sea típico hacia $\mathcal{D}_{j+1}^{(f)}$ si i es impar, o típico hacia $\mathcal{D}_{j-1}^{(i)}$ si i es par, siempre y cuando no estén saturados.	24
3.4.	Ejemplo del procedimiento a realizar mediante el algoritmo 3.19, encontrando una partición que induce un árbol antidirigido, donde cada conjunto induce arborescencias.	29
4.1.	¿Cómo podemos asegurar que al juntar arborescencias obtenidas mediante el Algoritmo 3.19 obtengamos un árbol antidirigido?	37

Capítulo 1

Motivación y resultados principales

1.1. El problema de embedding en grafos

Una pregunta frecuente en distintas áreas de la matemática es el problema de embedding, que consiste en encontrar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de subestructuras particulares. Esta pregunta es importante en teoría de grafos, y el estudiar la presencia o ausencia de subestructuras particulares ha servido como una medida para estudiar algunas propiedades de grafos como son la planaridad o el ser bipartito.

Conversamente, el tipo de enunciados en los que se observa una condición necesaria para no poseer una subestructura particular dieron origen a una extensa área de la teoría de grafos, llamada teoría extremal. Una pregunta clásica en teoría extremal es la siguiente, para un grafo H en k vértices: ¿Cuál es la densidad máxima que puede tener otro grafo G en $n \geq k$ vértices, de manera que $H \not\subseteq G$? donde aquí la densidad es la razón $2|E(G)|/|V(G)|$. Turán encontró en 1941 una condición necesaria sobre la cantidad de aristas para la ausencia de grafos completos K_r de tamaño fijo r .

Teorema 1.1 (Turán '41, Teorema 7.1.1. en [7]). *Para todo $r, n \in \mathbb{N}$ con $r > 1$, todo grafo G con n vértices que no contiene a K_r satisface que $e(G) \leq \frac{r-1}{r} \frac{n^2}{2}$.*

Una pregunta similar da origen a la teoría de grafos aleatorios. Erdős y Rényi [8] introdujeron a mediados del siglo XX el concepto de grafo aleatorio. El mismo año, Gilbert [11] introdujo el modelo $G(n, p)$. Este modelo se define al considerar el grafo completo K_n en n vértices, y muestrear de manera independiente cada una de las aristas con probabilidad p . La pregunta en este caso sería: ¿Para qué valores de $p = p(n)$, la probabilidad de que $G(n, p)$ contenga una copia de cierta subestructura tiende a 1 a medida que n tiende a infinito?

Diremos que una propiedad de grafos \mathcal{P} , codificada como la familia de aquellos grafos que la satisfacen, se tiene *asintótica casi seguramente*, siempre que la condición $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(G(n, p) \in \mathcal{P}) = 1$ se satisfaga.

Una de las preguntas de Erdős y Rényi que generó gran interés en la comunidad, fue: Dada una propiedad de grafos \mathcal{P} , ¿Qué tan grande debe ser $p = p(n)$ de modo que $\mathbb{P}(G(n, p) \in \mathcal{P})$ tiende a 1 cuando n tiende a infinito? Pósa y Korshunov resolvieron simultáneamente esta pregunta para la propiedad de contener un ciclo Hamiltoniano.

Teorema 1.2 (Pósa [25], Korshunov [17], '76). *Existe $c > 0$ tal que la probabilidad de que $G(n, p)$ contenga un ciclo Hamiltoniano tiende a 1 cuando $n \rightarrow \infty$, siempre que $p > c \frac{\log n}{n}$.*

Erdős y Rényi notaron también la existencia de valores de $p = p(n)$ tal que alrededor de estos la probabilidad de satisfacer alguna propiedad de grafos \mathcal{P} cambiaba rápidamente [9]. Tanto Bollobás [3] como Komlós y Szemerédi [15] notaron independientemente que para el caso de contener ciclos Hamiltonianos se cumple lo siguiente.

Teorema 1.3 (Bollobás '84 [3], Komlós, Szemerédi '83 [15]). *Para cada $\varepsilon > 0$:*

- *Si $p > \frac{\log n + \log \log n + \omega(1)}{n}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(G(n, p) \text{ contiene un ciclo Hamiltoniano}) = 1$,*
- *Si $p < \frac{\log n + \log \log n - \omega(1)}{n}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(G(n, p) \text{ contiene un ciclo Hamiltoniano}) = 0$.*

Luego de esto, el estudio de la presencia de estructuras grandes en grafos aleatorios ha sido un problema central en teoría de grafos aleatorios hasta el día de hoy. Esto se evidencia, por ejemplo, en el profundo resultado de Montgomery el 2019 acerca del embedding de árboles generadores en grafos aleatorios (para más resultados ver el survey [5]).

Teorema 1.4 (Montgomery '19 [23]). *Para todo $\Delta > 0$, existe $C = C(\Delta) > 0$ tal que el grafo aleatorio $G(n, C \frac{\log n}{n})$ contiene asintótica casi seguramente una copia de cada árbol en n vértices con grado máximo a lo más Δ .*

Una generalización natural del modelo $G(n, p)$ es el modelo G_p , que consiste en considerar un grafo arbitrario G (por ejemplo con una condición de grado mínimo), y como antes, muestrear independientemente con probabilidad p sus aristas. Notar que $G(n, p)$ distribuye idénticamente a $(K_n)_p$. Krivelevich, Lee y Sudakov [19] obtuvieron resultados para el problema de encontrar caminos y ciclos largos en G_p cuando G tiene una condición de grado mínimo.

Teorema 1.5 (Krivelevich, Lee, Sudakov '13 [19]). *Sea G un grafo finito con $\delta(G) \geq k$, y sea $p = \frac{c}{k}$ con c satisfaciendo $c = o(k)$. Entonces asintótica casi seguramente G_p contiene un camino de largo $(1 - 2c^{-1/2})k$.*

Teorema 1.6 (Krivelevich, Lee, Sudakov '13 [19]). *Sea $\omega(k)$ una función tendiendo a infinito con k , y sea $\varepsilon > 0$. Para un grafo finito G con $\delta(G) \geq k$ y $p \geq \frac{\omega(k)}{k}$, G_p contiene asintótica casi seguramente un ciclo de largo al menos $(1 - \varepsilon)k$.*

También se puede definir el modelo de digrafos aleatorios $D(n, p)$, de forma análoga a $G(n, p)$, a partir del digrafo completo D_n (con aristas antiparalelas) muestreando sus aristas independientemente con probabilidad p cada una, y obtener respuestas similares a este tipo de preguntas. Esto pues el digrafo completo D_n se comporta de manera similar a un grafo completo (sin orientaciones). En particular, todo digrafo en $m \leq n$ vértices aparece como subgrafo de D_n .

1.2. Torneos

Un torneo es un grafo orientado (sin aristas antiparalelas) obtenido de dotar de una orientación a las aristas del grafo completo K_n , donde una orientación es una asignación del par ordenado (u, v) ó (v, u) a cada arista $\{u, v\}$, determinando así la dirección de esta. Contrariamente al caso del digrafo completo D_n , en un torneo no necesariamente aparece cualquier grafo orientado mas pequeño como subgrafo.

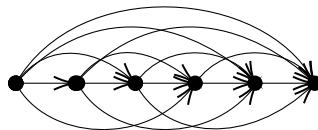


Figura 1.1: Torneo transitivo en 6 vértices.

Por ejemplo, un torneo transitivo (ver Figura 1.1) es un torneo dotado de un orden de los vértices tal que todas las aristas están orientadas en sentido creciente con respecto al orden. Es claro que los torneos transitivos no contienen ciclos dirigidos, ya que esto implicaría que existe una arista decreciente en el orden. Además, para encontrar árboles en torneos, la conjetura de Sumner da un precedente de la dificultad añadida de considerar torneos en vez de digrafos completos, necesitando el doble de vértices para encontrar un árbol arbitrario.

Conjetura 1.7 (Sumner '71, ver por ejemplo [26]). *Toda orientación de todo árbol en n vértices aparece como subgrafo de todo torneo T en $2n - 2$ vértices.*

Esta conjetura es mejor posible. Por ejemplo consideremos una estrella S de n vértices, con sus aristas orientadas hacia el centro, y un torneo regular T cualquiera de orden $2n - 3$, esto es, un torneo T tal que todos los vértices tienen grado de entrada y de salida iguales a $\frac{|V(T)|-1}{2} = n - 2$. Podemos notar que a pesar de que $|V(T)| = 2n - 3$, no existe ninguna copia de la estrella S , puesto que el grado de entrada de cada vértice de T es exactamente $n - 2$, que es menor a $n - 1$, el grado de entrada del centro de la estrella S . Cabe además recalcar que existen torneos regulares en n vértices, para todo n impar. El Sahili probó una versión relajada de la Conjetura 1.7, requiriendo $3n - 3$ vértices en el torneo huésped.

Teorema 1.8 (El Sahili '02 [27]). *Toda orientación de todo árbol en n vértices aparece como subgrafo de todo torneo T en $3n - 3$ vértices.*

Posteriormente, la conjetura de Sumner fue confirmada para todo n suficientemente grande por Kühn, Mycroft y Osthus el 2010 (ver [20] y [21]).

Teorema 1.9 (Kühn, Mycroft, Osthus '10 [20], [21]). *Existe n_0 tal que para todo árbol A de orden $n \geq n_0$, y todo torneo T en $2n - 2$ vértices, T contiene a A como subgrafo.*

1.3. Resultados

La intención principal de esta tesis es la de encontrar árboles y caminos en el modelo de subgrafos aleatorios de torneos T_p , que consiste en, para un torneo fijo T muestrear cada

arista de T de manera independiente con probabilidad p . Sabemos que, por el Teorema 1.9, para $p = 1$ existe n_0 tal que si A es un árbol orientado en $n \geq n_0$ vértices, y T es un torneo en $2n - 2$ vértices, tenemos que $A \subseteq T_p = T$. Notar que esto nos otorgará una cota superior para el tamaño máximo de un árbol en el Teorema 1.12.

La pregunta a responder es: ¿Existe un tamaño base $n_0 \in \mathbb{N}$ y una función $p(n)$ tal que para todo $n \geq n_0$ y todo torneo T en n vértices y probabilidad $p > p(n)$, se garantiza la presencia de algunas orientaciones de caminos y árboles de tamaño lineal como subgrafos de T_p ?

A lo largo de este trabajo se demostrarán algunos resultados estructurales del modelo de subgrafos aleatorios de torneos T_p . Con estos se demuestran los teoremas principales, enunciados a continuación. Estos teoremas aseguran la aparición con alta probabilidad de caminos y árboles de tamaño lineal, con altura y grado máximo acotados, donde la *altura* de un grafo orientado es el largo máximo de un camino dirigido contenido en él. El siguiente teorema garantiza la aparición de caminos de largo lineal con altura acotada (para su demostración ver Sección 3.5).

Teorema 1.10. *Dado $q \geq 1$, existen $n_0 \in \mathbb{N}$, D_q y $C_q > 0$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple lo siguiente. Sea T un torneo en n vértices y sea P un camino orientado con a lo más $D_q \cdot n$ cambios de orientación y de altura a lo más q . Si $p \geq C_q \frac{\log n}{n}$, entonces con probabilidad $1 - O(1)$ tenemos que T_p contiene una copia de P .*

Se estudió el problema de encontrar caminos dirigidos en T_p en un trabajo en conjunto con Botler, Pavez-Signé y Sanhueza-Matamala [4]. La demostración se basa en un algoritmo greedy explorando un median order del torneo, con lo que se obtiene lo siguiente (para su demostración ver Lema 3.2 en la Sección 3.1).

Teorema 1.11. *Sea T un torneo en n vértices, se cumple que con probabilidad al menos $1 - \exp(-\Omega(np))$, T_p contiene un camino dirigido de largo al menos $\frac{np}{4}$.*

También se estudió el problema de encontrar árboles de tamaño lineal con grado máximo y altura acotados, necesitando una restricción adicional (para la demostración ver Sección 3.6.1). Diremos que un árbol A es (γ, D) -contraíble¹ si podemos encontrar una partición \mathcal{P} de sus vértices en conjuntos que inducen bosques, donde cada sub-árbol es de tamaño constante, y tal que la partición induce un árbol antidirigido $A[\mathcal{P}]^2$. La Conjetura 3.16 dice que para todo γ y todo árbol orientado en n vértices con grado máximo Δ y altura q acotados es (γ, D) -contraíble si $n \geq n_0$. Esto nos permitirá usar el resultado de Burr acerca de árboles antidirigidos³. (ver Teorema 3.21). Usando este teorema como una herramienta para asignar los vértices de A a conjuntos apropiados a la hora de construir el embedding, de la mano con las herramientas que permiten encontrar árboles pequeños desarrolladas en la sección 3.6.1 permiten demostrar el siguiente teorema.

Teorema 1.12. *Para cada $\Delta, q, D \in \mathbb{N}$, con $q \geq 1$, existen $D_q > 0$, $\gamma_{\Delta, q, D} > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ y $C_{\Delta, q, D} > 0$, tales que para todo $n \geq n_0$ se tiene lo siguiente. Sea T un torneo en n vértices*

¹ ver Definición 3.15 y Conjetura 3.16 en la sección 3.6.1.

² ver Definición 3.14.

³ Esto es, árboles tales que todos sus vértices satisfacen $d^+(v) = 0$ ó $d^-(v) = 0$

y A un árbol orientado en $D_q n$ vértices tal que $\Delta(A) \leq \Delta$ y $h(A) \leq q$ tal que A es (γ, D) -contraíble para todo $\gamma \in \left(\gamma_{\Delta, q, D}, \frac{1}{2}\right)$. Entonces si $p \geq C_{\Delta, q, D} \frac{\log n}{n}$, se tiene que con probabilidad $1 - O(1)$, $A \subseteq T_p$.

Para demostrar el teorema haremos lo siguiente. Primero, aplicamos el lema de regularidad en el torneo huésped, y gracias a la condición ser (γ, D) -contraíble, podemos particionar el árbol en una familia de bosques de árboles pequeños, finalmente usamos un teorema extremal de Burr (ver [6]) para encontrar un árbol antidirigido en el grafo reducido de T , el cual usamos para conectar arborescencias pequeñas.

Capítulo 2

Introducción

2.1. Notación

Un grafo es un par ordenado $G = (V, E)$, donde $V(G)$ es un conjunto cualquiera y se denomina el conjunto de vértices y $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$ es un conjunto de pares de vértices distintos llamados aristas. Usualmente escribiremos la arista $\{u, v\}$ como uv . Para $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por K_n al grafo completo, esto es, el grafo con n vértices y tal que para todo par $u, v \in V$ se tiene que $uv \in E(K_n)$.

Un grafo dirigido es un par ordenado $D = (V, E)$, con $V(D)$ un conjunto cualquiera y $E(D) \subseteq V(D)^2$. Diremos que D es un grafo orientado si para todo $(u, v) \in E(D)$ se tiene que $(v, u) \notin E(D)$ (notar que esto implica que no existen loops).

Denotaremos las aristas de un grafo dirigido u orientado como pares ordenados $e = (u, v)$, indicando a u como el vértice inicial y a v como el vertice final de la arista e . En este caso, diremos que u *domina* a v y que v es dominado por u . Para un conjunto $A \subseteq V(D)$, denotaremos por $N^+(v, A)$ (resp. $N^-(v, A)$) al conjunto de vértices en A dominados por v (resp. que dominan a v), en caso de omitir el conjunto A se entenderá que $A = V(D)$.

Diremos que un grafo P en k vértices es un *camino* si existe un orden de $V(P) = \{v_1, \dots, v_k\}$ tal que $E(P) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{k-1}v_k\}$, diremos que el largo del camino P es $|E(P)| = k - 1$. Un *camino orientado* es el grafo obtenido de orientar las aristas de un camino P , además diremos que un camino orientado P es *dirigido* si existe un orden v_1, \dots, v_k de $V(P)$ tal que $E(P) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)\}$. Dado un grafo G huésped (orientado o no) y un camino $P \subseteq G$, diremos que P es Hamiltoniano si $V(G) = V(P)$.

Diremos que la *altura* del grafo orientado G , que denotaremos por $h(G)$ es el largo del camino dirigido más largo en G . Diremos que un grafo G (orientado o no) es *conexo* si entre todo par de vértices $u, v \in V(G)$ distintos existe un camino contenido en G . Diremos que es *acíclico* si no posee ciclos, esto es, caminos cuyos vértices inicial y final son el mismo. Diremos que G es un *árbol* (y usualmente lo denotaremos por A) si es conexo y acíclico. Diremos que un grafo orientado G es *antidirigido* si para cada $v \in V(G)$ se tiene que $d^+(v) = 0$ ó $d^-(v) = 0$.

Diremos que un árbol orientado A es una *out-arborescencia*, si existe un vértice $r \in V(A)$ tal que para todo otro vértice $v \in V(A)$ el camino que conecta r con v es un camino dirigido

orientado desde r hacia v . Similarmente, diremos que A es una *in-arborescencia* si para todo vértice $v \in V(A) \setminus \{r\}$ el camino entre r y v esta orientado desde v hacia r . Diremos que A es una *out-estrella* si es una out-arborescencia y $h(A) = 1$, también diremos que A es una *in-estrella* si A es una in-arborescencia y $h(A) = 1$, en caso que A es una estrella y $\Delta(A) = \Delta$ diremos que A es una Δ -estrella.

Dados grafos H y G , decimos que una función inyectiva $\phi : V(H) \rightarrow V(G)$ es un *embedding* de grafos, si para toda arista $e = uv \in E(H)$ se tiene que $\phi(u)\phi(v) \in E(G)$. Para G y H grafos dirigidos u orientados, requeriremos que ϕ preserve la dirección de las aristas. Esto es, para cada arista $e = (u, v) \in E(H)$ tenemos $(\phi(u), \phi(v)) \in E(G)$.

Para un grafo orientado G , denotaremos por $u(G)$ al grafo no orientado subyacente obtenido de eliminar las orientaciones de las aristas, esto es, para toda arista $(u, v) \in E(G)$ tenemos que $\{u, v\} \in E(u(G))$. Diremos que un grafo orientado es un *torneo*, que usualmente denotaremos por T , si $u(G) = K_n$.

Para un grafo G (orientado o no) y un conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$, denotaremos por $G[S]$ al *grafo inducido* por S , donde $V(G[S]) = S$ y $E(G[S]) = \{e = (u, v) \in E(G) : u, v \in S\}$. Además para conjuntos disjuntos de un grafo orientado, diremos que $G[X \rightarrow Y]$ es el grafo inducido por las aristas que van desde X a Y , donde $V(G[X \rightarrow Y]) = X \cup Y$ y $E(G[X \rightarrow Y]) = \{(x, y) \in E(G) : x \in X, y \in Y\}$, escribiremos $E(X \rightarrow Y)$ cuando el grafo huésped G sea claro por el contexto.

Para un conjunto $A \subseteq V(G)$ y $v \in V(G)$, escribiremos $d^+(v, A) = |N^+(v, A)|$ para referir al *out-grado* de v en A , para el *in-grado* escribiremos $d^-(v, A) = |N^-(v, A)|$. Definiremos también el *semigrado* de v como $d^0(v) = \min\{d^+(v), d^-(v)\}$. El in-grado mínimo (o out-grado mínimo) del grafo G se denotan por $\delta^\pm(G) = \min_{v \in V(G)} d^\pm(v)$ y los máximos por $\Delta^\pm(G) = \max_{v \in V(G)} d^\pm(v)$. En caso de omitir el signo del grado se entenderá que corresponde al grado del grafo no dirigido subyacente.

Usaremos la notación asintótica estándar, en que una función $f(n)$ se dice $o(g(n))$ si $f(n)/g(n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. También diremos que una función $f(n)$ es $O(g(n))$ si existen constantes $C > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, se tiene $f(n) \leq Cg(n)$.

2.2. Grafos Aleatorios

Definición 2.1. *Dado G un grafo fijo (posiblemente orientado) y una probabilidad $p \in [0, 1]$, G_p es un subgrafo aleatorio de G , tal que $V(G_p) = V(G)$ y cada arista $e \in E(G)$ pertenece a $E(G_p)$ con probabilidad p , donde todas las elecciones son independientes entre si.*

En el caso de grafos orientados, principalmente torneos, que usualmente denotaremos por T , denotaremos a los subgrafos aleatorios generados por este modelo como T_p . Necesitaremos algunos resultados de concentración de variables aleatorias para asegurar cierta densidad de aristas en los grafos aleatorios que consideremos.

Proposición 2.2 (Cota de Chernoff, Corolario 2.3 en [14]). *Sea $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$, y $t \geq 0$. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ es una variable aleatoria binomial, entonces para $0 < \varepsilon \leq \frac{3}{2}$, tenemos:*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon \mathbb{E}[X]) \leq 2e^{-\varepsilon^2 \mathbb{E}[X]/3}.$$

Como el enfoque de este trabajo es en grafos orientados, es necesario hacer una modificación a la definición usual de tener una propiedad con alta probabilidad. Esto pues la familia de grafos sobre los que se define la distribución de probabilidad es mas extensa (no es sólo uno para cada n). Añadiendo un mínimo sobre las posibles orientaciones, garantizamos que para todo torneo T de orden n , se tiene que con probabilidad tendiendo a 1, el subgrafo aleatorio T_p satisface dicha propiedad.

Definición 2.3 (Con alta probabilidad). *Dada una propiedad de grafos orientados \mathcal{P} , esto es, un conjunto de grafos orientados. Diremos que \mathcal{P} se tiene con alta probabilidad para el modelo T_p con probabilidad $p = p(n)$ si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\min_{T \text{ torneo en } n \text{ vértices}} \mathbb{P}[T_p \in \mathcal{P}] \right) = 1.$$

2.3. Grafos orientados y Torneos

La noción de *median order* aparece naturalmente en teoría de votación (ver por ejemplo [2]), pero ha resultado particularmente útil a la hora de construir embeddings en torneos. Esta fue popularizada por Havet y Thomassé en el año 2000 [13], en su trabajo acerca del problema de la segunda vecindad. Posteriormente, El Sahili [27] utilizó median orders para probar una versión relajada de la conjetura de Sumner.

Definición 2.4. *Sea G un grafo orientado en n vértices y sea $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ un orden de los vértices de G . Definiremos el conjunto de las aristas crecientes en σ como*

$$E_\sigma(G) := \{e \in E(G) : e = (v_i, v_j) \text{ tal que } i \leq j\}.$$

Definición 2.5. *Sea G un grafo orientado en n vértices y sea $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ un orden de los vértices de G , diremos que σ es un median order si la cantidad $e_\sigma(G) := |E_\sigma(G)|$ es máxima.*

Una aplicación directa de los median orders es que el orden define un camino hamiltoniano en torneos. En efecto, sea T un torneo y $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ un median order de T , y supongamos que existe i tal que $(v_i, v_{i+1}) \notin E(T)$. Definiendo un nuevo orden σ' idéntico a σ pero invirtiendo la posición de v_i y v_{i+1} , tendríamos que $|E_{\sigma'}(T)| = 1 + |E_\sigma(T)|$, contradiciendo que σ es median order.

Lema 2.6. *Si T es un torneo y $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ es un median order de los vértices de T , entonces necesariamente $P = v_1 v_2 \dots v_n$ es un camino dirigido Hamiltoniano.*

Necesitaremos definir la noción de subtorneo inducido, además del concepto de conjuntos inferiores/superiores en un torneo para poder aplicar las propiedades clave de los median orders.

Definición 2.7. *Sea T un torneo en n vértices y $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ un median order de T , y sea $\alpha \in (0, 1)$. Diremos que un conjunto $I \subseteq V(T)$ es un intervalo α -inferior (resp. α -superior) si $I \subseteq \{v_1, \dots, v_{\lfloor (1-\alpha)n \rfloor}\}$ (resp. $I \subseteq \{v_{\lceil \alpha n \rceil + 1}, \dots, v_n\}$).*

Dos propiedades centrales de los median orders son tanto que todo subintervalo del orden sigue siendo un median order del subtorneo inducido, así como que cada vértice tiene como out-vecinos al menos a la mitad de los vértices que le siguen en el orden, y análogamente tiene como in-vecinos a la mitad de los vértices que le preceden.

Lema 2.8 (Ver Sección 1 de [13]). *Sea T un torneo y $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ un median order de T , entonces se tiene que para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$ con $i < j$, el orden inducido $\sigma|_{[v_i, v_j]}$ es un median order de $T[\{v_i, \dots, v_j\}]$.*

Para esto basta notar que el orden de los vértices dentro del intervalo no interfiere con el resto de las aristas crecientes en el orden, luego para que $e_\sigma(T)$ sea máximo, necesariamente $e_{\sigma|_{[v_i, v_j]}}(T[\{v_i, \dots, v_j\}])$ debe serlo también.

Lema 2.9 (Ver Sección 1 de [13]). *Sea T un torneo y $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ un median order de T , entonces para todo $1 \leq i \leq n$ se tiene que:*

- v_i es dominado por al menos la mitad de los vértices en $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$
- v_i domina al menos a la mitad de los vértices en $\{v_{i+1}, \dots, v_n\}$

En efecto, si es que un vértice no dominase a la mitad de los vértices que le siguen, bastaría ponerlo al final del orden para aumentar la cantidad de aristas crecientes en el orden, el otro caso es análogo.

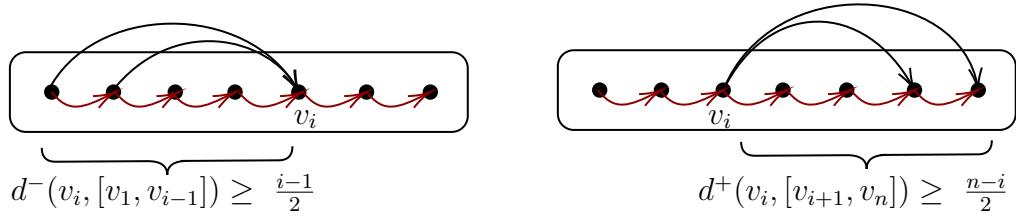


Figura 2.1: Propiedad de ‘feedback’ de un median order, ver Lema 2.9.

Usualmente aplicaremos el Lema 2.9 de la siguiente manera, sobre pares de intervalos consecutivos.

Observación 2.10. *Dados un torneo T y un median order σ de T , e intervalos consecutivos I, J del median order, donde J es posterior a I se tiene lo siguiente. Sea $v \in I$, entonces:*

$$d^+(v, J) \geq \frac{|J| - |I|}{2}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $v_j \in I$, y supongamos que $I = [v_i, v_f]$, $J = [v_{f+1}, v_t]$, notamos que por el Lema 2.9, tenemos:

$$d^+(v_j, [v_{j+1}, v_t]) \geq \frac{t - j - 1}{2}$$

Quitando los vértices de I , obtenemos que:

$$d^+(v_j, J) \geq \frac{(t - f) - (f - j - 1)}{2} \geq \frac{|J| - |I|}{2}$$

□

2.4. Regularidad

El lema de regularidad de Szemerédi (enunciado por primera vez en [29]) ha sido una herramienta clave en la teoría extremal de grafos, en particular a la hora de encontrar estructuras grandes tanto en grafos densos, como en grafos aleatorios. Uno de sus principales usos es garantizar la existencia de estructuras comunes en todos los grafos suficientemente grandes.

Este método de regularidad fue usado por Kühn, Mycroft y Osthus para probar una versión aproximada de la conjetura de Sumner, y para luego probar la conjetura para todo n suficientemente grande (ver [21],[20], o el survey [24]).

Necesitaremos algunas definiciones básicas sobre densidad y pares regulares de conjuntos para poder enunciar el lema de regularidad.

Definición 2.11. *Sea G un grafo bipartito no orientado con clases de vértices X e Y . La densidad de G se define como*

$$d(X, Y) = \frac{e(X, Y)}{|X||Y|}.$$

Para un grafo bipartito orientado G con clases X, Y , definiremos la densidad de forma análoga (de manera que el orden de los conjuntos es importante), esto es

$$d(X, Y) = \frac{e(X \rightarrow Y)}{|X||Y|}.$$

Definición 2.12. *Sean $\varepsilon, d \in (0, 1]$ y sea $H = (A, B; E)$ un grafo bipartito tal que $e(A, B) = d|A||B|$. Decimos que el par (A, B) es ε -regular si para todo $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$ tal que $|X| \geq \varepsilon|A|$, $|Y| \geq \varepsilon|B|$ se tiene que*

$$|e(X, Y) - d|X||Y|| < \varepsilon|X||Y|.$$

Además, diremos que (A, B) es un par (ε, η) -regular si (A, B) es ε -regular y $e(A, B) > \eta|A||B|$.

Dado un par regular (A, B) diremos que un conjunto $X \subseteq A$ es ε -significativo si $|X| \geq \varepsilon|A|$ (análogo para subconjuntos de B), y diremos que un vértice $x \in A$ es ε -típico hacia un conjunto significativo $Y \subseteq B$ si $d(x, Y) > (d - \varepsilon)|Y|$ (similarmente para un vértice en B). Escribiremos simplemente *significativo* o *típico* cuando sea claro en el contexto.

Proposición 2.13. *(Ver Hechos 1.3 y 1.5 en [16]) Sea (A, B) un par ε -regular con densidad d . Entonces se tiene lo siguiente:*

- (i) *Para cada conjunto ε -significativo $Y \subseteq B$, todos salvo a lo más $\varepsilon|A|$ vértices de A son típicos hacia Y (análogamente se tiene para subconjuntos de A).*
- (ii) *Sea $\alpha \in (0, 1)$. Para cada par de subconjuntos $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$, α -significativos, el par (X, Y) es $\frac{2\varepsilon}{\alpha}$ -regular con densidad en el intervalo $(d - \varepsilon, d + \varepsilon)$.*

Enunciaremos el lema de regularidad de Szemerédi, que nos permite encontrar para todo $\varepsilon > 0$ una partición en conjuntos, todos del mismo tamaño, tales que casi todo par de

conjuntos define un par ε -regular, diremos que una partición que cumple estos puntos es ε -regular. Si además los pares son (ε, η) -regulares, diremos que la partición es (ε, η) -regular.

Lema 2.14 (Szemerédi, ver Teorema 1.7 en [16]). *Para todo $\varepsilon > 0$ y todo entero k_0 , existe $N = N(\varepsilon, k_0)$ tal que para todo grafo G en $n \geq N$ vértices existe una partición V_0, \dots, V_k de V tal que se cumple lo siguiente:*

1. $k_0 \leq k \leq N$ y $|V_0| \leq \varepsilon n$,
2. $|V_1| = \dots = |V_k| =: m$,
3. para todos salvo a lo más εk^2 pares $1 \leq i < j \leq k$ el par (V_i, V_j) es ε -regular.

Alon y Shapira probaron una versión del lema de regularidad para grafos dirigidos (ver Lema 3.1. en [1]). A continuación se presenta una versión de grado del lema de regularidad para grafos orientados. Esta versión fue usada para probar la versión aproximada de la conjetura de Sumner (ver Lema 2.4. en [21]). Para un esquema de la demostración de la versión de grado, que se deduce del resultado de Alon y Shapira de forma análoga al caso sin orientaciones, ver el Lema 41 en [22].

Lema 2.15 (Regularidad para grafos orientados, ver Lema 2.4. en [21]). *Para todo $\varepsilon > 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$, existe N y n_0 tal que si G es un grafo orientado en $n \geq n_0$ vértices y $\eta \in [0, 1]$, entonces existe una partición de $V(G)$ en conjuntos V_0, \dots, V_k y un subgrafo $G' \subseteq G$ con $V(G') = V(G)$, al que llamaremos grafo puro, tal que:*

1. $k_0 \leq k \leq N$,
2. $|V_0| \leq \varepsilon n$,
3. $|V_1| = \dots = |V_k|$,
4. $d_{G'}^+(x) > d_G^+(x) - (\eta + \varepsilon)n$ para todos los vértices $x \in V(G)$,
5. $d_{G'}^-(x) > d_G^-(x) - (\eta + \varepsilon)n$ para todos los vértices $x \in V(G)$,
6. para cada $i \in [k]$ el grafo orientado inducido $G'[V_i]$ es vacío, y
7. para cada $1 \leq i < j \leq k$ el par $G'[V_i \rightarrow V_j]$ es ε -regular y tiene densidad igual a 0 o a η .

Observación 2.16. *Dadas constantes $\varepsilon > 0$, $\eta \in (0, 1)$, existe n_0 tal que si G es un grafo orientado en $n \geq n_0$ vértices con una partición $\mathcal{P} = \{A_i\}_{i=1}^k$ de $V(G)$, el Lema 2.15 permite encontrar un refinamiento de \mathcal{P} que es una partición (η, ε) -regular. Esto se puede hacer notando que la demostración del lema de regularidad comienza con una partición arbitraria, obteniendo iterativamente un refinamiento de la misma que eventualmente es (η, ε) -regular. (Ver por ejemplo en [28] las demostraciones de Teorema 1, Corolario 5 y Teorema 7).*

Definición 2.17. *Dada una partición ε -regular $(V_i)_{i=0}^k$ y una densidad $\eta \in [0, 1]$, definiremos el grafo (ε, η) -reducido de la partición $(V_i)_{i=0}^k$ que denotaremos por \mathcal{R} , como un grafo auxiliar (orientado o no) con conjunto de vértices $V(\mathcal{R}) = \{V_i\}_{i=1}^k$ y conjunto de aristas dado por los pares (V_i, V_j) tales que $d(V_i, V_j) \geq \eta$ (en el caso de grafos no orientados estas aristas no serán dirigidas).*

Consideremos $\eta > \varepsilon > 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$ y n_0 obtenido del Lema 2.15. Sea además G un grafo orientado en $n \geq n_0$ vértices, y sean G' el grafo puro y $(V_i)_{i=1}^k$ la partición obtenida por el lema. Podemos notar que el grafo puro preservará una densidad de aristas global similar a las del grafo huésped G . Esto se tiene al considerar los puntos 4 y 5 del Lema 2.15 y usar que todo grafo (orientado o no) cumple $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$ (donde en el caso orientado $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$). En efecto,

$$|E(G')| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G')} \left(d_{G'}^+(v) + d_{G'}^-(v) \geq |E(G)| \right) - (\eta + \varepsilon)n^2.$$

Con lo anterior, y como en el grafo puro G' cada cluster induce grafos sin aristas y notando que entre cada par de clusters (V_i, V_j) hay a lo más m^2 aristas, podemos calcular que la cantidad de clusters con aristas entre ellos es al menos

$$E(\mathcal{R}) \geq \left(\frac{1}{2m^2} \sum_{v \in V(G')} d_{G'}^+(v) + d_{G'}^-(v) \right) \geq \frac{1}{m^2} (|E(G)| - (\eta + \varepsilon)n^2).$$

Observación 2.18. Sean $\eta > \varepsilon > 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$ y n_0 obtenido del Lema 2.15. Sea además G un grafo orientado en $n \geq n_0$ vértices y sean G' el grafo puro y $(V_i)_{i=1}^k$ la partición obtenidos por el lema. Tenemos que la cantidad de aristas del grafo reducido es al menos

$$|E(\mathcal{R})| \geq \frac{1}{m^2} (|E(G)| - (\eta + \varepsilon)n^2).$$

2.5. Esquema de la demostración de los teoremas principales

El Teorema 1.11 se prueba en la Sección 3.1, mediante el análisis de un algoritmo greedy aleatorio, con entradas un torneo T y un orden σ . El algoritmo se inicializa en el primer vértice $w = v_1$ de un median order $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ del torneo T , construyendo secuencialmente un camino, agregando en cada paso el primer vértice w' posterior en el orden tal que $(w, w') \in E(T_p)$, revelando las aristas crecientes que parten desde w en T secuencialmente. Una aplicación de la cota de Chernoff y considerando la propiedad de feedback del median order σ permite concluir.

Tanto el Teorema 1.10 como el Teorema 1.12 son demostrados usando una mezcla de argumentos extremales y de regularidad. En ambos casos aplicaremos el Lema de Regularidad sobre el torneo huésped T , obteniendo una partición (ε, η) -regular.

Caminos lineales (Teorema 1.10.): Aplicamos el Lema de Regularidad obteniendo un tamaño n_0 tal que si T es un torneo en $n \geq n_0$ existe una partición ε -regular. Para encontrar un camino P con altura q en un torneo T dado, partiremos considerando una partición arbitraria de T en dos conjuntos de vértices A y B de tamaño $\frac{n}{2}$ (quitando un vértice en el caso de n impar), podemos notar que salvo un posible renombramiento de los conjuntos, $e(A \rightarrow B) \geq \frac{n^2}{4}$. Luego, existe un refinamiento de $\{A, B\}$ que es una partición ε -regular $\{A_i\}_{i=1}^k \cup \{B_i\}_{i=1}^k$, y notamos que por la Observación 2.18 el grafo reducido \mathcal{R} debe ser denso.

Usando el Lema 3.13 (un resultado extremal para encontrar caminos en grafos suficientemente densos) podemos encontrar un camino antidirigido \vec{P} de largo casi $2k$ en el grafo reducido. Luego, mediante los resultados desarrollados en la Sección 3.3 encontraremos una colección lineal de caminos dirigidos de largo q en cada uno de estos clusters. Haciendo elecciones de caminos de manera que sean típicos hacia los inicios de los caminos siguientes, podemos garantizar que existen conexiones entre los finales de caminos cortos en un cluster con inicios de caminos cortos en el siguiente, extendiendo secuencialmente el camino mapeado. El análisis de la probabilidad de que este procedimiento falle concluye la demostración.

Árboles lineales (Teorema 1.12.): Por otro lado, el embedding de árboles se realiza de manera greedy, donde se requiere una condición de contracción para los árboles a mapear (ver la Definición 3.15 y la Conjetura 3.16).

Para encontrar un árbol A de tamaño lineal con grado máximo Δ , y altura q , aplicaremos el Lema de Regularidad para constantes apropiadas, obteniendo un tamaño n_0 tal que si T es un torneo en $n \geq n_0$ existe una partición ε -regular $\{V_i\}_{i=1}^k$ de T . Por la Observación 2.18, como antes tendremos una condición de densidad para el grafo reducido. Aplicando el Lema 3.21 (un resultado extremal para encontrar árboles antidirigidos en grafos orientados suficientemente densos) tenemos que existe una copia de todo árbol antidirigido con tamaño apropiado en el grafo reducido.

Consideramos la partición de los vértices de A presente en la Definición 3.15. Esta induce un árbol antidirigido que será asignado a los clusters del grafo reducido. Mediante aplicaciones reiteradas del Lema 3.3 probamos el Lema 3.23 que nos permite mapear arborescencias en cada cluster de manera greedy, de forma que sean típicas hacia los clusters vecinos en la asignación y eviten los vértices ya ocupados en el embedding. El análisis de la probabilidad de que este procedimiento falle concluye la demostración.

Capítulo 3

Demostraciones

3.1. Caminos dirigidos en T_p

Se demuestra la existencia de caminos de largo $O(pn)$ en T_p con probabilidad al menos $1 - e^{-\Omega(np)}$. La demostración se basa en un algoritmo greedy que explora un median order de un torneo, además de resultados de concentración. Se presenta este resultado y su demostración.

Algoritmo 3.1. *Como input recibe un torneo T en n vértices y un orden de sus vértices $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$, el algoritmo intenta construir un camino creciente de la siguiente forma:*

1. Inicializamos $P = \emptyset$, $i = 1$, $j = \min\{s > 1 : (v_1, v_s) \in E(T)\}$, notar que $(v_1, v_2) \in E(T)$ si σ es median order.
2. En cada iteración tendremos índices $i < j$.
 - a) Si $(v_i, v_j) \in E(T_p)$:
 - i. Actualizamos $P \leftarrow P \cup \{(v_i, v_j)\}$
 - ii. Fijamos $i \leftarrow j$.
 - iii. Fijamos $j \leftarrow \min\{s > j : (v_j, v_s) \in E(T)\}$ (notar que si σ es median order $(v_j, v_{j+1}) \in E(T)$).
 - b) Si $(v_i, v_j) \notin E(T_p)$, actualizamos $j \leftarrow \min\{s > j : (v_i, v_s) \in E(T)\}$.
3. Si $j = n$, el algoritmo finaliza.

Aplicando el algoritmo anterior a un torneo T , haciendo el muestreo de las aristas de T de forma secuencial. Usando la cota de Chernoff, podemos acotar la esperanza del largo del camino obtenido en T_p mediante el Algoritmo 3.1.

Lema 3.2. *(ver Teorema 1.3. en [4]) Con probabilidad al menos $1 - \exp(-\Omega(np))$ se cumple que el Algoritmo 3.1 con entradas T_p y σ un median order de T , entregará un camino creciente P tal que P tiene largo entre $\frac{np}{4}$ y $2np$.*

DEMOSTRACIÓN. Para simular el comportamiento de el algoritmo en T_p supongamos que se nos entrega una secuencia de variables aleatorias Bernoulli independientes con probabilidad p , digamos X_1, X_2, \dots , cada vez que una arista (a, b) es llamada por el algoritmo (en T) la

arista estará presente en T_p con probabilidad exáctamente p . Entonces podemos asumir que una respuesta positiva a la i -ésima llamada es representado por la variable i -ésima tomando el valor $X_i = 1$, y una respuesta negativa es representada por $X_i = 0$. El punto clave es que el largo del camino encontrado por el Algoritmo 3.1 es exáctamente el número de llamadas respondidas positivamente. Entonces el largo L del camino encontrado por el Algoritmo 3.1 es una variable aleatoria que puede ser escrita como $L = \sum_{i=0}^Q X_i$, donde Q es el número (aleatorio) de veces en que alguna arista del torneo base T (por revelar) que sea creciente en el orden σ es llamada por el algoritmo.

Determinísticamente $Q \leq n$, y por ende $\mathbb{E}[L] \leq np$. Usando la cota de Chernoff (Proposición 2.2) y notando que la propiedad de Feedback del median order (Lema 2.9) garantiza que se harán al menos $\frac{n}{2}$ llamadas a aristas de T . Luego obtenemos que $\mathbb{P}(L > 2np) \leq \exp(-O(np))$.

Para mostrar la cota inferior en L veamos que se tiene que $Q \geq \frac{n}{2}$. Esto basta pues $\mathbb{E}[L] \geq \frac{np}{2}$ y usando nuevamente la cota de Chernoff tenemos $\mathbb{P}(L < \frac{np}{4}) \leq \exp(-O(np))$.

Supongamos que el camino encontrado por el algoritmo consiste de los vértices $\{a_1, \dots, a_k\}$ y definamos $a_{k+1} := v_n$. Denotemos para cualquier vértice v_r a su sucesor en el median order σ por $s_\sigma(v_r) = v_{r+1}$, notemos que para cada $1 \leq i \leq k$ el algoritmo llama precisamente una vez a cada arista en $T[\{a_i\} \rightarrow [s_\sigma, a_{i+1}]]$, entonces el número de aristas llamadas entre la asignación de a_i y a_{i+1} es precisamente $d^+(a_i, [s_\sigma(a_i), a_{i+1}]) \geq |[s_\sigma(a_i), a_{i+1}]|/2$, porque σ es un median order.

Luego, sumando sobre todos los vértices $\{a_i\}_{i=1}^k$, y notando que los intervalos $[s_\sigma(a_i), a_{i+1}]$ cubren el torneo, obtenemos que:

$$Q \geq \sum_{i=1}^k d^+(a_i, [s_\sigma(a_i), a_{i+1}]) \geq \frac{n}{2}$$

Donde basta notar que para cada vértice fue llamada exáctamente una arista que lo domina, además como la cota es independiente de k y $\{a_1, \dots, a_k\}$ se concluye. \square

3.2. Estrellas en subgrafos aleatorios de torneos

Sea T un torneo y un median order $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ de éste. el siguiente Lema dice que si $I = [v_i, v_f]$ es un intervalo de tamaño lineal y $J \subseteq I$ es un conjunto de vértices prohibidos con $|J| \leq \frac{|I|}{4}$, entonces podemos encontrar una out-estrella centrada en v_i cuyas hojas son mapeadas en $I \setminus J$.

Lema 3.3. *Sean $\delta \in (0, 1)$, $\Delta > 0$. Sea T un torneo en n vértices y sean $v \in V(T)$, $X \subseteq N^+(v)$ con $|X| = \delta n$. Si $p \geq \frac{(1+\varepsilon)\Delta \log n}{\delta n}$, entonces con probabilidad $1 - O(n^{-\varepsilon})$ en T_p existe una out-estrella en $\Delta + 1$ vértices, centrada en v cuyas hojas son mapeadas a X . Análogamente, si $X \subseteq N^-(v)$ con $|X| = \delta n$ podemos encontrar una in-estrella en $\Delta + 1$ vértices centrada en v cuyas hojas son mapeadas a X .*

DEMOSTRACIÓN. Sean $v \in V(T)$, $X \subseteq N^+(v)$, usando que $(1 - p) \leq e^{-p}$, notamos que la

probabilidad de que no exista tal estrella es a lo más:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(d_{T_p}^+(v, X) < \Delta\right) &\leq \sum_{l=0}^{\Delta-1} \binom{|X|}{l} (1-p)^{|X|-l} p^l \\
&\leq \exp(-p|X|) + \sum_{l=1}^{\Delta-1} \left(\frac{e\delta np}{l}\right)^l \exp(-p(|X|-l)) \\
&\leq \exp\left(-C\frac{\log n}{n}\delta n\right) + (\Delta-1)\delta e \exp\left((\Delta-1)\log n - C\frac{\log n}{n}(\delta n - \Delta)\right) \\
&\leq \exp\left(-C\frac{\log n}{n}\delta n\right) + \Delta\delta e \exp\left(\Delta\log n - C\frac{\log n}{n}\frac{\delta n}{2}\right) \\
&\leq 2 \max\left\{\exp(-C\delta\log n), \Delta\delta e \exp\left(\left(\Delta - C\frac{\delta}{2}\right)\log n\right)\right\}
\end{aligned}$$

Luego si $C \geq \frac{2(1+\varepsilon)\Delta}{\delta}$, tenemos que con probabilidad $O(n^{-\varepsilon})$ no existe tal estrella. \square

Aplicaciones reiteradas del lema anterior nos permitirán encontrar arborescencias pequeñas en intervalos de un median order. Haremos esto encontrando secuencialmente estrellas y añadiendo a un conjunto de vértices prohibidos los vértices usados en pasos anteriores. Con esto podremos encontrar sub-arborescencias pequeñas a la hora de hacer embeddings de árboles lineales.

3.3. Cantidad lineal de caminos pequeños

El siguiente lema nos permitirá encontrar matchings que cubren un conjunto con cierta condición de grado mínimo en un grafo aleatorio. Para esto necesitaremos la siguiente observación que nos permitirá dotar de cierta estructura a los conjuntos vértice-minimales que violen la condición de Hall.

Observación 3.4. *Sea G un grafo bipartito con bipartición $\{A, B\}$ y sea $S \subseteq A$ un conjunto vértice minimal con $|S| > |N(S)|$, entonces necesariamente:*

(i) $d(v, S) \geq 2$ para todo $v \in N(S)$,

(ii) $|N(S)| = |S| - 1$.

DEMOSTRACIÓN. Sea S un conjunto vértice minimal que viola la condición de Hall. Supongamos primero que existe $v \in N(S)$ con $d(v, S) = 1$, y sea w el vecino de v en S . Entonces $S \setminus \{w\}$ es tal que $|S \setminus \{w\}| = |S| - 1$, y además

$$|N(S \setminus \{w\})| \leq |N(S) \setminus v| \leq |N(S)| - 1 < |S| - 1.$$

Luego $S \setminus \{w\}$ es un conjunto con menor cantidad de vértices que también viola la condición de Hall, lo que es una contradicción. Ahora, supongamos que $|N(S)| \leq |S| - 2$. Luego podemos elegir cualquier vértice $v \in S$ y necesariamente tenemos que $N(S \setminus \{v\}) = N(S)$. Esto puesto que todos los vértices en $N(S)$ tienen como vecinos al menos a 2 vértices en S . Esto nuevamente contradice la vértice-minimalidad, con lo que se concluye. \square

Usando lo anterior, y tomando una cota de unión sobre todos los posibles conjuntos minimales que obstruyan la condición de Hall, podemos probar lo siguiente.

Lema 3.5. *Sea G un grafo bipartito con partes A y B tal que $|A| = n$ y $|B| = 4n$. Supongamos que $d(a) = \lfloor \frac{3}{2}n \rfloor$ para cada $a \in A$. Entonces para todo $C > 4$, si $p \geq C \frac{\log n}{n}$ tenemos que con probabilidad $1 - O(n^{-C+4})$ el grafo aleatorio G_p contiene un matching que cubre a A .*

DEMOSTRACIÓN. Asumamos que no hay un matching en G_p que cubra a A . Entonces, existe un conjunto S' que viola la condición de Hall, esto es, $|N_{G_p}(S')| < |S'|$. Además, por la Observación 3.4, necesariamente existe $S \subseteq S'$ que cumple

- (i) $|N_{G_p}(S)| = |S| - 1$, y
- (ii) cada vértice en $N_{G_p}(S)$ tiene al menos dos vecinos en S .

Sea \mathcal{A} el evento en que G_p contiene un conjunto $S \subseteq A$ de tamaño mayor o igual a 2 que satisface (i) y (ii). Usando que $(1-p) \leq e^{-p}$ y que $\max_{i \in \{2, \dots, n\}} \left(\frac{i^{2i-2}}{(i-1)^{2i-1}} \right) \leq 4$, tenemos mediante una cota de unión sobre los pares (S, X) donde $S \subseteq A$ y $X \subseteq N_G(S)$ tales que satisfacen (i) y (ii), que la probabilidad de \mathcal{A} es

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{A}) &\leq \sum_{i=2}^n \sum_{\substack{S \subseteq V(A) \\ |S|=i}} \sum_{\substack{X \subseteq N_G(S) \\ |X|=i-1}} \left(\prod_{x \in X} \binom{i}{2} p^2 \right) \cdot \left(\prod_{s \in S} (1-p)^{-\lfloor \frac{3}{2}n \rfloor - |X| + 1} \right) \\
&\leq \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} \binom{4n}{i-1} \binom{i}{2}^{i-1} p^{2(i-1)} (1-p)^{-i(\lfloor \frac{3}{2}n \rfloor - i + 1)} \\
&\leq \sum_{i=2}^n \left(\frac{en}{i} \right)^i \left(\frac{4en}{i-1} \right)^{i-1} i^{2(i-1)} e^{-\lfloor \frac{3}{2}n \rfloor - i} p^i \\
&\leq \sum_{i=2}^n (2e)^{2i-1} 4n^{2i-1} e^{-\lfloor \frac{3}{2}n \rfloor - i} p^i \\
&\leq 4n \cdot \max_{i \in \{2, \dots, n\}} (2e)^{2i-1} n^{2i-1} e^{-\frac{n}{2} p i} \\
&\leq 4n \cdot \max_{i \in \{2, \dots, n\}} \left((2e)^{2i-1} n^{2i-1} e^{-\frac{n}{2} p i} \right) \\
&\leq 4n \cdot \max_{i \in \{2, \dots, n\}} \left((2e)^{2i-1} n^{2i-1} p^{2(i-1)} e^{-\frac{C}{2} i \log n} \right) \\
&\leq 4n \cdot \max_{i \in \{2, \dots, n\}} \left((2e)^{2i-1} n^{-(\frac{C}{2}-2)i-1} \right) \\
&\leq 4n \cdot (2e)^3 n^{-C+4-1} \\
&\leq 3^3 \cdot 2^5 \cdot n^{-C+4}.
\end{aligned}$$

Finalmente, denotaremos al evento en que existe un conjunto $S = \{v\} \subseteq A$ de tamaño 1 que viola la condición de Hall por \mathcal{A}' , esto es un vértice aislado. Su probabilidad queda acotada por

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}') \leq \binom{n}{1} (1-p)^n \leq n e^{-np} \leq n e^{-C \log n} = n^{-C+1}.$$

Con lo que tenemos que $\mathbb{P}(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}') = O(n^{-C+4})$, y se concluye que con alta probabilidad no hay tal obstrucción a la condición de Hall siempre que $C > 4$. \square

Para llevar este lema al contexto de subgrafos aleatorios de torneos, consideremos $\alpha \in (0, 1)$ y un torneo T en n vértices. Dado un median order $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ del torneo, y un intervalo del median order 4α -inferior I de tamaño αn (análogo para intervalos I 4α -superiores), se tiene que si J es un intervalo de tamaño $4\alpha n$ consecutivo a I , entonces:

$$e(I \rightarrow J) \geq \frac{|I||J|}{2}.$$

Esto pues σ es un median order, en caso contrario el intercambiar la posición en el orden de I y J aumentaría e_σ . Además, para todo vértice $v \in I$, por la Observación 2.10 se tiene que $d^+(v, J) \geq \frac{|J|-|I|}{2} = \frac{3\alpha n}{2}$. Eliminando aristas de manera que para todo vértice v en I tengamos $d^+(v) = \lfloor \frac{3}{2}|I| \rfloor$, podemos aplicar el Lema 3.5 al subgrafo resultante para obtener un matching que cubre a I con aristas de $E(I \rightarrow J)$.

Corolario 3.6. *Dados $\alpha \in (0, 1)$ y $C > 4$, entonces se tiene lo siguiente. Sea T un torneo en n vértices, $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ un median order de T y sea $p \geq \frac{C}{\alpha} \frac{\log \alpha n}{n}$. Entonces si $I = [v_i, v_{i+\lceil \alpha n \rceil}]$ es un intervalo 4α -inferior en σ de tamaño αn , tenemos que con probabilidad $1 - O(n^{-C+4})$ existe un matching que cubre a I en $T_p[I \rightarrow [v_{i+\lceil \alpha n \rceil}, v_{i+5\lceil \alpha n \rceil}]]$.*

El siguiente lema permite encontrar una partición en intervalos consecutivos $(I_i)_{i=0}^q$ del median order, para cualquier $q \in \mathbb{N}$, con las condiciones necesarias para usar el Lema 3.5 en cada grafo subyacente bipartito $u(T[I_i \rightarrow I_{i+1}])$.

Lema 3.7. *Sea $q \geq 1$ y sea $n \geq 4^{q+1}$. Dado un torneo en n vértices T y un median order $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ de T , existe una partición $(I_i)_{i=1}^{q+1}$ de los vértices de T en intervalos del median order σ tal que*

1. $|I_1| = \lfloor n / (\frac{4^{q+1}-1}{3}) \rfloor$
2. $|I_{i+1}| = 4|I_i|$, para todo $i \in \{1, \dots, q-1\}$, e $|I_{q+1}| \geq 4|I_q|$, y
3. $d^+(v, I_{i+1}) \geq \frac{3}{2}|I_i|$, para todo $v \in I_i$ y para todo $i \in \{1, \dots, q\}$.

DEMOSTRACIÓN. Definamos $t(q) = \sum_{i=0}^q 4^i$ y sea $m = \lfloor n/t(q) \rfloor$. Entonces tomando $I_1 = [v_1, v_m]$, e $I_2 = [v_{m+1}, v_{(4+1)m}]$, tenemos que para todo vértice $v_j \in I_1$, $d^+(v_j, [v_{j+1}, v_{(4+1)m}]) \geq \frac{(4+1)m-j}{2}$. Luego por la Observación 2.10, tenemos $d^+(v_j, I_{i+1}) \geq \frac{5m}{2} - m = \frac{3m}{2}$. Cada intervalo siguiente se define inductivamente de la misma manera. Para cada $i \in \{1, \dots, q-1\}$, definiremos I_{i+1} como el intervalo consecutivo en el median order de largo $4|I_i|$, salvo el último intervalo I_q que puede ser más grande. Usando nuevamente la Observación 2.10 entre cada par de intervalos I_i, I_{i+1} , se concluye la condición de grado. \square

Observación 3.8. *La misma demostración anterior sirve para encontrar una partición $(I_i)_{i=1}^{q+1}$ de intervalos decrecientes en el orden tal que se tiene la misma relación de tamaños, pero ahora para cada vértice $v \in I_i$ tenemos que $d^-(v, I_{i+1}) \geq \frac{3}{2}|I_i|$, esto se logra mediante el mismo procedimiento, partiendo desde un intervalo final $I_1 = [v_{n-m}, v_n]$ y definiendo iterativamente los intervalos siguientes I_i contiguos y anteriores en el orden, cada uno de tamaño $4|I_{i-1}|$.*

Proposición 3.9. Dado $q \in \mathbb{N}$ y $C > 4$, entonces se tiene lo siguiente. Sea T un torneo en n vértices y sea $p \geq \frac{C \cdot 4^{q+1} \log n}{3} \frac{1}{n}$. Entonces con probabilidad $1 - O\left(q \left(\frac{n}{4^{q+1}}\right)^{-C+4}\right)$, T_p contiene una colección de $\lfloor 3n/(4^{q+1} - 1) \rfloor$ caminos dirigidos vértice-disjuntos de largo q .

DEMOSTRACIÓN. Sea $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ un median order de T . Usaremos el Lema 3.7 para obtener una partición en intervalos consecutivos del median order $(I_i)_{i=0}^q$ que satisfacen:

- $|I_i| = 4^i \cdot \lfloor (3 \cdot n)/(4^{q+1} - 1) \rfloor$, para cada $i \in \{0, \dots, q-1\}$, salvo I_q que cumple $|I_q| \geq 4^q \cdot \lfloor (3 \cdot n)/(4^{q+1} - 1) \rfloor$,
- Para cada $1 \leq i \leq q$, cada vértice en I_i domina al menos a $\frac{3}{2}|I_i|$ vértices en I_{i+1} .

Sea $m_i = |I_i|$ para cada $i \in \{0, \dots, q\}$. Entonces para cada i , encontraremos un subgrafo bipartito $D_i \subseteq T[I_i \rightarrow I_{i+1}]$ tal que $d_D^+(v) = \lfloor \frac{3}{2}m_i \rfloor$ para todo $v \in I_i$. Usando el Lema 3.5 en el grafo subyacente $u(D_i)$, notamos que como

$$\begin{aligned} p &\geq \frac{C \cdot 4^{q+1} \log n}{3} \frac{1}{n} \geq \max_{i \in \{0, \dots, q-1\}} C \frac{4^{q+1}}{3 \cdot 4^i} \left(\frac{\log n}{n} \right) \\ &\geq \max_{i \in \{0, \dots, q-1\}} C \frac{(4^{q+1} - 1)}{3 \cdot 4^i} \left(\frac{\log n - \log \left(\frac{(4^{q+1} - 1)}{(4^i \cdot 3)} \right)}{n} \right) \\ &= \max_{i \in \{0, \dots, q-1\}} C \frac{\log |I_i|}{|I_i|}, \end{aligned}$$

tenemos entonces que existe un matching que cubre a I_i en $(u(D_i))_p$. Luego con probabilidad $1 - O(|I_1|^{-C+4})$ existe un matching en $(D_i)_p \subseteq T_p[I_i \rightarrow I_{i+1}]$ iteramos esto sobre todos los pares de intervalos (I_i, I_{i+1}) y deducimos que con probabilidad $1 - O\left(q \left(\frac{n}{4^{q+1}}\right)^{-C+4}\right)$ existe una colección de matchings dirigidos en $T_p[I_i \rightarrow I_{i+1}]$ que cubren I_i para todo i , juntando los matchings y descartando caminos que no parten en I_0 se concluye. \square

3.4. Cantidad lineal de árboles pequeños.

Los siguientes resultados surgieron como un primer acercamiento al problema de embedding de árboles, pero finalmente no fueron utilizados para probar el Teorema 1.12. Se incluyen de todas formas como una extensión de la sección anterior porque suscitan interés propio, permitiendo encontrar una cantidad lineal de copias de árboles de orden constante en un subgrafo aleatorio de torneo, lo que podría usarse para quizás mejorar la constante D_q asociada al tamaño de las estructuras encontradas en los teoremas principales.

Lema 3.10. Sean $q, \Delta \geq 1$, y T un torneo en n vértices y sea $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ un median order de T . Entonces existe una partición $(I_i)_{i=1}^{q+1}$ de los vértices de T en intervalos de σ tal que

1. $|I_1| = \lfloor n / \left(\frac{(4\Delta)^{q+1} - 1}{4\Delta - 1} \right) \rfloor$
2. $|I_{i+1}| = 4\Delta |I_i|$, para todo $i \in \{1, \dots, q-1\}$ y $|I_q| \geq 4\Delta |I_{q-1}|$,
3. $d^+(v, I_{i+1}) \geq \frac{3}{2}\Delta |I_i|$, para todo $i \in \{1, \dots, q\}$.

La demostración del Lema anterior es idéntica a la del Lema 3.7, salvo por los tamaños de los conjuntos. Necesitaremos el siguiente lema, que es una adaptación de un lema de Krivelevich para encontrar matchings de estrellas en grafos aleatorios (Lema 2.3 de [18]), esto es una colección de estrellas vértice disjuntas, todas centradas al mismo lado de la partición.

Lema 3.11. *Sea $\Delta \in \mathbb{N}$, y sea $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Sea G un grafo bipartito con partes A y B tal que $|A| = n$ y $|B| = 4\Delta n$, y supongamos que $d(a) = \lfloor \frac{3}{2}\Delta n \rfloor$ para cada $a \in A$. Si $p \geq C \frac{\log n}{n}$, entonces con probabilidad $1 - O((\Delta n)^{-\frac{C}{2}+4})$ existe un matching de Δ -estrellas cubriendo a A en G_p .*

DEMOSTRACIÓN. Sea F un conjunto auxiliar de tamaño $|F| = \Delta n$ consistiendo de Δ copias de cada elemento en A . Para cada $a \in A$, sea $F_a \subseteq F$ (de tamaño Δ) el conjunto de copias de a . Ahora definimos el grafo bipartito H con partes C y B , tal que $cb \in E(H)$ para $c \in F_a$ y $b \in B$ si y solo si $ab \in G$. En particular tenemos que $d_H(c) = d_G(a) = \frac{3}{2}\Delta n$ para todo $c \in F_a$, por lo mismo $d_H(c) = \frac{3}{2}\Delta n$ para todo $c \in F$. Sea $q \in (0, 1)$ tal que $(1 - q)^\Delta = (1 - p)$. Notemos que por la desigualdad de Bernoulli

$$(1 - p) = (1 - q)^\Delta \geq 1 - \Delta q.$$

Luego, tenemos que $q \geq p/\Delta$. Notemos que el grafo aleatorio H_q induce un subgrafo $\tilde{G} \subseteq G$ con la misma distribución que G_p . En efecto, dada una arista $ab \in E(G)$, diremos que $ab \in E(\tilde{G})$ si y solo si existe $c \in C_a$ tal que $cb \in E(H_q)$. Entonces para $ab \in E(G)$ tenemos

$$\mathbb{P}(ab \in E(\tilde{G})) = 1 - (1 - q)^\Delta = p.$$

Basta notar ahora que un matching en H_q cubre a C si y solo si hay un matching de Δ -estrellas en G_p que cubre a A . Entonces si n es suficientemente grande tenemos que

$$q \geq \frac{C \log n}{\Delta n} = \frac{C \log \Delta n - \log \Delta}{\Delta n} \geq \frac{C \log \Delta n}{2 \Delta n}.$$

Luego, por el Lema 3.5 obtenemos que con probabilidad $1 - O((\Delta n)^{-\frac{C}{2}+4})$ existe un matching en H_q cubriendo a C , con lo que se concluye la existencia del matching de Δ -estrellas que cubre a A en \tilde{G} . \square

Probaremos, análogamente al caso de caminos dirigidos, que podemos particionar un torneo en intervalos consecutivos $(I_i)_{i=1}^q$, de manera que aplicando el Lema 3.11 iterativamente sobre pares de intervalos consecutivos (I_i, I_{i+1}) cada vértice del intervalo inicial define una arborescencia Δ -aria de altura q .

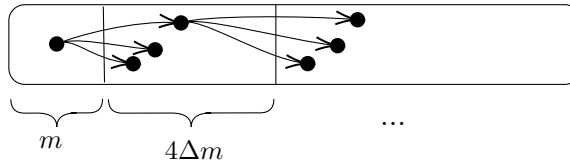


Figura 3.1: Aplicamos iterativamente el Lema 3.11, encontrando matchings de Δ -estrellas que cubren cada intervalo.

Proposición 3.12. Sean $q, \Delta \in \mathbb{N}$ y $C > 8$, sea T un torneo en n vértices con un median order $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ y sea $p \geq C \frac{(4\Delta)^{q+1} \log n}{3\Delta n}$. Entonces con probabilidad $1 - O\left(q\left(\frac{n}{(4\Delta)^q}\right)^{-\frac{C}{2}+4}\right)$, T_p contiene una colección de $\lfloor n / \left(\frac{(4\Delta)^{q+1}-1}{4\Delta-1}\right) \rfloor$ arborescencias Δ -arias de tamaño $\frac{\Delta^{q+1}-1}{\Delta-1}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea T un torneo en n vértices y $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ un median order del torneo. Usaremos el Lema 3.10 para obtener, para Δ y q , una partición en intervalos consecutivos del median order $(I_i)_{i=0}^q$ que satisfacen

1. $|I_0| = \lfloor n / \left(\frac{(4\Delta)^{q+1}-1}{4\Delta-1}\right) \rfloor$,
2. $|I_{i+1}| = 4\Delta |I_i|$, para todo $i \in \{0, \dots, q-1\}$ y $|I_q| \geq 4\Delta |I_{q-1}|$, y
3. $d^+(v, I_{i+1}) \geq \frac{3}{2}\Delta |I_i|$, para todo $i \in \{0, \dots, q-1\}$.

Sea $m_i = |I_i|$ para cada $i \in \{0, \dots, q\}$. Entonces, para cada i encontraremos un subgrafo bipartito $D_i \subseteq T[I_i \rightarrow I_{i+1}]$ tal que $d_{D_i}^+(v) = \lfloor \frac{3}{2}\Delta m_i \rfloor$ para todo $v \in I_i$.

Notamos que, si n es suficientemente grande para que $\log n + \log 4\Delta \leq \frac{4}{3}$, luego

$$\begin{aligned} p &\geq C \frac{(4\Delta)^{q+1} \log n}{3\Delta n} \geq C \left(\frac{(4\Delta)^{q+1}}{3\Delta} \right) \max_{i \in \{0, \dots, q-1\}} \left(\frac{\log n}{(4\Delta)^i} \right) \\ &\geq C \left(\frac{(4\Delta)^{q+1} - 1}{4\Delta - 1} \right) \max_{i \in \{0, \dots, q-1\}} \left(\frac{\log n + \log \left(\frac{4\Delta - 1}{(4\Delta)^{q+1} - 1} \right)}{(4\Delta)^i} \right) \\ &= C \max_{i \in \{0, \dots, q-1\}} \frac{\log |I_i|}{|I_i|}, \end{aligned}$$

entonces, existe un matching de Δ -estrellas que cubre a I_i en $u(D_i)_p$ con probabilidad $1 - O(|I_i|^{-\frac{C}{2}+4})$. Iterando esto sobre todos los pares de intervalos (I_i, I_{i+1}) , se concluye que con probabilidad $1 - O\left(q\left(\frac{n}{(4\Delta)^q}\right)^{-\frac{C}{2}+4}\right)$ existe una colección de matchings de Δ -estrellas dirigidas en $T_p[I_i \rightarrow I_{i+1}]$ que cubren I_i . De esta forma, cada vértice de I_0 es el vértice inicial de una arborescencia Δ -aria de altura q obtenida de recorrer las estrellas de los matchings entre cada par de intervalos consecutivos. \square

Puede probarse también una proposición que permita encontrar una cantidad lineal de árboles arbitrarios de tamaño constante. Esto se logra usando el mismo procedimiento de iterar el Lema 3.11, pero intercalando el posicionamiento de los intervalos siguientes (en cada paso elegimos un intervalo inferior en el median order al intervalo actual y uno superior, encontrando matchings de in-estrellas y out-estrellas centradas en nuestro intervalo, iterando esto se concluye, ver Figura 3.2.).

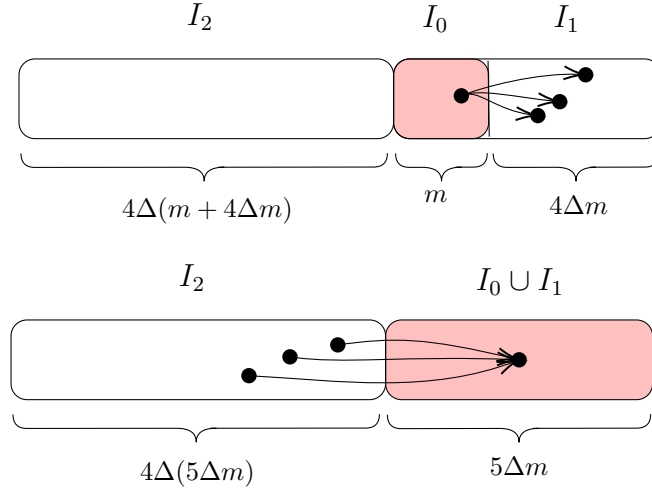


Figura 3.2: Se aplicaría el Lema 3.11 entre $\bigcup_{j=0}^i I_j$ y I_{i+1} , encontrando un matching de Δ -estrellas que cubre $\bigcup_{j=0}^i I_j$, con direcciones alternantes.

3.5. Caminos orientados en T_p

En esta sección mostraremos cómo encontrar orientaciones de caminos de largo lineal en el modelo T_p . Dado un torneo T , aplicaremos el lema de regularidad para constantes η y ε apropiadas, y encontraremos un camino largo en el grafo reducido. Para esto necesitaremos una versión del teorema de Erdős-Gallai para grafos bipartitos, demostrada por Gyárfás, Rousseau y Schelp [12].

Lema 3.13. (Ver Teorema 1 en [12]) Sea $0 < \varepsilon < \frac{1}{8}$ y G un grafo bipartito balanceado con partes A y B de tamaño n , tal que $e(G) \geq (1 - \varepsilon)\frac{n^2}{4}$. Entonces G contiene un camino de largo al menos $(1 - \varepsilon)n$.

Usando esto podemos encontrar caminos antidirigidos largos en el grafo reducido. Luego, usando la Proposición 3.9 y uniendo los inicios de caminos con fines de caminos mediante argumentos de regularidad demostraremos el Teorema 1.10. Para hacer mas fácil la lectura, enunciamos nuevamente el Teorema 1.10, explicitando la constante D_q .

Teorema 1.10. Dado $q \geq 1$, existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $C > 0$ tal que para $n \geq n_0$ se cumple lo siguiente. Sea T un torneo en n vértices y sea P un camino orientado con a lo más $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4^{q+1}-1} \cdot n$ cambios de orientación y de altura a lo más q . Si $p \geq C \frac{\log n}{n}$, entonces con probabilidad $1 - O(n^{-\frac{99}{100}})$ tenemos que T_p contiene una copia de P .

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.10. Definamos $c_q = \frac{3}{(4^{q+1}-1)}$, sean $\eta = 1/100$, $\varepsilon = c_q/200$ y sean l_0 y M obtenidos de usar el Lema 2.15 para constantes η , ε y $k_0 = 100$, definamos $n_0 = \max\{l_0, (2M \cdot 4^{q+2})^2\}$. Sea además $C = \frac{160}{\eta} \cdot c_q^{-1} \cdot M$.

Primer paso: Preparación. Sea T un torneo en $n \geq n_0$ vértices, y asumamos que n es par, en caso contrario basta quitar un vértice arbitrario y hacer el mismo procedimiento. Sea $V(T) = A \cup B$ una partición arbitraria con $|A| = |B| = n/2$ tal que $|E(A \rightarrow B)| \geq |A||B|/2$,

para esto basta notar que $|E(A \rightarrow B)| + |E(B \rightarrow A)| = |A||B|$, luego, por el principio del palomar, alguna de estas orientaciones contiene al menos $|A||B|/2$ aristas. Usando el lema de regularidad (Lema 2.15) en el grafo orientado $G[A \rightarrow B]$, con la prepartición $\{A, B\}$ (ver Observación 2.16), obtenemos una partición ε -regular $A = \bigcup_{i=0}^k A_i$ y $B = \bigcup_{i=0}^k B_i$ tal que $|A_0 \cup B_0| \leq \varepsilon n$, donde $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$ y $B = \bigcup_{i=1}^k B_i$ tienen tamaño $m := |A_1| \geq (1 - \varepsilon) \frac{n}{2k}$.

Podemos notar que como $\log n \geq \log m$, tenemos

$$p \geq C \frac{\log n}{n} \geq \frac{80}{\eta} c_q^{-1} \frac{2M}{n} \log n \geq \frac{80}{\eta} c_q^{-1} \frac{2k}{n} \log n \geq 8000 c_q^{-1} \frac{\log m}{m}. \quad (3.1)$$

Sea R el grafo (ε, η) -reducido asociado a esta partición. Como $e(A \rightarrow B) \geq |A||B|/2$, por la Observación 2.18 tenemos

$$e(\mathcal{R}) \geq (1 - 4(\varepsilon + \eta)) k^2 \geq \frac{94}{100} k^2,$$

donde usamos que $\varepsilon \leq \frac{1}{2}\eta$ y que $\frac{(1-\varepsilon)n}{m} = 2k$. Entonces, por el Lema 3.13, existe un camino $\mathcal{P} = V_1 \dots V_t$ en el grafo reducido \mathcal{R} con $t \geq \frac{94}{50}k$ de largo par. Además, como t es par, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $V_1 \subseteq A$.

Ahora revelaremos las aristas en $T[V_i]_p$ para cada $i \in [t]$. Por la ecuación (3.1), podemos usar la Proposición 3.9 en cada subtorneo $T[V_i]$ de tamaño m , de forma que con probabilidad a lo menos $1 - O(q \cdot (c_q \cdot m)^{-7996})$ existe una colección \mathcal{D}_i de $\lfloor c_q m \rfloor$ caminos dirigidos vertice-disjuntos contenidos en $T[V_i]_p$, todos de largo q .

Segundo paso: Embedding. Sea \vec{P} un camino orientado con a lo mas $\frac{4}{5}c_q n$ cambios de orientación y altura a lo mas q . Como $h(\vec{P}) \leq q$, podemos descomponer \vec{P} como $\vec{P} = \vec{P}_1 \dots \vec{P}_r$ donde cada \vec{P}_i es un camino out-dirigido o in-dirigido de largo a lo más q y tal que \vec{P}_i y \vec{P}_{i+1} tienen direcciones opuestas para cada $i \in [r-1]$ (notar que cada P_i tiene al menos 2 vértices). Supondremos que el camino P_1 es out-dirigido, el otro caso es similar.

Para $i \in [r]$, sea $\vec{P}_i = u_i u'_i \dots w'_i w_i$, donde u_i y w_i son los vértices inicial y final de \vec{P}_i , respectivamente, así como u'_i y w'_i son el segundo y penúltimo vértices, notar que $w_i = u_{i+1}$. Para $j \in [t]$, decimos que V_j está *saturado* si $(c_q - 2\varepsilon)|V_j| = \frac{198}{200}c_q|V_j|$ caminos de \mathcal{D}_j han sido usados en el embedding. Denotemos por $\mathcal{D}_j^{(i)}$ al conjunto de los vértices iniciales de caminos en \mathcal{D}_j y por $\mathcal{D}_j^{(f)}$ al conjunto de los vértices finales de caminos en \mathcal{D}_j . Empezaremos el embedding asignando $\vec{P}_1 - w_1$ a algun camino de \mathcal{D}_1 tal que sus vértices sean típicos hacia los vértices de $\mathcal{D}_2^{(f)}$ (si P_1 fuese in-dirigido asignaríamos $P_1 - w_1$ de manera que sus vértices sean típicos hacia los vértices de $\mathcal{D}_2^{(i)}$).

Lo anterior es posible pues la cantidad de caminos en \mathcal{D}_1 es exáctamente $\lfloor c_q |V_1| \rfloor \geq \frac{c_q}{200}|V_1| = \varepsilon|V_1|$, lo que es mayor a la cantidad total de vértices no típicos hacia $\mathcal{D}_2^{(i)}$ (resp. $\mathcal{D}_1^{(f)}$) (ver Proposición 2.13).

Construiremos el embedding de \vec{P} de manera secuencial en el embedding parcial. En cada paso, conectaremos el último vértice en el embedding actual con un vértice de $\mathcal{D}_j^{(i)}$ o $\mathcal{D}_j^{(f)}$ según el caso, par algún $j \in \{1, \dots, t\}$.

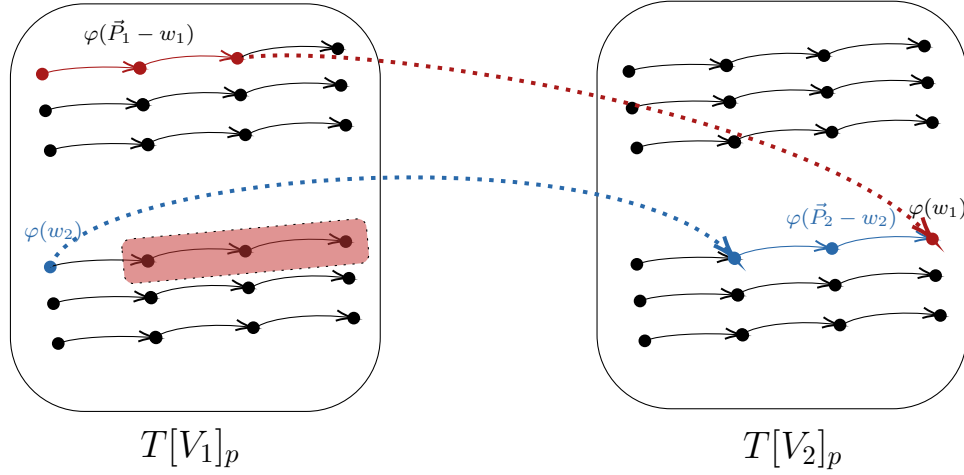


Figura 3.3: En cada paso, a P_i le asignaremos un camino en \mathcal{D}_j que sea típico hacia $\mathcal{D}_{j+1}^{(f)}$ si i es impar, o típico hacia $\mathcal{D}_{j-1}^{(i)}$ si i es par, siempre y cuando no estén saturados.

Después usaremos este camino para extender el embedding del camino dirigido correspondiente. Mostraremos que para cada i con $1 \leq i \leq r$ existe, con probabilidad al menos $1 - 2n^{-\frac{199}{100}}$, un embedding $\varphi_i : V(\vec{P}_1 \dots \vec{P}_i - w_i) \rightarrow V(T_p)$ tal que se tiene lo siguiente

- (E₁) Para $i \geq 2$, el embedding φ_i extiende a φ_{i-1} mapeando $V(P_i - w_i)$ de manera que $\varphi(V(P_i - w_i)) \subseteq Q$, con $Q \in \mathcal{D}_j$ para algún $j \in \{1, \dots, t\}$ siempre que $i \leq r - 1$. Si $i = r$, φ_r mapea a $V(P_r)$ completo a un camino de \mathcal{D}_j para algún $j \in \{1, \dots, t\}$.
- (E₂) Si i es impar, entonces existe $j \in [t]$ impar, tal que $\varphi_i(V(\vec{P}_i - w_i)) \subseteq V_j \subseteq A$ y todos los vértices de $\varphi_i(V(\vec{P}_i - w_i))$ son típicos hacia el conjunto de vértices disponibles en $\mathcal{D}_{j+1}^{(f)}$.
- (E₃) Si i es par, entonces existe $j \in [t]$ par, tal que $\varphi_i(V(\vec{P}_i - w_i)) \subseteq V_j \subseteq B$:
 - (a) Si V_{j-1} no está saturado, los vértices de $\varphi_i(V(\vec{P}_i - w_i))$ son típicos hacia el conjunto de vértices disponibles en $\mathcal{D}_{j-1}^{(i)}$.
 - (b) Si V_{j-1} está saturado y $j \neq t$, los vértices de $\varphi_i(V(\vec{P}_i - w_i))$ son típicos hacia el conjunto de vértices disponibles en $\mathcal{D}_{j+1}^{(f)}$.

Para $i = 1$ ya tenemos el embedding $\varphi_1 : V(\vec{P}_1 - w_1) \rightarrow \mathcal{D}_1$ que satisface (E₁), (E₂) y (E₃). Asumamos que para $i < r$ tenemos un embedding parcial $\varphi_i : V(\vec{P}_1 \dots \vec{P}_i - w_i) \rightarrow T_p$ que satisface (E₁), (E₂) y (E₃). Mostraremos que se puede extender φ_i a φ_{i+1} , mapeando $\vec{P}_{i+1} - w_{i+1}$ a un subconjunto de algún camino en \mathcal{D}_h para $h \in \{1, \dots, t\}$ con probabilidad al menos $1 - 2n^{-\frac{199}{100}}$ (o bien mapeando \vec{P}_{i+1} si $i + 1 = r$) de manera que satisfaga (E₁), (E₂) y (E₃).

Para esto, primero supongamos que $i + 1$ es par, luego i es impar. Notemos que entonces \vec{P}_{i+1} es un camino in-dirigido. Por (E_2) , existe un $j \in \{1, \dots, t\}$ par tal que $\varphi_i(\vec{P}_i - w_i) \subseteq V_j$, con j impar y tal que los v\u00e9rtices de $\varphi_i(\vec{P}_i - w_i)$ son t\u00edpicos hacia los v\u00e9rtices disponibles en $\mathcal{D}_{j+1}^{(f)}$. Sea Z el siguiente conjunto

$$Z := \left\{ v \in \mathcal{D}_{j+1}^{(f)} \mid \begin{array}{l} v \in V(Q) \text{ con } Q \in \mathcal{D}_{j+1} \text{ y todos los v\u00e9rtices de } V(Q) \\ \text{son t\u00edpicos hacia los v\u00e9rtices disponibles en } \mathcal{D}_j^{(i)} \end{array} \right\}.$$

Queremos asignar w_i a alg\u00fan v\u00e9rtice de Z que sea vecino de $\phi(w'_i)$. Esto falla s\u00f3lamente si $d_{T_p}^+(\varphi(w'_i), Z) = 0$, luego la probabilidad de fallar es a lo m\u00e1s

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[d_{T_p}^+(\varphi(w'_i), Z) = 0\right] &= (1-p)^{d_T^+(\varphi(w'_i), Z)} \leq e^{-p(\eta-\varepsilon)|Z|} \leq e^{-p(\eta-\varepsilon)(1-\varepsilon)\frac{c_q}{200}m} \\ &\leq e^{-p\left(\frac{2-c_q}{200} \cdot \frac{200-c_q}{200}\right)\frac{c_q}{200}\frac{n}{2k}} \leq e^{-8000 \cdot c_q^{-1} \cdot 2k \cdot \frac{\log n}{n} \cdot \left(\frac{1}{200} \frac{199}{200}\right) \cdot \frac{c_q}{200} \frac{n}{2k}} \leq e^{-2 \cdot \frac{199}{200} \cdot \log n}. \end{aligned}$$

Donde hicimos uso de que $c_q \leq 1$ y que $|Z| \geq (c_q - 199\varepsilon)n \geq \frac{c_q n}{400k}$ ya que $V_{h'+1}$ no est\u00e1 saturado y $d_{T_p}^-(\varphi_i(w'_i), Z) \geq (\eta - \varepsilon)|Z|$ porque $\varphi(w'_i)$ es t\u00edpico hacia Z . Entonces, con probabilidad $1 - n^{-\frac{199}{100}}$ podemos elegir $\varphi_{i+1}(u_{i+1}) \in N^+(\varphi(w'_i)) \cap Z$. Terminamos de asignar $\varphi_{i+1}(\vec{P}_{i+1} - w_{i+1})$ siguiendo el camino definido por Z , extendiendo as\u00ed el embedding φ_i de manera que se tienen (E_1) , (E_2) y (E_3) .

Ahora supongamos que $i + 1$ es impar y luego i es par. Por (E_3) , existe un $j \in \{1, \dots, t\}$ par tal que $\varphi_i(\vec{P}_i - w_i) \subseteq V_j$, con j impar y tal que $\varphi_i(w'_i)$ es t\u00edpico hacia los v\u00e9rtices disponibles en $\mathcal{D}_{j-1}^{(i)}$ si V_{j-1} no est\u00e1 saturado \u00f3 hacia los v\u00e9rtices disponibles en $\mathcal{D}_{j+1}^{(i)}$ si V_{j-1} est\u00e1 saturado y el mismo c\u00e1lculo del p\u00e1rrafo anterior aplica, salvo que V_{j-1} est\u00e9 saturado y $j = t$. Esto no puede pasar puesto que si V_{t-1} est\u00e1 saturado, V_t tambi\u00e9n debe estarlo, puesto que para cada h impar el embedding ocupa un nuevo camino de \mathcal{D}_{h+1} por cada camino usado en \mathcal{D}_h . Notemos de esta manera que por (E_1) hemos usado al menos $\frac{198}{200} \lfloor c_q m \rfloor$ caminos en \mathcal{D}_h en cada uno de los $t \geq \frac{94}{50}k$ clusters V_h , obteniendo un camino con al menos

$$\frac{94k}{50} \cdot \frac{198}{200} \cdot \lfloor c_q m \rfloor \geq \frac{47}{50} \cdot \frac{99}{100} \lfloor c_q n \rfloor \geq \frac{4}{5} c_q n$$

cambios de orientaci\u00f3n, lo que contradice la suposici\u00f3n (ya habr\u00edamos mapeado P completo). Con lo anterior se concluye que podemos extender φ_i a φ_{i+1} de manera que se tienen (E_1) , (E_2) y (E_3) y luego, tenemos que se tiene para todo i el embedding φ_i que satisface (E_1) , (E_2) y (E_3) .

Tercer paso: Probabilidad de \u00e9xito. Para concluir, veamos que en efecto se puede realizar el embedding con la probabilidad descrita, para esto sea \mathcal{A} el evento que codifica el fallar a la hora de encontrar la colecci\u00f3n de caminos dirigidos en alg\u00fan cluster (encontrados en el paso de preparaci\u00f3n) y sea \mathcal{B} el evento representando el no poder mapear alg\u00fan sub-camino \vec{P}_i . Entonces si L es la constante asociada a que la probabilidad de encontrar los conjuntos de caminos \mathcal{D}_h es $1 - O(q \cdot (c_q m)^{-7996})$ para cada $h \in \{1, \dots, t\}$ y recordando que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\mathcal{A}] &\leq t \cdot L \cdot q(c_q m)^{-7996} \\
&\leq 2k \cdot L \cdot q \cdot \left(c_q \cdot \frac{n}{2k}\right)^{-7996} \\
&\leq 2k \cdot L \cdot q \cdot n^{-4000} \\
&\leq L \cdot n^{-2000} \\
&= O(n^{-2000})
\end{aligned}$$

usamos que $n \geq (2M \cdot 4^{q+2})^2$, lo que implica

$$\frac{1}{2} \log n \geq \log 2k - \log c_q \geq \log k + (q+2) \log 4 \geq \log k + \log q.$$

Además la probabilidad de que fallemos al encontrar un embedding φ_1 de $\vec{P}_1 - w_1$, o que fallemos al extender φ_i a φ_{i+1} para algún $i \in \{1, \dots, r-1\}$ es a lo más

$$\mathbb{P}[\mathcal{B}] \leq r \cdot 2e^{-\frac{199}{100} \log n} \leq n \cdot 2e^{-\frac{199}{100} \log n} = O(n^{-\frac{99}{100}}).$$

Juntando ambos términos tenemos que

$$\mathbb{P}[\mathcal{A}] + \mathbb{P}[\mathcal{B}] \leq L \cdot n^{-2000} + n^{-\frac{99}{100}} \leq (L+1) \cdot e^{-\frac{99}{100} \log n},$$

Entonces, la probabilidad de poder hacer el embedding es a lo menos $1 - O(n^{-\frac{99}{100}})$, con lo que se concluye. □

3.6. Árboles orientados en T_p

3.6.1. Definiciones y conjetura de contracción

Para construir el embedding de árboles orientados en subgrafos aleatorios de torneos seguiremos una estrategia similar a la del capítulo anterior, primero aplicaremos el lema de regularidad al torneo T . Luego, necesitaremos una partición del árbol en bosques grandes que podremos asignar a los clusters del grafo reducido. Se conjetura la existencia de tal partición para todo árbol con grado máximo y altura acotados.

Definición 3.14. *Sea G un grafo orientado y sea \mathcal{P} una partición de $V(G)$. Definimos el grafo dirigido inducido por la partición $G[\mathcal{P}]$ de la siguiente manera:*

$$V(G[\mathcal{P}]) = \mathcal{P} \text{ y}$$

$$E(G[\mathcal{P}]) = \{(U, V) : U \neq V \wedge \exists u \in U, \exists v \in V \text{ tales que } (u, v) \in E(G)\}.$$

Definición 3.15. *Sea A un árbol orientado en n vértices y sean $\gamma \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{2})$, $C \in \mathbb{N}$. Decimos que A es (γ, C) -contraíble si existe una partición \mathcal{P} de $V(A)$ tal que*

1. $A[\mathcal{P}]$ es un árbol antidirigido,

2. $|\mathcal{P}| \leq \frac{1}{\gamma} + C$ y $\Delta(A[\mathcal{P}]) \leq C$,
3. $\gamma n \leq |U| \leq 2\gamma n$, para todo $U \in \mathcal{P}$, salvo a lo más C conjuntos con $|U| < \gamma n$, y
4. para cada $U \in \mathcal{P}$, se tiene una de las siguientes:

a) Cada componente conexa a de $u(A[U])$ es una out-arborescencia en $A[U]$ y

$$E(V(a) \rightarrow V(A) \setminus V(a)) = \phi.$$

b) Cada componente conexa a de $u(A[U])$ es una in-arborescencia en $A[U]$ y

$$E(V(A) \setminus V(a) \rightarrow V(a)) = \phi.$$

Se conjetura que para toda constante $0 < \gamma_0 < \frac{1}{2}$, existe una constante $C > 0$ tal que para todo árbol A suficientemente grande con altura y grado máximo acotados, tenemos que A es (γ, C) -contraíble para $\gamma_0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2}$.

Conjetura 3.16. Sean $\Delta \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ y $\gamma_0 \in (0, \frac{1}{2})$. Existen $C \geq 1$ y $n_0 \in \mathbb{N}$, tales que para todo $n \geq n_0$ y todo árbol A en n vértices con $\Delta(A) \leq \Delta$ y $h(A) \leq q - 1$, se tiene que A es (γ, C) -contraíble para todo $\gamma \in (\gamma_0, \frac{1}{2})$.

Para más fácil referencia, volvemos a enunciar el Teorema 1.12, explicitando las constantes $D_{\Delta, q, D}$ y $\gamma_{\Delta, q, D}$.

Teorema 1.12. Para cada $\Delta, q, D \in \mathbb{N}$, con $q \geq 2$, existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $C > 0$, tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene lo siguiente. Sea T un torneo en n vértices y A un árbol orientado en $\frac{n}{12^3 q}$ vértices tal que $\Delta(A) \leq \Delta$ y $h(A) \leq q - 1$ tal que A es (γ, D) -contraíble para todo $\gamma \in \left(\frac{12}{\tau \left(2 + \frac{(12^3 \Delta D q)^2}{16} \right)}, \frac{1}{2} \right)$. Entonces si $p \geq C \frac{\log n}{n}$, se tiene que con probabilidad $1 - O(n^{-1})$, $A \subseteq T_p$.

Si la Conjetura 3.16 fuese cierta, entonces una aplicación del Teorema 1.12 implicaría que se tiene la Conjetura 3.17.

Conjetura 3.17. Para cada $\Delta, q \in \mathbb{N}$, con $q \geq 2$, existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $C > 0$, tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene lo siguiente. Sea T un torneo en n vértices y A un árbol orientado en $\frac{n}{12^3 q}$ vértices tal que $\Delta(A) \leq \Delta$ y $h(A) < q$. Entonces si $p \geq C \frac{\log n}{n}$, se tiene que con probabilidad $1 - O(n^{-1})$, $A \subseteq T_p$.

3.6.2. Antecedentes para la Conjetura 3.16

La Observación 3.20 y el Algoritmo 3.19 sientan un precedente para la Conjetura 3.16, permitiendo encontrar una partición de A que satisface los puntos 1. y 4. de la Definición 3.15.

Definición 3.18. Sea A un árbol orientado y $r \in V(A)$ un vértice arbitrario, definimos los siguientes conjuntos de aristas:

$$E_r^+ := \{e = (u, v) \in E(A) : \text{dist}_{u(A)}(u, r) < \text{dist}_{u(A)}(v, r)\}$$

$$E_r^- := \{e = (u, v) \in E(A) : \text{dist}_{u(A)}(u, r) > \text{dist}_{u(A)}(v, r)\}$$

El Algoritmo 3.19 permite construir una partición \mathcal{Q} de $V(A)$ donde cada $a \in \mathcal{Q}$ induce una arborescencia que satisface el punto 4. de la Definición 3.15, esto a su vez implica que el grafo generado por la partición $A[\mathcal{Q}]$ es un árbol antidirigido, ya que cada vértice $a \in V(A[\mathcal{Q}])$ tiene o bien $d_{A[\mathcal{Q}]}^+(a) = 0$ si a es una out-arborescencia o $d_{A[\mathcal{Q}]}^-(a) = 0$ si a es una in-arborescencia (ver Figura 3.4. para un ejemplo del algoritmo). Creemos que agrupando arborescencias del mismo tipo obtenidas mediante el Algoritmo 3.19 se puede probar la Conjetura 3.16.

Algoritmo 3.19. *Dados un árbol A con $\Delta(A) = \Delta$ y $h(A) = q - 1$, y $r \in V(A)$ un vértice arbitrario, sean E_r^+ y E_r^- los conjuntos definidos en la Definición 3.18.*

1. *Inicializamos $\mathcal{Q} = \{a_r\}$ con $a_r = A[a]$, donde a es la componente conexa en $u(A[E_r^+])$ que contiene a r , además, inicializaremos el indicador $\star = -$.*

Mientras $\bigcup_{U \in \mathcal{Q}} V(U) \neq V(A)$, iteramos:

- a) *Mientras existan $a \in \mathcal{Q}$ y $b \subseteq V(A)$, tales que b define una componente conexa de $u(A[E_r^\star])$ y además se tiene que $b \not\subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{Q}} V(U)$ y $b \cap V(a) \neq \emptyset$, entonces hacemos lo siguiente:*

Elegimos $a \in \mathcal{Q}$ y $b \subseteq V(A)$, tales que b define una componente conexa de $u(A[E_r^\star])$ y además se tiene que $b \not\subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{Q}} V(U)$ y $b \cap V(a) \neq \emptyset$. Notemos que existe a lo más un único vértice en $b \cap V(a) = \{r_b\}$ (de lo contrario se contradice que A es árbol) y consideremos el bosque $A[b - \{r_b\}] = \{b_s\}_{s=1}^t$. Agregamos conjuntos a \mathcal{Q} de la siguiente manera

$$\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{Q} \cup \{V(b_s)\}_{s=1}^t$$

- b) *Por el contrario, si para todo $a \in \mathcal{Q}$ y toda componente conexa b de $u(A[E_r^\star])$ con $b \cap V(a) \neq \emptyset$ se tiene que $b \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{Q}} V(U)$, actualizamos el indicador \star de la siguiente manera*

$$\star = \begin{cases} +, & \text{si } \star = - \text{ en el paso anterior,} \\ -, & \text{si } \star = + \text{ en el paso anterior.} \end{cases}$$

Observación 3.20. *Los elementos $a \in \mathcal{Q}$, donde \mathcal{Q} es la partición obtenida mediante el Algoritmo 3.19 inducen arborescencias que cumplen que:*

Si $A[a]$ es una out-arborescencia, entonces $E_A(a \rightarrow V(A) \setminus a) = \emptyset$, ó

si $A[a]$ es una in-arborescencia, entonces $E_A(V(A) \setminus a \rightarrow a) = \emptyset$.

Además, por la construcción no es difícil ver que $A[\mathcal{Q}]$ es un árbol antidirigido, además las cotas para la altura y grado máximo de A , nos permiten deducir que el tamaño máximo de una subarborescencia de A es $\frac{\Delta^q - 1}{\Delta - 1}$, luego el grado máximo en $A[\mathcal{Q}]$ es a lo más $\Delta \cdot \frac{\Delta^q - 1}{\Delta - 1}$.

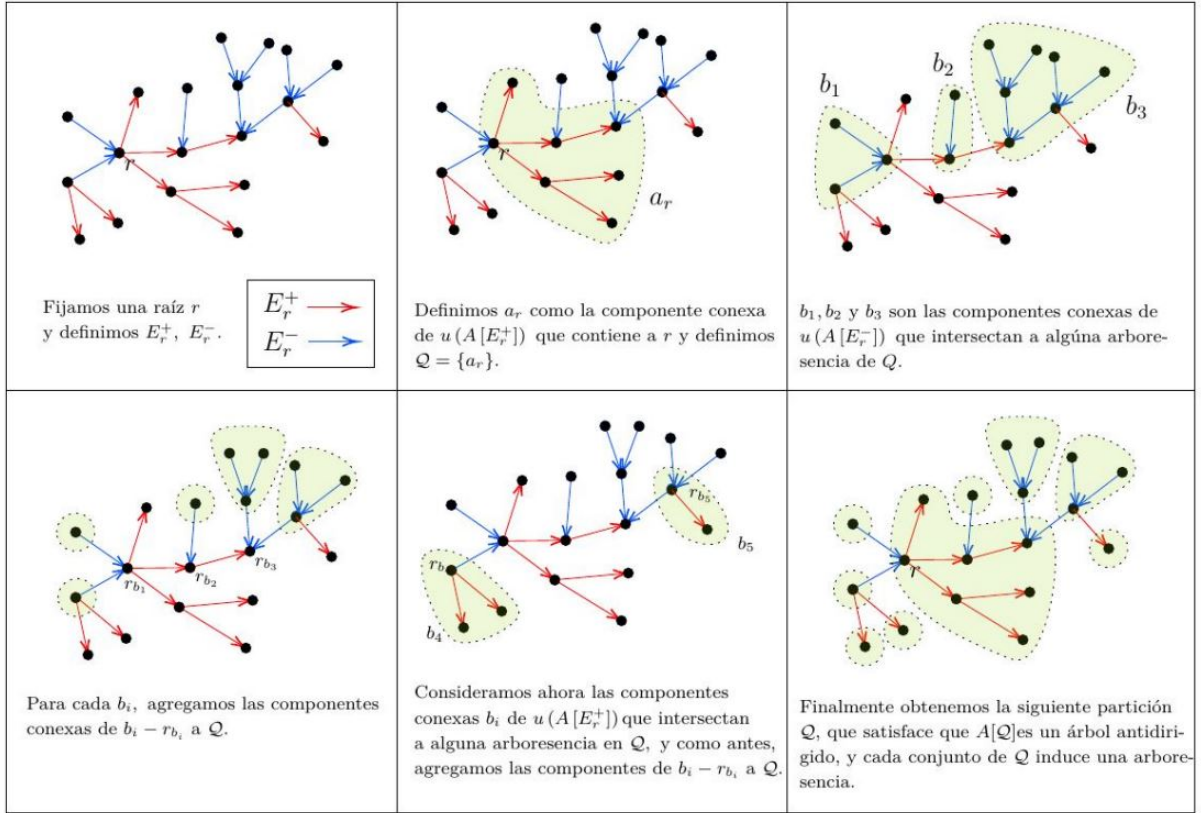


Figura 3.4: Ejemplo del procedimiento a realizar mediante el algoritmo 3.19, encontrando una partición que induce un árbol antidirigido, donde cada conjunto induce arborescencias.

3.6.3. Herramientas

Para la demostración del Teorema 1.12, dado un árbol (γ, C) -contraíble A con una partición \mathcal{P} asociada, necesitaremos el teorema principal del artículo de Burr [6] para encontrar una copia del árbol contraído $A[\mathcal{P}]$ en el grafo reducido de un torneo T luego de aplicar el lema de regularidad.

Teorema 3.21. (ver Teorema principal de [6]) Sea T un árbol antidirigido con k aristas. Si G es un grafo orientado con n vértices y a lo menos $(4k - 4)n$ aristas, entonces $T \subseteq G$.

Adicionalmente, necesitaremos un resultado de Fox y Lovász que muestra una cota superior en la cantidad de clusters obtenidos mediante el Lema de Regularidad (ver Sección 2 de [10]), para esto definimos recursivamente la función *torre* de la siguiente forma, $\mathcal{T}(1) := 2$ y $\mathcal{T}(k) := 2^{\mathcal{T}(k-1)}$.

Lema 3.22. (ver Teorema 1.1. en [10]) Sean $d \in (0, 1)$, $\varepsilon > 0$ y $k_0 \in \mathbb{N}$. Entonces la función $M(\varepsilon)$ que denota la cantidad máxima de clusters obtenidos mediante el Lema de Regularidad, es a lo más

$$M(\varepsilon) \leq \mathcal{T}\left(2 + \frac{1}{16}\varepsilon^{-2}\right)$$

3.6.4. Mapeo de arborescencias constantes en torneos

Necesitaremos el siguiente lema, que nos permitirá mapear arborescencias A de tamaño constante en cada cluster, evitando un conjunto prohibido y pre-fijando la imagen de un vértice de A .

Lema 3.23. Sean $\Delta, q \in \mathbb{N}$, y sea $\delta \in (0, 1)$. Si T es un torneo en $n \geq \frac{2\Delta^{q+1}q}{\delta}$ vértices y $X \subseteq V(T)$ un conjunto de vértices prohibidos con $|X| \leq (1 - \delta)\frac{n}{4q}$. Sea A una out-arborescencia con $\Delta(A) \leq \Delta$, $h(A) \leq q - 1$, sea $r \in V(A)$ su raíz y sea $s \in V(A)$ un vértice arbitrario. Entonces si $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ es un median order de T y $v_j \in V(T)$ es un vértice de T con $\lfloor \frac{qn}{2q} \rfloor + 1 \leq j \leq \lfloor \frac{(q+1)n}{2q} \rfloor$, tenemos que si $p \geq \frac{24\Delta q \log n}{\delta n}$, entonces con probabilidad al menos $1 - O(n^{-2})$ existe un embedding $\varphi : A \rightarrow T_p$ tal que $\varphi(V(A)) \subseteq V(T) \setminus X$ con $\varphi(s) = v_j$.

DEMOSTRACIÓN. Sea T un torneo en $n \geq \frac{2\Delta^{q+1}q}{\delta}$ vértices y sean $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ un median order de T , sea además A una out-arborescencia con raíz r y sea s un vértice arbitrario de A , consideremos $(a_i)_{i=1}^{|A|}$ un orden ancestral de A con $a_1 = r$. Sea además $\vec{P} = a_{t_1} a_{t_2} \dots a_{t_d}$, con $a_{t_1} = s$ y $a_{t_d} = r$ el camino dirigido (posiblemente trivial) que conecta r con s . Para cada vértice $v_s \in V(T)$ con $s \leq \frac{q-1}{q} \cdot n$, definiremos los intervalos $I_s^+ := [v_{s+1}, v_{s+\lceil \frac{n}{2q} \rceil}]$, análogamente para cada $s \geq \frac{1}{q} \cdot n$ definiremos $I_s^- := [v_{s-\lceil \frac{n}{2q} \rceil}, v_{s-1}]$.

Iniciaremos el embedding asignando $\varphi_1(r) := v_j$, notemos que el camino \vec{P} es in-dirigido, partiremos mapeando la in-vecindad de a_{t_i} para cada $i \in \{1, \dots, d-1\}$, para obtener así un embedding parcial $\varphi_1 : \vec{P} \rightarrow T_p$, que cumple que $\varphi_1(\vec{P}) \subseteq V(T) \setminus X$ y que la imagen de la raíz r , digamos $\varphi_1(r) = v_s$ satisface $s \leq \frac{(q+1)n}{2q}$.

Veamos primero que en efecto puede construirse φ_1 en a lo más q pasos, con probabilidad $1 - O(n^{-2})$. Partiremos asignando $\varphi_1(a_{t_1}) = v_j$ y definiendo $s_1 = j$. En cada paso l , con $1 \leq l \leq q$, mapearemos el vértice $a_{t_{l+1}}$ a algún in-vecino de v_{s_l} en el intervalo $I_{s_l}^- \setminus \Omega$, donde s_l es el índice tal que $\varphi_1(a_{t_l}) = v_{s_l}$. Notemos que si s_l cumple que $\lceil \frac{(q-l)n}{2q} \rceil \leq s_l \leq \lceil \frac{(q+1)n}{2q} \rceil - 1$ entonces s_{l+1} cumplirá $s_l - \lceil \frac{n}{2q} \rceil \leq s_{l+1} \leq s_l - 1$, ya que elegimos $v_{s_{l+1}} \in I_{s_l}^- \setminus X$.

En cada paso l , con $1 \leq l \leq q$ de la construcción de φ_1 ocuparemos el Lema 3.3 en el torneo T para el vértice v_{s_l} y constantes $\delta' = \frac{\delta}{4q}$, $\Delta' = 1$, y el conjunto de in-vecinos en T de v_{s_l} dado por $(N^-(v_{s_l}) \cap I_{s_l}^-) \setminus X$. Esto notando que

$$d_T^-(v_{s_l}, I_{s_l}^- \setminus X) \geq \frac{|I_{s_l}^-|}{2} - |X| \geq \delta \frac{n}{4q}$$

y recordando que $p \geq \frac{12q \log n}{\delta n}$. Lo anterior nos permite encontrar un vértice $v_{s_{l+1}} \in (N^-(v_{s_l}) \cap I_{s_l}^-) \setminus X$ con probabilidad al menos $1 - O(n^{-2})$, y luego asignaremos $\varphi_1(a_{t_{l+1}}) = v_{s_{l+1}}$. Lo anterior, notando que todos los conjuntos de aristas reveladas son disjuntos y luego todas las elecciones son independientes, nos permite concluir que podemos construir, con probabilidad al menos $1 - qLn^{-2}$, un embedding $\varphi_1 : \vec{P} \rightarrow T_p$ que cumple $\varphi_1(\vec{P}) \subseteq [v_1, v_j] \setminus X$, para alguna constante $L > 0$, independiente de n y l .

En cada paso i , con $i \geq 2$ extenderemos el mapeo φ_i , asignando los vértices aún no ma-

peados de la out-vecindad del primer vértice $a_j \in \text{Dom}(\varphi_i)$ en el orden $(a_i)_{i=1}^{|A|}$ tal que $N_A^+(a_j)$ no ha sido mapeado completo aún, la asignación de esta vecindad se hará con probabilidad al menos $1 - O(n^{-2})$ en cada paso, y de manera que en cada paso se revelará la vecindad de un único vértice en T , y luego todas las elecciones serán independientes.

Supongamos que hemos extendido el embedding hasta $\varphi_i : A' \rightarrow T_p$ para algún sub-árbol A' con $V(A)' \subseteq V(A)$. Sea a_j el primer vértice del orden ancestral, con $a_j \in V(A')$ y tal que su out-vecindad $N_A^+(a_j) \not\subseteq V(A')$ de a_j aún no ha sido mapeada. Sabemos que en algún paso anterior ya mapeamos a_j a un vértice $v_{i_j} = \varphi(a_j)$ y consideremos el intervalo I_{i_j} en σ . Sea $\Gamma_i = \varphi_i(A') \cap I_{i_j}$ el conjunto de los vértices ya usados en el embedding. Notemos que:

$$\begin{aligned} d_T^+(v_{i_j}, I_{i_j} \setminus (X \cup \Gamma_i)) &\geq \frac{|I_{i_j}|}{2} - |\Gamma_i| - X \\ &\geq \frac{n}{4q} - \frac{\Delta^{q+1} - 1}{\Delta - 1} - (1 - \delta) \frac{n}{4q} \\ &\geq \frac{\delta}{8q} n \end{aligned}$$

Aplicamos el Lema 3.3 para constantes $\frac{\delta}{8q}$, Δ , el torneo T , con el vértice v_{i_j} , y el conjunto $I_{i_j} \setminus (X \cup \Gamma_i)$. Obtenemos que como $p \geq \frac{24\Delta q \log n}{\delta n}$, entonces con probabilidad $O(n^{-2})$ podemos encontrar una out-estrella $S_{v_{i_j}}^+$ contenida en T_p y centrada en v_{i_j} cuyas hojas caen en $I_{i_j} \setminus (X \cup \Gamma_i)$. Con esta podemos extender φ_i asignando los vértices aún no mapeados de la vecindad $N_A^+(a_j)$ a vértices de $S_{v_{i_j}}^+$, obteniendo así φ_{i+1} con probabilidad al menos $1 - L'n^{-2}$ donde $L' > 0$ es otra constante independiente de n e i .

Notemos que en la construcción del embedding φ , hacemos a lo más $|A| + q \leq \Delta^{q+2} + q$ aplicaciones del Lema 3.3 sobre vecindades disjuntas. Sea \mathcal{E}_1 el evento que codifica el fallar a la hora de construir φ_1 y sean $\{\mathcal{E}_i\}_{i=2}^{|A|}$ los eventos que codifican el fallar al extender φ_{i-1} a φ_i en el paso i , luego mediante una cota de unión, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\text{Fallamos al construir } \varphi] &\leq \mathbb{P}[\mathcal{E}_1] + \sum_{s=2}^{|A|} \mathbb{P}[\mathcal{E}_s] \\ &\leq qLn^{-2} + \sum_{s=2}^{|A|} L'n^{-2} \\ &\leq (|A| + q) \cdot \max\{L, L'\} \cdot n^{-2} \\ &\leq (\Delta^{q+2} + q) \cdot \max\{L, L'\} \cdot n^{-2}, \end{aligned}$$

con lo que se concluye que podemos construir el embedding $\varphi : A \rightarrow T_p$ con probabilidad $1 - O(n^{-2})$ de manera que $\varphi(r) = v_j$ y $\varphi(A) \subseteq V(T) \setminus X$. \square

Una demostración análoga, cambiando el rol de las in-vecindades por out-vecindades, permite obtener el siguiente resultado equivalente, que nos permitirá mapear in-arborescencias en clusters del grafo reducido.

Corolario 3.24. Sean $\Delta, q \in \mathbb{N}$, y sea $\delta \in (0, 1)$. Si T es un torneo en $n \geq \frac{2\Delta^{q+1}q}{\delta}$ vértices y

$X \subseteq V(T)$ un conjunto de vértices prohibidos con $|X| \leq (1-\delta)\frac{n}{4q}$. Sea A una in-arborescencia con $\Delta(A) \leq \Delta$, $h(A) \leq q-1$, sea $r \in V(A)$ su raíz y sea $s \in V(A)$ un vértice arbitrario. Entonces si $\sigma = (v_1, \dots, v_n)$ es un median order de T y $v_j \in V(T)$ es un vértice de T con $\lfloor \frac{qm}{2q} \rfloor + 1 \leq j \leq \lfloor \frac{(q+1)n}{2q} \rfloor$, tenemos que si $p \geq \frac{24\Delta q \log n}{\delta n}$, entonces con probabilidad al menos $1 - O(n^{-2})$ existe un embedding $\varphi : A \rightarrow T_p$ tal que $\varphi(V(A)) \subseteq V(T) \setminus X$ con $\varphi(s) = v_j$.

3.6.5. Demostración del Teorema 1.12

Primer paso: preparación. Sean $\Delta, q \in \mathbb{N}$, con $q \geq 2$ y sean n_0 y M obtenidos de aplicar el Lema 2.15 para constantes $\eta = 1/6$, $k_0 = \max\{48, 24D\}$ y $\varepsilon = \frac{1}{12^3 \Delta D q}$. Sea además $C = 96M\Delta q$.

Sea ahora un torneo T en $n \geq n_0$ vértices. Por el Lema de Regularidad sabemos que existe una partición (ε, η) -regular de T en clusters V_1, \dots, V_k , definamos $m := |V_1|$. Por la Observación 2.13 sabemos que el grafo reducido \mathcal{R} de esta partición cumple $e(\mathcal{R}) \geq \frac{(1-2\eta)k^2}{2} = \frac{k^2}{3}$.

Consideremos $\gamma = \frac{12}{k-12D} \geq \frac{12}{M} \geq \frac{12}{\tau \left(2 + \frac{(12^3 \Delta D q)^2}{16}\right)}$, por las suposiciones del teorema, tenemos que A es (γ, D) -contraíble. Luego existe una partición $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=1}^t$, tal que

$$|\mathcal{P}| \leq \frac{1}{\gamma} + D = \frac{k}{12}.$$

Como $A[\mathcal{P}]$ es árbol, sabemos que $|E(A[\mathcal{P}])| \leq |V(A[\mathcal{P}])| - 1 = |\mathcal{P}| - 1$. Luego tenemos

$$e(A[\mathcal{P}]) \leq \frac{k}{12} \leq \frac{e(\mathcal{R})}{4k},$$

entonces por el Teorema 3.21, sabemos que existe una copia de $A[\mathcal{P}]$ en \mathcal{R} y sea $\varphi : A[\mathcal{P}] \rightarrow \mathcal{R}$ este embedding. Usaremos φ como asignación de cada conjunto P_j a un cluster del grafo reducido. Consideremos el refinamiento $\mathcal{Q} \preceq \mathcal{P}$ obtenido de considerar las componentes conexas del grafo subyacente $u(A[\mathcal{P}])$ inducido por cada P , con $P \in \mathcal{P}$. Notemos que el grafo $A[\mathcal{Q}]$ también es un árbol antidirigido, cuyos vértices inducen arborescencias tales que $\Delta(A[\mathcal{Q}]) \leq \Delta \cdot \left(\frac{\Delta^q - 1}{\Delta - 1}\right)$, esto último sale de notar que $\Delta(A) \leq \Delta$ y que el tamaño máximo de una sub-arborescencia de A es $\frac{\Delta^q - 1}{\Delta - 1}$.

Consideraremos también la asignación de $A[\mathcal{Q}]$ heredada del embedding de $A[\mathcal{P}]$, esto es $t : A[\mathcal{Q}] \rightarrow \mathcal{R}$, donde $t(a) = \varphi(P)$ para todo $a \subseteq P$ y $P \in \mathcal{P}$. Para cada $j \in \{1, \dots, |\mathcal{P}|\}$, y cada cluster $V_{i_j} := \varphi(P_j)$ en $\varphi(A[\mathcal{P}])$, consideremos un median order $\sigma_j = (w_s^j)_{s=1}^m$ de el torneo inducido $T[V_{i_j}]$. Definamos además para cada $j \in \{1, \dots, |\mathcal{P}|\}$ el intervalo $V_{i_j}^0 = \left[w_{\lfloor \frac{qm}{2q} \rfloor + 1}^j, w_{\lfloor \frac{(q+1)m}{2q} \rfloor}^j \right]$, de tamaño $\lceil \frac{m}{2q} \rceil$ en el orden σ_j .

Segundo paso: Embedding. Fijemos una raíz a_1 de $A[\mathcal{Q}]$ y un orden ancestral $(a_i)_{i=1}^{|\mathcal{Q}|}$ de $A[\mathcal{Q}]$, donde a_i son las arborescencias inducidas por cada elemento de \mathcal{Q} . Construiremos un embedding f secuencialmente, mapeando cada arborescencia $a_i \in V(A[\mathcal{Q}])$ en $t(a_i)$, siguiendo el orden ancestral de $A[\mathcal{Q}]$.

Primero, definiremos el conjunto Ω_i de los vértices no típicos hacia los intervalos centrales

de cada cluster $t(b)^0$, donde b es una arborescencia vecina a a_i en $A[\mathcal{Q}]$.

$$\Omega_i := \{v \in t(a_i) : \exists b \in N_{A[\mathcal{Q}]}(a_i) \text{ tal que } v \text{ no es típico hacia } t(b)^0\}.$$

Notemos que, por el punto 2. de la Definición 3.15 y por la Proposición 2.13, tenemos que para cada $i \in \{1, \dots, |\mathcal{Q}|\}$ el conjunto Ω_i satisface $|\Omega_i| \leq D\epsilon m$, y luego

$$|t(a_i)^0| - |\Omega_i| \geq \frac{m}{2q} - D\epsilon m = \left(\frac{1 - 2D\epsilon q}{2q} \right) m.$$

Fijemos un vértice $w_1 \in t(a_1)^0 \setminus \Omega_1$, como $D\epsilon m \geq \frac{3}{16q}m$ podemos usar el Lema 3.23 para constantes $\delta = \frac{1}{4}$ y Δ, q , para el conjunto de vértices prohibidos Ω_1 , en el torneo $T[t(a_1)]$ con su respectivo median order, y para la arborescencia a_1 , con raíz r_{a_1} y obteniendo con probabilidad al menos $1 - Ln^{-2}$, para $L > 0$ una constante independiente de n , un embedding $f_1 : a_1 \rightarrow T[t(a_1)]_p$ con $f_1(a_1) \subseteq t(a_1) \setminus \Omega_1$ y que satisface $f_1(r_{a_1}) = w_1$.

En cada paso $1 \leq i \leq |\mathcal{Q}|$, construiremos un embedding parcial $f_i : \cup_{j=1}^i a_j \rightarrow T_p$ y una función auxiliar $\chi_i : S_i \rightarrow T_p$ donde $S_i \subseteq V(A)$ y $S_1 = \phi$, y $\chi_1 : S_1 \rightarrow T_p$ es la función vacía, que satisfacen lo siguiente:

- (E₁) Para cada $i \geq 1$, se tiene que $f_i(a_i) \subseteq t(a_i) \setminus \Omega_i$,
- (E₂) Para cada $i \geq 2$, f_i extiende a f_{i-1} , $S_{i-1} \subseteq S_i$ y χ_i extiende a χ_{i-1} ,
- (E₃) Para cada $i \geq 2$ y para todo $v \in \text{Dom}(\chi_{i-1}) \cap \cup_{j=1}^i V(a_j)$, tenemos que $f_i(v) = \chi_i(v)$,
- (E₄) Para cada $v \in \text{Dom}(\chi_i)$, con j tal que $v \in V(a_j)$ entonces $\chi_i(v) \in t(a_j)^0 \setminus \Omega_j$.

Notemos que f_1 cumple (E₁), además (E₄) se cumple trivialmente ya que $\text{Dom}(\chi_i) = S_1 = \phi$. Supongamos que hemos construido f_i, S_i y χ_i , para cada un índice i , y consideremos la arborescencia a_{i+1} . Tenemos dos casos, $s_{i+1} \in S_i$ ó $s_{i+1} \notin S_{i+1}$, supongamos sin pérdida de generalidad que a_{i+1} es una out-arborescencia, el caso con in-arborescencias es análogo, intercambiando las direcciones de las vecindades reveladas. Sea ahora $\pi(a_{i+1}) \in V(A[\mathcal{Q}])$ el padre de a_{i+1} en $A[\mathcal{Q}]$ con respecto a la raíz a_1 , sean $s_{i+1} \in V(a_{i+1})$ y $p_{i+1} \in V(\pi(a_{i+1}))$ los vértices que inducen esta arista entre a_{i+1} y $\pi(a_{i+1})$.

Primer caso: $s_{i+1} \in S_i$. Entonces definiremos $S_{i+1} = S_i$ y $\chi_{i+1} = \chi_i$. Para extender f_i a f_{i+1} haremos lo siguiente, por (E₄), tenemos que como $s_{i+1} \in V(a_{i+1}) \cap S_i$, entonces $\chi_i(s_{i+1}) \in t(a_{i+1})^0 \setminus \Omega_{i+1}$. Aplicaremos el Lema 3.23 para constantes $\delta_0 = \frac{1}{4}$, Δ, q , el torneo $T[t(a_{i+1})]$, la arborescencia a_i y vértices $s_{i+1} \in V(a_{i+1})$ y $\chi_i(s_{i+1}) \in t(a_{i+1})^0$ y el conjunto de vértices prohibidos $(\Omega_{i+1} \cup \text{Im}(f_i) \cup \text{Im}(\chi_i))$, para así extender f_i a f_{i+1} con probabilidad al menos $1 - Ln^{-2}$ para alguna constante $L > 0$ independiente de i y n , de manera que f_{i+1}, S_1 y χ_1 satisfacen (E₁), (E₂) y (E₃) y (E₄).

Podemos aplicar el Lema 3.23 ya que como $M \geq k$ y $\log n \geq \log m$, tenemos

$$p \geq 96M\Delta q \cdot \frac{\log n}{n} \geq 96\Delta q \cdot \frac{\log m}{m}$$

y además, como hay a lo más $2\gamma|A|$ vértices asignados a cada cluster, tenemos que el conjunto de vértices prohibidos $\Omega_{i+1} \cup \text{Im}(f_i) \cup \text{Im}(\chi_i)$ cumple

$$\begin{aligned}
|(\Omega_{i+1} \cup \text{Im}(\chi_i) \cup \text{Im}(f_i)) \cap t(a_{i+1})| &\leq D\varepsilon m + 2\gamma|A| \\
&\leq \frac{1}{16q} \cdot m + 2 \cdot \frac{12}{k-12D} \cdot \left(\frac{1}{36 \cdot 48q} \cdot n \right) \\
&\leq \frac{m}{16q} + \frac{48}{36 \cdot 48q} \cdot \frac{n}{k} \leq \frac{2m}{16q} \\
&\leq (1 - \delta_0) \frac{m}{4q} = \frac{3m}{16q}
\end{aligned}$$

esto último pues como $k_0 \geq 24D$, se tiene que $\frac{12}{k-12D} \leq \frac{24}{k}$ y recordando que $\varepsilon \leq \frac{1}{12^3 \cdot \Delta D q}$.

Segundo caso: $s_{i+1} \notin S_i$. Entonces revelaremos la vecindad entre $f_i(p_{i+1})$ y $t(a_{i+1})^0$ en el torneo $T_{i+1} := T[\{f_i(p_{i+1})\} \rightarrow t(a_{i+1})^0]$, como $f_i(p_{i+1})$ fue elegido típico hacia $t(a_{i+1})^0$ (por (E_1)), tenemos entonces que

$$d_{T_{i+1}}^+(f_i(p_{i+1})) \geq (\eta - \varepsilon) \frac{m}{2q}.$$

Sea $X_i \subseteq t(a_{i+1})^0$, obtenido de eliminar los conjuntos de vértices Ω_j , para cada j tal que $N_A(p_{i+1}) \cap V(a_j) \neq \phi$ y los vértices en la imagen de f_i y χ_i , notamos que hay a lo más Δ tales out-arborescencias vecinas, y cada Ω_j es de tamaño a lo más $D\varepsilon m$, obteniendo

$$\begin{aligned}
d_{T_{i+1}-X_i}^+(f_i(p_{i+1})) &\geq \left(\frac{1}{6} - \varepsilon \right) \frac{m}{2q} - \Delta D\varepsilon m - 2\gamma|A| \\
&\geq \left(\frac{1}{24q} - \Delta D\varepsilon - \frac{1}{36q} \right) \cdot m \\
&\geq \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{36q} - \frac{49}{48} \cdot \frac{1}{36q} \right) \cdot m \\
&\geq \frac{23}{48} \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{m}{2q}.
\end{aligned}$$

Podemos entonces aplicar el Lema 3.3 para constantes $\delta = \frac{23}{12^3 q}$ y Δ , para el vértice $f_i(p_{i+1})$ y el torneo $T_i - X_i$, como tenemos que

$$p \geq \frac{3\Delta M}{12^3 q} \cdot \frac{\log n}{n} \geq \frac{3\Delta}{12^3 q} \frac{\log m}{m}$$

podemos encontrar con probabilidad al menos $1 - L'n^{-2}$ una out-estrella W^+ en T_p centrada en $f_i(p_{i+1})$ cuyas hojas caen en $V(T_i) \setminus X_i$. Agregaremos todos los vértices aún no mapeados de la vecindad $N_A(p_i)$ que estaban asignados al cluster a $t(a_{i+1})$, extendiendo χ_i a χ_{i+1} . Definiremos

$$S_{i+1} := S_i \cup \{v \in N_A(p_{i+1}) : \exists i+2 \leq j \leq |\mathcal{Q}| \text{ tal que } v \in V(a_j) \text{ y } t(a_j) = t(a_{i+1})\},$$

luego, asignaremos para cada vértice $v \in S_{i+1} \setminus S_i$, una hoja $\chi_{i+1}(v) \in W^+$ como la imagen de v a través de χ_{i+1} . Por la elección del conjunto X_i , sabemos que para cada $v \in S_{i+1}$, se tiene

que $\chi_{i+1}(v) \in t(a_j)^0 \setminus \Omega_j$, donde $v \in V(a_j)$. Para los vértices de S_i definiremos $\chi_{i+1} = \chi_i$, de esta manera χ_{i+1} extiende a χ_i .

Ahora procedemos de manera análoga al primer caso, podemos aplicar el Lema 3.23 para el vértice $\chi_{i+1}(s_{i+1})$ mapear la arborescencia a_{i+1} en $t(a_{i+1}) \setminus \Omega_{i+1}$ extendiendo f_i a f_{i+1} de manera que que f_{i+1}, S_{i+1} y χ_{i+1} satisfacen $(E_1), (E_2), (E_3)$ y (E_4) .

Con lo anterior concluye el embedding, habiendo definido f_i para todo $i \in \{1, \dots, |\mathcal{Q}|\}$ de manera que se cumplen $(E_1), (E_2), (E_3)$ y (E_4) .

Tercer Paso: Probabilidad de fallar. Notemos que para cada arborescencia en el órden ancestral de $A[\mathcal{Q}]$, extendemos el embedding f_i a f_{i+1} con probabilidad al menos $1 - (L + L')n^{-2}$, donde L y L' son las constantes obtenidas en el primer y segundo caso respectivamente, y donde todos estos eventos son independientes. Sea \mathcal{E}_1 el evento que codifica el fallar al construir f_1 y sea \mathcal{E}_{i+1} el evento que codifica el fallar al extender f_i a f_{i+1} para $i \in \{1, \dots, |\mathcal{Q}|\}$. Podemos entonces, mediante una cota de unión calcular

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\text{Fallar al construir el embedding } f] &\leq \mathbb{P}[\mathcal{E}_1] + \sum_{i=2}^{|\mathcal{Q}|} \mathbb{P}[\mathcal{E}_i] \\ &\leq Ln^{-2} + |\mathcal{Q}|(L + L')n^{-2} \\ &\leq (L + L')n^{-1}, \end{aligned}$$

con esto, se concluye que podemos construir el embedding $f : A \rightarrow T_p$ con probabilidad al menos $1 - (L + L')n^{-1}$.

Capítulo 4

Conclusión y preguntas abiertas

Los teoremas principales dan evidencia de que existen $C > 0$ y $\lambda > 0$, tales que si A es un árbol en λn vértices con altura y grado máximo acotados, que es contraíble en el sentido de la Conjetura 3.16, se tiene que asintóticamente casi seguramente $A \subseteq T_p$ (independiente de la elección del torneo base T).

La estrategia común a lo largo de las demostraciones consiste en la aplicación de la estructura de median order, que es innata a los torneos, para así poder encontrar vecindades grandes que muestrear y facilitar el proceso de embedding. Lo interesante, es que esto se hace de manera independiente de las orientaciones globales del torneo a estudiar, este mismo procedimiento parece útil y hasta necesario para el problema de embedding de estructuras en subgrafos aleatorios de torneos arbitrarios.

Estos resultados tratan con una clase de subgrafos acotada (árboles y caminos con condiciones adicionales), y en un régimen de probabilidad específico. Posibles desarrollos en esta línea serían tanto la extensión de estas clases de subgrafos (por ejemplo eliminando la necesidad de altura y grado máximo acotados, o estudiando otras clases de grafos, como ciclos), tanto como el relajar la necesidad del régimen de probabilidad super-logarítmico.

- ¿Qué puede decirse acerca de los teoremas principales en el régimen de probabilidad $p(n) = C \frac{f(n)}{n}$ donde $f(n)$ es una función sub-logarítmica (por ejemplo constante)?
- ¿Pueden relajarse las condiciones de grado máximo y altura en los Teoremas 1.10 y 1.12?
- ¿Cómo encontrar ciclos de tamaño lineal? ¿Que restricciones a la clase de ciclos es necesaria? Notar que los torneos transitivos no contienen ciclos dirigidos.

Un trabajo futuro mas inmediato, y que permitiría verificar la Conjetura 3.17, sería el demostrar la Conjetura 3.16. Esto podría hacerse considerando el Algoritmo 3.1, que nos entrega para un árbol orientado A una partición \mathcal{Q} de $V(A)$, y definiendo una nueva partición \mathcal{A} tal que \mathcal{Q} refina a \mathcal{A} , como en la Figura 3.4.

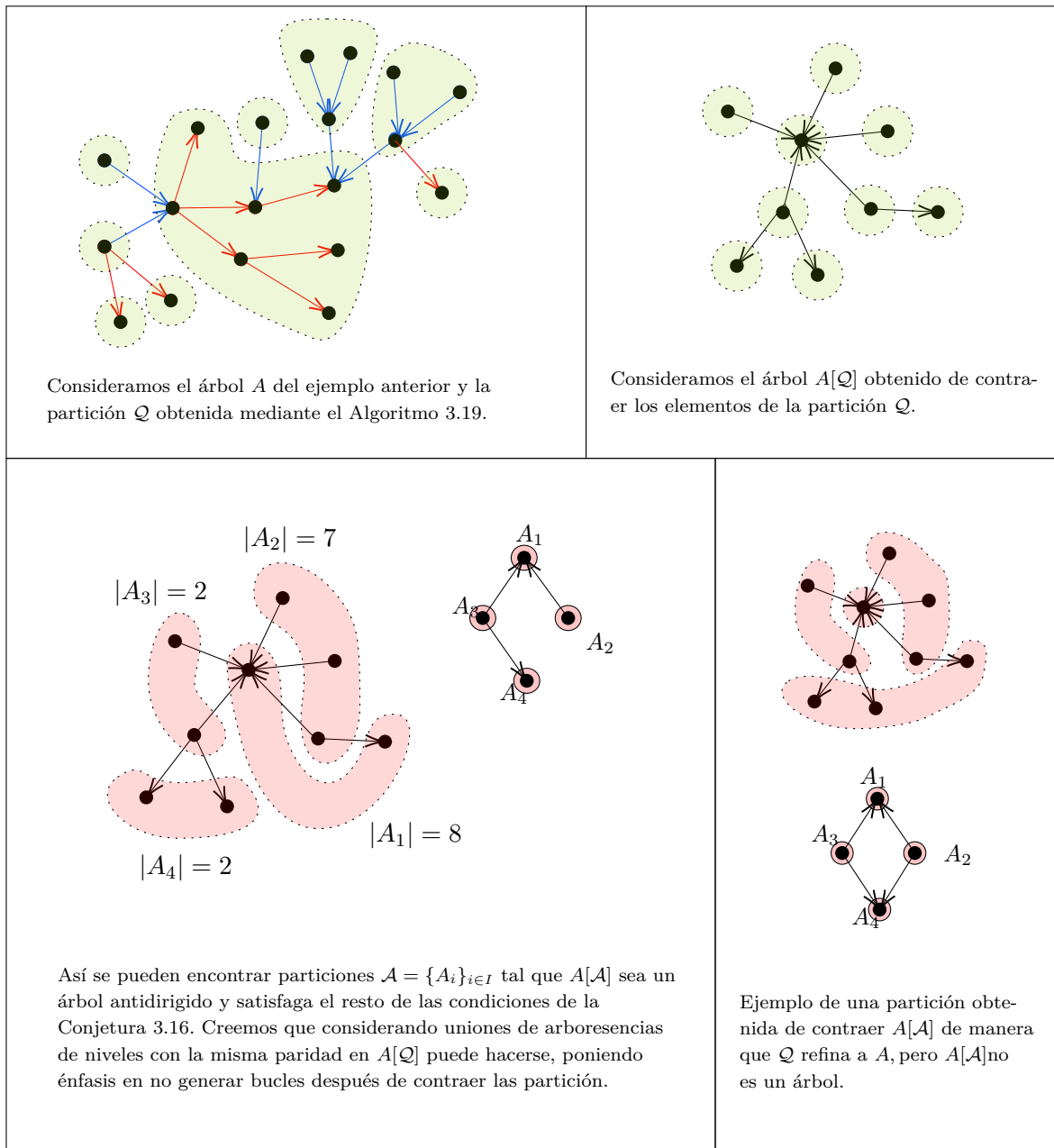


Figura 4.1: ¿Cómo podemos asegurar que al juntar arborescencias obtenidas mediante el Algoritmo 3.19 obtengamos un árbol antidirigido?

Otra pregunta importante en el área que surge de la noción clásica de umbrales para propiedades de grafos aleatorios sería: ¿Existe un umbral para la propiedad de contener árboles orientados en torneos? (con $p = 1$ esto se reduce a la conjetura de sumner). Mas concretamente, sea $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, ¿para qué valores de $p = p(\alpha, n)$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{T \text{ torneo en } n \text{ vértices.}} \min_{A \text{ árbol orientado en } \alpha n \text{ vértices}} \mathbb{P} [A \subseteq T_{p(n)+\omega(1)}] = 1,$$

y que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{T \text{ torneo en } n \text{ vértices.}} \min_{A \text{ árbol orientado en } \alpha n \text{ vértices}} \mathbb{P} [A \subseteq T_{p(n)-\omega(1)}] = 0?$$

Bibliografía

- [1] Alon, N. y Shapira, A., “Testing subgraphs in directed graphs”, *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 69, no. 3, pp. 354–382, 2004, doi:<https://doi.org/10.1016/j.jcss.2004.04.008>. Special Issue on STOC 2003.
- [2] Black, D., “On the rationale of group decision-making”, *Journal of Political Economy*, vol. 56, no. 1, pp. 23–34, 1948, <http://www.jstor.org/stable/1825026>.
- [3] Bollobás, B., “Almost all regular graphs are hamiltonian”, *European Journal of Combinatorics*, vol. 4, no. 2, pp. 97–106, 1983, doi:[https://doi.org/10.1016/S0195-6698\(83\)80039-0](https://doi.org/10.1016/S0195-6698(83)80039-0).
- [4] Botler, F., Cancino, A., Sanhueza-Matamala, N., y Pavez-Signé, M., “Paths in random subgraphs of tournaments”, In preparation, 2022.
- [5] Böttcher, J., *Large-scale structures in random graphs*, p. 87–140. London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 2017, doi:<https://doi.org/10.1017/9781108332699.003>.
- [6] Burr, S. A., “Antidirected subtrees of directed graphs”, *Canadian Mathematical Bulletin*, vol. 25, no. 1, p. 119–120, 1982, doi:<https://doi.org/10.4153/CMB-1982-017-4>.
- [7] Diestel, R., *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2005, <http://www.amazon.ca/exec/obidos/redirect?tag=citeulike04-20&path=ASIN/3540261826>.
- [8] Erdős, P. y Rényi, A., “On Random Graphs I”, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, vol. 6, p. 290, 1959.
- [9] Erdős, P. y Rényi, A., “On the strength of connectedness of a random graph”, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, vol. 12, pp. 261–267, 1964, doi:<https://doi.org/10.1007/BF02066689>.
- [10] Fox, J. y Lovász, L. M., “A tight lower bound for szemerédi’s regularity lemma”, *Combinatorica*, vol. 37, pp. 911–951, 2017, doi:[10.1007/s00493-016-3274-4](https://doi.org/10.1007/s00493-016-3274-4).
- [11] Gilbert, E. N., “Random graphs”, *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 30, no. 4, pp. 1141 – 1144, 1959, doi:<https://doi.org/10.1214/aoms/1177706098>.
- [12] Gyárfás, A., Rousseau, C. C., y Schelp, R. H., “An extremal problem for paths in bipartite graphs”, *Journal of Graph Theory*, vol. 8, no. 1, pp. 83–95, 1984, doi:<https://doi.org/10.1002/jgt.3190080109>.
- [13] Havet, F. y Thomassé, S., “Median orders of tournaments: A tool for the second neighborhood problem and sumner’s conjecture”, *Journal of Graph Theory*, vol. 35, no. 4, pp. 244–256, 2000, doi:[https://doi.org/10.1002/1097-0118\(200012\)35:4<244::AID-JGT2>3.0.CO;2-H](https://doi.org/10.1002/1097-0118(200012)35:4<244::AID-JGT2>3.0.CO;2-H).

- [14] Janson, S., Łuczak, T., y Rucinski, A., Random graphs. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley-Interscience, New York, 2000, doi:<https://doi.org/10.1002/9781118032718>.
- [15] Komlós, J. y Szemerédi, E., “Limit distribution for the existence of hamiltonian cycles in a random graph”, Discrete Mathematics, vol. 43, no. 1, pp. 55–63, 1983, doi:[https://doi.org/10.1016/0012-365X\(83\)90021-3](https://doi.org/10.1016/0012-365X(83)90021-3).
- [16] Komlós, J., Shokoufandeh, A., Simonovits, M., y Szemerédi, E., “The regularity lemma and its applications in graph theory”, vol. 2292, pp. 84–112, 2000, doi:https://doi.org/10.1007/3-540-45878-6_3.
- [17] Korsunov, A. D., “Solution of a problem of Erdős and Rényi on Hamiltonian cycles in nonoriented graphs”, Sov. Math., Dokl., vol. 17, pp. 760–764, 1976, doi:[https://doi.org/10.1016/S0304-0208\(08\)73618-1](https://doi.org/10.1016/S0304-0208(08)73618-1).
- [18] Krivelevich, M., “Embedding spanning trees in random graphs”, SIAM Journal on Discrete Mathematics, vol. 24, no. 4, pp. 1495–1500, 2010, doi:<https://doi.org/10.48550/arXiv.1007.2326>.
- [19] Krivelevich, M., Lee, C., y Sudakov, B., “Long paths and cycles in random subgraphs of graphs with large minimum degree”, Random Structures & Algorithms, vol. 46, no. 2, pp. 320–345, 2015, doi:<https://doi.org/10.1002/rsa.20508>.
- [20] Kühn, D., Mycroft, R., y Osthus, D., “A proof of sumner’s universal tournament conjecture for large tournaments”, Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 102, p. 731–766, 2010, doi:<https://doi.org/10.1112/plms/pdq035>.
- [21] Kühn, D., Mycroft, R., y Osthus, D., “An approximate version of sumners universal tournament conjecture”, Journal of Combinatorial Theory, Series B, vol. 101, p. 415–447, 2011, doi:[10.1016/j.jctb.2010.12.006](https://doi.org/10.1016/j.jctb.2010.12.006).
- [22] Kühn, D. y Osthus, D., Embedding large subgraphs into dense graphs, p. 137–168. London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 2009, doi:<https://doi.org/10.1017/cbo9781107325975.007>.
- [23] Montgomery, R., “Spanning trees in random graphs”, Advances in Mathematics, vol. 356, p. 106793, 2019, doi:<https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.106793>.
- [24] Mycroft, R., The regularity method in directed graphs and hypergraphs. PhD thesis, University of Birmingham, 2010.
- [25] Pósa, L., “Hamiltonian circuits in random graphs”, Discrete Mathematics, vol. 14, no. 4, pp. 359–364, 1976, doi:[https://doi.org/10.1016/0012-365X\(76\)90068-6](https://doi.org/10.1016/0012-365X(76)90068-6).
- [26] Reid, K. y Wormald, N., “Embedding oriented n-trees in tournaments”, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, vol. 18, pp. 377–387, 1984.
- [27] Sahili, A., “Trees in tournaments”, Journal of Combinatorial Theory, Series B, vol. 92, pp. 183–187, 2004, doi:<https://doi.org/10.1016/j.jctb.2004.04.002>.
- [28] Rödl, V. y Schacht, M., Regularity Lemmas for Graphs, vol. 20, pp. 287–325. 1970, doi:https://doi.org/10.1007/978-3-642-13580-4_11.
- [29] Szemerédi, E., “Regular partitions of graphs.”, rep. tec., Stanford, CA, USA, 1975.