

UCH-FC
May-F
B981

EFFECTOS DE TEMPERATURA EN LA INESTABILIDAD
DE DOS HACES DE IONES SOBRE UN FONDO DE
PROTONES Y ELECTRONES NEUTRALIZANTE

Tesis

Entregada a la

Universidad de Chile

en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magister en Ciencias Físicas.

Facultad de Ciencias
Básicas y Farmacéuticas

por

Walter Enrique Bussenius Cortada

Abril - 1984

Patrocinante : Profesor Luis Gomberoff

Física de Plasmas
Haces Iónicas
Ondas Electroestáticas

Facultad de Ciencias
Básicas y Farmacéuticas
Universidad de Chile

INFORME DE APROBACION
TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Comisión de Postgrado de la Facultad de Ciencias Básicas y Farmacéuticas que la tesis de Magister presentada por el candidato

Walter Enrique Bussenius Cortada

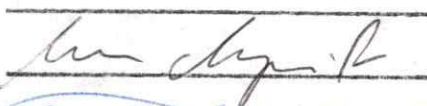
ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Físicas.

Patrocinante de Tesis


Dr. Luis Gomberoff J.

Comisión Informante de Tesis

Dr. Hernán Chuaqui



Srta. Mónica Hernández M.



Sr. Jaime Roessler B.



Agradezco en forma muy sincera las oportunas enseñanzas y observaciones al Profesor patrocinante de esta tesis: Doctor Luis Gomberoff.

Deseo manifestar mi agradecimiento a la Facultad de Ciencias Básicas y Farmacéuticas de la Universidad de Chile, por su permanente disposición a brindarme facilidades para obtener este grado.

Aprovecho la ocasión para agradecer la cariñosa ayuda de mis padres, Horst e Isabel, en pos de mi formación profesional.

El mayor de los agradecimientos a Ana María por su constante apoyo y comprensión, así como también por las sugerencias y correcciones en la redacción de este trabajo.

No puedo olvidar en esta oportunidad a mis amigos: Carlos Romo, Claudio Labbé y los hermanos Milton y Rene Elgueta, por su espíritu de compañerismo y positiva actitud al estudio.

INDICE

Resumen.	1
Introducción.	2
I Ecuación de dispersión.	6
II Inestabilidad de dos haces fríos.	11
III Efectos de temperatura en la inestabilidad de dos haces.	17
IV Estudio complementario de estabilidad.	27
V Análisis y conclusiones.	31
Figuras.	34
Gráficos.	36
Apéndice A.	47
Apéndice B.	50
Bibliografía.	53

RESUMEN

Observaciones recientes realizadas por ISEE y Hawkeye han mostrado que inestabilidades electrostáticas no siempre están asociadas con efectos de cono de pérdida. Por lo tanto debe existir otro mecanismo capaz de generar dicha inestabilidad. Una posibilidad es una distribución de partículas como la del tipo cono de pérdida, pero con un máximo en torno a una energía distinta de cero en la dirección paralela al campo magnético externo. Se demuestra que efectivamente tales funciones desestabilizan el sistema.

INTRODUCCION

La Tierra se encuentra rodeada por una capa gaseosa que llamamos atmósfera. En las regiones inferiores de ésta (menos de 80 Km), las fuerzas relevantes son la gravitatoria y la presión debida a la radiación visible del Sol. Luego viene una zona, llamada ionósfera, formada por una mezcla de gases semi ionizados sometidos a la acción del campo magnético terrestre y al viento solar. Por último hay una zona más elevada, que se extiende desde unos 400 Km hasta el límite del campo magnético terrestre (ver fig. 1); aquella región se llama magnetósfera y está compuesta de partículas cargadas cuyo origen es el viento solar y la ionósfera. Las características de densidad (n) y temperatura (T) en esa zona ($n \sim 10^3 \text{ cm}^{-3}$, $k T_e \sim 1 \text{ KeV}$, $k T_i \sim 10 \text{ KeV}$;

los índices i y e se refieren a iones y electrones respectivamente), son tales que se cumple la relación $(k T e^{-2})^3 \gg n$ (donde e representa la carga elemental), debido a lo cual aquella materia se encuentra en estado de plasma.

En la magnetósfera, el campo magnético terrestre aumenta su intensidad en las cercanías de los polos, produciéndose un efecto de espejo magnético, de este modo el plasma, de que se compone esta zona, está atrapado en dicho campo magnético.

Un plasma es un medio rico en procesos

ondulatorios. Las ondas que se generan en un plasma se pueden clasificar en diversos tipos según las propiedades que poseen. En las ondas electromagnéticas el campo eléctrico es perpendicular al vector de onda \vec{k} , si el campo eléctrico es paralelo al vector de onda se habla de ondas electrostáticas y en cualquier otro caso, de ondas mixtas.

En nuestro caso los campos eléctrico y magnético se pueden escribir de la forma $\vec{E} = \vec{E}^{(1)}$ y $\vec{B} = \vec{B}^{(0)} + \vec{B}^{(1)}$ donde $\vec{B}^{(0)}$ es el campo magnético terrestre y $\vec{E}^{(1)}$ con $\vec{B}^{(1)}$ corresponden a las perturbaciones de primer orden en los campos. En base a estas definiciones, hablamos de componentes paralela y perpendicular del vector de onda \vec{k} relativas a la dirección del campo magnético $\vec{B}^{(0)}$; longitudinal y transversal se refieren a las direcciones de \vec{k} relativas a las oscilaciones del campo eléctrico $\vec{E}^{(1)}$.

En la magnetósfera han sido observadas ondas electrostáticas con propagación paralela asociadas a iones (ver ref. 1). En este trabajo se pretende encontrar el mecanismo que generará la amplificación de aquellas. Para entender dicho mecanismo es preciso tener presente que, por efecto del espejo magnético, las partículas que se encuentran confinadas en la magnetósfera se desplazan en ambos sentidos formando haces.

Una de las fuentes de energía libre capaces de generar ondas es la anisotropía térmica, pero este no es el mecanismo responsable de las ondas electrostáticas (ver ref. 2). Otra fuente de energía es la interacción de dos haces. Si éstos son fríos las ondas son inestables, sin embargo esto no corresponde a la

situación real; puesto que en el plasma que existe en la magnetósfera los haces no son fríos. Por esta razón, para entender el mecanismo que genera dichas ondas estudiaremos el comportamiento de éstas considerando efectos térmicos. La distribución de velocidades más razonable es suponer una maxwelliana desplazada para los haces, no obstante los efectos térmicos así introducidos tienden a estabilizar el sistema (ver ref. 2). Por otro lado, en la interacción de dos haces, cuando la función es del tipo cono de pérdida, se generan ondas inestables en la dirección perpendicular; de manera que es plausible pensar que la distribución no sea una maxwelliana desplazada sino una de estructura similar a la del tipo cono de pérdida, pero reemplazando la componente perpendicular de la velocidad por la componente paralela. Esto es precisamente lo que se pretende mostrar.

Para aclarar lo anterior consideremos la función que describe una onda plana, a saber:

$$\Psi_{(\vec{x}, t)} = A_{(\vec{x})} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \varphi)} \quad (\text{I.1})$$

en que $A_{(\vec{x})}$ es la amplitud, \vec{k} el número de onda, φ un ángulo de fase y ω la frecuencia. Sin embargo, la ecuación de una onda acepta soluciones en que ω es un número complejo. Para entender el significado de esto podemos separar ω en sus partes real (ω_r) e imaginaria (ω_i) y escribir (I.1) de la forma:

$$\Psi_{(\vec{x}, t)} = A_{(\vec{x})} e^{\omega_i t} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_r t + \varphi)} \quad (\text{I.2})$$

Aquí ω_r representa la frecuencia y la parte oscilante de Ψ queda ponderada por un término real que depende exponencialmente del tiempo, en el que ω_i se interpreta como un factor de amplificación de las ondas. Si $\omega_i < 0$ la onda se amortigua, por el contrario, si $\omega_i > 0$ la amplitud de la onda crece con el tiempo.

El presente trabajo se dividió en cinco partes. En la primera se estudia la ecuación de dispersión para ondas electrostáticas en un plasma infinito y homogéneo en presencia de un campo magnético externo.

En la segunda se hace un estudio analítico para encontrar la relación entre la razón de crecimiento y la frecuencia de las ondas producidas en un plasma formado por dos haces de iones fríos, en un fondo de protones y electrones, también frío.

En el capítulo tres se analiza los efectos de temperatura, es decir, se considera haces de iones calientes sobre un fondo de electrones calientes y protones fríos. Para los haces de iones calientes se usa una función de distribución como la antes citada, procediéndose luego a hacer un análisis similar al del capítulo anterior.

En la cuarta parte se hace un estudio similar al del capítulo tres, pero en otro rango de frecuencias.

En la última parte se resumen las conclusiones. Se ha introducido dos apéndices, uno con los cálculos de las integrales que aparecen al reemplazar la función de distribución en la ecuación de dispersión y el otro con un análisis comparativo entre la función de distribución usada para los haces y una maxwelliana desplazada.

CAPITULO I

ECUACION DE DISPERSION

La ecuación cinética apropiada para la descripción de un plasma, no colisional, es la ecuación de Vlasov:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \vec{G} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (1.1)$$

donde $f = f(x, v, t)$ es la función de distribución de una de las especies iónicas que constituye el plasma y \vec{G} corresponde a la fuerza media que actúa sobre un grupo de partículas; puesto que se trata de partículas cargadas, la fuerza es electromagnética, es decir:

$$\vec{G} = e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right), \quad (1.2)$$

acá e es la carga de la especie iónica en cuestión.

Además los campos \vec{E} y \vec{B} deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_i e_i n_i \int f_i \vec{v} d^3p \quad (1.4)$$

en que f esta normalizada de modo que $n = n_0 \int f d^3p$

Para resolver este sistema de ecuaciones puede usarse el método de perturbaciones, es decir suponer las funciones de la forma

$$F = F^{(0)} + F^{(1)} \quad (1.5)$$

en que el superíndice cero indica la función en estado de equilibrio y el otro término corresponde a una pequeña desviación de la situación de equilibrio.

De este modo linealizando el sistema de ecuaciones (1.1), (1.3) y (1.4), éste puede resolverse usando una transformada de Fourier-Laplace. Con esto se llega a una expresión de la forma (ver ref. 3):

$$(\omega^2 + c^2 k^2) \vec{E} - c^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}) + 4\pi (-i) \vec{\sigma} \cdot \vec{E} = \vec{I} \quad (1.6)$$

donde \vec{I} reúne los valores iniciales de las transformadas de Fourier de $\vec{E}^{(i)}$, $\vec{B}^{(i)}$ y $f^{(i)}$; el tensor $\vec{\sigma}$ representa la conductividad que se define por:

$$\vec{j} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E} \quad (1.7)$$

La relación (1.6) puede escribirse de la forma

$$\vec{R} \cdot \vec{E} = \vec{I} \quad (1.8)$$

en que R se representa como una matriz de 3 x 3, es decir:

$$\begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Los coeficientes de la matriz aparecen en el libro de Montgomery & Tidman (ver ref. 3), a saber:

$$R_{xx} = -\omega^2 + c^2 k_x^2 + 2\pi i \omega \sum_{\mathbf{p}} \omega_p^2 \sum_{\mathbf{n}} \int_0^\infty dp_{\parallel} \int_0^\infty p_{\perp}^2 dp_{\perp} \frac{\Omega^2 n^2 J_n^2 \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{k_{\perp}^2 v_{\perp}^2 i(-\omega + k_{\parallel} v_{\parallel} + n\Omega)}$$

$$R_{xy} = -R_{yx} = 2\pi i \omega \sum_{\mathbf{p}} \omega_p^2 \sum_{\mathbf{n}} \int_0^\infty dp_{\parallel} \int_0^\infty p_{\perp}^2 dp_{\perp} \frac{n\Omega J_n J_n' \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{k_{\perp} v_{\perp} i(-\omega + k_{\parallel} v_{\parallel} + n\Omega)}$$

$$R_{xz} = -c^2 k_x k_z + 2\pi i \omega \sum_{\mathbf{p}} \omega_p^2 \sum_{\mathbf{n}} \int_0^\infty dp_{\parallel} \int_0^\infty p_{\perp}^2 dp_{\perp} \frac{n\Omega J_n^2 \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{k_{\perp} v_{\perp} i(-\omega + k_{\parallel} v_{\parallel} + n\Omega)}$$

$$R_{yy} = -\omega^2 + c^2 k_y^2 + 2\pi i \omega \sum_{\mathbf{p}} \omega_p^2 \sum_{\mathbf{n}} \int_0^\infty dp_{\parallel} \int_0^\infty p_{\perp}^2 dp_{\perp} \frac{(J_n')^2 \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{i(-\omega + k_{\parallel} v_{\parallel} + n\Omega)}$$

$$R_{yz} = 2\pi i \omega \sum_{\mathbf{p}} \omega_p^2 \sum_{\mathbf{n}} \int_0^\infty dp_{\parallel} \int_0^\infty p_{\perp}^2 dp_{\perp} \frac{J_n J_n' \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{i(-\omega + k_{\parallel} v_{\parallel} + n\Omega)}$$

$$R_{zx} = -c^2 k_x k_z + 2\pi i \omega \sum_{\mathbf{p}} \omega_p^2 \sum_{\mathbf{n}} \int_0^\infty p_{\parallel} dp_{\parallel} \int_0^\infty p_{\perp} dp_{\perp} \frac{n\Omega J_n^2 \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{k_{\perp} v_{\perp} i(-\omega + k_{\parallel} v_{\parallel} + n\Omega)}$$

$$R_{zy} = -2\pi i \omega \sum_{\mathbf{p}} \omega_p^2 \sum_{\mathbf{n}} \int_0^\infty p_{\parallel} dp_{\parallel} \int_0^\infty p_{\perp} dp_{\perp} \frac{J_n J_n' \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{i(-\omega + k_{\parallel} v_{\parallel} + n\Omega)}$$

$$R_{zz} = -\omega^2 + c^2 k_z^2 + 2\pi i \omega \sum_{\mathbf{p}} \omega_p^2 \sum_{\mathbf{n}} \int_0^\infty p_{\parallel} dp_{\parallel} \int_0^\infty p_{\perp} dp_{\perp} \frac{J_n^2 \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{i(-\omega + k_{\parallel} v_{\parallel} + n\Omega)}$$

(1.10)

Para esto se ha elegido el sistema de referencia de modo que el eje z esta en la dirección del campo magnético externo y , sin pérdida de generalidad, el vector de onda (k) en el plano (z, x). Las funciones J_n y J'_n son funciones de Bessel y sus derivadas respectivamente, f_0 la distribución de velocidades en equilibrio y las demás cantidades son:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m} \quad \Omega = \frac{e B_0}{m_e c} \quad J = J(k_{\perp} v_{\perp} / \Omega)$$

$$n_{\parallel} = \frac{k_{\parallel} c}{\omega} \quad n_{\perp} = \frac{k_{\perp} c}{\omega} \quad (1.11)$$

La relación de dispersión para ondas electrostáticas puede ser obtenida en forma general proyectando el vector \vec{I} a lo largo del campo eléctrico. Debido a que $k_y = 0$ se encuentra:

$$\sum R_{ij} E_i E_j = 0 \quad (1.12)$$

sin embargo, puesto que se trata de ondas electrostáticas el vector \vec{k} es paralelo al campo eléctrico y (1.12) se puede escribir de la forma:

$$\sum R_{ij} k_i k_j = 0 \quad (1.13)$$

Haciendo la suma se obtiene la relación

$$1 = \sum_{+,-} \frac{\omega_p^2}{k^2} \int \sum_{n=-\infty}^{\infty} d^3v \frac{J_n^2(k_{\perp} v_{\perp} / \Omega)}{k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega + n \Omega} \left(k_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} + \frac{n \Omega}{v_{\perp}} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \right) \quad (1.14)$$

donde f_0 se redefinió en la forma $m_0^3 f_0 \rightarrow f_0$, que la ecuación de dispersión para ondas electrostáticas.

CAPITULO II

INESTABILIDAD DE DOS HACES FRIOS

La situación que se estudiará primero consiste en un plasma formado por dos haces fríos y simétricos de iones, moviéndose a lo largo de un campo magnético con velocidades $+v_0$ y $-v_0$. Además se ha considerado un fondo frío compuesto por iones y electrones neutralizantes. Las funciones de distribución de velocidades que representan esta situación pueden ser expresadas por deltas de Dirac, centradas en $+v_0$, $-v_0$ y 0 para los haces en el fondo respectivo.

La ecuación (1.14) para ondas electrostáticas propagándose a lo largo del campo magnético puede escribirse de la forma:

$$1 = \sum_s \frac{\omega_p^2}{k^2} \int \frac{k \frac{\partial f_{s,}}{\partial v_{\parallel}}}{k v_{\parallel} - \omega} d^3v \quad (2.1)$$

en que el subíndice s indica la especie de partículas, ω_p es la frecuencia de plasma correspondiente, v_{\parallel} la componente de la velocidad paralela al campo magnético, k y ω el número de onda y la frecuencia de ésta respectivamente.

Si reemplazamos las distribuciones de velocidades antes mencionadas en (2.1) y usando la condición de neutralidad global de carga, luego de integrar en el espacio de velocidades se encuentra (ver apéndice A):

$$1 = \frac{\omega_{p_e}^2}{\omega^2} + \frac{(1-r)\omega_{p_i}^2}{2(\omega - v_0 k)^2} + \frac{(1-r)\omega_{p_i}^2}{2(\omega + v_0 k)^2} + \frac{r\omega_{p_i}^2}{\omega^2} \quad (2.2)$$

donde r es la densidad de iones en el fondo y los sub-índices i y e se refieren a iones y electrones respectivamente.

Con el objeto de simplificar la forma de (2.2) se puede hacer $x = \omega/\omega_{p_i}$, $y = k v_0/\omega_{p_i}$; si a esto agregamos que

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi n_s e^2}{m_s} \right)^{1/2} \quad (2.3)$$

donde e es la carga elemental, n_s y m_s la densidad de partículas y la masa de éstas para la especie s , se obtiene finalmente

$$1 = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{(1-r)}{2(y-x)^2} + \frac{(1-r)}{2(y+x)^2} \quad (2.4)$$

donde $\alpha = m_i/m_e + r$.

Puesto que $\alpha \gg 1$, un estudio de (2.4) muestra que hay soluciones para $x \sim y$ y $x \sim -y$. Sin embargo, ambas zonas son físicamente equivalentes, la diferencia reside en que en la primera se consideran las ondas que se propagan en la dirección $+v_0$, en tanto que la segunda corresponde a las ondas que se propagan en sentido opuesto y debido a que se tiene dos haces simétricos estas situaciones son análogas.

Aquí se trabajará en la primera zona ($x \sim y$), de este modo (2.4) puede escribirse de la forma

$$1 = \left(1 - \frac{\alpha}{x^2} - \frac{(1-r)}{2(y+x)^2} \right) \frac{2(y-x)^2}{(1-r)} \quad (2.5)$$

que desarrollada en serie de Taylor respecto de la variable x en torno al valor y , al desprestigiar términos de orden superior a tres, a objeto de que $\nu_{max} \neq 0$, se halla:

$$1 = \left(\frac{2y^2}{(1-r)} - \frac{2\alpha}{(1-r)} - \frac{1}{4} \right) \delta\bar{x}^2 + \left(\frac{4\alpha}{(1-r)} + \frac{1}{4} \right) \delta\bar{x}^3 \quad (2.6)$$

donde se definió $\delta\bar{x} = \delta x/y$ en que $\delta x = x - y$.

Como se mencionó antes, se considerará la frecuencia como un número complejo. Haciendo $\delta\bar{x} = \delta\bar{x}_r + i\bar{v}$ en que \bar{x}_r y \bar{v} son las partes real e imaginaria respectivamente, luego de separar en (2.6) ambos términos se obtiene:

$$\left(\frac{2y^2}{(1-r)} - \frac{2\alpha}{(1-r)} - \frac{1}{4} \right) = - \left(\frac{4\alpha}{(1-r)} + \frac{1}{4} \right) \left(\frac{3 \cdot \delta\bar{x}_r^2 - \bar{v}^2}{2 \cdot \delta\bar{x}_r} \right) \quad (2.7)$$

igualando la parte imaginaria del término de la izquierda en (2.6) a cero y su parte real a la unidad, se tiene

$$\bar{v}^4 + 2\bar{v}^2 \delta\bar{x}_r^2 + \delta\bar{x}_r^4 + \left\{ \frac{2\delta\bar{x}_r}{\left(\frac{4\alpha}{(1-r)} + \frac{1}{4} \right)} \right\} = 0 \quad (2.8)$$

que al resolver se encuentra

$$\bar{v}^2 = -\Delta\bar{x}_r^2 + \left\{ \frac{2\Delta\bar{x}_r}{\left(\frac{4\alpha}{(1-r)} + \frac{1}{4} \right)} \right\}^{1/2} \quad (2.9)$$

donde $\Delta x_r = y - x_r$, puesto que para que exista solución debe cumplirse la condición $\delta \bar{x}_r < 0$, esto significa que $y > x_r$ y así se sabe que $\Delta x_r > 0$.

Interesa ahora encontrar la máxima tasa de crecimiento de la onda respecto a la frecuencia de ésta, es decir el valor ν -máximo. Para \bar{x}_r se encuentra la expresión

$$\Delta \bar{x}_r(\nu_{\max}) = \frac{1}{2} \left(\frac{4(1-r)}{16\alpha + (1-r)} \right)^{1/3} \quad (2.10)$$

que corresponde a un máximo de ν . Reemplazando (2.10) en (2.9) se tiene

$$\bar{\nu}_{\max}^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{4(1-r)}{16\alpha + (1-r)} \right)^{2/3} \quad (2.11)$$

sustituyendo ahora (2.10) y (2.11) en (2.7), despejando luego y^2 se llega a

$$y^2 = \alpha + \frac{(1-r)}{8} \quad (2.12)$$

lo cual reemplazado en (2.11) toma la forma

$$\nu_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\left[\alpha + \frac{(1-r)}{8} \right]^{1/2}}{\left[\frac{4\alpha}{(1-r)} - \frac{1}{4} \right]^{1/3}} \quad (2.13)$$

que es precisamente la expresión buscada. En virtud de que $\alpha \gg 1$ se puede aproximar a la forma más simple

$$\nu_{\max} \cong \frac{3^{1/2}}{32^{1/3}} \alpha^{1/6} (1-r)^{1/3} \quad (2.14)$$

y el valor de Δx_r , para el cual γ es máximo, se encuentra de reemplazar (2.12) en (2.10) obteniéndose

$$\Delta x_r(\gamma_{\max}) = \left(\alpha + \frac{(1-r)}{8} \right)^{1/2} \frac{1}{2} \left(\frac{4(1-r)}{16\alpha + (1-r)} \right)^{1/3} \quad (2.15)$$

Para analizar más detenidamente la variación de γ con x , se puede escribir (2.9) de la forma

$$\bar{\gamma}^2 = \sqrt{\Delta \bar{x}_r} \left\{ -(\Delta \bar{x}_r)^{3/2} + \left[\frac{8(1-r)}{16\alpha + (1-r)} \right]^{1/2} \right\} \quad (2.16)$$

resulta claro de esto que $\bar{\gamma}^2$ tiene dos ceros, uno en $\Delta \bar{x}_r = 0$ y el otro para

$$\Delta \bar{x}_r = \left(\frac{8(1-r)}{16\alpha + (1-r)} \right)^{1/3} \quad (2.17)$$

reemplazando ahora (2.17) en (2.7) y asignando a γ el valor cero se encuentra

$$\gamma^2 = \frac{(1-r)}{2} \left\{ \left(\frac{8\alpha + (1-r)}{4(1-r)} \right) - 3 \left(\frac{16\alpha + (1-r)}{8(1-r)} \right)^{2/3} \right\} \quad (2.18)$$

que en forma análoga a como se hizo en (2.13) se puede aproximar a

$$\gamma^2 \approx \alpha - \frac{3}{2} (2\alpha)^{2/3} (1-r)^{1/3} \quad (2.19)$$

y así (2.17) toma la forma

$$\Delta x_r = \left(\alpha - 3 (2 \alpha)^{2/3} \right)^{1/2} \left(\frac{8 (1 - r)}{16 \alpha + (1 - r)} \right)^{1/3} \quad (2.20)$$

El valor de Δx_r cuando $\Delta \bar{x}_r = 0$ no es posible determinarlo, puesto que ello no significa que $\Delta x_r = 0$ ya que también es posible $\gamma = \infty$ y $\Delta x_r \neq 0$.

Para apreciar mejor la forma de γ en función de Δx_r podemos aproximar (2.15) y (2.20), encontrándose respectivamente

$$\Delta x_r(\gamma_{\text{máx}}) \cong \frac{1}{2 \sqrt[3]{4}} \alpha^{1/6} (1 - r)^{1/3} \quad (2.21)$$

$$\Delta x_r(\gamma=0) \cong \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \alpha^{1/6} (1 - r)^{1/3} \quad (2.22)$$

Finalmente podemos sintetizar estos cálculos en el gráfico 1, donde se representa esquemáticamente la parte imaginaria de la frecuencia en función de la parte real. Como se observa, para un pequeño rango del espectro de x_r , las ondas que se producen desestabilizan el sistema.

CAPITULO III

EFECTOS DE TEMPERATURA EN LA INESTABILIDAD DE DOS HACES

A continuación procederemos a analizar una situación similar a la anterior, es decir, dos haces simétricos de iones sobre un fondo de protones y electrones neutralizante, pero considerando calientes tanto los haces de iones como el fondo de electrones.

La función de distribución asociada al fondo de electrones en este caso es una maxwelliana de la forma:

$$f = \frac{1}{\pi^{3/2} b^3} e^{-\left(\frac{v}{b}\right)^2} \quad (3.1)$$

donde $b = (2 k T_e / m_e)^{1/2}$ es la velocidad térmica, T_e la temperatura de los electrones y k la constante de Boltzmann.

Para los haces de iones, como se indicó en la introducción, se supone una distribución del tipo cono de pérdida pero con v_{\parallel} en lugar de v_{\perp} , a saber:

$$f = \frac{2^1}{\pi^{3/2} \alpha_{\perp}^2 \alpha_{\parallel} (21 - 1)!!} \left(\frac{v_{\parallel}}{\alpha_{\parallel}}\right)^{21} e^{-\left(\frac{v_{\perp}^2}{\alpha_{\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\alpha_{\parallel}^2}\right)} \quad (3.2)$$

aquí α_{\parallel} y α_{\perp} corresponden a las velocidades térmicas paralela y perpendicular, que a su vez se relacionan con las temperaturas respectivas de los iones mediante:

$$T_{\parallel i} = \frac{1}{2} m_i (2l + 1) \alpha_{\parallel}^2 \quad (a)$$

(3.3)

$$T_{\perp i} = \frac{1}{2} m_i \alpha_{\perp}^2 \quad (b)$$

Al reemplazar (3.1) y (3.2) junto a la componente fría de iones en el fondo, en (2.1), se encuentra (ver apéndice A)

$$1 = \frac{\omega^2}{k^2 b^2} Z^{(l)}(\omega/kb) + \frac{\omega^2 r}{\omega^2} - \frac{\omega^2 (1-r) 2^{l+1} (-1)^{l+1}}{\omega k (2l - 1) !! \alpha_{\parallel}^{2l-1}} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{1}{\alpha_{\parallel}^2} \frac{\partial}{\partial (1/\alpha_{\parallel}^2)} \right] \frac{\partial^l}{\partial (1/\alpha_{\parallel}^2)^l} Z(\omega/k\alpha_{\parallel}) \quad (3.4)$$

donde Z es la función de Fried y Compte, definida por (ver ref. 4):

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{x - u} du \quad (3.5)$$

y el superíndice de ésta indica el orden de la derivada.

Es importante aclarar que al variar el índice l en (3.2) la función de distribución cambia su forma, de modo que al aumentar l los haces se separan más y quedan mejor definidos, es decir corresponde a disminuir la

temperatura junto con aumentar la velocidad media de las partículas. En el apéndice B se compara esta distribución con una maxwelliana desplazada.

Para analizar la expresión (3.4) es conveniente fijar el valor de l , esto corresponde a definir la forma de los haces, para así llegar a determinar si el factor de amplificación, es decir la parte imaginaria de la frecuencia, es positiva o negativa en el rango a estudiar. Con este propósito se puede empezar por fijar el valor de l en 1, haciendo esto (3.4) se reduce a:

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 b^2} Z^{(1)}(\omega/kb) + \frac{\omega_{pi}^2 r}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2 (1-r)}{\omega k \alpha_{ii}^3} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{1}{\alpha_{ii}^2} \frac{\partial}{\partial 1/\alpha_{ii}^2} \right] \frac{\partial}{\partial 1/\alpha_{ii}^2} Z(\omega/k\alpha_{ii}) \quad (3.6)$$

ahora expresando la variable de derivación en términos de $1/\alpha_{ii}$ se llega a

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 b^2} Z^{(1)}(\omega/kb) + \frac{\omega_{pi}^2 r}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2 (1-r)}{k^2 \alpha_{ii}^3} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{1/\alpha_{ii}} \frac{\partial}{\partial 1/\alpha_{ii}} Z(\omega/k\alpha_{ii}) - \frac{1}{2/\alpha_{ii}} Z(\omega/k\alpha_{ii}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial 1/\alpha_{ii}^2} Z(\omega/k\alpha_{ii}) \right] \quad (3.7)$$

haciendo ahora $x = \omega/k\alpha_{ii}$, y expresando las derivadas de la función Z para los iones, de la forma como se hizo con los electrones, de (3.7) se encuentra

$$1 = \frac{\omega_{p_i}^2}{k^2 b^2} Z^{(1)}(\omega/kb) + \frac{\omega_{p_i}^2 r}{\omega^2} - \frac{\omega_{p_i}^2 (1-r)}{k^2 \alpha_{//}^2} \left[Z^{(1)}(x) + Z^{(2)}(x) \right] \quad (3.8)$$

puesto que las derivadas de la función Z están relacionadas con ésta a través de las expresiones (ver ref. 4)

$$Z^{(1)}(x) = -2 \left[1 + x Z(x) \right] \quad (a)$$

(3.9)

$$Z^{(2)}(x) = -2 \left[(1 - 2x^2) Z(x) - 2x \right] \quad (b)$$

podemos reescribir (3.8) de la forma

$$1 = -\frac{2\omega_{p_i}^2}{k^2 b^2} \left[1 + \frac{\omega}{k b} Z(\omega/kb) \right] + \frac{\omega_{p_i}^2 r}{\omega^2} + \frac{2\omega_{p_i}^2 (1-r)}{k^2 \alpha_{//}^2} \left[2x(1-x^2) Z(x) + 1 - 2x^2 \right] \quad (3.10)$$

que al multiplicar por $\omega/\omega_{p_i}^2$ y reordenando usando (2.3) se encuentra

$$\frac{\omega}{\omega_{p_i}^2} = r - 2 \frac{m_i}{m_e} \left(\frac{\alpha_{//}}{b} \right)^2 \left[x^2 + \frac{\alpha_{//}}{b} x^3 Z(x \alpha_{//}/b) \right] + 2(1-r) \times \left[2x^3 Z(x) - 2x^5 Z(x) + x^2 - 2x^4 \right] \quad (3.11)$$

Para determinar en que rango de valores de la variable x la parte imaginaria de ω es positiva, es conveniente practicar un análisis de estabilidad marginal en la ecuación (3.11). De este modo se encuentra la relación

$$e^{[(1 - \frac{\alpha_{//}^2}{b^2}) x^2]} = \frac{\omega_{p_i}^2}{\omega_p^2} \frac{b^3}{\alpha^3} 2 (1-r) (1 - x^2) \quad (3.12)$$

de donde se concluye que $x < 1$. De manera que la función Z se desarrolla en serie para valores del argumento menores que la unidad, a saber (ver ref. 4):

$$Z(x) = \pi^{k_i} i e^{-x^2} - 2x + \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} x^3 - \dots \quad (3.13)$$

Al reemplazar (3.13) en (3.11) y teniendo presente que $m_i \gg m_e$ se puede suponer $\alpha_{//}/b < 1$. Despreciando términos de orden superior a x^{10} se logra seguir este desarrollo con suficiente precisión, obteniéndose:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{\omega_{p_i}^2} = r - 2 \frac{m_i}{m_e} \left(\frac{\alpha_{//}}{b}\right)^2 & \left[x^2 + \frac{\alpha_{//}}{b} x^3 \pi^{k_i} i e^{-\left(\frac{\alpha_{//}}{b}\right)^2 x^2} \right. \\ & \left. - 2 \left(\frac{\alpha_{//}}{b}\right)^2 x^4 + \frac{4}{3} \left(\frac{\alpha_{//}}{b}\right)^4 x^6 \right] + 2 (1-r) \left[2 x^3 \pi^{k_i} i e^{-x^2} \right. \\ & \left. - 2 x^5 \pi^{k_i} i e^{-x^2} + x^2 - 6 x^4 + \frac{20}{3} x^6 - \frac{56}{15} x^8 \right. \\ & \left. + \frac{144}{105} x^{10} \right] \quad (3.14) \end{aligned}$$

Separando ahora la variable x en sus partes; real (x_r) e imaginaria (x_i) y asumiendo que $x_r \gg x_i$,

se obtiene:

$$\omega_{p_i}^2 = r - 2 \frac{m_i}{m_e} \left(\frac{\alpha y}{b}\right)^2 x_r^2 \left[1 - 2 \left(\frac{\alpha y}{b}\right)^2 x_r^2 \right] + (1-r) x_r^2 \varepsilon_1(x_r) \quad (3.15)$$

$$\frac{\omega_i}{\omega_{p_i}} = \frac{\pi^{1/2} x_r^3 \omega_{p_i} \left[\frac{m_i}{m_e} \left(\frac{\alpha y}{b}\right)^3 e^{-\left(\frac{\alpha y}{b}\right)^2 x_r^2} - (1-r) 2(1-x^2) e^{-x_r^2} \right]}{x_r^4 \left[4 \frac{m_i}{m_e} \left(\frac{\alpha y}{b}\right)^4 - (1-r) x_r^4 h_1(x_r) - r \right]} \quad (3.16)$$

para la parte real e imaginaria respectivamente. Aquí las funciones ε_1 y h_1 son los polinomios

$$\varepsilon_1(x) = 2 \left[1 - 6 x^2 + \frac{20}{3} x^4 - \frac{56}{15} x^6 + \frac{144}{105} x^8 \right] \quad (a)$$

(3.17)

$$h_1(x) = 4 \left[3 - \frac{20}{3} x^2 + \frac{84}{15} x^4 - \frac{288}{105} x^6 \right] \quad (b)$$

La expresión (3.14) aparece bosquejada, para distintas densidades del fondo (r), en los gráficos 2, 3 y 4, a los cuales se les ha dado diferente valor en el parámetro $\alpha y/b$. Aparece también el caso $r = 1$ que corresponde a ausencia de haces.

Se aprecia también que los valores de ω_i son positivos, lo que significa que el sistema es inestable. Sólo se presenta estabilidad en el caso $r = 1$, es

decir sin haces. Al disminuir la densidad del fondo respecto a la de los haces aumenta la inestabilidad, puesto que $\omega_i > 0$ en un rango mayor de x_r . Además al comparar los tres gráficos (2, 3 y 4) se puede apreciar que el aumento de temperatura de los haces, respecto a la del fondo de electrones, disminuye la inestabilidad.

Finalmente debe destacarse que en el caso $r = 0$ la curva presenta una forma radicalmente distinta a las demás.

Con el propósito de averiguar las variaciones que se presentan en la parte imaginaria de la frecuencia al modificar ligeramente la forma de la distribución, puede repetirse el análisis anterior pero para el valor $l = 2$.

Asignando al índice l de (3.4) dicho valor se obtiene:

$$1 = \frac{\omega_{p_i}^2}{k^2 b^2} Z^{(1)}(\omega/kb) + \frac{\omega_{p_i}^2 r}{\omega^2} + \frac{8\omega_{p_i}^2 (1-r)}{3 \omega k \alpha_{ii}^5} \times \left[2 \frac{\partial^2}{\partial 1/\alpha_{ii}^2} Z(\omega/k\alpha_{ii}) + \frac{1}{\alpha_{ii}^2} \frac{\partial^3}{\partial (1/\alpha_{ii}^2)^3} Z(\omega/k\alpha_{ii}) \right] \quad (3.18)$$

y desarrollando las derivadas se encuentra

$$1 = \frac{\omega_{p_i}^2}{k^2 b^2} Z^{(1)}(\omega/kb) + \frac{\omega_{p_i}^2}{\omega^2} + \frac{8\omega_{p_i}^2 (1-r)}{3 k \omega} \frac{\omega}{8 k \alpha_{ii}^2} \times \left[- Z^{(1)}(x) + x Z^{(2)}(x) + x^2 Z^{(3)}(x) \right] \quad (3.19)$$

donde $x = \omega/k\alpha_{//}$, $Z^{(1)}$ y $Z^{(2)}$ vienen dados por (3.9) y $Z^{(3)}$ por

$$Z_{(x)}^{(3)} = 4 \left[(3 - 2x^2)x Z_{(x)} + 2 - 2x^2 \right] \quad (3.20)$$

de este modo (3.19) se reduce a

$$1 = \frac{\omega_{p_i}^2}{k^2 b^2} Z_{(\omega/kb)}^{(3)} + \frac{\omega_{p_i}^2 r}{\omega^2} + \frac{2\omega_{p_i}^2 (1-r)}{3k^2 \alpha_{//}^2} \left[4x^3 (2 - x^2) Z_{(x)} + 1 + 6x^2 - 4x^4 \right] \quad (3.21)$$

que multiplicando por ω/ω_{p_i} y expresando los argumentos de las funciones Z en términos de x se tiene

$$\frac{\omega^2}{\omega_{p_i}^2} = r - 2 \frac{m_i}{m_e} \left(\frac{\alpha_{//}}{b}\right)^2 x^2 \left[1 + \frac{\alpha_{//}}{b} x Z_{(x \alpha_{//}/b)} \right] + \frac{2}{3} (1-r) x^2 \left[4x^3 (2 - x^2) Z_{(x)} + 1 + 6x^2 - 4x^4 \right] \quad (3.22)$$

Separando ahora parte real e imaginaria y expandiendo $Z_{(x)}$ de igual modo que para $l = 1$ se halla la expresión:

$$\frac{\omega_{H_i}^2}{\omega_{p_i}^2} = r - 2 \frac{m_i}{m_e} \left(\frac{\alpha_{//}}{b}\right)^2 x_F^2 \left[1 - 2 \left(\frac{\alpha_{//}}{b}\right)^2 x_F^2 \right] + (1-r) x_F^2 S_2(x_F) \quad (3.23)$$

$$\frac{\omega_i}{\omega_{p_i}} = \frac{\pi^{1/2} \frac{\omega_T}{\omega_{D_i}} x_T^3 \left[\frac{m_i}{m_e} e^{-\left(\frac{\alpha_i}{b}\right)^2 x_T^2} - (1-r) \frac{4}{3} x_T^2 (2 - x_T^2) e^{-x_T^2} \right]}{\left[4 \frac{m_i}{m_e} \left(\frac{\alpha_i}{b}\right)^4 - (1-r) h_2(x_T) \right] x_T^4 - r}$$

(3.24)

para las partes real e imaginaria respectivamente. En esta ocasión las funciones g_2 y h_2 vienen dadas por:

$$g_2(x) = \frac{2}{3} \left[1 + 6x^2 - 20x^4 + \frac{56}{3}x^6 - \frac{144}{15}x^8 \right] \quad (a)$$

(3.25)

$$h_2(x) = \frac{4}{3} \left[-3 + 20x^2 - 28x^4 + \frac{288}{15}x^6 \right] \quad (b)$$

En los gráficos 5, 6 y 7 puede observarse la forma de (3.24) para distintos valores de r y del cociente de las temperaturas de los haces de iones y del fondo de electrones.

Aquí se aprecia que al aumentar r aumenta la inestabilidad, hasta un valor crítico de r , a partir del cual ω_i se hace más pequeño hasta alcanzar un valor menor que cero para $r = 1$; es decir, aumenta el rango de frecuencias en que $\omega_i > 0$. Para $r = 1$ se presenta un comportamiento estable, como es de esperar puesto que no hay haces. Además al aumentar el cociente entre las temperaturas relativas (α_i/b) disminuye dicho rango, vale decir, el sistema se tiende a estabilizar. El caso $r = 0$ o muy cercano a cero no se presenta en el gráfico

7 por no existir solución de (3.23) bajo tales condiciones; en los otros gráficos, es decir, para valores de $\alpha_{ij}/b < 0,017$ se presenta solución y ésta acusa un extraño comportamiento en torno a cierto valor crítico ($x_T = 0,43$), ya que ω_i tiende a $+\infty$ y $-\infty$ para dicho valor de x_T .

CAPITULO IV

ESTUDIO COMPLEMENTARIO DE ESTABILIDAD

Con el propósito de intentar un nexo entre las dos situaciones antes analizadas, se considerará un caso intermedio, es decir, se usará la función de distribución (3.2), pero en otro rango de frecuencias, este es $x = \omega/k\alpha_{\eta} \gg 1$. No obstante debido a que los electrones son más livianos que los iones, la velocidad térmica de ellos es razonablemente mayor que la de estos últimos. Esto se puede expresar más claramente escribiendo $\alpha_{\eta}/b < 1$.

Lo que deseamos encontrar es si la parte imaginaria de la frecuencia es positiva o negativa, determinando la estabilidad del sistema. A fin de lograrlo se usa el desarrollo asintótico de la función Z para valores de su argumento mayores que la unidad. Con el objeto de desarrollar del mismo modo ambas funciones

Z , vale decir que la temperatura de todo el sistema sea parecida, debemos suponer $x\alpha_{\eta}/b > 1$, esto no contradice que $\alpha_{\eta}/b < 1$ debido a que $x \gg 1$. Para ser consecuentes con las suposiciones mencionadas, cada función Z debe desarrollarse hasta distinto orden, de manera que los valores de sus argumentos sean del mismo orden.

El desarrollo para valores mayores que 1 en

el argumento de la función Z es (ver ref. 4)

$$Z_{(x)} \approx \pi^{1/2} i e^{-x^2} - \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2 x^4} + \dots \right) \quad (4.1)$$

reemplazando ahora esta expresión en (3.11) y despreciando términos de orden superior al octavo en la variable x se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{\omega_p^2} = r - 2 \frac{m_i}{m_e} \left[\left(\frac{\alpha_j}{b} \right)^3 x^3 \pi^{1/2} i e^{-(\frac{\alpha_j}{b})^2 x^2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4 \left(\frac{\alpha_j}{b} \right)^2 x^2} \right. \\ \left. - \frac{15}{8 \left(\frac{\alpha_j}{b} \right)^4 x^4} - \frac{105}{16 \left(\frac{\alpha_j}{b} \right)^6 x^6} - \frac{945}{32 \left(\frac{\alpha_j}{b} \right)^8 x^8} \right] + 2(1-r) \\ \left[2 x^3 \pi^{1/2} i e^{-x^2} - 2 x^5 \pi^{1/2} i e^{-x^2} + \frac{1}{2} + \frac{9}{4 x^2} + \frac{15}{4 x^4} \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

De forma análoga a como se hizo en el capítulo anterior, podemos separar las partes real (x_r) e imaginaria (x_i) de la frecuencia, suponiendo además $x_r \gg x_i$. Haciendo esto, con un poco de álgebra se encuentra:

$$\frac{\omega_r^2}{\omega_{p_i}^2} = r + \frac{m_i}{m_e} \left[1 + \frac{3}{2 \left(\frac{\alpha_{ij}}{b}\right)^2 x_r^2} + \frac{15}{4 \left(\frac{\alpha_{ij}}{b}\right)^4 x_r^4} + \frac{105}{8 \left(\frac{\alpha_{ij}}{b}\right)^6 x_r^6} + \frac{945}{16 \left(\frac{\alpha_{ij}}{b}\right)^8 x_r^8} \right] - (1-r) \left[1 + \frac{9}{2 x_r^2} - \frac{15}{2 x_r^4} \right] \quad (4.3)$$

para la parte real, mientras en la parte imaginaria se llega a la expresión

$$\frac{\omega_i}{\omega_{p_i}} = \frac{\pi^{1/2} \frac{\omega_r}{\omega_{p_i}} x_r^3 \left[-\frac{m_i}{m_e} \left(\frac{\alpha_{ij}}{b}\right)^3 e^{-\left(\frac{\alpha_{ij}}{b}\right)^2 x_r^2} + (1-r) 2(1-x_r^2) e^{-x_r^2} \right]}{\frac{m_i}{m_e} h_3(x_r) + (1-r) \left[1 + \frac{9}{x_r^2} - \frac{30}{x_r^4} \right] + r} \quad (4.4)$$

donde

$$h_3(x) = 1 + \frac{3}{\left(\frac{\alpha_{ij}}{b}\right)^2 x_r^2} + \frac{45}{4 \left(\frac{\alpha_{ij}}{b}\right)^4 x_r^4} + \frac{426}{8 \left(\frac{\alpha_{ij}}{b}\right)^6 x_r^6} + \frac{4725}{16 \left(\frac{\alpha_{ij}}{b}\right)^8 x_r^8} \quad (4.5)$$

Resulta fácil observar que la parte imaginaria de la frecuencia es negativa para cualquier valor de x_r en el rango mencionado anteriormente. En el gráfico 8 puede apreciarse dos curvas dadas por la relación (4.4), Allí se ha variado el valor del parámetro α_{ij}/b , al aumentar éste, crece el rango de valores de x para los que existe solución distinta de cero. Es interesante

destacar que estas curvas presentan un mínimo; para valores de x_r mayores que éste tienden asintóticamente a cero y para valores menores decrece, aunque dicha función no puede dar cuenta de valores (del argumento) cercanos a la unidad. Otro aspecto sobresaliente es que no depende del valor de r , es decir, exista o no el sistema es estable.

CAPITULO V

ANALISIS Y CONCLUSIONES

Al comparar los resultados obtenidos, el primer punto que llama la atención es que (excepto para $r \leq 1$) el sistema, si bien es inestable en los dos primeros casos analizados, en el tercero es estable. Esto puede entenderse debido a que si $x > 1$ la temperatura puede ser considerada baja, por otro lado para el índice 1 se usó el valor uno, de manera que se tiene haces centrados en un valor de $\alpha_{//}$, lo suficientemente pequeño para que la distribución de éstos se parezca al caso $r = 1$, en donde es esperable la estabilidad. Además el valor del máximo de $v_{//}$ (ver gráfico 9) se corre hacia el cero haciendo que la distribución usada se parezca más a una maxwelliana desplazada, en donde precisamente se encuentra estabilidad.

Las curvas del gráfico 8 pierden validez al disminuir el valor de la variable x ; sin embargo es claro que ω_i presenta un mínimo que se corre hacia valores mayores de x al disminuir $\alpha_{//}b$, al mismo tiempo que se ensancha. Cabe destacar que con una distribución dada por una maxwelliana desplazada el sistema es inestable para bajas temperaturas y tiende a estabilizarse al aumentar la temperatura (ver ref. 2), caso opuesto al que se trata aquí.

Tanto en $l = 1$ como en $l = 2$, para valores del parámetro r no muy cercanos a cero se aprecia una tendencia a estabilizarse al aumentar $\alpha_{//b}$, puesto que disminuye la zona del espectro en que ω_i es inestable.

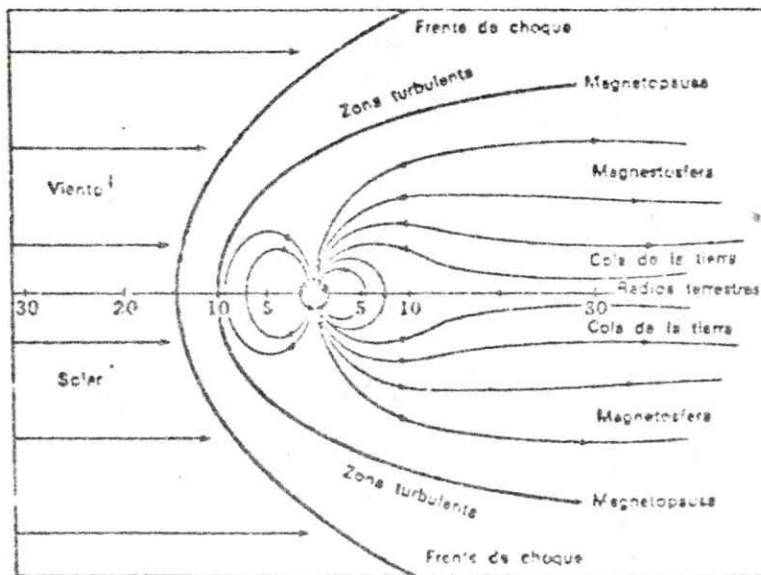
El caso $r = 0$ o muy cercano a cero tiene especial interés puesto que la curva (ω_i) presenta un comportamiento cualitativamente distinto. Para $l = 1$ no parte de cero sino de un valor definido de ω_i . Cuando $l = 2$ el comportamiento de dicha curva es esencialmente distinto al caso antes mencionado, pues aquí parte de cero, pero descendiendo, es decir el espectro sería estable en ese rango; no obstante se presenta una singularidad en que cambia de signo y para un mismo valor de x_r el sistema aparece extremadamente estable e inestable a la vez. Esto no tiene sentido físico y puede entenderse porque al deducir (3.16) se supuso $\omega_r \gg \omega_i$ y en este caso no se cumple esta condición, por lo que la curva no es válida en torno a aquél valor de x_r . Sin embargo presenta dos partes con distinto signo. Además para valores de $\alpha_{//b} > 0,0162$ no existe solución para tal valor de r . Finalmente para r cercano a cero ($r = 0,001$) se presenta la curva segmentada del gráfico 5, la cual muestra una similitud con $r = 0$, discrepando con esta para $x_r < 0,2$ donde presenta otra singularidad similar a la ya citada. Estas singularidades, como se dijo antes, no necesitan ser interpretadas ya que la función allí no cumple las condiciones impuestas, no obstante existe un fenómeno extraño que podría explicarse por algún tipo de resonancia, aunque no se llegó a dilucidar en este estudio. Otro aspecto relevante es el aumento de la inestabilidad con el índice l , tal comportamiento se presenta para cualquier valor de $\alpha_{//b}$,

por esto puede inferirse que al aumentar l , aumenta la inestabilidad del sistema. Comparando estos resultados, en base al comportamiento de la función de distribución utilizada (ver apéndice B), se puede concluir que la inestabilidad disminuye al aumentar la temperatura de los haces de iones respecto a la de los electrones.

Volviendo ahora al punto que motivó este trabajo, es decir a las ondas electrostáticas propagándose paralelamente al campo magnético, que han sido observadas en la magnetósfera, puede concluirse que describiendo los haces de iones por una función de distribución del tipo cono de pérdida, pero reemplazando la componente perpendicular de la velocidad por la componente paralela, se logra explicar este fenómeno. Este tratamiento permite además estudiar la relevancia de los distintos parámetros que intervienen en la amplificación de estas ondas.

FIGURAS

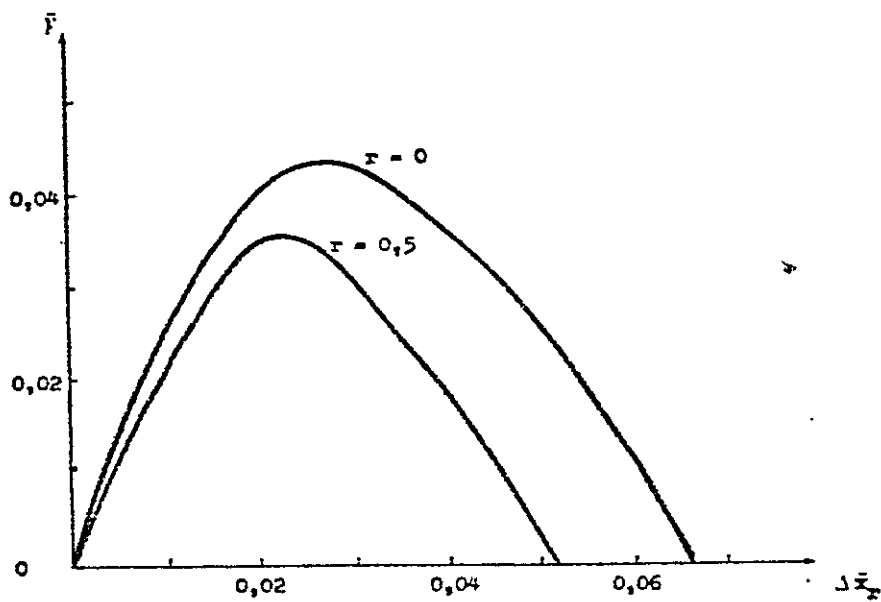
FIGURA N° 1



Corte esquemático del campo magnético terrestre. Cerca de la Tierra, predomina el carácter de dipolo, mientras en las regiones lejanas prevalece el efecto del viento solar.

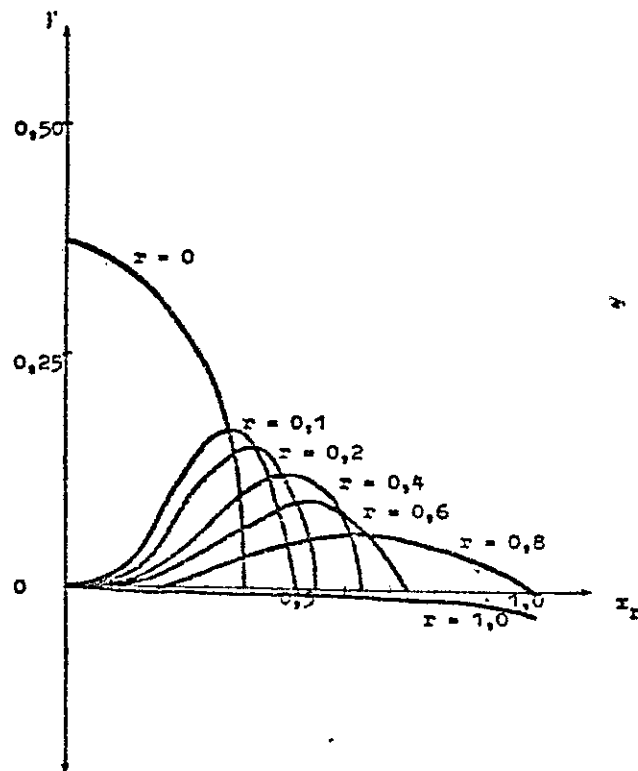
G R A F I C O S

GRAFICO N° 1



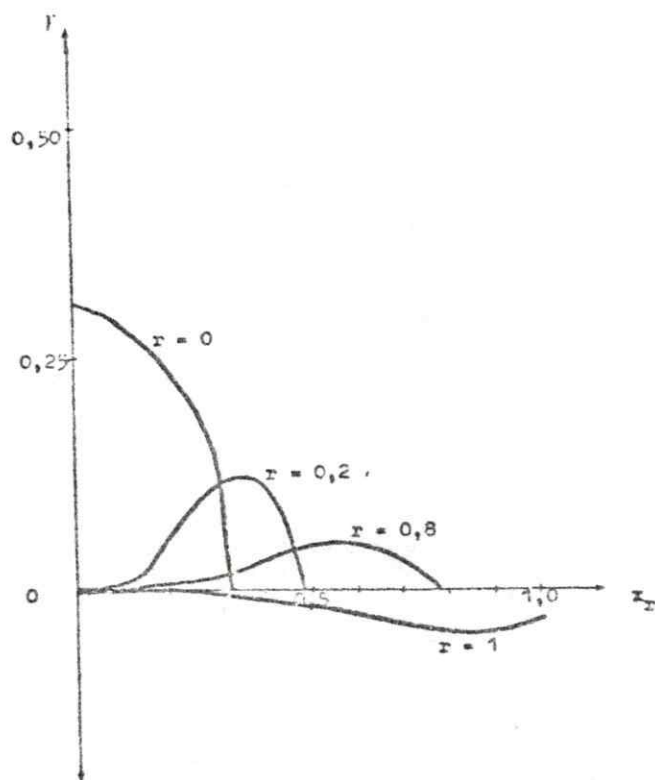
Razón de crecimiento (\bar{y}) en función de la frecuencia, normalizadas como se indica en el texto. El máximo de \bar{y} disminuye al aumentar r .

GRAFICO N° 2

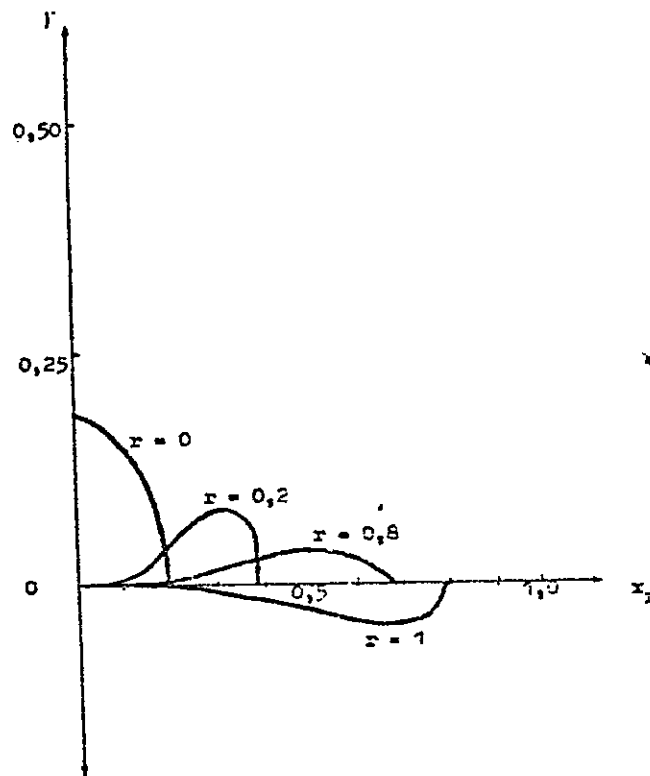


Razón de crecimiento, normalizada a la frecuencia de plasma para iones ($\gamma = \omega_i / \omega_{p_i}$), en función de la variable x_r definida por $x_r = \omega_r / k\alpha$, para distintos valores de r . El caso $r = 1$ aparece amplificado en un factor 10. Los valores de l y α_p/b usados son respectivamente 1 y 0,001.

GRAFICO N° 3

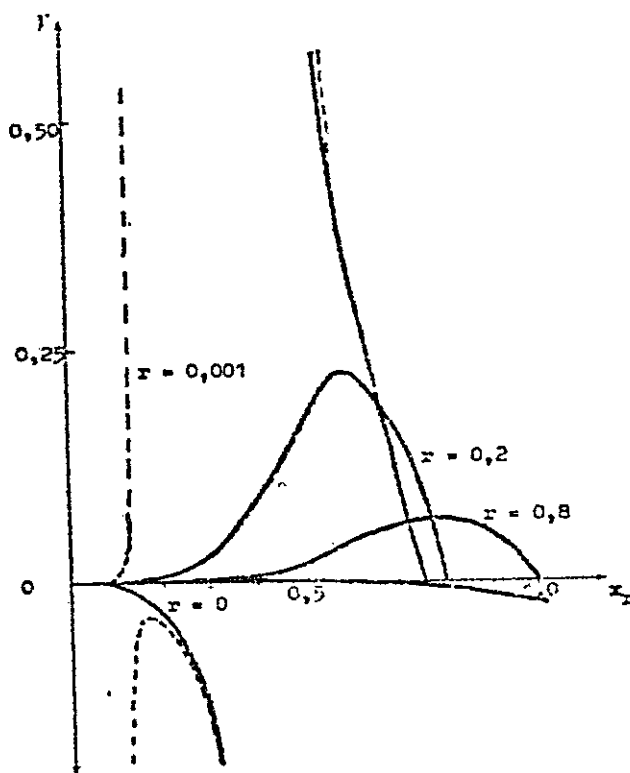


Razón de crecimiento (γ), normalizada a la frecuencia de plasma para iones, en función de la variable x_p . Sólo se graficó para 4 valores distintos de r a fin de no recargar el dibujo. El caso $r = 1$ aparece amplificado en un factor 10. Los valores de l y a_0/b usados son 1 y 0,015 respectivamente.

GRAFICO N^o 4

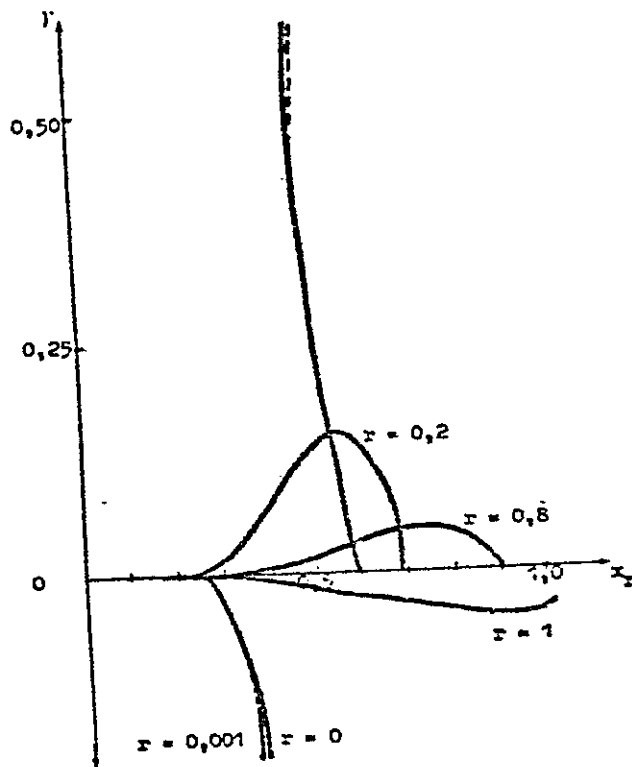
Razón de crecimiento (F), normalizada a la frecuencia de plasma para iones, en función de la variable x_p . La curva para $r = 1$ aparece amplificada 10 veces. En este caso el índice l vale 1 y para α_p/b se usó el valor 0,020 .

GRAFICO N° 5



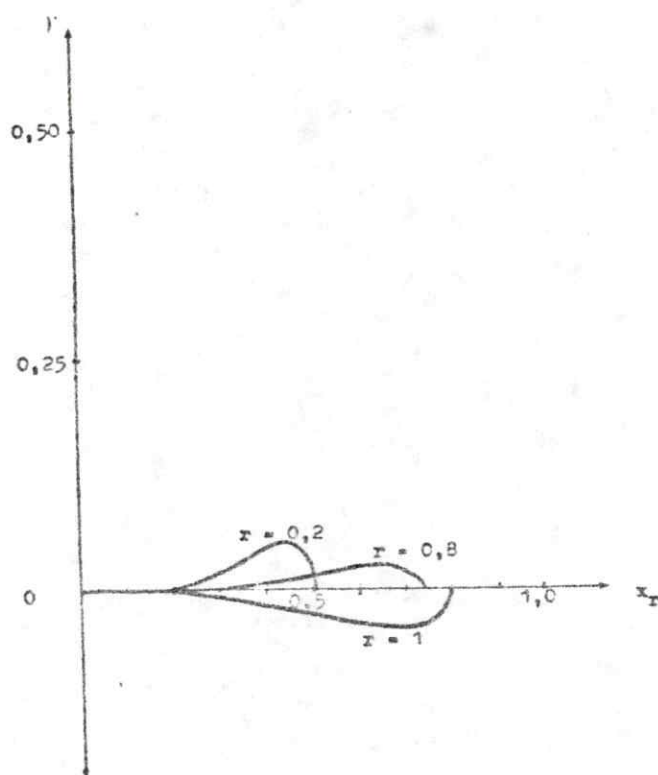
Razón de crecimiento (F), normalizada a la frecuencia de plasma para iones, en función de la variable x_T . Se ha agregado el caso $r = 0,001$ (curva segmentada). La curva $r = 1$ aparece amplificada en un factor 10. En este gráfico el índice l vale 2 y el parámetro $\alpha_p/b = 0,010$.

GRAFICO N° 6



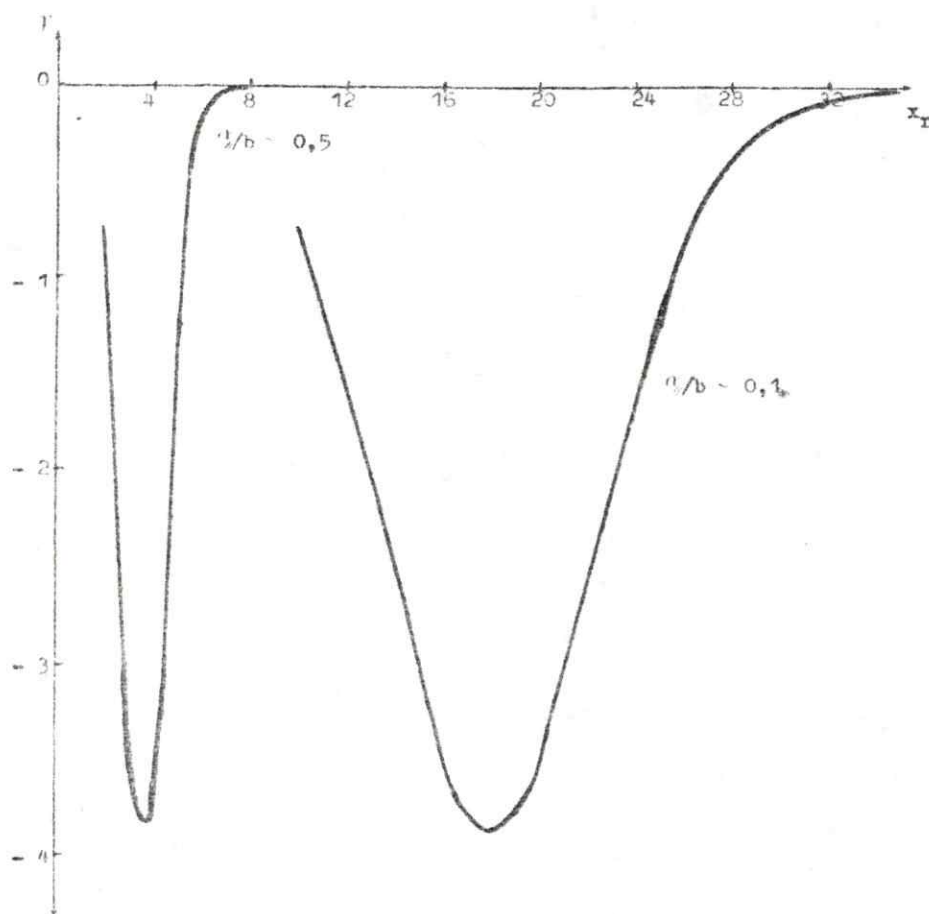
Razón de crecimiento (γ), normalizada a la frecuencia de plasma para iones, en función de la variable x_T . La curva segmentada ($r = 0,001$) casi coincide con $r = 0$. El caso $r = 1$ aparece amplificado en un factor 10. Los valores de l y α_i/b usados son 2 y 0,015 respectivamente.

GRAFICO N° 7



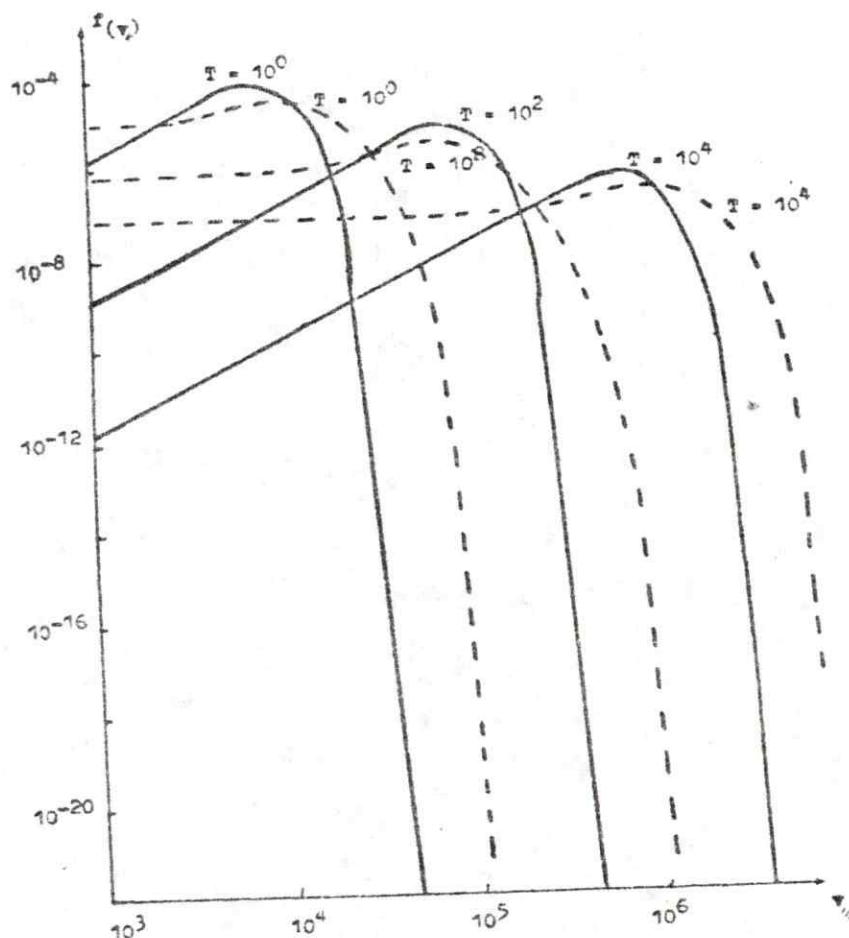
Razón de crecimiento (γ), normalizada a la frecuencia de plasma para iones, en función de la variable x_r . Los casos $r = 0$ y $r = 0,001$ no aparecen por no existir solución de (3.24) para dichos valores. La curva correspondiente a $r = 1$ se amplificó en un factor 10. El valor de α/b usado es 0,020 y el del índice l es 2.

GRAFICO N° 8



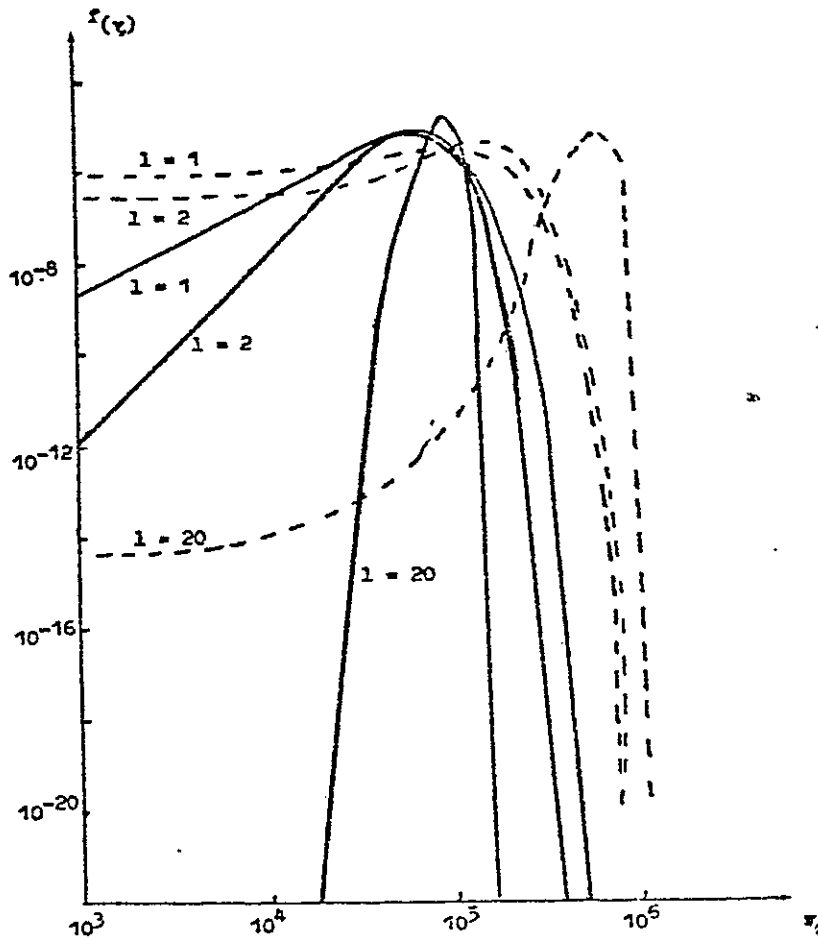
Proporcion de crecimiento (γ), normalizada a la frecuencia de plasma para iones, en función de la variable x_r , para valores de ésta mayores que la unidad. El rango en que el sistema acusa gran estabilidad disminuye al aumentar el cociente entre las temperaturas de iones y electrones (α/b) y es independiente del valor de r .

GRAFICO N° 9



Comparación entre la distribución de velocidades utilizada, ecuación (3.2), y una maxwelliana desplazada (curva segmentada). Se ha graficado el caso $l = 1$ para distintos valores de la temperatura. Las escalas usadas son logarítmicas.

GRAFICO N° 10



Comparación entre la distribución de velocidades utilizada, ecuación (3.2), y una maxwelliana desplazada (curva segmentada). Se ha variado el índice l , como se indica en el gráfico, manteniendo la temperatura en 100°K . Las escalas usadas son logarítmicas.

APENDICE A

CALCULO DE (3.4)

Como primer caso se tratará la función de distribución de la componente fría de iones del fondo (f_1), como se mencionó antes, dicha función se representa por una delta de Dirac, a saber

$$f_1 = \delta(v_x) \delta(v_y) \delta(v_z) \quad (\text{A.1})$$

que al sustituir en (2.1) e integrar las velocidades perpendiculares se encuentra

$$f_1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(v_{\parallel})}{v_{\parallel} - \omega/k} dv_{\parallel} \quad (\text{A.2})$$

en donde $v_{\parallel} = v_z$. Al integrar, usando las propiedades de la delta, (A.2) se reduce a

$$f_1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (\text{A.3})$$

Si llamamos f_2 a la función de distribución que representa el fondo de electrones, procediendo de manera análoga se llega a

$$f_2 = \frac{\omega_e^2}{k^2} \frac{2}{b^3 \sqrt{\pi^3}} \int_0^\infty v_\perp e^{-v_\perp^2/b^2} dv_\perp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_\parallel}{b^2(v_\parallel - \omega/k)} e^{-v_\parallel^2/b^2} dv_\parallel \quad (\text{A.4})$$

de donde se sigue que

$$f_2 = \frac{-2\omega_e^2}{k^2 b^2} \left(1 + \frac{\omega}{k b} Z(\omega/kb) \right) \quad (\text{A.5})$$

en que se ha usado la expresión dada en (3.5) y que corresponde a la definición de la función Z .

Mediante (3.9) se puede expresar Z en función de su derivada, con esto (A.5) toma la forma

$$f_2 = \frac{\omega_e^2}{k^2 b^2} Z^{(1)}(\omega/kb) \quad (\text{A.6})$$

Finalmente, sea f_3 la función de distribución (3.2), al introducir ésta en (2.1) e integrar las componentes perpendiculares se tiene:

$$f_3 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{2^{1+1}}{\sqrt{\pi} (21-1)!! \alpha_\parallel^{21+1}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} v_\parallel \frac{v_\parallel^{21-2}}{v_\parallel - \omega/k} e^{-v_\parallel^2/\alpha_\parallel^2} dv_\parallel - \frac{1}{\alpha_\parallel^2} \int_{-\infty}^{\infty} v_\parallel \frac{v_\parallel^{21}}{v_\parallel - \omega/k} e^{-v_\parallel^2/\alpha_\parallel^2} dv_\parallel \right] \quad (\text{A.7})$$

que a su vez se puede expresar en términos de derivadas respecto de $1/\alpha^2$ obteniéndose, después de reordenar,

$$f_3 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{2^{1+1} (-1)^{1-1}}{\sqrt{\pi} (21-1)!! \alpha_{||}^{21+1}} \left[1 + \frac{1}{\alpha_{||}^2} \frac{\partial}{\partial (1/\alpha_{||}^2)} \right] \frac{\partial^{1-1}}{\partial (1/\alpha_{||}^2)^{1-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_{||}}{v_{||} - \omega/k} e^{-v_{||}^2/\alpha_{||}^2} dv_{||} \quad (\text{A.8})$$

y al igual que la situación anterior, puede expresarse en términos de la función Z , de este modo usando (3.5) y (3.9), con algo de álgebra se obtiene:

$$f_3 = \frac{-\omega_p^2 2^{1+1} (-1)^{1+1}}{\omega k (21-1)!! \alpha_{||}^{21+1}} \left[1 + \frac{1}{\alpha_{||}^2} \frac{\partial}{\partial (1/\alpha_{||}^2)} \right] \frac{\partial^{1+1} Z(\omega/k\alpha_{||})}{\partial (1/\alpha_{||}^2)^1} \quad (\text{A.9})$$

Si ahora se recuerda que

$$f_0 = f_1 + f_2 + f_3 \quad (\text{A.10})$$

se obtiene precisamente (3.4).

APENDICE B

COMPARACION ENTRE LA FUNCION DE DISTRIBUCION USADA

Y UNA MAXWELLIANA DESPLAZADA

En este apéndice se realiza un estudio comparativo entre dos funciones de distribución, que permiten describir un par de haces simétricos de partículas moviéndose a lo largo de un campo magnético.

Al hacer que sendas funciones dependan sólo de la componente de la velocidad paralela al campo magnético se encuentra:

$$F(v_{//}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} \alpha_{//}} \left[e^{-(v_{//} - v_0)^2/\alpha_{//}^2} + e^{-(v_{//} + v_0)^2/\alpha_{//}^2} \right] \quad (B.1)$$

en que $\alpha_{//} = (2 k T/m)^{1/2}$,

$$F(v_{//}) = \frac{2^1}{\pi \alpha (2l-1)!!} \left(\frac{v_{//}}{\alpha_{//}}\right)^{2l} e^{-v_{//}^2/\alpha_{//}^2} \quad (B.2)$$

donde $\alpha_{//} = (2 k T/m (2l-1)!!)^{1/2}$.

La primera de éstas es una maxwelliana desplazada con dos máximos, en $+v_0$ y en $-v_0$ respectivamente.

En esta función el parámetro α corresponde a la temperatura, de modo que si $\alpha \rightarrow 0$, (B.1) se aproxima a dos deltas de Dirac.

La segunda distribución corresponde a una del tipo cono de pérdida, pero con $v_{||}$ en lugar de v_{\perp} , ésta representa dos haces bien definidos centrados en $\pm \sqrt{l} \alpha_{||}$. Esta curva tiene la peculiaridad de que al hacer $\alpha_{||} \rightarrow 0$ no se aproxima al caso frío como sería de esperar, pues para lograr esto debe tenderse l a infinito debido a que en tal caso la distribución se agudiza más en torno al máximo.

Para apreciar de manera más clara la forma de las distribuciones, se pueden observar los gráficos 9 y 10. Con el objeto de comparar más directamente en (B.1) se ha usado para el valor de v_{\perp} el correspondiente al de $v_{||}$ para el cual (B.2) es máximo, por otro lado, para asignar un valor a $\alpha_{||}$ ambas distribuciones se han fijado a la misma temperatura.

En el gráfico 9 se ha variado paramétricamente la temperatura, como se aprecia en la distribución maxwelliana ocurre un máximo poco pronunciado, el cual se agudiza al disminuir la temperatura, no obstante nunca presenta variaciones muy grandes al comparar el valor de la función en el máximo con el se ésta en $v_{||} = 0$. La distribución tipo cono de pérdida presenta un comportamiento similar puesto que el máximo de $v_{||}$ se agudiza al disminuir la temperatura, sin embargo se diferencia de la maxwelliana en que ésta disminuye rápidamente al acercarse desde $v_{||max}$ hacia $v_{||} = 0$.

La variación de la distribución (B.2) con el índice l se muestra en el gráfico 10, allí se ha fijado la temperatura en 100°K y se aprecia un notable

agudizamiento de la curva en torno del máximo al aumentar l . La maxwelliana desplazada también muestra un máximo bastante agudo para el caso $l = 20$, esto se explica al considerar que, si bien $\alpha_{//}$ aumentó, v_0 también lo hizo y en mayor proporción, de manera que para el valor de v_0 en cuestión, el de $\alpha_{//}$ es significativamente menor.

Finalmente debe acotarse que la distribución (B.2) siempre representará dos haces bien definidos, en cambio la maxwelliana desplazada sólo lo hará si $v_0 > \alpha_{//}\sqrt{2}$ pues en tal caso los dos haces se confundirían y se tendría una situación distinta a la que se desea representar, ya que presentará un máximo en el origen.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Kurth, W.S.
Ashour-Abdalla, M.
Frank, L.A.
Kennel, C.F.
Gurnett, D.A.
Sentman, D.D.
Burek, B.G. A comparasion of intense electrostatic waves near f_{uh} , with linear instability theory.
1979 Geophysical Res. Lett. 6, 487 .
- 2.- Gomberoff, L.
Cuperman, S. On the kinetic instabilities of uniform magnetized plasmas with generalized loss-cone distribution functions
1981 J. Plasma Physics 25, 99
- 3.- Montgomery, D
Tidman, D.A. Plasma kinetic theory
1964 M^c Graw-Hill
- 4.- Fried, B.D.
Conte, S.D. The plasma dispersion function
1961 Academic
- 5.- Cuperman, S.
Gomberoff, L.
Roth, I Three component non-symmetric counter-streaming instabilities longitudinal electron plasma modes
1978 J. Plasma Physics 19, 1
- 6.- Cuperman, S.
Gomberoff, L. Electromagnetic ion-cyclotron instability v/s electrostatic ion-cyclotron instability in mixed (warm-cold) magnetospheric-like plasma
1977 J. Plasma Physics 18, 391

- 7.- Chen, F. Introduction to Plasma Physics
1977 Plenum Press, New York
- 8.- Stix, T.H. The theory of Plasma waves
1962 M^c Graw-Hill
- 9.- Briggs, R.J. 1971 Advaced in Plasma Physics
Vol 4 (Ed A. Simon and W.B.
Thompson) p 43 Interscience
- 10.- Cuperman, S.
Gomberoff, L.
Roth, I.
Bernstein Non-symmetric two stream insta-
bility
1977 J. Plasma Physics 17, 23
- 11.- Dory, R.A.
Guest, G.E.
Harris, E.G. Unstable electrostatic plasma
waves propagating perpendicu-
lar to a magnetic
1965 Physic Rev. Lett. 14, 131
- 12.- Gomberoff, L. Introducción a la Física del
Plasma y algunas aplicaciones
U. de Chile. Dpto. de Ciencias
Básicas y Farmacéuticas
- 13.- Renuka, G. 1978 Indian J. Radio and Space
Physics 7, 248
- 14.- Cuperman, S.
Mond, M.L.
Roth, I.
Gomberoff, L. 1976 b Tel Aviv University
TAUP - 525 - 1976
- 15.- Petterssen, Sverre Introducción a la meteorología
Edit. Espasa-Colpe S.A.; V Edic.
Madrid 1976