CONSTRUCCIÓN DE MODELOS DE GELFAND GRUPOIDALES VIA LA MÁQUINA DE MACKEY PARA PRODUCTOS SEMIDIRECTOS DE GRUPOS FINITOS

Tesis
entregada a la
Universidad De Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas
Facultad de Ciencias

por

Felipe Tauler Cortez

Agosto, 2017

Director de Tesis: **Dr. Jorge Soto Andrade**

Departamento de Matemáticas Universidad de Chile
Santiago, Chile

Facultad de Ciencias
Universidad De Chile
Informe de Aprobación
Tesis de Doctorado

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato.

Felipe Javier Tauler Cortez

Ha sido aprobada por la comisión de Evaluación de la tesis como requisito para el Grado de Doctor en Ciencias Mención Matemáticas, en el examen de Defensa Privada de Tesis rendido el día ___________

Director de Tesis:
Dr. Jorge Soto Andrade(U. de Chile) ____________________

Comisión de Evaluación de la Tesis:

Dr. Antonio Behn(U. de Chile) ____________________

Dr. Jose Pantoja(PUCV) ____________________

Dr. Yves Martin(U. de Chile) ____________________

Dedicatoria

A mi familia, esposa, hijos y a mi profesor guía Dr. Jorge Soto Andrade, por su gran paciencia y apoyo incondicional en todo este largo caminar.

Biografía

Felipe Tauler Cortez, nacido el 10 de abril del año 1979 en la ciudad de Valparaíso, Chile. Inicia sus estudios superiores en la Universidad de Valparaíso, Valparaíso, graduandose de Licenciado en Matemáticas. Luego prosigue sus estudios, obteniendo el grado de Magister en Matemáticas, en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. En esta etapa estudiantil, comienza a realizar docencia para las distintas carreras de la Universidad Católica de Valparaíso. Posteriormente, es aceptado e ingresa al plan de Doctorado en matemáticas de la Universidad de Chile.

Agradecimientos

Agradezco de especial manera a mi familia, esposa Myrta e hijos: Matías y María Ignacia, por el amor, compañía incondicional y enorme paciencia en todos estos largos años de estudios. En especial, también agradezco a mi profesor guía, Dr. Jorge Soto Andrade, por su amistad y gran apoyo durante todo este tiempo.

Agradezco a mi profesor guía Dr. Jorge Soto Andrade y su proyecto FONDECYT 1140510, 1120300, por el gran apoyo económico durante mis estudios doctorales y realización de mi tesis.

Abstract

A groupoid is the natural generalization of a group, considered as a category: it is a category where each morphism is invertible. In the present thesis we will use characters of the movements groupoid $M(G,X)$, groupoid associated to the geometric pair (X,G) (G finite group), being able to construct a Gelfand model for G. The characters of $M(G,X)$ allow to twist the natural representation of G, which supplies a Gelfand model for the G group. In particular, we present and prove that certain spaces X are from Gelfand (spaces whose twisted natural representation is a Gelfand model), this for certain classical groups, namely, Dihedral groups and rigid transformations groups associated with finites extensions on finite fields. In order to give a general answer to the cardinal of such spaces of Gelfand, furthermore, to be able to present at least one candidate to be a Gelfand space for a certain group $G = A \rtimes H$ backed up by the Mackey machine and the construct that it makes regarding to the irreducible representations for G.

Resumen

Un grupoide es la generalización natural de un grupo, considerado como una categoria, esto es una categoría donde cada morfismo es invertible. En la presente tesis nos serviremos de los caracteres del grupoide de movimientos $M(G,X)$, grupoide asociado al par geometrico (X,G) (G finito), para poder construir un modelo de Gelfand para G. Los caracteres de $M(G,X)$ permiten torcer la representación natural de G, la cual suministra un modelo de Gelfand para el grupo G. En particular, presentamos y demostramos que ciertos espacios X son de Gelfand (espacios cuya representación natural torcida es un modelo de Gelfand), esto para ciertos grupos clasicos, a saber, grupos Diedrales y grupos de transformaciones rígidas asociados a extensiones finitas sobre cuerpos finitos. Para dar una respuesta general al cardinal de tales espacios de Gelfand, más aún, poder presentar al menos un candidato a ser espacio de Gelfand para un cierto grupo $G = A \rtimes H$, nos apoyaremos en la Máquina de Mackey y la construcción que hace respecto a las representaciones irreducibles para el grupo G.

Índice general

Introducción

El presente trabajo se propone aplicar la teoría de grupoides a la teoría de representaciones de ciertos grupos finitos. Mas precisamente, nos interesamos en construir Modelos de Gefand de grupos finitos G por inducción a partir de caracteres lineales de los grupoides de movimientos asociados a $G-$espacios convenientes. Recordemos que un modelo de Gelfand para un grupo finito G es una representación lineal compleja de dicho grupo, en cuya descomposición aparece, una y solo una vez, cada representación irreducible del grupo G en cuestión y que los grupoides de movimientos han sido puestos en relieve en [8] por A. Connes. Los grupos finitos considerados son los grupos diedrales y los grupos de transformaciones rigidas asociadas a una extensión finita de cuerpos finitos.

Los grupoides han sido introducidos en [2] por H. Brandt en 1926, en un articulo sobre composición de formas cuadráticas. En topología algebraica, P. Higgins, R. Brown y otros, exploran grupoides fundamentales asociados a un espacio topológico, generalizando en el contexto de teoría de grafos, propiedades fundamentales de grupos y generadores. Cabe notar que los grupoides han sido también ocupados en Geometria Diferencial, Geometria Algebraica, Topologia Diferencial, Análisis Funcional y Teoría de grupos.

Desde nuestro punto de vista, un grupoide es simplemente una categoría todos cuyos morfismos son invertibles. Al conjunto de morfismos de un objeto a en otro b del grupoide, lo denotaremos por $hom(a, b)$. Notemos que a todo grupoide *conexo* podemos asociar un grupo bien definido a menos de isomorfismo, tomando para cada objeto a del grupoide el grupo $hom(a, a)$.

En general, a cada acción de un grupo G sobre un conjunto X podemos asociar naturalmente su grupoide de movimientos $M(G,X)$, definido como sigue:

El conjunto de objetos para este grupoide es el conjunto X. Ahora si $x, y \in X$, un morfismo de x en y es una terna (x, g, y), tal que $g \cdot x = y$.

Un carácter lineal asociado al grupoide de movimientos es un functor covariante χ de $M(G,X)$ en $\mathbb{C}^*$.

Sea G un grupo finito. Definamos lo que entenderemos por representación natural torcida de G por un carácter lineal α del grupoide de movimientos asociado a un $G-$espacio X, como sigue:

Consideramos la representación natural $(L^2(X), \rho)$ asociada al grupo G. La representación $(L^2(X), \rho^\alpha)$, que llamaremos representación natural torcida por el carácter α, se define por:

$$(\rho_g^\alpha f)(x) = \alpha(g^{-1} \cdot x, g, x)(\rho_g f)(x)$$

donde $x \in X, g \in G, f \in L^2(X)$.

Diremos que X es un espacio de Gelfand para el grupo G, si la representación natural torcida por algún carácter lineal α del grupoide de movimientos $M(G : X)$, es un modelo de Gelfand para G. La dimensión de un modelo de Gelfand para G, igual al cardinal de un espacio de Gelfand para G, se llama dimensión de Gelfand de G.

Se ha conjeturado hace algún tiempo, que todo grupo finito admite un único espacio de Gelfand y que éste es único a menos de isomorfismo, pero al menos para el grupo Diedral D_{2n} exhibiremos dos espacios de Gelfand no isomorfos.

En este trabajo nos servimos de carácteres lineales de grupoides de movimientos para construir modelos de Gelfand de ciertos grupos, comenzando con los grupos diedrales D_{2n}, como una representación natural de este grupo torcida por un tal carácter. En este punto aparecerán espacios de Gelfand para G. Para dicho efecto se dividira el problema en dos casos, según sea la paridad de n. Uno de los espacios a estudiar es aquel formado por todas las involuciones del grupo (identidad incluida). Es un hecho notable que la cantidad de involuciones del grupo diedral coincide con la dimensión de Gelfand de G y que las involuciones del grupo suministran un espacio de Gelfand. Encontramos para estos grupos, un contraejemplo a la conjetura de unicidad de los espacios de Gelfand.

Luego, en una segunda instancia, estudiaremos la estructura del grupo $G = Iso_q(\mathbb{F}_{q^m})$ de todas las transformaciones rigidas asociada a una extensión $\mathbb{F}_{q^m}$ de un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$, particularmente el caso de una extensión cuadrática y nos interesaremos en construir modelos de Gelfand para G con ayuda de espacios de Gelfand convenientes: Veremos que en el caso de una extensión cuadrática las involuciones del grupo considerado juegan nuevamente un rol clave, constituyendo un espacio de Gelfand para el grupo. Este hecho nos sugirió que las "trivoluciones" (elementos de cubo unidad) jugarían un rol análogo en el caso de una extensión cúbica. A continuación mostramos sin embargo que el número de trivoluciones es mayor que la dimensión del espacio de Gelfand en el caso cúbico.

Finalmente, mostramos en general cómo sacar partido de la famosa "Máquina de Mackey" para construir directamente Modelos de Gelfand para grupos G que son productos semidirectos $A \rtimes H$ con factor distinguido conmutativo A (caso que cubre todos los grupos que estudiamos en el presente trabajo), a partir de modelos de Gelfand para A y para H y la acción de H sobre los caracteres de A y también cómo transitar de esta construcción a una construcción grupoidal de dichos modelos, explicitando el correspondiente espacio de Gelfand.

Es importante mencionar que en la tesis doctoral de Natalia Gonzáles Guzmán [10] se aborda la misma problemática de construcción de modelos de Gelfand para ciertas familias de grupos finitos (grupos de simetrías de polígonos y poliedros regulares, grupos de movimientos rígidos para una extension de grado n del cuerpo primo $\mathbb{F}_p$) que tienen intersección con las que consideramos en este trabajo. El método utilizado por la autora para construir Modelos de Gelfand geométricamente es sin embargo diferente de los nuestros (inducción desde caracteres lineales de grupoides de movimientos, espacios de involuciones, construcción de modelos a la Mackey). En efecto, ella desarrolla modelos de Gelfand "super-simetricos" (inspirado de la supersimetría en física teórica), con ayuda la descomposición de espacios funcionales sobre $G-$

espacios de recubrimiento adecuados, en componentes simétricas y antisimétricas. Cito de manera textual su procedimiento, para el caso de los grupos diedrales : "El Metodo consiste en determinar G-conjuntos X_0 y X_1 convenientes y construir un recubrimiento natural X de $X_0 \cup X_1$ con dos hojas, y dentro de cuyo espacio de funciones $L^2(X)$ (dotado con la acción natural del grupo) se construye el modelo, consistente de componentes "simétricas" y "antisimétricas"".

A diferencia del presente trabajo, la construcción de los espacios de Gelfand no se apoya en la Máquina de Mackey, para determinar los mentados espacios de Gelfand y la dimensión de los respectivos modelos, ni tampoco se explota la idea de representación natural torcida por un carácter lineal propicio de un cierto grupoide asociado de movimientos.

Capítulo 1

Preliminares

0.1. Acción de Grupo. Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto X. Un subconjunto S de X es un sistema de representantes para $\sim$ si y sólo si.

1. $s \not\sim r \quad \forall\, s,\ r \in S$.
2. $(\forall\, x \in X)(\exists\, s \in S)(x \in [s])$,

donde $[s]$ denota la clase de equivalencia en $X/\sim$, cuyo representante es s.

Sean G un grupo finito y X un conjunto. Se dice que G actúa sobre X si y sólo si existe una funcíon

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & g \cdot x, \end{array}$$

donde $g \in G, x \in X$, que cumple las siguientes propiedades:

1. $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.
2. $e \cdot x = x$.

En ocasiones diremos que X es un G-espacio o que (X, G) es un espacio geométrico en el caso que G actúa sobre X.

OBSERVACIÓN 1. *Notemos que una acción define una relación de equivalencia en X dada por:*

$$x \sim y \leftrightarrow (\exists g \in G)(g \cdot x = y)$$

Debido a esto recordemos algunas definiciones.

DEFINICIÓN 1. *Orbita o clase de un elemento $x \in X$,*

$$O_x \;=\; \{y \in X \mid (\exists g \in G)(g \cdot x = y)\} = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

OBSERVACIÓN 2. *Dado un sistema de representantes I para la relación de equivalencia anterior tenemos:*

$$X = \dot{\bigcup_{x\in I}} O_x.$$

DEFINICIÓN 2. *Sea G un grupo y X un G-espacio. El grupo de Isotropia o simplemente Isotropia asociado al punto $x \in X$ es:*

$$G(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

En ocasiones a dicho grupo lo anotaremos, si no hay lugar a confusión, por $I(x)$.

PROPOSICIÓN 1. *Sea G un grupo y X un G-espacio. Tenemos*

$$G(x) \leq G$$

PROPOSICIÓN 2. *Sea G un grupo y X un conjunto donde G actúa, si definimos:*

$$\begin{array}{rccl} \phi: & G/G(x) & \longrightarrow & O_x \\ & [\ g\ ] & \longmapsto & \phi([\ g\ ]) := g \cdot x. \end{array}$$

entonces ϕ es una función biyectiva, con lo cual tenemos.

$$|G| = |O_x||G(x)|$$

DEFINICIÓN 3. *Sea G un grupo y X un conjunto donde G actúa. G actúa transitivamente en X si y sólo si existe una sola órbita, o de otro modo*

$$(\forall x, y)(\exists g \in G)(g \cdot x = y)$$

DEFINICIÓN 4. *Sea G un grupo. Llamaremos conmutador del grupo G, al grupo generado por todos los elementos de la forma $xyx^{-1}y^{-1}$, con $x, y \in G$. A dicho grupo lo anotaremos $[G : G]$.*

TEOREMA 1. *Sea G un grupo. Entonces.*

1. $[G : G] \lhd G$.
2. *$G/[G : G]$ es un grupo abeliano, llamado el abelianizado de G. Además $[G : G]$ es el menor subgrupo normal con esa propiedad.*

1. Representaciones lineales complejas

Recapitulamos a continuación los resultados básicos de la teoría de representaciones lineales complejas de grupos finitos. Para las correspondientes demostraciones referimos al lector a [3] o [5].

DEFINICIÓN 5. *Sea G un grupo y V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, se dice que (V, ρ) es una representación (lineal compleja) de G si y sólo si,*

$$\rho : G \longrightarrow Aut(V)$$

es un homomorfismo de grupos.

DEFINICIÓN 6. *Sea (V, ρ) una representación del grupo G. Se dice que (W, ρ) es una subrepresentación de (V, ρ) si y sólo si:*

1. $W \leq V$
2. $\rho_g(W) \subseteq W, \forall g \in G$,

lo cual, en ocasiones, anotaremos $W \leq_G V$.

OBSERVACIÓN 3. *Si (W, ρ) es una subrepresentación de (V, ρ) tenemos que (W, ρ) es una representación del grupo G.*

DEFINICIÓN 7. *Se dice que (W, ρ) es una representación irreducible de G si y sólo si. no existe subrepresentación propia de (W, ρ), en caso contrario se dice que la representación es reducible*

DEFINICIÓN 8. *Sea G un grupo y (V, ρ), (W, σ) dos representaciones de G.Diremos que ρ es isomorfa a σ ($\rho \simeq \sigma$) si y sólo si existe ϕ, un $\mathbb{C}$-isomorfismo de V en W, que cumple con lo siguiente:*

$$(\forall g \in G)(\sigma_g \circ \phi = \phi \circ \rho_g).$$

A ϕ lo llamaremos operador de entrelazamiento entre V y W.

NOTACIÓN 1. *Denotaremos por $Hom_G(V, W)$ al conjunto de todos los operadores de entrelazamiento entre las representaciones (V, ρ) y (W, σ) del grupo G. En el caso que $V = W$, anotaremos $Hom_G(V, W) = End_G(V)$.*

DEFINICIÓN 9. *Sea G un grupo, se define $\widehat{G}$ como el conjunto que consta de todos los tipos de isomorfia de las representaciones irreducibles de G.*

DEFINICIÓN 10. *Sea G un grupo y (V,ρ) una representación de G se dice que el grado de la representación (V,ρ) es la dimensión del espacio V*

TEOREMA 2. *(Schur) Sea G un grupo, (V,ρ) y (W,σ) dos representaciones irreducibles de G.Entonces*

1. $V \simeq W \Leftrightarrow Hom_G(V,W) \simeq \mathbb{C}$.
2. $V \not\simeq W \Leftrightarrow Hom_G(V,W) = \{0\}$

TEOREMA 3. *Sea G un grupo, y (V,ρ) una representación de G entonces existe un producto escalar $\langle\, ,\, \rangle$ sobre V que es G-invariante, es decir:*

$$\langle \rho_g(u), \rho_g(v)\rangle = \langle u, v\rangle \ \ \forall u, v \in V, \forall g \in G.$$

TEOREMA 4. *Sea G un grupo, (V,ρ) una representación de G y (W,ρ) una subrepresentación de (V,ρ) entonces existe (W^*,ρ) subrepresentación de (V,ρ) tal que:*

$$V = W \oplus W^* \ \ , \ \text{donde } W^* = W^{\perp}.$$

TEOREMA 5. *(Maschke) Sea G un grupo entonces toda representación de G es suma directa de representaciones irreducibles.*

COROLARIO 1. *Toda representación (V,ρ) de un grupo G, tiene única descomposición (salvo el orden de los sumandos) de la forma*

$$\rho = \oplus_{i=1}^{k} n_i \rho_i$$

donde $n_i\rho_i$ denota la suma directa de n_i (multiplicidad de ρ_i en ρ) sumandos isomorfos a ρ_i con ρ_i las distintas representaciones irreducibles de G.

TEOREMA 6. *El número de representaciones irreducibles de un grupo finito G es igual al número de clases de conjugación de G.*

PROPOSICIÓN 3. *Si $\rho_1, \cdots, \rho_n$ son las distintas representaciones irreducibles de un grupo finito G, entonces sus respectivas dimensiones satisfacen la siguiente ecuación*

$$|G| = \sum_{i=1}^{n} (dim \rho_i)^2$$

PROPOSICIÓN 4. *Sea G un grupo abeliano, entonces G es isomorfo a $\widehat{G}$.*

PROPOSICIÓN 5. *Si $\phi \in \widehat{G}$, con $\phi \neq 1$, entonces se tiene la siguiente relación de ortogonalidad*

$$\sum_{g \in G} \phi(g) = 0$$

PROPOSICIÓN 6. *Si $\rho = \oplus m_i \rho_i$ es la decomposición en irreducibles de la representación ρ de un grupo finito G, entonces*

$$dim\ Hom_G(\rho, \rho) = \sum m_i^2.$$

OBSERVACIÓN 4. *Podemos observar que si G es un grupo abeliano finito, sus representaciones irreducibles son de dimensión 1, mas aún el número de representaciones irreducibles es igual al orden del grupo.*

PROPOSICIÓN 7. *Sea G un grupo finito. Entonces G tiene $[G : G']$ caracteres, donde G' denota el subgrupo comuntador de G y $[G : G']$ denota el indice entre G y G'.*

DEFINICIÓN 11. *Sea (W, τ) una representación del grupo G. Diremos que (W, τ) es un modelo de Gelfand para el grupo G si y sólo si ella se descompone en suma directa de todas las representaciones irreducibles de G, donde cada una de ellas tiene multiplicidad* 1.

1.1. Representación Natural.

PROPOSICIÓN 8. *Sea G un grupo finito, X un G-espacio, entonces la aplicación*

$$\begin{array}{rccl} \rho_g : & G & \longrightarrow & Aut(L^2(X)) \\ & g & \longmapsto & \rho_g \end{array}$$

donde ρ_g está definido por:

$$\begin{array}{rccl} \rho_g : & \mathbb{C}^X & \longrightarrow & \mathbb{C}^X \\ & f & \longmapsto & \rho_g(f) = g \cdot f \end{array}$$

con,

$$\begin{array}{rccl} g \cdot f : & X & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & (g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x). \end{array}$$

es un homomorfismo de grupos, conocida como Representación Natural de G asociada al. $G-$espacio X.

2. Entrelazamiento de representaciones Naturales

Sean (V, ρ),.(W, σ) dos representaciones del grupo G y $\phi : V \longrightarrow W$ un endomorfismo. Recordemos que ϕ es un operador de entrelazamiento entre V y W si y sólo si

$$(\forall g \in G)(\sigma_g \circ \phi = \phi \circ \rho_g)$$

OBSERVACIÓN 5. *$Hom_G(V, W)$ tiene una estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial.*

PROPOSICIÓN 9. *Sea (V, ρ) una representación de G, $\phi \in End_G(V)$ y W el espacio propio asociado al valor propio λ de ϕ entonces.*

$$\rho_g(W) \subseteq W, \quad \forall g \in G.$$

es decir $(W\ ,\ \rho)$ es una subrepresentación de $(V\ ,\ \rho)$

OBSERVACIÓN 6. *Si ϕ_1, $\phi_2 \in End_G(L^2(X))$ tenemos que $\phi_1 \circ \phi_2 \in End_G(L^2(X))$. De hecho, $End_G(L^2(X))$ porta una estructura natural de $\mathbb{C}$-algebra.*

DEFINICIÓN 12. *Sea $\phi \in End_G(L^2(X))$, y $[\phi]_B = (a_{i,j})$ la matriz asociada a ϕ relativa a la base B, donde $B = \{\delta_x \mid x \in X\}$. Se define la siguiente función, llamada función de coeficientes matriciales (o núcleo) asociado a ϕ, por:*

$$\begin{aligned} K:\ X \times X &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (i,j) &\longmapsto K(i,j) := a_{i,j}. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 13. *Sea X un conjunto donde actúa G. Se define el conjunto $N(X,G)$ de los nucleos G-invariantes como sigue.*

$$N(X,G) = \{K : X{\times}X \longrightarrow \mathbb{C} \mid (\forall x,y \in X)(\forall g \in G)[K(g{\cdot}x, g{\cdot}y) = K(x,y)]\}$$

OBSERVACIÓN 7. *N(X,G) tiene una estructura natural de $\mathbb{C}$-algebra.*

PROPOSICIÓN 10. *Sea X un conjunto donde el grupo G actúa. Una base para $N(X,G)$ es la formada por los siguientes elementos.*

$$\begin{aligned} K_z:\ X \times X &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y) &\longmapsto K_z(x,y) := \begin{cases} 1 & si\ (x,y) \in O_z \\ 0 & si\ (x,y) \notin O_z, \end{cases} \end{aligned}$$

donde z es un representante de cada G-órbita en $X \times X$.

PROPOSICIÓN 11. *Sean G un grupo y X un conjunto donde actúa G. Además $\phi \in End(L^2(X))$ y K_ϕ la función de coeficientes matriciales asociada a ϕ, entonces.*

$$\phi \in End_G(L^2(X)) \ si\ y\ sólo\ si\ K_\phi \in N(X,G).$$

donde $\phi(\delta_x) = \sum_{y \in X} K_\phi(y,x)\delta_y$.

Además tenemos que ϕ es un $\mathbb{C}$-isomorfismo.

3. Representaciones irreducibles de grupos abelianos finitos

Una representación de un grupo G de grado uno es un homorfismo $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$. Luego $(\chi(g))^{|G|} = 1$, es decir, $\chi(g)$ es una raiz $|G|-$esima de la unidad.

Si G es un grupo ciclico de orden n generado por el elemento r, para conocer a χ basta tan solo conocer la imagen $\chi(r)$ y por lo tanto dicho elemento deber ser una raiz $n-$esima de la unidad.

Luego se obtienen n representaciones de grado uno del grupo G, dadas por

$$\chi_j(r) = e^{\frac{2\pi j}{n}}$$

con lo cual obtenemos

$$\chi_j(r^k) = e^{\frac{2\pi jk}{n}}, \qquad j \in 0, 1, \cdot, n-1$$

En el caso que G sea un grupo abeliano finito, tenemos por el teorema fundamental de grupos abelianos que

$$G = G_1 \times G_2 \cdots \times G_s$$

donde cada G_i es un grupo ciclico generado por algún elemento g_i. Luego si σ_i, $i \in \{1, 2, \cdots, s\}$, es un caracter asociado a G_i, un caracter σ de G es de la forma siguiente:

$$\sigma(g) = \sigma_1(g_1)\sigma_2(g_2) \cdots \sigma_s(g_s)$$

4. Caracteres

DEFINICIÓN 14. *Sea G un grupo y (V, ρ) una representación de G. El caracter χ_ρ de la representación (V, ρ) es la función definida por:*

$$\begin{array}{rccl} \chi_\rho : & G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & g & \longmapsto & \chi_\rho(g) := Tr(\rho_g). \end{array}$$

OBSERVACIÓN 8. *El caracter asociado a una representación de un grupo es una función de clase, es decir, es constante sobre las clases de conjugación del grupo.*

OBSERVACIÓN 9. *Sea $C(G) = \{f \ : \ G \longrightarrow \mathbb{C} | f(gxg^{-1}) = f(x)\}$. Es claro que $C(G) \subseteq L^2(G)$, mas aun $C(G)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto escalar interno.*

OBSERVACIÓN 10. *Sea G un grupo. Una base para $C(G)$ es la formada por los elementos δ_C, definidos de modo siguiente:*

$$\delta_C(x) := \begin{cases} 1 & si\ x \in C \\ 0 & si\ x \notin C. \end{cases}$$

donde C recorre las clases de conjugación.

TEOREMA 7. *Sea G un grupo. Los caracteres asociados a cada representación irreducible de G forman una base ortonormal de $C(G)$. Asi la dimensión de $C(G)$ es el cardinal de $\widehat{G}$.*

OBSERVACIÓN 11. *Sean G un grupo y (V,ρ),(W,σ) dos representaciones irreducibles de G con χ_ρ y χ_σ los caracteres asociados a cada representación respectivamente. Por el teorema anterior tenemos lo siguiente.*

$$\langle \chi_\rho, \chi_\sigma \rangle = \begin{cases} 1 & si\ \ V \simeq W\ (\rho \sim \sigma) \\ 0 & si\ \ V \not\simeq W\ (\rho \not\sim \sigma) \end{cases}$$

COROLARIO 2. *Sea G un grupo y (V,ρ) una representación de G tal que,*

$$V = m_1 W_1 \oplus m_2 W_2 \oplus \cdots \oplus m_r W_r$$

donde $W_i \not\simeq W_j$ y W_i irreducible $\forall\ i,\ j \in \{1, 2, \cdots, r\}$, entonces.

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle \ = \ m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_r^2.$$

COROLARIO 3. *Sea G un grupo y (V,ρ) una representación de G, entonces.*

$$(V,\rho)\ es\ irreducible \Leftrightarrow \langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle \ = \ 1$$

COROLARIO 4. *Sea G un grupo, $(V\rho)$ una representación de G tal que*

$$V = m_1 W_1 \oplus m_2 W_2 \oplus \cdots \oplus m_\sigma W_\sigma \oplus \cdots \oplus m_r W_r,$$

donde W_i irreducible $\forall\ i \in \{1, 2, \cdots, r\}$ entonces,

$$\langle\ \chi_\sigma, \chi_\rho \rangle = m_\sigma$$

COROLARIO 5. *Sea G un grupo y (V,ρ), (W,σ) dos representaciones de G, entonces*

$$\rho \ \simeq \ \sigma \ \Leftrightarrow \ \chi_\rho = \chi_\sigma$$

PROPOSICIÓN 12. *Sea G un grupo y X un G-espacio. Consideremos la representación natural $(L^2(X), \rho)$ de G, entonces.*

$$\chi_\rho(g) = |\{x \in X \mid g \cdot x = x\}|.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $y \in X$ y δ_x un elemento basal del espacio $L^2(X)$, por lo tanto $(\rho_g \delta_x)(y) = \delta_x(g^{-1} \cdot y) = \delta_{g \cdot x}(y)$, lo cual es suficiente para concluir el resultado. □

5. Representación inducida

Sean G grupo y $H \leq G$. Si (V, ρ) es una representación de G, podemos observar que $(V, \rho|_H)$ es una representación de H, a la cual anotaremos $\rho|_H = Res_{G \downarrow H}\ \rho$. A continuacion veremos el proceso inverso.

DEFINICIÓN 15. *Sea H un subgrupo de un grupo G, y (W, σ) una representación de H. Consideremos $S = \{g_1, g_2, \cdots, g_t\}$ un sistema de representantes de las coclases de H en G, decimos que una representación (V, ρ) de G es la* inducida *por la representación (W, σ) de H, si $V = \bigoplus_{i=1}^t W_{g_i}$, donde W_{g_i} es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial isomorfo a W, que solo depende del representante elegido g_i, y para cada g en G se tiene $\rho_g(w_{g_i}) = (\sigma_h(w_{g_i}))_{g_j}$ donde $gg_i = g_j h$, para algunos $g_j \in G$, $h \in H$, con $w_{g_i} \in W_{g_i}$.*

A dicha representación inducida la anotaremos $V = Ind_{H \uparrow G}\ \sigma$ o $V = Ind_{H \uparrow G}\ W$.

TEOREMA 8. *(Propiedad Universal de la Inducida) Sean G grupo y $H \leq G$. Consideremos una representación (U, τ) de G y (W, σ) una representación de H.*

Si existe ϕ, un operador de entrelazamiento entre W y U de representaciónes de H, entonces ϕ se puede extender de forma única a $\widetilde{\phi}$, un operador de entrelazamiento entre $Ind_{H \uparrow G}\sigma$ y U de representaciónes de G.

COROLARIO 6. *(Unicidad de la representación inducida). Si una representación $\theta_1 : H \to Aut(W_1)$ induce una representación $\rho_1 : G \to Aut(V_1)$ y lo mismo pasa para θ_2 y ρ_2 relativo W_2 y V_2, entonces si θ_1 es isomorfa a θ_2 entonces ρ_1 es isomorfa a ρ_2.*

TEOREMA 9. *(Reciprocidad de Frobenius) Sean (W,σ) representación de H y (U,τ) representación de G, entonces:*

$$Hom_G(Ind_{H\uparrow G}\ \sigma,\tau) \cong Hom_H(\sigma, Res_{G\downarrow H}\ \tau)$$

LEMMA 1. *Sea G un grupo y (V,ρ) una representación de G. Supongamos que $V \cong \bigoplus_{x\in I} W_x$ (para todo $x \in I$, $W_x \leq V$) y que el grupo G permuta transitivamente los espacios W_x, entonces para cada $x \in I$ $V = Ind_{H\uparrow G} W_x$, donde $H = \{g \in G \mid \rho_g W_x = W_x\}$.*

TEOREMA 10. *Sean G un grupo y $H \leq G$, con (V,ρ) la representación inducida de (W,τ) a partir de H, entonces*

$$\chi_\rho(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{s\in G \\ s^{-1}gs\in H}} \chi_\tau(s^{-1}gs)$$

6. Máquina de Mackey

Supongamos que el grupo $G = H \rtimes K$, donde H es un subgrupo normal y abeliano del grupo G. La Maquina de Mackey es un mecanismo para construir todas las representaciones irreducibles del grupo G a partir de las representaciones irreducibles de H y las de algunos subgrupos de K.

Como H es un grupo abeliano, todas sus representaciones irreducibles son de dimensión 1, mas aún, $\widehat{H} = Hom(H, \mathbb{C}^\times)$ tiene una estructura de grupo.

Podemos observar que $\widehat{H}$ es un K-conjunto con la acción $k \cdot \chi(h) = \chi(k^{-1}hk)$ para todo $h \in H$. Sea χ_i con $i \in I$ un conjunto de representantes para las K-orbitas de $\widehat{H}$. Consideremos el grupo $G_i = H \rtimes I(\chi_i)$, donde $I(\chi_i)$ es el grupo de isotropia asociado al elemento χ_i. Para el grupo G_i consideramos el caracter $\bar{\chi}_i$, extensión del caracter χ_i, definido por $\bar{\chi}_i(hk) = \chi_i(h)$ para $h \in H, k \in I(\chi_i)$.

Consideremos $\sigma \in \widehat{I(\chi_i)}$. Dicha representación la extendemos a una representación irreducible $\bar{\sigma}$ del grupo G_i, la cual esta definida por $\bar{\sigma}(hk) = \sigma_k$. Asi tenemos el producto $\bar{\chi}_i \cdot \bar{\sigma}$, la cual es una representación irreducible de G_i, definida por $\bar{\chi}_i \cdot \bar{\sigma}(hk) = \chi_i(h)\sigma(k)$.

NOTACIÓN 2. *La representación de G inducida por la representación $\bar{\chi}_i \cdot \bar{\sigma}$ la denotaremos por*

$$\theta_{\chi_i,\sigma} = Ind_G^{G_i}(\bar{\chi}_i \cdot \bar{\sigma})$$

TEOREMA 11. *Considerando las notaciones anteriores tenemos lo siguiente:*

1. *$\theta_{\chi_i,\sigma}$ es irreducible.*
2. *$\theta_{\chi_i,\sigma} \cong \theta_{\chi_j,\rho}$ si y solo si $i = j$ y $\sigma \cong \rho$.*
3. *Si π es una representación irreducible de G, entonces existen σ e i tal que $\pi \cong \theta_{\chi_i,\sigma}$.*

7. Representaciones irreducibles del grupo D_{2n}

Recordemos algunos hechos con respecto a las representaciones irreducibles y caracteres asociados al grupo diedral D_{2n}.

Sea $D_{2n} = \langle R, S \mid R^n = S^2 = I, SR = R^{-1}S\rangle$ una presentación del grupo diedral D_{2n}.

1. Numero y dimensión de las representaciónes irreducibles del grupo diedral D_{2n}.
   a) Las representaciones irreducibles del grupo D_{2n} son de dimensión 1 y 2.
   b) Si n es impar, D_{2n} posee dos representaciones de dimensión 1 y $\frac{n-1}{2}$ representaciones de dimensión 2.
   c) Si n es par, D_{2n} posee cuatro representaciones de dimensión 1 y $\frac{n}{2} - 1$ representaciónes de dimensión 2.
2. Tabla de caracteres representaciones 1-dimensionales.

Tabla de caracteres para D_{2n}		
	R^k	SR^k
1	1	1
ϕ	1	-1
ψ	$(-1)^k$	$(-1)^k$
sgn	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

CUADRO 1. Caso n par

Tabla de caracteres para D_{2n}		
	R^k	SR^k
1	1	1
sgn	1	-1

CUADRO 2. Caso n impar

3. Caracteres representaciones irreducibles 2-dimensionales.

   En ambos casos (n par o impar) tenemos que el caracter de las representaciones de dimensión 2 para G esta dado por,

$$\chi_p(R^k) = 2\cos\left(\frac{2\pi pk}{n}\right), \ \chi_p(SR^k) = 0$$

donde $0 < p < \frac{n}{2}$.

Capítulo 2

Grupoides

1. Propiedades y definiciones iniciales

DEFINICIÓN 16. *Una Categoria C consiste en un conjunto de objetos $Obj(C)$, un conjunto de morfismos $Fl(C)$ y dos funciones α, β de $Fl(C)$ en $Obj(C)$ tal que,*

1. *Dados $a, b \in Obj(C)$ existe un conjunto de morfismos, el cual denotaremos por:*

$$Hom_C(a,b) := \{f \in Fl(C) \ : \ \alpha(f) = a, \ \beta(f) = b\}.$$

2. *Dados $a, b, c \in Obj(C)$ existe una ley de composicion, denotada por $\circ$, de $Hom_C(a,b) \times Hom_C(b,c)$ en $Hom_C(a;c)$ que es asociativa.*
3. *Para todo $a \in Obj(C)$ existe un morfismo identidad denotado por 1_a, tal que para todo $f \in Hom_C(a;b)$ se cumple lo siguiente.*

$$1_b \circ f = f \circ 1_a = f.$$

Si ademas C

4. *Para todo $f \in Hom_C(a,b)$ existe $f^{-1} \in Hom_C(b,a)$ tal que,*

$$f \circ f^{-1} = 1_b \quad ; \quad f^{-1} \circ f = 1_a,$$

se dira que C es un grupoide.

OBSERVACIÓN 12. *Observemos lo siguiente.*

1. *Si C es una Categoria,*

$$Fl(C) = \bigcup_{a,b \in Obj(C)} Hom_C(a,b)$$

2. *Se tiene un único morfismo identidad para cada objeto. Por lo cual podemos identificar todo objeto a con su respectivo morfismo identidad 1_a. Según sea el caso, podemos dar a conocer un grupoide por su conjunto de morfismos.*
3. *Se tiene un único morfismo inverso para cada morfismo en el grupoide.*

DEFINICIÓN 17. *Diremos que un grupoide C es conexo si y sólo si para todo $a, b \in Obj(C)$ se tiene que $|Hom_C(a, b)| \neq 0$.*

OBSERVACIÓN 13. *Todo grupo G es un grupoide. Consideremos para ello el conjunto de objetos $Obj(G) = \{e\}$, donde e es el neutro en G, y el conjunto de morfismos $Hom_G(e, e) = G$, cuya ley de composición es el producto en G.*

PROPOSICIÓN 13. *Sea $a \in Obj(C)$, el conjunto de todos morfismos que se inician y finalizan en a es un grupo. Si $b \in Obj(C)$ y existe $\alpha \in Hom_C(a, b)$, entonces $Hom_C(b, b) = \alpha Hom_C(a, a)\alpha^{-1}$, más aún*

$$Hom_C(a, a) \cong Hom_C(b, b)$$

DEMOSTRACIÓN. Lo primero es claro, pues todo objeto a tiene asociado una única identidad 1_a. Además la ley de composición es asociativa, y para cada morfismo existe único inverso.

Ahora, sea $\alpha \in Hom_C(a, b)$ y $g \in hom_C(a, a)$ es claro que $\alpha g \alpha^{-1} \in hom_C(b, b)$. Por lo cual $\alpha Hom_C(a, a)\alpha^{-1} \subset Hom_C(b, b)$. Ahora si $f \in hom_C(b, b)$, entonces $\alpha(\alpha^{-1} f \alpha)\alpha^{-1} \in hom_C(a, a)$, donde se tiene que $\alpha^{-1} f \alpha \in hom_C(a, a)$. El isomorfismo es claro pues ambos grupos son conjugados, es decir, se tiene la aplicación.

$$\begin{array}{rccc} \phi: & Hom_C(a, a) & \longrightarrow & Hom_C(b, b) \\ & f & \longmapsto & \phi(f) := \alpha \circ f \circ \alpha^{-1}, \end{array}$$

□

Como consecuencia de la anterior proposición, dado un grupoide conexo, le podemos asociar un grupo, salvo isomorfía.

DEFINICIÓN 18. *Sea C un grupoide conexo. Llamaremos* tipo de holonomía *a la clase de isomorfía del grupo de holonomía asociado a dicho grupoide.*

Al tipo de holonomia del grupoide lo anotaremos por $\mathbb{H}$. *Denotaremos por* $\mathbb{H}_a$ *a la copia de la holonomia asociada al objeto* a *del grupoide.*

PROPOSICIÓN 14. *Dados* $a, b \in Obj(C)$. *Si existe* $\alpha \in Hom_C(a, b)$, *entonces.*

$$Hom_C(a, b) \;=\; \alpha\; Hom_C(a, a),$$

donde,

$$\alpha\; Hom_C(a, a) \;=\; \{\alpha \circ f : f \in Hom_C(a, a)\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que

$$(\alpha \circ f) \in Hom_C(a, b) \quad ; \quad \forall f \in Hom_C(a, a),$$

Por otro lado si $g \in Hom_C(a, b)$, entonces

$$\beta = (\alpha^{-1} \circ g) \in Hom_C(a, a),$$

con lo cual,

$$g = (\alpha \circ \beta) \in \alpha\; Hom_C(a, a).$$

□

OBSERVACIÓN 14. *Si* $f, g \in Hom_C(a, a)$ *y* $\alpha \in Hom_C(a, b)$. *Es claro que* $f = g \iff (\alpha \circ f) = (\alpha \circ g)$, *con lo cual*

$$|Hom_C(a, b)| \;=\; |Hom_C(a, a)|,$$

en el caso que $|Hom_C(a, a)| \;<\; \infty$

Podemos observar que todo grupoide conexo determina de manera única un par de la forma (G, X), donde G es el grupo, salvo isomorfía, asociado a dicho grupoide y X es el conjunto de objetos del grupoide. La siguiente proposición da respuesta al reciproco de esta observacion.

PROPOSICIÓN 15. *Dados un grupo* G *y un conjunto* $X \neq \phi$, *entonces existe de manera única un grupoide* $\mathbb{G}$ *asociado al par* (G, X).

DEMOSTRACIÓN. Para el caso en que $|X| = 1$ entonces el grupoide asociado es simplemente $\mathbb{G} = G$.

A continuación supongamos que $|X| > 1$ y denotemos por

1. $Obj(\mathbb{G}) \;=\; X$.

2. $Hom_{\mathbb{G}}(a,a) = G$, con $a \in Obj(\mathbb{G})$.
3. Sean $a \neq b \in Obj(\mathbb{G})$ y $\lambda = (a,b)$. Definimos un morfismo con inicio a y llegada b, como la yuxtaposición de λ con un elemento g del grupo G, es decir,

$$Hom_{\mathbb{G}}(a,b) = \lambda\ G,$$

con la condición, $\lambda\ 1 = \lambda$.

A continuación definiremos la ley de composición, la cual denotaremos $\circ$.

Sean $(a,b)g_1 \in Hom_{\mathbb{G}}(a,b)$, y $(b,c)g_2 \in Hom_{\mathbb{G}}(b,c)$.

$$((a,b)g_1) \circ ((b,c)g_2) = (a,c)(g_1g_2),$$

Es claro que $\circ$ es una operación binaria asociativa. Además para cada objeto a existe el morfismo identidad $((a,a)\ 1)$.

Si $((a,b)g) \in Hom_{\mathbb{G}}(a,b)$, también es claro que:

$$((a,b)g)^{-1} = (b,a)\ g^{-1}$$

esto demuestra que $\mathbb{G}$ es un grupoide. □

Definición 19. *Sean las categorías C, D. Sea F una aplicación entre ambas categorías. Diremos que F es un funtor (covariante) si y sólo si.*

⋄ *Para todo objeto a en C se debe tener que $F(a)$ es un objeto en D.*

⋄ *Para todo morfismo f de a en b se debe tener que $F(f)$ es un morfismo de $F(a)$ en $F(b)$ tal que*

1. $F(1_a) = 1_{F(a)}$ *para todo objeto en C.*
2. $F(fog) = F(f)oF(g)$ *para todos los morfismos $f : a \to b$ y $g : b \to c$.*

Podemos observar que si $f : a \to b$ es un morfismo entonces $F(f^{-1}) = F(f)^{-1}$.

Consideremos los grupoides C, D y F funtor entre dichos grupoides. Es claro que la imagen de $Hom_C(a,a)$ bajo F, para algún objeto a en C, es un grupo en el grupoide D, pues F preserva la estructura de grupoide.

PROPOSICIÓN 16. *Sea $F : C \to D$ funtor entre dos grupoides C y D. Si C es conexo entonces el grupoide $F(C)$ tambien lo es.*

PROPOSICIÓN 17. *Sea $F : C \to D$ funtor entre los grupoides C y D. Consideremos a y b objetos en C tal que existe un morfismo α de a en b entonces la imagen bajo F de cada grupo de holonomía asociado a a y b, respectivamente, son grupos isomorfos.*

DEMOSTRACIÓN. Como α es un morfismo desde a en b tenemos que $\phi : f \longmapsto \alpha \circ f \circ \alpha^{-1}$ es un isomorfismo entre los grupos de holonomía asociados a a y b respectivamente.

Consideremos la aplicación $\hat{\phi}$ entre las imagenes bajo F de los grupos de holonomía de a y b respectivamente, definida del modo siguiente. Sea $f : a \to a$ morfismo.

$$\hat{\phi}(F(f)) := F(\phi(f))$$

Es claro que $\hat{\phi}$ es isomorfismo, pues F es un funtor y ϕ es un isomorfismo. Por lo tanto:

$$F(Hom_C(a, a)) \cong F(Hom_C(b, b))$$

□

A continuación daremos algunos ejemplos de grupoides. Muchos de ellos serán objeto de estudio en el presente trabajo.

2. Grupoides. Ejemplos y Propiedades

En lo que sigue daremos algunos ejemplos de Grupoides, los cuales serán objeto de estudio en el presente trabajo. Para lo siguiente, anotaremos al conjunto de todos los morfismos de algún grupoide C por $Hom(x, y)$ versus la notación anterior, $Hom_C(x, y)$.

EJEMPLO 1. *Consideremos un conjunto $X \neq \emptyset$ dotado de una relación de equivalencia $\sim$. A continuación definiremos un grupoide M asociado al par $(X, \sim)$.*

Definamos al conjunto de objetos de M por X, es decir, $Obj(M) = X$. Ahora para dos objetos $x,\ y\ \in X$, diremos que existe un morfismo (o flecha) de x en y, el cual denotaremos por $(x\ :\ y)$, si y sólo si $x \sim y$.

Dados $x, y, z \in X$ tal que $x \sim y$ e $y \sim z$ tenemos, por la transitividad de la relación $\sim$, la ley de composición $\circ$.

$$(x\ :\ y) \circ (y\ :\ z) := (x\ :\ z).$$

Es claro que dicha ley de composición $\circ$ es asociativa.

OBSERVACIÓN 15. *Si $x, y \in X$ entonces el morfismo identidad de x es $1_x = (x\ :\ x)$. Ademas $(x\ :\ y)^{-1} = (y\ :\ x)$.*

El tipo de holonomia para el grupoide M es trivial, con lo cual existe a lo mas un morfismo entre dos elementos distintos.

Por lo anterior tenemos que dado un par $(X, \sim)$ existe, de forma única, un grupoide M asociado. El reciproco a esta afirmación tàmbien es cierto.

PROPOSICIÓN 18. *Sea M un grupoide, entonces existen un conjunto X y una relacion de equivalencia definda sobre el, determinados por el grupoide M.*

DEMOSTRACIÓN. Sea M un grupoide. Consideremos la relación siguiente: Sean $a, b \in Obj(M)$. Diremos que $a \sim b$ si y solo si existe $f \in HomM(a, b)$. Es claro, dado que M es un grupoide, que la relación antes descrita es de equivalencia. El par asociado al grupoide M es $(Obj(M), \sim)$. □

EJEMPLO 2. *Sea G un grupo y X un G-espacio.*

Asociaremos a la acción de G sobre X un grupoide, al cual denotaremos por $M(G : X)$, y lo llamaremos Grupoide de Movimientos.

El conjunto de objetos del grupoide es $Obj(M(G : X)) = X$. Ahora si $x, y \in X$, un morfismo de x en y es una terna (x, g, y), tal que $g \cdot x = y$.

Dados (x, g, y), (y, h, z) dos morfismos en $M(G : X)$, definamos la ley de composición $\circ$, como sigue:

$$(y, h, z) \circ (x, g, y) := (x, hg, z),$$

la cual es asociativa.

OBSERVACIÓN 16. *Si $x, y \in X$ y $g \in G$ entonces el morfismo identidad asociado a x es $1_x = (x, e, x)$, donde e es el nuetro en G. Ademas $(x, g, y)^{-1} = (y, g^{-1}, x)$*

PROPOSICIÓN 19. *Sea X un G-espacio transitivo finito. Sean $x, y \in X$. Si $G(x)$ es el grupo de isotropia en x y $M(G : X)$ el grupoide de movimientos asociado, entonces*

$$Hom(x, x) \cong G(x),$$

mas aun $|Hom(x, y)| = \frac{|G|}{|X|}$

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in X$ y $G(x)$ su grupo de isotropía asociado. Consideremos la funcion,

$$\begin{array}{rccc} \phi : & Hom(x, x) & \longrightarrow & G(x) \\ & (x, g, x) & \longmapsto & \phi(x, g, x) := g. \end{array}$$

Dicha funcion es claramente un isomorfismo de grupos. Del hecho que la accion es transitiva tenemos

$$|Hom(x, x)| = \frac{|G|}{|X|}.$$

Mas aún como el grupoide es conexo, entonces $|Hom(x, y)| = \frac{|G|}{|X|}$. $\square$

La anterior proposición no permite considerar la holonomia del grupoide de movimientos como la isotropia asociado a algun objeto, pues $\mathbb{H}_x \cong G(x)$, por lo cual, a $\mathbb{H}$ lo podemos considerar como $G(x)$ para algún objeto x.

Proposición 20. *Sea G un grupo y X un G-espacio transitivo finito, el cardinal de $Fl[M(G:X)]$ es igual a $|G||X|$.*

Demostración. Sea $C = M(G:X)$ entonces

$$Fl[M(G:X)] = \dot{\bigcup_{x\in X}}[\dot{\bigcup_{y\in X}} Hom_C(x,y)]$$

se tiene lo siguiente:

$$|Fl[M(G:X)]| = \sum_{x\in X}[\sum_{y\in X}|Hom_C(x,y)|\,] = \sum_{x\in X}[\sum_{y\in X}|Hom_C(x,x)|\,] = \sum_{x\in X}\sum_{y\in X}\frac{|G|}{|X|}$$

$$\therefore\ |Fl[M(G:X)]| \ = \ \frac{|G|}{|X|}\,|X|^2 = |G|\,|X|.$$

□

Observación 17. *Si el grupo G actúa en forma no-transitiva, el problema se reduce al estudio en cada órbita asociada a la acción, pues G actúa de forma transitiva sobre cada órbita. En cuyo caso se tiene,*

$$Fl(M(G:X)) = \bigcup_{x\in S_X} Fl[M(G:O_x)],$$

donde S_X es un sistema de representantes para la acción en cuestión. Con lo cual,

$$|Fl(M(G:X))| = |G| \sum_{x\in S_X}|O_x| = |G||X|.$$

Un caso particular de lo anterior es tomar $G = D_{2n}$, el grupo de simetrías del n-agono regular, y X =n-agono regular , en cuyo caso obtenemos $|M(G:X)| \ = \ 2n^2$.

Cabe notar que dados dos objetos en X solo existen dos morfismos que los conectan, uno proveniente de una rotación y otro de una reflexión.

El tipo de holonomía asociado al grupoide de movimientos para el caso $G = D_{2n}$ tiene como representante al grupo cíclico de orden dos C_2.

PROPOSICIÓN 21. *Sea G un grupo y X un G-espacio transitivo. Si C es un grupoide y $F : M(G : X) \to C$ un funtor covariante, entonces*

$$F(Hom_C(x,x)) \cong F(Hom_C(g \cdot x, g \cdot x)),$$

para todo $g \in G$ y $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar la proposición 17 y la definición de grupoide de movimientos. □

EJEMPLO 3. *Otro ejemplo es el que llamaremos grupoide de caminos. Para ello consideremos un grafo T para el cual V denotará el conjunto de nodos, y A denotará el conjunto aristas.*

Un camino en el grafo T es una secuencia de nodos de la forma $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n+1})$, tal que si $v_i \neq v_{i+1}$ entonces $\{v_i, v_{i+1}\} \in A$, donde $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Un bucle es un camino cuyo nodo inicial coincide con su nodo final. Un camino se dice simple si es de la forma (v, w).

Sean $f = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ y $g = (w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m)$ dos càminos en T. Se define el camino compuesto $(f\ g)$, simplemente como la yuxtaposición de ambos caminos, siempre que $v = v_n = w_1$, es decir,

$$f\ g \ = \ (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v, w_2, w_3, \ldots, w_{n+1})$$

el cual es asociativa.

Como todo camino tiene una escritura en terminos de caminos simples y en el caso que el grafo sea finito, se define el largo de un camino f, lo cual anotaremos $l(f)$, como la cantidad de caminos simples que componen a f.

OBSERVACIÓN 18. *Dado el camino $f = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$, la identidad izquierda y derecha son los caminos simples (v_1, v_1) y (v_n, v_n) respectivamente. Notemos que $(v, w)^{-1} = (w, v)$, asi el camino inverso de f es:*

$$f^{-1} = (v_n, v_{n+1})^{-1} \ldots (v_2, v_3)^{-1}(v_1, v_2)^{-1}$$

.

DEFINICIÓN 20. *Sea f un camino. Llamaremos reducción de f, lo cual anotaremos por $R(f)$, al camino resultante de la simplificación de cada producto $(v, w)(v, w)^{-1}$ y de los terminos (v, v) en f.*

Sea T un grafo y c el conjunto de todos los caminos en el grafo T. Diremos que dos caminos f y g en el conjunto c, están relacionados si la reducción de f coincide con la de g, es decir, $R(f) = R(g)$. La relación antes definida es de equivalencia, llamada relación de homotopía.

Anotemos $c_0 = c/\sim$. Definimos, sobre c_0, la operacion binaria

$$[f]\ [h] := [f\ h] \quad \forall\, [f], [h] \in c_0,$$

la cual es asociativa.

DEFINICIÓN 21. *Sea T grafo y c el conjunto de todos los caminos en el grafo T. Se define el Grupoide de Caminos $\pi(T)$ asociado a T como sigue.*

$$Obj(\pi(T)) = V \quad ; \quad Fl(\pi(T)) = c_0,$$

cuya ley de composición es la antes definida. Al tipo de holonomia en un nodo v lo denotaremos por $\pi_1(T, v)$.

Las definiciones del largo de un camino y bucle se extienden de forma natural sobre c_0, a saber, $[f]$ es un bucle si f lo es y $l([f]) = l([R(f)])$.

OBSERVACIÓN 19. *Dado el objeto v en el grafo T, la clase de homotopía $[(v, v)]$ es la identidad asociada a dicho objeto. Además si $[f] \in C_0$ su inverso es $[f]^{-1} = [f^{-1}]$.*

DEFINICIÓN 22. *Sean $[f]$ bucle y m número entero. Se define $[f]^m$ como sigue. Si $m > 0$ entonces $[f]^m := [f][f]\cdots[f]$, m-veces. Si $m < 0$ entonces $[f]^m = [f]^{-1}[f]^{-1}\cdots[f]^{-1}$, $(-m)$-veces. Si $m = 0$ entonces $[f]^0 = [(v, v)]$, donde v es el nodo inicial de f.*

Un caso particular es considerar T como un n-agono. Para cuyo caso el tipo de holonomia es $\mathbb{Z}$. Para ello basta hacer notar que $\pi_1(T, v_1) =< f_0 >$, donde $f_0 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, con v_i los nodos del grafo T.

EJEMPLO 4. *A continuación definiremos el grupoide S.*

Sean $n \in \mathbb{N}$ y X_n un conjunto de n elementos. Definimos el conjunto de objetos por $Obj(S) = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ y el conjunto de morfismos por $Fl(S) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{f : X_n \to Y_n : f \text{ biyección}\}$.

Notemos lo siguiente. Si $n \in \mathbb{N}$, el grupo de holonomía asociado al objeto X_n es S_n.

EJEMPLO 5. *Sea k un cuerpo. Se define el grupoide lineal $GL(k)$ de modo siguiente*

Definamos el conjunto de objetos por $Obj(GL(k)) = \{V : V\ k\text{−}esp.vect\}$ y el conjunto de morfismos por

$$Fl(GL(k)) = \cup_{V,W esp.vect/k}\{T : V \to W\ :\ T isomorfismo\}$$

Notemos que el grupo de holonomía asociado al espacio vectorial V de dimensión n es $GL_n(k)$.

3. Definiciones: Representación para un grupoide

DEFINICIÓN 23. *Sea D un grupoide. Se llama representación de D a toda tripleta $(D, F, GL(\mathbb{C}))$ donde F es un funtor de D en $GL(\mathbb{C})$. Decimos que la representación es finita si se tiene que dim $F(a)$ es finita para cada objeto a en el grupoide D.*

Si D es conexo, una representación es finita y de dimensión n si dim $F(a) = n$ para todo objeto a en el grupoide.

DEFINICIÓN 24. *Sea C un grupoide y $(C, F, GL(\mathbb{C}))$ una representación de C. Una subrepresentación $(C, T, GL(\mathbb{C}))$ de $(C, F, GL(\mathbb{C}))$ es una representación de C tal que $T(a)$ es una representación de $F(a)$ para todo a, y cualquier función lineal $f^* : T(a) \to T(b)$ es la restricción de algún morfismo $f : F(a) \to F(b)$ en $(C, T, GL(\mathbb{C}))$.*

DEFINICIÓN 25. *Sea C un grupoide y $(C, F, GL(\mathbb{C}))$ una representación de dimensión finita. Diremos que esta representación es irreducible si no existen subrepresentaciones propias de ella.*

Podemos recordar que todo grupo G, en particular, es un grupoide. Para ello basta tomar, por el conjunto de objetos, al constituido solamente por el elemento neutro y por el conjunto de flechas al mismo grupo. En particular, el grupo multiplicativo $\mathbb{C}^{\times}$ es un grupoide.

DEFINICIÓN 26. *Sea C un grupoide. Llamaremos carácter de C a todo funtor covariante $\chi : C \to \mathbb{C}^{\times}$.*

El conjunto de carácteres asociados al un grupoide C tiene una estructura natural de grupo, a saber:

$$(\chi_1\chi_2)(f) = \chi_1(f)\chi_2(f),$$

para todo morfismo f en el grupoide C (identificar todo objeto con el morfismo identidad en dicho objeto).

PROPOSICIÓN 22. *Sean C un grupoide, $\alpha : a \to b$ morfismo en C y F es una representación de C, entonces*

$$F(Hom_C(b, b)) = F(\alpha)F(Hom_C(a, a))F(\alpha)^{-1}$$

más aún, si F sea un carácter $F(Hom_C(b, b)) = F(Hom_C(a, a))$.

DEMOSTRACIÓN. Como $Hom_C(b,b) = \alpha Hom_C(a,a)\alpha^{-1}$, aplicando el funtor F ambos lados de la ecuación se obtiene el resultado. Ahora si F es un carácter $F(Hom_C(b,b)) = F(Hom_C(a,a))$, pues $F(\alpha) \in \mathbb{C}^\times$ □

PROPOSICIÓN 23. *Toda representación 1-dimensional de un grupoide es un carácter y viceversa.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(D, F, GL(\mathbb{C}))$ una representación de dimensión 1, entonces $dim\ F(a) = 1$ para cada objeto a en el grupoide D, por lo cual $F(a) \cong \mathbb{C}$. Ahora podemos identificar de manera única todo objeto a en el grupoide con su morfismo identidad 1_a y por lo cual, bajo esta identificación, $F(a) = F(1_a) = 1$. A continuación recordemos que el conjunto de objetos para el grupo $\mathbb{C}^\times$ esta constituido por su elemento neutro 1. Mas aún, para cada morfismo $f : a \to b$ en el grupoide, tenemos que $F(f) \in \mathbb{C}^\times$. Por lo cual toda representación de dimensión 1 es un carácter. □

4. Caracteres para ciertos grupoides de movimientos

Daremos a continuación algunas observaciones y ejemplos sobre caracteres asociados a un grupoide de movimientos $M(G:X)$. Asumamos que X es un G-espacio transitivo y sea χ un carácter asociado al grupoide de movimientos $M(G:X)$.

Algunas observaciones al respecto del carácter χ.

1. Por ser χ un funtor se tiene que $\chi(1_a) = 1$ para todo objeto a en el grupode $M(G:X)$. En el caso que $f : a \to a$ y $\chi(f) = \lambda$ entonces es claro que $\chi(f^{-1}) = \lambda^{-1}$.
2. Sea $\mathbb{H}$ el tipo de holonomia del grupoide y $\mathbb{H}_a$ una representación de $\mathbb{H}$ asociado al objeto a. Sea $f : a \to a$ un elemento en la holonomia, entonces tenemos que $[\chi(f)]^{|\mathbb{H}_a|} = 1$. Si $n = |\mathbb{H}_a|$ entonces $\chi(f) = e^{\frac{2\pi k i}{n}}$, donde $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$.
3. Como $hom(i,j) = \alpha\ hom(i,i)$ para algún morfismo $\alpha : i \to j$. Por lo cual, si consideramos el morfismo $g : i \to j$ entonces existe único morfismo $f : i \to i$ de modo que $g = \alpha \circ f$ entonces $\chi(g) = e^{\frac{2\pi k_g i}{n}}\chi(\alpha)$, para un unico $k_g \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$.
4. Sean $\mathbb{H}_i$ y $\mathbb{H}_j$ dos copias de la holonomia, asociadas a los objetos i y j respectivamente. Teniendo presente la proposición 21, podemos observar que $\chi(\mathbb{H}_i) \cong \chi(\mathbb{H}_j)$.

Debido a la observación (3), para el grupoide de movimientos $M(D_{2n}, X_n)$ tenemos que si σ y τ son dos reflexiones en G que fijan a i y j respectivamente, entonces $\chi(i,\sigma,i) = \chi(j,\tau,j)$. Mas aún identificando el tipo de holonomia de G, que es C_2, con los grupos de holonomia en cuestión, se tiene que $\chi|_{G(i)} = \chi|_{G(j)}$.

Comencemos cárácterizando al grupo de carácteres asociados al grupoide de movimientos $M(G:X)$ cuyo espacio geometrico asociado es (X_n, D_{2n}), donde X_n es el n-agono regular.

Proposición 24. *El grupo de carácteres asociado al grupoide de movimientos esta parametrizado por el conjunto siguiente:*

$$C_2 \times \{(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_1 z_2 z_3 \cdots z_n = 1\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que $Hom(i,j) = \alpha\ Hom(i,i)$, para algún $\alpha \in Hom(i,j)$ y todo i,j en X. Tambien podemos notar que $|Hom(i,j)| = 2$.

Consideremos primero dos nodos adyacentes, digamos $i \in X$ y $j = i+1$. Los unicos dos morfismos que conectan dichos nodos son (i,ρ,j) y (i,β,j), donde ρ es la rotación en $\frac{2\pi}{n}$ grados y β es alguna reflexion en G. Por lo tanto

$$(i,\beta,j) = (i,\rho,j) \circ (i,\sigma,i),$$

donde σ es alguna reflexión que fija al nodo i.

Sea χ algún carácter del grupoide en cuestión. Aplicando χ a la ecuacion anterior obtenemos,

$$\chi(i,\beta,j) = \omega\ \chi(i,\rho,j),$$

donde $\omega \in \mathbb{C}$ es tal que $\omega^2 = 1$.

Sean $z_k = \chi(k,\rho,k+1)$ con $1 \leq k \leq n-1$ y $z_n = \chi(n,\rho,1)$, los cuales son números complejos no nulos, más aún, su modulo es igual a 1, pues como $\rho^n = 1$ tenemos que,

$$z_1 z_2 z_3 \cdots z_n = 1,$$

Ahora si los nodos son no adyacentes, digamos $i \in X$ y $j = i+r$ y suponemos que τ y γ son, respectivamente, la rotación y reflexión que conectan dichos nodos. Basta notar que $\rho^r = \tau$, con lo cual

$$\chi(i,\gamma,j) = \omega\ \Pi_{k=i}^{i+r} z_k,$$

donde $\omega \in \mathbb{C}$ es tal que $\omega^2 = 1$.

Ahora, teniendo presente que el tipo de holonomia para el grupoide es C_2, si g y h son dos autoflechas $\neq 1$ de los nodos j e i respectivamente y f es una flecha transitiva que los conecta entonces $\chi(g) = \chi(f)\chi(h)\chi(f)^{-1}$, con lo cual, $\chi(g) = \chi(h) = \omega$. □

Teniendo presente la parametrización anterior, anotaremos a los elementos del grupo de carácteres asociados al grupoide de movimientos $M(D_{2n} : X_n)$ de la forma $\chi_{(z,w)}$, donde $z \in \mathbb{C}^n$ y $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^2 = 1$, dadas por

$$\chi_{(z,w)}(f) := \begin{cases} z_i & \text{si } f = (i, \rho, i+1) \\ w & \text{si } f = (i, \alpha, i). \end{cases}$$

donde z_i es la coordenada i-esima del vector z.

PROPOSICIÓN 25. *Sean* $z, w \in \mathbb{C}^n$ *entonces* $\chi_{(z,1)} \simeq \chi_{(w,1)}$ *y además* $\chi_{(z,-1)} \simeq \chi_{(w,-1)}$.

A continuación recordemos la tabla de carácteres para el grupo diedral D_{2n}.

Tabla de carácteres para D_{2n}		
	R^k	SR^k
1	1	1
sgn	1	-1

CUADRO 1. Caso n impar

Tabla de carácteres para D_{2n}		
	R^k	SR^k
1	1	1
ϕ	1	-1
ψ	$(-1)^k$	$(-1)^k$
sgn	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

CUADRO 2. Caso n par

Podemos construir representaciones del grupoide $M(D_n : X)$ proyectandolo sobre el grupo D_{2n} y luego aplicando una representación de dicho grupo.

Sea $P : M(D_n : X) \to D_{2n}$ proyeccion. De este modo tenemos que, para el caso n impar, $1 \cdot T = \chi_{(1,1)}$ y ademas $sgn \cdot T = \chi_{(1,-1)}$. Para el caso n par, tenemos que $1 \cdot T = \chi_{(1,1)}$, $\phi \cdot T = \chi_{(1,-1)}$, $\psi \cdot T = \chi_{(u_0,1)}$ y por ultimo $sgn \cdot T = \chi_{(v_0,-1)}$, donde u_0 y v_0 son elementos en $\mathbb{C}^n$ definidos por $u_0 = (1, -1, \cdots, -1)$ y $v_0 = (-1, \cdots, -1, 1)$.

5. Representación Natural Torcida. Modelos de Gelfand

El trabajo siguiente tiene por finalidad encontrar modelos de Gelfand para ciertos grupos, para lo cual se hara uso del grupoide de movimiento asociado a dichos grupos y su grupo de carácteres o representaciones 1−dimesionales. Un primer caso sera considerar $G = D_{2n}$.

A continuación presentaremos la definición de representación natural torcida por un carácter α del grupoide de movimientos $M(G : X)$, asociada a un espacio geométrico (X, G), extraída de [4].

DEFINICIÓN 27. *Sea (X, G) un espacio geométrico. Consideremos la representación natural $(L^2(X), \rho)$ asociada al grupo G. La representación $(L^2(X), \rho^\alpha)$, que llamaremos representación natural torcida por el carácter α, es tal que si $g \in G$, $x \in X$ y $f \in L^2(X)$,*

$$(\rho_g^\alpha f)(x) = \alpha(g^{-1} \cdot x, g, x)(\rho_g f)(x),$$

Diremos que X es un G-espacio de Gelfand para el grupo G, si la representación natural torcida por algún carácter α del grupoide de movimientos $M(G : X)$ es un modelo de Gelfand para G.

Podemos observar que en el caso que se tenga un modelo de Gelfand para un grupo dado G, su dimensión es la suma de todas las dimensiones de representaciones irreducibles del grupo en cuestión, es decir, si $\rho_1, \cdots, \rho_n$ son todas las representaciones irreducibles del grupo G, entonces

$$dim\ \rho = dim(\rho_1) + \cdots + dim(\rho_n)$$

En cuyo caso, el G-espacio de Gelfand asociado, posee cardinal la suma de todas las dimensiones, es decir,

$$|X| = dim(\rho_1) + \cdots + dim(\rho_n)$$

Por lo cual, cualquiera dos G-espacios de Gelfand poseen el mismo cardinal.

NOTACIÓN 3. *Dado un grupo G, un modelo de Gelfand de G lo denotaremos por M_G y a su respectiva dimensión la denotaremos por $m(G)$.*

A continuación demostraremos que ρ^α es un homomorfismo de grupos. Es claro que $\rho_g^\alpha \in End(L^2(X))$, pues $\rho_g \in End(L^2(X))$. Sean $g, h \in G$, $f \in L^2(X)$ y $x \in X$.

$$\begin{aligned}
\rho_g^\alpha(\rho_h^\alpha f)(x) &= \alpha(g^{-1}\cdot x, g, x)\rho_g(\rho_h^\alpha f)(x)\\
&= \alpha(g^{-1}\cdot x, g, x)\alpha(h^{-1}g^{-1}\cdot x, h, g^{-1}\cdot x)(\rho_h f)(g^{-1}\cdot x)\\
&= \alpha(g^{-1}\cdot x, g, x)\alpha(h^{-1}g^{-1}\cdot x, h, g^{-1}\cdot x)f(h^{-1}g^{-1}\cdot x)\\
&= \alpha(h^{-1}g^{-1}\cdot x, gh, x)f(h^{-1}g^{-1}\cdot x)\\
&= (\rho_{gh}^\alpha f)(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\rho_{g^{-1}}^\alpha = (\rho_g^\alpha)^{-1}$, con lo cual $\rho_g^\alpha \in Aut(L^2(X))$ y ρ^α es una representación del grupo G.

La siguiente proposición sera útil para encontrar un X espacio de Gelfand para el grupo diedral D_{2n}.

PROPOSICIÓN 26. *Sea X un G-espacio y α un carácter del grupoide $M(G:X)$. Si $X = \bigcup_{i=1}^r X_i$ es la descomposición en G-órbitas de X donde X_i es la orbita asociada al punto x_i en X. Si H_i es el grupo de isotropía de cada punto x_i para cada $i \in \{1, \cdots, r\}$ entonces,*

$$(L^2(X), \rho^\alpha) \cong \bigoplus_{i=1}^r Ind_{H_i\uparrow G}\ \alpha|_{H_i},$$

tal que $\alpha|_{H_i}(h) = \alpha(x_i, h, x_i)$, para todo $h \in H_i$.

DEMOSTRACIÓN. Podemos observar que $(\mathbb{C}, \alpha|_{H_i})$ es una representación 1-dimensional de H_i, pues α es un carácter del grupoide $M(G:X)$.

Sean $x = x_i$ y $f \in L^2(\{x_i\})$, entonces

$$(\rho_h^\alpha f)(x_i) = \alpha(x_i, h, x_i)f(x_i) \ \ \forall h \in H_i.$$

Así $(\rho_h^\alpha f) = (\alpha|_{H_i})_h(f)$ sobre $\{x_i\}$. Por lo tanto

$$(L^2(\{x_i\}), \rho^\alpha|_{H_i}) \cong (\mathbb{C}, \alpha|_{H_i}),$$

donde $L^2(\{x_i\})$ se identifica al subespacio H-estable de $L^2(X)$ formado de las funciones cuyo soporte está contenido en $\{x_i\}$.

Observemos que $L^2(X_i) \cong \bigoplus_{x\in X_i} L^2(\{x\})$. Teniendo presente el lema 1 tenemos que $(L^2(X_i), \rho^\alpha) \cong Ind_{H_i\uparrow G}\ \rho^\alpha|_{H_i}$. Con lo cual

$$Ind_{H_i\uparrow G}\ \alpha|_{H_i} \cong Ind_{H_i\uparrow G}\ \rho^\alpha|_{H_i} \cong (L^2(X_i), \rho^\alpha) \leq_G (L^2(X), \rho^\alpha),$$

entonces

$$(L^2(X), \rho^\alpha) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} Ind_{H_i \uparrow G}\ \rho^\alpha|_{H_i} \cong \bigoplus_{i=1}^{r} Ind_{H_i \uparrow G}\ \alpha|_{H_i},$$

pues $L^2(X) \cong \bigoplus_{i=1}^r L^2(X_i)$, donde $L^2(X_i)$ se identifica al subespacio de $L^2(X)$ formado de las funciones cuyo soporte está contenido en X_i, lo cual concluye la demostración. □

Observación 20. *Observemos que si β es otro carácter asociado al grupoide de movimientos en cuestión, tal que $\beta|_{H_i} = \alpha|_{H_i}$ para todo indice i, entonces $\rho^\alpha \cong \rho^\beta$.*

Proposición 27. *Sea α un carácter de $M(G : X)$. El carácter de la representación natural torcida $(L^2(X), \rho^\alpha)$ está dado por la formula siguiente*

$$\chi_{\rho^\alpha}(g) = \sum_{x \in X_g} \alpha(x, g, x)$$

donde $X_g = \{x : g \cdot x = x\}$.

Demostración. Una base para el espacio de funciones $L^2(X)$ es la formada por los deltas kronecker. Sean $x, y \in X$, entonces

$$\begin{aligned}(\rho_g^\alpha \delta_x)(y) &= \alpha(g^{-1} \cdot y, g, y)(\rho_g \delta_x)(y) \\ &= \alpha(g^{-1} \cdot y, g, y)\delta_x(g^{-1} \cdot y) \\ &= \alpha(x, g, g \cdot x)\delta_{g \cdot x}(y)\end{aligned}$$

Por lo cual, $(\rho_g^\alpha \delta_x) = \alpha(x, g, g \cdot x)\delta_{g \cdot x}$. Asi si $g \cdot x = x$, entonces tenemos que $(\rho_g^\alpha \delta_x) = \alpha(x, g, x)\delta_x$, lo cual concluye la demostración. □

A continuación ilustraremos la proposición anterior con dos ejemplos. Primeramente consideremos $G = D_6$ y $X = \{1, 2, 3\} \bigcup \{\nu\}$, donde ν es el baricentro del triángulo. Posteriormente consideraremos $G = D_8$ y $X = \{1, 2, 3, 4\} \bigcup \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$.

Ejemplo 6. *Consideremos el espacio geométrico (X, G), donde $G = D_6$ y $X = \{1, 2, 3\} \bigcup \{\nu\}$. Digamos que G está generado por S y R, donde S es la reflexión que fija al nodo 1 y R es la rotación en $\frac{2\pi}{3}$ grados.*

G actúa naturalmente sobre los nodos del triángulo, y $g \cdot \nu = \nu$ para todo g en G. Es claro que la acción no es transitiva, pues $|X| = 4$, más aún existen dos órbitas, a saber, $O_1 = \{1, 2, 3\}$ y $O_\nu = \{\nu\}$.

Luego el grupo de isotropía asociado a ν es G y el grupo de isotropía asociado a 1 es $G(1) = \{(1), S\} \cong C_2$.

Sea α un carácter asociado al grupoide de movimientos $M(G : X)$. Como la restricción del carácter α a los grupos de isotropía $G(1)$, $G(2)$ y $G(3)$ es igual(identificando con el tipo de holonomía para G) entonces:

$$\rho^\alpha \cong Ind_{G\uparrow G}\alpha|_G \bigoplus Ind_{C_2\uparrow G}\alpha|_{C_2}.$$

Tomemos el carácter α de tal modo que $\alpha|_{C_2} = sgn$ y $\alpha|_G = 1$. Es claro que $Ind_{G\uparrow G}\alpha|_G = 1$. A continuación veremos que la representación $Ind_{C_2\uparrow G}\alpha|_{C_2}$, cuya dimensión es 3, se descompone como suma de dos representación irreducibles, una de dimensión 1 y otra de dimensión 2.

Ocupando para la inducida el modelo de Mackey izquierdo, tenemos lo siguiente:

$$Ind_{C_2\uparrow G}\alpha|_{C_2} = \{f : G \to \mathbb{C} |\ f(gS) = -f(g),\ \forall g \in G\} \leq \mathbb{C}^6,$$

donde $(\tau_g f)(x) = f(g^{-1}x)$, para todo $f \in Ind_{C_2\uparrow G}\alpha|_{C_2}$ y todos $g, x \in G$.

Es claro que la representación $sgn \in Ind_{C_2\uparrow G}\alpha|_{C_2}$, pues tenemos que $sgn(gS) = sgn(g)sgn(S) = -sgn(g)$, $\forall g \in G$. Por lo tanto:

$$Ind_{C_2\uparrow G}\alpha|_{C_2} \cong sgn \oplus sgn^\perp.$$

Consideremos un vector $f \in Ind_{C_2\uparrow G}\alpha|_{C_2}$, tal que $\langle sgn, f\rangle = 0$. Identifiquemos f con el vector siguiente:

$$f = \begin{pmatrix} f((1)) \\ f(R) \\ f(R^2) \\ f(S) \\ f(SR) \\ f(SR^2) \end{pmatrix}$$

Con lo cual $f((1)) = -f(R) - f(R^2)$. Considerando el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $V = \langle sgn\rangle$, entonces

$$V^\perp = \langle f_1, f_2\rangle,$$

$$donde\quad f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A continuación verifiquemos que la subrepresentación $(V^{\perp}, \tau|_{V^{\perp}})$ *de* $Ind_{C_2 \uparrow G}\alpha|_{C_2}$ *es irreducible.*

Supongamos que existe $V_0 \leq_G V^{\perp}$, *por lo tanto debe existir un vector no nulo* f_0 *en* $V^{\perp}$, *de tal modo que* $V_0 = \langle f_0 \rangle$. *Como* f_0 *pertenece a* $V^{\perp}$, *deben existir* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, *de tal modo que:*

$$f_0 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2.$$

Como $V_0 \leq_G V^{\perp}$ *aplicamos el automorfismo* τ_g *a la ecuación anterior, con lo cual obtenemos.*

$$\lambda_1 f_1(g^{-1}x) + \lambda_2 f_2(g^{-1}x) = \lambda_0(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)),$$

para algún $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *y para todos* $g, x \in G$.

Considerando $g = R$ *y* $x = SR$ *obtenemos* $\lambda_2 = \lambda_0\lambda_1$. *Como* $\lambda_0 \neq 0$ *entonces* $\lambda_1 = 0 \leftrightarrow \lambda_2 = 0$, *lo cual es una contradicción pues tenemos que* $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$, *por lo tanto la representación* $\pi = \tau|_{V^{\perp}}$ *es irreducible. Por lo tanto:*

$$\rho^{\alpha} \cong 1 \oplus sgn \oplus \pi.$$

EJEMPLO 7. *Consideremos el espacio geométrico* (X, G), *donde* $G = D_8$ *y* $X = \{1,2,3,4\} \bigcup \{\{1,3\},\{2,4\}\}$. *Digamos que* G *está generado por* S *y* R, *donde* S *es la reflexión que fija al nodo* 1 *y* 3, *y* R *es la rotación en* $\frac{\pi}{2}$ *grados.*

G *actúa naturalmente sobre los nodos del cuadrado. La acción de* G *sobre las diagonales del cuadrado está dada por:*

$$g \cdot \{\{1,3\},\{2,4\}\} = \{\{g(1), g(3)\}, \{g(2), g(4)\}\},$$

para todo g *en* G. *Es claro que la acción no es transitiva, pues* $|X| = 6$, *más aún existen dos órbitas, a saber,* $O_1 = \{1,2,3,4\}$ *y la orbita* $O_{\{1,3\}} = \{\{1,3\},\{2,4\}\}$.

Luego el grupo de isotropía asociado a 1 *es* $G(1) = \{(1), S\} \cong C_2$ *y el grupo de isotropía asociado a* $\{1,3\}$ *es* $G(\{1,3\}) = \{(1), S, R^2, SR^2\}$ *el cual es isomorfo a* $C_2 \oplus C_2$.

Sea α *un carácter asociado al grupoide de movimientos* $M(G:X)$, *entonces*

$$\rho^{\alpha} \cong Ind_{C_2 \oplus C_2 \uparrow G} \alpha|_{C_2 \oplus C_2} \bigoplus Ind_{C_2 \uparrow G} \alpha|_{C_2}.$$

Consideremos el carácter α *tal que* $\alpha|_{C_2} = sgn$ *y* $\alpha|_{C_2 \oplus C_2} = 1$.

Ocupando para la inducida el modelo de Mackey izquierdo, tenemos lo siguiente:

$$Ind_{C_2 \oplus C_2 \uparrow G} \alpha|_{C_2 \oplus C_2} \cong 1 \oplus 1^{\perp} \cong 1 \oplus \beta_0.$$

Consideremos un vector $f \in Ind_{C_2 \oplus C_2 \uparrow G} \alpha|_{C_2 \oplus C_2}$, *tal que* $\langle 1, f \rangle = 0$. *Identifiquemos* f *con el vector siguiente:*

$$f = \begin{pmatrix} f((1)) \\ f(R) \\ f(R^2) \\ f(R^3) \\ f(S) \\ f(SR) \\ f(SR^2) \\ f(SR^3) \end{pmatrix}$$

Con lo cual, $\beta_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Por otro lado tenemos,

$$Ind_{C_2 \uparrow G} \alpha|_{C_2} \cong sgn \oplus sgn^{\perp},$$

más aún $sgn^{\perp} \cong \beta_1 \oplus \beta_1^{\perp}$, *con* $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Al igual que en el ejemplo anterior, podemos probar que la subrepresentación 2-dimensional $\pi = \beta_1^{\perp}$ *es irreducible. Por lo tanto.*

$$\rho^{\alpha} \cong (sgn \oplus \beta_1 \oplus \pi) \oplus (1 \oplus \beta_0).$$

Los ejemplos anteriores no solo ilustran la proposición 26, sino que además muestran que la representación torcida por el carácter α, asociado al grupoide de movimientos del espacio geométrico (X, G) considerado, resulta ser un modelo de Gelfand para el grupo $G = D_6$ y $G = D_8$, respectivamente. En lo que sigue probaremos que este es un resultado general. Lo primero es conocer el cardinal que debe tener el $G-$espacio de Gelfand, para luego mostrar que la representación natural torcida en cuestión es libre de multiplicidad.

PROPOSICIÓN 28. *Sea X un G-espacio de Gelfand para $G = D_{2n}$, entonces si n es impar $|X| = n + 1$ y si n es par $|X| = n + 2$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un D_{2n}-espacio de Gelfand.

Para el caso en que n es un número impar, tenemos que D_{2n} posee dos carácteres y m representaciones de dimensión 2, donde $0 < m < \frac{n}{2}$, por lo cual

$$|X| = 2 + 2 \sum_{0<m<\frac{n}{2}} 1 = 2 + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} 1 = n + 1$$

Ahora para el caso en que n es un número par, tenemos que D_{2n} posee cuatro carácteres y m representaciones de dimensión 2, donde

$0 < m < \frac{n}{2}$, por lo cual

$$|X| = 4 + 2 \sum_{0<m<\frac{n}{2}} 1 = 4 + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} 1 = n + 2$$

□

A continuación entregaremos algunos espacios de Gelfand para el grupo Diedral. Para ello sea X_n el n-agono regular y la acción natural de G sobre X_n. Consideremos los siguientes G-espacios.

1. n par.

$$\widetilde{X}_0 = X_n \bigcup \{Y_1, Y_2\},$$

   donde Y_1 y Y_2 son los dos $\frac{n}{2}$-agonos, que surgen al colorear los nodos del n-agono alternadamente con solo dos colores, es decir, $Y_1 = \{1, 3, \cdots, 2n-1\}$ y $Y_2 = \{2, 4 \cdots, 2n\}$. La acción está dada por $g \cdot Y_i = \{g(x) \mid x \in Y_i\}$.

   Existen dos órbitas, a saber, X_n y $\{Y_1, Y_2\}$. Además tenemos dos estabilizadores, salvo conjugación, $G(1) = \{1, S\} \cong C_2$ y $G(X_1) = G(X_2) = \langle R^2, S\rangle \cong D_n$, donde S es la reflexión que fija los nodos 1 y $\frac{n}{2}+1$ en X_n, y R es la rotación en $\frac{2\pi}{n}$ grados.
2. n impar

$$\widetilde{X}_1 = X_n \bigcup \{\nu\},$$

   Donde ν es el baricentro del n-agono. En este caso $g \cdot \nu = \nu$ para todo $g \in G$.

   Existen dos órbitas, a saber, X_n y $\{\nu\}$ y dos isotropias, salvo conjugación, $G(1) = \{1, S\} \cong C_2$ y $G(\nu) = G$, donde S es la reflexión que fija al nodo 1 en X_n.

TEOREMA 12. *Sea $G = D_{2n}$. Los G-espacios $\widetilde{X}_0$ y $\widetilde{X}_1$ son espacios de Gelfand para el grupo G, para los casos n par y n impar.*

DEMOSTRACIÓN. Teniendo presente la proposición 26 tenemos lo siguiente:

1. n par

$$\rho^\alpha \cong Ind_{C_2\uparrow G}\alpha|_{C_2} \bigoplus Ind_{D_n\uparrow G}\alpha|_{D_n},$$

   donde α es un carácter del grupoide de movimientos $M(G : \widetilde{X}_0)$.

2. n impar

$$\rho^{\alpha} \cong Ind_{C_2\uparrow G}\alpha|_{C_2} \bigoplus Ind_{G\uparrow G}\alpha|_{G},$$

donde α es un carácter del grupoide de movimientos $M(G:\widetilde{X}_1)$.

Escogiendo $\alpha|_{C_2} = sgn$ (en ambos casos), y $\alpha|_{D_n} = \alpha|_G = 1$ demostraremos, ocupando La reciprocidad de Frobenius, que $\widetilde{X}_0$ y $\widetilde{X}_1$ son espacios de Gelfand para el grupo G, para los casos n par y n impar, respectivamente.

Sea χ el carácter de alguna representación de dimensión 1 del grupo G, entonces para el caso n par tenemos,

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{\rho^\alpha}, \chi\rangle &= \langle Ind_{C_2\uparrow G}\alpha|_{C_2}, \chi\rangle + \langle Ind_{D_n\uparrow G}\alpha|_{D_n}, \chi\rangle \\
&= \langle \alpha|_{C_2}, \chi\rangle + \langle \alpha|_{D_n}, \chi\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{h\in C_2} \alpha|_{C_2}(h)\chi(h) \ + \ \tfrac{1}{n}\sum_{h\in D_n} \alpha|_{D_n}(h)\chi(h) \\
&= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{h\in C_2} sgn(h)\chi(h) \ + \ \tfrac{1}{n}\sum_{h\in D_n} \chi(h).
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{rclclcl}
\langle \chi_{\rho^\alpha}, 1\rangle &=& \frac{1}{2}\sum_{h\in C_2} sgn(h) \ + \ \frac{1}{n}\sum_{h\in D_n} 1 &=& 0+1 &=& 1 \\
\langle \chi_{\rho^\alpha}, \phi\rangle &=& \frac{1}{2}\sum_{h\in C_2} sgn(h)\phi(h) \ + \ \frac{1}{n}\sum_{h\in D_n} \phi(h) &=& 1+0 &=& 1 \\
\langle \chi_{\rho^\alpha}, \psi\rangle &=& \frac{1}{2}\sum_{h\in C_2} sgn(h)\psi(h) \ + \ \frac{1}{n}\sum_{h\in D_n} \psi(h) &=& 0+1 &=& 1 \\
\langle \chi_{\rho^\alpha}, sgn\rangle &=& \frac{1}{2}\sum_{h\in C_2} sgn^2(h) \ + \ \frac{1}{n}\sum_{h\in D_n} sgn(h) &=& 1+0 &=& 1.
\end{array}$$

Para el caso n impar tenemos,

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{\rho^\alpha}, \chi\rangle &= \langle Ind_{C_2\uparrow G}\alpha|_{C_2}, \chi\rangle + \langle Ind_{G\uparrow G}\alpha|_{G}, \chi\rangle \\
&= \langle \alpha|_{C_2}, \chi\rangle + \langle \alpha|_{G}, \chi\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{h\in C_2} \alpha|_{C_2}(h)\chi(h) \ + \ \tfrac{1}{2n}\sum_{h\in G} \alpha|_{G}(h)\chi(h) \\
&= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{h\in C_2} sgn(h)\chi(h) \ + \ \tfrac{1}{2n}\sum_{h\in G} \chi(h),
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{rclclcl}
\langle \chi_{\rho^\alpha}, 1\rangle & = & \frac{1}{2}\sum_{h\in C_2} sgn(h) + \frac{1}{n}\sum_{h\in G} 1 & = & 0+1 & = & 1\\
\langle \chi_{\rho^\alpha}, sgn\rangle & = & \frac{1}{2}\sum_{h\in C_2} sgn^2(h) + \frac{1}{n}\sum_{h\in G} sgn(h) & = & 1+0 & = & 1
\end{array}$$

Ahora, tanto para n par como para n impar, consideremos el carácter de alguna representación irreducible χ_p de dimensión 2, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{\rho^\alpha}, \chi_p\rangle &= \langle Ind_{C_2\uparrow G}\alpha|_{C_2}, \chi_p\rangle\\
&= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{h\in C_2} sgn(h)\chi_p(h)\\
&= 1,
\end{aligned}$$

para todo $0 < p < \frac{n}{2}$. Como la dimensión del modelo es la correcta y cada representación irreducible aparece solo una vez en la natural torcida, se concluye que dicha representación es libre de multiplicidades. Lo cual concluye la demostración. $\square$

Podemos notar que el cardinal de los espacios de Gelfand, coinciden con el número de involuciones del grupo $G = D_{2n}$, el cual probaremos resulta ser otro espacio de Gelfand para el grupo G. Para ello recordemos que G actúa naturalmente por conjugación sobre el conjunto de sus involuciones. Mantengamos las notaciones anteriores para los siguientes calculos.

Manteniendo la premisa n impar, tenemos dos órbitas, a saber la órbita $O_1 = \{1\}$ y la órbita $O_S = \{SR^k \mid 0 \leq k < n\}$, donde S es la reflexión que deja fijo al nodo 1. De este modo tenemos dos estabilizadores, salvo conjugación, $G(1) = G$ y $G(S) = \{1, S\} \cong C_2$. Como la restricción del carácter α coincide en los grupos de isotropía conjugados y teniendo presente lo realizado para el anterior espacio de Gelfand (caso n impar) para el grupo diedral, el conjunto de involuciones del grupo D_{2n} es un espacio de Gelfand para dicho grupo.

Solo nos resta probar que para el caso n par tambien, el conjunto de involuciones, es un espacio de Gelfand.

TEOREMA 13. *Sea $G = D_{2n}$ con n par y $X = \{g \in G \mid g^2 = 1\}$ el conjunto de involuciones del grupo G, entonces X es un espacio de Gelfand para el grupo G.*

DEMOSTRACIÓN. Sea S la reflexión que fija los nodos 1 y $\frac{n}{2}+1$ y R la rotación en $\frac{2\pi}{n}$ grados en X_n. Tenemos cuatro órbitas, a saber, $O_1 = \{1\}$, $O_{R^{\frac{n}{2}}} = \{R^{\frac{n}{2}}\}$, $O_S = \{$involuciones que fijan dos vertices$\}$ y $O_{SR} = \{$involuciones que no fijan vertices$\}$, donde $|O_S| = |O_{SR}| = \frac{n}{2}$.

Salvo conjugación, tenemos cuatro estabilizadores, a saber los grupos

$$\begin{aligned} G(1) &= G(R^{\frac{n}{2}}) = G \\ G(S) &= \{1, S, R^{\frac{n}{2}}, SR^{\frac{n}{2}}\} \cong C_2 \oplus C_2 \\ G(SR) &= \{1, SR, R^{\frac{n}{2}}, SR^{\frac{n}{2}+1}\} \cong C_2 \oplus C_2. \end{aligned}$$

Como la restricción del carácter α coincide en los grupos de isotropía conjugados entonces,

$$\rho^{\alpha} \cong Ind_{G(1)\uparrow G}\alpha|_G \bigoplus Ind_{G(R^{\frac{n}{2}})\uparrow G}\alpha|_G \bigoplus Ind_{I\uparrow G}\alpha|_I \bigoplus Ind_{K\uparrow G}\alpha|_K.$$

donde $I = G(SR)$ y $K = G(S)$. Escojamos, en una primera instancia, $\alpha|_{G(1)} = 1$ y $\alpha|_{G(R^{\frac{n}{2}})} = sgn$, con lo cual obtenemos,

$$\rho^{\alpha} \cong 1 \bigoplus sgn \bigoplus \pi_1 \bigoplus \pi_2.$$

donde $\pi_1 = Ind_{I\uparrow G}\alpha|_I$ y $\pi_2 = Ind_{K\uparrow G}\alpha|_K$.

Teniendo presente las notaciones empleadas en la tabla de caracteres 1-dimensionales y 2-dimensionales del grupo G, estudiemos los siguientes casos, para lo cual consideramos $\alpha|_I = \phi$. Consideremos el homomorfismo $\alpha|_K$ definido de modo siguiente,

	1	S	$R^{\frac{n}{2}}$	$SR^{\frac{n}{2}}$
$\alpha\|_K$	1	1	-1	-1

Separemos los cálculos en casos, esto nos permitira ver en que representación (π_1 o π_2) aparece cada representación irreducible del grupo en cuestión.

1. Caso $\frac{n}{2}$ par.

a) $n = 4$.

$$\begin{aligned}\langle \chi_{\rho^\alpha}, \phi\rangle &= \langle \chi_{\pi_1}, \phi\rangle + \langle \chi_{\pi_2}, \phi\rangle \\ &= \langle \alpha|_I, \phi\rangle + \langle \alpha|_K, \phi\rangle \\ &= \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{i\in I}\phi^2(i) + 0 \\ &= 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \chi_{\rho^\alpha}, \psi\rangle &= \langle \chi_{\pi_1}, \psi\rangle + \langle \chi_{\pi_2}, \psi\rangle \\ &= \langle \alpha|_I, \psi\rangle + \langle \alpha|_K, \psi\rangle \\ &= \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{i\in I}\phi(i)\psi(i) + 0 \\ &= 1,\end{aligned}$$

por lo cual $\pi_1 = \phi \oplus \psi$. Ahora para la representación irreducible de dimensión 2 χ_p $(p = 1)$, tenemos que,

$$\begin{aligned}\langle \chi_{\rho^\alpha}, \chi_p\rangle &= \langle \chi_{\pi_2}, \chi_p\rangle \\ &= \langle \alpha|_K, \chi_p\rangle \\ &= 1.\end{aligned}$$

b) $n > 4$.

Al igual que en el caso anterior tenemos $\langle \chi_{\rho^\alpha}, \phi\rangle = 1$ y $\langle \chi_{\rho^\alpha}, \psi\rangle = 1$.

Ahora si χ_p es el carácter de algúna representación irreducible 2-dimensional de G, entonces

$$\begin{aligned}\langle \chi_{\rho^\alpha}, \chi_p\rangle &= \langle \chi_{\pi_1}, \chi_p\rangle + \langle \chi_{\pi_2}, \chi_p\rangle \\ &= \langle \alpha|_I, \chi_p\rangle + \langle \alpha|_K, \chi_p\rangle \\ &= \tfrac{1}{4}[2 + 2cos(\tfrac{2\pi p\frac{n}{2}}{n})] + \tfrac{1}{4}[2 - 2cos(\tfrac{2\pi p\frac{n}{2}}{n})] \\ &= \tfrac{1}{4}[2 + 2cos(\pi p)] + \tfrac{1}{4}[2 - 2cos(\pi p)] \\ &= 1\end{aligned}$$

Podemos notar que en el caso que p sea par, tenemos que $\langle \chi_{\pi_1}, \chi_p\rangle = 1$ y $\langle \chi_{\pi_2}, \chi_p\rangle = 0$. Mientras que para el caso en que p sea impar tenemos que $\langle \chi_{\pi_1}, \chi_p\rangle = 0$ y $\langle \chi_{\pi_2}, \chi_p\rangle = 1$.

2. Caso $\frac{n}{2}$ impar. Sea χ_p el carácter de una representación irreducible 2-dimensional de G, entonces

$$\begin{aligned}\langle \chi_{\rho^\alpha}, \phi\rangle &= \langle \chi_{\pi_1}, \phi\rangle + \langle \chi_{\pi_2}, \phi\rangle \\ &= \langle \alpha|_I, \psi\rangle + \langle \alpha|_K, \psi\rangle \\ &= 1+0 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \chi_{\rho^\alpha}, \psi\rangle &= \langle \chi_{\pi_1}, \phi\rangle + \langle \chi_{\pi_2}, \phi\rangle \\ &= \langle \alpha|_I, \psi\rangle + \langle \alpha|_K, \psi\rangle \\ &= 0+1 \\ &= 1\end{aligned}$$

Ahora, identicamente que para el caso anterior, tenemos

$$\begin{aligned}\langle \chi_{\rho^\alpha}, \chi_p\rangle &= \langle \chi_{\pi_1}, \chi_p\rangle + \langle \chi_{\pi_2}, \chi_p\rangle \\ &= \langle \alpha|_I, \chi_p\rangle + \langle \alpha|_K, \chi_p\rangle \\ &= \tfrac{1}{4}[2 + 2cos(\tfrac{2\pi p\frac{n}{2}}{n})] + \tfrac{1}{4}[2 - 2cos(\tfrac{2\pi p\frac{n}{2}}{n})] \\ &= \tfrac{1}{4}[2 + 2cos(\pi p)] + \tfrac{1}{4}[2 - 2cos(\pi p)] \\ &= 1\end{aligned}$$

respectivamente para la paridad de p.

Como la dimensión del modelo es la correcta y cada representación irreducible aparece solo una vez en la natural torcida, se concluye que dicha representación es libre de multiplicidades. Lo cual concluye la demostración.

□

Observación 21. *En la resolución de las proposiones anteriores, demostrar que algún D_{2n}-espacio es un espacio de Gelfand, en su desarrollo se necesito conocer previamente las tablas de carácteres asociados a las representaciones irreducibles, es decir, conocer a priori $\widehat{D_{2n}}$. Al menos para los casos D_3 y D_4 no es necesario este conocimiento previo,* *más aún el espacio de Gelfand propuesto (espacio de involuciones) entrega todas las representaciones irreducibles o al menos sus carácteres asociados. Esto nos sugiere, dado que el grupo diédrico es un producto semidirecto de grupos cíclicos, a saber, $D_{2n} = C_n \rtimes C_2$, ocupar la maquina de Mackey para conocer las representaciones irreducibles del grupo y al cardinal de un espacio de Gelfand para el grupo.*

A continuación verifiquemos lo dicho para los grupos D_3 y D_4. Primero recordemos que el número de carácteres del grupo esta dado por el indice $[D_{2n} : D'_{2n}]$. Sean R y S rotación y reflexión genedadores del grupo en cuestión, entonces $[R^i, S] = R^iS^{-1}R^{-i}S^{-1} = R^{2i}$, asi todo elemento del subgrupo ciclico $\langle R^2 \rangle$ es un commutador. Es sencillo probar que todo commutador es una potencia del elemento R^2. Por lo cual $D'_{2n} = \langle R^2 \rangle$. Entonces para el caso n par tenemos que el número de carácteres es $[D_{2n} : D'_{2n}] = \frac{2n}{\frac{n}{2}} = 4$ y para el caso n impar el número de carácteres es $[D_{2n} : D'_{2n}] = \frac{2n}{n} = 2$.

Consideremos el D_{2n}-espacio de todas las involuciones del grupo, que para el caso n impar posee cardinal $n+1$ y para el caso n par posee cardinal $n+2$, sobre el cual el grupo diedral D_{2n} actúa por conjugación, es decir, si $g \in D_{2n}$ y t es una involución, entonces $g \cdot t = g^{-1}tg$. La idea es demostrar que ellos son D_{2n}-espacios de Gelfand y con ello conocer todas las representaciones irreducibles del grupo. Muchos de los calculos fueron hechos en los episodios anteriores, aprovechemos esto último.

Para el caso $n = 3$ el espacio de Gelfand, previamente visto, es $X = \{1\} \cup \{S, SR, SR^2\}$, cuyas órbitas son $O(1) = \{1\}$ y $O(S) = \{S, SR, SR^2\}$, con lo cual, salvo isomorfismo, tenemos dos grupos de isotropia, a saber, $G(1) = D_6$ y $G(S) = C_2$, entonces

$$\rho^\alpha \cong Ind_{D_6 \uparrow D_6} \alpha|_{D_6} \bigoplus Ind_{C_2 \uparrow D_6} \alpha|_{C_2}.$$

donde α es un carácter del grupoide de movimientos respectivo, definido por $\alpha|_{D_6} = 1$ y $\alpha|_{C_2} = sgn$. Por lo cual

$$\rho^\alpha \cong 1 \oplus \beta$$

donde $\beta = Ind_{C_2 \uparrow D_6} \alpha|_{C_2} = sgn \oplus sgn^\perp$.

A continuación probaremos que la subrepresentación $\pi = sgn^{\perp}$ es irreducible. Para ello necesitamos recordar el carácter asociado a la representación inducida, el cual para este caso, esta dado por la formula

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathcal{T}}(g) &= \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{s\in D_6\\ s^{-1}gs\in C_2}} \alpha|_{C_2}(s^{-1}gs) \\
&= \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{s\in D_6\\ s^{-1}gs\in C_2}} sgn(g) \\
&= \tfrac{sgn(g)}{2}|\{s \in D_6 \ : \ s^{-1}gs \in C_2\}|
\end{aligned}$$

Esta ecuación no permite generar la tabla de carácteres siguiente:

	(1)	(12)	(123)
sgn	1	-1	1
$\chi_{\mathcal{T}}$	3	-1	0
χ_{π}	2	0	-1

Con la información contenida en la tabla anterior podemos probar que la representación π es irreducible, pues

$$\begin{aligned}
\langle \chi_\pi, \chi_\pi \rangle &= \tfrac{1}{6} \textstyle\sum_{g\in G} \chi_\pi(g)\overline{\chi_\pi}(g) \\
&= \tfrac{1}{6} \textstyle\sum_{g\in G} \chi_\pi^2(g) \\
&= \tfrac{1}{6}[1 \cdot 2^2 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot (-1)^2] \\
&= 1
\end{aligned}$$

por lo tanto, la representación π es irreducible. Para saber si son todas las representaciones irreducibles del grupo, basta aplicar la proposición 3, es decir, $6 = |D_6| = 1^2 + 1^2 + 2^2$.

Para el caso $n = 4$ el espacio de Gelfand, previamente visto, es $X = \{1\} \cup \{R^2\} \cup \{S, SR^2\} \cup \{SR, SR^3\}$, cuyas órbitas son $O(1) = \{1\}$, $O(R^2) = \{R^2\}$, $O(S) = \{S, SR^2\}$ y $O(SR) = \{SR, SR^3\}$, con lo cual, salvo isomorfismo, tenemos cuatro grupos de isotropía, a saber, $G(1) = D_8$, $G(R^2) = D_8$, $G(S) = \{1, S, R^2, SR^2\}$, $G(SR) = \{1, SR, R^2, SR^3\}$, entonces

$$\rho^\alpha \cong Ind_{G(1)\uparrow D_8}\alpha|_{D_8} \bigoplus Ind_{G(R^2)\uparrow D_8}\alpha|_{D_8} \bigoplus Ind_{I\uparrow D_8}\alpha|_I \bigoplus Ind_{K\uparrow D_8}\alpha|_K.$$

donde $I = G(SR)$ y $K = G(S)$. Consideremos $\alpha|_{G(1)} = 1$ y $\alpha|_{G(R^2)} = sgn$, con lo cual obtenemos

$$\rho^\alpha \cong 1 \bigoplus sgn \bigoplus \pi_1 \bigoplus \pi_2$$

donde $\pi_1 = Ind_{I \uparrow D_8} \alpha|_I$ y $\pi_2 = Ind_{K \uparrow D_8} \alpha|_K$.

Consideremos $\alpha|_I(1) = \alpha|_I(R^2) = 1$ y $\alpha|_I(SR) = \alpha|_I(SR^3) = -1$, mismos valores entregados en la demostración previa, entonces tenemos que la representación π_1 es reducible y de dimensión 2. Lo anterior expuesto se puede demostrar usando la tabla de valores para el carácter χ_{π_1}, a saber

	1	R^2	R	S	SR
χ_{π_1}	2	2	0	0	−2

con lo cual $\langle \chi_{\pi_1}, \chi_{\pi_1} \rangle = 2$, asi la representación π_1 es reducible. Más aún tenemos que $\langle \chi_{\pi_1}, sgn \rangle = \langle \chi_{\pi_1}, 1 \rangle = 0$, asi la representación π_1 se descompone en dos representaciones de dimensión 1 no isomorfas a las ya aparaecidas en la descomposición de la representación natural torcida.

Ahora consideremos $\alpha|_K(1) = \alpha|_K(S) = 1$ y $\alpha|_I(R^2) = \alpha|_I(SR^2) = -1$, mismos valores entregados en la demostracion previa, entonces tenemos que la representación π_2 es irreducible de dimensión 2. Lo anterior expuesto se puede demostrar usando la tabla de valores para el carácter χ_{π_2}, a saber

	1	R^2	R	S	SR
χ_{π_2}	2	−2	0	0	0

por lo cual $\langle \chi_{\pi_2}, \chi_{\pi_2} \rangle = 1$, entonces π_2 es irreducible. Para saber si son todas las representaciones irreducibles del grupo, basta aplicar la proposición 3, es decir, $8 = |D_8| = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$.

6. Modelos de Gelfand con la Máquina de Mackey

A continuación recordamos, el proceso general para encontrar todas la representaciones irreducibles de un cierto grupo, cuya estructura viene dada por un producto semidirecto (la llamada "Máquina de Mackey"). Esto nos ayudara a conocer de manera general, el cardinal de un espacio de Gelfand.

OBSERVACIÓN 22. *Ocupando la Máquina de Mackey, herramienta que nos entrega todas las representaciones irreducibles de un cierto grupo, cuya estructura viene dada por un producto semidirecto, podremos determinar para dicho grupo el cardinal del espacio de Gelfand requerido. Para ello consideremos el grupo* $G = A \rtimes H$, *donde* A *es un subgrupo distinguido y abeliano en* G. *Sabemos que* $\widehat{A}$ *tiene estructura de grupo, cuyas representaciones irreducibles son todas de dimensión* 1, *más aún, isomorfo al grupo* A.

El grupo $\widehat{A}$ *es un* H*-espacio, mediante la acción* $h{\cdot}\beta(a) = \beta(hah^{-1})$. *Para esta acción la isotropía de un elemento* $\beta \in \widehat{A}$ *es el subgrupo*

$$I_\beta = \{h : \beta(hah^{-1}) = \beta(a)\ \forall a\}$$

Consideremos el subgrupo $G_\beta = A \rtimes I_\beta$. *Podemos extender el carácter* β *al grupo* G_β, *de modo siguiente,* $\overline{\beta}(ah) := \beta(a)$. *Ahora si* ρ *es una representación irreducible del grupo* I_β *entonces extendiendola al grupo obtenemos una representación de este mismo, a saber,* $\overline{\rho}(ah) := \rho(h)$. *Luego la representación* $\overline{\beta} \otimes \overline{\rho}(ah) = \beta(a)\rho(h)$ *es irreducible para* G_β. *Entonces las representaciones irreducibles de* G *son obtenidas al inducir las representaciones anteriormente dichas, de modo que*

$$\widehat{G} = \{\pi_{(\beta,\rho)} : \beta \in \widehat{A}/H, \rho \in \widehat{I_\beta}\}$$

donde $\pi_{(\beta,\rho)} = Ind_{G_\beta \uparrow G}\ (\beta \otimes \rho)$, *con* $\beta \otimes \rho(ah) = \beta(a)\rho(h) \quad (a \in A,\ h \in I_\beta)$.

Con la anterior observación podemos probar algunas propiedades, referentes a modelos de Gelfand y cardinales de espacios de Gelfand. Cabe mencionar que los grupos de isotropía I_β son abelianos para $\beta \neq 1$, para los grupos que aparecerán posteriormente en este trabajo. Manteniendo esta última hipotesis, además de las mismas notaciones de la observación previa, tenemos lo siguiente.

TEOREMA 14. *Sea $G = A \rtimes H$. Un modelo de Gelfand M_G para el grupo G, está dado por*

$$M_G = M_H \oplus \bigoplus_{\substack{\beta \in \widehat{A}/H \\ \beta \neq 1}} \beta \otimes Ind_{I_\beta \uparrow H} M_{I_\beta}$$

o equivalentemente

$$M_G = M_H \oplus \bigoplus_{\substack{\beta \in \widehat{A}/H \\ \beta \neq 1}} Ind_{A \uparrow G} \beta.$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $\widehat{G} = \{\pi_{(\beta,\rho)} : \beta \in \widehat{A}/H, \rho \in \widehat{I_\beta}\}$, entonces

$$\begin{aligned}
M_G &= \bigoplus_{\substack{\beta\in\widehat{A}/H\\ \rho\in\widehat{I_\beta}}} \pi_{(\beta,\rho)} \\
&= \bigoplus_{\substack{\beta\in\widehat{A}/H\\ \rho\in\widehat{I_\beta}}} Ind_{G_\beta\uparrow G}\ (\beta\otimes\rho) \\
&= \bigoplus_{\rho\in\widehat{H}} Ind_{G\uparrow G}\ \rho \oplus \bigoplus_{\substack{\beta\in\widehat{A}/H\\ \beta\neq 1\\ \rho\in\widehat{I_\beta}}} Ind_{G_\beta\uparrow G}\ (\beta\otimes\rho) \\
&= M_H \oplus \bigoplus_{\substack{\beta\in\widehat{A}/H\\ \beta\neq 1\\ \rho\in\widehat{I_\beta}}} \beta\otimes Ind_{I_\beta\uparrow H}\ \rho \\
&= M_H \oplus \bigoplus_{\substack{\beta\in\widehat{A}/H\\ \beta\neq 1}} [\bigoplus_{\rho\in\widehat{I_\beta}} (\beta\otimes Ind_{I_\beta\uparrow H}\ \rho)] \\
&= M_H \oplus \bigoplus_{\substack{\beta\in\widehat{A}/H\\ \beta\neq 1}} [\beta\otimes(\bigoplus_{\rho\in\widehat{I_\beta}} Ind_{I_\beta\uparrow H}\ \rho)] \\
&= M_H \oplus \bigoplus_{\substack{\beta\in\widehat{A}/H\\ \beta\neq 1}} \beta\otimes\ Ind_{I_\beta\uparrow H}(\bigoplus_{\rho\in\widehat{I_\beta}} \rho) \\
&= M_H \oplus \bigoplus_{\substack{\beta\in\widehat{A}/H\\ \beta\neq 1}} \beta\otimes\ Ind_{I_\beta\uparrow H} M_{I_\beta} \\
&= M_H \oplus \bigoplus_{\substack{\beta\in\widehat{A}/H\\ \beta\neq 1}} \beta\otimes\ Ind_{I_\beta\uparrow H}\ (Ind_{\{1\}\uparrow I_\beta}\ 1) \\
&= M_H \oplus \bigoplus_{\substack{\beta\in\widehat{A}/H\\ \beta\neq 1}} \beta\otimes\ Ind_{\{1\}\uparrow H}\ 1 \\
&= M_H \oplus \bigoplus_{\substack{\beta\in\widehat{A}/H\\ \beta\neq 1}} Ind_{A\uparrow G}\ (\beta\otimes 1) \\
&= M_H \oplus \bigoplus_{\substack{\beta\in\widehat{A}/H\\ \beta\neq 1}} Ind_{A\uparrow G}\ \beta
\end{aligned}$$

□

TEOREMA 15. *Sea $G = A \rtimes H$. La dimensión de un modelo de Gelfand para el grupo G, $m(G)$, es tal que*

$$m(G) = \sum_{\beta \in \widehat{A}/H} [H : I_\beta] m(I_\beta)$$

más aún, si todo grupo de isotropía I_β es abeliano, entonces

$$m(G) = m(H) + |H| \sum_{\beta \in \widehat{A}/H} 1$$

DEMOSTRACIÓN. Teniendo presente la observación anterior (parametrización de las representaciones irreducibles por la Máquina de Mackey), tenemos

$$\begin{aligned}
m(G) &= \sum_{\substack{\beta \in \widehat{A}/H \\ \rho \in \widehat{I_\beta}}} dim\ \pi_{(\beta,\rho)} \\
&= \sum_{\substack{\beta \in \widehat{A}/H \\ \rho \in \widehat{I_\beta}}} [G : G_\beta] dim(\rho) \\
&= \sum_{\substack{\beta \in \widehat{A}/H \\ \rho \in \widehat{I_\beta}}} [H : I_\beta] \rho(1) \\
&= \sum_{\beta \in \widehat{A}/H} [H : I_\beta] \sum_{\rho \in \widehat{I_\beta}} \rho(1) \\
\therefore m(G) &= \sum_{\beta \in \widehat{A}/H} [H : I_\beta] m(I_\beta)
\end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 23. *Para el caso en que el grupo G sea el producto directo entre los subgrupos A y H podemos observar, en primer lugar, que $I_\beta = H$ para todo β, pues la acción es trivial, es decir, $h \cdot \beta = \beta$. Aplicando la formula obtenida en el teorema anterior tenemos que*

$$\begin{aligned}
m(G) &= \sum_{\beta\in\widehat{A}} [H : I_\beta] m(I_\beta) \\
&= \sum_{\beta\in\widehat{A}} [H : H] m(H) \\
\therefore m(G) &= m(H) \sum_{\beta\in\widehat{A}} 1 = m(A) m(H)
\end{aligned}$$

Observemos que de lo anterior se deduce una descripción de un espacio de Gelfand X_G para un grupo G cuya estructura viene dada por un producto semidirecto con factor distinguido conmutativo. Este es el contenido del siguiente teorema que incluye la descripción de los caracteres inductores asociados al espacio de Gelfand.

TEOREMA 16. *Sea $G = A \rtimes H$, con las notaciones e hipótesis de la observación 22 . Si cada subgrupo de isotropía I_β, con $\beta \in \widehat{A}/H$ y $\beta \neq 1$, es abeliano, entonces podemos obtener un espacio de Gelfand X_G para G a partir de un espacio de Gelfand X_H para H, como sigue:*

$$X_G = X_H \sqcup \bigsqcup_{\substack{\beta\in\widehat{A}/H \\ \beta\neq 1}} G/A_\beta$$

donde $A_\beta = A$ para todo $\beta \in \widehat{A}/H$, $\beta \neq 1$, la acción de G en las órbitas G/A_β es la acción natural y la restricción del caracter inductor del grupoide de movimientos asociado al grupo de isotropía A_β es β.

DEMOSTRACIÓN. El enunciado es una consecuencia inmediata del teorema 14. □

7. Modelo de Gelfand. Grupo diedral

Como ya se observo, la máquina de Mackey, es una potente herramienta, no solo para conocer todas la respresentaciones de un grupo, cuya estructura viene dada por un producto semidirecto de otros grupos, sino tambien poder conocer el cardinal que debe tener un espacio de Gelfand o un candidato a espacio de Gelfand.

Consideremos el grupo diedral $D_{2n} = C_n \rtimes C_2$. Teniendo presente el teorema 15 podemos conocer la dimensión que debe tener un espacio de Gelfand para el grupo. Basta conocer, manteniendo las notaciones del teorema en cuestión, $m(I_\beta)$.

Sea $C_n = \langle a \rangle$ y $C_2 = \langle b \rangle$. Sabemos por Mackey que $\widehat{C_n}$ es un C_2-espacio, dado por la acción $h \cdot \beta(g) = \beta(hgh^{-1})$, para $h \in C_2$ y $\beta \in \widehat{C_n}$. Como C_n es abeliano sus representaciones irreducibles son todas 1-dimensionales, más aún, como este grupo es cíclico sus representaciones irreducibles están parametrizadas por las raices n-esimas de la unidad, pues si $\beta \in \widehat{C_n}$, entonces $\beta(a)^n = 1 \therefore \beta(a) = w_0^k$, para algún $k = 0, \ldots, n-1$ y $w_0 = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ generador del grupo de las n-raices de la unidad. Anotemos a dichas representaciones, distintas de 1, por β_k, con $k = 1, \ldots, n-1$.

Notemos que para $\beta \in \widehat{C_n}$, $O_\beta = \{\beta, b \cdot \beta\} \therefore O_1$ posee cardinal 1 y 2 en otro caso $\therefore$ la isotropia esta dada por $I_1 = C_2$ y es trivial en cualquier otro caso, entonces $m(I_1) = 2$ y $m(I_\beta) = 1$ para $\beta \neq 1$.

Para n par tenemos

$$\sum_{\beta \in \widehat{C_n}/C_2} [C_2 : I_\beta] m(I_\beta) = 2 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} 1 + m(I_1) = n + 2$$

y para n impar tenemos

$$\sum_{\beta \in \widehat{C_n}/C_2} [C_2 : I_\beta] m(I_\beta) = 2 \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{52}} 1 + m(I_1) = n + 1$$

Tal como ya se comento anteriormente, la maquina de Mackey, entrega todas las representaciones irreducibles y su número, asociadas al grupo en cuestión, según la paridad de n. Así, por ejemplo, sabemos que el grupo posee representaciones irreducibles de dimensión 1 y 2 tan solo. Aunque la siguiente proposición ya fue demostrada, vale la pena, para cálculos posteriores, demostrarla usando herramientras sumistradas por la maquina de Mackey, aprovechando la estructura de producto semidirecto del grupo diedral $G = D_{2n}$.

PROPOSICIÓN 29. *El conjunto de involuciones del grupo diedral D_{2n} es un espacio de Gelfand para dicho grupo.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que el cardinal de un espacio de Gelfand para el grupo diedral D_{2n} es igual a $n + 2$ o $n + 1$ según n sea par o impar, respectivamente, aplicando el teorema 15. Es claro que dicho cardinal coincide con el número de involuciones del grupo en cuestión, según la paridad de n. Tan solo resta demostrar que el conjunto de involuciones es un espacio de Gelfand para el grupo. Para esto es clave la proposición 27, la reciprocidad de Frobenius y el carácter asociado a cada representación irreducible entregado por la construccion de la maquina Mackey.

Consideremos tan solo el caso n impar. El otro caso es totalmente analogo.

Primero calculemos el cáracter de la representación natural torcida asociado al conjunto de involuciones, que para este caso es, manteniendo las notaciones anteriormente usadas

$$X = \{1\} \cup \{SR^k \mid 0 \leq k < n\}$$

donde S es la reflexión que deja fijo al nodo 1. De este modo tenemos dos estabilizadores, salvo conjugación, $G(1) = G$ y $G(S) = \{1, S\} \cong C_2$. Al igual que antes, consideremos al carácter α definido sobre las isotropias por $\alpha|_{G(1)} = 1$ y $\alpha|_{G(S)} = sgn$. Podemos notar que $\chi_{\rho^\alpha}(1) = n+1$, más aún

$$\chi_{\rho^\alpha}(S) = \sum_{x \in X_S} \alpha(x, S, x) = \alpha(1, S, 1) + \alpha(S, S, S) = 0$$

pues $X_S = \{x : xS = Sx\} = \{1, S\}$. Analogamente tenemos que $\chi_{\rho^\alpha}(R) = 1$.

Las representaciones irreducibles del grupo $D_{2n} = C_n \rtimes C_2$, ocupando las mismas notaciones anteriormente propuestas en la observación 22, son representaciones inducidas de los grupos $G_1 = D_{2n}$ y $G_{\beta_k} = C_n$ para todo $k = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$.

Podemos notar que $1 = \pi_{(1,1)}$ y $sgn = \pi_{(1,-1)}$, más aún, aplicando la reciprocidad de Frobenius, tenemos lo siguiente,

$$\langle \chi_{\rho^\alpha}, 1 \rangle = \frac{1}{2n}[(n+1) + 0 + (n-1)] = 1$$

Analogamente se obtiene $\langle \chi_{\rho^\alpha}, sgn \rangle = 1$. Consideremos ahora β_k con $k = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$, entonces $\pi_{(\beta_k,1)}$ es una representación de dimensión

2 irreducible del grupo diedral. Por lo cual, ocupando la reciprocidad de Frobenius tenemos

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{\pi_{(\beta_k,1)}}, \chi_{\rho^\alpha} \rangle &= \langle \beta_k, \chi_{\rho^\alpha} \rangle \\
&= \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{g\in G_k} \beta_k(g)\chi_{\rho^\alpha}(g) \\
&= \tfrac{1}{n}[1\cdot(n+1) + \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} \beta_k(R^j)] \\
&= \tfrac{1}{n}[(n+1) + \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} w_0^{kj}] \\
&= \tfrac{1}{n}[(n+1) - 1]] = 1
\end{aligned}$$

Como la dimensión del modelo es la correcta, y cada representación irreducible aparece solo una vez entonces la representación natural torcida es libre de multiplicidad. Lo cual concluye la demostración. □

Capítulo 3

Grupo de Transformaciones Rigidas. Espacio de Gelfand

1. Estructura del grupo de Transformaciones Rigidas: $\mathbb{C}|\mathbb{R}$

Comenzaremos estudiando la estructura del grupo de transformaciones rigidas para el caso complejo. Consideremos la extensión cuadrática $\mathbb{C}|\mathbb{R}$. Para ello denotemos por $N(z)$ a la norma de un número complejo z.

Una transformación rigida del plano complejo es toda aplicación que preserva la distancia entre puntos. Al conjunto de todas la transformaciones rigidas lo denotaremos por $Iso(2)$. Es claro que toda transformación rigida es inyectiva, más aún, biyectiva. El conjunto $Iso(2)$ es un grupo con la composición de funciones.

Algunos ejemplos de transformaciones rigidas son,

1. $\phi(z) = \overline{z}$ (conjungación)
2. $t_w(z) = z + w$ (traslación)
3. $r_u(z) = uz$, donde $N(u) = 1$ (rotación con centro el origen)

Podemos notar que los conjuntos de traslaciones y de rotaciones tienen estructura de grupo con la composición de funciones. Anotaremos al grupo de traslaciones y de rotaciones del plano por $T(2)$ y $SO(2)$ respectivamente

Observación 24. *Podemos observar que la composición de traslaciones es una traslacion y la composición de rotaciones es tambien una rotación. Ademas notar que* $r_u \circ \phi = \phi \circ r_{\overline{u}}$, $t_z \circ \phi = \phi \circ t_{\overline{z}}$ *y* $r_u \circ t_w = t_{uw} \circ r_u$. *Es claro, por lo anterior, que el grupo* $Iso(2)$ *no es conmutativo.*

Proposición 30. *Sean* $z, w \in \mathbb{C}$. *Si* $Tr(z)$=$Tr(w)$ *y* $N(z)$=$N(w)$ *entonces* $z = w$ *o* $w = \overline{z}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea z un número complejo, entonces z y $\overline{z}$ son las raices del polinomio $p(x) = x^2 - Tr(z)x + N(z)$. Por lo cual, si existe w otro número complejo con la propiedad $Tr(w) = Tr(z)$ y $N(w) = N(z)$, entonces w y $\overline{w}$ son raices de $p(x)$, por lo cual $w = z$ o $w = \overline{z}$. □

TEOREMA 17. *Toda transformacion rigida f del plano complejo se escribe de forma única como $f = t_w \circ r_u$ o $f = t_w \circ r_u \circ \phi$ para algunos $w, u \in \mathbb{C}$ con $N(u) = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f \in Iso(2)$ y $g = f - f(0) = t_{-f(0)} \circ f \in Iso(2)$. Notemos que $g(0) = 0$, por lo cual $N(g(x)) = N(x)$, es decir, la nueva transformación rigida g preserva modulos. Asi $N(g(1)) = N(1) = 1$ por lo cual $g(1) = u$, donde $N(u) = 1$. Entonces $h = r_{\overline{u}} \circ g \in Iso(2)$ es tal que fija a los elementos 1 y 0, es decir, $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$.

A continuación, como $h(1) = 1$, dado $z \in \mathbb{C}$ entonces tenemos que $N(h(z) - 1) = N(z - 1)$, por lo cual $Tr(z) = Tr(h(z))$. Teniendo presente la proposición anterior tenemos que $h(z) = z$ o $h(z) = \overline{z}$. Podemos observar que en el caso que z sea un número real se tiene que $h(z) = z$.

A continuación consideremos $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ tal que $h(z) = z$. Supongamos existe $w \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ tal que $h(w) = \overline{w}$. Como h es una transformación rigida tenemos que $N(z - w) = N(z - \overline{w})$, más aún $Tr(z - w) = Tr(z - \overline{w})$ $\therefore$ z o w necesariamente deben ser números reales, lo cual es una contradicción, entonces $h(w) = w$. Asi $h = Id$ o $h = \phi$, lo cual concluye la primera parte del teorema.

Para probar la unicidad, consideremos dos escrituras para $f \in Iso(2)$, digamos $f = t_{w_1} \circ r_{u_1} \circ \sigma$ y $f = t_{w_2} \circ r_{u_2} \circ \sigma$, entonces $t_{w_1 - w_2} = r_{u_2\overline{u_1}}$, por lo cual $z + w_1 - w_2 = u_2\overline{u_1}z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Asi $w_1 = w_2$ y $u_1 = u_2$. □

Denotemos por $O(2) = \{r_u \circ \phi^i : N(u) = 1, i = 0, 1\}$ ($SO(2) = \{r_u : N(u) = 1\}$). Podemos notar que $O(2)$ y $SO(2)$ son dos subgrupos de $Iso(2)$, más aún $SO(2) \trianglelefteq O(2)$ pues $\phi \circ r_u \circ \phi = r_{\overline{u}}$.

PROPOSICIÓN 31. $O(2) \cong SO(2) \rtimes C_2$.

DEMOSTRACIÓN. Solo basta considerar el homomorfismo siguiente: $\Omega : C_2 \to Aut(SO(2)) : h \longmapsto \Omega(h)$ tal que $\Omega(h)(r_u) = h \circ r_u \circ h$. □

PROPOSICIÓN 32. *El grupo de traslaciones* $T(2)$ *del plano es tal que:*

1. $T(2) \cong (\mathbb{C}, +)$
2. $T(2) \triangleq Iso(2)$

DEMOSTRACIÓN. Para el primer punto basta tener en cuenta la aplicación $T(2) \to \mathbb{C} : t_z \longmapsto z$.

Para el segundo punto consideremos $z_1, u \in \mathbb{C}$, tal que $N(u) = 1$, $t_{z_0} \in T(2)$ y $f \in Iso(2)$. Si $f = t_{z_1} \circ r_u \circ \phi$ entonces $f \circ t_{z_1} \circ f^{-1} = t_{u\overline{z_1}}$. Ahora si $f = t_{z_1} \circ r_u$ entonces $f \circ t_{z_1} \circ f^{-1} = t_{uz_1}$. □

PROPOSICIÓN 33. $Iso(2) \cong T(2) \rtimes O(2)$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que $r_u \circ \phi = \phi \circ r_{\overline{u}}$ para cada u. A continuacion consideremos el homomorfismo $\Omega : O_2 \to Aut(T(2))$ definido por $\Omega(h)(r_u) = h \circ r_u \circ h$. □

2. Grupo de Transformaciones Rigidas: $\mathbb{F}_{q^2}|\mathbb{F}_q$

Extenderemos lo anteriormente realizado, a saber, conocer la estructura del grupo de transformaciones rigidas para el caso complejo-real, al caso de una extensión de grado m sobre un cuerpo finito cualquiera. Trabajaremos en un principio el caso en que la extensión es de grado 2. Para ello sea $q = p^r$, donde p es un número primo cualquiera.

Consideremos la extension cuadrática $\mathbb{F}_{q^2}$ sobre $\mathbb{F}_q$. Sabemos que el cuerpo $\mathbb{F}_{q^2}$ es el cuerpo de descomposicion de el polinomio $x^{q^2} + x$ sobre el cuerpo base. Sabemos que el grupo de Galois asociado a la extension esta generado por el automorfismo de Frobenius $\sigma : a \longmapsto a^q$ y la respectiva extensión de cuerpos es galosiana.

A la extensión tenemos asociadas dos funciones, a saber, la función $N : \mathbb{F}_{q^2} \to \mathbb{F}_{q^2} : a \longmapsto a\sigma(a)$ y la función traza $Tr : \mathbb{F}_{q^2} \to \mathbb{F}_{q^2} : a \longmapsto a + \sigma(a)$. Más aún, como la extensión es galosiana, se tiene que $N(a)$ y $Tr(a)$ habitan en el cuerpo base $\mathbb{F}_q$.

Al igual que en caso anterior, una transformacion rigida de la extension cuadrática $\mathbb{F}_{q^2}|\mathbb{F}_q$ es toda aplicación f que preserva la distancia entre puntos, es decir, $N(f(a)-f(b))=N(a-b)$ para todos $a, b \in \mathbb{F}_{q^2}$. Al conjunto de todas la transformaciones rigidas de la extensión cuadrática lo denotaremos por $Iso_q(\mathbb{F}_{q^2})$. Es claro que toda transformación rigida es inyectiva, más aún, biyectiva. El conjunto $Iso_q(\mathbb{F}_{q^2})$ es un grupo con la composición de funciones. Las tansformaciones rigidas básicas, al igual que en el caso anterior, son σ(reflexión), t_a(traslación) y r_u(rotación), donde $N(u) = 1$ y $a \in \mathbb{F}_{q^2}$.

Anotaremos al grupo de traslaciones y al grupo ortogonal asociados a la extensión cuadrática por $T_q(\mathbb{F}_{q^2})$ y $O_q(\mathbb{F}_{q^2})$, respectivamente.

PROPOSICIÓN 34. *Sean $a, b \in \mathbb{F}_{q^2}$. Si $Tr(a)=Tr(b)$ y $N(a)=N(b)$ entonces $a = b$ o $a = \sigma(b)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea a un elemento en $\mathbb{F}_{q^2}$, entonces a y $\sigma(a)$ son las raices del polinomio $p(x) = x^2 - Tr(a)x + N(a)$. Por lo cual, si existe b otro elemento en $\mathbb{F}_{q^2}$ con la propiedad $Tr(b) = Tr(a)$ y $N(b) = N(a)$, entonces $b = a$ o $b = \sigma(a)$. □

TEOREMA 18. *Toda transformación rigida f de la extensión cuadratica sobre $\mathbb{F}_q$ se escribe de forma única posible como $f = t_a \circ r_u$ o $f = t_a \circ r_u \circ \sigma$ para algunos $a, u \in \mathbb{F}_{q^2}$ con $N(u) = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in Iso_q(\mathbb{F}_{q^2})$. Por la demostración realizada en el anterior episodio sabemos que $h = r_u \circ t_a \circ f$ es una transformación rigida que fija a 1 y 0, para algunos $a, u \in \mathbb{F}_{q^2}$ con $N(u) = 1$.

A continuación, como $h(1) = 1$, dado $a \in \mathbb{F}_{q^2} - \mathbb{F}_q$ entonces tenemos que $N(h(a) - 1) = N(a - 1)$, por lo cual $Tr(a) = Tr(h(a))$. Como $N(a) = N(h(a))$ entonces $h(a) = a$ o $h(a) = \sigma(a)$. Podemos observar que en el caso que $a \in \mathbb{F}_q$ se tiene que $h(a) = a$.

A continuación consideremos $a \in \mathbb{F}_{q^2} - \mathbb{F}_q$ tal que $h(a) = a$. Supongamos existe $b \in \mathbb{F}_{q^2} - \mathbb{F}_q$ tal que $h(b) = \sigma(b)$. Como h es una transformación rigida tenemos que $N(a - b) = N(a - \sigma(b))$, más aún $Tr(a - b) = Tr(a - \sigma(b))$, asi b o a deben pertenecer al cuerpo base, lo cual es una contradicción, entonces $h(b) = b$. Por lo cual $h = Id$ o $h = \sigma$, lo cual concluye la primera parte del teorema.

Para probar la unicidad, consideremos dos escrituras para $f \in Iso_q(\mathbb{F}_{q^2})$, digamos $f = t_{w_1} \circ r_{u_1} \circ \sigma$ y $f = t_{w_2} \circ r_{u_2} \circ \sigma$, entonces

$t_{w_1-w_2} = r_{u_2\sigma(u_1)}$, por lo cual $a+w_1-w_2 = u_2\sigma(u_1)a$ para todo $a \in \mathbb{F}_{q^2}$. Asi $w_1 = w_2$ y $u_1 = u_2$. Lo cual concluye la demostración del teorema. □

PROPOSICIÓN 35. $Iso_q(\mathbb{F}_{q^2}) \cong T_q(\mathbb{F}_{q^2}) \rtimes O_q(\mathbb{F}_{q^2})$.

DEMOSTRACIÓN. Basta tener presente la demostración realizada con anterioridad para el caso complejo. □

Teniendo presente el teorema 18 podemos deducir el cardinal del grupo de transformaciones rigidas $Iso_q(\mathbb{F}_{q^2})$. Para ello basta observar, en un principio, que $T_q(\mathbb{F}_{q^2}) \cong (\mathbb{F}_{q^2}, +)$. Asi tan solo nos es suficiente, para calcular o deducir dicho cardinal, el número de elementos de norma igual 1. En el caso complejo-real, para cada elemento $\| u \|= 1$ existe una única recta vectorial que lo contiene (incluyendo la recta de pendiente infinito), caracterizada por su pendiente. Asi, hay tantos elementos de norma igual 1 como números reales +1 (recta de pendiente infinito). Una idea analoga nos permite, sin mayor apremio, deducir el número de elementos de norma igual 1 para el caso de interes actual, a saber, $q+1$, por lo cual $|Iso_q(\mathbb{F}_{q^2})| = q^2(q+1)2$.

A continuación se presenta el cardinal del conjunto de involuciones del grupo de transformaciones rigidas $Iso_q(\mathbb{F}_{q^2})$. Esto nos permite establecer el primer paso para poder demostrar que dicho conjunto es un espacio de Gelfand para el grupo dado.

PROPOSICIÓN 36. *En número de involuciones del grupo de transformaciones rigidas $Iso_q(\mathbb{F}_{q^2})$ es igual a $2q^2 + q + 1$ en el caso de característica distinta a 2 y es igual a $2q^2 + q$ en el caso de característica igual 2.*

DEMOSTRACIÓN. Teniendo presente la factorización demostrada en el teorema 18 para una transformación rigida f, sean $a, u \in \mathbb{F}_{q^2}$, con $N(u) = 1$ y γ elemento generador del grupo de Galois. Digamos que $f = t_a \circ r_u \circ \gamma$.

Número de involuciones		
f	$car(\mathbb{F}_q) \neq 2$	$car(\mathbb{F}_q) = 2$
I	1	1
t_a	0	$q^2 - 1$
r_u	1	0
$t_a \circ r_u$	$q^2 - 1$	0
γ	1	1
$t_a\gamma$	$q-1$	$q-1$
$r_u \circ \gamma$	q	q
$t_a \circ r_u \circ \gamma$	$q^2 - q$	$q^2 - q$

Verifiquemos alguno de los camputos entregados en la tabla.

$\diamondsuit$ Si $t_a^2 = 1$ con $a \neq 0$, entonces $2a = 0$. Por lo cual, si $car(\mathbb{F}_q) = 2$ o $\neq 2$, tenemos que el número de involuciones es $q^2 - 1$ o 0 respectivamente.

$\diamondsuit$ Si $r_u^2 = 1$ con $u \neq 1$, entonces se debe tener que $u^2 = 1$. Por lo cual, si $car(\mathbb{F}_q) = 2$ o $\neq 2$, tenemos que el número de involuciones es 0 o 1 respectivamente.

$\diamondsuit$ Si $(t_a \circ r_u)^2 = 1$ con $a \neq 0$ y $u \neq 1$, entonces $u^2 = 1$ y $a(1+u) = 0$. Por lo cual el número de involuciones, para caracteristica 2 o distinta a 2, es $q^2 - 1$ respectivamente.

$\diamondsuit$ Si $(t_a \circ \gamma)^2 = 1$ con $a \neq 0$, entonces se debe cumplir la ecuación $\gamma(a) + a = 0$, es decir, $Tr(a) = 0$. Asi el número de involuciones, para caracteristica 2 o distinta a 2, es igual a $q - 1$.

$\diamondsuit$ Si $(r_u \circ \gamma)^2 = 1$ con $u \neq 1$, entonces $u\gamma(u)z = 1$ pero $u\gamma(u) = N(u) = 1$, con lo cual el número de involuciones, para caracteristica 2 o distinta a 2, es q.

$\diamondsuit$ Si $(t_a \circ r_u \circ \gamma)^2 = 1$ con $a \neq 0$ y $u \neq 1$, entonces se debe cumplir la ecuación $a + u\gamma(a) = 0$ por lo cual $u = -\frac{a}{\gamma(a)}$ (elemento de norma igual 1). Podemos notar que $N(u) = 1$ es equivalente a $Tr(a) = 0$. Asi el número de involuciones, para caracteristica 2 o distinta a 2, es igual a $q^2 - q$.

De lo anteriormente expuesto se deduce que el número de involuciones del grupo, para el caso de característica distinta a 2 es igual a $2q^2 + q + 1$ y $2q^2 + q$ para el caso de característica igual a 2. $\square$

OBSERVACIÓN 25. *Consideremos la extensión de cuerpos finitos de grado m,* $\mathbb{F}_{q^m}|\mathbb{F}_q$. *Sea* $A = \mathbb{F}_{q^m}^+$. *Todo carácter* $\overline{\phi} \in \widehat{A}$ *se factoriza por la función traza y un carácter* ϕ *del cuerpo base* $\mathbb{F}_q$. *Ahora* $\phi(x) = w_0^{Tr(x)}$, *donde* w_0 *es una raiz p-esima de la unidad no trivial y* Tr *es la respectiva función traza. Asi se tiene la propiedad* $\overline{\phi}(\sigma(x)) = \overline{\phi}(x)$ *para todo elemento* σ *en el grupo de Galois para la extensión* $\mathbb{F}_{q^m}|\mathbb{F}_q$.

Si $T = T_q(\mathbb{F}_{q^m}) = A$. *Consideremos* $\psi \in \widehat{T} = \widehat{A}$, *con* $\psi \neq 1$, *entonces tenemos que* $\Psi : G \to \widehat{G}$ *definido por la ecuación* $\Psi(t_a)(t_b) := \psi(t_{ab})$ *para cada* $b \in \mathbb{F}_{q^m}^+$. *Entonces* Ψ *es un isomorfismo de grupos. Probemos esto último*

Dados $t_a, t_b \in T$, *entonces* $\psi(t_a t_b) = \psi(t_{a+b}) = \psi(t_a)\psi(t_b)$, *por lo cual* ψ *es un homorfismo de grupos. Ahora si* $t_a \in Ker(\Psi)$, *entonces* $\psi(t_{ab}) = 1$ *para cada* $b \in \mathbb{F}_{q^m}^+$. *En el caso que* $a \neq 0$ *entonces* $\psi(t_c) = 1$ *para cada* $c \in \mathbb{F}_{q^m}^+$, *de lo cual se deduce que* $\psi = 1$, *lo cual es una contradicción, asi* $Ker(\phi) = 0$, *por lo cual* Ψ *es un isomorfismo.*

Consideremos el grupo de transformaciones rigidas $G = T \rtimes O$, *donde* O *es el grupo ortogonal respectivo. Sabemos, por la maquina de Mackey, que* $O \hookrightarrow \widehat{T}$ *donde la acción está dada por la función* $h \cdot \Psi(t_a)(t_b) = \Psi(t_a)(ht_b h^{-1}) = \Psi(t_a)(t_{u\sigma(b)})$, *donde* $h = r_u\sigma \in O$, *para ciertos* u *elemento de norma igual a 1 y* σ *elemento en el grupo de Galois de la extensión. Por lo cual* $h \cdot \Psi(t_a)(t_b) = \psi(t_{ua\sigma(b)}) = \psi(t_{\sigma(u^{-1}\sigma(a)b)}) = \Psi(t_{u^{-1}\sigma(a)})(t_b)$ *donde* $h = r_u\sigma \in O$.

Esto último nos dice que la acción, que en un principio está sobre los carácteres del grupo de traslaciones, se traspasa a las traslaciones parametrizadoras y esto a su vez, a los elementos de la extensión, a saber, $h \cdot a = u^{-1}\sigma(a)$

PROPOSICIÓN 37. *La dimensión de un modelo de Gelfand para el grupo de transformaciones rigidas* $Iso_q(\mathbb{F}_{q^2})$ *coincide con el número de involuciones del grupo.*

DEMOSTRACIÓN. Ocupando el teorema 15 y la observación anterior tenemos lo siguiente.

Sean $T = T_q(\mathbb{F}_{q^2})$, $O = O_q(\mathbb{F}_{q^2}) = U \rtimes \Gamma$, donde U es el grupo de rotaciones del grupo de transformaciones rigidas o simplemente el grupo de elementos de norma igual 1, y $\Gamma = \langle\sigma\rangle$ representa al grupo de

Galois de la extensión cuadrática. Podemos notar que O es un grupo diedral cuyo orden es $2(q+1)$. Teniendo presente el teorema 15 y la observación 25 y el hecho que las isotropias $I_a = \{id, m_{\frac{a}{\sigma(a)}} \circ \sigma\} \cong \Gamma$, con $a \neq 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
m(T \rtimes O) &= m(O) + \textstyle\sum_{r \in \mathbb{F}_q^\times} |O| \\
m(T \rtimes O) &= m(O) + (q-1)|O| \\
m(T \rtimes O) &= m(O) + (q-1)2(q+1) \\
m(T \rtimes O) &= m(O) + 2(q^2-1)
\end{aligned}
$$

Como O es un grupo diedral tenemos dos posibilidades, a saber, si q es un número par entonces $m(T \rtimes O) = (q+1)+1+2(q^2-1) = 2q^2+q$. Si q es un número impar, $m(T \rtimes O) = (q+1)+2+2(q^2-1) = 2q^2+q+1$. Lo cual conluye la demostración. $\square$

TEOREMA 19. *El conjunto de involuciones del grupo de transformaciones rigidas $Iso_q(\mathbb{F}_{q^2})$ es un espacio de Gelfand para dicho grupo, con la signatura relativa como carácter lineal de su grupoide de movimientos.*

DEMOSTRACIÓN. Basta proceder de manera análoga a lo realizado para el grupo diedral., recordando que la signatura de asociada al elemento $(x, g, x) \in M(G : X)$ es la signatura de g actuando como permutación del conjunto $Fix(x)$ de puntos fijos de x. $\square$

3. Grupo transformaciones rigidas, caso $q = 2$. $Iso_2(\mathbb{F}_4)$

Consideremos la extension cuadrática $\mathbb{F}_4$ sobre $\mathbb{F}_2$. Sabemos que el cuerpo $\mathbb{F}_4$ es el cuerpo de descomposición de el polinomio $x^4 + x$ sobre el cuerpo base. Sea α raiz del polinomio minimal $x^2 + x + 1$ sobre $\mathbb{F}_2$, asi $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$ y el grupo de Galois asociado a la extensión esta generado por el automorfismo de Frobenius $\sigma : a \longmapsto a^2$. Podemos notar que $N(a) = 1$, para todo $a \neq 0$

Sobre el grupo de transformaciones rigidas $Iso_2(\mathbb{F}_4)$ podemos realizar algunas observaciones importantes. Tenemos que $T_2(\mathbb{F}_4) =< t_1, t_\alpha >$ es isomorfo al grupo de Klein $(\mathbb{F}_4, +)$, mientras que el grupo ortogonal $O_2(\mathbb{F}_4) =< \sigma, r_\alpha >$ es isomorfo al grupo diedral de orden 6 D_3. Identificando los puntos $0, 1, \alpha, \alpha + 1$ con los valores $1, 2, 3, 4$ respectivamente, tenemos que $t_1 = (12)(34)$, $t_\alpha = (24)(13)$, $\sigma = (34)$ y $r_\alpha = (234)$, $r_{\alpha+1} = r_\alpha^2 = (243)$, $t_{\alpha+1} = t_\alpha t_1 = (14)(23)$, $r_\alpha \sigma = (23)$ y $\sigma r_{\alpha+1} = (23)$. Todos estos cálculos se materializan en la siguiente proposición, para la cual ocuparemos estas y otras identificaciones.

PROPOSICIÓN 38. *El grupo de transformaciones rigidas asociado a la extención cuadrática sobre el cuerpo base $\mathbb{F}_2$ es isomorfo al grupo de permutaciones S_4.*

DEMOSTRACIÓN. Comenzemos recordando que el grupo simétrico S_4 es isomorfo al grupo de simetrias del tetraedro regular. Mostraremos que el grupo de transformaciones rigidas $Iso_2(\mathbb{F}_4)$ es justamente el grupo de simetrias del tetreadro regular. Para ello identifiquemos, del mismo modo anterior, los puntos $0, 1, \alpha, \alpha + 1$ con los valores $1, 2, 3, 4$ respectivamente, dispuestos en los vertices de un tetraedro regular. El conjunto

$$R = \{1, r_\alpha, r_{\alpha+1}, t_1, t_\alpha, t_{\alpha+1}, t_1 r_\alpha, t_1\ r_{\alpha+1}, t_\alpha r_\alpha, t_\alpha r_{\alpha+1}, t_{\alpha+1} r_\alpha, t_{\alpha+1} r_{\alpha+1}\}$$

es un grupo, generado por los elementos t_1, t_α y r_α, más aún isomorfo al grupo A_4. Para esto último, consideremos la aplicación biyectiva $\phi\ : R \to A_4$ definida sobre los generadores del grupo R como sigue: $\phi(t_1) = (12)(34)$, $\phi(t_\alpha) = (13)(24)$, $\phi(r_\alpha) = (234)$. Con lo cual la el homomorfismo queda definido por : $\phi(t_1^{i_1} t_\alpha^{i_2} r_\alpha^{i_3}) = \phi(t_1)^{i_1} \phi(t_\alpha)^{i_2} \phi(r_\alpha)^{i_3}$, con $i_1, i_2 \in \{0,1\}$ y $i_3 \in \{0,1,2\}$. Para este último punto es bueno tener presente las relaciones $r_\alpha t_1 = t_\alpha r_\alpha$ y $r_\alpha t_\alpha = t_{\alpha+1} r_\alpha$.

A continuación se extiende el isomorfismo anterior ϕ a todo el grupo de transformaciones rigidas de la extensión cuadrática. Para ello consideremos $f \in Iso_2(\mathbb{F}_4)$. Sabemos que $f = t_a r_u$ o $f = t_a r_u \sigma$ para algunos $a, u \in \mathbb{F}_4$ con $N(u) = 1$. Asi si $\phi(\sigma) = (34)$, definimos el isomorfismo como sigue: $\phi(t_1^{i_1} t_\alpha^{i_2} r_\alpha^{i_3} \sigma^{i_4}) = \phi(t_1)^{i_1} \phi(t_\alpha)^{i_2} \phi(r_\alpha)^{i_3} \phi(\sigma)^{i_4}$, con $i_1, i_2, i_4 \in \{0,1\}$ y $i_3 \in \{0,1,2\}$. $\square$

A continuación encontraremos un modelo de Gelfand para el grupo antes estudiado, el grupo de transformaciones rigidas asociado a la extension cuadrática, $Iso_2(\mathbb{F}_4)$. Para lo cual se ocupara el grupoide de movimientos asociado a dicho grupo y su grupo de carácteres. En una primera instancia se hará uso del isomorfimso $Iso_2(\mathbb{F}_4) \cong S_4$ y sus conocidas representaciones irreducibles, aunque iremos descubriendo los carácteres asociados a la representaciones irreducibles del grupo en cuestión a medida que avancemos en los cálculos. Luego bastará con aplicar la proposición 3 para ver si están presentes todas las representaciones irreducibles del grupo. Seguidamente se considerara otro espacio de Gelfand X para el grupo en cuestión, muy en el tono de lo realizado para el grupo Diedral.

Comencemos calculando el cardinal que debe tener el S_4-espacio de Gelfand. Sabemos que el número de particiones para 4 son cinco, por lo cual el grupo S_4 tiene cinco clases de conjugación y cinco es el número de sus representaciones irreducibles. Sumando a esto último tenemos que $|S_4/[S_4 : S_4]| = 2$, por lo cual el grupo S_4 posee dos representaciones de dimensión 2. Aplicando la proposición 3 tenemos la ecuación $24 = |S_4| = 1^2 + 1^2 + a^2 + b^2 + c^2$ [1], donde a, b y c son las dimensiones de las restantes representaciones irreducibles del grupo.

El grupo simétrico S_3 posee una representación irreducible de dimensión 2, anotemosla por (V^2, ρ). Sabemos que el grupo S_4 posee una copia isomorfa al grupo de Klein K, más aún $S_4/K \overset{\phi}{\cong} S_3$. Lo anterior nos permite construir una representación irreducible de dimensión 2 para el grupo simétrico S_4, a saber,

$$S_4 \xrightarrow{\pi} S_4/K \xrightarrow{\phi} S_3 \xrightarrow{\rho} Aut(V^2)$$

Lo anterior nos deja tan solo la solución siguiente a la ecuacion [1],

$$24 = |S_4| = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2$$

Asi, el espacio de Gelfand debe tener cardinal 10.

A continuación se presentan dos espacios de Gelfand para el grupo de transformaciones rigidas $Iso_2(\mathbb{F}_4)$.

$\diamond$ **Primer espacio de Gelfand.**

Teniendo presente lo último dicho, consideremos el S_4-espacio siguiente, $X = X_0 \cup X_1$, donde $X_0 = \{1, 2, 3, 4\}$, vertices de un tetraedro regular y X_1 el conjunto de aristas de dicho tetraedro. La acción del grupo simétrico S_4 sobre el conjunto X_1 es inducida por la acción trivial sobre X_0, es decir, si $\sigma \in S_4$ y $\{i, j\} \in X_1$ tenemos que $\sigma \cdot \{i, j\} = \{\sigma(i), \sigma(j)\}$. Probemos a continuación que X es un espacio de Gelfand para el grupo de transformaciones rigidas estudiado.

En terminos de órbitas tenemos que $O_1 = X_0$ y $O_{\{1,2\}} = X_1$, luego los grupos de isotropía asociados $G(1) \cong D_3$ y $G(\{1, 2\}) \cong C_2 \oplus C_2$.

Sea α un carácter asociado al grupoide de movimientos $M(G : X)$, entonces

$$\rho^\alpha \cong Ind_{D_3 \uparrow G}\alpha|_{D_3} \bigoplus Ind_{C_2 \oplus C_2 \uparrow G}\alpha|_{C_2 \oplus C_2}$$

Consideremos el carácter α tal que $\alpha|_{D_3} = 1$ y $\alpha|_{C_2 \oplus C_2} = sgn$. Podemos notar que las dimensiones para las representaciones inducidas $Ind_{D_3 \uparrow G}\alpha|_{D_3}$ y $Ind_{C_2 \oplus C_2 \uparrow G}\alpha|_{C_2 \oplus C_2}$ son 4 y 6, respectivamante.

Ocupando para la inducida el modelo de Mackey izquierdo, a saber,

$$Ind_{D_3 \uparrow G}\alpha|_{D_3} = \{f : G \to \mathbb{C} | \ f(gh) = f(g), \ \forall g \in G, \forall h \in D_3\} \leq \mathbb{C}^{24}$$

y donde $(\tau_g f)(x) = f(g^{-1}x)$, para todo $f \in Ind_{D_3 \uparrow G}\alpha|_{D_3}$ y todos $g, x \in G$, tenemos que

$$Ind_{D_3 \uparrow G}\alpha|_{D_3} \cong 1 \oplus 1^{\perp}.$$

A continuación probaremos que la subrepresentación $\beta_0 = 1^{\perp}$ es irreducible. Para ello necesitamos recordar el carácter asociado a la representación inducida, el cual para este caso, esta dado por la fórmula

$$
\begin{aligned}
\chi_\tau(g) &= \frac{1}{6} \sum_{\substack{s\in G\\ s^{-1}gs\in D_3}} \alpha|_{D_3}(s^{-1}gs)\\
&= \frac{1}{6} \sum_{\substack{s\in G\\ s^{-1}gs\in D_3}} 1\\
&= \frac{1}{6}|\{s\in G \ : \ s^{-1}gs\in D_3\}|
\end{aligned}
$$

Esta ecuación no permite generar la tabla de carácteres siguiente,

	(1)	(23)	(123)	(1234)	(12)(34)
1	1	1	1	1	1
χ_τ	4	2	1	0	0
χ_{β_0}	3	1	0	-1	-1

Con la información contenida en la tabla anterior podemos probar que la representación β_0 es irreducible, pues

$$
\begin{aligned}
\langle \chi_{\beta_0}, \chi_{\beta_0}\rangle &= \tfrac{1}{24}\textstyle\sum_{g\in G}\chi_{\beta_0}(g)\overline{\chi_{\beta_0}(g)}\\
&= \tfrac{1}{24}\textstyle\sum_{g\in G}\chi^2_{\beta_0}(g)\\
&= \tfrac{1}{24}[6\cdot 1^2+6\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)^2+1\cdot 3^2]\\
&= 1
\end{aligned}
$$

por lo tanto, la representación β_0 es irreducible.

A continuación, para la otra representación inducida, ocupando para ello el modelo de Mackey izquierdo, a saber,

$$Ind_{C_2\oplus C_2\uparrow G}\alpha|_{C_2\oplus C_2} = \{f: G\to\mathbb{C}|\, f(gh) = f(g)sgn(h),\ \forall g\in G, \forall h\in C_2\oplus C_2\}$$

y donde $(\rho_g f)(x) = f(g^{-1}x)$, para todo $f\in Ind_{C_2\oplus C_2\uparrow G}\alpha|_{C_2\oplus C_2}$ y todos $g, x\in G$, tenemos que

$$Ind_{C_2\oplus C_2\uparrow G}\alpha|_{C_2\oplus C_2} \cong sgn\oplus sgn^{\perp}.$$

donde la representación $\beta_1 = sgn^{\perp}$ es de dimensión 5. Probaremos a continuación que la representación β_1 se descompone en dos representaciones irreducibles, una de dimensión 2 y otra de dimensión 3. Esto último probara que el S_4-espacio $X = X_0 \cup X_1$, es un modelo de Gelfand para el grupo S_4.

Para este caso, el carácter asociado a la representación inducida esta dado por la ecuación

$$\begin{aligned}
\chi_\rho(g) &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{s\in G \\ s^{-1}gs\in C_2\oplus C_2}} \alpha|_{C_2\oplus C_2}(s^{-1}gs) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{\substack{s\in G \\ s^{-1}gs\in C_2\oplus C_2}} sgn(g) \\
&= \frac{sgn(g)}{4} \sum_{\substack{s\in G \\ s^{-1}gs\in C_2\oplus C_2}} 1
\end{aligned}$$

Esta ecuación no permite generar la tabla de carácteres siguiente:

	(1)	(23)	(123)	(1234)	(12)(34)
sgn	1	-1	1	-1	1
χ_ρ	6	-2	0	0	2
χ_{β_1}	5	-1	-1	1	1

Sabemos que el grupo S_4 actúa sobre $\mathbb{C}^4$ sobre los subindices, es decir, $\sigma \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)})$. Si ρ_0 es la representación entregada por esta acción, entonces tenemos que $\rho_0 \cong 1 \oplus 1^\perp$, donde la representación $\alpha = 1^\perp$ es de dimensión 3. Esta representación α es irreducible, para ello solo basta tener presente la tabla de carácteres asociada y verificar que $\langle \chi_\alpha, \chi_\alpha \rangle = 1$.

Una nueva representación irreducible para S_4 surgue al tensorizar las representaciones sgn y α. Esto último se muestra en la siguiente tabla de carácteres.

	(1)	(23)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_{ρ_0}	4	2	1	0	0
1	1	1	1	1	1
χ_α	3	1	0	-1	-1
sgn	1	-1	1	-1	1
$sgn \otimes \chi_\alpha$	3	-1	0	1	-1

A continuación mostraremos que la representación $\alpha_1 = sgn \otimes \alpha$ tiene multiplicidad 1 en la representación β_1. Para ello realizemos el siguiente cómputo.

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{\alpha_1}, \chi_{\beta_1} \rangle &= \tfrac{1}{24} \textstyle\sum_{g\in G} \chi_{\alpha_1}(g)\overline{\chi_{\beta_1}(g)} \\
&= \tfrac{1}{24}[5\cdot 3 + 6\cdot 1 + 6\cdot 1 + 3\cdot -1] \\
&= 1
\end{aligned}$$

por lo cual $\beta_1 \cong \alpha_1 \oplus \alpha_1^{\perp}$, donde la representación $\alpha_2 = \alpha_1^{\perp}$ es de dimensión 2, más aún está representación es irreducible, pues

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{\alpha_2}, \chi_{\alpha_2} \rangle &= \tfrac{1}{24} \textstyle\sum_{g\in G} \chi_{\alpha_2}(g)\overline{\chi_{\alpha_2}(g)} \\
&= \tfrac{1}{24} \textstyle\sum_{g\in G} \chi_{\alpha_2}^2(g) \\
&= \tfrac{1}{24}[1\cdot 2^2 + 8\cdot(-1)^2 + 3\cdot 3^2] \\
&= 1
\end{aligned}$$

asi tenemos que $\rho^{\alpha} \cong 1 \oplus \beta_0 \oplus sgn \oplus \alpha_1 \oplus \alpha_2$, con lo cual el S_4-espacio $X = X_0 \cup X_1$ es de Gelfand.

◇ Segundo espacio de Gelfand

Consideremos nuevamente el grupo de transformaciones rigidas asociadas a la extención cuadrática $\mathbb{F}_4|\mathbb{F}_2$, $Iso_2(\mathbb{F}_4)$. Por lo realizado anteriormente sabemos que $Iso_2(\mathbb{F}_4) = T_2(\mathbb{F}_4) \rtimes O_2(\mathbb{F}_4)$, más aún, sabemos que $Iso_2(\mathbb{F}_4) \cong S_4$.

El conjunto de involuciones para el grupo $Iso_2(\mathbb{F}_4)$, ocupando el isomorfismo, esta dado por el conjunto

$$X = \{1\} \cup \{(12),(13),(14),(23),(24),(34)\} \cup \{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$$

particionado en clases de conjugación, dadas por la acción del grupo sobre dicho conjunto. Asi hay tres subgrupos de isotropía salvo conjugación, a saber,

$$\begin{aligned}
G(1) &= Iso_2(\mathbb{F}_4) \cong S_4 \\
G((12)) &= \{1,(12),(34),(12)(34),\} \cong C_2 \oplus C_2 \\
G((12)(34)) &= \{1,(12)(34),(13)(24),(14)(23),(12),(34),(1423),(1324)\} \\
&\cong C_2^3
\end{aligned}$$

Siendo $G = Iso_2(\mathbb{F}_4) \cong S_4$ y α un carácter del grupoide de movimientos $M(G : X)$, entonces

$$\rho^\alpha \cong Ind_{G(1)\uparrow G}\alpha|_{G(1)} \bigoplus Ind_{G((12))\uparrow G}\alpha|_{G((12))} \bigoplus Ind_{G((12)(34))\uparrow G}\alpha|_{G((12)(34))}.$$

Consideremos el carácter definido por $\alpha|_{G(1)} = 1$ y $\alpha|_{G((12))} = sgn$, entonces

$$\rho^\alpha \cong 1 \oplus sgn \oplus \pi_1 \oplus \pi_2,$$

donde $\pi_1 = sgn^\perp$ y $\pi_2 = Ind_{G((12)(34))\uparrow G}\alpha|_{G((12)(34))}$ de dimensiones 5 y 3, respectivamente. A continuación se muestra una tabla con los valores del carácter χ_{π_1} y junto a ella se recuerda los valores para los caracteres χ_{α_1} y el carácter χ_{α_2} asociados a representaciones irreducibles de dimensión 3 y 2 respectivamente, entregados anteriormente.

	(1)	(23)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_{π_1}	5	-1	-1	1	1
χ_{α_1}	3	-1	0	1	-1
χ_{α_2}	2	0	-1	0	2

De la tabla anterior se deduce $\langle \chi_{\pi_1}, \chi_{\alpha_1} \rangle = 1$ y $\langle \chi_{\pi_1}, \chi_{\alpha_1} \rangle = 1$, entonces $\pi_1 = \alpha_1 \oplus \alpha_2$.

Finalmente, teniendo presente lo anteriormente hecho, definimos el carácter $\alpha|_{G((12)(34))}$ de modo siguiente,

	(1)	(12)	(34)	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)	(1423)	(1324)
$\alpha|_{G((12)(34))}$	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1

Por lo cual la tabla para el carácter χ_{π_2} esta dada por los valores,

	(1)	(23)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_{π_2}	3	1	0	-1	-1

entonces π_2 es irreducible. Esto muestra que para este caso el conjunto de involuciones es una espacio de Gelfand.

4. Involuciones del grupo $Iso_q(\mathbb{F}_{q^m})$. Espacio de Gelfand

Ahora generalizaremos un poco lo realizado en los episodios anteriores, considerando el conjunto de transformaciones rigidas asociadas a la extensioń de grado m sobre el cuerpo base de q elementos $\mathbb{F}_q$, donde $q = p^r$ (p : *primo*). Muchas de las demostraciones ya realizadas serán guia para lo siguiente a realizar.

Sabemos que el cuerpo $\mathbb{F}_{q^n}$ es el cuerpo de descomposición del polinomio $p(x) = x^{q^n} + x$ sobre el cuerpo base $\mathbb{F}_q$. El grupo de Galois asociado a la extensión $\mathbb{F}_{q^n}|\mathbb{F}_q$ es cíclico y está generado por el automorfismo de Frobenius $\sigma : a \longmapsto a^q$.

Se tienen asociados a la extensión en cuestión dos aplicaciones, a saber la traza y norma de un elemnto en el cuerpo $\mathbb{F}_{q^m}$. Recordemos esto último.

Definición 28. *Consideremos la extensión de cuerpos $\mathbb{F}_{q^n}|\mathbb{F}_q$ y $a \in \mathbb{F}_{q^n}$. Se define la Traza del elemento a,*

$$Tr(a) = a + a^q + \cdots + a^{q^{m-1}}$$

y la Norma del elemento a,

$$N(a) = a \cdot a^q \cdot \cdots \cdot a^{q^{m-1}}$$

Podemos notar, como la extensión $\mathbb{F}_{q^m}|\mathbb{F}_q$ es de Galois, entonces tanto la traza como la norma son elementos que habitan en el cuerpo base.

Observación 26. *A los elementos $a, a^q, \cdots, a^{q^{m-1}}$ se les llama conjugados de a o Galois-conjugados. Asi, la traza y la norma son la suma y el producto de los conjugados de un elemento dado, respectivamente.*

Definición 29. *Sea $q = p^r$, p : primo. Una transformación rigida de la extensión de grado m, $\mathbb{F}_{q^m}|\mathbb{F}_q$, es toda aplicación f que preserva la distancia entre puntos, es decir, $N(f(a) - f(b))=N(a - b)$ para todos $a, b \in \mathbb{F}_{q^m}$. Al conjunto de todas la transformaciones rigidas de la extensión lo denotaremos por $Iso_q(\mathbb{F}_{q^m})$.*

Podemos observar que toda transformación rigida es inyectiva, más aún, biyectiva, pues el conjunto de llegada es finito. Ahora el conjunto $Iso_q(\mathbb{F}_{q^m})$ tiene estructura de grupo con la composición de funciones. Manteniendo las mismas notaciones, anotaremos a las tansformaciones rigidas básicas por: σ(reflexión), t_a(traslación) y r_u(rotación), donde $N(u) = 1$ y $a \in \mathbb{F}_4$. Tenemos el grupo de traslaciones

$$T_q(\mathbb{F}_{q^m}) = \{t_a : a \in \mathbb{F}_{q^m}\}$$

el grupo de rotaciones

$$SO_q(\mathbb{F}_{q^m}) = \{r_u : N(u) = 1\}$$

y el grupo ortogonal

$$O_q(\mathbb{F}_{q^m}) = \{r_u \circ \sigma^i : N(u) = 1, \ i = 0, 1, \cdots, q^{m-1}\}$$

Más aún si G es el grupo de Galois asociado a la extensión de cuerpos dada, se tiene que $O_q(\mathbb{F}_{q^m}) \cong SO_q(\mathbb{F}_{q^m}) \rtimes G$.

OBSERVACIÓN 27. *Podemos realizar una pequeña observación respecto a lo anteriormente expuesto. Para el caso en que $q = 2$, tenemos que $O_2(\mathbb{F}_{2^n}) = \langle r_\alpha, \sigma\rangle$, donde α es raiz del polinomio $x^2 + x + 1$, más aún, $O_2(\mathbb{F}_{2^n}) \cong D_{2^n-1}$.*

PROPOSICIÓN 39. *Sea $q = p^r$ (p:primo) y G el grupo de Galois asociado a la extensión $\mathbb{F}_{q^m}|\mathbb{F}_q$ entonces $T_q(\mathbb{F}_{q^m}) \cong (\mathbb{F}_{q^n}, +)$.*

DEMOSTRACIÓN. Solo basta notar que si t_a y t_b son dos tralaciones, entonces $t_a \circ t_b = t_{a+b}$. □

La propiedades que se han demostrado para el caso en que la extensión tiene grado 2, sobre el cuerpo base de q elementos, tienen su equivalente natural para este caso. Sea $a \in \mathbb{F}_{q^m}$ y $x_i = \sigma^{i-1}(a)$, con $i = 1, \ldots, m-1$, entonces $s_1(a) = \sum x_i$, $s_2(a) = \sum_{i \neq j} x_i x_j, \ldots, s_n(a) = x_1 x_2 \cdots x_m$. Manteniendo las notaciones anteriores, tenemos la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 40. *Sean $a, b \in \mathbb{F}_{q^m}$. Si $s_i(a) = s_i(b)$ para todo elemento $i = 1, \ldots, m-1$ entonces $a = \sigma^i(b)$, para algún $i = 0, 1 \ldots, q^{m-1}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $a \in \mathbb{F}_{q^m}$ y $p(x) = \Pi_{i=1}^{m}(x - \sigma^{i-1}(a))$ por lo tanto $p(x) = x^m - s_1(a)x^{m-1} + \ldots + (-1)^m s_m$. Si b es tal que cumple $s_i(b) = s_i(a)$, entonces $p(x) = \Pi_{i=1}^{m}(x - \sigma^{i-1}(b))$. Entonces $a = \sigma^i(b)$, para algún $i = 0, 1 \ldots, q^{m-1}$. □

TEOREMA 20. *Si q es impar, toda transformación rigida f de la extensión $\mathbb{F}_{q^m}|\mathbb{F}_q$ se escribe de forma única $f = t_a \circ r_u \circ \sigma^i$ para algunos $a, u \in \mathbb{F}_{q^m}$, con $N(u) = 1$ y algún $i = 0, 1 \cdots, q^{m-1}$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $f \in Iso_q(\mathbb{F}_{q^m})) \therefore g = t_{-f(0)} \circ f$ es otra transformación rigida. Notemos que $g(0) = 0$, por lo cual $N(g(x)) = N(x)$, es decir, la nueva transformación rigida g preserva modulos. Asi $N(g(1)) = N(1) = 1$ por lo cual $g(1) = u$, donde $N(u) = 1$. Entonces $h = r_{\overline{u}} \circ g$ es una transformación rigida tal que fija a los elementos 1 y 0, es decir, $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$.

A continuación, como $h(1) = 1$, dado $a \in \mathbb{F}_{q^m} - \mathbb{F}_q$ entonces $N(h(a) - 1) = N(a - 1) \therefore \Pi_{i=1}^{m}(\sigma^{i-1}(h(a)) - 1) = \Pi_{i=1}^{m}(\sigma^{i-1}(a) - 1) \therefore$ $s_i(a) = s_i(h(a))$, entonces $h(a) = \sigma^i(a)$ para algún i.

A continuación consideremos $a \in \mathbb{F}_{q^m} - \mathbb{F}_q$ tal que $h(a) = \sigma^i(a)$. Supongamos existe $b \in \mathbb{F}_{q^m} - \mathbb{F}_q$ tal que $h(b) = \sigma^j(b)$, para algún $j \neq i$. Como h es una transformación rigida tenemos que $N(a - b) = N(\sigma^i(a) - \sigma^j(b))$, entonces $b = \sigma^j(b)$ o $a = \sigma^i(a)$, asi b o a deben pertenecer al cuerpo base, lo cual es una contradicción. Por lo cual $h = \sigma^i$, lo cual concluye la primera parte del teorema.

Para probar la unicidad, consideremos dos escrituras para $f \in Iso_q(\mathbb{F}_{q^m})$, digamos $f = t_{w_1} \circ r_{u_1} \circ \sigma^i$ y $f = t_{w_2} \circ r_{u_2} \circ \sigma^i$, entonces $t_{w_1 - w_2} = r_{u_2\overline{u_1}}$, por lo cual $a + w_1 - w_2 = u_2\overline{u_1}a$ para todo $a \in \mathbb{F}_{q^m}$. Asi $w_1 = w_2$ y $u_1 = u_2$. Lo cual concluye la demostración del teorema. □

OBSERVACIÓN 28. *El teorema anterior es claramente falso para el caso en que $q = 2$, por ejemplo, porque entonces la norma galoisiana de la extensión solo toma valores 0 y 1, de modo que toda biyección de $\mathbb{F}_q^m$ es un movimiento rígido y el grupo de transformaciones rigidas coincide con el grupo simétrico correspondiente, que es mucho más grande que nuestro producto semidirecto, salvo para el caso de la extensión cuadrática, en que ambos coinciden.*

OBSERVACIÓN 29. *A continuación calcularemos el número de elementos de norma igual* 1 *y el número de elementos de traza igual* 0 *para la extensión de cuerpos finitos* $\mathbb{F}_{q^m}|\mathbb{F}_q$.

$\diamondsuit$. *La función norma* $N : \mathbb{F}_{q^m} \to \mathbb{F}_{q^m}$ *cumple con* $N(ab) = N(a)N(b)$ *por lo tanto* N *es un homorfismo de grupos, por lo cual* $N : \mathbb{F}^*_{q^m} \to \mathbb{F}^*_q$ *es tambien un homomorfismo de grupos. Ahora si* $N(a) = 1$, *entonces* $N(a) = a \cdot a^q \cdot \dots \cdot a^{q^{m-1}} = a^{(1-q^{m-1})/(1-q)} = 1$, *por lo tanto* a *es una raiz del polinomio* $p(x) = x^{(1-q^{m-1})/(1-q)} - 1$. *Por lo cual podemos notar que* $|Ker(N)| \leq (1-q^{m-1})/(1-q)$. *Más aún* $\mathbb{F}^*_{q^m}/Ker(N) \leq \mathbb{F}^*_q$. *Entonces*

$$Ker(N) = (1-q^{m-1})/(1-q) = 1 + q + \dots q^{m-1}$$

$\diamondsuit$. *La función traza* $Tr : \mathbb{F}_{q^m} \to \mathbb{F}_q$ *es una transformación lineal, entonces* $m = dimKer(Tr) + dimIm(Tr)$. *Podemos notar que el polinomio* $p = x + x^q + \dots + x^{q^{m-1}}$ *en* $\mathbb{F}_{q^m}[x]$ *posee a lo sumo* $q^m - 1$ *raices distintas, entonces* $Ker(Tr) \neq 0$. *Asi la aplicación traza es sobreyectiva, por lo tanto* $Im(Tr) = \mathbb{F}_q$. *Esto nos dice que* $|Ker(Tr)| = m - 1$ *y asi* $Ker(Tr) = q^{m-1}$.

Para calcular el cardinal del grupo de transformaciones $Iso_q(\mathbb{F}_{q^m})$, basta tener presente el teorema y observación anterior. Con lo cual

$$|Iso_q(\mathbb{F}_{q^m})| = q^m(1 + q + \dots q^{m-1})m$$

PROPOSICIÓN 41. *Sea* $q = p^r$, *con* p : *primo, entonces tenemos que* $Iso_q(\mathbb{F}_{q^m}) \cong T_q(\mathbb{F}_{q^m}) \rtimes O_q(\mathbb{F}_{q^m})$

OBSERVACIÓN 30. *Consideremos un número natural* m, *podemos observar que el elemento* $m^2 + m + 1$ *es congruente a* 0 *o* 1 *modulo* 3, *dependiendo de la congruencia de* m *modulo* 3. *Supongamos que* $m = 3k$ *para algún* k, *entonces existe* k' *tal que*

$$(3k)^2 + (3k) + 1 = 3k' + 1 \equiv 1(3)$$

Analogamente si suponemos que $m = 3k + 1$ *para algún* k, *entonces existe* k' *de modo que*

$$(3k+1)^2 + (3k+1) + 1 = 3k' \equiv 0(3)$$

Finalmente si $m \equiv 2(3)$ *se tiene que* $m^2+m+1 \equiv 1(3)$. *Resumiendo lo anterior tenemos que* $m^2 + m + 1 \equiv 1(3)$ *si y sólo si* $m \equiv 0(3)$ *o* $m \equiv 2(3)$ *y* $m^2 + m + 1 \equiv 0(3)$ *si y sólo si* $m \equiv 1(3)$.

PROPOSICIÓN 42. *La dimensión de un espacio de Gelfand para el grupo* $Iso_q(\mathbb{F}_{q^3})$ *es igual al número* $3q^3 + q^2 + q$ *si* $q \equiv 0(3)$ *o* $q \equiv 2(3)$ *y es igual al número* $3q^3 + q^2 + q + 4$ *si* $q \equiv 1(3)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $G = Iso_q(\mathbb{F}_{q^3})$ y $H = U \rtimes \Gamma$. Teniendo presente el teorema 15 y la observación 25, tenemos

$$m(G) = m(H) + (q-1)|H| = m(H) + 3(q^3 - 1)$$

ya que $I_a = \{m_{\frac{a}{\sigma(a)}} \circ \sigma\}_{\sigma\in\Gamma} \cong \Gamma$, con $a \neq 0$. Solo resta calcular la dimensión del modelo para el grupo H, a saber, $m(H)$.

Sea R un sistema de representantes para el Γ-espacio $\widehat{U} = U$, entonces

$$\begin{aligned} m(H) &= \textstyle\sum_{u\in R} \frac{|\Gamma|}{|I_u|}|I_u| \\ m(H) &= \textstyle\sum_{u\in R} |\Gamma| \\ m(H) &= |\Gamma||R| \end{aligned}$$

Como $q^2 + q + 1$ es congruente a 0 o 1 modulo 3 y toda órbita es de largo 1 o 3 tenemos la siguiente separación en órbitas para el Γ-espacio U.

$$q^2 + q + 1 = \begin{cases} 1 + 3 \cdot \frac{q^2+q}{3} & \text{si } q^2 + q + 1 \equiv 1(3) \\ 1 + 1 + 1 + 3 \cdot \frac{q^2+q-2}{3} & \text{si } q^2 + q + 1 \equiv 0(3) \end{cases}$$

Por lo cual, teniendo presente la observación anterior

$$m(G) = \begin{cases} 3q^3 + q^2 + q & \text{si } q \equiv 0(3) \vee q \equiv 2(3) \\ 3q^3 + q^2 + q + 4 & \text{si } q \equiv 1(3) \end{cases}$$

Lo cual concluye la demostración. □

Más aún, podemos probar el siguiente hecho general

PROPOSICIÓN 43. *Sea* m *número primo. Entonces la dimensión de un espacio de Gelfand para el grupo* $Iso_q(\mathbb{F}_{q^m})$ *es igual al número* $mq^m + q^{m-1} + \cdots + q$ *si* $q \not\equiv 1(m)$ *y es igual al número* $mq^m + q^{m-1} + \cdots + q + (m^2 - 2m + 1)$ *si* $q \equiv 1(m)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $G = Iso_q(\mathbb{F}_{q^m})$ y $H = U \rtimes \Gamma$. Teniendo presente el teorema 15 y la observación 25, tenemos

$$m(G) = m(H) + (q-1)|H| = m(H) + m(q^m - 1)$$

ya que los grupos de isotropia $I_a \cong \Gamma$, con $a \neq 0$, para la acción del grupo H sobre el conjunto de traslaciones. Solo resta calcular la dimensión del modelo para el grupo H, a saber, $m(H)$.

Sea R un sistema de representantes para el Γ-espacio $\widehat{U} = U$, entonces

$$\begin{aligned} m(H) &= \sum_{u\in R} \frac{|\Gamma|}{|I_u|}|I_u| \\ m(H) &= \sum_{u\in R} |\Gamma| \\ m(H) &= |\Gamma||R| \end{aligned}$$

Como $|U|$ es congruente a 0 o 1 modulo m y toda órbita es de largo 1 o m tenemos la siguiente separación en órbitas para el Γ-espacio U.

$$|U| = \begin{cases} 1 + m \cdot \frac{|U|-1}{m} & \text{si } |U| \equiv 1(m) \\ m + m \cdot \frac{|U|-m}{m} & \text{si } |U| \equiv 0(m) \end{cases}$$

Por lo cual, teniendo presente la observación anterior

$$m(G) = \begin{cases} mq^m + q^{m-1} + \cdots + q & \text{si } q \not\equiv 1(m) \\ mq^m + q^{m-1} + \cdots + q + (m^2 - 2m + 1) & \text{si } q \equiv 1(m) \end{cases}$$

Lo cual concluye la demostración. □

OBSERVACIÓN 31. *Por lo anterior, si $m = 3$ entonces la dimensión del modelo de Gelfand para el grupo es $3q^3 + q^2 + q$ o $3q^3 + q^2 + q + 4$ dependiendo de la congruencia modulo 3 del elemento q . Ahora el grupo ortogonal cúbico sobre $\mathbb{F}_3$ posee orden $13 \cdot 3 = 39$. Por lo cual el grupo en cuestión no posee involuciones distintas de la identidad. Vemos asi, citando este caso, que el conjunto de involuciones del grupo deja de ser un buen candidato a espacio de Gelfand. En general para $m = 3$, se tiene que el grupo ortogonal tiene orden $3(q^2+q+1)$, que es un número impar si q lo es.*

El conjunto de involuciones para el grupo de movimientos rigidos $G = Iso_q(\mathbb{F}_{q^m})$, según la observación anterior, al menos para el caso

$m = 3$, deja de ser un candidato a espacio de Gelfand para el grupo. Un pensamiento fugaz nos lleva a pensar en otro conjunto para candidato, una extensión natural del anterior, a saber, el conjunto de elementos en el grupo G cuya potencia m-esima es igual a 1. Lamentablemente dicho conjunto, al menos para el caso $q = m = 3$ no funciona como espacio de Gelfand para dicho grupo. Esto se muestra en la observación siguiente.

OBSERVACIÓN 32. *Computemos lo dicho anteriormente, para ello sea $f \in Iso_3(\mathbb{F}_{27})$, sabemos que f se factoriza de manera única mediante una rotacion, traslación y eventualmente un elemento del grupo de Galois asociado. Teniendo esto ultimo presente computemos el número de 3−voluciones. Sea σ el elemento generador del grupo de Galois, t_a una traslación y r_u una rotación con $N(u) = 1$ de modo tal que $f = t_a \circ r_u \circ \gamma$, con gamma elemento del grupo de Galois, entonces la tabla siguiente muestra el número de 3−voluciones para cada respectivo caso.*

Número de 3−*voluciones*	
f	$\sharp$
I	1
t_a	$3^3 - 1$
r_u	0
$t_a \circ r_u$	0
γ	2
$t_a\gamma$	$2(3^2 - 1)$
$r_u \circ \gamma$	$2(3^2 + 3)$
$t_a \circ r_u \circ \gamma$	$(3 + 1)(3^3 - 1)$

Verifiquemos alguno de los camputos entregados en la tabla.

$\Diamond$ *Si $t_a^3 = 1$ con $a \neq 0$, entonces $3a = 0$. Por lo cual, para este caso, el número de 3−voluciones es igual a 3^3*

$\Diamond$ *Si $r_u^3 = 1$ entonces se debe tener que $u^3 = 1$. Pero sabemos que el número de elementos de norma 1 es igual a $3^2 + 3 + 1 = 13$. Como $3 \nmid 13$, tenemos que la única 3−volución, en este caso, sucede cuando $u = 1$.*

$\Diamond$ *Si $(t_a \circ r_u)^3 = 1$ entonces $u^3 = 1$ y $a + au + au^2 = 0$, por lo cual $u = 1$ y $a = 0$.*

◊ *Si* $(t_a \circ \gamma)^3 = 1$ *con* $a \neq 0$ *y* $\gamma \neq 1$, *entonces se debe cumplir la ecuación* $\gamma^2(a) + \gamma(a) + a = 0$, *es decir*, $Tr(a) = 0$. *Asi el número de* $3-$*voluciones, para este caso, es igual a* $(3-1)(3^2-1)$.

◊ *Si* $(r_u \circ \gamma)^3 = 1$ *con* $u \neq 1$ *y* $\gamma \neq 1$, *entonces* $u\gamma(u)\gamma^2(u)z = 1$ *pero* $N(u) = 1$, *con lo cual el número de* $3-$*voluciones, para este caso, es igual a* $2(3^2+3)$.

◊ *Si* $(t_a \circ r_u \circ \gamma)^3 = 1$ *con* $a \neq 0$ *y* $\gamma \neq 1$, *entonces se debe cumplir la ecuación* $a + u\gamma(a) + u\gamma(u)\gamma^2(a) = 0$ *la cual es equivalente a la ecuación*

$$1 + u\frac{\gamma(a)}{a} + u\frac{\gamma(a)}{a}\gamma(u)\frac{\gamma^2(a)}{\gamma(a)} = 0$$

Sea $v = u\frac{\gamma(a)}{a}$. *La ecuación anterior se transforma en la ecuación*

$$1 + v + v^4 = 0$$

Asi el número de $3-$*voluciones, para este caso, es igual a* $(3+1)(3^3-1)$.

Por lo tanto, el numero total de $3-$*voluciones es igual a* $1 + 3^3 - 1 + 2 + 2(3^2-1) + 2(3^2+3) + (3+1)(3^3-1) = 163$, *mientras que la dimensión de un espacio de Gelfand debe ser* $3 \cdot 3^3 + 3^2 + 3 = 93$. *Por lo cual, para este caso, el espacio de* $3-$*voluciones no es un espacio de Gelfand para el grupo en cuestión.*

Si bien lo anterior muestra que para $m \geq 3$ no es posible construir de manera natural un Modelo de Gelfand para nuestro grupos G de movimientos rígidos asociado a una extensión de grado m del cuerpo finito de base, a partir de un espacio de Gelfand formado de $m-$voluciones, podemos sin embargo obtener un espacio de Gelfand para G con ayuda de la Máquina de Mackey, como recapitulado en el teorema siguiente.

TEOREMA 21. *Sea* $G = A \rtimes H$, *grupo de transformaciones rígidas asociado a la extensión de cuerpos* $\mathbb{F}_{q^m}|\mathbb{F}_q$ *de grado primo* m, *donde* A *es el grupo de traslaciones y* $H = U \rtimes \Gamma$, *siendo* U *la "esfera unidad" para la norma en* $\mathbb{F}_{q^m}$ *y* Γ *el correspondiente grupo de Galois. Entonces,*

a) Un modelo de Gelfand M_G *de* G *puede ser obtenido como sigue*

$$M_G = M_H \oplus \bigoplus_{\substack{\beta \in \widehat{A}/H \\ \beta \neq 1}} Ind_{A\uparrow G}\,\beta$$

donde a su vez M_H está dado por,

$$M_H = Ind_{1\uparrow\Gamma}1 \oplus \bigoplus_{\substack{\omega\in\widehat{U}/\Gamma \\ \omega\neq 1}} Ind_{U\uparrow H}\,\omega.$$

b) Un espacio de Gelfand X_G puede ser obtenido como una reunión disjunta de $G-$órbitas, a saber,

$$X_G = G/AU \sqcup \bigsqcup_{\substack{\omega\in\widehat{U}/\Gamma \\ \omega\neq 1}} G/(AU)_\omega \sqcup \bigsqcup_{\substack{\beta\in\widehat{A}/H \\ \beta\neq 1}} G/A_\beta.$$

donde $(AU)_\omega = AU \quad (\omega \in \widehat{U}/\Gamma, \omega \neq 1), A_\beta = A \quad (\beta \in \widehat{A}/H, \beta \neq 1)$, estando el caracter torcedor α del correspondiente grupoide de movimientos dado por su restricción a los diferentes grupos de isotropía involucrados, a saber $1\otimes 1$ sobre AU; $1\otimes\omega$ sobre $(AU)_\omega \quad (\omega \in \widehat{U}/\Gamma, \omega \neq 1)$ y βsobre $A_\beta \quad (\beta \in \widehat{A}/H, \beta \neq 1)$.

Demostración. Ya sabemos por el teorema 16, que la Máquina de Mackey nos permite obtener un modelo de Gelfand para G, de la forma

$$M_G = M_H \oplus \bigoplus_{\substack{\beta\in\widehat{A}/H \\ \beta\neq 1}} \beta \otimes Ind_{I_\beta\uparrow H} M_{I_\beta} = M_H \oplus \bigoplus_{\substack{\beta\in\widehat{A}/H \\ \beta\neq 1}} Ind_{A\uparrow G}\,\beta.$$

Aplicando el teorema 16 al grupo $H = U \rtimes \Gamma$ obtenemos

$$M_H = M_\Gamma \oplus \bigoplus_{\substack{\omega\in\widehat{U}/\Gamma \\ \omega\neq 1}} \omega \otimes Ind_{I_\omega\uparrow\Gamma} M_{I_\omega} = M_\Gamma \oplus \bigoplus_{\substack{\omega\in\widehat{U}/\Gamma \\ \omega\neq 1}} Ind_{U\uparrow H}\,\omega.$$

Notando que Γ es conmutativo, $M_\Gamma = Ind_{1\uparrow\Gamma}\,1$, obtenemos

$$M_G = Ind_{1\uparrow\Gamma}1 \oplus \bigoplus_{\substack{\omega\in\widehat{U}/\Gamma \\ \omega\neq 1}} Ind_{U\uparrow H}\,\omega \oplus \bigoplus_{\substack{\beta\in\widehat{A}/H \\ \beta\neq 1}} Ind_{A\uparrow G}\,\beta.$$

es decir,

$$(1)\quad M_G = Ind_{AU\uparrow G}(1\otimes 1) \oplus \bigoplus_{\substack{\omega\in\widehat{U}/\Gamma \\ \omega\neq 1}} Ind_{AU\uparrow G}(1\otimes\omega) \oplus \bigoplus_{\substack{\beta\in\widehat{A}/H \\ \beta\neq 1}} Ind_{A\uparrow G}\,\beta.$$

Esta descripción de M_G, como suma de inducidas de caracteres lineales de ciertos subgrupos de G, muestra entonces que un espacio de Gelfand

X_G puede ser obtenido como una reunión disjunta de G−órbitas, a saber,

$$X_G = G/AU \sqcup \bigsqcup_{\substack{\omega\in\widehat{U}/\Gamma\\ \omega\neq 1}} G/(AU)_\omega \sqcup \bigsqcup_{\substack{\beta\in\widehat{A}/H\\ \beta\neq 1}} G/A_\beta$$

donde $(AU)_\omega = AU \quad (\omega \in \widehat{U}/\Gamma, \omega \neq 1), A_\beta = A \quad (\beta \in \widehat{A}/H, \beta \neq 1)$, teniendo el caracter torcedor α del correspondiente grupoide de movimientos como restricción a los diferentes grupos de isotropía involucrados, los caracteres indicados en la fórmula 1.

□

OBSERVACIÓN 33. *De manera más geométrica. La componente del modelo de Gelfand grupoidal M_G de G obtenida a partir de la componente G/AU del espacio de Gelfand X_G de G, puede ser descrita como la representación natural de G en $L^2(\Gamma)$ obtenida por levantamiento de la representación regular de Γ levantada a G via la proyección canónica de G sobre Γ.*

La componente del modelo de Gelfand grupoidal M_G de G obtenida a partir de la componente

$$\bigsqcup_{\substack{\omega\in\widehat{U}/\Gamma\\ \omega\neq 1}} G/(AU)_\omega$$

del espacio de Gelfand X_G de G puede ser descrita como la subrepresentación

$$L^2(U^\Gamma)^0 = \{f \in L^2(U^\Gamma) | \sum_{U^\Gamma} f = 0\}$$

de la representación natural de G en $L^2(U^\Gamma)$ asociada a la acción natural de G en el "recubrimiento galoisiano" $U^\Gamma = U \times \Gamma$ de U, dada por,

$$(au\gamma)(v,\delta) = ((r_u \circ \gamma)(v), \gamma\delta) \qquad (u, v \in U, \gamma, \delta \in \Gamma).$$

La componente del modelo de Gelfand grupoidal M_G de G obtenida a partir de la componente

$$\bigsqcup_{\substack{\beta\in\widehat{A}/H\\ \beta\neq 1}} G/A_\beta$$

del espacio de Gelfand X_G de G puede ser descrita como la subrepresentación

$$L^2(A^\Gamma)^0 = \{f \in L^2(A^\Gamma) | \sum_{A^\Gamma} f = 0\}$$

de la representación natural de G en $L^2(A^\Gamma)$ asociada a la acción natural de G en el "recubrimiento galoisiano" $A^\Gamma = A \times \Gamma$ de A, dada por,

$$(au\gamma)(b,\delta) = ((t_a \circ r_u \circ \gamma)(b), \gamma\delta) \qquad (a, b \in A, u \in U, \gamma, \delta \in \Gamma)$$

Bibliografía

[1] R. Brown, From groups to groupoids: a brief survey, Bull. London Math. Soc., 19 (1987). pp. 113134.

[2] H.Brandt, Ueber eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes, Math. Ann., 96 (1926). pp. 360366.

[3] Fulton, W., Harris, J., Representation Theory: A First Course, Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, New-York, 1970.

[5] Pierre, J., Linear Representations of Finite Groups, Springer-Verlag, New york, 1997.

[6] Soto-Andrade, Geometric Gelfand Models, tensor quotients and Weil representations, In Proceeding of Symposia in Pure Mathematics, 47, (1987). pp. 306-316.

[7] Aubert, A.-M., Soto-Andrade, J., Geometric Induction and Gelfand Models, Preprint, 2015.

[8] A. Connes, Noncommutative geometry, Academic Press, New York, (1994).

[9] V. Kodiyalam and D. Verma, A natural representation model for the symmetric groups. Arxiv:math.RT/0402216 V1, 2006.

[10] Natalia Gonzáles Guzmán, Construcción geométrica de modelos de Gelfand para ciertos grupos finitos, Universiadad de Chile, Santiago 2013.