UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

PERSISTENCIA EN UN SISTEMA COMPETITIVO CON ESTRUCTURA ETARIA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

VICENTE ESTEBAN SALINAS GONZÁLEZ

PROFESORA GUÍA:
SALOMÉ MARTÍNEZ SALAZAR

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
PABLO MARQUET ITURRIAGA
AXEL OSSES ALVARADO
HANNE VAN DEN BOSCH

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto CMM ANID BASAL FB210005

SANTIAGO DE CHILE
2022

RESUMEN TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
Y MEMORIA PARA OPTAR AL TITULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: VICENTE ESTEBAN SALINAS GONZÁLEZ
FECHA: 2022
PROF. GUÍA: SALOMÉ MARTÍNEZ SALAZAR

PERSISTENCIA EN UN SISTEMA COMPETITIVO CON ESTRUCTURA ETARIA

En el presente trabajo se estudia un sistema de reacción-difusión que modela la interacción de dos especies que habitan en una misma región. Cada una de las especies cuenta con dos grupos etarios (adultos y jóvenes) y entre ellas interactúan compitiendo.

Este sistema corresponde a una variante del modelo propuesto por Cosner, Cantrell y Martinez en [1], en el cual se estudia la dinámica de una especie en la que se diferencian dos grupos etarios. En este trabajo analizaron la existencia de un equilibrio positivo, la que se caracteriza a través de la linealización del sistema en torno al origen. Estos autores también estudiaron el perfil del equilibrio de coexistencia para difusiones pequeñas y coeficientes heterogéneos, conectando el sistema difusivo con el comportamiento asintótico del sistema sin difusión.

En esta memoria, se extiende el trabajo de los autores mencionados, considerando dos especies con el mismo tipo de estructura etaria utilizado en [1], las cuales compiten entre ellas. El objetivo es estudiar como los coeficientes del sistema, ya sean los de competencia entre especies, los de cooperación entre los grupos de una misma y las tasas de difusión afectan el comportamiento asintótico de las soluciones. En particular se busca probar si hay convergencia a un equilibrio y si hay equilibrios de coexistencia para ambas especies.

Se partirá estudiando el caso no difusivo y a coeficientes constantes, es decir, cuando el modelo corresponde a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de 4×4. Para este caso se establece como las diferentes relaciones entre los coeficientes caracterizan el comportamiento asintótico de las soluciones. Luego, se incluirá difusión, lo que modela el movimiento de las especies, tanto en su fase adulta como joven, en el dominio. En este caso, se probará que todos los equilibrios son homogéneos y también se estudiará el comportamiento asintótico del sistema, el cual será similar al caso sin difusión. Finalmente, se considerará el caso en que los coeficientes son heterogéneos en el espacio, con los coeficientes de difusión pequeños, caracterizando el comportamiento asintótico de equilibrios de coexistencia, cuando las difusiones se acercan a 0.

Para obtener estos resultados, se utilizará la teoría de los sistemas dinámicos monótonos, que será fundamental para determinar convergencia de las soluciones del problema de valor inicial a un equilibrio. Además, extenderemos resultados que permiten caracterizar el comportamiento de equilibrios de un sistema elíptico monótono singularmente perturbado. Para esto será clave usar las técnicas basadas en sub/supersoluciones y caracterizaciones del valor propio principal de operadores elípticos.

Si no sabes por dónde empezar
empieza por sonreír.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia por todo el apoyo durante todos estos años y por el cariño que me han dado. A mi madre y a mi padre, que me han educado y apoyado en todos los ámbitos que han podido, por tanto, esfuerzo que han dado por mi ayudándome a convertirme en el hombre que soy hoy en día, los quiero mucho. También a mis 3 hermanos, por tantos momentos de distracción y cariño, que han sido fundamentales para mantenerme motivado todos estos años.

Muchas gracias a la Profe Salomé, por su excelente guía y gran apoyo que me brindó en todo este trabajo, por todas las reuniones más que semanales que tuvimos y por siempre tener una excelente disposición para darse un tiempo de responder mis dudas y enseñarme. Gracias a los profesores Axel, Hanne y Pablo, por ser parte de mi comisión y ayudarme a cerrar de buena manera este proceso. También a todos los académicos, académicas, funcionarios y funcionarias que fueron parte de mi paso por la facultad y me ayudaron cuando los necesite.

Quiero agradecer a todos los amigos que he hecho en la Facultad, gracias por todos los momentos de alegrías, gracias a todas las personas en distintas épocas, fuimos compañeros de viaje ayudando a hacer más agradable la vuelta a casa (Cata, Gitano, Joaco, Lucho, Nico).

También agradecer a mi grupo de amigos los Chacritas: Barry, Benja, Bruno, Choco, Javo, Koya, Magaly, Majo, Pavlito, Pele, Suggy, Vivi, por acompañarme en mi paso por especialidad, por todo el cariño que me han dado y por todo lo que me ha enseñado cada uno.

Finalmente agradezco especialmente a la Barbi, mi compañera, por todo el amor y apoyo que me ha entregado estos años. Gracias por todo lo que hemos vivido juntos, por aguantarme a diario y por estar a mi lado en tantos viajes, momentos felices y experiencias.

Tabla de Contenido

Introducción **1**

1. Resultados Preliminares **6**
1.1. Definiciones Principales 6
1.2. Propiedades de Comparación 10
1.3. Resultados para aproximaciones 13
1.4. Resultados de sistemas monótonos 17

2. Resultados previos sistema de 1 especie **21**
2.1. Dinámica del sistema de 1 especie a coeficientes variables 21
2.2. Dinámica del sistema de una especie a coeficientes constantes 23

3. Orden y monotonía del sistema general **25**

4. Sistema a coeficientes constantes **31**
4.1. Sistema Sin Desplazamiento 31
4.1.1. Existencia de Equilibrios 32
4.1.1.1. Equilibrio Nulo 33
4.1.1.2. Equilibrio semitrivial $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$ 33
4.1.1.3. Equilibrio semitrivial $(0, 0, \overline{v_1}, \overline{v_2})$ 33
4.1.1.4. Equilibrios de coexistencias 34
4.1.1.4.1. Caso $s = \hat{s}$ 34
4.1.1.4.2. Caso $s \neq \hat{s}$ 35
4.1.2. Estabilidad de los Equilibrios 38
4.1.2.1. Caso $(s + a)e \geq sr$ y $(\hat{s} + a)e \geq \hat{s}\hat{r}$ 39
4.1.2.2. Caso $(s + a)e < sr$ y $(\hat{s} + a)e \geq \hat{s}\hat{r}$ 40
4.1.2.3. Caso $(s + a)e < sr \leq (s + a + b\overline{v_1})(e + f\overline{v_2})$ y $(\hat{s} + a)e < \hat{s}\hat{r} \leq (\hat{s} + a + b\overline{u_1})(e + f\overline{u_2})$ 43
4.1.2.4. Caso $sr > (s + a + b\overline{v_1})(e + f\overline{v_2})$ y $(\hat{s} + a)e < \hat{s}\hat{r} \leq (\hat{s} + a + b\overline{u_1})(e + f\overline{u_2})$ 46
4.1.2.5. Caso $sr > (s + a + b\overline{v_1})(e + f\overline{v_2})$ y $\hat{s}\hat{r} > (\hat{s} + a + b\overline{u_1})(e + f\overline{u_2})$ 47
4.2. Sistema General con Coeficientes Constantes 52
4.2.1. Caso ($s \neq \hat{s}$ y $r = \hat{r}$) ó ($s = \hat{s}$ y $r \neq \hat{r}$) 55
4.2.2. Caso $s = \hat{s}$ y $r = \hat{r}$ 56
4.2.3. Caso $s \neq \hat{s}$ y $r \neq \hat{r}$ 57
4.3. Comparación entre Sistemas 58

5. Sistema a coeficientes variables **60**
5.1. Sistema Sin Desplazamiento 60
5.1.1. Regiones de Equilibrios 61
5.2. Sistema General con Coeficientes Variables 64
5.2.1. Resultados para cualquier tasa de difusión 64
5.2.2. Resultados para tasas de difusión pequeñas 67
5.2.2.1. Extensión Caso Convergencia semitriviales en $\overline{\Omega}$ 68
5.2.2.2. Teorema de convergencia para dos especies y difusiones pequeñas 73

Conclusiones **84**

Bibliografía **86**

Índice de Tablas

4.1. Tabla de equilibrios para el sistema (4.1) 51

Índice de Ilustraciones

1.1. Mapeo $\varphi(x)$, para un ejemplo de dominio $\Omega \in \mathbb{R}^2$ 15
4.1. Representación del conjunto R_t, para cada tiempo 45
4.2. Representación de la Proposición 4.1.11, junto con los conjuntos W_1 y W_2. . . 50
4.3. Gráficos de $u_1(x)$ y $v_1(x)$ para el sistema con desplazamiento, cada 10^{2n+1} iteraciones, con $n = \{0, 1, 2, 3\}$. 58
4.4. Gráficos de $u_1(x)$ y $v_1(x)$ para el sistema sin desplazamiento, cada 10^{2n+1} iteraciones, con $n = \{0, 1, 2, 3\}$. 59
5.1. Ejemplo de dominio con los distintos subconjuntos posibles 62
5.2. Representación del teorema para un ejemplo de Ω 74

Introducción

En el ámbito de la ecología, los modelos que describen la dinámica de distintas especies interactuando en un medio han sido ampliamente estudiados utilizando diversas herramientas matemáticas. Entre los modelos utilizados destacan los sistemas de reacción-difusión, los cuales permiten modelar fenómenos como migraciones, mortalidad y reproducción de determinadas especies habitando una misma región.

En este contexto, surge la motivación de estudiar cómo afectan los coeficientes que dan cuenta de las interacciones entre las especies y el medio ambiente, en el comportamiento de la especie al largo plazo. Particularmente aquellos relacionados con difusión y competencia. En los sistemas de reacción-difusión se incorporan operadores elípticos para modelar el movimiento en el espacio de una población, el cual puede estar influenciado por factores como la disponibilidad de recursos. Cuando las especies compiten, la densidad de una afecta negativamente el crecimiento de la otra, lo que se traduce en coeficientes de natalidad que dependen negativamente de las densidades de las poblaciones rivales. Por otro lado, una interacción cooperativa ocurre cuando la mayor presencia de una especie afecta de manera positiva al crecimiento de la otra, por ejemplo, si se distingue en una especie las densidades de jóvenes y adultos, su interacción es cooperativa dado que mientras mayor es la densidad de los adultos, mayor es la densidad de los jóvenes y viceversa.

En las últimas décadas, se han estudiado ampliamente los modelos de reacción-difusión en el contexto de la dinámica de poblaciones. Por ejemplo, en algunos trabajos como: [2], [3] y [4], junto con las referencias citadas en ellos. Muchos de estos estudios, asumen que la población no está estructurada. Sin embargo, a menudo el movimiento es afectado por la edad u otros atributos.

Buscando modelar una especie donde el movimiento espacial depende de los grupos etareos, los autores de [1], Cosner Cantrell y Martínez, estudiaron el sistema (0.1), el cual considera una única especie, con 2 grupos etareos, cuyas densidades (u_1, u_2) satisfacen:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_1}{\partial dt} = d_1\Delta u_1 + r(x)u_2 - u_1(s(x)+a(x)+b(x)u_1) \text{ para } x\in\Omega, t>0 \\[2ex]
\dfrac{\partial u_2}{\partial t} = d_2\Delta u_2 + s(x)u_1 - u_2(e(x)+f(x)u_2) \text{ para } x\in\Omega, t>0 \\[2ex]
\nabla u_i\cdot\nu = 0 \text{ para } i\in\{1,2\}, x\in\partial\Omega, t>0 \\[2ex]
(u_1,u_2)(x,0) = (u_{01}(x), u_{02}(x)) \text{ para } x\in\Omega
\end{cases}
\tag{0.1}
$$

En este sistema, Ω es un dominio acotado, con ν la normal exterior unitaria de $\partial\Omega$. El conjunto Ω representa el medio en que habita la especie. Las densidades satisfacen condiciones de borde de tipo Neumann, es decir, no hay flujo en el borde de Ω. El término $s(x)$ representa la tasa en que los jóvenes maduran a adultos, mientras que $r(x)$ da cuenta de la fecundidad local de los adultos, en la ubicación x. Los términos $a(x)$, $b(x)$, $e(x)$ y $f(x)$ dan cuenta de tasas de mortalidad per cápita y factores de saturación. Los coeficientes d_1, d_2 son las tasas de difusión de jóvenes y adultos, respectivamente. Todos los coeficientes se suponen positivos y continuos en $\overline{\Omega}$.

Para el sistema (0.1), los autores demostraron que su comportamiento estará determinado únicamente por la estabilidad lineal del equilibrio $(0,0)$, es decir, por el signo de λ^u, el valor propio principal del problema (0.2). Si $\lambda^u \leq 0$, el $(0,0)$ es el único equilibrio y atrae a todas las condiciones iniciales positivas y en caso contrario, surge un único equilibrio positivo $(\overline{u_1}, \overline{u_2})$, el cual será un atractor global.

$$
\begin{cases}
d_1\Delta p_1(x) + s(x)p_2(x) - (s(x)+a(x))p_1(x) = \lambda p_1(x) \quad \forall x\in\Omega, t>0 \\
d_2\Delta p_2(x) + r(x)p_1(x) - e(x)p_2(x) = \lambda p_2(x) \quad \forall x\in\Omega, t>0 \\
\nabla p_1(x)\cdot\nu = \nabla p_2(x)\cdot\nu = 0 \quad \forall x\in\partial\Omega, t>0
\end{cases}
\tag{0.2}
$$

El objetivo de este trabajo será estudiar el comportamiento asintótico de un modelo de reacción-difusión, que corresponde a una versión extendida del sistema (0.1), que considera 2 especies con estructura etaria, en el cual los individuos del mismo grupo etario compiten por los recursos.

Para este modelo de 2 especies, las densidades (u_1, u_2), dan cuenta de la distribución de jóvenes y adultos de la primera especie, mientras que (v_1, v_2) corresponden a las densidades de la segunda especie. Así se considerará el siguiente sistema:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_1}{\partial t} = d_1\Delta u_1 + r(x)u_2 - u_1(s(x)+a(x)+b(x)(u_1+v_1)) \text{ para } x\in\Omega, t>0 \\[2ex]
\dfrac{\partial u_2}{\partial t} = d_2\Delta u_2 + s(x)u_1 - u_2(e(x)+f(x)(u_2+v_2)) \text{ para } x\in\Omega, t>0 \\[2ex]
\dfrac{\partial v_1}{\partial t} = d_3\Delta v_1 + \hat{r}(x)v_2 - v_1(\hat{s}(x)+a(x)+b(x)(u_1+v_1)) \text{ para } x\in\Omega, t>0 \\[2ex]
\dfrac{\partial v_2}{\partial t} = d_4\Delta v_2 + \hat{s}(x)v_1 - v_2(e(x)+f(x)(u_2+v_2)) \text{ para } x\in\Omega, t>0 \\[2ex]
\nabla u_i\cdot\nu = \nabla v_i\cdot\nu = 0 \text{ para } i\in\{1,2\}, x\in\partial\Omega, t>0 \\[2ex]
(u_1,u_2,v_1,v_2)(x,0) = (u_{01}(x),u_{02}(x),v_{01}(x),v_{02}(x)) \text{ para } x\in\Omega
\end{cases}
\tag{0.3}
$$

Para este nuevo sistema, se introducen los coeficientes $\hat{s}(x)$ y $\hat{r}(x)$, que cumplen un rol similar a $s(x)$ y $r(x)$, pero para la segunda especie. De igual manera las tasas d_3 y d_4, están asociadas a la difusión de la otra especie.

Para caracterizar el comportamiento de las soluciones del sistema (0.3), es importante estudiar sus equilibrios, los cuales corresponden a soluciones del siguiente sistema elíptico:

$$
\begin{cases}
d_1\Delta u_1 + r(x)u_2 - u_1(s(x)+a(x)+b(x)(u_1+v_1)) = 0 \text{ para } x\in\Omega \\[2ex]
d_2\Delta u_2 + s(x)u_1 - u_2(e(x)+f(x)(u_2+v_2)) = 0 \text{ para } x\in\Omega \\[2ex]
d_3\Delta v_1 + \hat{r}(x)v_2 - v_1(\hat{s}(x)+a(x)+b(x)(u_1+v_1)) = 0 \text{ para } x\in\Omega \\[2ex]
d_4\Delta v_2 + \hat{s}(x)v_1 - v_2(e(x)+f(x)(u_2+v_2)) = 0 \text{ para } x\in\Omega \\[2ex]
\nabla u_i\cdot\nu = \nabla v_i\cdot\nu = 0 \text{ para } i\in\{1,2\}, x\in\partial\Omega
\end{cases}
\tag{0.4}
$$

Utilizando los resultados de [1], para los casos en que solo habita una especie, se obtienen los equilibrios semitriviales $(\overline{u_1},\overline{u_2},0,0)$ y $(0,0,\overline{v_1},\overline{v_2})$, que en caso de existir serán únicos.

A diferencia del sistema (0.1), la estabilidad del equilibrio $(0,0,0,0)$ no será la única condición que permita predecir una extinción o supervivencia de la especie. Esta condición solo tendrá relación con la existencia de los equilibrios semitrivales, los cuales tendrán un rol fundamental al momento de predecir el comportamiento del sistema, pues al estudiar las linealizaciones de los equilibrios semitriviales, se obtiene que en caso de ser ambos inestables, entonces existirá un equilibrio de coexistencia (con todas sus componentes positivas). Otra diferencia con el sistema (0.1), es la unicidad del equilibrio de coexistencia, puesto que en el caso general del sistema (0.3) es todavía una interrogante. En este caso, pueden surgir nuevos comportamientos asintóticos, por lo que el estudio del sistema competitivo entre dos especies será más complejo que en el caso de solo una. Por ejemplo, dependiendo de los coeficientes, se puede obtener el caso en que exista un único equilibrio semitrivial que es globalmente estable, o que existan ambos semitriviales y que uno de ellos atraiga a las soluciones con condiciones iniciales positivas, estos casos serán abordados uno a uno, durante la subsección 4.1.2.

Un aspecto fundamental para el estudio de estos sistemas es saber si tienen un comportamiento monótono, por lo que en el capítulo 3, se probará que el sistema es monótono para el orden inducido por el cono alternante $K := \mathcal{C}(\mathbb{R})^2_+ \times (-\mathcal{C}(\mathbb{R})^2_+)$. Esto permitirá aplicar la teoría de sistemas monótonos expuesta en [5], siendo de gran utilidad para garantizar la existencia de soluciones y demostrar resultados acerca de su comportamiento. Por ejemplo, al existir ambas soluciones semitriviales, la monotonía respecto al orden $\leq_K$, permitirá probar que todas las condiciones iniciales positivas son atraídas por el conjunto $[(0, 0, \overline{v_1}, \overline{v_2}), (\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)]_K$, como se puede observar en la Proposición 4.2.2. Para el caso particular en que los coeficientes son constantes, se prueba que el equilibrio de coexistencia es único y el hecho de que este sea el atractor global del sistema, es una consecuencia de resultados generales para sistemas monótonos.

Durante los capítulos 1 y 2, se buscará presentar y realizar las modificaciones necesarias a los resultados previos de sistemas monótonos estudiados en otros trabajos, los cuales serán utilizados en el resto de los capítulos. También se entregarán definiciones útiles, con el fin de agilizar la lectura y se presentarán algunas propiedades de comparación para operadores elípticos uniformes, que serán muy útiles para las demostraciones de los capítulos posteriores.

En una primera instancia se intentará comprender el comportamiento del sistema cuando todos los coeficientes son constantes, es decir, el dominio Ω, es homogéneo, por lo que durante el capítulo 4, se estudiará solo este caso. Primero, se abordará el sistema sin difusión, con el fin de caracterizar las relaciones entre coeficientes, que afecten en la existencia y estabilidad lineal de los diversos equilibrios, de esta manera se obtendrán las relaciones que determinan el comportamiento del sistema para este caso, como se puede observar a modo de resumen en la Tabla 4.1. Posteriormente, se analizará el caso con desplazamiento, descartando la existencia de equilibrios distintos a los del sistema sin difusión y logrando mediante técnicas similares a las utilizadas para el caso sin desplazamiento, caracterizar el comportamiento global del sistema. Finalmente, con el fin de entender mejor el efecto que produce la dispersión, se presentará un ejemplo comparativo entre un sistema con difusión y el mismo sistema, pero sin desplazamiento.

Durante el capítulo 5, se estudiará el caso donde todos los coeficientes son variables, es decir, el dominio Ω, es heterogéneo. En la primera parte, se buscará utilizar las condiciones obtenidas en el capítulo anterior, por lo que se presentarán subconjuntos de Ω, que cumplirán estas condiciones, lo cual permitirá saber el comportamiento del sistema sin difusión, en cada uno de estos subconjuntos. Posteriormente, se buscará generalizar los resultados conseguidos, en [1], para tasas de difusión pequeñas, en particular el siguiente teorema: *El equilibrio del sistema de una especie con difusión, converge localmente uniforme en cada región, al equilibrio del sistema sin difusión.* En este trabajo, se logra extender este teorema a los sistemas de 2 especies, obteniendo como principal resultado el Teorema 5.2.10, el cual para tasas pequeñas prueba la convergencia de un equilibrio cualquiera del sistema de 2 especies, al equilibrio del sistema sin difusión.

En los siguientes capítulos, se aplicarán técnicas de diferentes teorías que son la piedra angular de los trabajos anteriores. En primer lugar se destacan los resultados de Smith en [5], que ya han sido mencionados al momento de determinar posibles convergencias a equilibrios y comportamientos del sistema. Otras técnicas importantes son las utilizadas en el trabajo de Lam y Lou, en [6], que permiten aplicar el método de sub/supersoluciones para ecuaciones elípticas y caracterizar el perfil del equilibrio para difusiones pequeñas. La adaptación de estos argumentos será clave para las demostraciones que se realizarán en los últimos teoremas de la subsección 5.2.2. Finalmente, las distintas versiones del Principio del Máximo para ecuaciones elípticas y parabólicas, presentadas por Protter y Weinberger, en [7], permitirán obtener resultados como la Proposición 3.0.5, la cual para los sistemas con difusión, asegurará que a partir de algún instante, las densidades serán estrictamente positivas en todo Ω, independientemente de la condición inicial.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

En este capítulo se presentarán los principales conceptos y resultados teóricos que serán necesarios para estudiar el sistema (0.3), indicando las referencias y entregando las demostraciones en los casos que sea necesario.

1.1. Definiciones Principales

Para el resto de los capítulos se utilizarán diversos conjuntos a los que pertenecerán las condiciones iniciales.

Sean $k, m, n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in (0,1)$, para facilitar la lectura, se definirán los siguientes conjuntos de funciones:

El espacio de las funciones, desde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, será denotado por:

$$\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^m) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}^m\}$$

El espacio de las funciones de clase $\mathcal{C}^k$, con dominio Ω y llegada $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{C}^k(\Omega) := \{f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}) | \text{ la derivada } k - sima \text{ de } f \text{ es continua}\}$$

El espacio de las funciones de clase $\mathcal{C}^{k,\alpha}$, con dominio Ω y llegada $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}^k(\Omega) | \text{ la derivada } k - sima \text{ de } f \text{ es } \alpha - \text{Hölder }\}$$

Para denotar a la parte positiva de un conjunto de funciones $A \subset \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ se utilizará la siguiente notación:

$$A_+ := \{f \in A | \forall x \in \Omega, \forall i \in \{1, ..., k\}, f_i(x) \geq 0\}$$

Por ejemplo $\mathcal{C}(\Omega)_+$, es el conjunto de las funciones continuas y positivas con dominio Ω y llegada en $\mathbb{R}$.

En algunos casos, se necesitará una condición inicial, más fuerte. Para denotar al conjunto de las funciones positivas, salvo la función nula, se utilizará:

$$A_{++} := A_+ \backslash \{0_A(x)\} = \{f \in A_+ | \exists x_0 \in \Omega, \exists i \in \{1, ..., k\}, f_i(x_0) > 0\}$$

Por último, se utilizará la notación de potencia, para el producto cruz entre espacios iguales:

$$A^k := A^{k-1} \times A$$

Observación Notar que $[\mathcal{C}(\Omega)_+]^2$ es igual a $[\mathcal{C}(\Omega)]^2_+$, pero $[\mathcal{C}(\Omega)_{++}]^2 \neq [\mathcal{C}(\Omega)]^2_{++}$, pues $[\mathcal{C}(\Omega)_{++}]^2$ son las funciones continuas desde Ω a $\mathbb{R}^2$, que ninguna de las componentes es siempre nula. Por otro lado $[\mathcal{C}(\Omega)]^2_{++}$ son las funciones continuas desde Ω a $\mathbb{R}^2$, excepto la función nula en ambas componentes en simultaneo.

Para poder estudiar la monotonía de un sistema, es necesario introducir previamente el concepto de relación de orden entre dos elementos, al momento de estudiar los sub sistemas del sistema (0.3) (cuando $u_1 = u_2 = 0$ ó $v_1 = v_2 = 0$), se utilizará la siguiente relación de orden:

Definición 1.1.1 *Sean $f, g \in [\mathcal{C}(\mathbb{R})]^2$ se define la siguiente relación de orden usual, la inducida por el cono de las funciones positivas $[\mathcal{C}(\mathbb{R})]^2_+$:*

$$f \leq_2 g \iff \forall x \in \Omega : f_1(x) \leq g_1(x), f_2(x) \leq g_2(x)$$

junto con las siguientes notaciones:

$$f <_2 g \iff f \leq_2 g, f \neq g$$

$$f \ll_2 g \iff \forall x \in \Omega : f_1(x) < g_1(x), f_2(x) < g_2(x)$$

Lo que permite definir el intervalo entre dos puntos comparables, respecto al orden $\leq_2$, de la siguiente manera.

Definición 1.1.2 *Para $f, g \in [\mathcal{C}(\mathbb{R})]^2$, se definen los intervalos:*

$$[f, g]_2 := \{h \in [\mathcal{C}(\mathbb{R})]^2 : f \leq_2 h \leq_2 g\}$$

$$[[f, g]]_2 := \{h \in [\mathcal{C}(\mathbb{R})]^2 : f \ll_2 h \ll_2 g\}$$

Observación De manera análoga para $f, g \in [\mathcal{C}(\mathbb{R})]^4$, se define $\leq_4$, con el orden usual inducido por el cono $[\mathcal{C}(\mathbb{R})]^4_+$.

Otra relación de orden, que se utilizará, al trabajar con el sistema (0.3) completo, es la relación de orden definida a continuación en $[\mathcal{C}(\mathbb{R})]^4$:

Definición 1.1.3 *Para $f, g \in [\mathcal{C}(\mathbb{R})]^4$, se define el orden inducido por el cono alternante*

$[\mathcal{C}(\mathbb{R})]_+^2 \times (-[\mathcal{C}(\mathbb{R})]_+^2)$:

$$f \leq_K g \iff \forall x \in \Omega : (f_1, f_2) \leq_2 (g_1, g_2) \ y \ (f_3, f_4) \geq_2 (g_3, g_4)$$

y las siguientes notaciones:

$$f <_K g \iff f \leq_K g, f \neq g$$

$$f \ll_K g \iff (f_1, f_2) \ll_2 (g_1, g_2), (f_3, f_4) \gg_2 (g_3, g_4)$$

Este orden también generará sus respectivos intervalos:

Definición 1.1.4 *Sean $f, g \in [\mathcal{C}(\mathbb{R})]^4$, se definen los intervalos:*

$$[f, g]_K := \{h \in [\mathcal{C}(\mathbb{R})]^4 : f \leq_K h \leq_K g\}$$

$$[[f, g]]_K := \{h \in [\mathcal{C}(\mathbb{R})]^4 : f \ll_K h \ll_K g\}$$

Para estudiar la evolución de las distintas condiciones iniciales en el sistema (0.3), se buscará una función que cumpla la dinámica del sistema y varié según la condición inicial, por lo tanto se buscará un $T_t(y)$ tal que:

$$\frac{d(T_t(y))}{dt} = f(x, T_t(y))$$

El cumplimiento de esta propiedad da interés a definir el siguiente concepto:

Definición 1.1.5 *Una función continua $T : Y \times [0, \infty) \to Y$, se le dirá semiflujo en el espacio Y, si para todo $y \in Y, t_1, t_2 \in [0, \infty)$, se cumple que:*

$$T(y, 0) = y$$

$$T(y, t_1 + t_2) = T(T(y, t_1), t_2)$$

En general se denotará: $T_t(y) := T(y, t)$.

Observación El semiflujo de un sistema, cumplirá las 2 propiedades anteriores, junto con:

$$\frac{d(T_t(y))}{dt} = f(x, T_t(y))$$

para f la función del lado derecho del sistema.

Al momento de estudiar el comportamiento del sistema (0.3), su semiflujo asociado, permitirá definir las siguientes herramientas, las cuales se estudiarán con más detalles en los siguientes capítulos.

Definición 1.1.6 *La órbita de $y \in Y$, corresponde al conjunto $\{T_t(y) : t \geq 0\}$. Por lo tanto, es la trayectoria que recorre un punto inicial y, durante su evolución en el sistema.*

Además, un conjunto $A \subset Y$ se dirá invariante, respecto al semiflujo T_t, si $T_t(A) \subset A$ para todo $t \geq 0$.

En algunos sistemas, existen elementos que se mantienen constantes, estos puntos son muy importantes para el comportamiento límite del sistema, por lo que se definirán los siguientes 2, conceptos:

Definición 1.1.7 *Un punto $e \in Y$ se dirá un equilibrio si $T_t(e) = e, \forall t \geq 0$.*

Los equilibrios se pueden entender como condiciones iniciales del sistema, que se mantienen siempre iguales.

Definición 1.1.8 *Un equilibrio $e \in Y$ se dirá estable si para toda vecindad $V \subset Y$ de e existe $U \subset Y$, también vecindad de e, tal que $e \in U$ implica $T_t(y) \in V, \forall t \geq 0$.*

Un conjunto, que sera muy importante es el omega limite, de un punto, pues entregará el o los puntos, por los que la órbita del punto pasa en una cantidad infinita de oportunidades.

Definición 1.1.9 *El conjunto omega límite de un punto $y \in Y$ está definido como:*

$$\omega(y) := \bigcap_{s>0} \{T_t(y) : t > s\}$$

Es decir, es el conjunto de puntos $w \in Y$, para los cuales existe una secuencia $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $t_n \to \infty$, tal que:

$$\lim_{t_n \to \infty} T_{t_n}(y) = w$$

Las siguientes son algunas propiedades del conjunto omega límite: Siempre es cerrado e invariante. Si además la órbita de y está contenida en un compacto, entonces el conjunto omega límite será siempre no vacío, compacto y conexo.

Con respecto al conjunto omega límite y un equilibrio estable se cumple lo siguiente:

Proposición 1.1.10 *Considere e un equilibrio estable. Si para $y \in Y$ se tiene $e \in \omega(y)$, entonces $\omega(y) = \{e\}$.*

Demostración. Sea $w \in \omega(y)$ con $w \neq e$. Sean V_e, V_w vecindades de e y w respectivamente tal que $V_e \cap V_w = \emptyset$. Dado que e es estable, existe una vecindad U_e tal que la órbita de todo punto en U_e permanece en V_e. Como $e \in \omega(y)$, existe en particular $t_0 \geq 0$ tal que $T_{t_0}(y) \in U$, lo cual implica que $T_t(y) \in V_e$ para todo $t \geq t_0$. Como $V_e \cap V_w = \emptyset$ se tiene que $w \notin \omega(y)$. $\square$

Observación Esta propiedad, permitirá justificar la convergencia de las condiciones iniciales a un equilibrio, para los casos en que sus omega limites sean solo un punto.

En base a una relación de orden $\leq_Y$, en el espacio Y, se definirá el siguiente concepto:

Definición 1.1.11 *Sean $x, y \in Y$, sea un semiflujo $T = \{T_t\}_{0 \leq t < \infty}$, que preserva la relación de orden, es decir:*

$$x \leq_Y y \implies T_t(x) \leq_Y T_t(y), \forall t \geq 0$$

se le llamará semiflujo monótono.

Observación Si $t > 0$ y $x <_Y y \implies T_t(x) \ll_y T_t(y)$, se llama semiflujo fuertemente monótono.

1.2. Propiedades de Comparación

En esta sección se recordarán algunos resultados particulares como el principio del máximo y el método de sub/supersoluciones, junto con propiedades principalmente para sistemas elípticos y parabólicos.

El sistema (0.3) a estudiar, tiene 4 ecuaciones, con operadores elípticos, por lo que se definirán este tipo de operadores, para enunciar sus propiedades.

Sea L, se dirá que es un operador elíptico, si esta dado por:

$$Lw = \sum_{j,k=1}^{N} a_{j,k}(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_K} + \sum_{j=1}^{N} b_j(x) \frac{\partial w}{\partial x_j}$$

donde los coeficientes son de clase $\mathcal{C}^\alpha(\Omega)$, con $[a_{j,k}(x)]$ una matriz simétrica definida positiva en Ω. Suponiendo además sobre L, que existen constantes $d_1, d_2 > 0$ tal que $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$:

$$d_1 \|\xi\|^2 \leq \sum_{j,k=1}^{N} a_{j,k}(x) \xi_j \xi_K \leq d_2 \|\xi\|^2 \forall x \in \Omega$$

se dirá que es uniformemente elíptico.

Observación Para el sistema (0.3), se tiene la presencia de un operador uniformemente elíptico, pues todas las ecuaciones tienen un laplaciano multiplicado por las constantes positivas de difusión. El motivo de definir un operador uniformemente elíptico general y no solo las segundas derivas, es que para algunos de los resultados del capítulo, al realizar algún cambio de coordenadas, el laplaciano, podría ser distinto a la suma de las segundas derivadas y estas propiedades podrían no cumplirse.

Los 2 siguiente teorema son para sistemas parabólicos acoplados, como es el caso de estudio en los siguientes capítulos. Estos teoremas permitirán descartar extinción de alguna especie, en tiempo finito.

Teorema 1.2.1 *Sea $u(x, t)$, se define el operador L parabólico tal que, para cada $k \in \{1, ..., n\}$:*

$$L_K[u_K] := \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial^2 u_K}{{}_i\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u_K}{\partial x_i} - \frac{\partial u_K}{\partial t} \qquad x \in \Omega$$

y considerando la matriz $H = H(x,t)$ *de funciones, para cada* i,j, *se denotará* $h_{i,j}$ *y se cumple el siguiente sistema:*

$$\begin{array}{ccccc} L_1[u_1] & + & \sum_{i=1}^{n} h_{1,i}u_i & \geq 0 & en\ \Omega \\ \vdots & & \vdots \quad \ddots & & \vdots \\ L_n[u_n] & + & \sum_{i=1}^{n} h_{n,i}u_i & \geq 0 & en\ \Omega \end{array}$$

En un dominio Ω, *para el cual cada* L_K *es uniformemente elíptico. Suponiendo que los coeficientes* $a^n_{i,j}$ *y* b^n_i, *son uniformemente acotados y que* H *es una matriz positiva, salvo la diagonal.*

Si $\forall i \in \{1,...,n\}, u_i(x,0) \leq 0$, *entonces* $u_i(x,t) \leq 0, \forall t \geq 0$.

Más aún si para algún $(x_0,t_0) \in Int(\Omega \times [0,\infty))$, *se tiene que:* $u_i(x_0,t_0) = 0$, *entonces* $u_i(\cdot,t) = 0$, $\forall t \leq t_0$.

Teorema 1.2.2 *Sea* $u(x,t)$, *con la misma hipótesis que el Teorema 1.2.1, salvo que se alcance el valor máximo en el punto* (x_0,t_0). *Si para algún* $P \in \partial\Omega \times (0,T)$, *se tiene que* $u_i(P) = 0$ *y* $u_i(\cdot,t)$ *es continua en* $\Omega \cup P$, *entonces:*

$$\frac{\partial u_i}{\partial \nu} > 0 \ en\ (P)$$

a menos que $u_i(\cdot,t)$, *sea siempre* 0 *para todo* $t \leq t_0$.

Demostración. Son los teoremas 13 y 14 del Capítulo 8 de [7] □

Los siguientes 3 teoremas son parecidos a los anteriores, pero para ecuaciones elípticas. Estos también serán muy importantes, pues al trabajar con los equilibrios y sus ecuaciones elípticas, entregarán restricciones de los máximos y mínimos que pueden alcanzar en el sistema (0.3).

Teorema 1.2.3 (Principio del máximo de Hopf) *Sea* w, *tal que:*

$$L[w] := \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}\frac{\partial^2 w}{_i\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial w}{\partial x_i} \geq 0 \qquad x \in \Omega$$

En un dominio Ω, *en el cual* L *es uniformemente elíptico. Suponiendo que los coeficientes* $a_{i,j}$ *y* b_i, *son uniformemente acotados. Si* w *alcanza su máximo* M *en un punto interior de* D, *entonces* $w = M$ *en todo* Ω.

Teorema 1.2.4 *Sea w, tal que:*

$$(L+h)[w] \geq 0 \text{ en } \Omega$$

En un dominio Ω, con $h \leq 0$, para el cual L es uniformemente elíptico y h es acotado. Si w alcanza su máximo no negativo M en un punto interior de D, entonces $w = M$ en todo Ω.

Teorema 1.2.5 *Sea w, tal que:*

$$(L+h)[w] \geq 0 \text{ en } \Omega$$

En un dominio Ω, con $h \leq 0$, para el cual L es uniformemente elíptico y h es acotado. Si $w \leq M$, en el interior y alcanza su máximo no negativo M en un punto P frontera de Ω, tal que en ese punto w es continua en $\Omega \cup P$, entonces:

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} > 0 \text{ en } P$$

a no ser que: $w = M$ en todo Ω.

Demostración. Las demostraciones son los teoremas 5, 6 y 7, del Capítulo 2 de [7]. □

La siguiente ecuación es de tipo parabólica y es de interés, ya que el sistema (0.3) se puede reescribir de esta manera.

$$\begin{cases} w_t = Lw + f(x,w) \text{ en } \Omega \times (0,T] \\ \\ \nabla w \cdot n = 0 \text{ en } \partial\Omega \times (0,T] \\ \\ w(x,0) = w_0(x) \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}(\Omega), w_0 \in \mathcal{C}(\Omega)$ y $T > 0$.

Para comparar distintas condiciones iniciales, se utilizará el método de super/subsoluciones, pues junto con los resultados de monotonía de los capítulos siguientes, permitirán acotar las soluciones.

Definición 1.2.6 *Una función $\overline{w} \in \mathcal{C}(\Omega \times [0,T]) \cap \mathcal{C}^{2_x,1_t}(\Omega \times (0,T])$ (Clase $\mathcal{C}^2$ en x y Clase $\mathcal{C}^1$ en t) se dice una supersolución de (1.1) si:*

$$\begin{aligned} \overline{w_t} \geq & L\overline{w} + f(x,\overline{w} \text{ en } \Omega \times (0,T] \\ \nabla\overline{w} \cdot n \geq & 0 \text{ en } \partial\Omega \times (0,T] \\ \overline{w}(x,0) \geq & w_0(x) \text{ en } \Omega \end{aligned}$$

Similarmente, $\underline{w}$ se dice una subsolución si cumple todas las desigualdades anteriores revertidas.

El método de sub/supersoluciones concluye el siguiente resultado:

Proposición 1.2.7 *Sean* $\underline{w}, \overline{w}$ *una subsolución y una supersolución de* (1.1). *Entonces el problema* (1.1) *tiene una única solución y esta cumple que* $\underline{w} \leq w \leq \overline{w}$ *en* $\Omega \times [0, T]$.

Demostración. La demostración, esta detallada en el capítulo 2 en [8] □

Ahora se considerará la versión estacionaria de (1.1), i.e. el problema elíptico, el cual también es importante, pues los equilibrios del sistema (0.3) se estudiarán como las soluciones de este problema. El problema está dado por:

$$\begin{aligned} -Lw =& f(x, w) \text{ en } \Omega \\ \nabla w \cdot n =& 0 \text{ en } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.2}$$

Al igual que el caso anterior, se definen los conceptos de sub/supersolución, de la siguiente manera:

Definición 1.2.8 *Una función* $\overline{w} \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\partial\Omega)$ *se dice una supersolución de* (1.2) *si:*

$$\begin{aligned} -L\overline{w} \geq f(x, \overline{w} \ \textit{en } \Omega \\ \nabla\overline{w} \cdot n \geq 0 \ \textit{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Similarmente, $\underline{w}$ *se dice una subsolución de* (1.2) *si cumple todas las desigualdades anteriores revertidas.*

La siguiente proposición es similar al resultado anterior, pero para el caso elíptico.

Proposición 1.2.9 *Sean* $\underline{w}, \overline{w}$*, una subsolución y una supersolución de* (1.2)*, tal que* $\underline{w} \leq \overline{w}$ *en* Ω. *Entonces el problema* (1.2) *tiene una solución* w *tal que* $\underline{w} \leq w \leq \overline{w}$ *en* Ω.

1.3. Resultados para aproximaciones

Los siguientes teoremas serán de mucha utilidad, en los capítulos finales, para aproximar funciones continuas, mediante funciones más regulares y la confección de sub/supersoluciones.

Teorema 1.3.1 (Stone Weirstrass Versión Real) *Suponiendo que* X *es un espacio compacto de Hausdorff y* A *es una subálgebra cerrada de* $\mathcal{C}(X)$ *que contiene una función constante distinta de cero. Entonces* A *es denso en* $\mathcal{C}(X)$ *si y sólo si separa puntos.*

Demostración. Este resultado asumiendo que contiene alguna función constante, esta como el Teorema 4.45 de [9]. □

Este resultado permite aproximar por funciones con mayor regularidad e inclusive con condiciones de borde del tipo Neumann, utilizando el siguiente teorema:

Teorema 1.3.2 *Sea* f *una función* $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$*, con* $\overline{\Omega}$ *compacto subconjunto de* $\mathbb{R}^n$*, suponiendo que* Ω *es un dominio* $\mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega)$ *y* $\varepsilon > 0$*, entonces existe una función* $\hat{f} \in \mathcal{C}^2(\Omega)$*, tal que* $\nabla \hat{f} \cdot \nu = 0$

en $\partial\Omega$ *y*

$$f - \varepsilon \leq \hat{f} \leq f + \varepsilon$$

Demostración. Usando el Teorema 1.3.1, como las funciones $g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ y tales que $\nabla g \cdot \nu = 0$, son una semialgebra. Solo falta probar que separan puntos.

Para esto se utilizarán las funciones de la forma:

$$f(x) = e^{\dfrac{1}{x^2 - r^2}} \mathbb{1}_{(-r,r)}$$

Utilizando los resultados de la Proposición 2.2 y el Corolario 2.3 de [10]. Se obtiene que esta función es $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, con todas sus derivadas nulas, para $|x| = r$ y notando que es una función par y derivable, su primera derivada es 0 en $x = 0$.

Sean $x_1, x_2 \in \overline{\Omega}$, existen 2 casos:

1. Caso 1: Si $x_1, x_2 \in \Omega$.

   Para este caso existen las $B(x_1, r_1)$ y $B(x_2, r_2)$ tales que: $\overline{B(x_1, r_1)} \subset \Omega$ y $\overline{B(x_2, r_2)} \subset \Omega$ y $\overline{B(x_1, r_1)} \cap \overline{B(x_2, r_2)} = \emptyset$. Por lo tanto, tomando:

   $$f_1(x) = e^{\dfrac{\|x - x_1\|^2}{\|x - x_1\|^2 - r_1^2}} \mathbb{1}_{B(x_1, r_1)}(x) \text{ y } f_2(x) = 2e^{\dfrac{\|x - x_2\|^2}{\|x - x_2\|^2 - r_1^2}} \mathbb{1}_{B(x_2, r_2)}(x)$$

   Se tiene que $f_1 = f_1(x) + f_2(x)$, es de tipo Neumann y $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y $f(x_1) = 1$ y $f(x_2) = 2$.

2. Caso 2: Si $x_1 \in \partial\Omega$, $x_2 \in \overline{\Omega}$.

   Se puede tomar r_1 tal que $x_2 \notin B := B(x_1, r_1) \cap \overline{\Omega}$ y sea $\varphi()$ un mapeo $\mathcal{C}^2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (para esto se le pide a la frontera de Ω que sea lo suficientemente regularidad), tal que $\varphi(B) = B'$, para el cual:

   $$\varphi(\partial\Omega \cap B) = B' \cap \{y \in \mathbb{R}^n | y_n = 0\}$$

   En la Figura 1.1, se puede observar una visualización para $n = 2$.

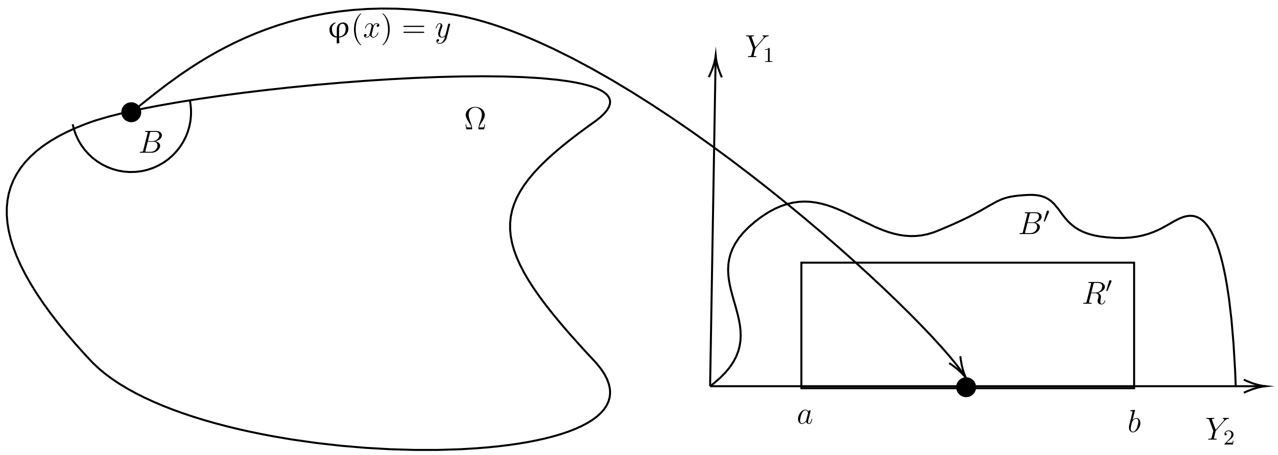

Figura 1.1: Mapeo $\varphi(x)$, para un ejemplo de dominio $\Omega \in \mathbb{R}^2$

Se puede definir en B', un rectángulo R' el cual está contenido en B', contiene a $\varphi(x_1)$ y tal que:

$$R' = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ..... \times [0, b_n]$$

Por lo tanto $\forall i \in \{1, ..., n-1\}$ se pueden definir las funciones $f_i, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, usando que son funciones Bump.

$$f_i(r) = e^{\dfrac{1}{(r - \frac{a_i+b_i}{2})^2 - (\frac{b_i-a_i}{2})^2}} \mathbb{1}_{(a_i,b_i)}(r), \forall i \in \{1, ..., n-1\}$$

$$g(r) = e^{\dfrac{1}{r^2 - b_n^2}} \mathbb{1}_{[0,b_n)}(r)$$

Definiendo la función $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que

$$h(y) = \prod_{i=1}^{n-1} f_i(y_i) g(y_n)$$

Se tiene que es Neumann sobre el conjunto $\{y \in \mathbb{R}^n | y_n = 0\}$, es $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, $h(\varphi(x_1)) > 0$ y $h(y) = 0, \forall y \notin R'$.

Finalmente, tomando $\hat{h}(x) = h(\varphi(x)) \mathbb{1}_{B(x_1,r_1) \cap \overline{\Omega}}(x)$, se obtiene que $\hat{h}(x_1) > 0 = \hat{h}(x), \forall x \in B(x_1, r_1)^c$, en particular x_2 y por construcción se puede verificar que es Neumann en todo $\partial\Omega$.

Con esto se concluye que estas funciones del tipo Neumann de un conjunto compacto, con frontera regular separan puntos y por ende se puede utilizar el Teorema 1.3.1. $\square$

En algunos casos el siguiente Corolario 1.3.3 permitirá utilizar una aproximación superior o inferior (dependiendo que conviene).

Corolario 1.3.3 *Sea f una función $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ con $\overline{\Omega}$ compacto subconjunto de $\mathbb{R}^n$, suponiendo* *que Ω es un dominio $\mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $\hat{g}_1, \hat{g}_2$ tales que $\hat{g}_1, \hat{g}_2 \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$, tal que $\nabla \hat{g}_1 \cdot \nu = \nabla \hat{g}_2 \cdot \nu = 0$ en $\partial\Omega$ y*

$$f - \varepsilon \leq \hat{g}_1 \leq f \leq \hat{g}_2 \leq f + \varepsilon$$

Demostración. Para probar la existencia de $\hat{g}_1$, se utilizará el Teorema 1.3.2 para f y $\varepsilon/2$, ahora redefiniendo $\hat{g}_1 = \hat{f} - \varepsilon/2$, las condiciones del tipo Neumann se mantiene y se tiene la siguiente desigualdad:

$$f - \varepsilon \leq \hat{g}_1 \leq f$$

De manera similar se obtiene $\hat{g}_2$ □

Las dos siguientes proposiciones entregan condiciones sobre los valores propios principales, de dos problemas que serán útiles para la confección de las subsoluciones, en la subsección 5.2.2.

Proposición 1.3.4 *Sea un conjunto Ω acotado subconjunto de $\mathbb{R}^n$, suponiendo que Ω es un dominio $\mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega)$, entonces el problema de valores propios, con condición Dirichlet:*

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ en } \Omega$$

$$u = 0 \text{ en } \partial\Omega$$

Tiene una única función propia siempre positiva asociada al valor propio principal, el cual es simple y estrictamente positivo:

Demostración. La existencia del valor propio principal y ser simple está dada por el Teorema 8.36, de [11].

Sea λ_1 el valor propio principal y u_1 su función propia positiva, para la caracterización del valor basta notar que:

$$\int_{\Omega} (\lambda_1 u_1) u_1 dx = \int_{\Omega} (-\Delta u_1) u_1 dx = \int_{\Omega} (\nabla u_1)^2 dx - \int_{\partial\Omega} 0 dx = \int_{\Omega} (\nabla u_1)^2 dx$$

Con lo que se obtiene:

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} (\nabla u_1)^2 dx}{\int_{\Omega} (u_1)^2 dx} > 0$$

Esto último, pues la función propia no puede ser la función nula. □

Proposición 1.3.5 *Sea un conjunto Ω acotado subconjunto de $\mathbb{R}^n$, suponiendo que Ω es un dominio $\mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega)$ tal que Γ_1 y Γ_2 son subconjuntos de $\partial\Omega$, con $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ y $\overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} = \partial\Omega$. Sea ν la normal exterior unitaria de Γ_1, entonces el problema de valores propios, con condiciones de borde mixtas:*

$$\Delta u + \sigma u = 0 \text{ en } \Omega$$

$$u = 0 \text{ en } \Gamma_1$$

$$\nabla u \cdot \nu = 0 \text{ en } \Gamma_2$$

Tiene una única función propia siempre positiva asociada al valor propio principal, el cual es simple y estrictamente positivo:

Demostración. La existencia del valor propio principal y ser simple está dada por el Lema 7 de [12], para el caso particular en que $a(x) = b(x) = 0$.

Sea σ_1 el valor propio principal y u_1 su función propia positiva, para la caracterización del valor basta notar que:

$$\int_\Omega (\sigma_1 u_1) u_1 dx = \int_\Omega (-\Delta u_1) u_1 dx = \int_\Omega (\nabla u_1)^2 dx - \int_{\Gamma_1} 0 dx - \int_{\Gamma_2} 0 dx = \int_\Omega (\nabla u_1)^2 dx$$

Con lo que se obtiene:

$$\sigma_1 = \frac{\int_\Omega (\nabla u_1)^2 dx}{\int_\Omega (u_1)^2 dx} > 0$$

Esto último, pues la función propia no puede ser la función nula. □

Observación No es necesario que $\overline{\Gamma_1}$ y $\overline{\Gamma_2}$ sean disjuntos, al aplicar este resultado en la demostración del Teorema 5.2.10, se observará un ejemplo en que esta situación sucede.

1.4. Resultados de sistemas monótonos

En esta sección se probarán y mencionarán diversos resultados de sistemas monótonos conocidos, que se utilizarán para probar las convergencias y existencias de equilibrios en los capítulos siguientes.

El siguiente criterio entrega una condición suficiente para tener convergencia a un equilibrio.

Teorema 1.4.1 *Si $\Phi_t()$ es un semiflujo fuertemente monótono en el espacio E, respecto a un orden $\leq_K$ y $\exists \delta > 0$, tal que para $w \in E$: $\Phi_\delta(w) \ll_K w$ ó $w \ll_K \Phi_\delta(w)$, entonces $\Phi_t(w) \to e \in E$, es decir, w converge a un equilibrio, cuanto $t \to \infty$.*

Demostración. La demostración es el Teorema 2.1, del Capítulo 1, de [5] □

El Teorema 1.4.2, entrega 3 opciones para saber el comportamiento, del semiflujo en un intervalo entre dos equilibrios, este resultado permitirá descartar existencia de equilibrios y/o concluir convergencias.

Teorema 1.4.2 *Sea $\Phi_t()$ un semiflujo fuertemente monótono en E, respecto a un orden $\leq_K$ en $[a, b]_K$, para $a, b \in E$ equilibrios. Se tiene una de las siguientes opciones:*

1. *Hay un equilibrio $w \in [a, b]_K$, distinto de a y b*
2. *$\Phi_t(w) \to a$, para todo $w \in [a, b]_K \backslash \{b\}$*
3. *$\Phi_t(w) \to b$, para todo $w \in [a, b]_K \backslash \{a\}$*

Demostración. Es el Teorema 2.2, del Capítulo 2, de [5] $\square$

El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales general, sera muy similar a los que se estudiarán en los capítulos siguientes, por lo que se probarán algunas propiedades que cumple.

Considerando el sistema (1.3)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x,t) = d_i \Delta u_i(x,t) + F_i(x, u(x,t)), t > 0, x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial \nu}(x,t) = 0, t > 0, x \in \partial\Omega \\ u_i(x,0) = \phi_i(x), x \in \Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

Donde $i \in I$ y $d_i > 0$ constantes, la función $F : \overline{\Omega} \times [\mathcal{C}(\Omega)]^n$ es continua en $\overline{\Omega}$ y el vector $\nu = \nu(x)$, es la normal exterior unitaria de $\partial\Omega$.

Por comodidad, se definirá para $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ la condición (1.4).

$$\forall i \in I, \forall x \in \overline{\Omega}, F_i(x,u) \geq 0, \text{ para } u(x) \in \Lambda \text{ y } u_i(x) = 0 \tag{1.4}$$

Los resultados obtenidos en el capítulo 7, del libro [5], entregan los siguientes teoremas y proposiciones:

Teorema 1.4.3 *Sea $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\phi \in [\mathcal{C}(\Omega)]^n$ tal que $\forall x \in \overline{\Omega}, \phi(x) \in \Lambda$, suponiendo que $u(t,\phi)$ la solución de* (1.3) *es acotada y la función F asociada al sistema, cumple la condición de la ecuación* (1.4)*, entonces:*

Para todo $t \geq 0, T_t^u(\phi) = u(t,\phi)$, es un semiflujo.

Demostración. Este resultado, es una mezcla del Teorema 3.1, el Corolario 3.2, del capítulo 7 de [5], junto con el acotamiento de la solución del sistema (1.3). $\square$

Otra definición importante para los siguientes resultados es la siguiente

Definición 1.4.4 *Un sistema se dirá cooperativo, si es que:*

$$\forall i \neq j \qquad \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial z_j} \geq 0$$

Observación Notar que en un sistema cooperativo, las especies distintas interactuarán de manera positiva entre ellas, aportando a su crecimiento.

Otro teorema importante, es el siguiente, el cual entregará una monotonía para el semiflujo generado por el sistema:

Teorema 1.4.5 *Suponiendo que F es cooperativo y satisface* (1.4)*. Si $\phi, \psi \in [\mathcal{C}(\Omega)]^n$ tal que $\forall x \in \overline{\Omega}, \phi(x) \in \Lambda$, satisfacen que: $\forall x \in \overline{\Omega}, \forall i \in \{1, ..., n\}$ se tiene $\phi_i(x) \leq \psi_i(x)$ y $u(x,t,\phi)$,*

$u(x,t,\psi)$ son soluciones de (1.3)*, con $u(x,0,\phi)=\phi(x)$ y $u(x,0,\psi)=\psi(x)$, entonces:*

$$u_i(x,t,\phi) \le u_i(x,t,\psi) \qquad \forall t \ge 0, \forall i \in \{1,...,n\}, \forall x \in \overline{\Omega}$$

Si además $\phi \neq \psi$, entonces:

$$u(\cdot,t,\phi) \neq u(\cdot,t,\psi) \qquad \forall t > 0$$

Demostración. Este resultado es el Corolario 3.5 de [5] □

Para obtener una monotonía estricta se introducirá el concepto de irreductibilidad:

Definición 1.4.6 *Una función $A : \overline{\Omega} \times E$, se dice cooperativa e irreductible, si tiene sus derivadas cruzadas no negativas y para cada $x_0 \in \Omega$ su matriz jacobiana: $\dfrac{\partial A}{\partial w}(x_0,w)$ es irreductible para cualquier $w \in E$. Una matriz A es irreductible, si para cualquier I un subconjunto propio de $\{1,...,N\}$ no vació, hay un $i \in I$ y un $j = N \backslash I$, tales que $a_{ij} \neq 0$*

El concepto de irreductibilidad, en un sistema de n especies, se puede entender, como la condición de que el sistema no pueda desacoplarse en dos subsistemas donde uno no afecte al otro.

Teorema 1.4.7 *Suponiendo que F es cooperativo, irreductible y satisface* (1.4)*. Si $\phi,\psi \in [\mathcal{C}(\Omega)]^n$ distintos, tal que $\forall x \in \overline{\Omega}, \phi(x) \in \Lambda$, junto con que $\forall i \in \{1,...,n\}, \phi_i(x) \le \psi_i(x)$ y $u(x,t,\phi)$, $u(x,t,\psi)$ son soluciones de* (1.3)*, con $u(x,0,\phi)=\phi(x)$ y $u(x,0,\psi)=\psi(x)$, entonces:*

$$u(x,t,\phi)_i \ll u(x,t,\psi)_i \qquad \forall t \ge 0, \forall i \in \{1,...,n\}, \forall x \in \overline{\Omega}$$

Demostración. Este resultado es el Corolario 3.5 de [5] □

Durante el capítulo 4, para estudiar el comportamiento asintótico del sistema, sera de interés los valores propios principales de algunos problemas. El siguiente teorema, permitirá, obtener propiedades sobre estos valores.

Teorema 1.4.8 (Perron-Frobenius) *Si A es una matriz no negativa, entonces $r = \rho(A)$ es un valor propio de A y con el vector propio asociado v tal que para todo $i \in I$, $v_i \ge 0$. Si en adición, A es irreductible, entonces $r > 0$ y $v_i > 0$. Más aún r tiene multiplicidad uno y si $u_i > 0$ es otro vector propio de A, entones existe un $s > 0$, tal que $u = sv$. Si B es otra matriz tal que $B > A$, entonces $\rho(B) > \rho(A)$. Finalmente, si $A \gg 0$, entonces $|\lambda| < r$, para cualquier otro valor propio de A.*

Definiendo el siguiente conjunto se tiene, el siguiente corolario

$$s(A) = \max\{Re(\lambda) : \lambda \text{ valor propio de } A\}$$

Corolario 1.4.9 *Sea A una matriz quasipositiva (positiva, salvo la diagonal), entonces $s(A)$ tiene un vector propio $v_i > 0$, tal que:*

$$Av = s(A)v$$

Mas aún, $Re(\lambda) < s(A)$, para todo λ valor propio, si A es irreductible:

1. *$s(A)$ tiene multiplicidad algebraica uno*
2. *$v_i > 0$ y cualquier otro vector propio positivo, es una ponderación del.*
3. *Si B es una matriz tal que $B > A$, entonces $S(B) > s(A)$*
4. *Si $s(A) < 0$, entonces $[-A^{-1}]_{i,j} > 0$*

Demostración. Su demostración es el Corolario 3.2 del teorema de Perron-Frobenius, en el capítulo 4 de [5] y la demostración del teorema, es el capítulo 11 de [13] $\square$

Capítulo 2

Resultados previos sistema de 1 especie

2.1. Dinámica del sistema de 1 especie a coeficientes variables

Este sistema es un caso particular del sistema (0.3), donde se considera solo la especie (u_1, u_2), en ausencia de la otra. Quedando un sistema en el cual los coeficientes de interacción cruzada son positivos.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = d_1 \Delta u_1 + r(x)u_2 - u_1(s(x) + a(x) + b(x)u_1) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = d_2 \Delta u_2 + s(x)u_1 - u_2(e(x) + f(x)u_2) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \nabla u_1 \cdot \nu = \nabla u_2 \cdot \nu = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega, t > 0 \\ \\ (u_1, u_2)(x, 0) = (u_{01}(x), u_{02}(x)) \text{ para } x \in \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

Este sistema (2.1), de 2 grupos fue estudiado con detalle en el trabajo de [1].

Utilizando los resultados anteriores se tienen las siguientes propiedades:

Proposición 2.1.1 *El semiflujo definido por sistema* (2.1) *es fuertemente monótono e invariante sobre* $[\mathcal{C}(\Omega)^2]_+$

Demostración. El sistema (2.1) es de la forma del sistema (1.3), con F, tal que cumple las condiciones del Teorema 1.4.7 y por lo tanto se obtiene que es fuertemente monótono. Por otra parte, si $\phi \in [\mathcal{C}(\Omega)^2]_+$, entonces: $(0,0) \leq_2 (\phi_1, \phi_2)$, por lo tanto utilizando que es un semiflujo monótono y que $(0,0)$, es un equilibrio del sistema.

$$(0,0) \leq_2 T_t^u(\phi) \Rightarrow T_t^u(\phi) \in [\mathcal{C}(\Omega)^2]_+$$

$\square$

La primera parte de este resultado entrega que para tiempos finitos la trayectoria en ningún punto se puede anular, dando origen al siguiente corolario.

Corolario 2.1.2 *Si* $\phi \in [\mathcal{C}(\Omega)^2]_{++}$*, entonces* $\mathcal{T}_t^u(\phi) \gg_2 (0,0)$*, para todo* $t > 0$*.*

Demostración. Es una consecuencia de que el semiflujo sea fuertemente monótono y que $(0,0)$ sea un equilibrio del sistema (2.1), pues:

$$(0,0) <_2 (\phi_1, \phi_2) \Rightarrow (0,0) = T_t^u(0,0) \ll_2 T_t^u(\phi) \Rightarrow T_t^u(\phi) \in Int([\mathcal{C}(\Omega)^2]_+)$$

$\square$

De los resultados de [1], se obtiene que el comportamiento asintótico del sistema (2.1), depende del valor propio principal de la linealización en torno al equilibrio $(0,0)$, la ecuación (2.2).

$$\begin{cases} \lambda\phi_1 = d_1\Delta\phi_1 + r(x)\phi_2 - \phi_1(s(x) + a(x)) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \lambda\phi_2 = d_2\Delta\phi_2 + s(x)\phi_1 - \phi_2 e(x) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \nabla\phi_1 \cdot \nu = \nabla\phi_2 \cdot \nu = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Todo este comportamiento se resume en el siguiente lema.

Lema 2.1.3 *El problema de valores propios de la ecuación* (2.2)*, tiene un único valor propio principal,* λ_1*, con el vector propio positivo* (ϕ_1, ϕ_2)*. Si* $\lambda_1 > 0$*, entonces el sistema* (2.1) *es persistente y tiene un único equilibrio positivo, el cual es globalmente asintóticamente estable. Si* $\lambda_1 \leq 0$*, entonces el* $(0,0)$ *es globalmente asintóticamente estable.*

Demostración. Este lema es una mezcla de los lemas 1, 2 y 3, de [1] $\square$

Observación De manera similar se tienen los resultados para el sistema (2.3), el cual consiste en la ausencia de la especie (u_1, u_2) y solo la evolución de la especie (v_1, v_2)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = d_3\Delta v_1 + \hat{r}(x)v_2 - v_1(\hat{s}(x) + a(x) + b(x)v_1) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t} = d_4\Delta v_2 + \hat{s}(x)v_1 - v_2(e(x) + f(x)v_2) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \nabla v_1 \cdot n = \nabla v_2 \cdot n = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega, t > 0 \\ \\ (v_1, v_2)(x, 0) = (v_{01}(x), v_{02}(x)) \text{ para } x \in \Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

Para el resto de los capítulos se denotarán los semiflujos de los sistemas de dos especies (2.1) y (2.3), por $T_t^u()$ y $T_t^v()$, respectivamente.

2.2. Dinámica del sistema de una especie a coeficientes constantes

El sistema (2.4) es un caso particular del sistema (2.1), en donde se considera que los coeficientes, ya no dependerán de x, su estudio permitirá entender mejor las dinámicas globales del sistema general, pues de cumplirse las desigualdades para la persistencia o extinción, esto sera en todo el sistema y no solo en algunas regiones.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = d_1 \Delta u_1 + r u_2 - u_1(s + a + b u_1) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = d_2 \Delta u_2 + s u_1 - u_2(e + f u_2) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \nabla u_1 \cdot n = \nabla u_2 \cdot n = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega, t > 0 \\ \\ (u_1, u_2)(x, 0) = (u_{01}(x), u_{02}(x)) \text{ para } x \in \Omega \end{cases} \tag{2.4}$$

Al ser un caso particular, se heredarán las propiedades de ser un sistema fuertemente monótono, para cualquier condición inicial positiva $u_0 = (u_1(0), u_2(0))$, se tiene que:

$$(0, 0) \ll_2 T_t(u_0), \quad \forall t > 0$$

Para este caso, el comportamiento asintótico del sistema (2.4), se conocerá con mayor exactitud, pues el signo del valor propio principal, depende de una ecuación conocida y por lo tanto el comportamiento vendrá dado por la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1 *La estabilidad del sistema* (2.4) *dependerá de los signos de* $sr - (s + a)e$*. Para el caso en que* $sr \leq (s + a)e$*, se tiene que* $(0, 0)$*, es el único equilibrio y es globalmente asintóticamente estable. Para el caso en que* $sr > (s + a)e$*, se tiene que este equilibrio repele a cualquier solución y surge un nuevo y único equilibrio positivo de coexistencia* $(\overline{u_1}, \overline{u_2})$*, el cual es constante y globalmente asintóticamente estable, por lo que no dependerá de los coeficientes de difusión.*

De manera similar también se tiene el caso en que se estudian las restantes dos componentes y se obtiene, el sistema (2.5), asociado a la especie (v_1, v_2).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = d_3 \Delta v_1 + \hat{r} v_2 - v_1(\hat{s} + a + b v_1) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t} = d_4 \Delta v_2 + \hat{s} v_1 - v_2(e + f v_2) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \nabla v_1 \cdot n = \nabla v_2 \cdot n = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega, t > 0 \\ \\ (v_1, v_2)(x, 0) = (v_{01}(x), v_{02}(x)) \text{ para } x \in \Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

Los resultados son los mismos, pero dependerán de los signos de: $\hat{s}\hat{r} - (\hat{s} + a)e$

Capítulo 3

Orden y monotonía del sistema general

En este capítulo se buscará estudiar cómo se mantienen las relaciones de orden de distintas condiciones iniciales a medida que evolucionan en el tiempo, para esto se utilizarán resultados previos de monotonía de las secciones anteriores. Reescribiendo el sistema (0.3), se puede llevar a la forma del sistema (1.3):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x,t) = d_i \Delta u_i(x,t) + F_i(x, u(x,t)), t > 0, x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial \nu}(x,t) = 0, t > 0, x \in \partial\Omega \\ u_i(x,0) = \phi_i(x), x \in \Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Donde $i \in \{1,2,3,4\}$ y $d_i > 0$ constantes. El vector $\nu = \nu(x)$, es la normal exterior unitaria de $\partial\Omega$.

Por comodidad en algunos casos también se trabajará el sistema (3.1), de manera vectorial. Sea $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ y similar con F y u. El sistema (3.1) puede expresarse como:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D\Delta u(x,t) + F(x, u(x,t)), t > 0, x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = 0, t > 0, x \in \partial\Omega \\ u(x,0) = \phi(x), x \in \Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

Con D una matriz diagonal de las tasas de difusión $(d_i)_{i\in\{1,2,3,4\}}$

Considerando:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

$$F(x,u(x,t)) = \begin{pmatrix} r(x)u_2(x,t) - u_1(x,t)(s(x)+a(x)+b(x)(u_1(x,t)+u_3(x,t))) \\ s(x)u_1(x,t) - u_2(x,t)(e(x)+f(x)(u_2(x,t)+u_4(x,t))) \\ \hat{r}(x)u_4(x,t) - u_3(x,t)(\hat{s}(x)+a(x)+b(x)(u_1(x,t)+u_3(x,t))) \\ \hat{s}(x)u_3(x,t) - u_4(x,t)(e(x)+f(x)(u_2(x,t)+u_4(x,t))) \end{pmatrix}$$

No se pueden utilizar directamente sobre el sistema (3.2), los resultados previos, pues observando la relación entre (u_1, u_3) o (u_2, u_4) se aprecia que el sistema no es cooperativo. Para solucionar este problema se definirá la siguiente matriz alternante.

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se analizará el valor de la función F y se estudiará cómo se relaciona con la matriz alternante P.

$$F(x,u(x,t)) = \begin{pmatrix} r(x)u_2(x,t) - u_1(x,t)(s(x)+a(x)+b(x)(u_1(x,t)+u_3(x,t))) \\ s(x)u_1(x,t) - u_2(x,t)(e(x)+f(x)(u_2(x,t)+u_4(x,t))) \\ \hat{r}(x)u_4(x,t) - u_3(x,t)(\hat{s}(x)+a(x)+b(x)(u_1(x,t)+u_3(x,t))) \\ \hat{s}(x)u_3(x,t) - u_4(x,t)(e(x)+f(x)(u_2(x,t)+u_4(x,t))) \end{pmatrix}$$

$$F(x,u(x,t)) = \begin{pmatrix} r(x)u_2(x,t) - u_1(x,t)(s(x)+a(x)+b(x)(u_1(x,t)-(-u_3(x,t)))) \\ s(x)u_1(x,t) - u_2(x,t)(e(x)+f(x)(u_2(x,t)-(-u_4(x,t)))) \\ -\hat{r}(x)(-u_4(x,t)) + (-u_3(x,t))(\hat{s}(x)+a(x)+b(x)(u_1(x,t)-(-u_3(x,t)))) \\ -\hat{s}(x)(-u_3(x,t)) + (-u_4(x,t))(e(x)+f(x)(u_2(x,t)-(-u_4(x,t))) \end{pmatrix}$$

$$F(x,Pu(x,t)) = \begin{pmatrix} r(x)u_2(x,t) - u_1(x,t)(s(x)+a(x)+b(x)(u_1(x,t)-u_3(x,t))) \\ s(x)u_1(x,t) - u_2(x,t)(e(x)+f(x)(u_2(x,t)-u_4(x,t))) \\ -\hat{r}(x)(u_4(x,t)) + (u_3(x,t))(\hat{s}(x)+a(x)+b(x)(u_1(x,t)-u_3(x,t))) \\ -\hat{s}(x)(u_3(x,t)) + (u_4(x,t))(e(x)+f(x)(u_2(x,t)-u_4(x,t))) \end{pmatrix}$$

$$PF(x,Pu(x,t)) = \begin{pmatrix} r(x)u_2(x,t) - u_1(x,t)(s(x)+a(x)+b(x)(u_1(x,t)-u_3(x,t))) \\ s(x)u_1(x,t) - u_2(x,t)(e(x)+f(x)(u_2(x,t)-u_4(x,t))) \\ \hat{r}(x)(u_4(x,t)) - (u_3(x,t))(\hat{s}(x)+a(x)+b(x)(u_1(x,t)-u_3(x,t))) \\ \hat{s}(x)(u_3(x,t)) - (u_4(x,t))(e(x)+f(x)(u_2(x,t)-u_4(x,t))) \end{pmatrix}$$

Definiendo $\hat{F}(x,v) := PF(x,Pv)$.

Sea $z(x,t) = (z_1(x,t), z_2(x,t), z_3(x,t), z_4(x,t)) = (u_1(x,t), u_2(x,t), -u_3(x,t), -u_4(x,t))$.

Notando que $P^{-1} = P$, se tiene que: $z(x,t) = Pu(x,t)$ y $Pz(x,t) = u(x,t)$.

Multiplicando por la matriz P el sistema (3.2), se obtiene se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = P\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = PD\Delta u(x,t) + PF(x,u(x,t)) = D\Delta z(x,t) + \hat{F}(x,z(x,t)), t > 0, x \in \Omega \\
&\frac{\partial z}{\partial \nu}(x,t) = 0, t > 0, x \in \partial\Omega \qquad (3.3)\\
&z(x,0) = Pu(x,0) = (\phi_1(x), \phi_2(x), -\phi_3(x), -\phi_4(x)), x \in \Omega
\end{aligned}
$$

Escribiendo las componentes de $\hat{F}(x,z(x,t))$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\hat{F}_1(x,z(x,t)) &= r(x)z_2(x,t) - z_1(x,t)(s(x) + a(x) + b(x)(z_1(x,t) - z_3(x,t))) \\
\hat{F}_2(x,z(x,t)) &= s(x)z_1(x,t) - z_2(x,t)(e(x) + f(x)(z_2(x,t) - z_4(x,t))) \\
\hat{F}_3(x,z(x,t)) &= \hat{r}(x)z_4(x,t) - z_3(x,t)(\hat{s}(x) + a(x) + b(x)(z_1(x,t) - z_3(x,t))) \\
\hat{F}_4(x,z(x,t)) &= \hat{s}(x)z_3(x,t) - z_4(x,t)(e(x) + f(x)(z_2(x,t) - z_4(x,t)))
\end{aligned}
$$

Definición 3.0.1 *Sea $\Lambda = \mathbb{R}^2_+ \times (-\mathbb{R}^2_+)$, se define:*

$$X_\Lambda = \{\phi \in [\mathcal{C}(\Omega)]^4 | \forall x \in \overline{\Omega}, \phi(x) \in \Lambda\}$$

Proposición 3.0.2 *El sistema* (3.3)*, es cooperativo para $z(x,0) \in X_\Lambda$.*

Demostración. Basta notar que se cumple:

$$
\begin{aligned}
J_z\hat{F}_1(x,z(x,t)) &= [-(s(x) + a(x) + 2b(x)z_1(x,t) - b(x)z_3(x,t)), r(x), b(x)z_1(x,t), 0] \\
J_z\hat{F}_2(x,z(x,t)) &= [s(x), -(e(x) + 2f(x)z_2 - f(x)z_4(x,t)), 0, f(x)z_2(x,t)] \\
J_z\hat{F}_3(x,z(x,t)) &= [-b(x)z_3(x,t), 0, -(\hat{s}(x) + a(x) + b(x)z_1(x,t) - 2b(x)z_3(x,t)), \hat{r}(x)] \\
J_z\hat{F}_4(x,z(x,t)) &= [0, -f(x)z_4(x,t), \hat{s}(x), -(e(x) + f(x)z_2(x,t) - 2f(x)z_4(x,t))]
\end{aligned}
$$

Como $-z_3(x,t) \geq 0$ y $-z_4(x,t) \geq 0$, se concluye que:

$$\forall i \neq j \qquad \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial z_j} \geq 0$$

□

Teorema 3.0.3 *Sean $\phi, \psi \in [\mathcal{C}(\Omega)]^4_+$, tales que $\phi \leq_K \psi$ y $u(x,t,\phi), u(x,t,\psi)$, son soluciones de* (3.2) *tales que: $u(\cdot,0,\phi) = \phi$ y $u(\cdot,0,\psi) = \psi$, entonces:*

$$u(\cdot,t,\phi) \leq_K u(\cdot,t,\psi)$$

Si $\phi <_K \psi$, entonces:

$$u(\cdot,t,\phi) <_K u(\cdot,t,\psi)$$

Más aún si $\phi, \psi \in Int([\mathcal{C}(\Omega)^4]_+)$ y $\phi <_K \psi$, entonces:

$$u(\cdot,t,\phi) \ll_K u(\cdot,t,\psi)$$

Demostración. Considerando $\hat{F}$, de la Proposición 3.0.2, se tiene que es cooperativo para X_Λ. También es fácil notar que se tiene la desigualdad de la ecuación (1.4), por lo tanto considerando $z(x,t,\phi)$ y $z(x,t,\psi)$ son dos soluciones del sistema (3.1), con $z(x,t,\phi) = P\phi$ y $z(x,t,\psi) = P\psi$, se tiene que:

$$P\phi = z(x,t,\phi) \leq_4 z(x,t,\psi) = P\psi$$

Utilizando el Teorema 1.4.5, se obtiene que:

$$z(x,t,\phi) \leq_4 z(x,t,\psi), \forall x \in \Omega \text{ y } t > 0$$

. Multiplicando esta última desigualdad, por la matriz P, se obtiene que:

$$u(x,t,\phi) = Pz(x,t,\phi) \leq_K Pz(x,t,\psi) = u(x,t,\psi)$$

Con lo que se obtiene la primera parte del teorema y la monotonía del sistema (3.2). Para la segunda parte se supondrá que $\phi, \psi \in ([\mathcal{C}(\Omega)^2]_{++})^2$.

Nuevamente considerando $\phi <_K \psi$ y $u(x,t,\phi)$, $u(x,t,\psi)$, soluciones del sistema (3.2), tales que: $u(x,0,\phi) = \phi$ y $u(x,0,\psi) = \psi$.

Con la nueva hipótesis sobre ϕ y ψ, ahora $\hat{F}$ además es irreductible, por lo que aplicando el Teorema 1.4.7, entonces:

$$z(x,t,\phi) \ll_4 z(x,t,\psi), \forall x \in \Omega \text{ y } t > 0$$

.

Esta última desigualdad, al multiplicarla por la matriz P, se obtiene que:

$$u(\cdot,t,\phi) \ll_K u(\cdot,t,\psi)$$

Concluyendo el teorema. □

Para los casos en que solo exista una especie, es decir, al considerar condiciones iniciales de la forma $\phi = (\phi_1, \phi_2, 0, 0)$, $\psi = (0, 0, \psi_1, \psi_2) \in X_\Lambda$, se puede notar que el sistema se convierte en los sistemas de 2 grupos (2.1) ó (2.3), respectivamente. En ambos casos el sistema con condiciones iniciales en $[\mathcal{C}(\Omega)^2]_+$ sera monótono, invariante y su comportamiento asintótico, sera conocido variando según las relaciones entre los coeficientes.

Para trabajar con mayor comodidad, al igual que en el capítulo anterior, se definirá el semiflujo asociado al sistema (3.2).

Definición 3.0.4 $\Phi_t(\phi) := u(\cdot,t,\phi)$, *como el semiflujo definido en base a la solución del sistema* (3.2).

Proposición 3.0.5 *$[\mathcal{C}(\Omega)^4]_+$ es invariante para Φ_t y si $f \in [[\mathcal{C}(\Omega)^2]_{++}]^2$, entonces: $(0,0,0,0) \ll_4 \Phi_t(f)$ para todo $t > 0$.*

Demostración. Notar que a partir del sistema (3.2), se puede definir:

$$h_{1,1} = -(s(x) + a(x) + b(x)(u_1(x) + v_1(x))) \leq 0, h_{1,2} = r(x) \geq 0, h_{1,3} = h_{1,4} = 0$$

$$h_{2,1} = s(x) \geq 0, h_{2,2} = -(e(x) + f(x)(u_2(x) + v_2(x)) \leq 0, h_{2,3} = h_{2,4} = 0$$

$$h_{3,3} = -(\hat{s}(x) + a(x) + b(x)(u_1(x) + v_1(x))) \leq 0, h_{3,4} = \hat{r}(x) \geq 0, h_{3,1} = h_{3,2} = 0$$

$$h_{4,3} = \hat{s}(x) \geq 0, h_{4,4} = -(e(x) + f(x)(u_2(x) + v_2(x)) \leq 0, h_{4,1} = h_{4,2} = 0$$

Con lo cual se obtiene que $h_{i,j} \geq 0$ si $i \neq j$.

Sea $f \in [\mathcal{C}(\Omega)^4]_+$, se obtiene que $\Phi_t(f) = u(x,t,f)$ solución del sistema (3.2), usando que:

$$L_i[u_i] + \sum_{j=1}^{4} h_{i,j}u_j = 0 \Rightarrow L_i[-u_i] + \sum_{j=1}^{4} h_{i,j}(-u_j) = 0$$

Usando el Teorema 1.2.1, se tiene que como $(-u_i(\cdot,0,f)) \leq 0$, entonces:

$$(-u_i(\cdot,0,f)) \leq 0 \Rightarrow u_i(\cdot,t,f) \geq 0$$

Por lo tanto: $\Phi_t(f) \geq_4 (0,0,0,0)$ lo que equivale a que $\Phi_t(f) \in [\mathcal{C}(\Omega)^4]_+$

Considerando $u(\cdot,t,f)$, una solución del sistema (3.2) y $u(\cdot,0,f) = f \in [[\mathcal{C}(\Omega)^2]_{++}]^2$, se sabe que $(0,0) <_2 (f_1,f_2)$ y $(0,0) <_2 (f_3,f_4)$.

Suponiendo que hay un $x_0 \in \overline{\Omega}$ y $t_0 > 0$ tal que $-u_i(x_0,t_0,f) = 0$, sin pedida de generalidad se considerará $i = 1$, entonces por los teoremas 1.2.1 y 1.2.2, como la derivada normal es 0.

$$\forall t \leq t_0, u_1(\cdot,t,f) = 0$$

Como u es solución del sistema (0.3), entonces cumple que:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,t,f) = d_1\Delta u_1(x,t,f) + r(x)u_2(x,t,f) - u_1(x,t,f)(s(x)+a(x)+b(x)(u_1(x,t,f)+u_3(x,t,f)))$$

Por lo tanto reemplazando, para todo $t \in [0,t_0)$ y $x \in \Omega$

$$0 = r(x)u_2(x,t,f) \Rightarrow u_2(x,t,f) = 0 \Rightarrow u_2(\cdot,0,f) = 0$$

Con lo que se obtiene que $(f_1,f_2) = (0,0)$, lo que es una contradicción, pues $(f_1,f_2) \in [\mathcal{C}(\Omega)^2]_{++}$

Por lo tanto $\forall t > 0, \forall x \in \overline{\Omega}, \Phi_t(f) \gg_4 (0,0,0,0)$.

Con lo que se concluye. $\square$

Usando la Proposición 3.0.5, se puede relajar la hipótesis del Teorema 3.0.3, de que $\phi, \psi \in Int([\mathcal{C}(\Omega)^4]_+)$ a que $\phi, \psi \in [[\mathcal{C}(\Omega)^2]_{++}]^2$, pues es una condición más débil que permitirá probar que $\hat{F}$ es irreducible, dando origen a la Proposición 3.0.6.

Proposición 3.0.6 *Si $\phi, \psi \in [[\mathcal{C}(\Omega)^2]_{++}]^2$ y $\phi <_K \psi$, entonces*

$$u(x,t,\phi) \ll_K u(x,t,\psi)$$

Demostración. Primero utilizando la Proposición 3.0.5, se obtiene que $t > 0$, $\Phi_t(f) \gg_4 (0,0,0,0)$ para todo $t > 0$.

Ahora al observar que el jacobiano de la función $\hat{F}$, siempre tiene conectados los estados u_1 con u_2 y v_1 con v_2. Cuando se tiene que todas las componentes son estrictamente positivas, u_i se conecta con v_i y viceversa v_j con u_j, con lo que se obtiene la irreductibilidad.

Con esto se tiene la hipótesis necesaria, para proceder con una demostración análoga a la del Teorema 3.0.5. $\square$

Capítulo 4

Sistema a coeficientes constantes

Primero se realizará un análisis completo del caso en que los coeficientes del sistema (0.3), son constantes para todo $x \in \overline{\Omega}$, es decir, para esta situación las tasas de crecimiento, muerte, entre otros coeficientes serán independientes de la posición.

4.1. Sistema Sin Desplazamiento

En una primera instancia se abordará el sistema sin difusión y a coeficientes constantes, con el fin de encontrar las condiciones para obtener diferentes equilibrios y como varían sus estabilidades, en función de las relaciones entre los coeficientes. También solo durante esta sección, no se trabajará en todo $[\mathcal{C}(\Omega)^4]_+$, si no que en el subconjunto de las funciones constantes para facilitar los cálculos (de manera isomorfa se denotará a las funciones constantes como vectores en $\mathbb{R}^4_+$, con el valor de su imagen). Esto último con el fin de evitar trabajar con condiciones iniciales que en algunas regiones sean nulas, ya que para el sistema sin desplazamiento, las condiciones iniciales con una especie extinta, es decir, $u_1(x_0, 0) = u_2(x_0, 0) = 0$, se tendrá que $\forall t \geq 0, u_1(x_0, t) = u_2(x_0, t) = 0$, pues no se tiene la Proposición 3.0.5 (debido a la ausencia de la difusión).

Utilizando el supuesto de condiciones iniciales constantes, estas condiciones siempre evolucionarán en funciones constantes, ya que tendrán la misma dinámica para cualquier posición.

Observación Estudiar solo las condiciones iniciales constantes, permitirá conocer el comportamiento del sistema, para condiciones iniciales generales en $[\mathcal{C}(\Omega)^4]_+$, pues el comportamiento será puntualmente el que tendría, una condición inicial constante igual a la función en ese punto. Un ejemplo de esto se puede observar al final del capítulo, en la Figura 4.4.

El sistema para este caso estará dado por las siguientes dinámicas:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_1}{\partial t} = ru_2 - u_1(s + a + b(u_1 + v_1)) \text{ para } t > 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial u_2}{\partial t} = su_1 - u_2(e + f(u_2 + v_2)) \text{ para } t > 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial v_1}{\partial t} = \hat{r}v_2 - v_1(\hat{s} + a + b(u_1 + v_1)) \text{ para } t > 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial v_2}{\partial t} = \hat{s}v_1 - v_2(e + f(u_2 + v_2)) \text{ para } t > 0 \\[2ex]
(u_1, u_2, v_1, v_2)(0) = (u_{01}, u_{02}, v_{01}, v_{02})
\end{cases}
\tag{4.1}
$$

Utilizando los resultados del capítulo 3, se tiene que el semiflujo $\Phi_t()$, definido por el sistema (4.1), es monótono creciente para condiciones iniciales en $\mathbb{R}^4_+$, con el orden $\leq_K$ y fuertemente monótono en $((\mathbb{R}^2)_{++})^2$. Si $f \in ((\mathbb{R}^2)_{++})^2$, se puede notar que $F()$ es irreductible y por ende:

Proposición 4.1.1 *Si* $f \in ((\mathbb{R}^2)_{++})^2$, *entonces* $(0,0,0,0) \ll_4 \Phi_t(f)$

Demostración. Como $(f_1, f_2) \in (\mathbb{R}^2)_{++} \Rightarrow \exists i \in \{1,2\}, 0 < \dfrac{f_i}{2} < f_i$

Usando que $(0,0) <_2 (f_1, f_2)$ y $(0,0) <_2 (f_3, f_4)$, por lo tanto:

$$\left(\frac{f_1}{2}, \frac{f_2}{2}, f_3, f_4\right) <_K f <_K \left(f_1, f_2 \frac{f_3}{2}, \frac{f_4}{2}\right)$$

Aplicando la monotonía fuerte de $\Phi_t()$

$$\Phi_t\left(\frac{f_1}{2}, \frac{f_2}{2}, f_3, f_4\right) \ll_K \Phi_t(f) \ll_K \Phi_t\left(f_1, f_2 \frac{f_3}{2}, \frac{f_4}{2}\right)$$

Usando que:

$$(0,0) \leq_2 \Phi_t\left(\frac{f_1}{2}, \frac{f_2}{2}, f_3, f_4\right)_{(1,2)} \text{ y } (0,0) \leq_2 \Phi_t\left(f_1, f_2, \frac{f_3}{2}, \frac{f_4}{2}\right)_{(3,4)}$$

Entonces: $(0,0,0,0) \ll_4 \Phi_t(f)$ □

4.1.1. Existencia de Equilibrios

En esta subsección se estudiarán las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de equilibrios no negativos, para trayectorias con condiciones iniciales positivas para el sistema de 4 grupos (4.1).

4.1.1.1. Equilibrio Nulo

Este equilibrio $(0,0,0,0)$ siempre existe, pues cumple directamente todas las ecuaciones, con igualdad a 0.

4.1.1.2. Equilibrio semitrivial $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$

Considerando condiciones iniciales de la forma $(u_1, u_2, 0, 0)$, el sistema se reduce a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = ru_2 - u_1(s + a + b(u_1)) \text{ para } t > 0 \\ \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = su_1 - u_2(e + f(u_2)) \text{ para } t > 0 \\ \\ v_1 = v_2 = 0 \text{ para } t > 0 \\ \\ (u_1, u_2)(0) = (u_{01}, u_{02}) \end{cases} \tag{4.2}$$

Por lo que es equivalente a estudiar el sistema (2.4) de la especie (u_1, u_2), el cual es cooperativo y monótono, respecto al orden $\leq_2$. Para garantizar la existencia de un equilibrio es necesario y suficiente, pedir que $(s+a)e < sr$, esta condición garantiza la existencia del par $(\overline{u_1}, \overline{u_2})$ equilibrio positivo y único del sistema de una sola especie (4.2) y por ende existencia del equilibrio semitrivial para las 2 especies.

Observación Se cumple que: $r\overline{u_1} = \overline{u_2}(s + a + b\overline{u_1})$, $s\overline{u_2} = \overline{u_1}(e + f\overline{u_2})$ y $sr = (s + a + b\overline{u_1})(e + f\overline{u_2})$

4.1.1.3. Equilibrio semitrivial $(0, 0, \overline{v_1}, \overline{v_2})$

De manera análoga, considerando condiciones iniciales de la forma $(0, 0, \overline{v_1}, \overline{v_2})$, el sistema se reduce a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = \hat{r}v_2 - v_1(\hat{s} + a + b(v_1)) \text{ para } t > 0 \\ \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t} = \hat{s}v_1 - v_2(e + f(v_2)) \text{ para } t > 0 \\ \\ u_1 = u_2 = 0 \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ (v_1, v_2)(0) = (v_{01}, v_{02}) \end{cases} \tag{4.3}$$

Para garantizar la existencia de un equilibrio es necesario y suficiente, pedir que $(\hat{s}+a)e < \hat{s}\hat{r}$, esta condición garantiza la existencia del par $(\overline{v_1}, \overline{v_2})$ equilibrio positivo y único del sistema de una sola especie (4.3) y por ende existencia del equilibrio semitrivial para las 2 especies.

Observación En este caso se cumple que: $\hat{r}\overline{v_1} = \overline{v_2}(\hat{s} + a + b\overline{v_1})$, $\hat{s}\overline{v_2} = \overline{v_1}(e + f\overline{v_2})$ y $\hat{s}\hat{r} = (\hat{s} + a + b\overline{v_1})(e + f\overline{v_2})$

4.1.1.4. Equilibrios de coexistencias

Es esta subsección, se buscará determinar bajo qué condiciones existe un equilibrio, para el cual ambas especies coexistan.

4.1.1.4.1. Caso $s = \hat{s}$

En este caso sucede que cualquier equilibrio $(u_1^*, u_2^*, v_1^*, v_2^*)$ de coexistencia, debe cumplir que:

$$ru_2^* = u_1^*(s + a + b(u_1^* + v_1^*)) \tag{4.4}$$
$$\hat{r}v_2^* = v_1^*(\hat{s} + a + b(u_1^* + v_1^*)) \tag{4.5}$$
$$su_1^* = u_2^*(e + f(u_2^* + v_2^*)) \tag{4.6}$$
$$\hat{s}v_1^* = v_2^*(e + f(u_2^* + v_2^*)) \tag{4.7}$$

Dividiendo (4.6) por (4.7), queda que

$$\frac{u_1^*}{u_2^*} = \frac{v_1^*}{v_2^*} \iff \frac{v_2^*}{u_2^*} = \frac{v_1^*}{u_1^*} \tag{4.8}$$

Multiplicando (4.4) con (4.6) y (4.5) con (4.7), luego simplificando adecuadamente se obtiene que:

$$sr = (s + a + b(u_1^* + v_1^*)(e + f(u_2^* + v_2^*)) = s\hat{r} \tag{4.9}$$

De (4.9) se obtiene que si $\hat{r} \neq r$, no existe equilibrio de coexistencia.

Considerando $r = \hat{r}$, se tiene que los semitriviales coinciden, pues ambas ecuaciones serían las mismas y por (4.8), se tiene que cumplir que $v_1^* = Ku_1^*$ y $v_2^* = Ku_2^*$. Notar que al reemplazar en (4.4),(4.5), (4.6) y (4.7), junto con utilizar que $\hat{s} = s$ y $\hat{r} = r$, las condiciones se reducen a que:

$$ru_2^* = u_1^*(s + a + b(1 + K)u_1^*) \tag{4.10}$$
$$su_1^* = u_2^*(e + f(1 + K)u_2^*) \tag{4.11}$$
$$Kv_1^* = u_1^*, Kv_2^* = u_2^* \tag{4.12}$$

Para cualquier $K > 0$, el sistema tiene solución si y solo si $sr > (s + a)e$, es decir existen los semitriviales.

Finalmente, se puede concluir que para el caso $s = \hat{s}$:

Si $r \neq \hat{r}$ no existe equilibrio de coexistencia.

Si $r = \hat{r}$ y no existen los semitriviales, tampoco hay equilibrios.

Si $r = \hat{r}$ y existen los semitriviales, hay infinitos equilibrios de coexistencia y vienen dados por la recta que conecta los equilibrios semitriviales, la cual se parametriza por: $(\alpha\overline{u_1}, \alpha\overline{u_2}, (1 - \alpha)\overline{u_1}, (1 - \alpha)\overline{u_2})$, para $\alpha \in [0, 1]$

4.1.1.4.2. Caso $s \neq \hat{s}$

En este caso se debe cumplir que para cualquier equilibrio $(u_1^*, u_2^*, v_1^*, v_2^*)$ de coexistencia:

$$ru_2^* = u_1^*(s + a + b(u_1^* + v_1^*)) \tag{4.13}$$
$$su_1^* = u_2^*(e + f(u_2^* + v_2^*)) \tag{4.14}$$
$$\hat{r}v_2^* = v_1^*(\hat{s} + a + b(u_1^* + v_1^*)) \tag{4.15}$$
$$\hat{s}v_1^* = v_2^*(e + f(u_2^* + v_2^*)) \tag{4.16}$$

Dividiendo (4.14) por (4.16), queda que

$$s\frac{u_1^*}{u_2^*} = \hat{s}\frac{v_1^*}{v_2^*} \tag{4.17}$$

Multiplicando (4.13) con (4.14) y (4.15) con (4.16), luego simplificando adecuadamente se obtiene que:

$$sr = (s + a + b(u_1^* + v_1^*)(e + f(u_2^* + v_2^*)) \neq (\hat{s} + a + b(u_1^* + v_1^*)(e + f(u_2^* + v_2^*)) = \hat{s}\hat{r} \tag{4.18}$$

De (4.18) se obtiene que es necesario que $\hat{s}\hat{r} \neq sr$, pues en caso contrario no existe equilibrio de coexistencia.

Considerando $sr \neq \hat{s}\hat{r}$. Restando (4.13) con (4.15), se obtiene que:

$$r\frac{u_2^*}{u_1^*} - \hat{r}\frac{v_2^*}{v_1^*} = (s - \hat{s}) \tag{4.19}$$

Reemplazando (4.17) en (4.19), se obtiene que:

$$\frac{u_2^*}{u_1^*}\left(r - \frac{\hat{s}\hat{r}}{s}\right) = (s - \hat{s}) \iff u_2^* = \frac{s(s - \hat{s})}{sr - \hat{s}\hat{r}}u_1^* \tag{4.20}$$

Observado esta igualdad (4.20), se aprecia que otra condición necearía es que:
$(s - \hat{s})(sr - \hat{s}\hat{r}) > 0$. Reemplazando (4.20) en (4.13), se obtiene:

$$\frac{sr(s - \hat{s})}{sr - \hat{s}\hat{r}} = (s + a + b(u_1^* + v_1^*)) \iff v_1^* = \frac{\dfrac{sr(s - \hat{s})}{sr - \hat{s}\hat{r}} - (s + a)}{b} - u_1^* \tag{4.21}$$

De manera similar con (4.20) en (4.14).

$$\frac{(sr - \hat{s}\hat{r})}{(s - \hat{s})} = (e + f(u_2^* + v_2^*)) \iff v_2^* = \frac{\dfrac{(sr - \hat{s}\hat{r})}{s - \hat{s}} - e}{f} - \frac{s(s - \hat{s})}{sr - \hat{s}\hat{r}}u_1^* \tag{4.22}$$

Reemplazando (4.20) en (4.17), se obtiene que:

$$\frac{(sr-\hat{s}\hat{r})}{(s-\hat{s})}=\hat{s}\frac{v_1^*}{v_2^*}\iff\frac{(sr-\hat{s}\hat{r})}{(s-\hat{s})}=\hat{s}\frac{\dfrac{\dfrac{sr(s-\hat{s})}{sr-\hat{s}\hat{r}}-(s+a)}{b}-u_1^*}{\dfrac{\dfrac{(sr-\hat{s}\hat{r})}{s-\hat{s}}-e}{f}-\dfrac{s(s-\hat{s})}{sr-\hat{s}\hat{r}}u_1^*} \tag{4.23}$$

Despejando u_1^* se obtiene:

$$u_1^*=\frac{1}{s-\hat{s}}\left(\frac{(sr-\hat{s}\hat{r})}{(s-\hat{s})}\left(\frac{\dfrac{(sr-\hat{s}\hat{r})}{s-\hat{s}}-e}{f}\right)-\hat{s}\frac{\dfrac{sr(s-\hat{s})}{sr-\hat{s}\hat{r}}-(s+a)}{b}\right) \tag{4.24}$$

Con esto se obtiene que, de tener un equilibrio de coexistencia, este es único. Para asegurar que sea positivos en todas sus componentes hay que pedir que $u_1^*>0, v_1^*>0$ y que $(s-\hat{s})(sr-\hat{s}\hat{r})>0$, pues esta última condición asegura la positividad de las dos restantes. Reemplazando u_1^* en v_1^*, se obtiene que:

$$v_1^*=\frac{1}{s-\hat{s}}\left(s\frac{\dfrac{sr(s-\hat{s})}{sr-\hat{s}\hat{r}}-(s+a)}{b}-\frac{(sr-\hat{s}\hat{r})}{(s-\hat{s})}\left(\frac{\dfrac{(sr-\hat{s}\hat{r})}{s-\hat{s}}-e}{f}\right)\right) \tag{4.25}$$

Para el caso en que $s>\hat{s}$, se pide $sr>\hat{s}\hat{r}$, junto con:

$$s\frac{\dfrac{sr(s-\hat{s})}{sr-\hat{s}\hat{r}}-(s+a)}{b}>\frac{(sr-\hat{s}\hat{r})}{(s-\hat{s})}\left(\frac{\dfrac{(sr-\hat{s}\hat{r})}{s-\hat{s}}-e}{f}\right)>\hat{s}\frac{\dfrac{sr(s-\hat{s})}{sr-\hat{s}\hat{r}}-(s+a)}{b} \tag{4.26}$$

Para el caso $s<\hat{s}$, se pide $sr<\hat{s}\hat{r}$, junto con:

$$s\frac{\dfrac{sr(s-\hat{s})}{sr-\hat{s}\hat{r}}-(s+a)}{b}<\frac{(sr-\hat{s}\hat{r})}{(s-\hat{s})}\left(\frac{\dfrac{(sr-\hat{s}\hat{r})}{s-\hat{s}}-e}{f}\right)<\hat{s}\frac{\dfrac{sr(s-\hat{s})}{sr-\hat{s}\hat{r}}-(s+a)}{b} \tag{4.27}$$

Finalmente, se probará que estas condiciones son equivalentes a pedir:

$$sr>((s+a)+b\overline{v_1})(e+f\overline{v_2} \tag{4.28}$$

$$\hat{s}\hat{r}>((\hat{s}+a)+b\overline{u_1})(e+f\overline{u_2}) \tag{4.29}$$

con $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$ y $(0, 0, \overline{v_1}, \overline{v_2})$, los equilibrios semitriviales. Se partirá probando que es suficiente, notando que: (4.28) $-\hat{s}\hat{r}$ y $sr-$(4.29), se obtiene la siguiente desigualdad:

$$((s-\hat{s}))(e+f\overline{u_2}) > sr - \hat{s}\hat{r} > ((s-\hat{s}))(e+f\overline{v_2}) \Rightarrow \frac{sr-\hat{s}\hat{r}}{s-\hat{s}} > e > 0 \tag{4.30}$$

La primera condición se cumple claramente, ahora solo falta probar que las dos desigualdades se tienen.

Para el caso $s > \hat{s}$, se tiene que.

$$\frac{sr-\hat{s}\hat{r}}{s-\hat{s}} < e + f\overline{u_2} \Rightarrow \left(\frac{\frac{sr-\hat{s}\hat{r}}{s-\hat{s}} - e}{f} \right) \frac{sr-\hat{s}\hat{r}}{s-\hat{s}} < \overline{u_2}(e+f\overline{u_2}) = s\overline{u_1} \tag{4.31}$$

Por otro lado:

$$\frac{s-\hat{s}}{sr-\hat{s}\hat{r}} > \frac{1}{e+f\overline{u_2}} \text{ y } \frac{sr}{e+f\overline{u_2}} = ((s+a)+b\overline{u_1}) \Rightarrow s\frac{\frac{sr(s-\hat{s})}{sr-\hat{s}\hat{r}} - (s+a)}{b} > s\overline{u_1} \tag{4.32}$$

Con lo que se concluye la primera desigualdad. Para la siguiente hay que notar que análogamente:

$$\frac{sr-\hat{s}\hat{r}}{s-\hat{s}} > e + f\overline{v_2} \Rightarrow \left(\frac{\frac{sr-\hat{s}\hat{r}}{s-\hat{s}} - e}{f} \right) \frac{sr-\hat{s}\hat{r}}{s-\hat{s}} > \overline{v_2}(e+f\overline{v_2}) = \hat{s}\overline{v_1} \tag{4.33}$$

Por otro lado:

$$\frac{sr(s-\hat{s})}{sr-\hat{s}\hat{r}} - ((s+a)+b\overline{v_1}) = \frac{\hat{s}\hat{r}((s+a)+b\overline{v_1})(e+f\overline{v_2}) - sr((\hat{s}+a)+b\overline{v_1})(e+f\overline{v_2})}{(sr-\hat{s}\hat{r})(e+f\overline{v_2})} \tag{4.34}$$

Como $\hat{s}\hat{r} = ((\hat{s}+a)+b\overline{v_1})(e+f\overline{v_2})$ y $sr > ((\hat{s}+a)+b\overline{v_1})(e+f\overline{v_2})$, se tiene que el lado derecho es negativo, por ende:

$$\frac{sr(s-\hat{s})}{sr-\hat{s}\hat{r}} < ((s+a)+b\overline{v_1}) \Rightarrow \hat{s}\frac{\frac{sr(s-\hat{s})}{sr-\hat{s}\hat{r}} - (s+a)}{b} < \hat{s}\overline{v_1} \tag{4.35}$$

Con (4.33) y (4.35), se concluye la otra desigualdad. Por lo que estas condiciones son suficientes para garantizar que exista un único equilibrio de coexistencia positivo. El caso de $\hat{s} > s$ es análogo.

Ahora se probará que son necesarias. Suponiendo que: $\hat{s}\hat{r} = (\hat{s}+a+b\overline{v_1})(e+f\overline{v_2})$ $sr \leq (s+a+b\overline{v_1})(e+f\overline{v_2})$, también solo se hará el caso $s > \hat{s}$, pues el otro es análogo. Si $sr \leq \hat{s}\hat{r}$, se está listo, pues u_1^* y u_2^* tiene signo contrario, por lo que:

$$sr - \hat{s}\hat{r} \leq (s-\hat{s})(e+f\overline{v_2}) \Rightarrow \frac{sr-\hat{s}\hat{r}}{s-\hat{s}} \left(\frac{\frac{sr-\hat{s}\hat{r}}{s-\hat{s}} - e}{f} \right) \leq \overline{v_2}(e+f\overline{v_2}) = \hat{s}\overline{v_1} \tag{4.36}$$

$$\frac{sr(s-\hat{s})}{sr-\hat{s}\hat{r}} - ((s+a)+b\overline{v_1}) = \frac{\hat{s}\hat{r}((s+a)+b\overline{v_1})(e+f\overline{v_2}) - sr((\hat{s}+a)+b\overline{v_1})(e+f\overline{v_2})}{(sr-\hat{s}\hat{r})(e+f\overline{v_2})} \tag{4.37}$$

Como $\hat{s}\hat{r} = ((\hat{s}+a)+b\overline{v_1})(e+f\overline{v_2})$ y $sr \leq ((\hat{s}+a)+b\overline{v_1})(e+f\overline{v_2})$, se tiene que el lado derecho es mayor o igual a 0, por ende:

$$\frac{sr(s-\hat{s})}{sr-\hat{s}\hat{r}} \geq ((s+a)+b\overline{v_1}) \Rightarrow \hat{s}\frac{\frac{sr(s-\hat{s})}{sr-\hat{s}\hat{r}} - (s+a)}{b} \geq \hat{s}\overline{v_1} \tag{4.38}$$

Con (4.37) y (4.38), se concluye que la desigualdad es contraria y por ende $u_1 \leq 0$. Por lo que la condición contraria es necesaria para garantizar que exista un único equilibrio de coexistencia positivo.

Para el caso en que $sr = (s+a+b\overline{u_1})(e+f\overline{u_2})$, $\hat{s}\hat{r} \leq (\hat{s}+a+b\overline{u_1})(e+f\overline{u_2})$, se tiene que.

$$\frac{sr-\hat{s}\hat{r}}{s-\hat{s}} \geq e+f\overline{u_2} \Rightarrow \left(\frac{\frac{sr-\hat{s}\hat{r}}{s-\hat{s}} - e}{f}\right)\frac{sr-\hat{s}\hat{r}}{s-\hat{s}} \geq \overline{u_2}(e+f\overline{u_2}) = s\overline{u_1} \tag{4.39}$$

Por otro lado:

$$\frac{s-\hat{s}}{sr-\hat{s}\hat{r}} \leq \frac{1}{e+f\overline{u_2}} \text{ y } \frac{sr}{e+f\overline{u_2}} = ((s+a)+b\overline{u_1}) \Rightarrow s\frac{\frac{sr(s-\hat{s})}{sr-\hat{s}\hat{r}} - (s+a)}{b} \leq s\overline{u_1} \tag{4.40}$$

Con lo que se concluye que la primera desigualdad sería falsa y por ende $v_1 \leq 0$.

Finalmente, con esto se obtiene que:

Si $s \neq \hat{s}$:

$$u_1^* > 0, u_2^* > 0, v_1^* > 0, v_2^* > 0 \iff \hat{s}\hat{r} > (\hat{s}+a+b\overline{u_1})(e+f\overline{u_2} \text{ y } sr > (s+a+b\overline{v_1})(e+f\overline{v_2})$$

4.1.2. Estabilidad de los Equilibrios

Esta subsección se analizará el comportamiento asintótico de los equilibrios del sistema (4.1), estudiando las distintas relaciones de coeficientes y condiciones iniciales.

Primero se estudiará el jacobiano evaluado en algunos equilibrios. El jacobiano $J_F(u_1,u_2,v_1,v_2)$ del sistema para un punto cualquiera viene dado por la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} -(s+a+2bu_1+bv_1) & r & -bu_1 & 0 \\ s & -(e+2fu_2+fv_2) & 0 & -fu_2 \\ -bv_1 & 0 & -(\hat{s}+a+bu_1+2bv_1) & \hat{r} \\ 0 & -fv_2 & \hat{s} & -(e+fu_2+2fv_2) \end{pmatrix}$$

En particular para $(0,0,0,0)$ es:

$$J_F(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} -(s+a) & r & 0 & 0 \\ s & -e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\hat{s}+a) & \hat{r} \\ 0 & 0 & \hat{s} & -e \end{pmatrix}$$

El cual tiene como polinomio característico:

$$p(\lambda) = ((s+a+\lambda)(e+\lambda) - sr)((\hat{s}+a+\lambda)(e+\lambda) - \hat{s}\hat{r})$$

Con esto se tiene que si $sr \leq (s+a)e$ (ó $sr > (s+a)e$) tiene los primeros dos valores propios negativos (uno negativo y uno positivo) y análogo si $\hat{s}\hat{r} \leq (\hat{s}+a)e$ (ó $\hat{s}\hat{r} > (\hat{s}+a)e$) tiene los restantes dos valores propios negativos (uno negativo y uno positivo).

En resumen, debido a que estas condiciones son las mismas que inducen la existencia de los equilibrios semitriviales, si existen un equilibrio semitrivial, este genera una dirección de inestabilidad en el origen, pues el equilibrio semitrivial atraerá las soluciones de su semi-plano y más adelante se probará que atraerá todas las condiciones iniciales estrictamente positivas.

Para el caso de un semitrivial $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$, el jacobiano es:

$$J_F(\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0) = \begin{pmatrix} -(s+a+2b\overline{u_1} & r & -b\overline{u_1} & 0 \\ s & -(e+2f\overline{u_2} & 0 & -f\overline{u_2} \\ 0 & 0 & -(\hat{s}+a+b\overline{u_1} & \hat{r} \\ 0 & 0 & \hat{s} & -(e+f\overline{u_2}) \end{pmatrix}$$

El cual tiene como polinomio característico:

$$p(\lambda) = ((s+a+2b\overline{u_1}+\lambda)(e+f\overline{u_2}+\lambda) - sr)((\hat{s}+a+b\overline{u_1}+\lambda)(e+f\overline{u_2}+\lambda) - \hat{s}\hat{r})$$

El primer término siempre entrega valores propios negativos, el segundo termino si $\hat{s}\hat{r} \leq (\hat{s}+a+b\overline{u_1})(e+f\overline{u_2})$ (ó $\hat{s}\hat{r} > (\hat{s}+a+b\overline{u_1})(e+f\overline{u_2})$), entregará dos valores propios negativos (uno positivo y uno negativo).

De manera similar $(0,0,\overline{v_1},\overline{v_2})$ estará relacionado por la desigualdad $sr \leq (s+a+b\overline{v_1})(e+f\overline{v_2})$.

4.1.2.1. Caso $(s+a)e \geq sr$ y $(\hat{s}+a)e \geq \hat{s}\hat{r}$

En este caso el único equilibrio que existe es el nulo, el cual se sabe que para estas condiciones es localmente estable.

Proposición 4.1.2 *En este caso* $\forall (u_1, u_2, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^4_+$*, se tiene que:*

$$\Phi_t(u_1, u_2, v_1, v_2) \to (0,0,0,0)$$

Demostración. Para los casos de los sistemas de una especie, (u_1, u_2) y (v_1, v_2) (son equivalente a los casos de solo una especie y la otra extinta en $\mathbb{R}^2_+$), con condiciones iniciales positivas las especies se extinguen, es decir, convergen a $(0,0)$. Por lo que se puede decir que para $(f_1, f_2) \in \mathbb{R}^2_+$:

$$\Phi_t(f_1, f_2, 0, 0) = (T^u_t(f_1, f_2), 0, 0) \to (0, 0, 0, 0)$$

y $(g_1, g_2) \in \mathbb{R}^2_+$

$$\Phi_t(0, 0, g_1, g_2) = (0, 0, T^v_t(g_1, g_2)) \to (0, 0, 0, 0)$$

Sea $(u_1, u_2, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^4_+$, se tiene que:

$$(0, 0, v_1, v_2) \leq_K (u_1, u_2, v_1, v_2) \leq_K (u_1, u_2, 0, 0)$$

Por lo tanto usando que el sistema es monótono con el orden $\leq_K$:

$$\Phi_t(0, 0, v_1, v_2) \leq_K \Phi_t(u_1, u_2, v_1, v_2) \leq_K \Phi_t(u_1, u_2, 0, 0)$$

Usando la convergencia de los 2 sistemas de una especie de (4.2) y (4.3), por lo que:

$$\Phi_t(0, 0, v_1, v_2) \to (0, 0, 0, 0)$$

y de manera análoga

$$\Phi_t(u_1, u_2, 0, 0) \to (0, 0, 0, 0)$$

Por lo tanto:

$$\Phi_t(u_1, u_2, v_1, v_2) \to (0, 0, 0, 0)$$

$\square$

Finalmente, para este caso, se concluye que cualquier condición inicial positiva converge al $(0, 0, 0, 0)$.

4.1.2.2. Caso $(s + a)e < sr$ y $(\hat{s} + a)e \geq \hat{s}\hat{r}$

En este caso solo hay 2 equilibrios, el nulo y el semitrivial $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$. Se espera que solo sobreviva la especie dominante (u_1, u_2), pues la otra no sobrevive ni si quiera en el caso de estar sola.

Este caso es análogo al caso $(s + a)e \geq sr$ y $(\hat{s} + a)e < \hat{s}\hat{r}$, haciendo los cambios correspondientes, al considerar el otro equilibrio semitrivial $(0, 0, \overline{v_1}, \overline{v_2})$, por lo que solo se abordará este.

Observación Todas los condiciones de la forma $(0, 0, v_1, v_2)$, con $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2_+$ convergen a $(0, 0, 0, 0)$ y las condiciones de la forma $(u_1, u_2, 0, 0)$, con $(u_1, u_2) \in (\mathbb{R}^2)_{++}$ convergen a $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$, pues se heredan los comportamientos de los subsistema (4.2) y (4.3).

Proposición 4.1.3 *Sea una condición positiva $z = (u_1, u_2, v_1, v_2) \in ((\mathbb{R}^2)_{++})^2$, se tiene que* $\Phi_t(u_1, u_2, v_1, v_2) \to (\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$

Demostración. Nuevamente se tiene que:

$$(0,0,v_1,v_2) \leq_K (u_1,u_2,v_1,v_2) \leq_K (u_1,u_2,0,0)$$

$$\Phi_t(0,0,v_1,v_2) \leq_K \Phi_t(u_1,u_2,v_1,v_2) \leq_K \Phi_t(u_1,u_2,0,0)$$

Por las desigualdades anteriores y la monotonía del sistema como $\Phi_t(0,0,v_1,v_2) \to (0,0,0,0)$, se tiene que $\omega((u_1,u_2,v_1,v_2)) \subset [(0,0,0,0),(\overline{u_1},\overline{u_2},0,0)]_K$.

Para descartar que $(0,0,0,0)$ este en el omega límite de z.

Suponiendo que existe una sucesión t_n a infinito tal que $\Phi_{t_n}(z) \to (0,0,0,0)$.

Utilizando la Proposición 2.2.1, el sistema de una sola especie (u_1,u_2) tiene un valor propio principal en $(0,0)$ positivo λ_0, y un vector propio positivo (x_1,x_2), de norma 1, por lo tanto $(0,0,0,0)$ tiene un valor propio positivo λ_0 asociado al vector propio $(x_1,x_2,0,0)$, con $x_1>0$ y $x_2>0$, el cual cumple que:

$\forall \varepsilon \in \left(0, \dfrac{\lambda_0}{2\max\{b,f\}}\right]$:

$$r(\varepsilon x_2) - (\varepsilon x_1)(s+a+b(\varepsilon x_1)) = \varepsilon x_1(\lambda_0 - \varepsilon b x_1) > 0$$

y

$$s(\varepsilon x_1) - (\varepsilon x_2)(e+f(\varepsilon x_2)) = \varepsilon x_2(\lambda_0 - \varepsilon f x_2) > 0$$

Por otro lado de manera análoga, el sistema de (v_1,v_2), al tener ambos valores propios negativos en las direcciones del plano $v_1 \times v_2$, se tiene que para $y_1,y_2>0$ el vector propio positivo asociado al valor propio negativo λ_1, entonces $\forall \varepsilon_1 > 0$:

$$\hat{r}(\varepsilon_1 y_2) - (\varepsilon_1 y_1)(\hat{s}+a+b(\varepsilon_1 y_1)) = \varepsilon_1 y_1(\lambda_1 - b\varepsilon_1 y_1) < 0$$

y

$$\hat{s}(\varepsilon_1 y_1) - (\varepsilon_1 y_2)(e+f(\varepsilon_1 y_2)) = \varepsilon_1 y_2(\lambda_1 - f\varepsilon_1 y_2) < 0$$

Sea $0 < \varepsilon_1 < \dfrac{\lambda_0}{2\max\{b,f\}}$, por continuidad $\exists \delta > 0$ tal que:

$$r(\varepsilon_1 x_2) > (\varepsilon_1 x_1)(s+a+b(\varepsilon_1 x_1 + \delta))$$

y

$$s(\varepsilon_1 x_1) > (\varepsilon_1 x_2)(e+f(\varepsilon_1 x_2 + \delta))$$

Como $(u_1,u_2,v_1.v_2) \in ((\mathbb{R}^2)_{++})^2$, usando la Proposición 4.1.1 entonces:

$$\forall t > 0 : (0,0,0,0) \ll_4 \Phi_t(u_1,u_2,v_1.v_2)$$

Por hipótesis, se tiene que $\phi_{t_n}(z) \to (0,0,0,0)$, por lo tanto $\forall \varepsilon_2$, $\exists N^*$ tal que para todo $t_n > t_{N^*} : (0,0) \ll_2 [\Phi_{t_n}(z)]_{(3,4)} \leq_2 (\varepsilon_2 y_1, \varepsilon_2 y_2)$

Sea $\varepsilon_2 > 0$ y $t_1 > t_{N^*} > 0$ tal que: $\Phi_{t_1}(z) = (\hat{u_1}, \hat{u_2}, \hat{v_1}, \hat{v_2}) \gg_4 (0,0,0,0)$ y

$$0 < \hat{v_1} < \varepsilon_2 y_1 < \delta \text{ y } 0 < \hat{v_2} < \varepsilon_2 y_2 < \delta$$

Sea $1 \geq \lambda > 0$ tal que: $\lambda\varepsilon_1 x_1 < \hat{u_1}$ y $\lambda\varepsilon_1 x_2 < \hat{u_2}$. Se tiene que $\lambda > 0$, pues x_i y $\hat{u_i}$, son positivos.

Con esto se obtiene que:

$$r(\varepsilon_1 x_2) > (\varepsilon_1 x_1)(s + a + b(\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 y_1))$$

$$\Rightarrow r(\lambda\varepsilon_1 x_2) > (\lambda\varepsilon_1 x_1)(s + a + b(\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 y_1)) \geq (\lambda\varepsilon_1 x_1)(s + a + b(\lambda\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 y_1))$$

Similarmente

$$s(\varepsilon_1 x_1) > (\varepsilon_1 x_2)(e + f(\varepsilon_1 x_2 + \varepsilon_2 y_2))$$

$$\Rightarrow s(\lambda\varepsilon_1 x_1) > (\lambda\varepsilon_1 x_2)(e + f(\varepsilon_1 x_2 + \varepsilon_2 y_2)) \geq (\lambda\varepsilon_1 x_2)(e + f(\lambda\varepsilon_1 x_2 + \varepsilon_2 y_2))$$

Por otro lado

$$\hat{r}(\varepsilon_2 y_2) < (\varepsilon_2 y_1)(\hat{s} + a + b(\varepsilon_2 y_1))$$

$$\Rightarrow \hat{r}(\varepsilon_2 y_2) < (\varepsilon_2 y_1)(\hat{s} + a + b(\varepsilon_2 y_1 + \lambda\varepsilon_1 x_1))$$

y similarmente

$$\hat{s}(\varepsilon_2 y_1) < (\varepsilon_2 y_2)(e + f(\varepsilon_2 y_2))$$

$$\Rightarrow \hat{s}(\varepsilon_2 y_1) < (\varepsilon_2 y_2)(e + f(\varepsilon_2 y_1 + \lambda\varepsilon_1 x_2))$$

Por lo que tomando $z_{inf} = (\lambda\varepsilon_1 x_1, \lambda\varepsilon_1 x_2, \varepsilon_2 y_1, \varepsilon_2 y_2)$, se obtiene que $z_{inf} \leq_k \phi_{t_1}(z)$ y por construcción z_{inf} es monótono creciente en $\leq_K$, por lo que $z_{inf} \ll_K \Phi_t(z_{inf}) \leq_K \phi_{t+t_1}(z)$, por el Teorema 1.4.1, se tiene que $\Phi_t(z_{inf})$ converge y como al observar las dos primeras componentes son crecientes, no puede ser nulo y el único equilibrio posible es $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$, con lo que se obtiene que: $\phi_t(z) \to (\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto $(0,0,0,0) \notin \omega(u_1, u_2, v_1, v_2)$, lo que implica que:

$$\omega(u_1, u_2, v_{1,2}) \subseteq [[(0,0,0,0), (\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)]_K$$

y como el conjunto omega limite es invariante a aplicar $\Phi_t()$, se tiene que:

$$\omega(u_1, u_2, v_1, v_2) \subset \Phi_t([[(0,0,0,0), (\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)]_K)$$

Como todos los puntos del conjunto de la derecha, pertenecen al semi-plano, con condiciones iniciales positivas, todos convergen al equilibrio $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$ y por ende: $\omega(u_1, u_2, v_1, v_2) \subset (0, 0, \overline{u_1}, \overline{u_2})$, como todas las orbitas son acotadas el omega limite es no vació, por lo que se concluye que el conjunto es este único punto y por ende atrae a todo el sistema, para las condiciones iniciales en $((\mathbb{R}^2)_{++})^2$. $\square$

Finalmente, para cualquier condición inicial con $(u_1, u_2) \in (\mathbb{R}^2)_{++}$, se converge al semi-trivial $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$ y las con $u_1, u_2 = 0$, convergen a $(0,0,0,0)$.

Como se mencionó al comienzo el caso de la otra condición para el equilibrio semitrivial $(0, 0, \overline{v_1}, \overline{v_2})$, es análogo.

Para cualquier condición inicial con $v_1, v_2 \in (\mathbb{R}^2)_{++}$, se converge al semitrivial $(0, 0, \overline{v_1}, \overline{v_2})$ y las con $v_1, v_2 = 0$, convergen a $(0, 0, 0, 0)$.

4.1.2.3. Caso $(s + a)e < sr \leq (s + a + b\overline{v_1})(e + f\overline{v_2})$ y $(\hat{s} + a)e < \hat{s}\hat{r} \leq (\hat{s} + a + b\overline{u_1})(e + f\overline{u_2})$

Este caso es imposible, si es que $s \neq \hat{s}$, recordando que:

$$sr = (s + a + b\overline{u_1})(e + f\overline{u_2} \text{ y } \hat{s}\hat{r} = (\hat{s} + a + b\overline{v_1})(e + f\overline{v_2})$$

Entonces:

$$(s - \hat{s})(e + f\overline{u_2}) \leq sr - \hat{s}\hat{r} \leq (s - \hat{s})(e + f\overline{v_2})$$

Si $s > \hat{s}$, se tiene que:

$$(e + f\overline{u_2}) \leq \frac{sr - \hat{s}\hat{r}}{(s - \hat{s})} \leq (e + f\overline{v_2}) \Rightarrow \overline{u_2} \leq \overline{v_2}$$

Como $sr = (s + a + b\overline{u_1})(e + f\overline{u_2}) \Rightarrow \overline{u_1} \leq \overline{v_1}$ o $\overline{u_2} \leq \overline{v_2}$

Por otro lado $\hat{s}\hat{r} = (s + a + b\overline{u_1})(e + f\overline{u_2}) \Rightarrow v_1 \leq u_1$ o $\overline{v_2} \leq \overline{u_2}$.

Si $\overline{v_2} \leq \overline{u_2} \Rightarrow \overline{u_2} = \overline{v_2}$, por lo tanto $s\overline{u_1} = \overline{u_2}(e + f\overline{u_2}) = \overline{v_2}(e + f\overline{v_2}) = \hat{s}\overline{v_1} < s\overline{v_1} \Rightarrow \overline{u_1} < \overline{v_1}$ Entonces:

$$\hat{s}\hat{r} = (\hat{s} + a + b\overline{v_1})(e + f\overline{v_2}) > (\hat{s} + a + b\overline{u_1})(e + f\overline{u_2})$$

Lo cual es una contradicción.

Si $\overline{v_2} > \overline{u_2}$, entonces $\overline{u_1} \geq \overline{v_1}$.

Por otro lado se tiene que: $s\overline{u_1} = \overline{u_2}(e + f\overline{u_2}) < \overline{v_2}(e + f\overline{v_2}) = \hat{s}\overline{v_1} < s\overline{v_1} \Rightarrow \overline{u_1} < \overline{v_1}$, lo cual es una contradicción inmediata.

El caso $\hat{s} > s$ es análogo.

Considerando $s = \hat{s}$, se tiene que para estar en este caso es necesario que $sr = \hat{s}\hat{r}$, es decir, $r = \hat{r}$, pues las condiciones de la derecha al igualar $s = \hat{s}$, entregan que $sr \leq \hat{s}\hat{r}$ y $\hat{s}\hat{r} \leq sr$. Por lo tanto para este caso existen infinitos equilibrios caracterizados por la recta que conecta los equilibrios semitriviales $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$ y $(0, 0, \overline{u_1}, \overline{u_2})$: $(\alpha\overline{u_1}, \alpha\overline{u_2}, (1 - \alpha)\overline{u_1}, (1 - \alpha)\overline{u_2})$, con $\alpha \in [0, 1]$.

La siguiente proposición será válida para todos los casos en que existan ambos semitriviales y entregará un conjunto atractor de todas las condiciones en $\mathbb{R}^4_+$, el cual se denotará por R

Proposición 4.1.4 *Si $z \in \mathbb{R}^4_+$, entonces:*

$$\omega(z) \subset R := [(0, 0, \overline{u_1}, \overline{u_2}, (\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)]_K$$

Demostración. Sean $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$ y $(0, 0, \overline{v_1}, \overline{v_2})$, los equilibrios semitriviales.

Si $z \in \mathbb{R}^4_+$, entonces siempre se tiene la siguiente desigualdad:

$$(0,0,z_3,z_4) \leq_K z \leq_K (z_1,z_2,0,0)$$

Por lo que usando la monotonía:

$$\Phi_t(0,0,z_3,z_4) \leq_K z \leq_K \Phi_t(z_1,z_2,0,0)$$

Como $\Phi_t(0,0,z_3,z_4) \to (0,0,\overline{v_1},\overline{v_2})$ y $\Phi_t(z_1,z_2,0,0) \to (\overline{u_1},\overline{u_2},0,0)$

Se obtiene que $\omega(z) \subset [(0,0,\overline{v_1},\overline{v_2},(\overline{u_1},\overline{u_2},0,0)]_K$ □

Primero se descartarán los casos en que una de las especies esta extinta, pues en esos casos la convergencia es hacia el equilibrio semitrivial correspondiente, si se tienen condiciones de la forma $(u_1,u_2,0,0)$, se convergerá a $(\overline{u_1},\overline{u_2},0,0)$ y similarmente con $(0,0,v_1,v_2)$ a $(0,0,\overline{u_1},\overline{u_1})$.

Ahora se utilizará la Proposición 4.1.4, por lo tanto: R atrae a todos los puntos positivos

Sea $z \in R \cap ((\mathbb{R}^2)_{++})^2$ un punto cualquiera. A continuación usando la Proposición 4.1.1, se tiene que $\forall t > 0$, $\Phi_t(z) \gg_4 (0,0,0,0)$

Por lo tanto para cada $t > 0$, se puede definir:

$$z_{min,t} = \min_{\alpha \in [0,1]} \{(\alpha\overline{u_1}, \alpha\overline{u_2}, (1-\alpha)\overline{v_1}, (1-\alpha)\overline{v_2}) \leq_K \Phi_t(z)\}$$

y

$$z_{max,t} = \max_{\alpha \in [0,1]} \{(\alpha\overline{u_1}, \alpha\overline{u_2}, (1-\alpha)\overline{v_1}, (1-\alpha)\overline{v_2}) \geq_K \Phi_t(z)\}$$

$$R_t := [z_{min,t}, z_{max,t}]_K \subsetneq R$$

Proposición 4.1.5 *Si $z \in R \cap ((\mathbb{R}^2)_{++})^2$, R_t converge a un único punto, el cual es un equilibrio de coexistencia del sistema de 2 especies. Más aún $\Phi_t(z)$ también converge a este punto.*

Demostración. Usando que $z_{min,t}$ y $z_{max,t}$ son monótonos y acotados, se tiene que:

$$\sup_{t \geq 0} z_{min,t} = z_{min,\infty} \text{ y } \inf_{t \geq 0} z_{max,t} = z_{max,\infty}$$

Si $z_{min,\infty} = z_{max,\infty}$, el conjunto R_t converge a un único punto y se tiene la convergencia, pues es el único posible valor que toma $\Phi_t(z)$.

Si $z_{min,\infty} \neq z_{max,\infty}$, entonces: $\Phi_t(z) \not\to z_{min,\infty}$ y $\Phi_t(z) \not\to z_{max,\infty}$

$$\omega(z) \subset [z_{min,\infty}, z_{max.\infty}]_K \backslash \{z_{min,\infty}, z_{max,\infty}\}$$

Por lo que usando que es fuertemente monótono y el omega limite es invariante:

$$\omega(z) \subset [[z_{min,\infty}, z_{max.\infty}]]_K$$

Entonces existe $z_{min} \gg_K z_{min,\infty}$ y un $z_{max} \ll_K z_{max,\infty}$, tales que:

$$\omega(z) \subset [z_{min}, z_{max}]_K$$

Lo cual contradice que $z_{min,\infty}$ y $z_{max,\infty}$, sean los supremos e ínfimos. Con lo que se concluye que el límite de R_t solo puede ser un único punto y $\Phi_t(z)$ converge a él. $\square$

La Figura 4.1 es una representación gráfica de la Proposición 4.1.5.

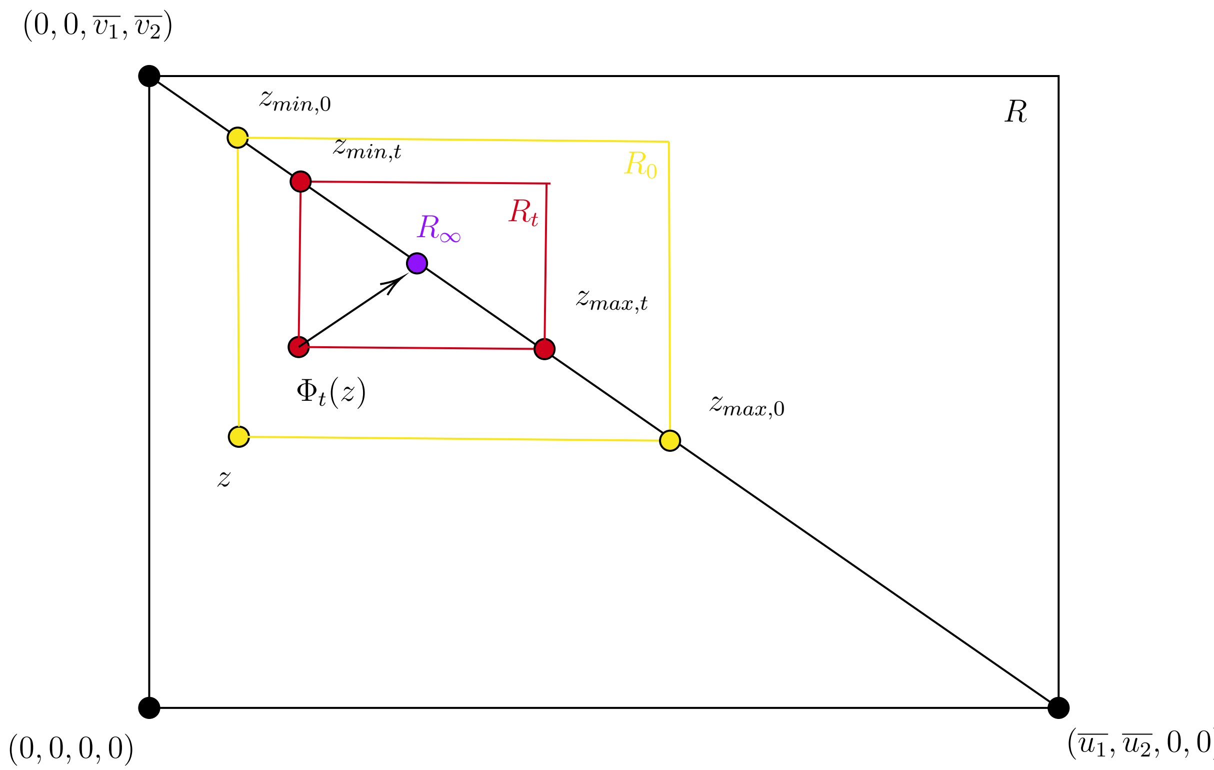

Figura 4.1: Representación del conjunto R_t, para cada tiempo

Proposición 4.1.6 *Si $z \in (\mathbb{R}_+)^4$, entonces: existe un $\alpha \in [0,1]$ tal que:*

$$\omega(z) = \{(\alpha\overline{u_1}, \alpha\overline{u_1}, (1-\alpha)\overline{u_1}, (1-\alpha)\overline{u_1})\}$$

Demostración. Para los casos en ausencia de una especie, el resultado es directo, pues se converge al casa con $\alpha \in \{0,1\}$ dependiendo la especie ausente.

Por lo tanto para $z \in ((\mathbb{R}^2)_{++})^2$, utilizando que cualquier punto positivo es atraído por R, se obtiene que:

$$\omega(z) \subset R$$

Si $\Phi_t(z)$ converge a un semitrivial, se obtiene el resultado, en caso contrario, se obtiene que

$$\omega(z) \subset R \cap ((\mathbb{R}^2)_{++})^2$$

Por lo tanto, usando la invarianza del omega limite y la Proposición 4.1.5, se concluye el comportamiento de todas las condiciones positivas convergen a un equilibrio.

$\square$

Observación Se sabe que todos los puntos convergen a equilibrios de la recta, pero no se sabe una clasificación global de cuales condiciones convergen a un determinado equilibrio.

Un ejemplo,es el siguiente:

Cuando $\frac{v_1}{u_1}(0) = \frac{v_2}{u_2}(0) = C$, se obtiene que las dinámicas son una ponderación de la otra, por lo tanto se converge a

$$(\alpha^*\overline{u_1}, \alpha^*\overline{u_2}, (1-\alpha^*)\overline{v_1}, (1-\alpha^*)\overline{v_2}, \text{ con } \alpha^* = \frac{1}{1+C}$$

4.1.2.4. Caso $sr > (s+a+b\overline{v_1})(e+f\overline{v_2})$ y $(\hat{s}+a)e < \hat{s}\hat{r} \leq (\hat{s}+a+b\overline{u_1})(e+f\overline{u_2})$

Sera análogo al caso en que $(s+a)e < sr \leq (s+a+b\overline{v_1})(e+f\overline{v_2})$ y $\hat{s}\hat{r} > (\hat{s}+a+b\overline{u_1})(e+f\overline{u_2})$.

En este caso solo hay 3 equilibrios, pues no hay condiciones de coexistencia.

Al igual que en los casos anteriores si una condición inicial presenta, solo una especie, se convergerá a su semitrivial respectivo.

Proposición 4.1.7 *Para cualquier condición inicial en $((\mathbb{R}^2)_{++})^2$, se convergerá al equilibrio semitrivial de la especie dominante, para este caso $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$ y para el caso análogo a $(0, 0, \overline{v_1}, \overline{v_2})$.*

Demostración. Para su demostración se utilizará principalmente el Teorema 4.1.8.

Teorema 4.1.8 *Suponiendo que se tienen $(H_1) - (H_5)$:*

1. *$(H1) : T$ es fuertemente monótono con respecto al orden $\leq_K$.*
2. *$(H2) : T_t(0) = 0, \forall t \geq 0$ y 0 es un equilibrio repelente, es decir, existe una vecindad U de $(0,0,0,0)$, tal que para cada $(u_{01}, u_{02}, v_{01}, v_{02}) \in U, (u_{01}, u_{02}, v_{01}, v_{02}) \neq 0$, existe un $t_0 > 0$, para el cual $T_{t_0}(u_{01}, u_{02}, v_{01}, v_{02}) \notin U$.*
3. *$(H3) : T_t((\mathcal{C}(\Omega))^2_+ \times \{(0,0)\}) \subset (\mathcal{C}(\Omega))^2_+ \times \{(0,0)\}, \forall t \geq 0$. También existe, $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$ tal que $T_t(\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0) = (\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0), \forall t \geq 0$, y $T_t(u_1, u_2, 0, 0) \to (\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$ cuando $t \to \infty$, $\forall (u_1, u_2) \in (\mathbb{R}^2)_{++}$. La condición simétrica con la otra componente.*
4. *$(H4)$: Si $(u_1.u_2, v_1, v_2) \in ((\mathbb{R}^2)_{++})^2$ entonces $T_t(u_1.u_2, v_1, v_2) \gg_4 (0,0,0,0)$ para $t > 0$. Si $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^4_+$ satisfacen $w_1 <_K w_2$ y si alguno de los dos, está en $Int(\mathbb{R}^4_+)$, entonces $T_t(w_1) \ll_K T_t(w_2), \forall t > 0$.*
5. *$(H5) : \forall t > 0$, $T_t : (\mathbb{R}^4_+) \to (\mathbb{R}^4_+)$ y es $\mathcal{C}^1$*

junto con:

1. *El sistema (4.1), no tiene equilibrios en $Int([\mathcal{C}(\Omega)^4]_+)$*

2. *El equilibrio semitrivial* $(0,0,\overline{v_1},\overline{v_2})$*, es inestable (para el caso análogo el semitrivial* $(\overline{u_1},\overline{u_2},0,0)$*, es inestable).*

3. *Alguna trayectoria que comienza en* $Int(R)$*, no converge a* $(0,0,\overline{v_1},\overline{v_2})$ *(para el caso análogo a* $(\overline{u_1},\overline{u_2},0,0)$*), en donde:*

$$R = [(0,0,\overline{v_1},\overline{v_2},(\overline{u_1},\overline{u_2},0,0)]_K$$

Entonces para cualquier $(u_1,u_2,v_1,v_2) \in ((\mathbb{R}^2)_{++})^2$*.*

$$\Phi_t(u_1,u_2,v_1,v_2) \to (\overline{u_1},\overline{u_2},0,0)$$

(y para el análogo: $\Phi_t(u_1,u_2,v_1,v_2) \to (0,0,\overline{v_1},\overline{v_2})$*)*

Demostración. Este teorema esta demostrado en [14], como el Teorema 1.4, considerando $X_1 = X_2 = (\mathbb{R}^2)_{++}$. Esta demostración utiliza, los resultados previos del paper de [15], principalmente el Teorema B. □

Notando que se verifican todas las hipótesis, junto con que para este caso, que el equilibrio semitrivial $(0,0,\overline{v_1},\overline{v_2})$, es inestable. Usando el Teorema 4.1.8, se concluye que la convergencia es al semitrivial dominante. □

4.1.2.5. Caso $sr > (s+a+b\overline{v_1})(e+f\overline{v_2})$ y $\hat{s}\hat{r} > (\hat{s}+a+b\overline{u_1})(e+f\overline{u_2})$

En este caso hay 4 equilibrios, pues aparece el de coexistencia $E = (u_1^*,u_2^*,v_1^*,v_2^*)$, por otro lado, es imposible que $s = \hat{s}$ y tampoco puede suceder que $\hat{s}\hat{r} = sr$.

Primero nuevamente para los casos en que solo hay una especie, convergerán a su equilibrio del subsistema.

Se asumirá para todo lo siguiente que $u_1(0) > 0$ o $u_2(0) > 0$ y $v_1(0) > 0$ o $v_2(0) > 0$, pues si $(u_1,u_2,v_1,v_2) \in ((\mathbb{R}^2)_{++})^2$ y por ende al utilizar la Proposición 4.1.1, serán todos positivos.

Usando la Proposición 4.1.4, en particular el equilibrio $E = (u_1^*,u_2^*,v_1^*,v_2^*)$ pertenece a R:

Proposición 4.1.9 *Existe un* z_{max} *tal que:*

$$\Phi_t(z_{\max}) \ll_K z_{max} \ll_K (\overline{u_1},\overline{u_2},0,0)$$

Demostración. Recordando que para un semitrivial $(\overline{u_1},\overline{u_2},0,0)$, el jacobiano es:

$$DF(\overline{u_1},\overline{u_2},0,0) = \begin{pmatrix} J_x & B_x \\ 0 & C_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(s+a+2b\overline{u_1} & r & -b\overline{u_1} & 0 \\ s & -(e+2f\overline{u_2} & 0 & -f\overline{u_2} \\ 0 & 0 & -(\hat{s}+a+b\overline{u_1} & \hat{r} \\ 0 & 0 & \hat{s} & -(e+f\overline{u_2}) \end{pmatrix}$$

Y se sabe que tiene un valor propio positivo, llamándolo $\overline{\lambda}$, este valor propio coincide con el valor propio positivo de

$$C_x = \begin{pmatrix} -(\hat{s} + a + b\overline{u_1} & \hat{r} \\ \hat{s} & -(e + f\overline{u_2}) \end{pmatrix}$$

El cual tiene asociado un vector propio $y = (y_1, y_2)$, con $y_1 > 0$ e $y_2 > 0$, por lo tanto $C_x y = \overline{\lambda} y$. Ahora se buscará un $x = (x_1, x_2)$ tal que: $J_x x + B_x y = \overline{\lambda} x$.

Como J_x tiene valores propios negativos, $S(J_x - \overline{\lambda}) = S(J_x) - \overline{\lambda} < 0$, por lo tanto $(J_x - \overline{\lambda} I)$ es invertible.

Utilizando el Corolario 1.4.9, por (4) se tiene que $-(J_x - \overline{\lambda} I)^{-1} \gg 0$, Como $-B_x y \gg 0$, pues B_x es diagonal negativa, se concluye que $x = -(J_x - \overline{\lambda} I)^{-1} B_x y \ll 0$.

Por lo tanto: $(x, y) \ll_K (0,0,0,0)$, es una dirección de salida del equilibrio semitrivial $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$.

Así que $z_{max,\varepsilon} = (\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0) + \varepsilon(x, y)$, para ε_0 suficientemente pequeño se cumple que:

$$F(z_{max,\varepsilon}) = DF(\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)\varepsilon(x, y) + o(\varepsilon) \ll_K (0,0,0,0) \qquad \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

Usando la definición del semiflujo $\Phi_t()$, se tiene que:

$$\frac{d\Phi_t}{dt}(z_{max,\varepsilon}) = F(\Phi_t(z_{max,\varepsilon}))$$

Tomando t_0 pequeño, como $\Phi_0(z_{max,\varepsilon}) = z_{max,\varepsilon}$ y usando la continuidad de F se obtiene que:

$$\frac{d\Phi_t}{dt}(z_{max,\varepsilon}) = F(\Phi_t(z_{max,\varepsilon})) \ll_K (0,0,0,0) \qquad \forall 0 < t < t_0$$

y con esto se concluye que:

$$\Phi_t(z_{\max,\varepsilon}) \ll_K \Phi_0(z_{\max,\varepsilon}) = z_{max,\varepsilon} \ll_K (\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0) \qquad \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \forall 0 < t < t_0$$

Entonces notando que $\delta > 0$:

$$\Phi_{t+\delta}(z_{max,\varepsilon}) = \Phi_\delta(\Phi_t(z_{max,\varepsilon})) \ll_K \Phi_\delta(z_{max,\varepsilon})$$

Se concluye que:

$$\Phi_t(z_{\max,\varepsilon}) \ll_K \Phi_0(z_{\max,\varepsilon}) = z_{max,\varepsilon} \ll_K (\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0) \qquad \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \forall 0 < t$$

□

Observación De manera similar utilizando el otro equilibrio semitrivial, se definirá $z_{min,\varepsilon}$, tal que:

$$(0, 0, \overline{v_1}, \overline{v_2}) \ll_K z_{\min,\varepsilon} = \Phi_0(z_{\min,\varepsilon}) \ll_K \Phi_t(z_{min,\varepsilon} \qquad \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \forall 0 < t$$

Considerando $W_1 := [[E, (\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)]]_K$.

Proposición 4.1.10 *Todos los $z \in W_1$, son atraídos por E.*

Demostración. Utilizando el Teorema 1.4.2, hay 3 opciones:

La primera que exista un equilibrio en el interior, esto es imposible, pues los otros dos equilibrios no están en el intervalo.

La segunda que el extremo derecho atrae a todo el intervalo exceptuando al otro extremo, esto también es imposible, pues usando la dirección anterior, se tiene que existe un $\epsilon > 0$, tal que:

$$E \leq_K z_{max,\varepsilon} = (\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0) + \epsilon(x_1, x_2, y_1, y_2) \ll_K (\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$$

$$E \ll_K \phi_t(z_{max,\varepsilon}) \ll_K z_{\max,\varepsilon} \ll_K (\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$$

Por lo que utilizando el Teorema 1.4.1 $z_{\max,\varepsilon}$, converge a un equilibrio, pero no puede converger al semitrivial, siempre sera mayor que $z_{max,\varepsilon}$.

Finalmente, se concluye que: E atrae a todos los puntos z tales que: $E \leq_K z_K(\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$. □

Observación Análogamente se concluye que E atrae a todos los puntos tales que:

$$W_2 = [[(0, 0, \overline{v_1}, \overline{v_2}, E]]_K$$

Sea $z = (u_1, u_2, v_1, v_2) \in R \cap ((\mathbb{R}^2)_{++})^2$, cualquiera.

Proposición 4.1.11 *Todos los $z \in R \cap ((\mathbb{R}^2)_{++})^2$, son atraídos por E.*

Demostración. Considerando que todas las componentes son positivas, en caso de no ser lo, sería a partir de algún tiempo usando la Proposición 4.1.1, se definirán

$$u_i^{min} = \min\left\{\frac{u_i}{2}, \frac{u_i^*}{2}\right\}$$

$$v_i^{min} = \min\left\{\frac{v_i}{2}, \frac{v_i^*}{2}\right\}$$

$$u_i^{max} = \max\left\{\frac{u_i + \overline{u_i}}{2}, \frac{u_i^* + \overline{u_i}}{2}\right\}$$

$$v_i^{max} = \max\left\{\frac{v_i + \overline{v_i}}{2}, \frac{v_i^* + \overline{v_i}}{2}\right\}$$

Tomando los punto auxiliares $z_{min} = (u_1^{min}, u_2^{min}, v_1^{max}, v_2^{max})$ y $z_{max} = (u_1^{max}, u_2^{max}, v_1^{min}, v_2^{min})$.

$$E = (u_1^*, u_2^*, v_1^*, v_2^*) \leq_K z_{max} \ll_K (0, 0, \overline{u_1}, \overline{u_2})$$

Como z_{max} esta en W_1, por la Proposición 4.1.10 se tiene que $\Phi_t(z_{max}) \to E$

De manera análoga y utilizando la observación

$$(0, 0, \overline{v_1}, \overline{v_2}) \ll_K z_{min} \leq_K (u_1^*, u_2^*, v_1^*, v_2^*)$$

Por lo que $\Phi_t(z_{min}) \to E$.

$$z_{min} \leq_K (u_1, u_2, v_1, v_2) \leq_K z_{max}$$

Utilizando el Teorema del sándwich, $\Phi_t(z) \to E$ para cualquier $z \in R \cap ((\mathbb{R}^2)_{++})^2$.

En la Figura 4.2 se puede apreciar una ilustración de la Proposición 4.1.11 $\square$

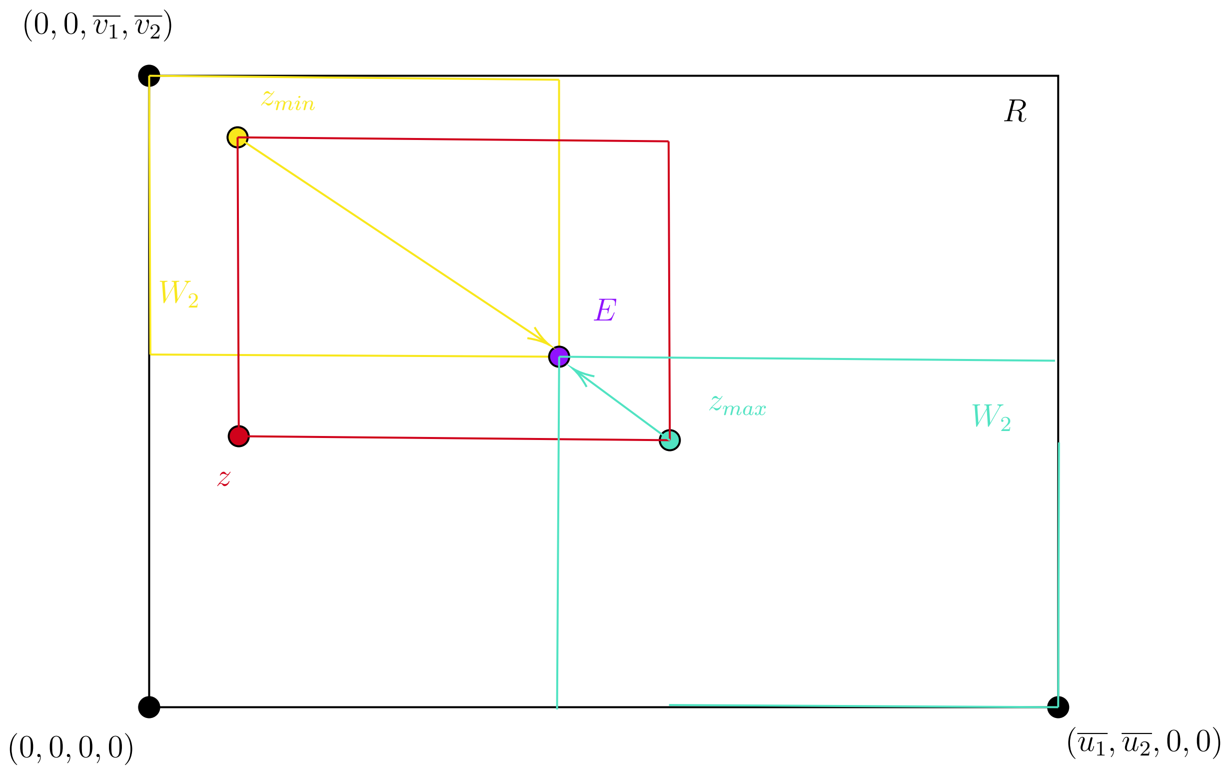

Figura 4.2: Representación de la Proposición 4.1.11, junto con los conjuntos W_1 y W_2.

Proposición 4.1.12 *Todo punto en* $((\mathbb{R}^2)_{++})^2$ *converge a* E

DEMOSTRACIÓN. Solo faltan los puntos $z \in ((\mathbb{R}^2)_{++})^2 \backslash R$, suponiendo que existe algún punto z converge a un semitrivial. Sin pérdida de generalidad $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$. Por para todo $\varepsilon > 0$ existe un $t_0 > 0$, tal que para todo $t \geq t_0$:

$$\Phi_t(z) \in B((\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0), \varepsilon) \cap R \cap ((\mathbb{R}^2)_{++})^2$$

Nuevamente estudiando la linealización en torno al equilibrio, se tiene que: $\exists (y_1, y_2), (x_1, x_2) \gg_2 (0, 0)$ los vectores propios normalizados, tales que:

$$F_1((\overline{u_1}, \overline{u_2}) + \varepsilon_2 x, \varepsilon_1 y) < F_1((\overline{u_1}, \overline{u_2}) + \varepsilon_2 x, 0, 0) = \varepsilon_2(r x_2 - x_1(s + a + b(2\overline{u_1} + \varepsilon_2 x_1))) < 0$$

$F_3((\overline{u_1},\overline{u_2})+\varepsilon_2 x,\varepsilon_1 y)=\varepsilon_1(\hat{r}y_2-y_1(\hat{s}+a+b(\overline{u_1}+\varepsilon_1 y_1+\varepsilon_2 x_1)))=\varepsilon_1(\overline{\lambda}y_1-b(\varepsilon_1 y_1+\varepsilon_2 x_1))$

Similarmente para $F_2()$ y $F_4()$.

Sea $\varepsilon=\dfrac{\overline{\lambda}\min\{x_1,x_2,y_1,y_2\}}{8\max\{b,f\}}$

Se tiene que:

$$\Phi_{t_0}(z)=(\hat{u_1},\hat{u_2},\hat{v_1},\hat{v_2})$$

Tomando ε_1 tal que: $\varepsilon_1 y_1\leq\hat{v_1}$ y $\varepsilon_1 y_2\leq\hat{v_2}$ y tomando $\varepsilon_2=\dfrac{\overline{\lambda}\min\{y_1,y_2\}}{4\max\{b,f\}}$

Por construcción:

$$\Phi_t((\overline{u_1},\overline{u_2})+\varepsilon_2 x,\varepsilon_1 y)\ll_K((\overline{u_1},\overline{u_2})+\varepsilon_2 x,\varepsilon_1 y)$$

Pero como:

$$\Phi_{t_0}(z)\leq_K((\overline{u_1},\overline{u_2})+\varepsilon_2 x,\varepsilon_1 y)$$

Se obtiene que:

$$\Phi_{t+t_0}(z)\ll_K\Phi_t((\overline{u_1},\overline{u_2})+\varepsilon_2 x,\varepsilon_1 y)\ll_K((\overline{u_1},\overline{u_2})+\varepsilon_2 x,\varepsilon_1 y)$$

Lo que contradice que $\Phi_t(z)\to(\overline{u_1},\overline{u_2},0,0)$, pues las dos últimas componentes no pueden ser nulas.

Con lo que se concluye que el omega límite de cualquier punto en $((\mathbb{R}^2)_{++})^2$ está en $R\cap((\mathbb{R}^2)_{++})^2$ y como el conjunto omega limite es invariante, usando la Proposición 4.1.11, se concluye que converge a E

$\square$

La siguiente tabla resume el comportamiento de la sección 4.1

Equilibrio	Condición Existencia	Linealmente Estable
$(0,0,0,0)$	Siempre	$sr<(s+a)e$ y $\hat{s}\hat{r}<(\hat{s}+a)e$
$(\overline{u_1},\overline{u_2},0,0)$	$sr>(s+a)e$	$\hat{s}\hat{r}\leq(\hat{s}+a+b\overline{u_1})(e+f\overline{u_2})$
$(0,0,\overline{v_1},\overline{v_2})$	$\hat{s}\hat{r}>(\hat{s}+a)e$	$sr\leq(s+a+b\overline{v_1})(e+f\overline{v_2})$
$(u_1^*,u_2^*,v_1^*,v_2^*)$	$sr>(s+a+b\overline{v_1})(e+f\overline{v_2})$ y $\hat{s}\hat{r}>(\hat{s}+a+b\overline{u_1})(e+f\overline{u_2})$	

Tabla 4.1: Tabla de equilibrios para el sistema (4.1)

Obs: Recordar que es imposible $sr>(s+a+b\overline{v_1})(e+f\overline{v_2})$ y $\hat{s}\hat{r}>(\hat{s}+a+b\overline{u_1})(e+f\overline{u_2})$, al mismo tiempo.

4.2. Sistema General con Coeficientes Constantes

El sistema para este caso estará dado por las siguientes dinámicas:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = d_1 \Delta u_1 + r u_2 - u_1(s + a + b(u_1 + v_1)) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = d_2 \Delta u_2 + s u_1 - u_2(e + f(u_2 + v_2)) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = d_3 \Delta v_1 + \hat{r} v_2 - v_1(\hat{s} + a + b(u_1 + v_1)) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t} = d_4 \Delta v_2 + \hat{s} v_1 - v_2(e + f(u_2 + v_2)) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \nabla u_i \cdot \nu = \nabla v_i \cdot \nu = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega, t > 0 \\ \\ (u_1, u_2, v_1, v_2)(x, 0) = (u_{01}(x), u_{02}(x), v_{01}(x), v_{02}(x)) \text{ para } x \in \Omega \end{cases} \tag{4.41}$$

Es directo notar que todos los equilibrios de la sección 4.1, son equilibrios del sistema (4.41).

Como fue analizado en la subsección 4.1.1, no todos los equilibrios existen siempre y en particular, para los casos en que a lo más existe un equilibrio semitrivial, es decir:

$$\{sr \leq (s + a)e\} \cup \{\hat{s}\hat{r} \leq (\hat{s} + a)e\}$$

se sabrá completamente el comportamiento de cualquier condición inicial en $[\mathcal{C}(\Omega)]_+^4$, pues en la sección 5.2, se estudiará un caso general, que engloba al caso de coeficientes constantes.

Por lo tanto, utilizando los resultados de la sección 5.2 se tiene la siguiente proposición:

Proposición 4.2.1 *El sistema* (4.41)*, cumple la siguiente dinámica:*

1. *Si el único equilibrio es* $(0, 0, 0, 0)$*, entonces para todo* $f \in [\mathcal{C}(\Omega)]_+^4$*, se tiene que:*

$$\Phi_t(f) \to (0, 0, 0, 0)$$

2. *Si el único equilibrio semitrivial es* $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$*, entonces para todo* $f \in ([\mathcal{C}(\Omega)^2]_{++}) \times [\mathcal{C}(\Omega)^2]_+$*, se tiene que:*

$$\Phi_t(f) \to (\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$$

y para todo $f \in \{(0, 0)\} \times [\mathcal{C}(\Omega)^2]_+$*, se tiene que:*

$$\Phi_t(f) \to (0, 0, 0, 0)$$

3. *Si el único equilibrio semitrivial es* $(0, 0, \overline{v_1}, \overline{v_2})$*, entonces para todo* $f \in [\mathcal{C}(\Omega)^2]_+ \times ([\mathcal{C}(\Omega)^2]_{++})$*, se tiene que:*

$$\Phi_t(f) \to (0, 0, \overline{v_1}, \overline{v_2})$$

y para todo $f \in [\mathcal{C}(\Omega)^2]_+ \times \{(0,0)\}$*, se tiene que:*

$$\Phi_t(f) \to (0,0,0,0)$$

.

Demostración. Usando directamente los resultados de la subsección 5.2.1, las Proposiciones 5.2.1, 5.2.2 y 5.2.3, se obtiene la convergencia, pues para el caso a coeficientes constantes la existencia de los equilibrios semitriviales entrega el signo de los valores propios principales del sistema. □

Usando la Proposición 4.2.1, se obtiene que no hay más equilibrios en el caso en que no existan ambos semitriviales.

Observación Para analizar la posible existencia de más equilibrios (los cuales tendrían que ser no constantes), para poder encontrar alguno, se buscó simular la ecuación, pero todo convergía a equilibrios constantes del sistema 4.1, esto no descarto la existencia de otros equilibrios, pues para el caso en que Ω es convexo, los equilibrios no constantes en caso de existir serían inestables (utilizando el resultado obtenido por [16], para sistemas cooperativos a coeficientes constantes), por lo que tomando cualquier condición inicial, esta convergería a un equilibrio constante.

Proposición 4.2.2 *Para el caso en que existen ambos equilibrios semitriviales, sea un equilibrio* $(u_1(x), u_2(x), v_1(x), v_2(x))$ *del sistema* (4.41)*, cumple que para cualquier* $d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}_+$*, se tiene que:*

$$(u_1(x), u_2(x), v_1(x), v_2(x)) \in [(0,0,\overline{v_1},\overline{v_2}), (\overline{u_1},\overline{u_2},0,0)]_K$$

Demostración. Tomando un equilibrio cualquiera $(u_1(x), u_2(x), v_1(x), v_2(x))$, como los equilibrios semitriviales son únicos, se tiene que: $(u_1(x), u_2(x)) \neq (0,0)$ y $(u_1(x), u_2(x)) \neq (0,0)$

Luego tomando $(u_1(x), u_2(x), 0, 0)$ y $(0,0,v_1(x), v_2(x))$, los cuales convergen a sus respectivos equilibrios semitriviales.

De manera que:

$$(0,0,v_1(x),v_2(x)) \leq_K ((u_1(x),u_2(x),v_1(x),v_2(x))) \leq_K (u_1(x),u_2(x),0,0)$$

Utilizando la monotonía del sistema:

$$\Phi_t(0,0,v_1(x),v_2(x)) \leq_K \Phi_t((u_1(x),u_2(x),v_1(x),v_2(x))) = (u_1(x),u_2(x),v_1(x),v_2(x))$$

$$\Phi_t((u_1(x),u_2(x),v_1(x),v_2(x))) = (u_1(x),u_2(x),v_1(x),v_2(x)) \leq_K \Phi_t(u_1(x),u_2(x),0,0)$$

Usando la convergencia de los extremos a los semitriviales, se concluye que:

$$(0,0,\overline{v_1},\overline{v_2}) \leq_K (u_1(x),u_2(x),v_1(x),v_2(x)) \leq_K (\overline{u_1},\overline{u_2},0,0)$$

□

Otra condición de cualquier equilibrio no constante del sistema (4.41) es la siguiente:

Proposición 4.2.3 *Sea $w(x) = (w_1(x), w_2(x), w_3(x), w_4(x))$ un equilibrio no constante del sistema* (4.41)*, sea $j \in\in \{1, 2\}$:*

$$\min_{i\in\{1,2,3,4\}} \min_{x\in\overline{\Omega}} w_i(x) > 0, \ \max_{x\in\overline{\Omega}} w_j(x) < \overline{u_j} \ y \ \max_{x\in\overline{\Omega}} w_{j+2}(x) < \overline{v_j}$$

Demostración. Para la primera notando que:

$$\begin{cases} (L_1 - (s + a + b(w_1 + w_3)))w_1 = -rw_2 \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ (L_2 - (e + f(w_2 + w_4)))w_2 = -sw_1 \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ (L_3 - (\hat{s} + a + b(w_1 + w_3)))w_3 = -\hat{r}w_4 \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ (L_4 - (e + f(w_2 + w_4)))w_4 = -\hat{s}w_3 \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \nabla w_i \cdot \nu = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases} \tag{4.42}$$

Usando que $L_i = (d_i\Delta)$, el sistema (4.42), muestra que las componentes son de la forma:

$$(L_i + h_i)[w_i] < 0 \Rightarrow (L_i + h_i)[-w_i] > 0$$

Usando que $\forall x \in \overline{\Omega}, -w_i(x) \leq 0$, entonces si se alcanzará 0 en un punto interior usando el Teorema 1.2.4, se concluye que toda la componente es la función 0 y si se alcanzará en un punto de la frontera, usando el Teorema 1.2.5, también se concluye que fue siempre 0. Como el equilibrio es no constante, se llega a una contradicción, pues si una componente es nula, su asociada también y en los sistemas de una especie, solo hay equilibrios constantes.

Para la segunda se utilizará el siguiente sistema

$$\begin{cases} (L_1 - (s + a + b(w_1 + w_3)))[w_1 - \overline{u_1}] = r(\overline{u_2} - w_2) + b(w_1 + w_3 - \overline{u_1})\overline{u_1} \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ (L_2 - (e + f(w_2 + w_4)))[w_2 - \overline{u_2}] = s[\overline{u_1} - w_1] + f(w_2 + w_4 - \overline{u_2}) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ (L_3 - (\hat{s} + a + b(w_1 + w_3)))[w_3 - \overline{v_1}] = \hat{r}[\overline{v_2} - w_4] + b(w_1 + w_3 - \overline{v_1}) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ (L_4 - (e + f(w_2 + w_4)))[w_4 - \overline{v_2}] = \hat{s}[\overline{v_1} - w_3] + f(w_2 + w_4 - \overline{v_2}) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \nabla[w_i - \overline{u_i}] \cdot \nu = \nabla[w_{i+2} - \overline{v_i}] \cdot \nu = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases} \tag{4.43}$$

Se tiene que $w_i(x) - \overline{u_i} \leq 0$, por la Proposición 4.2.2, si se supone que existe un punto en $\overline{\Omega}$ tal que $w_i(x_0) = u_i(x_0)$, sin pérdida de generalidad $i = 1$.

Como $w_3(x_0) > 0$, pues en caso contrario w_3 es siempre nula y por ende el equilibrio es constante, se tiene que $(w_1+w_3)(x_0) > \overline{u_1}$, si el punto x_0 es interior de Ω se tomará una bola de radio δ, tal que:

$$\forall x \in B(x_0,\delta)\cap\overline{\Omega}, w_1 + w_3(x) \geq \overline{u_1}$$

Si el punto es de la frontera, se tomará una bola $B(x_1,\delta)$ tangente a la frontera en x_0 y con la misma propiedad. Trabajando en esta bola:

$$(L_1 + h_1)[w_1 - \overline{u}_1] = r(\overline{u_2} - w_2) + b(w_1 + w_3 - \overline{u_1})\overline{u_1} \geq 0$$

Por lo tanto, si este punto es interior de Ω, se concluye con el teorema 1.2.4, que en toda la bola la componente $w_1 = \overline{u_1}$ y observando la primera ecuación del sistema (2.4), entrega:

$$0 = r(w_2 - \overline{u_2}) - b(w_3)\overline{u_1} \Rightarrow w_2 = \overline{u_2} \text{ y } w_3 = 0$$

Con lo que se concluye por la parte anterior, que w_3 es siempre nulo y el equilibrio constante. Por otro lado, si el punto fuera de la frontera se cumple que la derivada es de tipo Neumann y por lo tanto también la función sería constante en la bola y de igual manera se obtendría que el equilibrio es constante.

Como el equilibrio es no constante, se llega a una contradicción. □

Al no encontrar más equilibrios, pero tampoco una prueba de su no existencia, se buscó probar que todos los equilibrios del sistema (4.41), cuando $\min_{\in\{1,2,3,4\}}\{d_i\} \to \infty$, convergen a los equilibrios del sistema (4.1), lo cual se logró de manera exitosa. Posteriormente, utilizando las siguientes técnicas, que varían levemente en cada subcaso, se pudo probar que los equilibrios y los comportamientos asintóticos son los mismos que en el sistema sin difusión a coeficientes constantes, para cualesquiera sean los $\{d_i\}_{i\in\{1,2,3,4\}} > 0$.

4.2.1. Caso ($s \neq \hat{s}$ y $r = \hat{r}$) ó ($s = \hat{s}$ y $r \neq \hat{r}$)

Para este caso no existe ningún equilibrio de coexistencia constante. En las siguientes proposiciones se probará que no existen más equilibrios y más aún el comportamiento asintótico.

Proposición 4.2.4 *Para el caso 4.2.1, no hay equilibrios no constantes y para cualquier condición inicial $z \in [[\mathcal{C}(\Omega)^2]_{++}]^2$, se tiene que converge al equilibrio semitrivial dominante.*

Demostración. Sea $z \in [[\mathcal{C}(\Omega)^2]_{++}]^2$, por la Proposición 3.0.5, entonces existe $t_0 > 0$, tal que $\Phi_{t_0} \gg_4 (0,0,0,0)$, tomando:

$$f_{min,i} = \min_{x\in\overline{\Omega}}\{\Phi_{t_0}(z)\}_i \text{ y } f_{max,i} = \max_{x\in\overline{\Omega}}\{\Phi_{t_0}(z)\}_i$$

Ahora utilizando la siguiente desigualdad:

$$z_{min} = (f_{min,1}, f_{min,2}, f_{max,3}, f_{max,4}) \leq_K \Phi_{t_0}(z) \leq_K (f_{max,1}, f_{max,2}, f_{min,4}, f_{min,4}) = z_{max}$$

Notando que de manera isomorfa $z_{min}, z_{max} \in ((\mathbb{R}^2)_{++})^2$, como son constantes su comportamiento es el del caso 4.1.2.4, por lo tanto dependiendo cual es el semitrivial dominante, se tiene que: $\Phi_t(z_{min})$ y $\Phi_t(z_{max})$, convergen al equilibrio dominante y utilizando la monotonía: $\Phi_t(z)$ también, con lo que se concluye que no hay equilibrios no constantes y más aún cualquier condición converge al semitrivial dominante. $\square$

Observación Los casos en que solo exista una especie, convergen a ese semitrivial, heredando los resultados de los sistemas de 1 especie con 2 grupos de [1]

4.2.2. Caso $s = \hat{s}$ y $r = \hat{r}$

Para el caso 4.2.2, se buscará probar que los únicos equilibrios son los constantes y el comportamiento asintótico es el del caso sin desplazamiento.

Proposición 4.2.5 *El conjunto de equilibrios de del sistema para 4.2.2, son solo los equilibrios constantes del sistema sin desplazamiento* (4.1)*.*

Demostración. Suponiendo que existe al menos una solución no constante $w(x)$, por la Proposición 4.2.2, se obtiene que:

$$w(x) \in [(0, 0, \overline{u_1}, \overline{u_2}, (\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)]_K$$

Usando la Proposición 4.2.3 entonces, se tienen cotas para $w_{min,i}$ y $w_{max,i}$

Con esto se puede tomar:

$$\lambda^* = sup\{\lambda \in (0,1) | (\lambda\overline{u_1}, \lambda\overline{u_2}, (1-\lambda)\overline{u_1}, (1-\lambda)\overline{u_2}) \leq_K (w_{min,1}, w_{min,2}, w_{max,3}, w_{max,4})\}$$

por lo tanto como $w(x)$ no es constante:

$$(\lambda^*\overline{u_1}, \lambda^*\overline{u_2}, (1-\lambda^*)\overline{u_1}, (1-\lambda^*)\overline{u_2}) <_K (w_1(x), w_2(x), w_3(x), w_4(x))$$

Como el semiflujo preserva el orden fuertemente, se tiene que:

$$\Phi_t(\lambda^*\overline{u_1}, \lambda^*\overline{u_2}, (1-\lambda^*)\overline{u_1}, (1-\lambda^*)\overline{u_2}) \ll_K \Phi_t(w_1(x), w_2(x), w_3(x), w_4(x))$$

pero como son equilibrios se tiene que:

$$(\lambda^*\overline{u_1}, \lambda^*\overline{u_2}, (1-\lambda^*)\overline{u_1}, (1-\lambda^*)\overline{u_2}) \ll_K (w_1(x), w_2(x), w_3(x), w_4(x))$$

lo que implica que existe un $\overline{\lambda} \in (\lambda^*, 1)$ tal que:

$$(\overline{\lambda}\overline{u_1}, \overline{\lambda}\overline{u_2}, (1-\overline{\lambda}\overline{u_1}, (1-\overline{\lambda}\overline{u_2}) <_K (u_1(x), u_2(x), v_1(x), v_2(x))$$

lo cual es una contradicción, pues λ^* es el supremo y se concluye que solo hay soluciones constantes. $\square$

El siguiente teorema indicará el comportamiento asintótico de una condición inicial cualquiera en $[\mathcal{C}(\Omega)]^4_+$.

Teorema 4.2.6 *Existen* 3 *opciones de convergencia:*

1. *Si* $f \in (\mathcal{C}(\Omega)^2)_+ \times \{(0,0)\}$*, entonces* $\Phi_t(f) \to (\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$
2. *Si* $f \in \{(0,0)\} \times (\mathcal{C}(\Omega)^2)_+$*, entonces* $\Phi_t(f) \to (0, 0, \overline{u_1}, \overline{u_2})$
3. *Si* $f \in ((\mathcal{C}(\Omega)^2)_{++})^2$*, entonces* $\Phi_t(f) \to (\alpha\overline{u_1}, \alpha\overline{u_2}, (1-\alpha)\overline{u_1}, (1-\alpha)\overline{u_2})$*, para algún* $\alpha \in [0,1]$

Demostración. Los primeros dos casos son directamente heredados de [1]

Para el tercero, utilizando la Proposición 3.0.5, se tiene que desde un cierto $t_0 > 0, \Phi_{t_0}(f) \gg_4 (0,0,0,0)$, por lo tanto al igual que en la Proposición 4.1.5, se puede definir R_t y de manera completamente análoga posteriormente probar que converge a un punto R_∞, el cual es el límite de $\Phi_t(z)$. □

4.2.3. Caso $s \neq \hat{s}$ y $r \neq \hat{r}$

Para este caso el sistema sin difusión presenta un único equilibrio de coexistencia, por lo tanto el sistema con difusión presenta al menos este equilibrio de coexistencia. Similarmente al caso anterior también se tiene la existencia de los equilibrios semitriviales, los cuales son únicos, pero ahora distintos.

Primero se probará el comportamiento asintótico de una situación inicial cualquiera en $[\mathcal{C}(\Omega)]^4_+$ y el siguiente teorema lo resumirá:

Teorema 4.2.7 *Existen* 3 *opciones de convergencia:*

1. *Si* $f \in (\mathcal{C}(\Omega)^2)_+ \times \{(0,0)\}$*, entonces* $\Phi_t(f) \to (\overline{u_1}, \overline{u_2}, 0, 0)$
2. *Si* $f \in \{(0,0)\} \times (\mathcal{C}(\Omega)^2)_+$*, entonces* $\Phi_t(f) \to (0, 0, \overline{v_1}, \overline{v_2})$
3. *Si* $f \in ((\mathcal{C}(\Omega)^2)_{++})^2$*, entonces* $\Phi_t(f) \to (u_1^*, u_2^*, v_1^*, v_2^*)$

Demostración. Los primeros dos casos son directamente heredados de [1]

Para el tercero, utilizando la Proposición 3.0.5, se tiene que desde un cierto $t_0 > 0, \Phi_{t_0}(f) \gg_4 (0,0,0,0)$, por lo tanto se puede definir:

$$f_{min,i} = \min_{x \in \overline{\Omega}} \{\Phi_{t_0}(f)\}_i \text{ y } f_{max,i} = \max_{x \in \overline{\Omega}} \{\Phi_{t_0} f\}_i$$

Tomando $z_{min} = (f_{min,1}, f_{min,2}, f_{max,3}, f_{max,4})$ y $z_{max} = (f_{max,1}, f_{max,2}, f_{min,3}, f_{min,4})$

Se tiene que: $z_{min} \leq_K \Phi_{t_0}(f) \leq_K z_{max}$

Como se probó en la Proposición 4.1.12, se tiene que:

$$\Phi_t(z_{min}) \to (u_1^*, u_2^*, v_1^*, v_2^*) \text{ y } \Phi_t(z_{max}) \to (u_1^*, u_2^*, v_1^*, v_2^*)$$

Con lo que se concluye por monotonía que: $\Phi_t(f) \to (u_1^*, u_2^*, v_1^*, v_2^*)$ □

Observación Una consecuencia directa es que el único equilibrio de coexistencia del sistema para 4.2.3, es el único equilibrio de coexistencia del sistema sin difusión.

4.3. Comparación entre Sistemas

El estudio del sistema a coeficientes constantes, permite observar un ejemplo del efecto que produce la difusión al comportamiento del sistema. A continuación al observar las Figuras 4.3 y 4.4, estas corresponden a un sistema con desplazamiento y uno sin desplazamiento, para los mismos coeficientes. En ambos casos los sistemas cumplirán la condición de existencia del equilibrio de coexistencia.

Los valores utilizados son los siguientes: El dominio es $\Omega = (0, 1)$ y las condiciones iniciales serán:

$$u_{10}(x) = u_{20}(x) = 1 - \cos(4\pi x) \text{ y } v_{10}(x) = v_{20}(x) = 1 - \cos(8\pi x)$$

Los coeficientes son:

$$b = 1, f = 1, a = 1, e = 1, s = 12, r = 8, \hat{s} = 6, \hat{r} = 10.$$

Con lo que se obtiene que los equilibrios serán:

$$(\overline{u_1}, \overline{u_2}) \approx (2.6313, 5.1415),\ (\overline{v_1}, \overline{v_2}) \approx (4.0273, 4.4410) \text{ y } (u_1^*, u_2^*, v_1^*, v_2^*) = (2, 4, 1, 1)$$

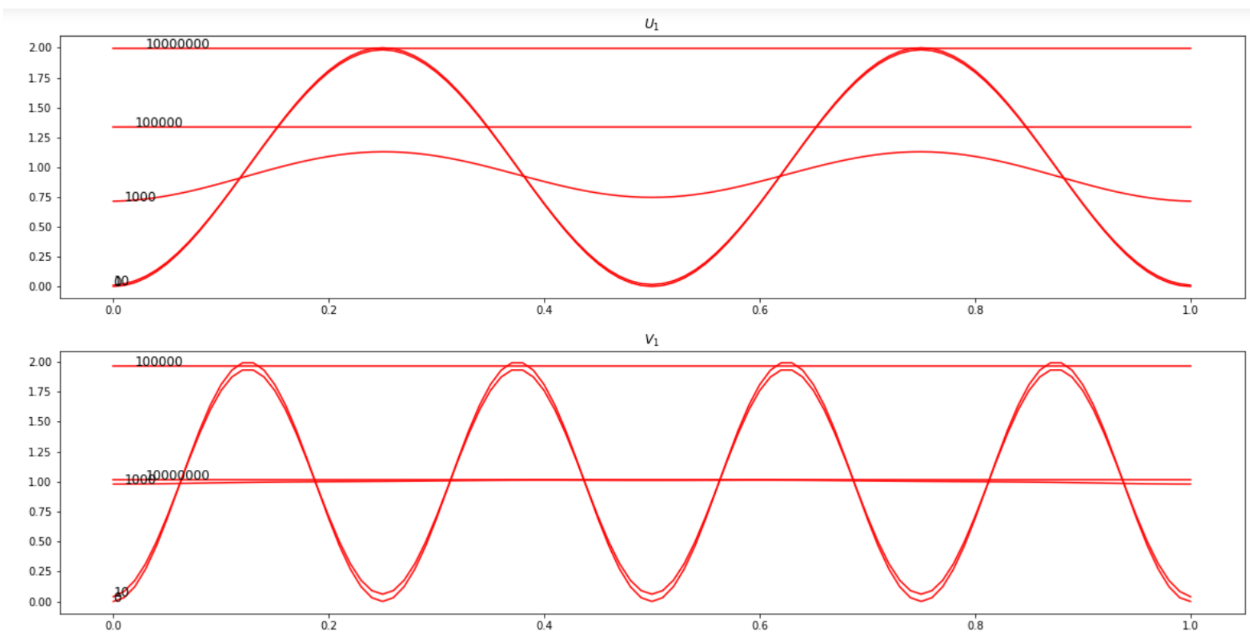

Figura 4.3: Gráficos de $u_1(x)$ y $v_1(x)$ para el sistema con desplazamiento, cada 10^{2n+1} iteraciones, con $n = \{0, 1, 2, 3\}$.

Analizando la Figura 4.3, que corresponde al caso con difusión se aprecia una convergencia global al equilibrio de coexistencia con $u_1^* = 2$ y $v_1^* = 1$. Este comportamiento cumple lo esperado, pues considerando la Proposición 3.0.5 la difusión, permite que las zonas deshabitas sean pobladas. Luego al existir población en todo el dominio de ambas especies, se obtiene la convergencia.

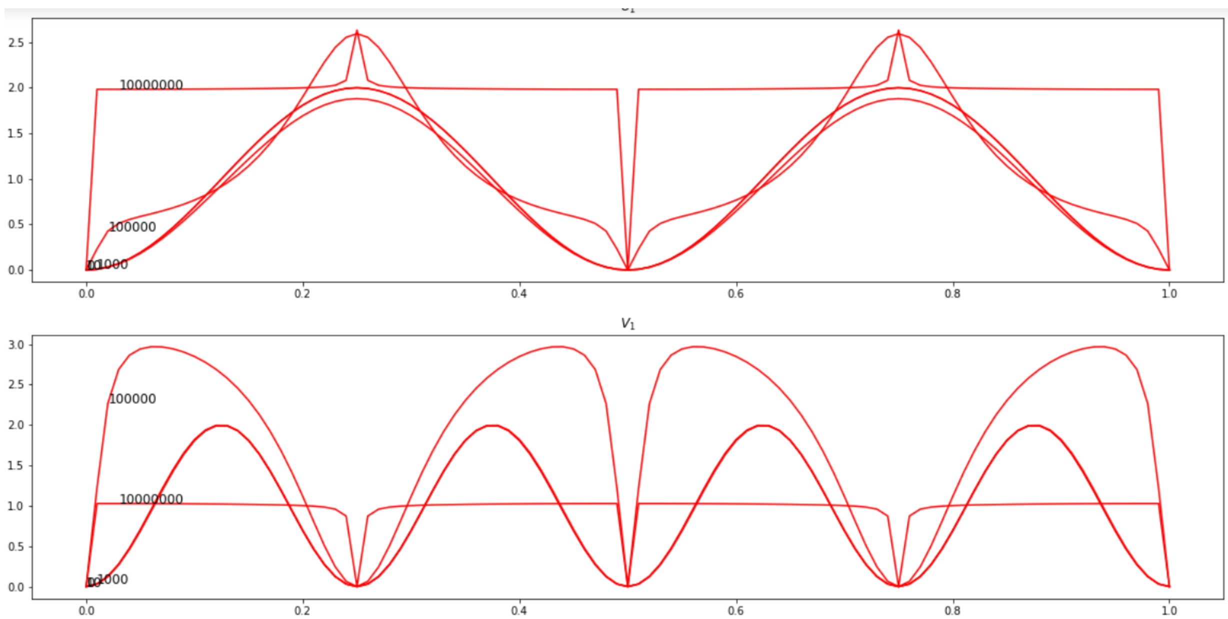

Figura 4.4: Gráficos de $u_1(x)$ y $v_1(x)$ para el sistema sin desplazamiento, cada 10^{2n+1} iteraciones, con $n = \{0, 1, 2, 3\}$.

Observando la Figura 4.4, la cual corresponde al caso sin difusión se observa un comportamiento puntual a los equilibrios dependiendo las condiciones iniciales. Para el caso en que las 4 componentes son 0 inicialmente siempre se mantiene en 0, por la falta de desplazamiento para poblar esas regiones a diferencia del caso con difusión. Al considerar las regiones en que las condiciones iniciales en que solo la especie v es 0, el sistema converge al equilibrio semitrivial de u, por la misma razón. Finalmente, para los casos en que ambas no son nulas se converge al equilibrio de coexistencia.

Capítulo 5

Sistema a coeficientes variables

En este capítulo se abordará el sistema (0.3), buscando aplicar los resultados del capítulo 4, para encontrar regiones de $\overline{\Omega}$ en las cuales, se tendrán las distintas condiciones que permitan obtener los diversos equilibrios y analizar como varían sus estabilidades.

Los coeficientes variables, permiten que el sistema (0.3) pueda modelar distintas interacciones entre las dos especies, dependiendo la subregión de Ω en que se encuentren, pues los recursos, ya no se encuentran distribuidos de manera uniforme, por ejemplo:

1. Zonas con escasos recursos para los jóvenes, con $b(x)$ pequeño.
2. Regiones favorables a la reproducción, con $s(x)$ y $\hat{s}(x)$ grandes.

En una primera instancia se estudiará el sistema sin desplazamiento (para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, con $d_i = 0$), al igual que en el caso constante, para entender mejor el sistema general y también estos resultados serán relevantes, al momento de estudiar el sistema con tasas de difusiones pequeñas, en la sección 5.2.2.

5.1. Sistema Sin Desplazamiento

Consiste en el caso sin difusión y la dinámica del sistema para este caso estará dada por las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_1}{\partial t} = r(x)u_2 - u_1(s(x) + a(x) + b(x)(u_1 + v_1)) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial u_2}{\partial t} = s(x)u_1 - u_2(e(x) + f(x)(u_2 + v_2)) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial v_1}{\partial t} = \hat{r}(x)v_2 - v_1(\hat{s}(x) + a(x) + b(x)(u_1 + v_1)) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial v_2}{\partial t} = \hat{s}(x)v_1 - v_2(e(x) + f(x)(u_2 + v_2)) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\[2ex]
(u_1, u_2, v_1, v_2)(x, 0) = (u_{01}(x), u_{02}(x), v_{01}(x), v_{02}(x)) \text{ para } x \in \Omega
\end{cases}
\tag{5.1}
$$

Nuevamente usando los resultados del capítulo 3, se tiene que el semiflujo $\Phi_t()$, definido por el sistema (5.1), es monótono creciente con el orden $\leq_K$ y fuertemente en $(\mathcal{C}(\Omega)^2_{++})^2$.

5.1.1. Regiones de Equilibrios

En esta sección se estudiarán las distintas regiones en que se divide Ω y como estas condiciones garantizan la existencia de equilibrios no negativos, para trayectorias con condiciones iniciales en $\mathcal{C}(\Omega)^4_+$, para el sistema de 2 especies (5.1).

Definición 5.1.1 *Se definirán algunos conjuntos que serán de utilidad para el resto del capítulo:*

$$\Omega_{u0} := \{x \in \Omega | (s(x) + a(x))e(x) \geq s(x)r(x)\}$$

$$\Omega_{v0} := \{x \in \Omega | (\hat{s}(x) + a(x))e(x) \geq \hat{s}(x)\hat{r}(x)\}$$

$$\Omega_{ui} := \{x \in \Omega^c_{u0} \cap \Omega^c_{v0} | (\hat{s}(x) + a(x) + b(x)\overline{u_1}(x))(e(x) + f(x)\overline{u_2}(x)) < \hat{s}(x)\hat{r}(x)\}$$

$$\Omega_{vi} := \{x \in \Omega^c_{u0} \cap \Omega^c_{v0} | (s(x) + a(x) + b(x)\overline{v_1}(x))(e(x) + f(x)\overline{v_2}(x)) < s(x)r(x)\}$$

$$\Omega_1 := \Omega_{u0} \cap \Omega_{v0}$$

$$\Omega_2 := \Omega_{u0} \cap \Omega^c_{v0}$$

$$\Omega_3 := \Omega^c_{u0} \cap \Omega_{v0}$$

$$\Omega_4 := \Omega_{ui} \cap \Omega^c_{vi}$$

$$\Omega_5 := \Omega^c_{ui} \cap \Omega_{vi}$$

$$\Omega_6 := \Omega^c_{ui} \cap \Omega^c_{vi}$$

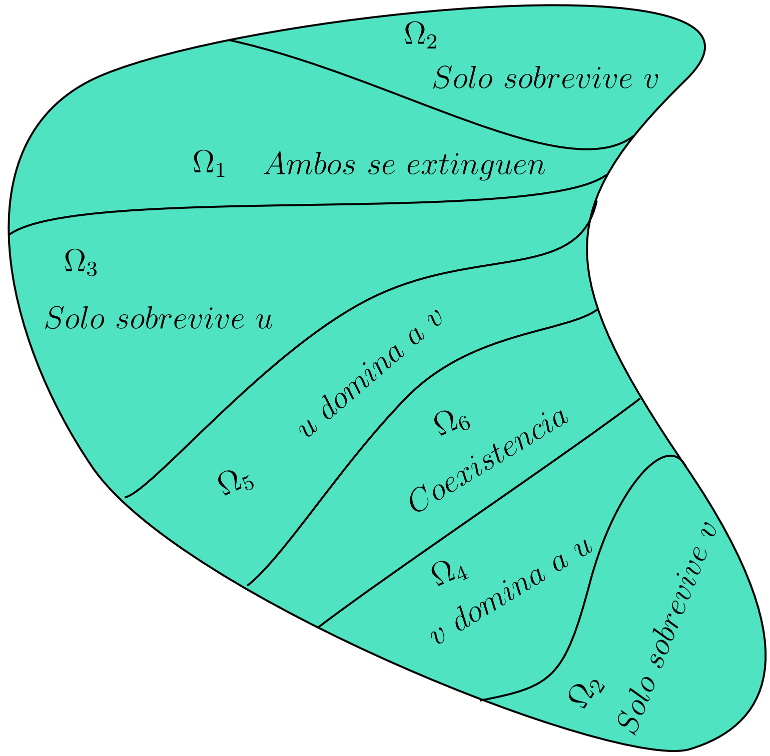

Figura 5.1: Ejemplo de dominio con los distintos subconjuntos posibles

En la Figura 5.1, se puede observar un ejemplo de la interacción entre los subconjuntos $\{\Omega_i\}_{i\in\{1,2,3,4,5,6\}}$, junto con una descripción de la relación entre los comportamientos de las especies, que se detallará en el resto del capítulo.

Para poder estudiar los equilibrios del sistema (5.1), previamente se recordarán los resultados de los subsistemas (5.2) y (5.3).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = r(x)u_2 - u_1(s(x) + a(x) + b(x)(u_1)) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = s(x)u_1 - u_2(e(x) + f(x)(u_2)) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \nabla u_i \cdot \nu = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Este sistema tiene varios equilibrios, pues si $E(x)$ es un equilibrio cualquiera del sistema (5.2), para los $x \in \Omega_{u0}$ solo puede tomar el valor $E(x) = (0,0)$, pero para $x \in \Omega_{u0}^c$, puede ser que $E(x) = (0,0)$ ó $E(x) = (\overline{U_1(x)}, \overline{U_2(x)})$ (es puntualmente el equilibrio del sistema (2.4), por lo tanto se puede definir de manera puntual: $(\overline{U_1(x)}, \overline{U_2(x)})$, como el máximo de los equilibrios del sistema (2.4), con respecto al orden $\leq_2$. Por lo tanto:

$$(\overline{U_1(x)}, \overline{U_2(x)}) = (0,0) \text{ en } x \in \Omega_{u0}$$

$$(\overline{U_1(x)}, \overline{U_2(x)}) \gg_2 (0,0) \text{ en } x \in \Omega_{u0}^c$$

Observación La función $(\overline{U_1(x)}, \overline{U_2(x)}) \in [\mathcal{C}(\Omega)^2]_+$

De manera similar considerando el sistema (5.3)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = \hat{r}(x)u_2 - u_1(\hat{s}(x) + a(x) + b(x)(v_1)) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t} = s(x)u_1 - u_2(e(x) + f(x)(v_2)) \text{ para } x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \nabla v_i \cdot \nu = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

Definiendo el máximo de los equilibrios del sistema (5.3), $(\overline{V_1(x)}, \overline{V_2(x)})$, tal que:

$$(\overline{V_1(x)}, \overline{V_2(x)}) = (0,0) \text{ en } x \in \Omega_{v0}$$

$$(\overline{V_1(x)}, \overline{V_2(x)}) \gg_2 (0,0) \text{ en } x \in \Omega_{v0}^c$$

Observación También la función $(\overline{V_1(x)}, \overline{V_2(x)}) \in [\mathcal{C}(\Omega)^2]_+$

Usando los resultados de la sección 4.1, junto con los subsistemas (5.2) y (5.3). Se obtiene la siguiente proposición que resume las condiciones de los equilibrios del sistema (5.1):

Proposición 5.1.2 *Sea $E(x)$ un equilibrio cualquiera del sistema* (5.1)*, puntualmente se tienen las siguientes opciones en cada conjunto.*

1. *Si $x \in \Omega_1$, entonces:*
$$E(x) = (0,0,0,0)$$

2. *Si $x \in \Omega_2$, entonces:*
$$E(x) = (0,0,\overline{V_1}(x), \overline{V_2}(x)) \text{ ó } E(x) = (0,0,0,0)$$

3. *Si $x \in \Omega_3$, entonces:*
$$E(x) = (\overline{U_1}(x), \overline{U_2}(x), 0, 0) \text{ ó } E(x) = (0,0,0,0)$$

4. *Si $x \in \Omega_4 \cup \Omega_5$, entonces:*
$$E(x) = (0,0,0,0), \ \ E(x) = (\overline{U_1}(x), \overline{U_2}(x), 0, 0) \text{ ó } E(x) = (0,0,\overline{V_1}(x), \overline{V_2}(x))$$

5. *Si $x \in \Omega_6$, entonces:*
$$E(x) = (0,0,0,0), \ \ E(x) = (\overline{U_1}(x), \ \ \overline{U_2}(x), 0, 0),$$
$$E(x) = (0,0,\overline{V_1}(x), \overline{V_2}(x)) \text{ ó } E(x) = (U_1^*(x), U_2^*(x), V_1^*(x), V_2^*(x))$$

Donde $(\overline{U_1}(x), \overline{U_2}(x))$ y $(\overline{V_1}(x), \overline{V_2}(x))$, son los únicos equilibrios positivos de los subsistemas sin desplazamiento (5.2) y (5.3), respectivamente. El equilibrio $(U_1^*(x), U_2^*(x), V_1^*(x), V_2^*(x))$, es el único que es estrictamente positivo en todas sus componentes, para todo $x \in \Omega_6$.

5.2. Sistema General con Coeficientes Variables

El sistema para este caso estará dado por las siguientes dinámicas:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = d_1 \Delta u_1 + r(x)u_2 - u_1(s(x) + a(x) + b(x)(u_1 + v_1)) \quad \forall x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = d_2 \Delta u_2 + s(x)u_1 - u_2(e(x) + f(x)(u_2 + v_2)) \quad \forall x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = d_3 \Delta v_1 + \hat{r}(x)v_2 - v_1(\hat{s}(x) + a(x) + b(x)(u_1 + v_1)) \quad \forall x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t} = d_4 \Delta v_2 + \hat{s}(x)v_1 - v_2(e(x) + f(x)(u_2 + v_2)) \quad \forall x \in \Omega, t > 0 \\ \\ \nabla u_i(x) \cdot \nu = \nabla v_i(x) \cdot \nu = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, t > 0 \\ \\ (u_1, u_2, v_1, v_2)(x, 0) = (u_{01}(x), u_{02}(x), v_{01}(x), v_{02}(x)) \text{ para } x \in \Omega \end{cases} \tag{5.4}$$

5.2.1. Resultados para cualquier tasa de difusión

Usando la Proposición 3.0.5, se obtiene que el semiflujo del sistema (5.4), cumple para toda condición inicial en $z \in ([\mathcal{C}(\Omega)^2]_{++})^2$ y para todo $t > 0$, que:

$$\forall t > 0 \qquad \Phi_t(z) \gg_4 (0, 0, 0, 0) \tag{5.5}$$

Considerando el problema de valores propios en torno a linealización del $(0, 0, 0, 0)$

$$\begin{cases} d_1 \Delta p_1(x) + s(x)p_2(x) - (s(x) + a(x))p_1(x) = \lambda p_1(x) \quad \forall x \in \Omega, t > 0 \\ d_2 \Delta p_2(x) + r(x)p_1(x) - e(x)p_2(x) = \lambda p_2(x) \quad \forall x \in \Omega, t > 0 \\ d_3 \Delta q_1(x) + \hat{s}(x)q_2(x) - (\hat{s}(x) + a(x))q_1(x) = \lambda q_1(x) \quad \forall x \in \Omega, t > 0 \\ d_4 \Delta q_2(x) + \hat{r}(x)q_1(x) - e(x)q_2(x) = \lambda q_2(x) \quad \forall x \in \Omega, t > 0 \\ \nabla p_i(x) \cdot \nu = \nabla q_i(x) \cdot \nu = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

Notar que este problema se divide en dos problemas de valores propios desacoplados (5.7) y (5.8).

$$\begin{cases} d_1\Delta p_1(x) + s(x)p_2(x) - (s(x)+a(x))p_1(x) = \lambda p_1(x) & \forall x \in \Omega, t>0 \\ d_2\Delta p_2(x) + r(x)p_1(x) - e(x)p_2(x) = \lambda p_2(x) & \forall x \in \Omega, t>0 \\ \nabla p_i(x)\cdot \nu = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, t>0 \end{cases} \tag{5.7}$$

$$\begin{cases} d_3\Delta q_1(x) + \hat{s}(x)q_2(x) - (\hat{s}(x)+a(x))q_1(x) = \lambda q_1(x) & \forall x \in \Omega, t>0 \\ d_4\Delta q_2(x) + \hat{r}(x)q_1(x) - e(x)q_2(x) = \lambda q_2(x) & \forall x \in \Omega, t>0 \\ \nabla q_i(x)\cdot \nu = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, t>0 \end{cases} \tag{5.8}$$

Estos problemas, son justamente las linealizaciones en torno al $(0,0)$ de cada especie por separada.

Observación Usando el Lema 2.1.3, se tiene que los problemas (5.7) y (5.8), cada uno tiene un único valor propio principal, los cuales se llamarán λ_1^u y λ_1^v.

Proposición 5.2.1 *Si λ_1^u y λ_1^v, son no positivos, entonces cualquier condición inicial $(u_1,u_2,v_1,v_2) \in [\mathcal{C}(\Omega)]_+^4$, converge a $(0,0,0,0)$*

Demostración. Considerando que:

$$(0,0,v_1,v_2) \leq_K (u_1,u_2,v_1,v_2) \leq_K (u_1,u_2,0,0)$$

Y utilizando la monotonía del sistema (5.4):

$$\Phi_t(0,0,v_1,v_2) \leq_K \Phi_t(u_1,u_2,v_1,v_2) \leq_K \Phi_t(u_1,u_2,0,0)$$

Usando que ambos extremos convergen a $(0,0,0,0)$, pues la dinámica de los subsistemas, sigue el comportamiento de λ_1^u y λ_1^v, se obtiene el resultado. $\square$

De la Proposición 5.2.1, se extiende el comportamiento de extinción de la especie para los casos en que el 0, es globalmente estable.

Proposición 5.2.2 *Si $\lambda_1^u > 0$ y $\lambda_1^v \leq 0$, entonces:*

1. *Para cualquier condición inicial $(u_1,u_2,v_1,v_2) \in [\mathcal{C}(\Omega)^2]_{++} \times [\mathcal{C}(\Omega)^2]_+$, se tiene que:*

$$\Phi_t(u_1,u_2,v_1,v_2) \to (u_1^d, u_2^d, 0, 0)$$

   con (u_1^d,u_2^d), el único equilibrio positivo del sistema (2.1) de la especie (u_1,u_2).

2. *Para cualquier condición $(0,0,v_1,v_2) \in [\mathcal{C}(\Omega)^4]_+$, se tiene que:*

$$\Phi_t(0,0,v_1,v_2) \to (0,0,0,0)$$

Demostración. Sea $z \in ((\mathcal{C}(\Omega)^2)_{++})^2$, de la ecuación (5.5), se tiene que si $t > 0$:

$$\Phi_t(z) \gg_4 (0,0,0,0)$$

Por otro lado, usando:

$$(0,0,v_1,v_2) \leq_K (u_1,u_2,v_1,v_2) \leq_K (u_1,u_2,0,0)$$

junto la monotonía del sistema (5.4):

$$\Phi_t(0,0,v_1,v_2) \leq_K \Phi_t(z) \leq_K \Phi_t(u_1,u_2,0,0)$$

Por lo tanto

$$\omega(z) \subset [(0,0,0,0),(u_1^d,u_2^d,0,0)]_K$$

Por hipótesis, se tiene que las funciones propias, siempre son positivas, para los problemas (5.7) y (5.8): $(p_1(x),p_2(x))$ y $(q_1(x),q_2(x))$. Las cuales se tomarán normalizadas.

$$d_1\Delta\delta_1 p_1(x) + r(x)\delta_1 p_2(x) - \delta_1 p_1(x)(s(x)+a(x)+b(x)\delta_1 p_1(x)) = \delta_1 p_1(x)(\lambda_1^u - \delta_1 b(x)p_1(x))$$
$$d_2\Delta\delta_1 p_2(x) + s(x)\delta_1 p_1(x) - \delta_1 p_2(x)(e(x)+f(x)\delta_1 p_2(x)) = \delta_1 p_2(x)(\lambda_1^u - \delta_1 f(x)p_2(x))$$

Por lo que tomando $\delta_1 < \dfrac{\lambda_1^u}{2}\dfrac{1}{\max_{x\in\overline{\Omega}}\{b(x),f(x)\}}$, se tendrá que ambas desigualdades serán positivas. Por lo tanto, si $\delta_2 < \dfrac{\lambda_1^u}{4}\dfrac{1}{\max_{x\in\overline{\Omega}}\{b(x),f(x)\}}$:

$$\begin{aligned} d_1\Delta\delta_1 p_1(x) + F_1(\delta_1 p(x),\delta_2 q(x)) &> \delta_1 p_1(x)\left(\frac{\lambda_1^u}{2} - b(x)\delta_2 q_1(x)\right) > \delta_1 p_1(x)\frac{\lambda_1^u}{4} \\ d_2\Delta\delta_1 p_2(x) + F_2(\delta_1 p(x),\delta_2 q(x)) &> \delta_1 p_2(x)\left(\frac{\lambda_1^u}{2} - f(x)\delta_2 q_2(x)\right) > \delta_1 p_2(x)\frac{\lambda_1^u}{4} \end{aligned} \tag{5.9}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} d_3\Delta\delta_2 q_1(x) + F_3(\delta_1 p(x),\delta_2 q(x)) &< \delta_2 q_1(x)\lambda_1^v \\ d_4\Delta\delta_2 q_2(x) + F_4(\delta_1 p(x),\delta_2 q(x)) &< \delta_2 q_2(x)\lambda_1^v \end{aligned} \tag{5.10}$$

Para descartar que $(0,0,0,0) \in \omega(z)$, suponiendo que existe $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que diverge al infinito, tal que $\Phi_{t_n}(z) \to (0,0,0,0)$. Esto garantiza que existe un:

$$0 < \varepsilon_1 = \frac{\lambda_1^u}{8}\frac{\min_{x\in\overline{\Omega}}\{p_1(x),p_2(x),q_1(x),q_2(x)\}}{\max_{x\in\overline{\Omega}}\{b(x),f(x)\}}$$

entonces $\exists N^* > 0$ tal que, $\forall n > N^*$, se tiene que $\Phi_{t_n}(z) \leq_4 (\varepsilon_1,\varepsilon_1,\varepsilon_1,\varepsilon_1)$.

Sea $n = N^*$, se tiene que:

$$\Phi_{t_n}(z) = (\hat{u_1},\hat{u_2},\hat{v_1},\hat{v_2})$$

Tomando:

$$\delta_1 = \frac{\lambda_1^u}{2} \frac{1}{\max_{x\in\overline{\Omega}}\{b(x), f(x)\}} \text{ y } \delta_2 = \frac{\lambda_1^u}{4} \frac{1}{\max_{x\in\overline{\Omega}}\{b(x), f(x)\}}$$

entonces:

$$\delta_1 p(x) \geq_2 (\hat{u_1}, \hat{u_2}) \gg_2 (0,0) \text{ y } \delta_2 q(x) \geq_2 (\hat{v_1}, \hat{v_2}) \gg_2 (0,0)$$

Por lo tanto existe $\mu \in [0,1]$ tal que: $(0,0) \ll_2 \mu\delta_1 p(x) \leq_2 (\hat{u}_1, \hat{u}_2)$

Finalmente, para todo $n \geq N^*$, $z_{inf} = (\mu\delta_1 p(x), \delta_2 q(x)) \geq_K \Phi_{t_n}(z)$ y por la construcción de z_{inf}, las ecuaciones (5.9) y (5.10), junto con la monotonía:

$$z_{inf} = (\delta_1 p(x), \delta_2 q(x)) \ll_K \Phi_t(z_{inf} \leq_K \Phi_{t_n+t}(z)$$

Como $[z_{inf}]_{1,2} \gg_2 (0,0)$, se contradice que $\Phi_t(z) \to (0,0,0,0)$, por ende:

$$\omega(z) \subset [(0,0,0,0), (0,0,u_1^d,u_2^d)]_K \backslash \{(0,0,0,0)\}$$

Luego usando que el conjunto omega límite es invariante y no vació, se concluye que:

$$\omega(z) = \{(0,0,u_1^d,u_2^d)\}$$

y con ellos el resultado.

Para los casos en que una de las componentes no existe el problema se reduce al caso de una sola especie, ya estudiado en [1] $\square$

Análogamente se tiene la siguiente proposición:

Proposición 5.2.3 *Si $\lambda_1^u > 0$ y $\lambda_1^v \leq 0$, entonces:*

1. *Para cualquier condición inicial $(u_1, u_2, v_1, v_2) \in [\mathcal{C}(\Omega)^2]_+ \times [\mathcal{C}(\Omega)^2]_{++}$, se tiene que:*

$$\Phi_t(u_1, u_2, v_1, v_2) \to (0,0,v_1^d, v_2^d)$$

, con (v_1^d, v_2^d), el único equilibrio positivo del sistema (2.3) *de la especie* (v_1, v_2).

2. *Para cualquier condición $(u_1, u_2, 0, 0) \in [\mathcal{C}(\Omega)^4]_+$, se tiene que:*

$$\Phi_t(u_1, u_2, 0, 0) \to (0,0,0,0)$$

Demostración. La demostración es completamente análoga. $\square$

Con este resultado se obtiene el comportamiento de cualquier condición inicial, para los casos en que a lo más un valor propio es positivo.

5.2.2. Resultados para tasas de difusión pequeñas

El estudio general del comportamiento cuando ambos valores propios λ_1^u y λ_1^v son ambos positivos se vuelve más complejo, ya que la Proposición 1.2.9 asegura la existencia de al menos un equilibrio del sistema (5.4), pero no se sabe si es único y como estos pueden variar en función de los coeficientes del sistema. Por lo que en esta sección se analizará solo el caso en que los valores de $\{d_i\}_{i\in\{1,2,3,4\}}$ son pequeños, con el fin de probar algunos resultados importantes y entender mejor el comportamiento del sistema. En el trabajo [1], los autores concluyeron una convergencia local de los equilibrios con difusión pequeña a los del sistema sin difusión, por lo que generalizar esta idea motiva los siguientes teoremas.

Para trabajar en todo $\overline{\Omega}$, primero se le pedirá durante el resto del capítulo mayor regularidad a la frontera de Ω, por lo que se supondrá que Ω es un dominio $\mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega)$. También se volverán a definir algunos subconjuntos de $\overline{\Omega}$, estudiados en la sección 5.1.1, extendiéndolos hasta la frontera:

$$\Omega_{u0} := \{x \in \overline{\Omega} | (s(x) + a(x))e(x) \geq s(x)r(x)\}$$

$$\Omega_{v0} := \{x \in \overline{\Omega} | (\hat{s}(x) + a(x))e(x) \geq \hat{s}(x)\hat{r}(x)\}$$

$$\Omega_{ui} := \{x \in \overline{\Omega} | (\hat{s}(x) + a(x) + b(x)\overline{u_1}(x))(e(x) + f(x)\overline{u_2}(x)) < \hat{s}(x)\hat{r}(x)\}$$

$$\Omega_{vi} := \{x \in \overline{\Omega} | (s(x) + a(x) + b(x)\overline{v_1}(x))(e(x) + f(x)\overline{v_2}(x)) < s(x)r(x)\}$$

$$\Omega_1 := \Omega_{u0} \cap \Omega_{v0}$$

$$\Omega_2 := \Omega_{u0} \cap \Omega_{v0}^c$$

$$\Omega_3 := \Omega_{u0}^c \cap \Omega_{v0}$$

$$\Omega_4 := \Omega_{ui} \cap \Omega_{vi}^c$$

$$\Omega_5 := \Omega_{ui}^c \cap \Omega_{vi}$$

$$\Omega_6 := \Omega_{ui} \cap \Omega_{vi}$$

Usando la Proposición 5.1.2, se tiene que los conjuntos $\Omega_{u0}^c, \Omega_{v0}^c$, entregan las condiciones para que existan puntualmente los únicos equilibrios de los sistemas sin desplazamiento de las especie u y v, respectivamente: $(\overline{U_1}(x), \overline{U_2}(x))$ y $(\overline{V_1}(x), \overline{V_2}(x))$

Por otro lado los conjuntos $\Omega_2 \cup \Omega_4$ y $\Omega_3 \cup \Omega_5$, entregan las condiciones para que los equilibrios semitriviales de los sistemas sin difusión de las especie u y v, respectivamente, sean puntualmente estables o inestables en una vecindad.

Y para los puntos $x \in \Omega_6$, se obtiene la condición de existencia puntual de

$$(U_1^*(x), U_2^*(x), V_1^*(x), V_2^*(x))$$

el único equilibrio de coexistencia.

5.2.2.1. Extensión Caso Convergencia semitriviales en $\overline{\Omega}$

En el Teorema 1 de [1], se prueba que:

Teorema 5.2.4 (Teorema 1) *Suponiendo que se tiene la ecuación* (5.11)*, sea* (u_1^d, u_2^d) *el equilibrio positivo del sistema* (5.14)*. Entonces* $(u_1^d, u_2^d) \to (\overline{U_1}, \overline{U_2})$ *cuando* $d = \max\{d_1, d_2\} \to 0$ *localmente uniforme en* Ω *Con:*

$$\min_{x\in\overline{\Omega}}((s(x) + a(x))e(x) - r(x)s(x)) < 0, \tag{5.11}$$

y $(\overline{U_1}, \overline{U_2})$, *el máximo de las soluciones del sistema sin desplazamiento* (5.2), *es decir,*

$$(\overline{U_1}(x), \overline{U_2}(x)) \text{ es positivo, si } x \in \Omega_{u0}^c \cap \Omega$$

$$(\overline{U_1}(x), \overline{U_2}(x)) = (0,0) \text{ si } x \in \Omega_{u0} \cap \Omega.$$

Para extender este resultado al Teorema 5.2.8, se probarán los siguientes proposiciones y lemas.

Proposición 5.2.5 *Sea* $x_0 \in \overline{\Omega}$*, se puede recubrir* $\overline{\Omega}$*, por la unión de las bolas* $B(x_0, \rho_0)$*, con* $\rho_0 > 0$ *(*ρ_0 *dependerá solo de* ε*), tal que:*

$$\forall x \in B(x_0, \rho_0) \cap \overline{\Omega}, |s(x) - s(x_0)| < \varepsilon, |r(x) - r(x_0)| < \varepsilon, |a(x) - a(x_0)| < \varepsilon$$

$$|e(x) - e(x_0)| < \varepsilon, |b(x)\overline{U_1}(x) - b(x_0)\overline{U_1}(x_0)| < \varepsilon, |f(x)\overline{U_2}(x) - f(x_0)\overline{U_2}(x_0)| < \varepsilon$$

Demostración. Como todas las funciones mencionadas, pertenecen a $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, por ser funciones continuas en un dominio compacto, son uniformemente continuas, por ende dado $\varepsilon > 0$, para cada función $g_i(x)$, $\exists \delta > 0$, tal que si: $x \in B(x_0, \delta)$, entonces $|g_i(x) - g_i(x_0)| < \varepsilon$, con δ independiente de x_0.

Se puede definir ρ_0 el mínimo de los 6 deltas y se obtiene que se cumplen las 6 desigualdades para todo $x \in B(x_0, \rho_0)$.

Tomando $\bigcup_{x_0 \in \overline{\Omega}} B(x_0, \rho_0)$, la inclusión con $\overline{\Omega}$ es directa. □

En la demostración de Teorema 5.2.4 (el Teorema 1 de [1]), se definió una subsolución local en cada $x_0 \in \Omega$ independiente de las tasas de difusiones. Para los $x_0 \in \Omega_{u0}$, se tomo $(0,0)$ y para los $x_0 \in \Omega_{u0}^c$, se tomo $\delta\eta(x, x_0)l(x_0)$. En donde esta última subsolución depende del valor de x_0, pues para su construcción se utiliza la linealización en tordo a $(0,0)$ del problema sin difusión (5.12) y el problema auxiliar de valores propios del laplaciano (5.13).

$$\begin{cases} s(x_0)l_2(x_0) - (s(x_0) + a(x_0))l_1(x_0) = \Phi(x_0)l_1(x_0) \\ r(x_0)l_1(x_0) - e(x_0)l_2(x_0) = \Phi(x_0)l_2(x_0) \end{cases} \tag{5.12}$$

Para cada $x_0 \in \overline{\Omega}$, utilizando 2 del Corolario 1.4.9, se tiene que $l_1(x_0), l_2(x_0) > 0$ y por lo tanto se pueden tomar tales que: $\|l(x_0)\|_2 = 1$ Por lo que puntualmente se define:

$$\Phi(x_0) = \begin{cases} \text{negativa} \quad \text{si } s(x_0)r(x_0) < (s(x_0) + a(x_0)e(x_0) \\ 0 \quad \text{si } s(x_0)r(x_0) = (s(x_0) + a(x_0)e(x_0) \\ \text{Positiva} \quad \text{si } s(x_0)r(x_0) > (s(x_0) + a(x_0)e(x_0) \end{cases}$$

Observación Utilizando la continuidad de los coeficientes del sistema (5.12), se tiene que $l_i : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ y $\Phi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, son continuas.

Donde $\eta(x, x_0)$, es la función propia asociada al valor propio principal del problema auxiliar. Usando la Proposición 1.3.4, garantiza la existencia de esta función siempre positiva, salvo en la frontera.

$$\begin{cases} \kappa\eta(x,x_0) + \Delta\eta(x,x_0) \quad \text{si } x \in B(x_0,\rho_0) \\ \eta(x,x_0) = 0 \quad \text{si } x \in \partial B(x_0,\rho_0) \end{cases} \tag{5.13}$$

Para expandir el teorema, bastará con extender las soluciones locales hasta la frontera de Ω. Pues posteriormente se utilizará que $\overline{\Omega}$ es compacto.

Proposición 5.2.6 *Para todo $x_0 \in \overline{\Omega}$, si $d_1, d_2 < d_0$ se puede definir $\underline{w_0}(x, x_0)$, subsolución del problema* (5.14)

$$\begin{cases} d_1\Delta u_1 + r(x)u_2 - u_1(s(x) + a(x) + b(x)u_1) = 0 \quad \forall x \in \Omega \\ \\ d_2\Delta u_2 + s(x)u_1 - u_2(e(x) + f(x)u_2) = 0 \quad \forall x \in \Omega \\ \\ \nabla u_i(x) \cdot \nu = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5.14}$$

Demostración. Para todos los $x_0 \notin \partial\Omega$, se tiene la subsolución de [1], si $x_0 \in \Omega^c_{u0}$ $\underline{w(x,x_0)} = \delta\eta(x,x_0)l(x_0)$ y para los $x_0 \in \Omega_{u0}$ $\underline{w(x,x_0)} = (0,0)$.

Para los $x_0 \in \partial\Omega$, también habrá los mismos 2 casos y se extenderán de una manera similar:

Si $s(x_0)r(x_0) \leq (s(x_0) + a(x_0))e(x_0)$, entonces tomar $\underline{w(x,x_0)} = (0,0)$.

Si $s(x_0)r(x_0) > (s(x_0) + a(x_0))e(x_0)$, entonces tomar $\underline{w(x,x_0)} = \delta_2\eta_1(x,x_0)l(x_0)$.

Donde $\eta_1(x, x_0)$, es la función propia asociada al valor propio principal del problema (5.15), utilizando la Proposición 1.3.5, esta existe y siempre es positiva, salvo en la parte de la frontera que se anula:

$$\begin{cases} \kappa_1\eta_1(x,x_0) + \Delta\eta_1(x,x_0) \quad \text{si } x \in B(x_0,\rho_0) \\ \eta_1(x,x_0) = 0 \quad \text{si } x \in \partial B(x_0,\rho_0) \cap \overline{\Omega} \\ \nabla\eta_1(x,x_0) \cdot \nu = 0 \quad \text{si } x \in B(x_0,\rho_0) \cap \partial\Omega \end{cases} \tag{5.15}$$

Para probar que: $[D\underline{w}(x,x_0) + F(x, \underline{w}(x,x_0)] \geq_2 (0,0)$, se verifica directamente para los casos en que es $\underline{w}(x,x_0) = (0,0)$, se tiene y para los casos en que es positiva en la bola.

Si $d_0 < \dfrac{\Phi(x_0)}{2\kappa(x_0)}$, $\varepsilon < \min\{l_1(x_0), l_2(x_0)\}\dfrac{\Phi(x_0)}{10}$ y $\delta_2 < \min\{l_1(x_0), l_2(x_0)\}\dfrac{\Phi(x_0)}{10}$:

$$[D\underline{w}(x,x_0) + F(x, \underline{w}(x,x_0))]_i \geq \delta_2\eta(x,x_0)\frac{\Phi(x_0)}{2} \geq 0$$

Observación Es directo que para el primer caso $\underline{w}(x,x_0) = (0,0)$, está por debajo de cualquier equilibrio del sistema (5.14), pero no para el segundo, por los casos en que es positivo en su bola.

Para probar esto última, se considerará $w^d = (w_1^d, w_2^d)$, un equilibrio cualquiera de (5.14), este es mayor a $(0,0)$ en todos los puntos del Ω y más aún lo es en todos los puntos de $\overline{\Omega}$, pues tiene condiciones del tipo Neumann en la frontera.

Para probar que $\underline{w}(x, x_0) \leq_2 (w_1^d, w_2^d)$, se utilizará el siguiente lema:

Lema 5.2.7 *Si* $D\delta\eta(x, x_0)l(x_0) + F(x, \delta\eta(x, x_0)l(x_0)] \geq_2 (0, 0)$, *para todo* $0 < \delta < \delta_2$, *entonces:* $\delta_2\eta(x, x_0)l(x_0) \leq_2 w^d = (w_1^d, w_2^d)$, *para cualquier* w^d, *equilibrio de* (5.14), *con* $d_1, d_2 < d$.

Demostración. Si $x_0 \in \Omega$, se puede refinar ρ_0, tomándolo lo suficientemente pequeño para que $B(x_0, \rho_0) \subset \Omega$.

Se definirá el conjunto $D := \{\delta \in (0, \delta_M] | \delta\eta(x, x_0)l(x_0) \leq_2 w^d(x), \forall x \in \overline{\Omega}\}$, como los $w_i^d(x)$ son positivos, junto con la continuidad sobre un compacto de $w_i^d(x)$, se tiene que $w_m^d = \min_{i\in\{1,2\}} \min_{x\in\overline{\Omega}}\{w_i^d(x)\} > 0$, por lo tanto,

$$\delta = \frac{w_m^d}{2\max\{\max_{x\in\overline{\Omega}} \eta(x, x_0)l_1(x_0), \max_{x\in\overline{\Omega}} \eta(x, x_0)l_2(x_0)\}} \in D$$

entonces $D \neq \emptyset$ y usando que es acotado superiormente, se tiene que el conjunto tiene supremo, llamémoslo $\delta_S > 0$, para el cual $\exists x_S \in B(x_0, \rho_0) \subseteq \overline{\Omega}, j \in \{1, 2\}$ tal que $\delta_S\eta(x_S, x_0)l_j(x_0) = w_j^d(x_S)$. Notar que x_S, no puede pertenecer a $\partial B(x_0, \rho_0)$, pues una es estrictamente positiva y la otra nula.

Sin pérdida de generalidad $j = 1$

$$d_1\Delta\delta_S\eta(x, x_0)l_1(x_0) + F_1(x, \delta_S\eta(x, x_0)l(x_0)) > 0, \forall x \in B(x_0, \rho_0)$$

Usando que el sistema es cooperativo respecto a la segunda componente:

$$d_1\Delta\delta_S\eta(x, x_0)l_1(x_0) + F_1(x, \delta_S\eta(x, x_0)l_1(x_0), w_2^d(x)) > 0$$

Por lo que al definir $z(x) = w_1^d(x) - \delta_S\eta(x, x_0)l_1(x_0) \geq 0$ y $z(x_S) = 0$.

Con el cual se define:

$$d_1\Delta z + \rho(x)z, \forall x \in B(x_0, \rho_0) \text{ y } z > 0, \forall x \in \partial B(x_0, \rho_0)$$

Para $\rho(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial F_1}{\partial s_1}(x, \delta_S\eta(x, x_0)l_1(x_0) + tz(x), w_2^d(x))dt$, como $\dfrac{\partial F_i}{\partial s_i} < 0$, se tiene que $\rho(x) < 0$.

Reemplazando z en $d_1\Delta z + \rho(x)z$, se tiene:

$$d_1\Delta(w_1^d(x) - \delta_S\eta(x, x_0)l_1(x_0) + F_1(x, w_1^d(x), w_2^d(x)) - F_1(x, \delta_S\eta(x, x_0)l_1(x_0), w_2^d(x))$$

Reemplazando que $(w_1^d(x), w_2^d(x))$ es equilibrio, usando que para $\forall x \in \mathcal{B}(x_0, \rho_0), (-z)(x) \leq 0$ y $\forall x \in B(x_0, \rho_0)^c, z(x) < 0$ se tiene que:

$$d_1\Delta(-z) + \rho(-z) = (d_1\Delta\delta_S\eta(x, x_0)l_1(x_0) + F_1(x, \delta_S\eta(x, x_0)l_1(x_0), w_2^d(x)) > 0$$

Por lo tanto, como $(-z)(x_S) = 0$, se contradice el Teorema 1.2.4, pues z no puede ser constante, tomar el valor 0 en un punto y estrictamente positiva en la frontera, con lo que se obtiene el resultado.

Para $x_0 \in \partial\Omega$ utilizando el mismo argumento anterior, sobre $\overline{B(x_0, \rho_0)} \cap \overline{\Omega}$. Se obtiene la existencia de un δ_S, tal que es el supremo del conjunto D y cumple que:

$$w^d(x) \geq_2 \delta_S \eta_1(x, x_0) l(x_0) \text{ y } \delta_S \eta(x_S, x_0) l_j(x_0) = w_j^d(x_S)$$

Notar que x_S no puede pertenecer a $\partial B(x_0, \rho_0) \cap \overline{\Omega}$, pues una de las funciones es nula y la otra estrictamente positiva.

Nuevamente definiendo $z(x) = w_1^d(x) - \delta_S \eta_1(x, x_0) l_1(x_0)$, se obtiene que $(-z(x)) \leq 0$, para todos los $x \in \overline{B(x_0, \rho_0)} \cap \overline{\Omega}$ y

$$d_1 \Delta(-z) + \rho(x)(-z) = (d_1 \Delta \delta_S \eta(x, x_0) l_1(x_0) + F_1(x, \delta_S \eta(x, x_0) l_1(x_0), w_2^d(x)) > 0$$

Por lo tanto como $(-z)(x_S) = 0$, si $x_S \in B(x_0, \rho_0) \cap \Omega$ usando el Teorema 1.2.4 ó si $x_S \in \overline{B(x_0, \rho_0)} \cap \partial\Omega$ tomando en cuenta el Teorema 1.2.5, ya que z tienen condiciones del tipo Neumann en esta parte de la frontera. En ambos casos se concluye que z es constante, lo cual es una contradicción, pues z no puede ser constante, tomar el valor 0 en algún punto y ser estrictamente positiva en parte de la frontera, con lo que se obtiene el resultado.

Con esto se concluye que el candidato a subsolución es menor y se obtiene la desigualdad. $\square$

Utilizando el Lema 5.2.7, se obtiene que $\underline{w}(x, x_0)$ es la subsolución, para cada $x_0 \in \overline{\Omega}$. $\square$

Teorema 5.2.8 *Suponiendo que se tiene la ecuación* (5.11)*, sea* (u_1^d, u_2^d) *el equilibrio positivo del sistema* (5.14)*. Entonces* $(u_1^d, u_2^d) \to (\overline{U_1}, \overline{U_2})$ *uniformemente en* $\overline{\Omega}$*, cuando* $d = \max\{d_1, d_2\} \to 0$.

Con $(\overline{U_1}, \overline{U_2})$*, el máximo de las soluciones del sistema sin desplazamiento* (5.2)*, por lo tanto:*

$$(\overline{U_1}(x), \overline{U_2}(x)) \textit{ es positivo, si } x \in \Omega_{u0}^c$$

$$(\overline{U_1}(x), \overline{U_2}(x)) = (0, 0) \textit{ si } x \in \Omega_{u0}.$$

A continuación se realizará la prueba del Teorema 5.2.8.

Demostración. Usando la Proposición 5.2.6, se puede extender el resultado de [1], con esta nueva subsolución y se obtiene que para todo $x_0 \in \overline{\Omega}$, si $d_1, d_2 < d_0$, entonces:

$$(u_1^d, u_2^d) \to (\overline{U_1}(x), \overline{U_2}(x))$$

localmente uniformemente.

Usando la compacidad de $\overline{\Omega}$, se puede extender la convergencia local uniforme, a convergencia uniforme en todo el conjunto. $\square$

Observación De igual se obtiene la convergencia uniforme de $(v_1^d, v_2^d) \to (\overline{V_1}(x), \overline{V_2}(x))$ en todo $\overline{\Omega}$.

Con esto ahora se tiene la siguiente proposición:

Proposición 5.2.9 *Para todo* $\varepsilon > 0$, $\exists d_0 > 0$ *tal que si* $d_1, d_2, d_3, d_4 < d_0$, *entonces* $\forall x \in \overline{\Omega}$:

$$|u_i^d(x) - \overline{U_i}(x)| < \varepsilon \qquad y \qquad |v_i^d(x) - \overline{V_i}(x)| < \varepsilon$$

Demostración. La demostración es la aplicación del Teorema 5.2.8 y la observación. □

5.2.2.2. Teorema de convergencia para dos especies y difusiones pequeñas

Denotando $(\overline{U_1}(x), \overline{U_2}(x), 0, 0)$ y $(0, 0, \overline{V_1}(x), \overline{V_2}(x))$, a los mayores equilibrios de los subsistemas sin desplazamiento (5.2) y (5.3).

Para los problemas de valores propios (5.16) y (5.17), utilizando 2 del Corolario 1.4.9, se tiene que:

$$\forall x \in \overline{\Omega}, p_1(x), p_2(x) > 0 \text{ (de norma 1) y continuos}$$

$$\begin{cases} s(x)p_2(x) - (s(x) + a(x) + 2b(x)\overline{U_1}(x))p_1(x) = \Lambda(x)p_1(x) \\ r(x)p_1(x) - (e(x) + 2f(x)\overline{U_2}(x))p_2(x) = \Lambda(x)p_2(x) \end{cases} \tag{5.16}$$

$$\forall x \in \overline{\Omega}, q_1(x), q_2(x) > 0 \text{ (de norma 1) y continuos}$$

$$\begin{cases} \hat{s}(x)q_2(x) - (\hat{s}(x) + a(x) + 2b(x)\overline{V_1}(x))q_1(x) = \Gamma(x)q_1(x) \\ \hat{r}(x)q_1(x) - (e(x) + 2f(x)\overline{V_2}(x))q_2(x) = \Gamma(x)q_2(x) \end{cases} \tag{5.17}$$

Para los $x \in \{x \in \overline{\Omega} | s(x)r(x) = (s(x) + a(x))e(x)\}$, se tiene que $\Lambda(x) = 0$ y para el resto de $\overline{\Omega}$, $\Lambda(x) < 0$. De igual manera, para $x \in \{x \in \overline{\Omega} | \hat{s}(x)\hat{r}(x) = (\hat{s}(x) + a(x))e(x)\}$, se tiene que $\Gamma(x) = 0$ y para el resto de $\overline{\Omega}$, $\Gamma(x) < 0$.

Sea $\varepsilon > 0$, se definen: $h_1(x, \varepsilon) = \overline{U_1}(x) + \varepsilon p_1(x)$, $h_2(x, \varepsilon) = \overline{U_2}(x) + \varepsilon p_2(x)$, $h_3(x, \varepsilon) = \overline{V_1}(x) + \varepsilon q_1(x)$ y $h_4(x, \varepsilon) = \overline{V_2}(x) + \varepsilon q_2(x)$.

En esta subsección se extenderá el resultado de la convergencia de los equilibrios de 1 especie al sistema de 2 especies.

Teorema 5.2.10 *Suponiendo que se tiene la ecuación* (5.18), *sea* $(u_1^d, u_2^d, v_1^d, v_2^d)$ *un equilibrio positivo cualquiera del sistema* (5.4). *Entonces* $(u_1^d, u_2^d, v_1^d, v_2^d) \to W^\infty$ *uniformemente en* $\overline{\Omega}$, *cuando* $d = \max\{d_1, d_2, d_3, d_4\} \to 0$. *Con:*

$$\begin{cases} \min\limits_{x \in \overline{\Omega}}((s(x) + a(x) + b(x)\overline{V_1})(e(x) + f(x)\overline{V_2}) - r(x)s(x)) < 0 \\ \min\limits_{x \in \overline{\Omega}}((\hat{s}(x) + a(x) + b(x)\overline{U_1})(e(x) + f(x)\overline{U_2}) - \hat{r}(x)\hat{s}(x)) < 0 \end{cases} \tag{5.18}$$

y

$$
\begin{aligned}
W^\infty(x) =&(0,0,0,0) \;\; si\ x\in\Omega_1\\
W^\infty(x) =&(\overline{U_1}(x),\overline{U_2}(x),0,0) \;\; si\ x\in\Omega_3\cup\Omega_5\\
W^\infty(x) =&(0,0,\overline{V_1}(x),\overline{V_2}(x)) \;\; si\ x\in\Omega_2\cup\Omega_4\\
W^\infty(x) =&(U_1^*(x),U_2^*(x),V_1^*(x),V_2^*(x)) \;\; si\ x\in\Omega_6
\end{aligned}
$$

En la Figura 5.2 se observa una representación visual del Teorema 5.2.10.

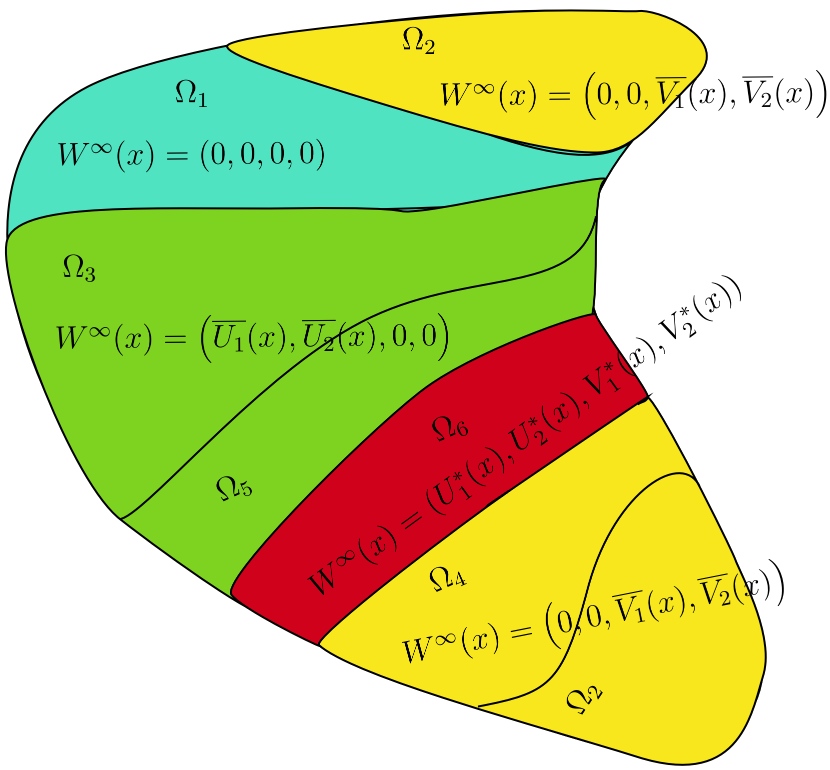

Figura 5.2: Representación del teorema para un ejemplo de Ω

Demostración. Para probar el teorema primero se probarán algunos lemas previos. Para mayor comodidad, se denotará F_1, F_2, F_3 y F_4 a las cuatro ecuaciones del sistema (5.4).

Lema 5.2.11 *Sea $x_0 \in \Omega_6\cup\Omega_3\cup\Omega_5$, entonces existe $d_0>0, \rho_0>0$, y una función $(\underline{w}_0(x,x_0))_{(1,2)} > (0,0)$ en $B(x_0,\rho_0)$, para los cuales $\underline{w}_0(x,x_0)$ es subsolución con el orden alternado, con condiciones del tipo Neumann en sus dos últimas componentes y para todo $0<d_1,d_2,d_3,d_4<d_0$.*

Demostración. Sea $n(x_0) = (n_1(x_0), n_2(x_0))$ el vector propio positivo normalizado del problema de valores propios (5.19):

$$
\left\{\begin{array}{l}
s(x_0)n_2(x_0) - (s(x_0)+a(x_0)+b(x_0)\overline{V_1}(x_0))n_1(x_0) = \varTheta(x_0)n_1(x_0)\\
r(x_0)n_1(x_0) - (e(x_0)+f(x_0)\overline{V_2}(x_0))n_2(x_0) = \varTheta(x_0)n_2(x_0)
\end{array}\right. \tag{5.19}
$$

Tiene asociado un valor propio principal $\Theta(x_0) > 0$, para $x_0 \in \Omega_6 \cup \Omega_3 \cup \Omega_5$, $\Theta(x_0) = 0$, cuando $x_0 \in \{x \in \overline{\Omega} | s(x)r(x) = (s(x) + a(x))e(x)\}$ y negativa en el resto.

Sea $\delta > 0$ y pequeño. Al igual que en el caso de 1 especie, se puede tomar $\rho_0 > 0$ tal que $B(x_0, \rho_0) \subset \Omega_3 \cap \Omega_5 \cup \Omega_6$ y $|a(x) - a_0| < \delta$, $|\hat{r}(x) - \hat{r}_0| < \delta$, $|\hat{s}(x) - \hat{s}_0| < \delta$, $|e(x) - e_0| < \delta$, $|b(x)\overline{V_1}(x) - b_0\overline{V_{10}}| \leq \delta$ y $|f(x)\overline{V_2}(x) - f_0\overline{V_{20}}| \leq \delta$ para todo $x \in B(x_0, \rho_0)$, donde ϕ_0 denota a $\phi(x_0)$, para cada función $\phi()$.

Si $x_0 \in \Omega$, $\eta(x, x_0)$ es la función propia asociada al valor propio principal del problema auxiliar (5.13). Usando la Proposición 1.3.4, garantiza la existencia de esta función siempre positiva, salvo en la frontera. Para los casos en que $x_0 \in \partial\Omega$, $\eta(x, x_0)$ es la función propia asociada al valor propio principal del problema auxiliar (5.15), utilizando la Proposición 1.3.5, esta existe y siempre es positiva, salvo en la parte de la frontera que se anula. Adicionalmente se normalizará $\eta(x, x_0)$, para que $\max_{x \in \overline{\Omega}} \eta(x, x_0) = 1$

Notando que $h_{i+2}(x, \varepsilon_1) \geq \overline{V_i}(x) + \varepsilon_1 q_m > \overline{V_i}(x) + \mu_1$, para todo $\mu_1 < \varepsilon_1 q_m$, donde $q_m = \min_{i \in \{1,2\}} \min_{x \in \overline{\Omega}} q_i(x)$. Se puede tomar $\mu_1 < \dfrac{\varepsilon_1 q_m}{4}$, entonces usando la Proposición 5.2.9, por la convergencia uniforme de los semitriviales, existe un d_{m1} tal que si $d_1, d_2 < d_{m1}$, cumple que:

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |\overline{V_i}(x) - v_i^d(x)| < \mu_1$$

Por lo tanto tomando $d_1, d_2 < d_{m1}$: $h_{i+2}(x, \varepsilon_1) > \overline{V_i}(x) + 4\mu_1 > v_i^d(x) + 3\mu_1$, por monotonía del sistema $(w_1^d, w_2^d, w_3^d, w_4^d) \geq_K (0, 0, w_3^d, w_4^d)$, usando la unicidad de los equilibrios semitriviales del sistema con difusión y la convergencia de los sistemas de una sola especie, $(v_1^d, v_2^d) \geq_2 (w_3^d, w_4^d)$. Por lo tanto, juntando estas dos desigualdades, si $d_1, d_2 < d_{m1}$:

$$h_{i+2}(x, \varepsilon_1) > v_i^d(x) + 3\mu_1 \geq w_{i+2}^d(x) + 3\mu_1$$

se tiene que para cualquier equilibrios de coexistencia $(w_1^d, w_2^d, w_3^d, w_4^d)$.

Proposición 5.2.12 *Sea $x_0 \in \overline{\Omega}$, si existen $\delta_M > 0$ y $\zeta > 0$, tal que $\forall i \in \{1, 2\}$:*

$$\forall \delta \in (0, \delta_M), d_i \Delta \delta \eta(x, x_0) n_i(x_0) + F(x, \delta \eta(x, x_0) n(x_0), g_1(x), g_2(x)) > \zeta, \forall x \in B(x_0, \rho_0) \cap \overline{\Omega}$$

para $g_i(x) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})^+$, entonces para todo equilibrio de coexistencia $(w_1^d, w_2^d, w_3^d, w_4^d)$, tal que $(w_3^d(x), w_4^d(x)) \leq_2 (g_1(x), g_2(x))$, se tiene que:

$$(\delta_M f_1(x), \delta_M f_1(x), g_1(x), g_2(x)) \leq_K (w_1^d(x), w_2^d(x), w_3^d(x), w_4^d(x))$$

Demostración. Primero se probará el caso en que $x_0 \in \Omega$, pues esto garantiza que $B(x_0, \rho_0) \cap \partial\Omega = \emptyset$, también se tiene que $\eta(x, x_0)$ es la función del problema (5.13).

Tomando un equilibrio cualquiera $(w_1^d, w_2^d, w_3^d, w_4^d)$, si para todo punto $x_m \in B(x_0, \rho_0)$, se tiene que $w_i^d(x_m) > \delta_M \eta(x_m, x_0) n_i(x_0)$, el resultado está listo, para el caso contrario.

Se va a definir el conjunto $D := \{\delta \in (0, \delta_M] | \delta \eta(x, x_0) n_i(x_0) \leq w_i^d(x), \forall x \in \overline{\Omega}\}$, usando la ecuación (5.5), los $w_i^d(x)$ son positivos, junto con la continuidad sobre un compacto de $w_i^d(x)$, se tiene que:

$$w_m^d = \min_{i \in \{1,2\}} \min_{x \in \overline{\Omega}} \{w_i^d(x)\} > 0$$

por lo tanto $\delta = \dfrac{w_m^d}{2\max\{\max_{x\in\overline{\Omega}} f_1(x), \max_{x\in\overline{\Omega}} f_1(x)\}} \in D$, entonces $D \neq \emptyset$ y usando que es acotado superiormente, se tiene que el conjunto tiene supremo, llamándolo $\delta_S > 0$, para el cual $\exists x_S \in B(x_0,\rho_0) \subseteq \Omega, j \in \{1,2\}$ tal que $\delta_S \eta(x_S,x_0) n_j(x_0) = w_j^d(x_S)$.

Sin pérdida de generalidad $j = 1$

$$d_1 \Delta \delta_S \eta(x,x_0) n_1(x_0) + F_1(x, \delta_S \eta(x,x_0) n(x_0), g_1(x), g_2(x)) > 0, \forall x \in B(x_0,\rho_0)$$

Usando que el sistema es cooperativo respecto a la segunda componente y competitivo respecto a las otras dos:

$$d_1 \Delta \delta_S \eta(x,x_0) n_1(x_0) + F_1(x, \delta_S \eta(x,x_0) n_1(x_0), w_2^d(x), w_3^d(x), w_4^d(x)) > 0$$

Se puede definir $z(x) = w_1(x) - \delta_S \eta(x,x_0) n_1(x_0) \geq 0$ y $z(x_S) = 0$. Se puede observar que para $x \in B(x_0,\rho_0)^c$, $z(x) = w_1(x) > 0$, por lo que $z(x) > 0$, en $\partial B(x_0,\rho_0)$. Se define:

$$d_1 \Delta z + \rho(x) z, \forall x \in B(x_0,\rho_0) \text{ y } z > 0, \forall x \in \partial B(x_0,\rho_0)$$

Para $\rho(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial F_1}{\partial s_1}(x, \delta_S f_1(x) + t z(x), w_2^d(x), w_3^d(x), w_4^d(x)) dt$, como $\dfrac{\partial F_i}{\partial s_i} < 0$, se tiene que $\rho(x) < 0$.

Reemplazando z en $d_1 \Delta z + \rho z$, se tiene:

$$d_1 \Delta(w_1^d(x) - \delta_S f_1(x)) + F_1(x, w_1^d(x), w_2^d(x), w_3^d(x), w_4^d(x)) - F_1(x, \delta_S f_1(x), w_2^d(x), w_3^d(x), w_4^d(x))$$

Reemplazando que $(w_1^d(x), w_2^d(x), w_3^d(x), w_4^d(x))$ es equilibrio y se tiene que:

$$d_1 \Delta(-z) + \rho(-z) = (d_1 \Delta \delta_S f_1(x) + F_1(x, \delta_S f_1(x), w_2^d(x), w_3^d(x), w_4^d(x)) > 0 \text{ y } -z \leq 0$$

Por lo tanto como $(-z)(x_S) = 0$, se contradice el Teorema 1.2.4 y se obtiene el resultado.

Para el caso en que $x_0 \in \partial\Omega$, la demostración es similar, pero hay que realizar el cambio de $\eta(x,x_0)$ del problema auxiliar (5.15).

De igual manera se puede definir $\delta_S > 0$, para el cual $\delta_S \eta(x,x_0) n_i(x_0) \leq w_i^d(x)$ y $\exists x_S \in B(x_0,\rho_0) \cap \overline{\Omega}, j \in \{1,2\}$ tal que $\delta_S \eta(x_S,x_0) n_j(x_0) = w_j^d(x_S)$, pero ahora existe la posibilidad que $x_S \in B(x_0,\rho_0) \cap \overline{\Omega}$, pues en esa parte de la frontera $\eta(x,x_0)$ tiene condiciones del tipo Neumann.

Ahora utilizando el mismo argumento anterior sobre $\overline{B(x_0,\rho_0)}$, se tiene que:

$$d_1 \Delta(-z) + \rho(-z) = (d_1 \Delta \delta_S f_1(x) + F_1(x, \delta_S f_1(x), w_2^d(x), w_3^d(x), w_4^d(x)) > 0 \text{ y } -z \leq 0$$

Por lo tanto como $(-z)(x_S) = 0$, si $x_S \in \Omega$ se contradice el Teorema 1.2.4 y se obtiene el resultado. Por otra parte si $x_S \in \partial\Omega$ se contradice el Teorema 1.2.5 y también se obtiene el resultado. $\square$

Extendiendo la función $\eta(x, x_0)$, por 0 para $x \notin B(x_0, \rho_0)$.

$$\begin{aligned} F_3(x, \delta_1\eta(x, x_0)n(x_0), h_{3,4}(x, \varepsilon_1)) =& \varepsilon_1 q_1(x)(\Gamma(x) - b(x)\delta_1\eta(x, x_0)n_1(x_0) - b(x)\varepsilon_1 q_1(x)) \\ &- \delta_1\eta(x, x_0)n_1(x_0)h_3(x, \varepsilon_1) \end{aligned}$$

Usando que $q_m = \min\{q_{1m}, q_{2m}\} > 0$ y $\Gamma(x) \leq 0$.

$$F_3(x, h(x, \varepsilon_1), \delta_1\eta(x, x_0)n(x_0)) < \tau < 0$$

De igual manera

$$F_4(x, \delta_1\eta(x, x_0)n(x_0), h_{3,4}(x, \varepsilon_1)) < \tau < 0$$

Proposición 5.2.13 *Si existen un par de funciones continuas $(s_1(x), s_2(x))$ y un $\zeta > 0$, tal que $F_i(x, g_1(x), g_2(x), s_1(x), s_2(x)) < -\zeta$, para $i \in \{3, 4\}$, entonces $\forall \epsilon > 0$ existen $\hat{s}_1(x), \hat{s}_2(x) \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, tal que:*

$$s_1(x) < \hat{s}_1(x) < s_1(x) + \epsilon, s_2(x) < \hat{s}_2(x) < s_2(x) + \epsilon, \frac{\partial \hat{s}_i}{\partial n} = 0$$

y

$$F_i(x, g_1(x), g_2(x), \hat{s}_1(x), \hat{s}_2(x)) < -\frac{\zeta}{2}$$

Demostración. Por continuidad uniforme de las funciones $F_i()$ (continuas definidas en un compacto), se pueden tomar $0 < \tau = \dfrac{\zeta}{2}$ y existe un $0 < \rho$, tal que si $\sup_{x\in\Omega} \|s_i(x) - f_i(x)\| < \rho < \epsilon$, entonces: $\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|F_i(x, f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)) - F(x, s_1(x), s_2(x), g_1(x), g_2(x))\| < \tau$ Utilizando el Corolario 1.3.3,se puede tomar: $\hat{s}_i(x)$, tal que cumpla estas condiciones y $s(x) < \hat{s}_i(x) < s_i(x) + \dfrac{\rho}{2}$, por lo tanto utilizando que $\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|s_i(x) - \hat{s}_i(x)\| < \rho$, entonces:

$$F_3(x, g_1(x), g_2(x), \hat{s}_1(x), \hat{s}_2(x)) < -\frac{\zeta}{2} \text{ y } F_4(x, g_1(x), g_2(x), \hat{s}_1(x), \hat{s}_2(x)) < -\frac{\zeta}{2}$$

□

Usando la proposición anterior, junto con la continuidad de las funciones $h_3(x, \varepsilon_1)$ y $h_4(x, \varepsilon_1)$, para $\zeta = \tau$, con lo que existe un $\gamma_1 \in (0, \varepsilon_1)$ tal que $\exists \hat{h_i}(x, \varepsilon_1) \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, $h_i(x, \varepsilon_1) < \hat{h_i}(x, \varepsilon_1) < h_i(x, \varepsilon_1) + \gamma_1$, $\dfrac{\partial \hat{h_i}}{\partial n}(x, \varepsilon_1) = 0$, para los cuales

$$F_i(x, \delta_1\eta(x, x_0)n(x_0), \hat{h_{3,4}}(x, \varepsilon_1)) < \frac{\tau}{2} < 0$$

Tomando $d_3, d_4 < -\dfrac{\tau}{4\max_{i\in\{1,2\}}\{\max_{x\in\overline{\Omega}} |\Delta\hat{h_i}(x, \varepsilon_1)|\}}$, se tiene que:

$$d_i\Delta\hat{h_i}(x, \varepsilon_1) + F_i(x, \delta_1\eta(x, x_0)n(x_0), \hat{h_{3,4}}(x, \varepsilon_1)) < \frac{\tau}{4} < 0$$

Ahora estudiando el resto de las componentes, para los valores $x \in B(x_0, \rho_0)^c$, se tiene que

$F_1 = F_2 = 0$, para los $x \in B(x_0, \rho_0)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} F_1(x, \delta_1\eta(x, x_0)n(x_0), \hat{h_{3,4}}(x, \varepsilon_1)) =& \delta_1\eta(\Theta(x_0)n_1(x_0) + (r(x) - r_0)n_2(x_0) - (s(x) - s_0)n_1(x_0) \\ & - (a(x) - a_0)n_1(x_0) - \delta_1\eta(x, x_0)n_1(x_0) \\ & - (b(x)\overline{V_1}(x) - b(x_0)\overline{V_1}(x_0))n_1(x_0) - b(x)\varepsilon_1 h_3(x)) \\ & - b(x)(\hat{h_3}(x, \varepsilon_1) - h_3(x, \varepsilon_1)) \end{aligned}$$

Tomando $b_M = \max_{x \in \overline{\Omega}} b(x)$

$$F_1(x, \hat{h_1}(x, \varepsilon_1), \hat{h_2}(x, \varepsilon_1), \delta_1\eta(x, x_0)n(x_0)) > \delta_1\eta(\Theta(x_0)n_1(x_0) - 4\delta - \delta_1 - 2b_M\varepsilon_1)$$

Tomando $\delta, \delta_1, \varepsilon_1 < \dfrac{\Theta(x_0)n_1(x_0)}{10 + 4b_M}$, se tiene que

$$F_1(x, \delta_1\eta(x, x_0)n(x_0), \hat{h_{3,4}}(x, \varepsilon_1)) > \frac{\delta_1\eta\Theta(x_0)n_1(x_0)}{2}$$

Tomando $d_1 < \dfrac{\Theta(x_0)n_1(x_0)}{4\lambda}$ lo que se tiene que:

$$d_1\Delta\delta_1\eta(x, x_0)n_1(x_0) + F_1(x, \delta_1\eta(x, x_0)n(x_0), \hat{h_{3,4}}(x, \varepsilon_1)) > \frac{\delta_1\eta(\Theta(x_0)n_1(x_0)}{4} > 0$$

Similarmente tomando $\delta, \delta_1, \varepsilon_1 < \dfrac{\Theta(x_0)n_2(x_0)}{10 + 2f_M}$ y $d_2 < \dfrac{\Theta(x_0)n_2(x_0)}{4\lambda}$, se tiene que:

$$d_2\Delta\delta_1\eta(x, x_0)n_2(x_0) + F_2(x, \delta_1\eta(x, x_0)n(x_0), \hat{h_{3,4}}(x, \varepsilon_1)) > \frac{\delta_1\eta(\Theta(x_0)n_2(x_0)}{4} > 0$$

Por lo tanto, se puede definir:

$$\underline{w_0}(x, x_0) = (\delta_1\eta(x, x_0)n(x_0), \hat{h_{3,4}}(x, \varepsilon_1)) \leq_K w^d$$

la subsolución para $d_0 > 0$ tal que $d_1, d_2, d_3, d_4 < d_0$, cumpla las 4 condiciones.

□

Lema 5.2.14 *Sea $x_0 \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_4$, entonces existe $d_0 > 0, \rho_0 > 0$, y una función $(\underline{w}_0(x, x_0)) = (0, 0, \hat{h_{3,4}}(x, \varepsilon_1)) \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, con condiciones del tipo Neumann, en sus dos últimas componentes. $\overline{w}_0(x, x_0)$ es subsolución con el orden alternado, para todo $0 < d_1, d_2, d_3, d_4 < d_0$*

Demostración. La demostración es similar a la primera parte del Lema 5.2.11, solo considerando las restricciones de la función $F_3, F_4 < 0$, pues $F_1 = F_2 = 0$. □

Estos dos resultados tienen sus análogos invirtiendo las componentes:

Corolario 5.2.15 *Sea $x_0 \in \Omega_6 \cup \Omega_2 \cup \Omega_4$, entonces existe $d_0 > 0, \rho_0 > 0$, y una función $\overline{w}_0(x, x_0)_{(3,4)} > 0$ en $B(x_0, \rho_0)$, para los cuales $\overline{w}_0(x, x_0) = (\hat{h_{1,2}}(x, \varepsilon_2), \delta_2\eta_2(x, x_0)m(x_0)) \in$*

$\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ *tiene condiciones del tipo Neumann en sus dos primeras componentes, en la frontera y es supersolución con el orden alternado para todo* $0 < d_1, d_2, d_3, d_4 < d_0$.

Corolario 5.2.16 *Para los* $x_0 \in \Omega_1 \cup \Omega_3 \cup \Omega 5$*, entonces existe* $d_0 > 0, \rho_0 > 0$*, y una función* $\overline{w}_0(x, x_0) = (\hat{h_{1,2}}(x, \varepsilon_2), 0, 0) \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ *tiene condiciones del tipo Neumann en sus dos primera componentes, en la frontera y es supersolución con el orden alternado para todo* $0 < d_1, d_2, d_3, d_4 < d_0$.

Demostración. Estos últimos 2 corolarios, son análogos a los resultados previos al intercambiar las primeras dos componentes, con las últimas 2. □

Por lo tanto hay 4 casos :

Para el 1)$x_0 \in \Omega_1$ se tomará:

$$\begin{aligned}\overline{w_0}(x, x_0) =&(\hat{h_1}(x, \varepsilon_2), \hat{h_2}(x, \varepsilon_2), 0, 0)\\ \underline{w}_0(x, x_0) =&(0, 0, \hat{h_3}(x, \varepsilon_1), \hat{h_4}(x, \varepsilon_1))\end{aligned}$$

Para el 2)$x_0 \in \Omega_2 \cap \Omega_4$ se tomará:

$$\begin{aligned}\overline{w_0}(x, x_0) =&(\hat{h_1}(x, \varepsilon_2), \hat{h_2}(x, \varepsilon_2), \delta_2 \eta_2(x, x_0) n(x_0))\\ \underline{w}_0(x, x_0) =&(0, 0, \hat{h_3}(x, \varepsilon_1), \hat{h_4}(x, \varepsilon_1))\end{aligned}$$

Para el 3)$x_0 \in \Omega_3 \cap \Omega_5$ se tomará

$$\begin{aligned}\overline{w_0}(x, x_0) =&(\hat{h_1}(x, \varepsilon_2), \hat{h_2}(x, \varepsilon_2), 0, 0)\\ \underline{w}_0(x, x_0) =&(\delta_1 \eta(x, x_0) m(x_0), \hat{h_3}(x, \varepsilon_1), \hat{h_4}(x, \varepsilon_1))\end{aligned}$$

Para el 4)$x_0 \in \Omega_6$ se tomará

$$\begin{aligned}\overline{w_0}(x, x_0) =&(\hat{h_1}(x, \varepsilon_2), \hat{h_2}(x, \varepsilon_2), \delta_2 \eta_2(x, x_0) n(x_0))\\ \underline{w}_0(x, x_0) =&(\delta \eta(x, x_0) m(x_0), \hat{h_3}(x, \varepsilon_1), \hat{h_4}(x, \varepsilon_1))\end{aligned}$$

Tomando los operadores $D = diag(d_1, d_2, d_3, d_4)$, $L = diag(\Delta, \Delta, \Delta, \Delta)$. . Sea $K > 0$ tal que $K + \partial_{s_i} F_i(x, u, v) > 0$, para todo $0 \leq u_1, u_2, v_1, v_2 \leq M$, se puede definir $z = \overline{w_k}(x, x_0)$, como la única solución del problema lineal.

$$\begin{aligned}-DLz + Kz =&Ky + F(x, y) \text{ en } \Omega\\ \frac{\partial z}{\partial n} =&0 \text{ en } \partial\Omega\end{aligned}$$

Con $y = \overline{w_{k-1}}(x, x_0)$ Análogamente definimos $\underline{w_k}(x, x_0)$, en función de $\underline{w_{k-1}}(x, x_0)$.

Lema 5.2.17 *Si para $x_0 \in \overline{\Omega}$, $\exists \rho_0$, tal que: $\underline{w_0}(x,x_0)_{(1,2)} \geq (0,0)$, para todo $x \in B(x_0,\rho_0)$, para todo k, se obtendrá que $\underline{w_k}(x,x_0) \ll_K \underline{w_{k+1}}(x,x_0)$ en $\overline{\Omega}$, en caso de que $\underline{w_0}(x,x_0)_{(1,2)} = (0,0)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, se tiene que $(\underline{w_k}(x,x_0))_{(3,4)} \gg_2 (\underline{w_{k+1}}(x,x_0))_{(3,4)}$ en $\overline{\Omega}$ y constante en las otras dos.*

Si para $x_0 \in \Omega$, $\exists \rho_0$, tal que: $\overline{w_0}(x,x_0)_{(3,4)} > (0,0)$ para todo $x \in B(x_0,\rho_0)$,para todo k, se tiene que $\overline{w_{k+1}}(x,x_0) \ll_K \overline{w_k}(x,x_0)$ en $\overline{\Omega}$, en caso de que $\overline{w_0}(x,x_0)_{(3,4)} = (0,0)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, se tiene que $(\overline{w_{k+1}}(x,x_0))_{(1,2)} \ll_2 (\overline{w_k}(x,x_0))_{(1,2)}$ en $\overline{\Omega}$ y constante en las otras dos.

Para cualquier caso $\underline{w_k}(x,x_0) \ll_K \overline{w_k}(x,x_0)$.

Demostración. Para $x_0 \in \overline{\Omega}$, observando las dos últimas componentes, se tiene que $\forall x \in \overline{\Omega}$:

$$\begin{aligned}
-DL(\underline{w_1}(x,x_0) - \underline{w_0}(x,x_0)) + K(\underline{w_1}(x,x_0) - \underline{w_0}(x,x_0)) =& DL\underline{w_0}(x,x_0) + F(x,\underline{w_0}(x,x_0)) \ll_2 (0,0) \\
\nabla(\underline{w_1}(x,x_0) - \underline{w_0}(x,x_0))_i \cdot n =& 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega
\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando el Teorema 1.2.5 en cada componente, se obtiene que:

$$(\underline{w_0}(x,x_0))_{(3,4)} \gg_2 (\underline{w_1}(x,x_0))_{(3,4)}$$

Por otro lado para las primeras dos componentes, si para $x \in B(x,\rho_0)$, se tiene que:

$$(\underline{w_0}(x,x_0))_{(1,2)} \gg_2 (0,0)$$

entonces para todo punto de la bola:

$$\begin{aligned}
-DL(\underline{w_1}(x,x_0) - \underline{w_0}(x,x_0)) + K(\underline{w_1}(x,x_0) - \underline{w_0}(x,x_0)) =& DL\underline{w_0}(x,x_0) + F(x,\underline{w_0}(x,x_0)) \gg_2 (0,0) \\
(\underline{w_1}(x,x_0))_{(1,2)} - (\underline{w_0}(x,x_0))_{(1,2)} \gg_2& (0,0) \qquad \forall x \in \partial B(x_0,\rho_0)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Teorema 1.2.4 en cada componente, se obtiene que:

$$(\underline{w_1}(x,x_0))_{(1,2)} \gg_2 (\underline{w_0}(x,x_0))_{(1,2)}$$

En todo $\overline{\Omega}$, pues para afuera de la bola, la inicial es nula y la iteración estrictamente positiva.

Por inducción, si para $(\underline{w_{k-1}}(x,x_0))_{(3,4)} \gg_2 (\underline{w_k}(x,x_0))_{(3,4)}$, entonces analizando las últimas 2 componentes:

$$\begin{aligned}
-DL(\underline{w_{k+1}}(x,x_0) - \underline{w_k}(x,x_0)) + K(\underline{w_{k+1}}(x,x_0) - \underline{w_k}(x,x_0)) =& K(\underline{w_k}(x,x_0) - \underline{w_{k-1}}(x,x_0)) \\
&+ F(x,\underline{w_k}(x,x_0)) - F(x,\underline{w_{k-1}}(x,x_0)) \\
&\ll_2 (0,0) \\
\nabla(\underline{w_{k+1}}(x,x_0) - \underline{w_k}(x,x_0))_i \cdot n = 0&
\end{aligned}$$

Por lo tanto, nuevamente por el Teorema 1.2.5 en cada componente:

$$(\underline{w_k}(x,x_0))_{(3,4)} \gg_2 (\underline{w_{k+1}}(x,x_0))_{(3,4)}$$

Para el caso en que las otras componentes no son nulas, si se supone que:

$$(\underline{w_{k-1}}(x,x_0))_{(1,2)} \ll_2 (\underline{w_k}(x,x_0))_{(1,2)}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
-DL(\underline{w_{k+1}}(x,x_0) - \underline{w_k}(x,x_0)) + K(\underline{w_{k+1}}(x,x_0) - \underline{w_k}(x,x_0)) =& K(\underline{w_k}(x,x_0) - \underline{w_{k-1}}(x,x_0)) \\
&+ F(x,\underline{w_k}(x,x_0)) - F(x,\underline{w_{k-1}}(x,x_0)) \\
&\gg_2 (0,0) \\
\nabla(\underline{w_{k+1}}(x,x_0) - \underline{w_k}(x,x_0))_i \cdot n = 0&
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Teorema 1.2.5 en cada componente:

$$(\underline{w_k}(x,x_0))_{(1,2)} \ll_2 (\underline{w_{k+1}}(x,x_0))_{(1,2)}$$

Con lo que se obtiene que:

$$\underline{w_k}(x,x_0) \ll_K \underline{w_{k+1}}(x,x_0)$$

De manera similar se obtiene que:

$$\overline{w_{k+1}}(x,x_0) \ll_K \overline{w_k}(x,x_0)$$

Como ya se probo para cualquier equilibrio w:

$$\underline{w_0}(x,x_0) \ll_K w \ll_K \overline{w_0}(x,x_0)$$

Se tiene que $\underline{w_0}(x,x_0) \ll_K \overline{w_0}(x,x_0)$, caso base para $k=0$.

Si $\underline{w_0}(x_0)_{(1,2)} = (0,0)$, entonces como la solución de este problema lineal elíptico es única y por ende $\underline{w_k}(x,x_0)_{(1,2)} = (0,0)$. Similar con $\overline{w_0}(x_0)_{(3,4)} = (0,0)$.

Para el caso en que ambas inicialmente no son siempre nulas, si para $\underline{w_k}(x,x_0) \ll_K \overline{w_k}(x,x_0)$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
-DL(\overline{w_{k+1}}(x,x_0) - \underline{w_{k+1}}(x,x_0)) + K(\overline{w_{k+1}}(x,x_0) - \underline{w_{k+1}}(x,x_0)) =& K(\overline{w_k}(x,x_0) - \underline{w_k}(x,x_0)) \\
&+ F(x,\overline{w_k}(x,x_0)) - F(x,\underline{w_k}(x,x_0)) \\
&\gg_K (0,0,0,0) \\
\nabla(\overline{w_{k+1}}(x,x_0) - \underline{w_{k+1}}(x,x_0)) \cdot n = 0&
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por lo que usando el Teorema 1.2.5 en cada componente, se concluye que:

$$\underline{w_k}(x,x_0) \ll_K \overline{w_k}(x,x_0)$$

La demostración anterior es más sencilla, si para algunas componentes es siempre 0, pues ya se probo que la iteración es siempre nula y la otra es siempre estrictamente positiva, por lo tanto la desigualdad se tiene siempre.

$\square$

Lema 5.2.18 *Si $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ es un equilibrio positivo, entonces para todo k,*

$$\underline{w_k}(x, x_0) \ll_K w \ll_K \overline{w_k}(x, x_0)$$

Demostración. Se tiene el caso base, para $k = 0$. Si $\underline{w_0}(x_0)_{(1,2)} = (0, 0)$ siempre, la demostración es directa, pues las componentes son estrictamente positivas siempre y por lo tanto la desigualdad se tiene siempre. Por lo que se estudiará el caso en que inicialmente no son siempre nulas, si para $\underline{w_k}(x, x_0) \ll_K w$, se tiene que:

$$\begin{aligned} -DL(w - \underline{w_{k+1}}(x, x_0)) + K(w - \underline{w_{k+1}}(x, x_0)) =& K(w - \underline{w_k}(x, x_0)) \\ &+ F(x, w) - F(x, \underline{w_k}(x, x_0)) \\ &>_K (0, 0, 0, 0) \\ \nabla(w - \underline{w_{k+1}}(x, x_0)) \cdot n = 0& \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando el Teorema 1.2.5 en cada componente: $\underline{w_{k+1}}(x, x_0) \ll_K w$. De manera similar: $w \ll_k \overline{w_{k+1}}(x, x_0)$. $\square$

Definiendo $\overline{W_0}(x, x_0) = \overline{w_0}(x, x_0)$, $\underline{W_0}(x, x_0) = \underline{w_0}(x, x_0)$

$$\overline{W_{i+1}}(x, x_0) = \overline{W_i}(x, x_0) + \frac{F(x, \overline{W_i}(x, x_0))}{K} \text{ y } \underline{W_{i+1}}(x, x_0) = \underline{W_i}(x, x_0) + \frac{F(x, \underline{W_i}(x, x_0))}{K}$$

en Ω. Siguiendo las demostraciones de los lemas 5.6 y 5.7 [6], en $B(x_0, \rho_0) \cap \overline{\Omega}$ en vez de Ω, se obtienen los siguientes resultados.

Lema 5.2.19 *Para todo i, se tiene*

$$\underline{W_i}(x, x_0) \leq_K \underline{W_{i+1}}(x, x_0) \leq_K \overline{W_{i+1}}(x, x_0) \leq_K \overline{W_i}(x, x_0) \text{ en } B(x_0, \rho_0) \cap \overline{\Omega}$$

Las desigualdades son estrictas siempre que inicialmente un par de componentes no sea $(0, 0)$, entonces , $\underline{W_i}(x, x_0)$ y $\overline{W_i}(x, x_0)$ convergen localmente uniforme en $\overline{\Omega}$ a $W^\infty(x)$ cuando $i \to \infty$

Demostración. Repitiendo la demostración del Lema 5.6 en [6], pero solo de manera local en la bola, $\{\underline{W_i}(x, x_0)\}$ es monótono creciente (con el orden k) y acotado por $\overline{W_0}(x, x_0)$ y $\{\overline{W_i}(x, x_0)\}$ también es monótono creciente y acotado por $\underline{W_0}(x, x_0)$. Entonces, $\{\underline{W_i}(x, x_0)\} \to W^\infty$ puntualmente, el cual satisface $F(x, W^\infty) = 0$, i.e. es un equilibrio no negativo del sistema sin desplazamiento.

Si $x_0 \in \Omega_1$, entonces:

$$W^\infty(x) = (0, 0, 0, 0)$$

pues no hay otro equilibrio del sistema sin difusión y solo puede converger a $(0, 0, 0, 0)$.

Si $x_0 \in \Omega_3 \cap \Omega_5$, entonces:

$$W^\infty(x) = (\overline{U_1}(x), \overline{U_2}(x), 0, 0)$$

pues no hay coexistencia y

$$(0,0) \ll_2 (\underline{W_0}(x,x_0))_{(1,2)} \ll_2 (\underline{W_i}(x,x_0))_{(1,2)}$$

por lo tanto $\underline{W_i}(x,x_0)$ solo puede converger a $(\overline{U}_1(x), \overline{U}_2^*(x), 0, 0)$.

Si $x_0 \in \Omega_2 \cap \Omega_4$, es similar alternando los roles, se concluye que:

$$W^\infty(x) = (0, 0, \overline{V_1}(x), \overline{V_2}(x))$$

Si $x_0 \in \Omega_6$, entonces

$$W^\infty(x) = (U_1^*(x), U_2^*(x), V_1^*(x), V_2^*(x))$$

pues hay coexistencia y

$$(0,0) \ll_2 (\underline{W_0}(x,x_0))_{(1,2)} \ll_2 (\underline{W_i}(x,x_0))_{(1,2)}$$

y

$$(0,0) \ll_2 (\overline{W_0}(x,x_0))_{(3,4)} \ll_2 (\underline{W_i}(x,x_0))_{(3,4)}$$

por lo tanto $\underline{W_i}(x,x_0)$ solo puede converger a $(U_1^*(x), U_2^*(x), V_1^*(x), V_2^*(x))$.

Utilizando que $W^\infty(x)$ es una función continua, usando el Teorema 5.8 de [6], como las funciones son monótonas y convergen puntualmente a una función continua, se obtiene la convergencia uniforme en cada compacto de $B(x_0, \rho_0)$. □

Lema 5.2.20 *Para cada i cuando $d_1, d_2, d_3, d_4 \to 0$, se tiene que $\overline{w_i}(x,x_0)$ converge a $\overline{W_i}(x,x_0)$ y $\underline{w_i}(x,x_0)$ converge a $\underline{W_i}(x,x_0)$ localmente uniforme en $\overline{\Omega}$.*

Demostración. La demostración es el Lema 5.5 de [6], restringido a la bola $B(x_0,\rho_0) \cap \overline{\Omega}$. □

Finalmente, utilizando los lemas 5.2.19 y 5.2.20, junto con un argumento diagonal, se tiene que cualquier equilibrio w^d, se ve arrastrado a converger localmente uniforme a W^∞.

Por ende como $\overline{\Omega}$, es un compacto y se tiene la convergencia localmente uniforme de $w^d(x) \to W^\infty(x)$, se obtiene la convergencia uniforme para todo el conjunto, concluyendo la demostración. □

Conclusiones

En primer lugar, se pudo estudiar analíticamente el comportamiento del sistema (0.3) para distintos casos, utilizando las técnicas desarrolladas por Smith en [5], al probar la monotonía del sistema, para el orden inducido por el cono alternante K.

Durante la primera parte del capítulo 4, se aplicaron estas técnicas, principalmente los resultados de sistemas cooperativos irreductibles, logrando analizar el sistema a coeficientes constantes sin desplazamiento, de manera casi completa obteniéndose las condiciones de existencia de los diferentes equilibrios, junto con el comportamiento asintótico del sistema para las distintas combinaciones de los coeficientes, como se puede observar en la Tabla 4.1, la cual entrega un resumen de estas condiciones. Sin embargo, en este trabajo no se determinó el comportamiento asintótico de las soluciones en el caso en que $s = \hat{s}$ y $r = \hat{r}$. Para este caso, la dinámica de la solución depende de su condición inicial y las técnicas utilizadas solo permitieron capturar esta dependencia, en algunos subcasos particulares.

Posteriormente, al considerar el sistema con coeficientes constantes y desplazamiento, luego de varios intentos y demostraciones para algunos casos particulares (tasas de difusión grandes y algunas combinaciones interesantes) se obtuvo que para cualquier combinación de tasas de difusión, no existen equilibrios no constantes. Para obtener este resultado fue necesario apoyarse en los desarrollos del sistema sin difusión y las distintas formas del principio del máximo. También se caracterizó el comportamiento asintótico para soluciones con condiciones inciales positivas, excepto en el caso degenerado de $s = \hat{s}$ y $r = \hat{r}$.

El estudio del caso a coeficientes variables, en la subsección 5.2.1 permitió identificar completamente el comportamiento del sistema para el caso en que el valor propio principal de alguno de los problemas (5.7) o (5.8) es negativo, obteniéndose una convergencia para cualesquiera sean las tasas de difusión, esta convergencia será al $(0, 0, 0, 0)$, $(u_1^d, u_2^d, 0, 0)$ ó $(0, 0, v_1^d, v_2^d)$, dependiendo del subcaso en que se encuentre. Por otro lado, para el caso en que ambos valores propios son positivos, no se logro determinar si hay unicidad de los equilibrios de coexistencia.

Finalmente, se obtuvieron los resultados de la subsección 5.2.2. Primero, extendiendo el teorema probado en [1] para tasas pequeñas, para esto fue necesario utilizar el método de sub/supersoluciones de manera similar al trabajo de [6], junto con la creación de una subsolución, que permite abordar el comportamiento en la frontera y por tanto concluir convergencia uniforme de los equilibrios cuando sus difusiones convergen a 0, este resultado corresponde al Teorema 5.2.8. Posteriormente, para el caso de 2 especies se pudo realizar una generalización de estos resultados, considerando el orden inducido por el cono alternante K, en la construcción de las sub/supersoluciones. Para este estudio, fue necesario analizar diversos problemas de valores propios asociados a las linealizaciones en torno a los distintos equilibrios del sistema, junto con pedir una condición extra de regularidad a la frontera de Ω, con el fin aproximar de aproximar funciones continuas mediantes funciones $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, con condición de borde del tipo Neumann, obteniéndose el Teorema 5.2.10.

Una extensión natural de este trabajo era abordar otros casos límites para las difusiones de este sistema, por ejemplo $\min\{d_i\} \to \infty$, tal como fue realizado en [1], sin embargo, durante la elaboración de esta tesis, supimos que Cosner, Cantrell y Salako estaban estudiando estos casos, incluyendo el caso en que una de las especies en alguna de sus etapas era 0. Estos autores buscaban entender que estrategia de difusión era ventajosa en el caso en que los términos de reacción para ambas especies eran iguales.

El caso estudiado en este trabajo provee las bases para abordar comportamientos mas complejos, como por ejemplo, si ambas especies no solo difieren en sus tasas $s(x)$ y de $r(x)$, sino que tienen distintos coeficientes de competencia. Por ejemplo, para la primera ecuación $b(x)(u_1 + v_1)$, podría a ser $b(x)(u_1 + \lambda_1 v_1)$, con $0 < \lambda_1 < 1$ y para la tercera $b(x)(u_1 + v_1)$, por $b(x)(\lambda_2 u_1 + v_1)$, con $0 < \lambda_2 < 1$. Estudiar este sistema, buscando entender como los coeficientes de competencia introducidos pueden generar coexistencia, es un problema que planeamos abordar en el futuro.

Bibliografía

[1] R. Cantrell, C. Cosner, and S. Martínez, "Persistence for a two-stage reaction-diffusion system," *Mathematics*, vol. 8, 03 2020.

[2] R. Cantrell and C. Cosner, "Spatial ecology via reaction-diffusion equations," 01 2004.

[3] C. Cosner, "Reaction-diffusion-advection models for the effects and evolution of dispersal," 2014.

[4] X. He and W. Ni, "Global dynamics of the lotka-volterra competition-diffusion system: Diffusion and spatial heterogeneity i," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 69, 07 2015.

[5] H. L. Smith, "Monotone dynamical systems: An introduction to the theory of competitive and cooperative systems (mathematical surveys and monographs) by hal l. smith," 1995.

[6] K.-Y. Lam and Y. Lou, "Asymptotic behavior of the principal eigenvalue for cooperative elliptic systems and applications," *Journal of Dynamics and Differential Equations*, vol. 28, 03 2016.

[7] M. H. Protter and H. F. Weinberger, "Maximum principles in differential equations," 1967.

[8] C.-V. Pao, *Nonlinear parabolic and elliptic equations.* The Language of science, New York: Plenum Press, 1992.

[9] G. B. Folland, *Real analysis.* Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts, Nashville, TN: John Wiley & Sons, 2 ed., Mar. 1999.

[10] J. Nestruev, *Smooth Manifolds and Observables.* Graduate texts in mathematics, Cham, Switzerland: Springer Nature, 2 ed., Sept. 2020.

[11] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer, 1998.

[12] J. Ia-Melí, An, J. Rossi, and J. Sabina de Lis, "Existence and uniqueness of positive solutions to elliptic problems with sublinear mixed boundary conditions," *Communications in Contemporary Mathematics*, vol. 11, 08 2009.

[13] A. Berman and R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

[14] K.-Y. Lam and D. Munther, "A remark on the global dynamics of competitive systems on ordered banach spaces," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 144, 07 2015.

[15] S.-B. Hsu, H. L. Smith, and P. Waltman, "Competitive exclusion and coexistence for competitive systems on ordered banach spaces," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 348, pp. 4083–4094, 1996.

[16] K. Kishimoto and H. Weinberger, "The spatial homogeneity of stable equilibria of some reaction-diffusion systems on convex domains," *Journal of Differential Equations*, vol. 58, pp. 15–21, June 1985. Funding Information: * Partially supported by a Grant-in-Aid Japanese government. ' Partly supported by the National work originated during the author's Society for the Promotion of Science.