UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

SELECCIONES MEDIBLES Y APLICACIONES A FUNCIONALES INTEGRALES

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

JUAN GUILLERMO GARRIDO CARRASCO

PROFESOR GUÍA:
PEDRO PÉREZ AROS

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
EMILIO VILCHES GUTIÉRREZ
RAFAEL CORREA FONTECILLA
SEBASTIÁN DONOSO FUENTES

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por:
CMM ANID BASAL FB210005

SANTIAGO DE CHILE
2022

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO
DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
Y MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: **JUAN GUILLERMO GARRIDO CARRASCO**
FECHA: 2022
PROF. GUÍA: PEDRO PÉREZ AROS

SELECCIONES MEDIBLES Y APLICACIONES A FUNCIONALES INTEGRALES

En esta tesis, se extiende un resultado de Azagra y Ferrera (en [4]), el cual muestra que todo conjunto convexo y cerrado en un espacio de Banach separable puede expresarse como el conjunto de minimizadores de una función convexa, infinitamente diferenciable y positiva, esto se extiende a una versión aleatoria en un contexto de multifunciones, en donde, bajo ciertas hipótesis, se logra dar una representación suave de tal multifunción, además esto permite deducir resultados relacionados a la aproximación suave de multifunciones y funciones en algún sentido. Por otra parte, se extiende la fórmula de la conjugada de Fenchel de un funcional integral cuando el espacio de Banach es general (no necesariamente separable), y sus consecuencias directas.

El primer capítulo de esta tesis entrega herramientas preliminares que serán útiles para el posterior desarrollo. En el segundo capítulo se introduce el concepto de multifunción pseudo-débil semicontinua superior (p-w usc) para luego mostrar el resultado de representación suave de una multifunción aleatoria $M\colon \Omega \times H \rightrightarrows X$ que cumple dicha noción de semicontinuidad e hipótesis adicionales, además se describen casos particulares de ese Teorema y también se muestran resultados de aproximación suave de multifunciones y funciones que se deducen a partir del mismo. Por último, en el tercer capítulo se parte mostrando una fórmula de intercambio integral sobre el espacio de funciones continuas bajo el supuesto de semicontinuidad inferior de la multifunción epígrafo del integrand. Luego, se introduce la noción de Lusin integrand e integrand admisible, y enseguida se muestra la fórmula de la conjugada de Fenchel cuando el integrand es admisible en un Banach no necesariamente separable, luego, se calcula el ε-subdiferencial del funcional integral en el caso donde el funcional se define sobre el espacio de funciones p-integrables. Finalmente, se muestran algunas aplicaciones de los resultados previos, por una parte se muestra el cálculo del subdiferencial de Clarke del funcional integral. También se dan condiciones de optimalidad a un problema de cálculo de variaciones, y también se prueba la equivalencia de dos formulaciones referentes al sweeping process.

Dedicado a mi padre.

Agradecimientos

Quiero partir agradeciendo a mi Papá, Héctor, por su preocupación, apoyo, protección y cariño hasta sus últimos días, y por motivarme a estudiar desde muy pequeño. Te extrañamos mucho. También quiero agradecer a mi Mamá, Gladys y mi Hermana, Amanda, por ser tan lindas y darme su cálida compañía siempre. Sin el apoyo de ustedes, nada de esto sería posible.

Quiero agradecer también a Anita, mi pareja, por su apoyo, comprensión y cariño que me entrega día a día.

A mis viejos amigos, Seba y Carlos, por el fuerte lazo de amistad que nos une.

A mis amigos que conocí en la Universidad, Superman, Víctor, Nico, Juanca y Martín, por apañar, tanto en el estudio como en los ratos de ocio. Son tremendos.

A Juan Peypouquet y Jaime San Martín por dictar ramos en el DIM que fueron claves en mi formación.

También agradezco a Pedro Pérez, profesor guía de esta tesis, por la gigante disposición que tuvo para resolver dudas y aconsejarme en cada dirección que tomó este trabajo. Estoy muy agradecido de Emilio Vilches, por su ayuda en el transcurso de esta tesis, tanto en los temas desarrollados como en la redacción de esta, y también por sus valiosos consejos acerca del futuro. Extiendo mis agradecimientos a Rafael Correa y Sebastián Donoso por aceptar ser miembros de la comisión.

Tabla de Contenido

Introducción

Las multifunciones surgen de varias formas en problemas de optimización. Por ejemplo, si se considera la familia de problemas de optimización $(P_\lambda)_{\lambda \in Y}$ en un espacio de Banach X, una multifunción $L\colon Y \rightrightarrows X$ puede relacionar cada parámetro λ con el conjunto factible del problema P_λ, o también podría asociarle el conjunto de soluciones óptimas del problema P_λ, o en un problema de optimización cualquiera, la multifunción puede ser parte del conjunto factible. También surgen en el contexto de inclusiones diferenciales, dando una generalización a la típica ecuación diferencial, en donde se permite que la velocidad en cada punto pertenezca a un conjunto de valores factibles. En tales situaciones, es natural preguntarse como varía la multifunción a medida que varía el parámetro del dominio. De acá nacen diversas nociones de continuidad o medibilidad de multifunciones, y bajo alguna de estas hipótesis se intenta estudiar problemas que las relacionan.

Dada una multifunción M definida entre dos espacios con alguna estructura medible y/o topológica, una pregunta de interés es cuando existen selecciones, ya sean medibles o continuas. El Teorema de Kuratowski-Ryll Nardzewski (ver [38, Theorem 6.3.17]) prueba la existencia de selecciones medibles cuando la multifunción es medible y toma valores cerrados en un espacio Polaco, posteriormente se probó algo más general bajo la hipótesis de que la mutifunción sea grafo-medible y tome valores en un espacio de Suslin, este es el llamado Teorema de Yankov–von Neumann–Aumann (ver [38, Theorem 6.3.20]), por su generalidad, este teorema de selección es muy utilizado cuando la multifunción toma valores en un espacio de Banach separable. Cuando el espacio de llegada no es separable, son escasos los resultados en donde existen selecciones medibles en algún sentido. Sin embargo, Ernest Michael en [32] probó un resultado de selección continua bajo hipótesis de convexidad y continuidad. Más tarde, en [14, Corollary VII-13] se probó que una multifunción a valores en un espacio reflexivo (no necesariamente separable) cumpliendo hipótesis de continuidad bien particulares, tiene una selección medible.

Para dar condiciones de optimalidad a un problema de optimización $\min\{f(x)\colon x \in S\}$, típicamente si la función f no tiene propiedades de suavidad, es necesario conocer su subdiferencial (hay varias alternativas que se pueden tomar), además del cono normal del conjunto S, y de ahí derivar la conocida regla de Fermat: $0 \in \partial f(x) + N_S(x)$ si x es una solución local/-global del problema. El análisis variacional ofrece una extensa teoría que estudia el problema anterior en un contexto bastante general, la que comienza con el estudio de propiedades y reglas de cálculo para el cono normal de conjuntos y multifunciones, y luego pasar a definir el subdiferencial de una función usando el cono normal del epígrafo de la función, por lo tanto conocer propiedades de conos normales tiene gran importancia. Un caso en donde el cálculo del cono normal es explícito, es cuando este se representa como el conjunto de subnivel o de nivel de una función suave, que bajo ciertas hipótesis el cono normal está dado por el cono generado por los gradientes de la función en el punto dado, así que es bastante deseable tener una representación de conjuntos y multifunciones como conjuntos de nivel o subnivel de alguna función suave. Esto no siempre es posible, en espacios de Banach no separables existen ejemplos en donde el conjunto $\{0\}$ no se puede representar como los minimizadores de una función de clase $\mathcal{C}^2$ (ver, e.g., [21]), pero en un Banach separable, en [4, Theorem 1] se muestra que un conjunto convexo y cerrado siempre se puede representar como los minimizadores de una función convexa de clase C^∞.

Los funcionales integrales toman lugar en muchas áreas de la matemática, estos están definidos por

$$\mathcal{I}_f(x) := \int_T f(t, x(t)) d\mu, \ x \in \mathcal{X}$$

donde $\mathcal{X}$ es un espacio vectorial de funciones medibles desde un espacio de medida $(T, \mathcal{A}, \mu)$ y tomando valores en un Banach X, y $f\colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ es el integrand que define al funcional. Cuando f es un normal integrand (f_t es semicontinua inferior para todo $t \in T$ y f es $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$-medible) y X es un Banach separable, el problema de describir el subdiferencial (convexo, de Clarke, de Frechet) del funcional ha sido ampliamente estudiado, tomando como punto de partida el cálculo de la conjugada de Fenchel en un espacio dual adecuado. Rockafellar a finales de los años 60 en sus trabajos [43, 44] da un basto análisis en dimensión finita, cuya extensión a espacios separables se encuentran en [42]. A grandes rasgos, la técnica para derivar una fórmula explícita de la conjugada de Fenchel del funcional integral, consiste en considerar la multifunción que a cada $t \in T$ le asocia el conjunto de subnivel de la función $f(t, \cdot)$ en $\alpha(t)$ donde $\alpha\colon T \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible, como f es un normal integrand, esta multifunción es medible con valores cerrados, y gracias a que el espacio es separable, tiene una selección medible, este es el paso clave en la demostración, y justamente si el espacio no es separable, asegurar la existencia de una selección medible no es trivial. Cuando la multifunción toma valores débil compactos, es posible asegurar la existencia de selecciones medibles con hipótesis bien particulares (ver [12, Theorem 2.5]), pero como bien se sabe, los conjuntos de subnivel de funciones propias no son acotados necesariamente, por tanto la multifunción no tomará valores débil compactos en general. Así que, el estudio de este problema en el plano general, requiere una investigación previa acerca de selecciones medibles para una multifunción que toma valores en un Banach no necesariamente separable.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se darán antecedentes preliminares, acerca de definiciones, resultados conocidos que serán útiles en este trabajo y la notación que será usada posteriormente.

1.1. Elementos de Análisis

1.1.1. Topología

Sea (X, τ) un espacio topológico. Normalmente no se le otorgará un símbolo a la topología, simplemente se hablará de abiertos en el espacio en cuestión. Dado $A \subset X$, los conjuntos $\mathrm{cl}(A), \mathrm{int}(A), \mathrm{bd}(A)$ denotarán la clausura, interior y frontera de A, respectivamente. Dado $x \in X$, se define el conjunto $\mathcal{N}_x = \{U \subset X : U \text{ es abierto con } x \in U\}$, a los conjuntos de $\mathcal{N}_x$ se les llamará vecindades de x.

Para un espacio topológico (X, τ) y un subconjunto $A \subset X$, se define la topología traza en A, como la familia $\tau_A = \{A \cap U : U \in \tau\}$. Se verifica que τ_A es una topología en A. Para referirse a los elementos de τ_A, simplemente se dirán abiertos de A.

Dados dos espacios topológicos X e Y, el conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ denotará el espacio de las funciones continuas de X en Y.

Sea (T, d) un espacio métrico. Si $A \subset T$ es un subconjunto no vacío, se define la función distancia al conjunto A como

$$d(x; A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\},$$

también se define

$$N(A, \varepsilon) = \{y \in T : d(y; A) < \varepsilon\}.$$

Se dice que un subconjunto $A \subset T$ es acotado si existe $x_0 \in T$ tal que $\sup\{d(x, x_0) : x \in A\} < \infty$.

Definición 1.1.1 Sea X un espacio topológico.

- Se dice que $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es un recubrimiento de X si $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$. Cuando cada U_α es abierto, se dice que $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es un recubrimiento abierto de X.

- Dados los recubrimientos de X, $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ y $(V_\beta)_{\beta\in\Gamma}$, se dice que $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es un *refinamiento* de $(V_\beta)_{\beta\in\Gamma}$ si para todo $\alpha \in \Lambda$ existe $\beta \in \Gamma$ tal que $U_\alpha \subset V_\beta$.
- Un recubrimiento $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de X se dice *localmente finito* si para todo $x \in X$, existe $U \in \mathcal{N}_x$ tal que U intersecta sólo a un número finito de conjuntos en $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$.

Un espacio topológico de Hausdorff se dice *paracompacto*, si todo recubrimiento abierto $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de X tiene un refinamiento localmente finito.

Proposición 1.1.2 Un espacio métrico (T, d) es un espacio paracompacto.

DEMOSTRACIÓN. [46] □

En la siguiente definición se muestra la noción de partición de la unidad.

Definición 1.1.3 Sea X un espacio topológico. Si $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es un recubrimiento abierto de X, se dice que una familia de funciones continuas $\{f_\alpha : X \to [0,1]\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una *partición de la unidad subordinada al recubrimiento* $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ si

(a) La familia $(\operatorname{supp}(f_\alpha))_{\alpha\in\Lambda}$ es un recubrimiento localmente finito de X.

(b) $\sum_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha(x) = 1$, para todo $x \in X$.

(c) Para todo $\alpha \in \Lambda$, $\operatorname{supp}(f_\alpha) \subset U_\alpha$.

donde $\operatorname{supp}(f) := \operatorname{cl}(\{x \in X : f(x) \neq 0\})$.

Teorema 1.1.4 Sea (T, d) un espacio métrico, dado un recubrimiento abierto $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, entonces existe una partición de la unidad subordinada a $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$.

DEMOSTRACIÓN. En [18, Theorem 4.2, chap. VIII] se prueba el resultado cuando T es paracompacto y con la Proposición 1.1.2, se concluye. □

Sea (T, d) un espacio métrico, si $A, B \subset T$ son cerrados y no vacíos, se define

$$\operatorname{Haus}(A, B) := \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(B, \varepsilon) \text{ y } B \subset N(A, \varepsilon)\}.$$

Notar que esta cantidad puede valer ∞. Se define

$$\mathcal{K} := \{A \subset T : A \text{ es cerrado, acotado y no vacío}\},$$

para $A, B \in \mathcal{K}$ se tiene que $\operatorname{Haus}(A, B) < \infty$. Acerca de este espacio y esta función, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.1.5 Sea (T, d) un espacio métrico, con $\mathcal{K}$ y $\operatorname{Haus}(\cdot, \cdot)$ definidos igual que antes, entonces $(\mathcal{K}, \operatorname{Haus})$ es un espacio métrico y para todo $A, B \in \mathcal{K}$,

$$\operatorname{Haus}(A, B) = \sup_{x\in T} |d(x; A) - d(x; B)|.$$

Demostración. Es claro que si $A, B \in \mathcal{K}$, entonces $\mathrm{Haus}(A, B) = \mathrm{Haus}(B, A)$, y si $\mathrm{Haus}(A, B) = 0$ entonces $A \subset N(B, \varepsilon)$ y $B \subset N(A, \varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$, de acá sigue que, como A, B son cerrados, $A \subset B$ y $B \subset A$, entonces $A = B$. Por otra parte, sean $A, B \in \mathcal{K}$. Sea $x \in T$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathrm{Haus}(A, B) + \varepsilon/2 \geq \delta,$$

de donde se tiene que $A \subset N(B, \delta)$ y $B \subset N(A, \delta)$. Luego, existe $y \in B$ tal que

$$d(x; B) + \varepsilon/2 \geq d(x, y).$$

Luego, para todo $z \in A$

$$d(x; A) - d(x; B) \leq d(x, z) - d(x, y) + \varepsilon/2 \leq d(y, z) + \varepsilon/2.$$

Luego, $d(x; A) - d(x; B) \leq d(y; A) + \varepsilon/2$ pero $y \in N(A, \delta)$ entonces $d(y; A) < \delta$, luego

$$d(x; A) - d(x; B) \leq d(y; A) + \varepsilon/2 < \delta + \varepsilon/2 \leq \mathrm{Haus}(A, B) + \varepsilon,$$

análogamente se prueba que $d(x; B) - d(x; A) \leq \mathrm{Haus}(A, B) + \varepsilon$ por lo tanto, para todo $x \in T$ y $\varepsilon > 0$ se tiene que $|d(x; A) - d(x; B)| \leq \mathrm{Haus}(A, B) + \varepsilon$ y así $\sup_{x \in T} |d(x; A) - d(x; B)| \leq \mathrm{Haus}(A, B) + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ por lo tanto $\sup_{x \in T} |d(x; A) - d(x; B)| \leq \mathrm{Haus}(A, B)$. Ahora, se define $\eta := \sup_{x \in T} |d(x; A) - d(x; B)|$, notar que $\max\{\sup_{x \in A} d(x; B), \sup_{y \in B} d(y; A)\} \leq \eta$, luego $A \subset N(B, \eta + \varepsilon)$ y $B \subset N(A, \eta + \varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$, por lo tanto $\eta + \varepsilon \geq \mathrm{Haus}(A, B)$ para todo $\varepsilon > 0$, luego $\eta \geq \mathrm{Haus}(A, B)$, así se concluye que

$$\mathrm{Haus}(A, B) = \sup_{x \in T} |d(x; A) - d(x; B)|.$$

Luego, sean $A, B, C \in \mathcal{K}$, entonces si $x \in T$

$$|d(x; A) - d(x; B)| \leq |d(x; A) - d(x; C)| + |d(x; C) - d(x; B)| \leq \mathrm{Haus}(A, C) + \mathrm{Haus}(C, B).$$

Por lo tanto, $\mathrm{Haus}(A, B) \leq \mathrm{Haus}(A, C) + \mathrm{Haus}(C, B)$. Así, $(\mathcal{K}, \mathrm{Haus})$ es un espacio métrico. $\square$

1.1.2. Análisis Funcional

A menos que se diga lo contrario, $(X, \|\cdot\|)$ y $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ denotarán un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$ y un espacio de Hilbert con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, respectivamente. El espacio dual de X se denotará por X^* y su norma inducida por X en este espacio viene dada por

$$\|\ell\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|}, \ \ell \in X^*.$$

La bola con centro en x y radio $r > 0$ será denotada por $\mathbb{B}_r(x) = \{y \in X : \|y - x\| \leq r\}$ y en este caso se tiene que

$$\mathrm{int}(\mathbb{B}_r(x)) = \{y \in X : \|y - x\| < r\}.$$

Dado un conjunto no vacío $A \subset X$, la función soporte de A está definida por

$$\begin{aligned} \sigma_A \colon X^* &\to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ x^* &\mapsto \sup_{x \in A} \langle x^*, x \rangle. \end{aligned}$$

Cuando $A \subset X^*$, la función soporte de A es definida sobre X por $\sigma_A(x) = \sup_{x^* \in A} \langle x^*, x \rangle$.

Dado $S \subset X$, se denota por $\operatorname{span}(S)$ al subespacio vectorial más pequeño que contiene a S.

Para un espacio de banach X, se define sobre este la topología más pequeña que hace que cada elemento $x^* \in X^*$ sea una función continua de X en $\mathbb{R}$, a esta se le denomina la topología débil y es denotada por $\sigma(X, X^*)$, esta tiene por base a los conjuntos $\bigcap_{i \in I} \{x \in X \colon |\langle x_i^*, x - x_0 \rangle| < \varepsilon\}$ para I finito, $x_i^* \in X^*$, $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. La convergencia esta caracterizada de la siguiente manera: La secuencia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x en la topología $\sigma(X, X^*)$ si y solamente si para todo $x^* \in X^*$, $\lim_{n \to \infty} \langle x^*, x_n \rangle = \langle x^*, x \rangle$. Se dice que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge débil a x, y se denota por $x_n \rightharpoonup x$.

Sobre X^*, se puede definir la topología más pequeña que hace que los funcionales lineales $(\ell_x \colon X^* \to \mathbb{R})_{x \in X}$ definidos por $\ell_x(x^*) = \langle x^*, x \rangle$, sean continuos. Esta topología es llamada la topología débil*, es denotada por $\sigma(X^*, X)$ y tiene por base a los conjuntos $\bigcap_{i \in I} \{x^* \colon |\langle x^* - x_0^*, x_i \rangle| < \varepsilon\}$ para I finito, $x_i \in X$, $x_0^* \in X^*$ y $\varepsilon > 0$. Cuando una secuencia $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x^* en la topología $\sigma(X^*, X)$, equivale a que para cada $x \in X$, $\lim_{n \to \infty} \langle x_n^*, x \rangle = \langle x^*, x \rangle$. Se dice que $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ converge débil* a x^*, y se denota por $x_n \overset{*}{\rightharpoonup} x$.

Los siguientes resultados, son las formas geométricas del Teorema de Hanh-Banach [47, Theorem 3.4].

Teorema 1.1.6 (Teorema de Hanh-Banach, primera forma geométrica) Sea X un espacio de Banach. Sean $A, B \subset X$, dos conjuntos convexos y no vacíos tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Se asume además que uno de ellos es abierto. Entonces, existen $\ell \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\ell(x) \leq \alpha \leq \ell(y), \ \forall x \in A, \forall y \in B.$$

Teorema 1.1.7 (Teorema de Hanh-Banach, segunda forma geométrica) Sea X un espacio de Banach. Sean $A, B \subset X$, dos conjuntos convexos, cerrados y no vacíos tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Se asume además que uno de ellos es compacto. Entonces, existen $\ell \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tal que

$$\ell(x) + \varepsilon \leq \alpha \leq \ell(y), \ \forall x \in A, \forall y \in B.$$

Teorema 1.1.8 (Teorema del Grafo Cerrado) Sean X, Y espacios de Banach. Si $T \colon X \to Y$ es una función lineal que cumple que su grafo dado por $\{(x, y) \in X \times Y : y = Tx\}$ es cerrado en $X \times Y$. Entonces T es continuo.

Demostración. [19, Theorem 5.12]. □

Definición 1.1.9 Un espacio de Asplund X, es un espacio de Banach que cumple la siguiente propiedad: Cada subespacio separable $Y \subset X$, tiene dual Y^* separable.

1.2. Elementos de Análisis Convexo

Sea X un espacio de Banach. Primero que todo, se define la recta real extendida por $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Con respecto a esto, se asumirán las siguiente convenciones: $\infty + (-\infty) = (-\infty) + \infty = \infty$, $0 \cdot \infty = 0 \cdot (-\infty) = 0$.

Una función $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ se dice *convexa* si

$$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in (0,1) \colon f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Para una función cualquiera $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ se definen los siguientes conjuntos:

- El epígrafo de f:
$$\operatorname{epi} f := \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \colon f(x) \leq \alpha\}.$$

- El epígrafo estricto de f:
$$\operatorname{epi}_s f := \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \colon f(x) < \alpha\}.$$

- El conjunto de subnivel en $\lambda \in \mathbb{R}$ de f:
$$[f \leq \lambda] := \{x \in X \colon f(x) \leq \lambda\}$$

- El dominio de f:
$$\operatorname{dom} f := \{x \in X \colon f(x) < \infty\}.$$

- El soporte de f:
$$\operatorname{supp} f := \operatorname{cl}(\{x \in X \colon f(x) \neq 0\}).$$

Proposición 1.2.1 Sea $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función.

- f es convexa si y solo si su epígrafo es un conjunto convexo.
- Si f es convexa, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $[f \leq \lambda]$ es convexo.

Demostración. [5, Proposition 8.4, Corollary 8.5]. □

Definición 1.2.2 Una función $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ se dice

- semicontinua inferior (lsc) en x si para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda < f(x)$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{B}_\delta(x)$ se tiene que $f(y) > \lambda$. Si f es lsc en todo $x \in X$ entonces se dice que f es lsc.

- semicontinua superior (usc) en x si para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda > f(x)$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{B}_\delta(x)$ se tiene que $f(y) < \lambda$. Si f es usc en todo $x \in X$ entonces se dice que f es usc.

De la definición anterior, se deduce que, f es lsc si y solo si $-f$ es usc.

Proposición 1.2.3 Sea $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

(a) f es lsc.

(b) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $[f \leq \alpha]$ es un conjunto cerrado en X.

(c) $\operatorname{epi} f$ es cerrado en $X \times \mathbb{R}$.

(d) Para todo $x \in X$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ secuencia tal que $x_n \to x$, se tiene que

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x).$$

Demostración. [5, Lemma 1.24]. □

Sea $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función cualquiera. Se define la envoltura semicontinua inferior de f, denotada por $\operatorname{cl} f$, como la mayor función lsc que minora a f, esto es:

$$\operatorname{cl} f(x) := \sup\{\phi(x)\colon \phi\colon X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ es lsc y } \phi \leq f\}.$$

Proposición 1.2.4 Sean $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones. Entonces, g es la envoltura semicontinua inferior de f si y sólo si $\operatorname{epi} g = \operatorname{cl}(\operatorname{epi} f)$.

Demostración. Suponga que $g = \operatorname{cl} f$, luego claramente g es lsc, por tanto $\operatorname{epi} g$ es cerrado y además $g \leq f$ entonces $\operatorname{cl}(\operatorname{epi} f) \subset \operatorname{epi} g$. Para ver la inclusión opuesta, sea $(\hat{x}, \hat{\alpha}) \in \operatorname{epi} g$, si $(\hat{x}, \hat{\alpha}) \notin \operatorname{cl}(\operatorname{epi} f)$, se tiene que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{B}_\varepsilon(\hat{x})$ y $\alpha \in (\hat{\alpha} - \varepsilon, \hat{\alpha} + \varepsilon)$ se tiene que $f(x) > \alpha$, luego, es posible definir la siguiente función

$$\phi(x) := \begin{cases} \hat{\alpha} + \varepsilon/2 & \text{si } x \in \{y \in X\colon \|y - \hat{x}\| < \varepsilon\}, \\ \min\{\hat{\alpha} + \varepsilon/2, g(x)\} & \text{si } x \in \{y \in X\colon \|y - \hat{x}\| = \varepsilon\}, \\ g(x) & \text{si } x \in \{y \in X\colon \|y - \hat{x}\| > \varepsilon\}. \end{cases}$$

por construcción, $\phi \leq f$ y ϕ es lsc, luego $\phi(\hat{x}) \leq g(\hat{x}) \leq \hat{\alpha}$, lo que es una contradicción, luego $(\hat{x}, \hat{\alpha}) \in \operatorname{cl}(\operatorname{epi} f)$, y entonces $\operatorname{epi} g = \operatorname{cl}(\operatorname{epi} f)$. Para ver la implicancia opuesta, se supone que $\operatorname{epi} g = \operatorname{cl}(\operatorname{epi} f)$, por lo probado recién, se tiene que $\operatorname{cl}(\operatorname{epi} f) = \operatorname{epi} \operatorname{cl} f$, por tanto $\operatorname{epi} g = \operatorname{epi} \operatorname{cl} f$, luego $g = \operatorname{cl} f$ y se concluye. □

Una función $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ se dice propia si $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ y $f(x) > -\infty$ para todo $x \in X$. El conjunto de funciones $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ que son convexas y lsc es denotado por $\Gamma(X)$. Además, se define

$$\Gamma_0(X) := \Gamma(X) \cap \{f\colon X \to \overline{\mathbb{R}} | f \text{ es propia}\},$$

es decir, el conjunto de las funciones propias, convexas y lsc.

Lema 1.2.5 Sea $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función tal que $f \in \Gamma(X)$ y existe $\overline{x} \in X$ tal que $f(\overline{x}) = -\infty$, entonces f no toma valores finitos.

Demostración. Si existe $x \in X$ tal que $|f(x)| < \infty$, entonces se observa que si $t \in (0, 1)$ entonces

$$f(t\overline{x} + (1-t)x) \leq tf(\overline{x}) + (1-t)f(x) = -\infty$$

esto prueba que si $t_n \to 0^+$ entonces $\liminf_{n\to\infty} f(t_n\overline{x} + (1-t_n)x) = -\infty$, pero como f es lsc entonces $\liminf_{n\to\infty} f(t_n\overline{x} + (1-t_n)x) \geq f(x)$ pero esto contradice que $|f(x)| < \infty$, sigue que f no toma valores finitos. □

Para un conjunto $S \subset X$, se define su función indicadora como

$$\delta_S(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \in S, \\ \infty & \text{si } t \notin S. \end{cases}$$

Dado un problema de optimización $\min\{f(x) \colon x \in X\}$ donde $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función, se dirá que $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ es una solución local de dicho problema, si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{B}_\varepsilon(\overline{x})$, $f(x) \geq f(\overline{x})$.

1.2.1. Conjugada de Fenchel

Para una función $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, se define la conjugada de Fenchel de f como

$$\begin{aligned} f^* \colon X^* &\to \overline{\mathbb{R}} \\ x^* &\mapsto \sup_{x \in X} \langle x^*, x \rangle - f(x). \end{aligned}$$

Es claro que $f^* \in \Gamma(X^*)$. De la definición, es evidente que para todo $x \in \operatorname{dom} f$ y $x^* \in X^*$:

$$f^*(x^*) + f(x) \geq \langle x^*, x \rangle.$$

La desigualdad anterior se le conoce como la *desigualdad de Fenchel-Young*. Notar que si $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ entonces para todo $x^* \in X^*$, $f^*(x^*) > -\infty$, por otro lado si $\operatorname{dom} f = \emptyset$ entonces $f^* \equiv -\infty$, otro caso es cuando $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ y f no es propia, en ese caso se tiene que $f^* \equiv \infty$. Respecto a cuando la función conjugada resulta ser propia, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.2.6 $f^* \in \Gamma_0(X^*)$ si y sólo si $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ y existe $x^* \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq \langle x^*, x \rangle + \alpha$ para todo $x \in X$.

Demostración. Si $f^* \in \Gamma_0(X^*)$, entonces existe $x^* \in X^*$ tal que $f^*(x^*) \in \mathbb{R}$ luego para todo $x \in X$, $f(x) \geq \langle x^*, x \rangle - f^*(x^*)$. Recíprocamente, si existe $x^* \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq \langle x^*, x \rangle + \alpha$ para todo $x \in X$, entonces $f^*(x^*) \leq -\alpha$ y $f^*(x^*) > -\infty$, y así por el Lema 1.2.5 se concluye. $\square$

1.2.2. Teoría de Subdiferenciales

Para $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $x \in X$ tal que $|f(x)| < \infty$, define la derivada direccional de f en x en la dirección h como

$$f'(x; h) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}, \tag{1.1}$$

cuando este limite existe. Si $f'(x; \cdot) \in X^*$, se dice que f es Gâteaux-diferenciable en x, y si además el límite definido en (1.1) existe uniformemente en h, se dice que f es Fréchet-diferenciable (o diferenciable) en x, y su derivada en x es denotada por $Df(x)$. Si f es convexa, el límite definido en (1.1) siempre existe en $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ pues la función $t \mapsto \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$ es creciente en $(0, \infty)$.

Se dirá que una función $f \colon X \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^k$ si esta es k veces diferenciable y su k-ésima derivada es continua en todo $x \in X$. Si para todo k, la función es de clase $\mathcal{C}^k$, se dirá que la función es de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Sea $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $\varepsilon \geq 0$, se define el *ε-subdiferencial* de f en x, donde $|f(x)| < \infty$, como el conjunto

$$\partial_\varepsilon f(x) := \{x^* \in X^* \colon f(y) + \varepsilon \geq f(x) + \langle x^*, y - x\rangle, \forall y \in X\}.$$

Cuando $|f(x)| = \infty$, se define $\partial_\varepsilon f(x) := \emptyset$. Si $\varepsilon = 0$, $\partial_0 f(x)$ representa al subdiferencial convexo. Una observación importante es que si $-\infty \in f(X)$, entonces $\partial_\varepsilon f(x) = \emptyset$ para todo $x \in X$. Para $S \subset X$ con $x \in S$, se define el ε-cono normal de S en x, como

$$N_S^\varepsilon(x) := \partial_\varepsilon \delta_S(x) = \{x^* \in X \colon \langle x^*, y - x\rangle \leq \varepsilon, \forall y \in S\}.$$

Si $\varepsilon = 0$, $N_S^0(x)$ es llamado el cono normal convexo de S en $x \in S$.

Esta es la noción de subdiferencial más conocida, y cuando se trata de de funciones convexas no necesariamente diferenciables, generaliza bien la noción de derivada, en donde los resultados clásicos de optimización diferenciable se siguen cumpliendo. Cuando la convexidad no se tiene, es necesario generalizar la noción anterior. Existen varias formas de hacerlo, acá se definen algunas de ellas, las cuales coinciden cuando se mantiene la convexidad.

Definición 1.2.7 Sea $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función propia. Para $x \in \operatorname{dom} f$, se define el *subdiferencial de Fréchet de f en x* como el conjunto

$$\hat{\partial} f(x) = \left\{x^* \in X^* \colon \liminf_{\|h\| \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle x^*, h\rangle}{\|h\|} \geq 0\right\}.$$

Evidentemente, se tiene que $\partial_0 f(x) \subset \hat{\partial} f(x)$ para todo $x \in X$. Además, si f es convexa, entonces ambos subdiferenciales coinciden con el subdiferencial convexo. El siguiente resultado entrega una condición necesaria cuando una función tiene un mínimo local (ver [39, Theorem 4.12]).

Teorema 1.2.8 Sea $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función que alcanza un mínimo local en $x \in \operatorname{dom} f$, entonces $0 \in \hat{\partial} f(x)$.

Lamentablemente, el subdiferencial de Fréchet no posee reglas de cálculo directas para la suma y la composición. Afortunadamente, por aproximación, se puede definir un nuevo subdiferencial que cumple reglas de cálculo bastante cómodas en espacios de Asplund.

Definición 1.2.9 Sea X un espacio de Asplund. Sea $f\colon X \times \overline{\mathbb{R}}$ una función propia con $x \in \operatorname{dom} f$. El subdiferencial limiting de f en x, denotado por $\partial f(x)$, es el conjunto de todos los $x^* \in X^*$ para los cuales existe una secuencia $(x_n^*, x_n) \in X^* \times X$ tal que $x_n^* \in \hat{\partial} f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, x_n^* converge débil* a x^* y $(x_n, f(x_n)) \to (x, f(x))$.

Definición 1.2.10 Sea $S \subset X$. Se define el cono normal limiting de S en $x \in S$ como el conjunto $N_S(x) := \partial \delta_S(x)$, y si $x \notin S$, entonces se define $N_S(x) := \emptyset$.

Cuando S es un conjunto convexo, entonces, el cono normal limiting, coincide con el cono normal convexo ([39, Proposition 6.6]). En general, el cono normal limiting puede ser caracterizado de la siguiente manera:

Proposición 1.2.11 Sea $S \subset X$ con X un espacio de Asplund. Entonces se tiene que

$$N_S(x) = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda \partial d_S(x).$$

Con las hipótesis adecuadas, se cumple la regla de la suma para el subdiferencial limiting, como se muestra en el siguiente Teorema (ver [39, Theorem 6.22]):

Teorema 1.2.12 Sea X un espacio de Asplund. Si f es un función localmente Lipschitz alrededor de x (i.e. existe $\varepsilon > 0$ y $L > 0$ tal que f es L-Lipschitz en $\mathbb{B}_\varepsilon(x)$) y g es una función lsc en x y finita en x. Entonces

$$\partial(f+g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x).$$

También es posible dar una condición necesaria cuando una función tiene un mínimo local, usando el subdiferencial limiting.

Proposición 1.2.13 Sea $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función que tiene un mínimo local en $x \in \operatorname{dom} f$. Entonces $0 \in \partial f(x)$.

Demostración. Por el Teorema 1.2.8, se tiene que $0 \in \hat{\partial} f(x)$. Luego, según la Definición 1.2.9, basta escoger $(x_n^*, x_n) = (0, x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y se obtiene que $0 \in \partial f(x)$. $\square$

Definición 1.2.14 Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz alrededor de x. Se define la subderivada de Clarke de f en x, en la dirección v como

$$df(x; v) := \limsup_{y \to x,\ t \to 0^+} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t}.$$

Se tiene que $df(x; \cdot)$ es subaditiva, positivamente homogénea y además $df(\cdot; \cdot)$ es usc, como función de (x, v) (ver [16, Chapter 2, Proposition 1.1]). A partir de esto, se define el subdiferencial de Clarke.

Definición 1.2.15 Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz alrededor de x. Se define el subdiferencial de Clarke de f en x como el conjunto

$$\overline{\partial} f(x) := \{x^* \in X \colon df(x; v) \geq \langle x^*, v\rangle, \forall v \in X\}.$$

Acá también se tiene que $\partial_0 f(x) \subset \overline{\partial} f(x)$. La relación entre este objeto y el subdiferencial limiting está dado en el siguiente resultado (ver, e.g., [39, Theorem 6.10]).

Proposición 1.2.16 Sea X un espacio de Asplund. Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ y $x \in X$ tal que f es localmente Lipschitz alrededor de x. Entonces se tiene que $\overline{\partial} f(x) = \overline{\text{co}}^*(\partial f(x))$, donde $\overline{\text{co}}^*(A)$ es el convexo y débil* cerrado más pequeño que contiene a A.

1.2.3. Cuerpos Convexos

Definición 1.2.17 Un subconjunto $S \subset X$ se dice un cuerpo convexo $\mathcal{C}^\infty$ cuando S es un convexo, cerrado, de interior no vacío y $\operatorname{bd} S$ es una subvariedad $\mathcal{C}^\infty$ de codimensión 1.

Al respecto, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.2.18 Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^\infty$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Df(x) \neq 0$ para todo $x \in X$ que cumple que $f(x) = \lambda$. Entonces,

(a) El conjunto $\{x \in X\colon f(x) = \lambda\}$ es una subvariedad $\mathcal{C}^\infty$ de codimensión 1.

(b) Si además f es convexa y existe $\hat{x} \in X$ con $f(\hat{x}) < \lambda$, entonces el conjunto $\{x \in X\colon f(x) \leq \lambda\}$ es un cuerpo convexo $\mathcal{C}^\infty$.

Demostración. Para ver que $B := \{x \in X\colon f(x) = \lambda\}$ es una subvariedad $\mathcal{C}^\infty$, basta notar que si $Df(x) \neq 0$ para todo $x \in B$, entonces $f'(x)$ es sobreyectiva para todo $x \in B$, luego por [2, Proposition 2 & Definition 3, Chapter 2] se tiene directamente que B es una subvariedad $\mathcal{C}^\infty$ de codimensión 1.

Para probar (b), dado que f es convexa y continua, se tiene que $C := \{x \in X\colon f(x) \leq \lambda\}$ es un convexo cerrado, además como $f(\hat{x}) < \lambda$, dicho conjunto tiene interior no vacío. También, como f es convexa y continua, se tiene que $\operatorname{bd} C = B$, luego por lo recién probado, se tiene que C es un cuerpo convexo $\mathcal{C}^\infty$. □

1.3. Teoría de la Medida

1.3.1. Espacios medibles

Se dice que $(A, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra definida sobre A y μ es una medida definida sobre $\mathcal{A}$. A los conjuntos pertenecientes a $\mathcal{A}$ se les llama conjuntos medibles. Se dice que el espacio es de medida finita cuando $\mu(A) < \infty$. Cuando existe una secuencia de conjuntos medibles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\mu(A_n) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$ tal que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, se dice que el espacio de medida es σ-finito.

En un espacio de medida, un conjunto N se dice despreciable si existe $S \in \mathcal{A}$ con $\mu(S) = 0$ tal que $N \subset S$. Un espacio de medida se dice completo cuando todo conjunto despreciable es medible. Además, para un espacio de medida $(A, \mathcal{A}, \mu)$ cualquiera, se denota por $\overline{\mathcal{A}}$ a la sigma-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{A}$ y a todos los conjuntos despreciables.

Se dice que una función $f\colon A \to B$ es medible (donde $(B, \mathcal{B}, \nu)$ es un espacio de medida) si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

Cuando se dice que cierta propiedad se cumple μ-c.t.p. en A, quiere decir que existe $B \in \mathcal{A}$ con $\mu(A \setminus B) = 0$ tal que dicha propiedad se cumple en B.

Dado un espacio topológico X, se toma en él la σ-álgebra más que pequeña que hace que todos los abiertos de X sean medibles, esta σ-álgebra se denota por $\mathcal{B}(X)$ la cual es denominada la σ-álgebra de Borel, y los conjuntos medibles son llamados Borelianos. Cuando no se especifique la σ-álgebra sobre un espacio topológico, se asumirá que se trata de la σ-álgebra

Boreliana.

Para un conjunto $C \subset A$, se define la función indicatriz de C por

$$\mathbf{1}_C(t) := \begin{cases} 1 & \text{si } t \in C, \\ 0 & \text{si } t \notin C. \end{cases}$$

Claramente, $\mathbf{1}_C \colon A \to \mathbb{R}$ es medible si y solamente si C es un conjunto medible.

Sea X un espacio de Banach. Una función $s\colon A \to X$ se dice simple, si existen $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ disjuntos y $x_1, ..., x_n \in X$ tal que $s(t) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{1}_{A_k}(t)$. Una función $f\colon A \to X$ se dice fuertemente medible si esta es límite puntual (c.t.p.) de funciones simples. La noción de medibilidad y fuerte medibilidad coinciden cuando X es un espacio separable.
Una función $f\colon A \to X$ se dice débil medible, si para todo $x^* \in X$, la función $t \mapsto \langle x^*, f(t)\rangle$ es medible. Se dice que una función $f\colon A \to X^*$ es débil* medible si para todo $x \in X$, la función $t \mapsto \langle f(t), x\rangle$ es medible. Las nociones de fuerte medibilidad y débil medibilidad están relacionadas en el siguiente resultado (ver [17, Teorema II.2]):

Teorema 1.3.1 (Teorema de medibilidad de Pettis) Sea $(A, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y X un espacio de Banach. Una función $f\colon A \to X$ es fuertemente medible si y sólo si f es débil medible y existe $B \subset A$ con $\mu(A \setminus B) = 0$ tal que $f(B) \subset X$ es separable.

Una aplicación directa del Teorema anterior, es que la medibilidad fuerte se preserva bajo límite puntual.

Proposición 1.3.2 Sea $(A, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito. Sea $\{f_n\colon A \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de funciones fuertemente medibles, que convergen puntualmente c.t.p. a $f\colon A \to X$, entonces f es fuertemente medible.

Demostración. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una partición medible de A con $\mu(A_n) < \infty$ para todo n. Para $k \in \mathbb{N}$ fijo, por el Teorema 1.3.1, se tiene que, para todo n existe $B_n^k \subset A_k$ tal que $\mu(A_k \setminus B_n^k) = 0$ y $f_n(B_n^k)$ es separable. Se define $B^k = \bigcap_n B_n^k$, luego $\mu(A_k \setminus B^k) = 0$ y puede asumirse que $f = \lim f_n$ puntualmente en B^k, entonces $f(B^k)$ es separable. Además $A_k \ni t \mapsto \langle x^*, f(t)\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x^*, f_n(t)\rangle$ para todo $x^* \in X^*$, que es medible, así que por el Teorema 1.3.1 se tiene que $f\colon A_k \to X$ es fuertemente medible para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, existe una secuencia de funciones simples $(s_n^k\colon A_k \to X)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} s_n^k(t) = f(t)$ c.t.p. en A_k, por lo tanto se puede definir $\ell_m(t) = \sum_{j=1}^m s_m^j(t)\mathbf{1}_{A_j}$, que es una función simple y $\ell_m \to f$ c.t.p. en A, lo que prueba que f es fuertemente medible. $\square$

1.3.2. Integración

Para funciones medibles a valores reales, se usará la teoría de integración de Lebesgue (que es la usual). Para una función medible cualquiera $f\colon A \to \mathbb{R}$ se adoptará la siguiente convención acerca de la integral:

$$\int_A f(t)d\mu := \int_A \max\{f(t), 0\}d\mu + \int_A \min\{f(t), 0\}d\mu, \tag{1.2}$$

donde se asumirá que $\infty - \infty = \infty$. Luego, para que $\int_A f(t)d\mu \in \mathbb{R}$, necesariamente las dos integrales del lado derecho de (1.2) deben pertenecer a $\mathbb{R}$. Además, si $\int_A f(t)d\mu < \infty$ entonces $\int_A \max\{f(t), 0\}d\mu \in \mathbb{R}$.

Cuando se consideren funciones tomando valores en un Banach cualquiera, se ocupará la integral de Böchner, la cual está especialmente definida sobre funciones fuertemente medibles.

Para una función simple $s\colon A \to X$ definida por $s(t) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{1}_{A_k}(t)$, la integral se define naturalmente como

$$\int_A s(t)d\mu := \sum_{k=1}^n x_k \mu(A_k).$$

Se tiene que la integral actúa linealmente sobre las funciones simples, además haciendo uso de la desigualdad triangular, se tiene que para cada función simple s,

$$\left\| \int_A s(t)d\mu \right\| \leq \int_A \|s(t)\| d\mu.$$

Definición 1.3.3 Sea $f\colon A \to X$ una función fuertemente medible. Se dice que f es Bochner integrable o simplemente integrable, si existe una secuencia $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples tales que $s_n \to f$ c.t.p. y

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \|s_n(t) - f(t)\| d\mu = 0.$$

De esta manera, la integral de f se define por

$$\int_A f(t)d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_A s_n(t)d\mu.$$

Un ejercicio rutinario es probar que la definición anterior es independiente de la secuencia $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Para funciones reales, se definen los espacios

$$L^p(A) := \left\{ f\colon A \to \mathbb{R} \text{ medible con } \int_A |f(x)|^p d\mu < \infty \right\},$$

donde $p \in [1, \infty]$. Se sabe que $L^p(A)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_p := \left(\int_A |f(t)|^p d\mu \right)^{1/p},$$

si $p < \infty$, y $\|f\|_\infty := \inf\{\alpha\colon \alpha \geq |f(t)|\ \mu\text{-c.t.p}\}$ si $p = \infty$.

Para funciones $f\colon A \to X^*$ que son débil* medibles, la integral de Böchner no es posible utilizarla, por lo que es necesario tomar otro camino.

Lema 1.3.4 Sea $f\colon A \to X^*$ una función débil* medible tal que para todo $x \in X$, $t \mapsto \langle f(t), x\rangle$ es integrable, entonces para todo $E \in \mathcal{A}$, existe $x_E^* \in X^*$ tal que

$$\langle x_E^*, x\rangle = \int_E \langle f(t), x\rangle d\mu$$

o equivalentemente que $\int_E \langle f(t), \cdot \rangle d\mu \in X^*$.

Demostración. Para $E \in \mathcal{A}$, se define el funcional lineal $\ell \colon x \mapsto \langle f(\cdot), x\mathbf{1}_E \rangle$ entre X y $L^1(A)$, es claro que es lineal, y además tiene el grafo cerrado. En efecto, si $(x_n) \subset X$ y $g \in L^1(A)$ son tales que $x_n \to x \in X$ y $\langle f(\cdot), x_n\mathbf{1}_E \rangle \to g$ en $L^1(A)$, es posible extraer una subsecuencia tal que $\langle f(t), x_{n_k}\mathbf{1}_E(t) \rangle \to g(t)$ t-c.t.p. en A, pero es claro que $\langle f(t), x_{n_k}\mathbf{1}_E(t) \rangle \to \langle f(t), x\mathbf{1}_E(t) \rangle$ así que $g(t) = \langle f(t), x\mathbf{1}_E(t) \rangle$ t-c.t.p. y se concluye que el grafo de ℓ es cerrado. Por el Teorema 1.1.8 se tiene que ℓ es un funcional lineal continuo, así que existe $C > 0$ tal que para todo $x \in X$

$$\int_E |\langle f(t), x \rangle| \leq C\|x\|$$

esto prueba que $x \mapsto \int_E \langle f(t), x \rangle$ es un funcional lineal continuo, por tanto existe $x_E^* \in X^*$ tal que $\langle x_E^*, x \rangle = \int_E \langle f(t), x \rangle d\mu$ para todo $x \in X$. $\square$

De esta manera, para $f \colon A \to X^*$ débil* medible, se define la integral de Gelfand de f en $E \in \mathcal{A}$ como el elemento x_E^* dado por el Lema 1.3.4 y que se denota por $\int_E f(t) d\mu$, cuando no hay ambigüedad.

Un resultado famoso ([19, Theorem 2.24]) y que será útil en este trabajo es el siguiente.

Teorema 1.3.5 (Teorema de Convergencia Dominada) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, f \subset L^1(A)$ tal que

- $f_n \to f$ c.t.p.
- Existe una función $g \in L^1(A)$ tal que $|f_n| \leq g$ μ-c.t.p. para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $f \in L^1(A)$ y $\displaystyle\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

Como aplicación de lo anterior, se tiene el siguiente resultado en un espacio de medida σ-finito.

Proposición 1.3.6 Sea $(A, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito. Si $f \in L^1(A)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $B \in \mathcal{A}$ con $\mu(B) < \infty$ tal que

$$\int_{B^c} f(t) d\mu < \varepsilon.$$

Demostración. Como el espacio es σ-finito, existe una partición medible $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\mu(A_n) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$. Se define $B_n := \bigcup_{j=1}^n A_j$, entonces es claro que $f_n := f\mathbf{1}_{B_n} \to f$ μ-c.t.p. cuando $n \to \infty$ y además $|f_n(t)| \leq |f(t)|$ para todo $t \in A$, por tanto por el Teorema 1.3.5

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f(t) d\mu = \int_A f(t) d\mu,$$

luego existe N tal que para todo $n \geq N$ $|\int_{A\setminus B_n} f(t) d\mu| < \varepsilon$ de donde se concluye el resultado pues se observa que $\int_{B_N^c} f(t) d\mu < \varepsilon$ y $\mu(B_N) < \infty$. $\square$

Proposición 1.3.7 Sea $(A, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito y $f \colon A \to \mathbb{R}$ una función medible tal que existe $g \in L^1(A)$ con $f(t) \geq g(t)$ μ-c.t.p.. Entonces

$$\int_A f(t) d\mu = \sup \left\{ \int_A \phi(t) \colon \phi \in L^1(A) \text{ y } \phi(t) < f(t) \ \mu\text{-c.t.p.} \right\}.$$

Demostración. El supremo del lado derecho es evidentemente menor o igual que $\int_A f(t)d\mu$ por definición. Para ver la desigualdad no trivial, se procede estudiando dos casos:

- Caso 1: $\int_A f(t)d\mu < \infty$. Sea $(A_n)_n$ una partición medible de A con $\mu(A_n) < \infty$ para todo n. En este caso, para $\varepsilon > 0$, se define $\phi_\varepsilon(t) := \sum_{n\in\mathbb{N}}(f(t) - \frac{\varepsilon}{2^n\mu(A_n)})\mathbf{1}_{A_n}(t)$, luego se tiene que $\phi_\varepsilon(t) < f(t)$ para todo $t \in A$ y

$$\int_A \phi_\varepsilon(t)d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} \left(f(t) - \frac{\varepsilon}{2^n\mu(A_n)}\mathbf{1}_{A_n}(t)\right) d\mu = \int_A f(t)d\mu - \varepsilon.$$

  Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario y $\phi_\varepsilon \in L^1(T)$, se concluye la desigualdad deseada.

- Caso 2: $\int_A f(t)d\mu = \infty$. Se define $f^+ := \max\{f, 0\}$, en este caso se tiene que $\int_T f^+(t)d\mu = \infty$. Sea $B = \{t \in A\colon f^+(t) > 0\}$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $B_k := \{t \in B\colon f^+(t) < k\}$, luego si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una secuencia creciente de conjuntos medibles con $\mu(A_k) < \infty$ tal que $\bigcup_k A_k = A$, entonces $\bigcup_k A_k \cap B_k = B$. Sea

$$h_k(t) := \left(1 - \frac{1}{k}\right) f^+(t)\mathbf{1}_{A_k\cap B_k}(t).$$

  Por el Teorema de Convergencia Monótona ([19, Corollary 2.17]), se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \int_A h_k(t)d\mu = \int_A f^+(t)d\mu = \infty. \tag{1.3}$$

  Es claro que $h_k \in L^1(A)$ para todo k (por construcción) y $h_k > 0$ en $A_k \cap B_k$. Además por el Caso 1, existe $h \in L^1(A)$ tal que $h(t) < g(t)$ μ-c.t.p., luego, se define $f_k := h\mathbf{1}_{B^c} + h_k\mathbf{1}_B$, notar que si $t \in B^c$, entonces $f_k(t) = h(t) < g(t) \leq f(t)$ μ-c.t.p en B^c, ahora si $t \in B$, entonces $f(t) = f^+(t) > (1 - \frac{1}{k})f^+(t)$ para todo k, luego $f(t) > f_k(t)$ en B, y por (1.3)

$$\int_A f_k(t)d\mu = \int_{B^c} h(t)d\mu + \int_B h_k(t)d\mu \to \infty.$$

  Esto prueba la desigualdad deseada.

$\square$

Cuando se tiene una función $f \in L^1(A)$ (que le llamamos integrable), es válido el siguiente resultado útil (ver [49, Lema 3.3.4]):

Proposición 1.3.8 (Continuidad de la integral) Sea $f \in L^1(A)$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $B \in \mathcal{A}$ con $\mu(B) < \delta$, se tiene que $\displaystyle\int_B |f(t)|d\mu < \varepsilon$.

Proposición 1.3.9 Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(A)$ tal que $f_n \to f$ en $L^1(A)$. Luego, existe una subsecuencia $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $f_{n_k} \to f$ c.t.p.

Demostración. [19, Corollary 2.32] $\square$

El siguiente resultado muestra una desigualdad integral, conocida como la desigualdad de Hölder:

Proposición 1.3.10 Sean $p, q \in \mathbb{R}$ con $p \in [1, \infty]$ y $1/p + 1/q = 1$. Sea $f \in L^p(A)$ y $g \in L^q(A)$ entonces se tiene que

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demostración. [19, Chapter 6] □

Una aplicación del resultado anterior, es la siguiente proposición.

Proposición 1.3.11 Sea $(A, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita. Sea $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $p \geq k$, entonces si $f_1, ..., f_k \in L^p(A)$ se tiene que

$$\|f_1 \cdot ... \cdot f_k\|_1 \leq \mu(A)^{\frac{p-k}{p}} \|f_1 \cdot ... \cdot f_k\|_{p/k} \leq \mu(A)^{\frac{p-k}{p}} \|f_1\|_p \cdot ... \cdot \|f_k\|_p$$

Demostración. La aplicación sucesiva de la desigualdad de Hölder, permite obtener que

$$\|f_1 \cdot ... \cdot f_k\|_{p/k} \leq \|f_1\|_p \cdot ... \cdot \|f_k\|_p,$$

además, como el espacio es de medida finita, nuevamente por Hölder se tiene que

$$\|f_1 \cdot ... \cdot f_k\|_1 \leq \mu(A)^{\frac{p-k}{p}} \|f_1 \cdot ... \cdot f_k\|_{p/k}.$$

□

1.3.3. Teorema de Lusin

Se considera el espacio de medida $(A, \mathcal{A}, \mu)$, en donde se asumirá que A es un espacio métrico y que $\mathcal{B}(A) \subset \mathcal{A}$. Se dice que la medida μ es regular interna, si para cada $C \in \mathcal{A}$ con $\mu(C) < \infty$ y para cada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto compacto $K \subset C$ tal que $\mu(C \setminus K) < \varepsilon$. En este contexto, se tiene el siguiente resultado que relaciona la medibilidad y la continuidad de una función (ver [7, Teorema 7.1.13]):

Teorema 1.3.12 (Teorema de Lusin) Sea X un espacio de Banach separable y $f\colon A \to X$ una función medible. Entonces, para cada $C \in \mathcal{A}$ con $\mu(C) < \infty$ y $\varepsilon > 0$, existe un conjunto compacto $K \subset C$ tal que $\mu(C \setminus K) < \varepsilon$ y $f\colon K \to X$ es continua.

Si se asume que la función f sea fuertemente medible, entonces se puede quitar la hipótesis de separabilidad de X gracias al Teorema 1.3.1, y obtener el mismo resultado.

Corolario 1.3.13 Sea X un espacio de Banach y $f\colon A \to X$ una función fuertemente medible. Entonces, para cada $C \in \mathcal{A}$ con $\mu(C) < \infty$ y $\varepsilon > 0$, existe un conjunto compacto $K \subset C$ tal que $\mu(C \setminus K) < \varepsilon$ y $f\colon K \to X$ es continua.

Demostración. Sea $C \in \mathcal{A}$ con $\mu(C) < \infty$. Por el Teorema 1.3.1, se tiene que existe $B \subset C$ con $\mu(C \setminus B) = 0$ tal que $S := f(B)$ es separable. Sea $N := C \setminus B$. Se define el subespacio cerrado $Y := \mathrm{cl}(\mathrm{span}(S))$, claramente es un espacio de Banach, y como S es separable, entonces Y es separable, luego, se tiene que $f\colon B \to Y$ es medible, entonces, para $\varepsilon > 0$ se puede aplicar el Teorema 1.3.12, donde se obtiene un conjunto compacto $K \subset C \setminus N$ tal que $\mu((C \setminus N) \setminus K) < \varepsilon$ y $f\colon K \to Y$ es continua. Dado que $\mu(N) = 0$, se tiene que $\mu(C \setminus K) < \varepsilon$ y $f\colon K \to X$ es continua. □

Cuando la medida es regular interna, se puede obtener un resultado similar a la Proposición 1.3.6.

Proposición 1.3.14 Sea $(A, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito donde μ es regular interna. Si $f \in L^1(A)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe B compacto de medida finita tal que

$$\int_{B^c} f(t) d\mu < \varepsilon.$$

Demostración. En efecto, sea $\varepsilon > 0$, por la Proposición 1.3.6 existe $C \in \mathcal{A}$ con $\mu(C) < \infty$ tal que $\int_{C^c} f(t)d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$, además, por la continuidad de la integral (Proposición 1.3.8) se tiene que existe $\delta > 0$ tal que si $\mu(Y) < \delta$ entonces $\int_Y f(t)d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$. Como μ es regular interna, entonces existe $B \subset C$ compacto tal que $\mu(C \setminus B) < \delta$, por tanto

$$\int_{B^c} f(t)d\mu = \int_{C^c} f(t)d\mu + \int_{C\setminus B} f(t)d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

y se tiene el resultado. □

Si la medida es regular interna, entonces las funciones continuas de A en X resultan fuertemente medibles, como establece el siguiente resultado.

Proposición 1.3.15 Sea $(A, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito donde μ es regular interna. Sea $f \colon A \to X$ una función continua, entonces f es fuertemente medible.

Demostración. Sea $B \subset A$ con $B \in \mathcal{A}$ de medida finita. Como la medida es regular interna, entonces existe una secuencia disjunta $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compactos de medida finita tal que $\mu(B \setminus (\bigcup_n K_n)) = 0$. Como K_n es compacto, este es separable, luego por continuidad $f(K_n)$ es separable, y entonces $f(\bigcup_n K_n) = \bigcup_n f(K_n)$ es separable, además si $x^* \in X^*$, $t \mapsto \langle x^*, f(t)\rangle$ es continua y por tanto medible, luego por el Teorema 1.3.1, $f|_B$ es fuertemente medible. Entonces, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia creciente de conjuntos medible de medida finita con $A = \bigcup_n A_n$ entonces $f|_{A_n}$ es fuertemente medible y $f|_{A_n} \to f$ puntualmente y entonces por la Proposición 1.3.2, f es fuertemente medible. □

1.3.4. El espacio $L^p(A, X)$.

Para funciones fuertemente medibles, anteriormente se detalló la construcción de la integral de Böchner. Tomando en cuenta esto, es posible definir los espacios $L^p(A, X)$, de clases de equivalencia de la relación de igualdad de funciones μ-c.t.p., de la siguiente manera con $p \in [1, \infty]$:

$$L^p(A, X) := \{x \colon A \to X \text{ es fuertemente medible con } \|x(t)\|_p < \infty\},$$

donde $\|x\|_p := (\int_T \|x(t)\|^p d\mu)^{1/p}$, si $p < \infty$ y si $p = \infty$, $\|x\|_p := \inf\{\alpha \geq 0 \colon \alpha \geq \|x(t)\| \ \mu\text{-c.t.p.}\}$. Para $p \in [1, \infty]$, $x \mapsto \|x\|_p$ define una norma que además hace a $L^p(T, X)$ un espacio de Banach. Si $X = \mathbb{R}$, simplemente se denota $L^p(A)$.

Sobre $L^\infty(A, X)^*$ se definen las medidas singulares.

Definición 1.3.16 Un funcional $\lambda \in L^\infty(A, X)^*$ se dice que es una *medida singular respecto* a μ si satisface la siguiente propiedad: Para cada $S \in \mathcal{A}$ que puede ser escrito como unión numerable de conjuntos de medida finita, existe una secuencia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda|_{A_n\cap B} = 0$ para todo $B \in \mathcal{A}$ con $\mu(B) < \infty$ y $n \in \mathbb{N}$. En este caso, para $C \in \mathcal{A}$, $\lambda|_C$ está definida por $\lambda|_C(x) := \langle \lambda, x\mathbf{1}_C\rangle, \forall x \in L^\infty(A, X)$.

En el caso de estar en un espacio de medida σ-finito, la definición anterior puede simplificarse, como muestra el siguiente resultado:

Proposición 1.3.17 Si $(A, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida σ-finito, entonces $\lambda \in L^\infty(A, X)^*$ es una medida singular respecto a μ si y sólo si existe una secuencia $(A_n) \subset \mathcal{A}$ tal que $A_n \subset A_{n+1} \subset A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y $\lambda|_{A_n\cap B} = 0$ para todo $B \in \mathcal{A}$ con $\mu(B) < \infty$ y $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. La necesidad es clara pues como el espacio es σ-finito, A es una unión numerable de conjuntos de medida finita y basta aplicar la definición. Ahora se verá que es suficiente. Sea $S \in \mathcal{A}$ un conjunto que es unión numerable de conjuntos de medida finita, por un lado se tiene que existe $(A_n) \subset \mathcal{A}$ tal que $A_n \subset A_{n+1} \subset A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y $\lambda|_{A_n\cap B} = 0$ para todo $B \in \mathcal{A}$ con $\mu(B) < \infty$ y $n \in \mathbb{N}$, luego si se considera la secuencia $A'_n := A_n \cap S$, se tiene que $A'_n \subset A'_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, también se verifica que $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n$ y si $B \in \mathcal{A}$ con $\mu(B) < \infty$, entonces $\lambda|_{A'_n\cap B} = \lambda|_{A_n\cap(S\cap B)} = 0$ pues $\mu(S \cap B) \leq \mu(B) < \infty$ y entonces se concluye el resultado. $\square$

Si $f, g : A \to X^*$ son funciones débil* medibles, se define la relación de "igualdad débil" dada por $f \sim g \iff \forall x \in X, \langle f(t), x\rangle = \langle g(t), x\rangle$ μ-c.t.p.. Esta es una relación de equivalencia.

Definición 1.3.18 Sea $p \in [1, \infty]$. Se dice que una función $x^*\colon A \to X^*$ pertenece al conjunto $\mathcal{L}^p(A, X^*_{w^*})$ si esta es débil* medible y además existe $h \in L^p(A)$ tal que μ-c.t.p. $\|x^*(t)\| \leq h(t)$. Sobre este espacio se define la seminorma

$$N_p(x^*) := \inf\{\|h\|_p\colon h \in L^p(A) \text{ y } \mu\text{-c.t.p. } \|x^*(t)\| \leq h(t)\}.$$

A partir de $\mathcal{L}^p(A, X^*_{w^*})$, se define el espacio de clases de equivalencia con la igualdad débil, llamado $L^p(A, X^*_{w^*})$ con la norma $\|f\|_p := \inf\{N_p(g)\colon f \sim g\}$, donde siempre se escoge un único representante de cada clase de equivalencia.

Es bien conocido que el espacio dual de $L^p(A)$se identifica con $L^q(A)$ donde q el conjugado de p, es decir, cumple que $1/p+1/q = 1$ (donde $p < \infty$ y se exige que A sea σ-finito si $p = 1$, ver [19, p. 188]). Para X cualquiera, este resultado puede ser generalizado, como se muestra en el siguiente resultado (ver [25, p. 99] y [30, Theorem 4.1]):

Teorema 1.3.19 Sea A un espacio de medida σ-finito y X un espacio de Banach. Entonces, el espacio dual de $L^p(A, X)$ con $1 \leq p < \infty$ se identifica con $L^q(A, X^*_{w^*})$ (q es el conjugado de p). Para $p = \infty$, se tiene la siguiente caracterización de su dual

$$L^\infty(A, X)^* \cong L^1(A, X^*_{w^*}) \oplus L^{\text{sing}}(A, X),$$

es decir, si $p < \infty$, para todo $\Phi \in L^p(A, X)^*$ existe un único $x^* \in L^q(A, X^*_{w^*})$ tal que $\Phi = \int_A \langle x^*(t), \cdot\rangle d\mu$, y si $p = \infty$, para todo $\Phi \in L^\infty(A, X)^*$ existe únicos $x^* \in L^1(A, X^*_{w^*})$ y $\lambda \in L^{\text{sing}}(A, X)$ tal que $\Phi = \int_A \langle x^*(t), \cdot\rangle + \lambda$.

La caracterización anterior es bastante general, y será más cómodo el trabajo con funciones fuertemente medibles, que con funciones débil* medibles (más adelante se detallará que problema hay con esto). Al igual que en el caso real, se mostrará el caso en que se cumple la identificación de $L^p(A,X)^*$ con $L^q(A,X^*)$. Con este propósito, se introducen los siguientes conceptos.

Definición 1.3.20 Sea $\nu\colon \mathcal{A}\to X$, se dice que ν es

- una medida vectorial, si para cada secuencia disjunta $(A_n)\subset\mathcal{A}$ se tiene que

$$\nu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\nu(A_n).$$

- de variación acotada si

$$\sup\Big\{\sum_{B\in\pi}\|\nu(B)\|\colon \pi \text{ partición medible finita de } A\Big\}<\infty.$$

Además, si β es una medida definida en $\mathcal{A}$ y se cumple que si para cada $A\in\mathcal{A}$ con $\beta(A)=0$ entonces $\nu(A)=0$, se dice que ν es absolutamente continua con respecto a β y se denota por $\nu\ll\beta$.

Definición 1.3.21 Se dice que un espacio de Banach X satisface la propiedad de Radon-Nikodym si para cualquier espacio de medida $(A,\mathcal{A},\mu)$ completo y σ-finito y para cualquier medida vectorial $\nu\colon\mathcal{A}\to X$ que es de variación acotada y absolutamente continua respecto a μ, existe una función $f\in L^1(A,X)$ tal que para todo $B\in\mathcal{A}$ se tiene que $\nu(B)=\int_B f d\mu$.

La propiedad anterior es suficiente para que el dual de $L^p(A,X)$ se identifique con $L^q(A,X^*)$ cuando $p\in[1,\infty)$, como muestra el siguiente resultado demostrado en [17, Theorem 1, p. 98].

Teorema 1.3.22 Sea X un espacio de Banach tal que su dual X^* cumple la propiedad de Radon-Nikodym, entonces si $p\in[1,\infty)$ y q es su conjugado, el espacio dual de $L^p(A,X)$ se identifica con $L^q(A,X^*)$.

El caso $p=\infty$ mostrado en [30, Theorem 4.1], también puede ser simplificado cuando X^* cumple la propiedad de Radon-Nikodym.

Teorema 1.3.23 Sea X un espacio de Banach tal que su dual X^* cumple la propiedad de Radon-Nikodym, entonces el dual de $L^\infty(A,X)$ se identifica con $L^1(A,X^*)\oplus L^{\text{sing}}(A,X)$ con $L^{\text{sing}}(A,X)$ el subespacio de medidas singulares definidas en $L^\infty(A,X)$.

Demostración. Sea $\Phi\in L^\infty(A,X)^*$, por [30, Theorem 4.1] existen únicos $x^*\in L^1(A,X^*_{w^*})$ y $\lambda\in L^{\text{sing}}(A,X)$ tales que $\Phi=\int_A\langle x^*(t),\cdot\rangle d\mu+\lambda$, basta probar que existe $y^*\in L^1(A,X^*)$ tal que $\int_A\langle x^*(t),\cdot\rangle d\mu=\int_A\langle y^*(t),\cdot\rangle d\mu$. En efecto, se define $\nu\colon\mathcal{A}\to X^*$ dada por $\langle\nu(E),x\rangle=\int_A\langle x^*(t),x\mathbf{1}_E\rangle d\mu$, evidentemente, ν es una medida vectorial y $\nu\ll\mu$. Sea $(E_i)_{i=1}^n$ una partición medible finita de A, como $x^*\in L^1(A,X^*_{w^*})$, entonces sea $h\in L^1(A)$ tal que μ-c.t.p. se tiene que $\|x^*(t)\| \leq h(t)$ entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \|\nu(E_i)\| &= \sum_{i=1}^{n} \sup\{\langle \nu(E_i), x\rangle \colon \|x\| \leq 1\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sup\left\{\int_A \langle x^*(t), x\mathbf{1}_{E_i}\rangle d\mu \colon \|x\| \leq 1\right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sup\left\{\int_{E_i} \langle x^*(t), x\rangle d\mu \colon \|x\| \leq 1\right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sup\left\{\int_{E_i} h(t) d\mu \colon \|x\| \leq 1\right\} = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} h(t) d\mu = \int_A h(t) d\mu = \|h\|_1
\end{aligned}$$

y por la Definición 1.3.18, sigue que $\sum_{i=1}^{n} \|\nu(E_i)\| \leq \|x^*\|_1$, por lo tanto ν es de variación acotada, luego por la propiedad de Radon-Nikodym existe $y^* \in L^1(A, X^*)$ tal que

$$\int_A \langle x^*(t), x\mathbf{1}_E\rangle d\mu = \int_A \langle y^*(t), x\mathbf{1}_E\rangle d\mu,$$

para todo $x \in X$ y $E \in \mathcal{A}$. De lo anterior se deduce fácilmente que si $s \in L^\infty(A, X)$ y esta toma valores en un conjunto numerable entonces $\int_A \langle x^*(t), s(t)\rangle d\mu = \int_A \langle y^*(t), s(t)\rangle d\mu$. Ahora, sea $B \in \mathcal{A}$ con medida finita y $x \in L^\infty(B, X)$, por el Teorema 1.3.1, existe $N \in \mathcal{A}$ con $\mu(N) = 0$ y una secuencia $(x_n) \subset X$ tal que $x(B \setminus N) = \mathrm{cl}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$, luego, para $\varepsilon > 0$ se define $B_1 := \{t \in B \colon \|x(t) - x_1\| < \varepsilon\}$ e inductivamente los conjuntos $B_k := \{t \in B \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \colon \|x(t) - x_k\| < \varepsilon\}$, así definiendo $s_\varepsilon(t) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbf{1}_{B_k}$ se tiene que $\|x - s_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$ por construcción y se observa que s_ε toma valores en un conjunto numerable. Así, como $(A, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida σ-finito, se sigue que para todo $x \in L^\infty(A, X)$ y $\varepsilon > 0$, existe $s \in L^\infty(A, X)$ tal que s toma valores en un conjunto numerable y $\|s - x\|_\infty \leq \varepsilon$, así que existe una secuencia $(s_n) \subset L^\infty(A, X)$ tal que cada s_n toma valores en un conjunto numerable y $\|s_n - x\|_\infty \to 0$. Usando el Teorema 1.3.5, se concluye que $\int_A \langle x^*(t), x(t)\rangle d\mu = \int_A \langle y^*(t), x(t)\rangle d\mu$, así que se tiene el resultado. □

Proposición 1.3.24 Un espacio de Banach X es de Asplund si y sólo si X^* cumple la propiedad de Radon-Nikodym.

DEMOSTRACIÓN. [17, Corollary 6 p.82] □

También, se enuncia la versión general de la Proposición 1.3.9.

Proposición 1.3.25 Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(A, X)$ tal que $f_n \to f$ en $L^p(A, X)$ con $p \in [1, \infty]$. Luego, existe una subsecuencia $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $f_{n_k} \to f$ c.t.p.

DEMOSTRACIÓN. Para $p = \infty$ es directo. Para $p < \infty$, basta definir la función $g_n(t) := \|f_n(t) - f(t)\|^p$, es claro que $g_n \in L^1(A)$ y se tiene que $g_n \to 0$ en $L^1(A)$, por lo tanto basta aplicar la Proposición 1.3.9 a (g_n) y se concluye. □

1.3.5. El espacio $AC^{1,p}([a, b], X)$.

Sean $p \in [1, \infty]$, $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

Definición 1.3.26 Sea $f: [a,b] \to X$ una función. Se dice que f es *absolutamente continua* si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier conjunto de intervalos disjuntos $([a_n,b_n])_{n=1}^{\infty}$ con $[a_n,b_n] \subset I$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - a_n| < \delta$ se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \|f(b_n) - f(a_n)\| < \varepsilon$.
Se denota por $AC^{1,p}([a,b],X)$, al conjunto de las funciones f, que son absolutamente continuas en $[a,b]$, derivables c.t.p. y cumplen que $f' \in L^p([a,b],X)$. El siguiente resultado caracteriza las funciones de $AC^{1,p}([a,b],X)$.

Teorema 1.3.27 Sea X un espacio de Banach que satisface la propiedad de Radon-Nikodym. La función $f: [a,b] \to X$ es absolutamente continua si y sólo si existe $g \in L^p(I,X)$ tal que

$$f(t) = f(a) + \int_a^t g(t)dt, \ \forall t \in [a,b].$$

Demostración. [20, Remark 2.2.23]. □

El siguiente resultado es fundamental.

Proposición 1.3.28 Con la norma $\|f\|_{AC^{1,p}} := \|f(a)\| + \|\dot{f}\|_p$, el espacio $AC^{1,p}([a,b],X)$ es un espacio de Banach cuando X satisface la propiedad de Radon-Nikodym.

Demostración. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de Cauchy en $AC^{1,p}([a,b],X)$. Notar que si $t \in [a,b]$ y $m,n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\|f_m(t) - f_n(t)\| &= \|f_m(a) - f_n(a) + \int_a^t (\dot{f}_m(s) - \dot{f}_n(s))ds\| \\
&\leq \|f_m(a) - f_n(a)\| + \int_a^t \|\dot{f}_m(s) - \dot{f}_n(s)\|ds \\
&\leq \|f_m(a) - f_n(a)\| + \|\dot{f}_m - \dot{f}_n\|_1 \\
&\leq \|f_m(a) - f_n(a)\| + (b-a)^{1/q}\|\dot{f}_m - \dot{f}_n\|_p \\
&\leq (1 + (b-a)^{1/q})\|f_m - f_n\|_{AC^{1,p}},
\end{aligned}$$

y esto prueba que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy para la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathcal{C}([a,b],X)$. Como X es Banach, el espacio $(\mathcal{C}([a,b],X), \|\cdot\|_\infty)$ es Banach, luego existe $f \in \mathcal{C}([a,b],X)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Además, notar que $(\dot{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia de Cauchy en $L^p([a,b],X)$ entonces, como este es un espacio de Banach, existe $g \in L^p([a,b],X)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\dot{f}_n - g\|_p = 0$, se verá que $\dot{f} = g$. Notar que para todo $t \in [a,b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(t) = f_n(a) + \int_a^t \dot{f}_n(s)ds.$$

Tomando limite, en n, se tiene que

$$f(t) = f(a) + \int_a^t g(s)ds,$$

sigue por el Teorema 1.3.27 que $f \in AC^{1,p}([a,b],X)$, además, claramente $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{AC^{1,p}} = 0$, lo que prueba que $AC^{1,p}([a,b],X)$ es un Banach. □

La norma $\|\cdot\|_p$ y la norma $\|\cdot\|_{AC^{1,p}}$ se relacionan de la siguiente forma:

Lema 1.3.29 Sea $p \in [1, \infty)$. Existe $C > 0$ tal que para todo $x \in AC^{1,p}([a,b], X)$:

$$\|x\|_p \leq C\|x\|_{AC^{1,p}}.$$

Demostración. En efecto, por convexidad de $t \mapsto t^p$, si c, d son números no negativos, entonces

$$c^p + d^p \leq (c+d)^p \leq 2^{p-1}(c^p + d^p).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|x\|_p^p &= \int_a^b \|x(t)\|^p dt \\
&= \int_a^b \|x(a) + \int_a^t \dot{x}(s)ds\|^p dt \\
&\leq \int_a^b 2^{p-1}(\|x(a)\|^p + \|\int_a^t \dot{x}(s)ds\|^p)dt \\
&\leq 2^{p-1}(b-a)\|x(a)\|^p + \int_a^b (\int_a^b \|\dot{x}(s)\|ds)^p dt \\
&\leq 2^{p-1}(b-a)\|x(a)\|^p + \int_a^b (b-a)^{p-1}\|\dot{x}\|_p^p dt \\
&= 2^{p-1}(b-a)\|x(a)\|^p + (b-a)^p\|\dot{x}\|_p^p \\
&\leq \max\{2^{p-1}(b-a), (b-a)^p\}(\|x(a)\|^p + \|\dot{x}\|_p^p) \\
&\leq \max\{2^{p-1}(b-a), (b-a)^p\}(\|x(a)\| + \|\dot{x}\|_p)^p \\
&= \max\{2^{p-1}(b-a), (b-a)^p\}\|x\|_{AC^{1,p}}^p,
\end{aligned}$$

donde ha utilizado la desigualdad de Hölder. Finalmente, tomando

$$C := (\max\{2^{p-1}(b-a), (b-a)^p\})^{1/p},$$

se concluye el resultado. □

1.4. Teoría de Multifunciones

Sean X, Y conjuntos no vacíos. Se dice que $M \colon X \rightrightarrows Y$ es una *multifunción* si para cada $x \in X$, $M(x)$ es un subconjunto de Y. Cuando los valores de M son singletons, M es simplemente una función. Típicamente, una multifunción se denotará como $X \ni x \rightrightarrows M(x)$ o, cuando no haya ambigüedad sobre el espacio en que está definida, como $x \rightrightarrows M(x)$.

Para una multifunción $M \colon X \rightrightarrows Y$, se pueden definir los siguientes conjuntos

- El *grafo de* M,
$$\text{gph}(M) := \{(x, y) \in X \times Y \colon y \in M(x)\}.$$

- El *dominio de* M,
$$\text{dom}(M) := \{x \in X \colon M(x) \neq \emptyset\}.$$

- Para $A \subset X$ y $B \subset Y$,

$$\begin{aligned} M(A) &:= \bigcup_{x \in A} M(x), \\ M^-(B) &:= \{x \in X \colon B \cap M(x) \neq \emptyset\}, \\ M^+(B) &:= \{x \in X \colon M(x) \subset B\}. \end{aligned}$$

Además, se dice que $f\colon X \to Y$ es una *selección* de M si $f(x) \in M(x)$ para todo $x \in X$. Cuando X, Y son espacios topológicos, se dice que

- M es *semicontinua inferior (lsc)* en x si $M^-(V) \in \mathcal{N}_x$ para todo V abierto de Y con $M(x) \cap V \neq \emptyset$. Si M es lsc en todo punto de $\mathrm{dom}(M)$ entonces se dice que M es lsc en X. Esto ultimo equivale a que $M^-(O)$ es abierto en X, para cada conjunto abierto $O \subset Y$.

- M es *semicontinua superior (usc)* en x si $M^+(V) \in \mathcal{N}_x$ para todo V abierto de Y con $M(x) \subset V$. Si M es usc en todo punto de X entonces se dice que M es usc en X. Esto ultimo equivale a que $M^+(O)$ es abierto en X, para cada conjunto abierto $O \subset Y$.

Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y X un espacio topológico, se dice que la multifunción $M\colon \Omega \rightrightarrows X$ es *medible* si $M^-(O) \in \mathcal{A}$ para cada conjunto abierto $O \subset X$. Además, M es *grafo-medible* si $\mathrm{gph}(M) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$, donde $\mathcal{B}(X)$ es la σ-álgebra de Borel asociada a X. Por otro lado, cuando se tiene una función medible $x\colon \Omega \to X$ tal que $\forall \omega \in \Omega\colon x(\omega) \in M(\omega)$, se dice que x es una *selección medible* de M.

Si X, Y son espacios topológicos, se dice que $M\colon \Omega \times X \rightrightarrows Y$ es una *multifunción aleatoria* cuando la multifunción $\Omega \ni \omega \rightrightarrows \mathrm{gph}(M_\omega)$ es una multifunción medible y toma valores cerrados. Aquí, M_ω denota a la multifunción $X \ni x \rightrightarrows M(\omega, x)$, para cada $\omega \in \Omega$.

Una función $f\colon \Omega \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ se dice un normal integrand, si $f_\omega := f(\omega, \cdot)$ es lsc para todo $\omega \in \Omega$ y f es $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$-medible. A partir de f, se define la multifunción epígrafo, dada por

$$\mathrm{epi}\, f\colon \omega \rightrightarrows \mathrm{epi}\, f_\omega = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R}\colon f(\omega, x) \leq \alpha\}$$

Proposición 1.4.1 Sea X un espacio de Banach. Sea $f\colon \Omega \times X \to \overline{\mathbb{R}}$. Entonces $t \rightrightarrows \mathrm{epi}\, f_t$ tiene el grafo medible y toma valores cerrados si y solamente si f es un normal integrand.

Demostración. [14, Lemma VII-1]. □

Proposición 1.4.2 Sea X un espacio de Banach separable. Sea $f\colon \Omega \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand. Entonces, $f^*(\omega, x^*) = \sup_{x \in X} \langle x^*, x\rangle - f(\omega, x)$ es un normal integrand convexo.

Demostración. [14, Lemma VII-2]. □

Las propiedades de medibilidad pueden ser caracterizadas cuando X es un espacio métrico separable y completo (espacio Polaco).

Proposición 1.4.3 ([14]) Sea (X, d) un espacio Polaco, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida completo y σ-finito. Para una multifunción $M\colon \Omega \rightrightarrows X$ con valores cerrados no vacíos, considerar las siguientes afirmaciones:

(a) M es medible.

(b) Para todo $x \in X$, el mapeo $\omega \mapsto d(x; M(\omega))$ es medible.

(c) Existe una secuencia de selecciones medibles $(f_k)_k$ de M tal que $M(\omega) \subset \text{cl}(\{f_k(\omega)\}_k)$ para todo $\omega \in \Omega$.

(d) M es grafo medible.

Entonces, (a) $\iff$ (b) $\iff$ (c) $\iff$ (d).

Se dice que una función $f\colon \Omega \times X \to \mathbb{R}$ es de *Carathéodory* si $f(\cdot, x)$ es medible para todo $x \in X$ y $f(\omega, \cdot)$ es continua para todo $\omega \in \Omega$.

Proposición 1.4.4 Sea X un espacio de Banach separable y $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Sea f una función de Carathéodory. Entonces f es $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$-medible.

Demostración. [3, Lemma 8.2.6]. $\square$

Un espacio topológico S es llamado un *espacio de Suslin* si existe un espacio Polaco Y y una función continua $f\colon Y \to S$ tal que $f(Y) = S$. Es bien sabido que un espacio Polaco tambien es de Suslin, y cualquier espacio de Suslin es separable. Además, la unión numerable de espacios de Suslin resulta un espacio de Suslin [38].

Proposición 1.4.5 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable. Entonces, su dual X^* dotado con la topología débil* es un espacio de Suslin.

Demostración. Gracias al Teorema de Banach Alaoglu [19, Teorema 5.18], el conjunto $\mathbb{B}_* := \{x^* \in X^*\colon \|x^*\| \leq 1\}$ es compacto en la topología débil*. Dado que X es separable, $\mathbb{B}_*$ es metrizable, entonces $\mathbb{B}_*$ es un espacio Polaco, por lo tanto, $n\mathbb{B}_* := \{x^* \in X^*\colon \|x^*\| \leq n\}$ es un espacio Polaco para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, como $X^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{B}_*$, se concluye que X^* es un espacio de Suslin porque es una unión numerable de espacios de Suslin. $\square$

Cuando X^*, dotado con la topología fuerte (dada por la norma), es separable, X^* es un espacio de Suslin (con la topología fuerte).

Para un espacio de Suslin X, se tiene un resultado útil de selección medible gracias a Yankov-von Neumann-Aumann, el cual es descrito en el siguiente teorema:

Teorema 1.4.6 (Teorema de selección medible) ([14]) Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida completo, σ-finito y X un espacio de Suslin. Sea $M\colon \Omega \rightrightarrows X$ una multifución grafo-medible con valores no vacíos. Entonces, existe una secuencia de selecciones medibles $f_k\colon \Omega \to X$ de M tal que

$$M(\omega) \subset \text{cl}(\{f_k(\omega)\}_k) \text{ para todo } \omega \in \Omega.$$

En particular, M tiene una selección medible.

Para $p \in [1, \infty]$, el conjunto de selecciones medible de M p-integrables es denotado por S_M^p.

1.4.1. Convergencia de Multifunciones

Sea X un espacio de Banach. Dada una secuencia de conjuntos $(A_k)_k \subset X$, el límite superior y inferior (A_k) son definidos, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\limsup A_k &= \{x \in X\colon \liminf d(x; A_k) = 0\},\\ \liminf A_k &= \{x \in X\colon \limsup d(x; A_k) = 0\}.\end{aligned}$$

Además, una secuencia de conjuntos $(A_k) \subset X$ converge en el sentido de *Painlevé-Kuratowski* a A si $\limsup A_k = \liminf A_k = A$. Si X es de dimensión finita, entonces la convergencia de Painlevé-Kuratowski es metrizable sobre el espacio de conjuntos cerrados y no vacíos con la métrica:

$$\bar{d}(A, B) = \int_0^\infty e^{-\rho} d_\rho(A, B) \mathrm{d}\rho, \tag{1.4}$$

donde $A, B \subset X$ y $d_\rho(A, B) := \max_{x \in \mathbb{B}_\rho(0)} |d(x; A) - d(x; B)|$ para $\rho \geq 0$ (ver [45, cap 4.I] para más detalles).

Se introduce la noción de convergencia esencialmente uniforme de multifunciones. Una secuencia de multifunciones medibles $(M_k\colon \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^d)_k$ con valores cerrados y no vacíos converge *esencialmente uniforme* a la multifunción $M\colon \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ (también con valores cerrados y no vacíos) respecto a la distancia (1.4) si

$$\|\bar{d}(M_k, M)\|_\infty := \inf\{t\colon t \geq \bar{d}(M_k(\omega), M(\omega)) \text{ c.t.p. } w \in \Omega\} \to 0, \tag{1.5}$$

cuando $k \to \infty$.

La noción anterior induce una convergencia de funciones a través de sus epígrafos. Una secuencia de normal integrands $(f^k\colon \Omega \times \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}})_k$ converge *epigráficamente uniforme* a $f\colon \Omega \times \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ si la secuencia $(\omega \rightrightarrows \operatorname{epi} f^k_\omega)_k$ converge esencialmente uniforme a $\omega \rightrightarrows \operatorname{epi} f_\omega$.

1.4.2. Teorema de Selección de Michael

Sea (T, d) un espacio métrico y un espacio de Banach X. Dada una multifunción $M\colon T \rightrightarrows X$, es de utilidad saber cuando existen selecciones de M que cumplan alguna propiedad de continuidad. En este contexto, se tiene el siguiente resultado (ver [38, Theorem 6.3.6]),

Teorema 1.4.7 Sea (T, d) un espacio métrico y X un espacio de Banach. Sea $M\colon T \rightrightarrows X$ una multifunción que toma valores cerrados, convexos y no vacíos, y además, es semicontinua inferior, entonces existe $x \in \mathcal{C}(T, X)$ tal que $x(t) \in M(t)$ para todo $t \in T$.

Observación 1.4.8 El Teorema anterior sigue siendo cierto en un contexto más general, inclusive. Si T es un espacio paracompacto, también se tiene el resultado de selección.

Capítulo 2

Representación suave de multifunciones medibles

En esta primera parte se probó que una multifunción aleatoria satisfaciendo ciertas propiedades de continuidad puede ser descrita como el conjunto de minimizadores de un normal integrand. Este resultado tiene como motivación generalizar el siguiente Teorema (por Azagra y Ferrera, ver [4]):

Teorema 2.0.1 Para cada conjunto convexo y cerrado C en un espacio de Banach separable X, existe una función $f\colon X \to [0, \infty)$ convexa, $\mathcal{C}^\infty$ tal que $f^{-1}(0) = C$ (y, en particular, también $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in X \setminus C$).

En el caso que describirá a continuación, la idea es generalizar este resultado a un contexto de multifunciones. La propiedad de continuidad requerida para probar el teorema principal está dada en la siguiente definición.

Definición 2.0.2 Una multifunción $M\colon H \rightrightarrows X$ se dice *pseudo-débil semicontinua superior* (p-w-usc) en $x \in H$ si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $y^* \in X^*$ con $M(x) \subset \{u \in X\colon \langle y^*, u\rangle < \alpha\}$ y $\eta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$M(x') \subset \{u \in X\colon \langle y^*, u\rangle < \alpha + \eta\} \text{ para todo } x' \in \mathbb{B}_\varepsilon(x).$$

Además, M se dice pseudo-débil semicontinua superior si la propiedad se satisface para todo $x \in H$.

Observación 2.0.3 La noción anterior de semicontinuidad superior es más débil que la noción usual (cuando a X se le dota de la topología débil), incluso en dimensión finita. Para ver esto, se considera $H = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^2$, el conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon xy \geq 1, x \geq 0\},$$

y la multifunción

$$M\colon t \rightrightarrows t(1, 0) + C.$$

Primero, se verá que M es p-w-usc, en efecto, sea $t \in \mathbb{R}$ y $M(t) \subset \{u \in \mathbb{R}^2\colon \langle y^*, u\rangle < \alpha\}$ para algún $y^* \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Fijar $\eta > 0$, sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \frac{\eta}{1+\|y^*\|}$, entonces si $s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$, entonces se toma $u \in M(s)$, sigue que $u + (t-s)(1,0) \in M(t)$, luego:

$$\begin{aligned}\langle y^*, u\rangle &= \langle y^*, u + (t-s)(1,0)\rangle - (t-s)\langle y^*, (1,0)\rangle \\ &< \alpha + |t-s|\|y^*\| < \alpha + \varepsilon\|y^*\| < \alpha + \eta.\end{aligned}$$

Esto muestra que $M(s) \subset \{u \in \mathbb{R}^2 \colon \langle y^*, u\rangle < \alpha + \eta\}$ para todo $s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$. Por otro lado, se tiene que para cualquier $s \in \mathbb{R}$, $M(s) \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > s\}$, pero si se escoge $\varepsilon > 0$, se puede tomar $t \in (s-\varepsilon, s)$ y se observa que $(s, \frac{1}{s-t}) \in M(t)$, y entonces $M(t) \not\subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > s\}$, lo que muestra que M no es usc en ningún punto.

Ejemplo 2.0.4 Se considera un espacio de Hilbert H. Se verá que si $A \colon H \rightrightarrows H$ es un operador maximalmente monótono (ver [5, Definition 20.20]) y $\operatorname{dom}(A) = H$, el operador A es p-w-usc. En efecto, por [5, Corollary 21.20], A es localmente acotado en todo H, esto quiere decir que para cada $x \in H$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $A(\mathbb{B}_\varepsilon(x))$ es un conjunto acotado. Sea $x \in H$ y se supone que

$$Ax \subset \{u \in H \colon \langle y^*, u\rangle < \alpha\},$$

para algún $y^* \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Si A no es p-w-usc en x, se tiene que existe $\eta > 0$ y $(x_n, y_n) \in \operatorname{gph}(A)$ tal que $x_n \to x$ que satisface $\langle y^*, y_n\rangle \geq \alpha + \eta$. Dado que A es localmente acotado, existe $\varepsilon > 0$ tal que $A(\mathbb{B}_\varepsilon(x))$ es acotado, esto implica que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia acotada, entonces se puede encontrar un punto de acumulación débil $y \in H$ y una subsecuencia tal que $y_{n_j} \rightharpoonup y$, entonces por [5, Proposition 20.38 (i)] sigue que $(x,y) \in \operatorname{gph}(A)$ entonces $\langle y^*, y\rangle < \alpha$ pero para todo $j \in \mathbb{N}$, $\langle y^*, y_{n_j}\rangle \geq \alpha + \eta$ y por la convergencia débil se obtiene una contradicción, esto muestra que A es p-w-usc.

Teorema 2.0.5 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida completo y σ-finito, H un espacio de Hilbert separable y X un espacio de Banach separable. Si $M \colon \Omega \times H \rightrightarrows X$ es una multifunción aleatoria tal que para todo $\omega \in \Omega$, $M_\omega \colon H \rightrightarrows X$ es p-w-usc con valores convexos, entonces existe un normal integrand $\varphi \colon \Omega \times H \times X \to [0, \infty)$ tal que

(a) Para todo $\omega \in \Omega$, $\operatorname{gph} M_\omega = \{(x,y) \in H \times X \colon \varphi_\omega(x,y) = 0\}$.

(b) Para todo $\omega \in \Omega$, la función $(x,y) \mapsto \varphi_\omega(x,y)$ es $\mathcal{C}^\infty$.

(c) Para todo $(\omega, x) \in \Omega \times H$, la función $y \mapsto \varphi_\omega(x,y)$ es convexa.

(d) Existe $L \geq 0$ tal que para todo $(\omega, y) \in \Omega \times X$, la función $x \mapsto \varphi_\omega(x,y) + L(\|y\|+1)\|x\|^2$ es convexa.

(e) Para todo $k \in \mathbb{N}^*$, existen constantes positivas C_k, R_k tal que para todo $(x,y) \in H \times X$

$$\sup_{\omega\in\Omega} \|D^k\varphi_\omega(x,y)\| \leq C_k(\|y\|+1)(\|x\|^k+1), \tag{2.1}$$

$$\sup_{\omega\in\Omega} \|D_y^k\varphi_\omega(x,y)\| \leq R_k(\|x\|+1), \tag{2.2}$$

donde $D^k\varphi_\omega$ y $D_y^k\varphi_\omega$ denotan, respectivamente, la k-derivada de φ_ω y la k-derivada respecto a y.

(f) Para todo $\omega \in \Omega$, la función $(x,y) \mapsto \varphi_\omega(x,y)$ satisface la siguiente propiedad de continuidad: si $x_n \to x$ y $y_n \rightharpoonup y$, entonces $\varphi_\omega(x_n, y_n) \to \varphi_\omega(x,y)$.

Demostración. Para el conjunto medible $\Omega_\emptyset := \{\omega \in \Omega\colon \operatorname{gph} M_\omega = \emptyset\}$, se puede considerar $\varphi_\omega \equiv 1$ para todo $\omega \in \Omega_\emptyset$, además sea $\Omega' := \{\omega \in \Omega\colon \operatorname{gph} M_\omega = H \times X\}$, si $\omega \in \Omega'$ entonces basta tomar $\varphi_\omega \equiv 0$. Entonces, sin pérdida de generalidad, se puede asumir que $\Omega_\emptyset = \Omega' = \emptyset$. De ahora en adelante, se considera a X^* con la topología débil*. Dado que X es un Banach separable, X^* es un espacio de Suslin. Es importante mencionar que, cuando X^* con la topología usual (de la norma) es separable, el desarrollo siguiente puede realizarse con esa topología.
El resto de la demostración está dividida en las siguientes partes.
Afirmación 1: El mapeo $\mathcal{F}\colon \Omega \rightrightarrows H \times X \times (0,\infty) \times X^* \times \mathbb{R}$ definido por

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\omega) \quad := \quad & \{(x, y, \varepsilon, y^*, \alpha) \in H \times X \times (0,\infty) \times X^* \times \mathbb{R}\colon \\ & \operatorname{gph} M_\omega \cap (\operatorname{int}(\mathbb{B}_\varepsilon(x)) \times \{u \in X\colon \langle y^*, u\rangle < \alpha\}) = \emptyset \text{ y } \langle y^*, y\rangle < \alpha\},\end{aligned}$$

tiene valores no vacíos y su grafo es medible.
Demostración de la Afirmación 1: Sea $\omega \in \Omega$, como $\Omega' = \emptyset$, existe $(x,y) \notin \operatorname{gph} M_\omega$, luego $y \notin M_\omega(x)$, si $M_\omega(x) \neq \emptyset$, por el Teorema de Hahn-Banach existe $y^* \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tal que $\langle y^*, u\rangle + \varepsilon < \alpha < \langle y^*, y\rangle$ para todo $u \in M_\omega(x)$, entonces $M_\omega(x) \subset \{u\colon \langle y^*, u\rangle < \alpha - \varepsilon\}$, luego como M_ω es p-w-usc, existe $\delta > 0$ tal que $M_\omega(x') \subset \{u\colon \langle y^*, u\rangle < \alpha\}$ para todo $x' \in \mathbb{B}_\delta(x)$, así que

$$\operatorname{gph} M_\omega \cap (\operatorname{int}(\mathbb{B}_\delta(x)) \times \{u \in X\colon \langle -y^*, u\rangle < -\alpha\}) = \emptyset,$$

y además $\langle -y^*, y\rangle < -\alpha$, por lo que $(x, y, \delta, -y^*, -\alpha) \in \mathcal{F}(\omega)$. Si $M_\omega(x) = \emptyset$, basta tomar cualquier $y^* \neq 0$ y $\alpha = \langle y^*, y\rangle - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$, y proceder de forma similar a lo anterior usando que M_ω es p-w-usc. Entonces, $\mathcal{F}$ tiene valores no vacíos. Por otro lado, para probar que $\mathcal{F}$ tiene el grafo medible, se considera la multifunción $G\colon H \times (0,\infty) \times X^* \times \mathbb{R} \rightrightarrows H \times X$ definida por

$$G(x, \varepsilon, y^*, \alpha) := (\operatorname{int}(\mathbb{B}_\varepsilon(x)) \times \{u \in X\colon \langle y^*, u\rangle < \alpha\})^c.$$

Notar que

$$G(x, \varepsilon, y^*, \alpha) = G_1(x, \varepsilon) \times X \,\cup\, H \times G_2(y^*, \alpha),$$

con $G_1(x,\varepsilon) := \{a \in H\colon \|x - a\| \geq \varepsilon\}$ y $G_2(y^*, \alpha) := \{u \in X\colon \langle y^*, u\rangle \geq \alpha\}$. Entonces, para cada conjunto abierto $U \subset H$, se obtiene que

$$G_1^-(U) = \{(x,\varepsilon) \in H \times (0,\infty)\colon \text{existe } a \in U \text{ tal que } \|x - a\| \geq \varepsilon\}.$$

Luego, tomando $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset U$ denso, se obtiene que

$$G_1^-(U) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{(x,\varepsilon) \in H \times (0,\infty)\colon \|x - a_k\| \geq \varepsilon\},$$

lo cual implica que G_1 es una multifunción medible. Similarmente, es fácil ver que si $V \subset X$ es un abierto y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ es un denso numerable, entonces

$$G_2^-(V) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{(y^*, \alpha) \in X^* \times \mathbb{R}\colon \langle y^*, b_k\rangle \geq \alpha\},$$

y por tanto G_2 es medible. Entonces, G es medible. Ahora, notar que

$$\begin{aligned}
&\operatorname{gph}(M_\omega) \cap (\operatorname{int}(\mathbb{B}_\varepsilon(x)) \times \{u \in X \colon \langle y^*, u\rangle < \alpha\}) = \emptyset \\
\Leftrightarrow\, &\operatorname{gph}(M_\omega) \subset G(x,\varepsilon,y^*,\alpha) \\
\Leftrightarrow\, &d((v,w); G(x,\varepsilon,y^*,\alpha)) \leq 0 \text{ para todo } (v,w) \in \operatorname{gph}(M_\omega) \\
\Leftrightarrow\, &d((v_k(\omega), w_k(\omega)); G(x,\varepsilon,y^*,\alpha)) \leq 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

donde $(v_k, w_k)_k$ es una secuencia de selecciones medibles de $\operatorname{gph} M_\omega$ con

$$\operatorname{gph} M_\omega = \operatorname{cl}((v_k(\omega), w_k(\omega))_k), \forall \omega \in \Omega,$$

que existe gracias al Teorema 1.4.6. Además, la función $(v,w) \mapsto d((v,w); G(x,\varepsilon,y^*,\alpha))$ es continua y $(x,\varepsilon,y^*,\alpha) \mapsto d((v,w); G(x,\varepsilon,y^*,\alpha))$ es $\mathcal{B}(H\times(0,\infty)\times X^*\times\mathbb{R})$ medible. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$, por la Proposición 1.4.4, la función $(\omega,x,\varepsilon,y^*,\alpha) \mapsto d((v_k(\cdot), w_k(\cdot)); G(\cdot))$ es $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(H\times(0,\infty)\times X^*\times\mathbb{R})$ medible. Por lo tanto, el grafo de $\mathcal{F}$ puede reescribirse como

$$\operatorname{gph}(\mathcal{F}) = \{(\omega,x,y,\varepsilon,y^*,\alpha) \colon \Phi(\omega,x,\varepsilon,y^*,\alpha) \leq 0 \text{ y } \langle y^*, y\rangle < \alpha\},$$

donde $\Phi(\omega,x,\varepsilon,y^*,\alpha) := \sup_{k\in\mathbb{N}} d((v_k(\omega), w_k(\omega)); G(x,\varepsilon,y^*,\alpha))$ y de aquí es posible concluir que $\operatorname{gph}(\mathcal{F})$ es un conjunto medible.

Afirmación 2: Existen funciones medibles $x_k \colon \Omega \to H$, $\varepsilon_k \colon \Omega \to (0,\infty)$, $y_k^* \colon \Omega \to X^*$, $\alpha_k \colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que para todo $\omega \in \Omega$

$$(\operatorname{gph} M_\omega)^c = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{int}(\mathbb{B}_{\varepsilon_k(\omega)}(x_k(\omega))) \times \{u \in X \colon \langle y_k^*(\omega), u\rangle < \alpha_k(\omega)\}. \tag{2.3}$$

Demostración de la Afirmación 2: Gracias a la Afirmación 1 y el Teorema 1.4.6, existe una secuencia de selecciones medibles $(x_k, y_k, \varepsilon_k, y_k^*, \alpha_k)$ de $\mathcal{F}$ tal que

$$\mathcal{F}(\omega) \subset \operatorname{cl}(x_k(\omega), y_k(\omega), \varepsilon_k(\omega), y_k^*(\omega), \alpha_k(\omega))_k) \text{ para todo } \omega \in \Omega. \tag{2.4}$$

Se probará que la secuencia $(x_k, y_k, \varepsilon_k, y_k^*, \alpha_k)_k$ satisface (2.3).
En efecto, por un lado, la inclusión $\supset$ se sigue por construcción. Por otro lado, para probar la inclusión $\subset$, sea $(x,y) \notin \operatorname{gph} M_\omega$, es decir, $y \notin M_\omega(x)$.
Si $M_\omega(x) = \emptyset$, se toma cualquier $y^* \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\langle y^*, y\rangle < \alpha$, y la vecindad $\mathcal{U} := \{u \in X \colon \langle y^*, u\rangle > \alpha + \xi\}$ con $\xi > 0$ fijo (cualquiera). Entonces, $M_\omega(x) \subset \mathcal{U}$, y como M_ω es p-w-usc, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x' \in \mathbb{B}_\varepsilon(x)$ la siguiente inclusión se tiene:

$$M_\omega(x') \subset \{u \in X \colon \langle y^*, u\rangle + \xi > \alpha + \xi\}.$$

Entonces, se sigue que

$$\operatorname{gph}(M_\omega) \cap (\operatorname{int}(\mathbb{B}_\varepsilon(x)) \times \{u \in X \colon \langle y^*, u\rangle < \alpha\}) = \emptyset.$$

Ahora, si $M_\omega(x) \neq \emptyset$, por el Teorema de Hahn-Banach ($M_\omega(x)$ es convexo y cerrado), existe $y^* \in X^*$ y $\beta > \alpha$ tal que

$$\langle y^*, z\rangle \geq \beta, \text{ para todo } z \in M_\omega(x) \text{ y } \langle y^*, y\rangle < \alpha.$$

Además, existe $\xi > 0$ tal que $\beta > \xi > \alpha$. Considerar la vecindad $\mathcal{U} := \{u \in X\colon \langle y^*, u\rangle > \xi\}$. Entonces, $M_\omega(x) \subset \mathcal{U}$ y como M_ω es p-w-usc, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x' \in \mathbb{B}_\varepsilon(x)$ la siguiente inclusión se tiene:

$$M_\omega(x') \subset \{u \in X\colon \langle y^*, u\rangle + (\xi - \alpha) > \xi\}.$$

Entonces, $\operatorname{gph}(M_\omega) \cap (\operatorname{int}(\mathbb{B}_\varepsilon(x)) \times \{u \in X\colon \langle y^*, u\rangle < \alpha\}) = \emptyset$.
Por lo tanto, en cualquier caso, existe $\varepsilon > 0$, $y^* \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y, \varepsilon, y^*, \alpha) \in \mathcal{F}(\omega)$ y $\langle y^*, y\rangle < \alpha$. Se define $\delta := \alpha - \langle y^*, y\rangle > 0$. Entonces, por (2.4), existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$(x_j(\omega), y_j(\omega), \varepsilon_j(\omega), y_j^*(\omega), \alpha_j(\omega)) \in \mathcal{F}(\omega),$$

y

$$\max\{\|x - x_j(\omega)\|, |\varepsilon_j(\omega) - \varepsilon|\} < \varepsilon/2,\ \max\{|\alpha_j(\omega) - \alpha|, |\langle y_j^*(\omega) - y^*, y\rangle|\} < \delta/2.$$

Entonces, dado que $\|x - x_j(\omega)\| \le \varepsilon/2 < \varepsilon_j(\omega)$, se obtiene que $x \in \operatorname{int}(\mathbb{B}_{\varepsilon_j(\omega)}(x_j(\omega)))$. Además,

$$\begin{array}{rcl} \langle y_j^*(\omega), y\rangle & = & \langle y_j^*(\omega) - y^*, y\rangle + \langle y^*, y\rangle \\ & < & \delta/2 + \langle y^*, y\rangle = \delta/2 + \alpha - \delta \\ & < & \delta/2 + (\alpha_j(\omega) + \delta/2) - \delta = \alpha_j(\omega). \end{array}$$

Por lo tanto, $(x, y) \in \operatorname{int}(\mathbb{B}_{\varepsilon_j(\omega)}(x_j(\omega))) \times \{u \in X\colon \langle y_j^*(\omega), u\rangle < \alpha_j(\omega)\}$.
Afirmación 3: Existen funciones medibles $x_k^*\colon \Omega \to H$, $\alpha_k\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $z_k^*\colon \Omega \to X^*$, $\beta_k\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{gph} M_\omega = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (A_k(\omega) \times B_k(\omega))^c \text{ para todo } \omega \in \Omega,$$

donde A_k y B_k están definidos por

$$\begin{aligned} A_k(\omega) &= \{x \in H\colon \langle x, x_k^*(\omega)\rangle - \frac{1}{2}\|x\|^2 > \beta_k(\omega)\}, \\ B_k(\omega) &= \{u \in X\colon \langle z_k^*(\omega), u\rangle > \gamma_k(\omega)\}. \end{aligned}$$

Demostración de la Afirmación 3: Por un lado, notar que,

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{int}(\mathbb{B}_{\varepsilon_k(\omega)}(x_k(\omega))) & = & \{x \in H\colon \frac{1}{2}\|x - x_k\|^2 < \frac{1}{2}\varepsilon_k(\omega)^2\} \\ & = & \{x \in H\colon \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle x, x_k(\omega)\rangle + \frac{1}{2}\|x_k(\omega)\|^2 < \frac{1}{2}\varepsilon_k(\omega)^2\} \\ & = & \{x \in H\colon \langle x, x_k^*(\omega)\rangle - \frac{1}{2}\|x\|^2 > \beta_k(\omega)\} =: A_k(\omega), \end{array}$$

donde $\beta_k(\omega) := \frac{1}{2}\|x_k(\omega)\|^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_k(\omega)^2$ y $x_k^*(\omega) = x_k(\omega)$. Por otro lado, definiendo $z_k^* = -y_k^*$ y $\gamma_k = -\alpha_k$, se puede tomar $B_k(\omega) := \{u \in X\colon \langle z_k^*(\omega), u\rangle > \gamma_k(\omega)\}$, lo que prueba la Afirmación.
Afirmación 4: Prueba del Teorema 2.0.5:
Siguiendo las ideas de [4], se considera una función $\theta\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ convexa y $\mathcal{C}^\infty$ tal que

$$\theta(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \le 0, \\ s + b & \text{si } s \ge 1, \end{cases} \tag{2.5}$$

para algún $b \in (-1,0)$. Esta función es posible construirla tomando cualquier función $\mathcal{C}^\infty$ con soporte contenido en $[0,1]$ y además positiva, por ejemplo ψ, y luego integrarla dos veces, es decir, tomar $\theta(t) = \int_{-\infty}^{t}(\int_{-\infty}^{s}\psi(u)du)ds$. Es importante notar que b no juega un rol importante en la demostración. Sin embargo, se hace notar que no puede ocurrir que $b=0$. La función θ satisface la siguiente desigualdad:

$$\theta(s) \leq \theta(1) + |s| + |b| \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Además, para cada $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, su k-ésima derivada es uniformemente acotada, i.e.,

$$\|\theta^{(k)}\|_\infty := \sup\{|\theta^{(k)}(s)| \colon s \in \mathbb{R}\} < \infty.$$

Ahora, se considera la función $\varphi \colon \Omega \times H \times X \to [0,\infty)$ definida por

$$\varphi_\omega(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\theta_n^1(\omega,x)\cdot\theta_n^2(\omega,y)}{\zeta_n(\omega)^n\xi_n(\omega)^n 2^n}, \tag{2.6}$$

donde

$$\begin{aligned}
\theta_n^1(\omega,x) &:= \theta\left(\frac{1}{\zeta_n(\omega)}(\langle x_n^*(\omega),x\rangle - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \beta_n(\omega))\right),\\
\theta_n^2(\omega,y) &:= \theta\left(\frac{1}{\xi_n(\omega)}(\langle z_n^*(\omega),y\rangle - \gamma_n(\omega))\right),\\
\zeta_n(\omega) &:= 1 + |\beta_n(\omega)| + \|x_n^*(\omega)\|,\\
\xi_n(\omega) &:= 1 + \|z_n^*(\omega)\| + |\gamma_n(\omega)|.
\end{aligned}$$

Gracias a la Afirmación 3, es fácil ver que para todo $\omega \in \Omega$, la siguiente equivalencia se tiene:

$$\varphi_\omega(x,y) = 0 \iff (x,y) \in \operatorname{gph} M_\omega.$$

Puesto que θ es convexa, la función $y \mapsto \varphi_\omega(x,y)$ es convexa para todo $(\omega,x) \in \Omega \times H$. Además, por [54, Proposition 4.1], la función $x \mapsto \varphi_\omega(x,y) + L\|y\|\|x\|^2$ es convexa, para algún $L \geq 0$, que dependerá de la constante de Lipschitz de θ.
Usando la fórmula de Faá di Bruno (ver, e.g., [6, Lemma 5.1]), para todo $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, existen constantes $C_k, R_k > 0$ (independientes de ω, x y y) tal que

$$\|D^k\theta_n^1(\omega,x)\| \leq C_k(\|x\|^k + 1) \text{ y } \|D^k\theta_n^2(\omega,y)\| \leq R_k.$$

Entonces, por la Regla de Leibniz aplicada a φ_ω, estas desigualdades implican que (2.1) y (2.2) se tienen. Entonces, φ_ω es una función $\mathcal{C}^\infty$.

Para finalizar, se probará la afirmación (f). Sea $x_k \to x$ en H y $y_k \rightharpoonup y$ en X. Es claro que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\omega \in \Omega$, $\theta_n^1(\omega,x_k) \to \theta_n^1(\omega,x)$ y $\theta_n^2(\omega,y_k) \to \theta_n^2(\omega,y)$ cuando $k\to\infty$. Entonces, cuando $k \to \infty$,

$$\frac{\theta_n^1(\omega,x_k)\cdot\theta_n^2(\omega,y_k)}{\zeta_n(\omega)^n\xi_n(\omega)^n2^n} \to \frac{\theta_n^1(\omega,x)\cdot\theta_n^2(\omega,y)}{\zeta_n(\omega)^n\xi_n(\omega)^n2^n}.$$

Finalmente, por el Teorema 1.3.5, se concluye que para todo $\omega \in \Omega$, $\varphi_\omega(x_k,y_k) \to \varphi_\omega(x,y)$, lo que termina la demostración. $\square$

Observación 2.0.6 El Teorema 2.0.5 fue enunciado cuando el espacio H es un Hilbert separable. Sin embargo, la demostración puede ser modificada cuando H es un Banach separable donde su norma es diferenciable en $X \setminus \{0\}$, y en tal caso se obtiene una función φ con la misma regularidad que la norma de H. En efecto, sea H un espacio de Banach separable con su norma $\mathcal{C}^1$ en $X \setminus \{0\}$. Entonces, se puede reemplazar el conjunto $A_k(\omega)$ de la Afirmación 3 por

$$A_k(\omega) = \{x \in H \colon \|x - x_k(\omega)\|^p < \varepsilon_k(\omega)^p\},$$

donde $p > 1$ es fijo. En la Afirmación 4, las funciones θ_n^1 y ζ_n pueden ser modificadas por

$$\begin{aligned} \theta_n^1(\omega, x) &= \theta(\varepsilon_n(\omega)^p - \|x - x_n(\omega)\|^p), \\ \zeta_n(\omega) &= 1 + \varepsilon_n(\omega)^p + \|x_n(\omega)\|^{p-1}. \end{aligned}$$

Con este cambio, la función φ se define de la misma manera que en (2.6). La función obtenida φ es $\mathcal{C}^1$ y gracias a que $\|D(\|\cdot\|^p)(x)\| \leq p\|x\|^{p-1}$, existe $M > 0$ tal que para todo $(\omega, x, y) \in \Omega \times H \times X$

$$\|D\varphi_\omega(x, y)\| \leq M(\|x\|^{p-1} + 1)(\|y\| + 1).$$

Además, (2.2) se tiene y para todo $x \in H$, $y \mapsto \varphi_\omega(x, y)$ es $\mathcal{C}^\infty$. $\square$

Como una consecuencia del Teorema 2.0.5, se puede obtener el resultado principal de [4]. Más precisamente, [4, Theorem 1] establece que cada conjunto convexo y cerrado en un Banach separable puede ser visto como el conjunto de minimizadores de una función $\mathcal{C}^\infty$ y convexa. Gracias al Teorema 2.0.5, es posible concluir algo más fuerte: los valores de una multifunción medible con valores convexos y cerrados pueden ser escritos como los minimizadores de un normal integrand $\mathcal{C}^\infty$ y convexo.

Corolario 2.0.7 Sea $M \colon \Omega \rightrightarrows X$ una multifunción medible que tiene valores convexos y cerrados. Entonces, existe un normal integrand $\varphi \colon \Omega \times X \to [0, \infty)$ convexo tal que para todo $\omega \in \Omega$, la función $x \mapsto \varphi_\omega(x)$ es $\mathcal{C}^\infty$ y

$$M(\omega) = \{x \in X \colon \varphi_\omega(x) = 0\} \text{ para todo } \omega \in \Omega.$$

Además, para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\sup_{(\omega,x)\in\Omega\times X} \|D^k\varphi_\omega(x)\| < \infty. \tag{2.7}$$

Demostración. Se define $H = \{0\}$. Es suficiente aplicar el Teorema 2.0.5 a la multifunción $\hat{M} \colon \Omega \times H \rightrightarrows X$ definida por $\hat{M}(\omega, x) = M(\omega)$. En efecto, es claro que $\operatorname{gph} \hat{M}_\omega = H \times M(\omega)$ y, entonces, $\omega \rightrightarrows \operatorname{gph} \hat{M}_\omega$ es una multifunción aleatoria (i.e., es medible con valores cerrados). Además, para todo $\omega \in \Omega$, $\hat{M}_\omega$ es p-w-usc (puesto que es constante). Entonces, por el Teorema 2.0.5, se puede encontrar un normal integrand $\phi \colon \Omega \times \{0\} \times X \to [0, \infty)$ que es $\mathcal{C}^\infty$ y cumple las propiedades descritas en dicho teorema. Entonces, la función $\varphi_\omega := \phi_\omega(0, \cdot)$ es un normal integrand $\mathcal{C}^\infty$ sobre $\Omega \times X$. Además, se tiene que para todo $\omega \in \Omega$,

$$y \in M(\omega) \iff (0, y) \in \operatorname{gph} \hat{M}_\omega \iff \phi_\omega(0, y) = 0 \iff \varphi_\omega(y) = 0.$$

La convexidad de la función φ_ω se sigue del Teorema 2.0.5-(c). Finalmente, (2.7) se concluye del Teorema 2.0.5-(e). $\square$

El Teorema 2.0.5 permite dar una representación para multifunciones medibles con valores cerrados sobre un espacio de Hilbert separable.

Corolario 2.0.8 Sea H un espacio de Hilbert separable y $M\colon \Omega \rightrightarrows H$ una multifunción medible con valores cerrados. Entonces, existe un normal integrand $\varphi\colon \Omega \times H \to [0,\infty)$ tal que

(a) Para todo $\omega \in \Omega$, $M(\omega) = \{x \in H \colon \varphi_\omega(x) = 0\}$.

(b) Para todo $\omega \in \Omega$, la función $x \mapsto \varphi_\omega(x)$ es $\mathcal{C}^\infty$ y para algún $L \geq 0$ la función $x \mapsto \varphi_\omega(x) + L\|x\|^2$ es convexa.

(c) Para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, existen constantes $a_k, b_k > 0$ tal que para todo $x \in H$

$$\sup_{\omega\in\Omega} \|D^k \varphi_\omega(x)\| \leq a_k \|x\|^k + b_k. \tag{2.8}$$

Observación 2.0.9 Es importante mencionar que en el Corolario 2.0.8, a pesar de que los valores de $M(\omega)$ son simplemente cerrados, la función obtenida φ_ω no está tan lejos de ser convexa. De hecho, φ_ω es la diferencia de funciones convexas: $\varphi_\omega = (\varphi_\omega + L\|\cdot\|^2) - L\|\cdot\|^2$.

Demostración. Se considera $X = \{0\}$ y la multifunción $\hat{M}\colon \Omega \times H \rightrightarrows X$ definida por

$$\hat{M}(\omega, x) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x \in M(\omega), \\ \emptyset & \text{si } x \notin M(\omega). \end{cases}$$

Es claro que $\operatorname{gph} \hat{M}_\omega = M(\omega) \times \{0\}$. Entonces, $\hat{M}$ es una multifunción aleatoria. Para probar que $\hat{M}$ es p-w-usc, sea $\omega \in \Omega$ y se supone que $\hat{M}_\omega(x) \subset \{u \in X \colon \langle y^*, u\rangle < \alpha\}$ para $y^* \in X^* = \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Por un lado, si $\hat{M}_\omega(x) = \{0\}$, entonces claramente $\{u \in X \colon \langle y^*, u\rangle < \alpha\} = X$. Por otro lado, si $\hat{M}_\omega(x) = \emptyset$, entonces $x \notin M(\omega)$. Dado que $M(\omega)$ es cerrado, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{B}_\varepsilon(x) \cap M(\omega) = \emptyset$ y entonces $\hat{M}_\omega(x') = \emptyset$ si $x' \in \mathbb{B}_\varepsilon(x)$. Entonces, para cada $\eta > 0$, $\hat{M}_\omega(x') \subset \{u \in X \colon \langle y^*, u\rangle < \alpha + \eta\}$. Por lo tanto, M es p-w-usc.
Gracias al Teorema 2.0.5, existe $\phi\colon \Omega \times H \times \{0\} \to [0,\infty)$, que es un normal integrand $\mathcal{C}^\infty$ y representa a la multifunción $\hat{M}$. Entonces, la función $\varphi_\omega := \phi_\omega(\cdot, 0)$ es un normal integrand $\mathcal{C}^\infty$ tal que para todo $\omega \in \Omega$

$$x \in M(\omega) \iff (x,0) \in \operatorname{gph} \hat{M}_\omega \iff \phi_\omega(x,0) = 0 \iff \varphi_\omega(x) = 0.$$

Finalmente, gracias al Teorema 2.0.5-(d), la función $x \mapsto \varphi_\omega(x) + L\|x\|^2$ es convexa para algún $L \geq 0$, además la desigualdad (2.8) se tiene gracias a 2.0.5-(e). □

Por último, el siguiente teorema muestra una representación de multifunciones con valores en el espacio dual, similar al Corolario 2.0.7, donde se prueba que la semicontinuidad inferior de los epígrafos de las funciones soporte induce continuidad en ambas variables del normal integrand.

Teorema 2.0.10 Sea T un espacio métrico y X un espacio de Banach separable. Si $C\colon T \rightrightarrows X^*$ es una multifunción con valores convexos, débil* cerrados y no vacíos tal que $t \rightrightarrows \operatorname{epi} \sigma_{C(t)}$ es lsc. Entonces, existe un normal integrand convexo $\varphi\colon T \times X^* \to [0,\infty)$ donde φ_t es $\mathcal{C}^\infty$ para todo $t \in T$ y cumple que

$$x^* \in C(t) \Leftrightarrow \varphi(t,x^*) = 0 \text{ para todo } (t,x^*) \in T \times X^*.$$

Además, φ puede ser escogido tal que, para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la función $(t,x^*) \mapsto D^k\varphi_t(x^*)$ es continua con $\sup\limits_{(t,x^*)\in T\times X^*} \|D^k\varphi_t(x^*)\| < \infty$.

Demostración. Es claro que para todo $t \in T$, el conjunto $\operatorname{epi}\sigma_{C(t)} \subset X \times \mathbb{R}$ es cerrado, convexo y además es no vacío pues $(0,0) \in \operatorname{epi}\sigma_{C(t)}$. Luego, como consecuencia de [38, Theorem 6.3.11], existen funciones continuas $z_n\colon T \to X$ y $\gamma_n\colon T \to \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in T$

$$\operatorname{epi}\sigma_{C(t)} = \operatorname{cl}((z_n(t),\gamma_n(t))_n).$$

Entonces, se considera la función $\varphi\colon T \times X^* \to [0,\infty)$ definida por

$$\varphi(t,x^*) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\frac{\theta_n(t,x^*)}{\xi_n(t)},$$

donde

$$\theta_n(t,x^*) := \theta\left(\frac{1}{\xi_n(t)}(\langle x^*, z_n(t)\rangle - \gamma_n(t))\right) \text{ y } \xi_n(t) := 1 + \|z_n(t)\| + |\gamma_n(t)|.$$

Aquí θ es la función $\mathcal{C}^\infty$ y convexa definida en (2.5). Entonces, se observa que

$$\begin{aligned}
\varphi(t,x^*) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \theta_n(t,x^*) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\\
&\Longleftrightarrow \quad \theta\left(\frac{1}{\xi_n(t)}(\langle x^*, z_n(t)\rangle - \gamma_n(t))\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\\
&\Longleftrightarrow \quad \langle x^*, z_n(t)\rangle \leq \gamma_n(t),\ \forall n \in \mathbb{N}\\
&\Longleftrightarrow \quad \langle x^*, y\rangle \leq \alpha,\ \forall (y,\alpha) \in \operatorname{epi}\sigma_{C(t)}. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Luego, si $x^* \in C(t)$ y $(y,\alpha) \in \operatorname{epi}\sigma_{C(t)}$ se tiene que $\langle x^*, y\rangle \leq \sigma_{C(t)}(y) \leq \alpha$ y entonces $\varphi(t,x^*) = 0$. Recíprocamente, si $\varphi(t,x^*) = 0$, por contradicción, se supone que $x^* \notin C(t)$, gracias a que $C(t)$ es débil* cerrado y convexo, por el Teorema de Hahn-Banach (ver [47, Theorem 3.4 (b)]) sigue que existe $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tal que para todo $y^* \in C(t)$

$$\langle y^*, x\rangle + \varepsilon \leq \alpha \leq \langle x^*, x\rangle,$$

y por tanto $\sigma_{C(t)}(x) + \varepsilon \leq \langle x^*, x\rangle$, luego $(x, \langle x^*, x\rangle - \varepsilon) \in \operatorname{epi}\sigma_{C(t)}$ y entonces por (2.9) $\langle x^*, x\rangle \leq \langle x^*, x\rangle - \varepsilon$ lo que es falso y se llega a una contradicción, entonces $x^* \in C(t)$. Por tanto,

$$\varphi(t,x^*) = 0 \iff x^* \in C(t).$$

El resultado sigue de argumentos similares a los dados en la prueba del Teorema 2.0.5. $\square$

2.1. Aproximación de multifunciones aleatorias y funciones

En esta sección se mostrarán algunas aplicaciones del Teorema 2.0.5, relacionadas con la aproximación suave de multifunciones aleatorias y normal integrands.

Corolario 2.1.1 Sea H un espacio de Hilbert separable y X un espacio de Banach separable. Sea $M\colon \Omega \times H \rightrightarrows X$ una multifunción aleatoria tal que, para todo $\omega \in \Omega$, M_ω es p-w-usc con valores convexos. Entonces, existe una secuencia de multifunciones aleatorias $M^k\colon \Omega\times H \rightrightarrows X$ con valores convexos tal que:

(a) Para todo $\omega \in \Omega$, $\operatorname{gph} M_\omega^{k+1} \subset \operatorname{gph} M_\omega^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{gph} M_\omega^k = \operatorname{gph} M_\omega.$$

(b) Para todo $\omega \in \Omega$, $\operatorname{cl}^{\|\cdot\|\times w}(\limsup \operatorname{gph} M_\omega^k) \subset \operatorname{gph} M_\omega$, donde $\operatorname{cl}^{\|\cdot\|\times w}$ denota la adherencia (secuencial) respecto a la topología producto en $H \times X$ cuando a X se le dota de la topología débil.

(c) Para todo $\omega \in \Omega$, si $x \in \operatorname{dom}(M_\omega)$ y $k \in \mathbb{N}$, existe una vecindad U de x tal que para todo $x' \in U$, los conjuntos $M_\omega^k(x')$ son cuerpos convexos $\mathcal{C}^\infty$.

(d) Si para $\omega \in \Omega$, $\operatorname{dom}(M_\omega) = H$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, la frontera del conjunto $\operatorname{gph} M_\omega^k$ es una subvariedad $\mathcal{C}^\infty$.

Demostración. Por el Teorema 2.0.5, existe una función φ que es $\mathcal{C}^\infty$ tal que para todo $\omega \in \Omega$

$$(x, y) \in \operatorname{gph}(M_\omega) \iff \varphi_\omega(x, y) = 0.$$

Se considera $\varepsilon_k \downarrow 0$ y la multifunción $M^k(\omega, x) := \{z \in X\colon \varphi_\omega(x, z) \le \varepsilon_k\}$. Se probará que $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es la secuencia de multifunciones requerida.

Afirmación 1: M^k es multifunción aleatoria

Demostración de la Afirmación 1: Por la continuidad de φ_ω y la medibilidad de $\varphi(\cdot, x, y)$ para todo $(x, y) \in H \times X$, es claro que M^k es una multifunción aleatoria con valores convexos. Entonces, por la continuidad de φ_ω, la multifunción $\omega \rightrightarrows \operatorname{gph}(M_\omega^k)$ es medible con valores cerrados. Además, por la convexidad y continuidad de $\varphi_\omega(x, \cdot)$, el conjunto $M^k(\omega, x)$ es convexo y cerrado.

Afirmación 2: La parte a) se tiene.

Demostración de la Afirmación 2: Por un lado, es claro que $\operatorname{gph}(M_\omega) \subset \operatorname{gph}(M_\omega^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por otro lado, para todo $(x, y) \in H \times X$ tal que $\varphi_\omega(x, y) \le \varepsilon_k$ y para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $\varphi_\omega(x, y) = 0$. En efecto, dado que $\varepsilon_k \to 0^+$, resulta que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{gph} M_\omega^k = \operatorname{gph} M_\omega$ para todo $\omega \in \Omega$.

Afirmación 3: La parte b) se tiene.

Demostración de la Afirmación 3: Sea $(x, y) \in \operatorname{cl}^{\|\cdot\|\times w}(\limsup \operatorname{gph} M_\omega^k)$. Entonces, existe una secuencia $(x_{n_k}, y_{n_k}) \in \operatorname{gph}(M_\omega^{n_k})$, donde $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, tal que $x_{n_k} \to x$ y $y_{n_k} \rightharpoonup y$. Entonces, dado que φ es $\|\cdot\|$-débil continua y $\varphi_\omega(x_{n_k}, y_{n_k}) \le \varepsilon_{n_k}$, se sigue que $\varphi_\omega(x,y)=0$. Entonces, $(x,y)\in \operatorname{gph} M_\omega$ y así

$$\operatorname{cl}^{\|\cdot\|\times w}(\limsup \operatorname{gph} M_\omega^k) \subset \operatorname{gph} M_\omega \text{ para todo } \omega\in\Omega.$$

Afirmación 4: La parte c) se tiene
Demostración de la Afirmación 4: Se fija $x\in\operatorname{dom}(M_\omega)$ y $k\in\mathbb{N}$. Entonces, existe $y\in X$ tal que $\varphi_\omega(x,y)=0$. Por la continuidad de φ_ω, es posible encontrar una vecindad $U\times V$ de (x,y) tal que la siguiente implicación se tiene:

$$(x',y')\in U\times V \Rightarrow \varphi_\omega(x',y')<\varepsilon_k.$$

Sea $x'\in U$. Entonces, dado que $V\subset M_\omega^k(x')$, $M_\omega^k(x')$ es un convexo, cerrado de interior no vacío. Sea $z\in \operatorname{bd} M_\omega^k(x') := \{v\in X\colon \varphi_\omega(x',v)=\varepsilon_k\}$. Entonces, observando que $\varphi_\omega(x',\cdot)$ es una función $\mathcal{C}^\infty$ y convexa, se obtiene que

$$D_y\varphi_\omega(x',v)=0 \iff v \text{ es un mínimo de } \varphi_\omega(x',\cdot).$$

Además, $\varphi_\omega(x',y)<\varepsilon_k=\varphi_\omega(x',z)$. Entonces, $D_y\varphi(x',z)\neq 0$ para todo $z\in\operatorname{bd} M_\omega^k(x')$, entonces por la Proposición 1.2.18-(b), $M_\omega^k(x')$ es un cuerpo convexo $\mathcal{C}^\infty$.
Afirmación 5: La parte d) se tiene:
Demostración de la afirmación 5: Suponga que $\operatorname{dom}(M_\omega)=H$. Es claro que el conjunto $\{(x,y)\in H\times X\colon \varphi_\omega(x,y)<\varepsilon_k\}$ es no vacío. Entonces, $\operatorname{gph} M_\omega^k$ tiene interior no vacío. Además, gracias a que $\operatorname{dom}(M_\omega)=H$ y $\varphi_\omega(x,\cdot)$ es convexa para todo $x\in H$,

$$\operatorname{bd}\operatorname{gph} M_\omega^k = \{(x,y)\in H\times X\colon \varphi_\omega(x,y)=\varepsilon_k\}.$$

Sea $(x,y)\in\operatorname{bd}\operatorname{gph} M_\omega^k$, como $x\in\operatorname{dom} M_\omega$, sigue que existe $y'\in X$ tal que $\varphi_\omega(x,y')=0$. Entonces, si $D\varphi(x,y)=0$, se tiene que $D_y\varphi(x,y)=0$. Luego, por convexidad, y es un mínimo de la función $\varphi_\omega(x,\cdot)$. Sin embargo, dado que $\varphi_\omega(x,y')<\varphi_\omega(x,y)$, se obtiene una contradicción. Por lo tanto, $D\varphi_\omega(x,y)\neq 0$ y se puede aplicar la Proposición 1.2.18-(a) para concluir que $\operatorname{bd}\operatorname{gph} M_\omega^k$ es una subvariedad $\mathcal{C}^\infty$. □

El resultado anterior entrega una nueva técnica para aproximar multifunciones aleatorias. En efecto, en el siguiente resultado, se construye una secuencia de aproximaciones cuyos valores son cuerpos convexos $\mathcal{C}^\infty$. Acá se hará uso de la noción de convergencia esencialmente uniforme de multifunciones la cual fue definida en (1.5).

Corolario 2.1.2 Sea $M\colon\Omega\rightrightarrows\mathbb{R}^d$ una multifunción medible con valores cerrados, convexos y no vacíos. Entonces, existe una secuencia de multifunciones medibles $S_k\colon\Omega\rightrightarrows\mathbb{R}^d$ convergiendo esencialmente uniforme a M y cuyos valores son cuerpos convexos $\mathcal{C}^\infty$ para todo $\omega\in\Omega$.

Demostración. Sea $X=\mathbb{R}^d$ y $H=\{0\}$ y al igual que en la prueba del Corolario 2.0.7, se considera la multifunción aleatoria $\hat{M}(\omega,x):=M(\omega)$. Se toma la secuencia de multifunciones aleatorias $(M_k)_k$ asociada a la secuencia $(\varepsilon_k)_k$ con $\varepsilon_k\to 0^+$ que entrega el Corolario 2.1.1. Entonces, los valores de M_k son cuerpos convexos $\mathcal{C}^\infty$, y por el Corolario 2.1.1-(a), se tiene que para todo $\omega\in\Omega$

$$\bar{d}(M_k(\omega),M(\omega))\to 0 \text{ cuando } k\to\infty. \tag{2.10}$$

donde $\bar{d}$ es la distancia definida en (1.4). Se toma la función $f\colon \Omega\times\mathbb{N}\to[0,\infty)$ definida por $f(\omega,k)=\bar{d}(M_k(\omega),M(\omega))$. Usando la definición de la distancia $\bar{d}$ y la Proposición 1.4.3-(b), es claro que $\omega\mapsto f(\omega,k)$ es medible para todo $k\in\mathbb{N}$. Luego, para todo $n\in\mathbb{N}$, la multifunción $J_n\colon \omega\rightrightarrows\{k\in\mathbb{N}\colon f(\omega,k)\leq 1/n\}$ es medible pues si I es abierto en $\mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} J_n^-(I) &= \{\omega\in\Omega\colon J_n(\omega)\cap I\neq\emptyset\} \\ &= \bigcup_{k\in I\cap\mathbb{N}}\{\omega\in\Omega\colon k\in J_n(\omega)\} \\ &= \bigcup_{k\in I\cap\mathbb{N}}\{\omega\in\Omega\colon f(\omega,k)\leq 1/n\}, \end{aligned}$$

que es medible ya que $\omega\mapsto f(\omega,k)$ es medible y la unión es numerable. Además, dada la convergencia (2.10), $J_n(\omega)$ es no vacío y cerrado para todo $\omega\in\Omega$. Entonces, existe una selección medible $\lambda_n\colon\Omega\to\mathbb{N}$ tal que

$$\bar{d}(M_{\lambda_n(\omega)}(\omega),M(\omega))\leq\frac{1}{n}\text{ para todo }\omega\in\Omega.$$

Finalmente, por (2.10), la multifunción medible $S_n\colon\omega\rightrightarrows M_{\lambda_n(\omega)}(\omega)$ converge esencialmente uniforme a M con respecto a la métrica definida en (1.4). □

El siguiente resultado trata de aproximación de normal integrands, por normal integrands $\mathcal{C}^\infty$.

Teorema 2.1.3 Sea $f\colon\Omega\times H\times X\to\mathbb{R}$ un normal integrand. Se asume que f es convexa respecto a la variable en X y que la función conjugada

$$x\mapsto f_\omega^*(x,x^*):=\sup_{y\in X}\langle x^*,y\rangle-f_\omega(x,y) \tag{2.11}$$

es semicontinua superior para todo $\omega\in\Omega$ y $x^*\in X^*$. Entonces, existe una secuencia creciente de normal integrands $\mathcal{C}^\infty$, $f_k\colon\Omega\times H\times X\to\mathbb{R}$ tales que para todo $\omega\in\Omega$

$$\lim_k f_k(\omega,x,z)=\sup_k f_k(\omega,x,z)=f(\omega,x,z)\quad\text{para todo }(x,z)\in H\times X. \tag{2.12}$$

Además, las funciones f_k son convexas con respecto a la variable en X.

Demostración. Se va a considerar la multifunción $M\colon\Omega\times H\to X\times\mathbb{R}$ definida por

$$M_\omega(x):=\{(y,\alpha)\in X\times\mathbb{R}\colon f_\omega(x,y)\leq\alpha\}.$$

Se observa que $\operatorname{gph} M_\omega=\operatorname{epi} f_\omega$ para todo $\omega\in\Omega$.
Afirmación 1: La multifunción M es aleatoria con valores convexos y cerrados. Además, para cada $\omega\in\Omega$, $x\rightrightarrows M_\omega(x)$ es p-w-usc.
Demostración de la Afirmación 1: Dado que f es un normal integrand, M es una multifunción aleatoria con valores no vacíos. La convexidad de los valores $M_\omega(x)$ sigue de la convexidad de f con respecto a la variable sobre X.
Para probar la propiedad p-w-usc, se toma $w^*\in X^*$ y $\alpha,\gamma\in\mathbb{R}$ tal que

$$M_\omega(x)\subset C_{w^*,\alpha,\gamma}:=\{(u,\beta)\in X\times\mathbb{R}\colon\langle w^*,u\rangle+\alpha\beta<\gamma\}.$$

Por la definición de $C_{w^*,\alpha,\gamma}$, sigue que $\alpha \le 0$.
Si $\alpha = 0$, entonces $w^* = 0$ y $\gamma > 0$. Por tanto, $C_{w^*,\alpha,\gamma} = X \times \mathbb{R}$, y en este caso se tiene la propiedad.
Por otro lado, si $\alpha < 0$, entonces

$$\langle |\alpha|^{-1} w^*, u\rangle - f_\omega(x,u) < \gamma|\alpha|^{-1} \text{ para todo } u \in X,$$

lo que implica que $f^*_\omega(x, |\alpha|^{-1}w^*) \le \gamma|\alpha|^{-1}$. Por la hipótesis de semicontinuidad superior de la función conjugada (2.11), para todo $\eta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f^*(x', |\alpha|^{-1}w^*) < (\gamma+\eta)|\alpha|^{-1}$ para todo $x' \in \mathbb{B}_\varepsilon(x)$. Por lo tanto, para todo $u \in X$

$$\langle |\alpha|^{-1} w^*, u\rangle - f_\omega(x',u) < (\gamma+\eta)|\alpha|^{-1}.$$

Finalmente, si $(u,\beta) \in M_\omega(x')$ para $x' \in \mathbb{B}_\varepsilon(x)$, entonces $(u,\beta) \in C_{w^*,\alpha,\gamma+\eta}$, lo que prueba que $H \ni x \rightrightarrows M_\omega(x)$ es p-w-usc para todo $\omega \in \Omega$.
Afirmación 2: Existe una secuencia de normal integrands $(f^k)_k$ satisfaciendo lo establecido en el Teorema.
Demostración de la Afirmación 2: Dado que $\operatorname{dom} M_\omega = H$ para todo $\omega \in \Omega$, se puede aplicar el Corolario 2.1.1-(d) para obtener una secuencia de multifunciones aleatorias $(M^k)_k$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\omega \in \Omega$, la frontera del conjunto $\operatorname{gph} M^k_\omega$ es una subvariedad $\mathcal{C}^\infty$ y

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{gph} M^k_\omega = \operatorname{gph} M_\omega \ \forall \omega \in \Omega.$$

Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe un normal integrand $f^k\colon \Omega \times H \times X \to \mathbb{R}$ que es $\mathcal{C}^\infty$ tal que $\operatorname{gph} M^k_\omega = \operatorname{epi} f^k_\omega$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\omega \in \Omega$. Para probar esto, notar que $\operatorname{gph} M^k_\omega = \{(x,y,\alpha)\colon \varphi_\omega(x,y,\alpha) \le \varepsilon_k\}$, además la función $\alpha \mapsto \varphi_\omega(x,y,\alpha)$ es decreciente para todo $(x,y) \in H \times X$, por lo tanto $\operatorname{gph} M^k_\omega$ es el epígrafo de alguna función (ver e.g. [45, pag. 7]), esa función $\mathcal{C}^\infty$ dado que la frontera de $\operatorname{gph} M^k_\omega$ es una variedad $\mathcal{C}^\infty$ de codimensión 1. Además, para todo $\omega \in \Omega$ y $k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1}_\omega \le f^k_\omega \le f_\omega$ puntualmente. Luego,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} f^k_\omega(x,y) \le f_\omega(x,y) \text{ para todo } (x,y) \in H \times X.$$

Ahora, si $(x,y) \in H \times X$, se toma $\alpha := \sup_{k\in\mathbb{N}} f^k_\omega(x,y)$, el cual satisface que $(x,y,\alpha) \in \operatorname{gph} M^k_\omega$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Finalmente, $(x,y,\alpha) \in \operatorname{gph} M_\omega$, entonces $f_\omega(x,y) \le \alpha$, lo que prueba (2.12). □

El siguiente resultado muestra condiciones suficientes que permiten verificar la condición (2.11) del Teorema 2.1.3.

Proposición 2.1 *Bajo las hipótesis del Teorema 2.1.3, la condición de semicontinuidad superior* (2.11) *se cumple en los siguientes casos:*

(a) Para todo $\omega \in \Omega$, la función $f_\omega\colon H \times X \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua.

(b) El espacio X es reflexivo, para todo $\omega \in \Omega$, si $x_n \to x$ y $y_n \rightharpoonup y$, entonces

$$f_\omega(x,y) \le \limsup f_\omega(x_n,y_n),$$

y para todo $\omega \in \Omega$ y $x \in H$, existe $\delta > 0$, $\alpha > 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha\|y\|^2 + \beta \leq f_\omega(x', y) \text{ para todo } (x', y) \in \mathbb{B}_\delta(x) \times X. \tag{2.13}$$

Demostración. (a): Fijar $\omega \in \Omega$ y sea $y^* \in X^*$, $\varepsilon > 0$ y una secuencia $(x_n)_n \subset H$ convergiendo a x. Por la continuidad uniforme de f_ω, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - x'\| < \delta$ y $\|y - y'\| < \delta$ entonces $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$. Luego, ya que $x_n \to x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \delta$ para $n \geq N$. Entonces, para todo $y \in X$ y $n \geq N$, $|f_\omega(x_n, y) - f_\omega(x, y)| < \varepsilon$. Entonces, para todo $n \geq N$,

$$\sup_{y \in X} f_\omega(x, y) - f_\omega(x_n, y) \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto, usando la última desigualdad, se obtiene que para todo $n \geq N$,

$$\begin{aligned} f_\omega^*(x_n, y^*) &= \sup_{y \in X} \langle y^*, y\rangle - f_\omega(x_n, y) \\ &= \sup_{y \in X} \langle y^*, y\rangle - f_\omega(x, y) + f_\omega(x, y) - f_\omega(x_n, y) \\ &\leq \sup_{y \in X} \langle y^*, y\rangle - f_\omega(x, y) + \sup_{y \in X} f_\omega(x, y) - f_\omega(x_n, y) \\ &\leq f_\omega^*(x, y^*) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando $n \to \infty$ en la desigualdad anterior, se obtiene que, para todo $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n \to \infty} f_\omega^*(x_n, y^*) \leq f_\omega^*(x, y^*) + \varepsilon,$$

lo que implica (2.11).
(b) Fijar $y^* \in X^*$ y $\omega \in \Omega$. Se probará primero que la función $x \mapsto f_\omega^*(x, y^*)$ toma valores finitos. En efecto, por (2.13), para todo $y \in X$

$$\begin{aligned} \langle y^*, y\rangle - f_\omega(x, y) &\leq \|y^*\|\|y\| - \alpha\|y\|^2 - \beta \\ &= -\alpha\left(\|y\| - \frac{\|y^*\|}{2\alpha}\right)^2 - \beta - \frac{\|y^*\|^2}{4\alpha^2} \\ &\leq -\beta - \frac{\|y^*\|^2}{4\alpha^2}, \end{aligned}$$

lo que implica que $f_\omega^*(x, y^*) \leq -\beta - \frac{\|y^*\|^2}{4\alpha^2} < \infty$ para todo $x \in H$.
Para probar la semicontinuidad superior, se procede por contradicción. Si la función $x \mapsto f_\omega^*(x, y^*)$ no es semicontinua superior en $x \in H$, existe $(x_n) \subset H$ convergiendo a x y $\varepsilon > 0$ tal que

$$f_\omega^*(x, y^*) + \varepsilon \leq \limsup_{n \to \infty} f_\omega^*(x_n, y^*).$$

Entonces, existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$, tal que

$$f_\omega^*(x, y^*) + \frac{\varepsilon}{2} \leq f_\omega^*(x_{n_k}, y^*).$$

Sea $\delta > 0$ tal que (2.13) se tiene. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \in \mathbb{B}_\delta(x)$ para todo $k \geq N$. Usando la definición de la conjugada, se puede encontrar $(y_{n_k})_k \subset X$ tal que para todo k se tiene que

$$f_\omega^*(x_{n_k}, y^*) \le \frac{\varepsilon}{4} + \langle y^*, y_{n_k}\rangle - f_\omega(x_{n_k}, y_{n_k}).$$

Por lo tanto, para todo k

$$f_\omega^*(x, y^*) + f_\omega(x_{n_k}, y_{n_k}) + \frac{\varepsilon}{4} \le \langle y^*, y_{n_k}\rangle. \tag{2.14}$$

Además, usando (2.13), para $k \ge N$ se tiene que

$$f_\omega^*(x, y^*) + \frac{\varepsilon}{4} \le \langle y^*, y_{n_k}\rangle - f_\omega(x_{n_k}, y_{n_k}) \le -\alpha\left(\|y_{n_k}\| - \frac{\|y^*\|}{2\alpha}\right)^2 - \beta - \frac{\|y^*\|^2}{4\alpha^2},$$

lo que muestra que la secuencia (y_{n_k}) es acotada. Entonces, sin pérdida de generalidad, se puede asumir que y_{n_k} converge débil a algún $y \in X$ (pues X es reflexivo). Entonces, por hipótesis, $f_\omega(x, y) \le \limsup f_\omega(x_{n_k}, y_{n_k})$ y $\langle y^*, y_{n_k}\rangle \to \langle y^*, y\rangle$. Finalmente, si se toma límite en (2.14), se obtiene una contradicción con la definición de conjugada. $\square$

Para probar el siguiente resultado, será necesario extender la noción de función prox-acotada al contexto de normal integrands (ver, e.g., [45, Definition 1.23]). Un normal integrand $f\colon \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ se dice *prox-acotado* si existe una función medible $\lambda\colon \Omega \to (0, \infty)$ tal que para todo $\omega \in \Omega$ existe $x \in \mathbb{R}^d$ satisfaciendo

$$e_{\lambda(\omega)} f_\omega(x) := \inf_{z\in\mathbb{R}^d}\{f_\omega(z) + \frac{1}{2\lambda(\omega)}\|x - z\|^2\} > -\infty.$$

El siguiente resultado es una versión funcional del Corolario 2.1.2, también puede ser visto como una extensión del Teorema 2.1.3 para funciones a valores en la recta extendida, definidas sobre espacios de dimensión finita.

Corolario 2.1.4 Sea $f\colon \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ un normal integrand prox-acotado. Entonces, existe una secuencia $(f^k)_k$ de normal integrands que son $\mathcal{C}^\infty$, cumplen que $f^k \le f$, y convergen epigráficamente uniforme a f.

Demostración. Como f es prox-acotada y [45, Theorem 1.25], existe una función $\lambda_f\colon \Omega \to (0, \infty)$ tal que para todo $\lambda \in (0, \lambda_f(\omega)]$ la función

$$\mathrm{e}_\lambda f_\omega(x) := \inf_{y\in\mathbb{R}^d} f_\omega(y) + \frac{1}{2\lambda}\|x - y\|^2,$$

toma valores finitos, es continua y $\mathrm{e}_\lambda f_\omega(x) \to f_\omega(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Además, notar que $g\colon (\omega, y) \mapsto f_\omega(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y\|^2$ es un normal integrand y $\mathrm{e}_\lambda f_\omega(x) = \frac{1}{2\lambda}\|x\|^2 - g_\omega^*(\frac{1}{\lambda}x)$. Por la Proposición 1.4.2, g^* es un normal integrand y así $(\omega, x) \mapsto \mathrm{e}_\lambda f_\omega(x)$ es $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-medible.
Afirmación 1: Para todo $n \in \mathbb{N}$, la multifunción

$$M_n\colon \omega \rightrightarrows \{\lambda \in (0, \lambda_f(\omega))\colon \bar{d}(\operatorname{epi} f_\omega, \operatorname{epi} \mathrm{e}_\lambda f_\omega) \le 1/n\},$$

es grafo-medible con valores no vacíos.
Demostración de la Afirmación 1: Notar que $\omega \rightrightarrows \operatorname{epi} f_\omega$ y $\omega \rightrightarrows \operatorname{cl}(\operatorname{epi} \mathrm{e}_\lambda f_\omega)$ son multifunciones medibles por la Proposición 1.4.1. Si $\varphi(\omega, \lambda) := \bar{d}(\operatorname{epi} f_\omega, \operatorname{epi} \mathrm{e}_\lambda f_\omega)$, usando la Proposición 1.4.3 y la definición de la métrica $\bar{d}$, se sigue que $\omega \mapsto \varphi(\omega, \lambda)$ es medible para todo $\lambda > 0$.

Por otro lado, por [45, Theorem 1.25], se tiene que $\lambda \mapsto \varphi(\omega,\lambda)$ es continua en $(0,\lambda_f(\omega)]$ para todo $\omega \in \Omega$, ahora, se define

$$\phi(\omega,\lambda) = \begin{cases} \varphi(\omega,\lambda) & \text{si } \lambda < \lambda_f(\omega) \\ \varphi(\omega,\lambda_f(\omega)) & \text{si } \lambda \geq \lambda_f(\omega), \end{cases}$$

es claro que para todo $\lambda > 0$, la función $\phi(\cdot,\lambda)$ es medible y para todo $\omega \in \Omega$, la función $\lambda \mapsto \phi(\omega,\lambda)$ es continua por construcción, luego por la Proposición 1.4.4, ϕ es $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}((0,\infty))$-medible, además

$$\begin{aligned} \operatorname{gph}(M_n) &= \{(\omega,\lambda) \in \Omega \times (0,\lambda_f(\omega)) \colon \varphi(\omega,\lambda) \leq 1/n\} \\ &= \phi^{-1}([0,1/n]) \cap \{(\omega,\lambda) \in \Omega \times (0,\infty) \colon \lambda < \lambda_f(\omega)\} \end{aligned}$$

que es medible, esto indica que M_n es grafo medible, además como $\mathrm{e}_\lambda f_\omega(x) \to f_\omega(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$ se tiene que $\varphi(\omega,\lambda) \to 0$ si $\lambda \to 0^+$ para todo $\omega \in \Omega$, luego $M_n(\omega)$ es no vacío para todo $\omega \in \Omega$.

Entonces, en virtud del Teorema 1.4.6, es posible encontrar una función medible $\lambda_n \colon \Omega \to \mathbb{R}$ con $\lambda_n(\omega) \in (0,\lambda_f(\omega))$ y tal que

$$\bar{d}(\operatorname{epi} f_\omega, \operatorname{epi} \mathrm{e}_{\lambda_n(\omega)} f_\omega) \leq 1/n \text{ para todo } \omega \in \Omega.$$

Se define $g^n_\omega := \mathrm{e}_{\lambda_n(\omega)} f_\omega$, que es un normal integrand (por la misma razón por la cual $(\omega,x) \mapsto \mathrm{e}_\lambda f_\omega$ lo es). Por el Teorema 2.1.3 (aplicado sobre $H = \mathbb{R}^d$ y $X = \{0\}$), se puede encontrar una secuencia $(g^n_k)_k$ de normal integrands $\mathcal{C}^\infty$ tal que $g^n_k(\omega,\cdot) \leq g^n_{k+1}(\omega,\cdot) \leq g^n(\omega,\cdot)$ en Ω y

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} g^n_k(\omega,x) = g^n(\omega,x) \text{ para todo } x \in H.$$

Afirmación 2: Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un normal integrand $\hat{g}^n$ que es $\mathcal{C}^\infty$ tal que

$$\bar{d}(\operatorname{epi} \hat{g}^n(\omega,\cdot), \operatorname{epi} g^n(\omega,\cdot)) \leq 1/n \quad \text{en } \Omega.$$

Demostración de la Afirmación 2: Se define la multifunción

$$G_n \colon \omega \in \Omega \rightrightarrows \{k \in \mathbb{N} \colon \bar{d}(\operatorname{epi} g^n_k(\omega,\cdot), \operatorname{epi} g^n(\omega,\cdot)) \leq 1/n\}.$$

Usando el mismo argumento del Corolario 2.1.2, se tiene que G_n es una multifunción medible con valores no vacíos, entonces, por el Teorema 1.4.6, existe una función $k \colon \Omega \to \mathbb{N}$ medible tal que

$$\bar{d}(\operatorname{epi} g^n_{k(\omega)}(\omega,\cdot), \operatorname{epi} g^n(\omega,\cdot)) \leq 1/n \quad \text{en } \Omega.$$

Luego, se define $\hat{g}^n := g^n_{k(\cdot)}$ y se observa que es medible y $\mathcal{C}^\infty$.
Entonces, considerando $f^n_\omega := \hat{g}^n(\omega,\cdot)$, se tiene que μ-c.t.p. en Ω

$$\bar{d}(\operatorname{epi} f^n_\omega, \operatorname{epi} f_\omega) \leq \bar{d}(\operatorname{epi} f^n_\omega, \operatorname{epi} g^n_\omega) + \bar{d}(\operatorname{epi} g^n_\omega, \operatorname{epi} f_\omega) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n},$$

sigue que $(f^n)_n$ converge epigráficamente uniforme a f. Finalmente, $(f^n)_n$ es la secuencia deseada. $\square$

2.2. Selecciones integrables como minimizadores de funcionales integrales

En esta sección, se hará uso del Teorema 2.0.5 para probar que los conjuntos de selecciones p-integrables de multifunciones medibles pueden ser representados como el conjunto de minimizadores de un funcional integral diferenciable y convexo.
El primer resultado en esta parte, es en el caso de una multifunción medible con valores cerrados, convexos y no vacíos.

Teorema 2.2.1 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida finita y completo. Sea $p > 1$. Sea $M \colon \Omega \rightrightarrows X$ un multifunción medible con valores cerrados, convexos y no vacíos tal que el conjunto de selecciones p-integrables S_M^p es no vacío. Entonces, existe un normal integrand $\mathcal{C}^\infty$ y convexo $\varphi \colon \Omega \times X \to [0, \infty)$ tal que

$$S_M^p = \left\{ x \in L^p(\Omega, X) \colon \mathcal{I}_\varphi(x) := \int_\Omega \varphi_\omega(x(\omega)) d\mu = 0 \right\}, \tag{2.15}$$

Además, el funcional integral $\mathcal{I}_\varphi$ es Frechet diferenciable, donde su derivada está dada por

$$D\mathcal{I}_\varphi(x) = \int_\Omega D\varphi_\omega(x(\omega)) d\mu \text{ para todo } x \in L^p(\Omega, X). \tag{2.16}$$

Donde la integral anterior es la de Gelfand. Si $p \geq 2$, entonces $\mathcal{I}_\varphi$ es de clase $\mathcal{C}^1$.

Demostración. Considerar el normal integrand φ asociado a M dado por el Teorema 2.0.7. Sea $x_0 \in S_M^p$. Entonces, por (2.7),

$$0 \leq \mathcal{I}_\varphi(x) \leq \kappa \cdot \sup_{(\omega,x) \in \Omega \times X} \|D\varphi_\omega(x)\| \cdot \|x - x_0\|_p, \text{ para todo } x \in L^p(\Omega, X),$$

donde

$$\kappa = \begin{cases} \mu(\Omega)^{\frac{p}{p-1}}, & \text{si } p \in (1, \infty), \\ \mu(\Omega), & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Entonces, el funcional $\mathcal{I}_\varphi$ es finito sobre $L^p(\Omega, X)$. La igualdad (2.15) puede ser fácilmente verificada usando las propiedades de φ. Por como se definió φ en el Teorema 2.0.7 es que $\omega \mapsto D\varphi_\omega(x(\omega))$ es débil* medible, además como el espacio es de medida finita, $\omega \mapsto \langle D\varphi_\omega(x(\omega)), y\rangle$ es integrable para todo $y \in X$, por lo tanto $\omega \mapsto D\varphi_\omega(x(\omega))$ es Gelfand integrable.
Ahora, se procede a probar que $\mathcal{I}_\varphi$ satisface (2.16) cuando $p \in (1, \infty]$. En efecto, por la medibilidad de φ, la integral en el lado derecho de (2.16) está bien definida. Además, por la fórmula de Taylor ([11, Theorem 5.6.2]), para todo $(\omega, x) \in \Omega \times X$

$$\|\varphi_\omega(x + h) - \varphi_\omega(x) - D\varphi_\omega(x)(h)\| \leq C_2 \|h\|^2, \tag{2.17}$$

donde $C_k := \sup_{(\omega,x) \in \Omega \times X} \|D^k \varphi_\omega(x)\|$. Fijar $\varepsilon > 0$ y considerar una secuencia de funciones

$(h_j) \subset L^p(\Omega, X)$ convergiendo en norma a 0. Entonces, se puede encontrar $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq j_0$

$$\begin{aligned} \mu(A_j) &\leq \varepsilon \quad \text{si } p \in (1, \infty), \\ \mu(A_j) &= 0 \qquad \text{si } p = \infty, \end{aligned}$$

donde, $A_j := \{\omega \in \Omega \colon \|h_j(\omega)\| > \varepsilon\}$. Ahora, se consideran las cantidades

$$\begin{aligned} \beta_j &:= \left| \mathcal{I}_\varphi(x + h_j) - \mathcal{I}_\varphi(x) - \int_\Omega D\varphi_\omega(x(\omega))(h_j(\omega)) d\mu \right|, \\ \beta_j^1 &:= \left| \int_{A_j} T_j(\omega) d\mu \right|, \\ \beta_j^2 &:= \left| \int_{A_j^c} T_j(\omega) d\mu \right|, \end{aligned}$$

donde

$$T_j^k(\omega) := \varphi_\omega(x(\omega) + h_j(\omega)) - \varphi_\omega(x(\omega)) - D\varphi_\omega(x(\omega))(h_j(\omega)).$$

Estimación de β_j^1*:* Es claro que $\beta_j^1 = 0$ para $p = \infty$. Luego, en el caso $p \geq 2$, sean $u \in L^p(\Omega, X)$ con $\|u\|_p \leq 1$, usando (2.7) y la Proposición 1.3.11, se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{A_j} |T_j(\omega)| d\mu \\ \leq \;& \int_{A_j} |\varphi_\omega(x(\omega) + h_j(\omega)) - \varphi_\omega(x(\omega))| \, d\mu + \int_{A_j} |D\varphi_\omega(x(\omega))(h_j(\omega))| d\mu \\ \leq \;& C_1 \int_{A_j} \|h_j(\omega)\| d\mu + C_1 \int_{A_j} \|h_j(\omega)\| d\mu \\ = \;& 2C_1 \int_{A_j} \|h_j(\omega)\| d\mu \\ \leq \;& 2C_1 \mu(A_j)^{\frac{p-1}{p}} \|h_j\|_p \leq 2C_1 \|h_j\|_p \varepsilon^{\frac{p-1}{p}}, \end{aligned}$$

luego, se tiene que $\beta_j^1 \leq 2C_1 \cdot \varepsilon^{\frac{p-1}{p}} \|h_j\|_p$.

Estimación de β_j^2*:* Usando (2.17) y la Proposición 1.3.11, para $p \in (1, \infty)$ se tiene que

$$\beta_j^2 \leq C_2 \mu(\Omega)^{\frac{p-1}{p}} \|h_j\|_p \cdot \varepsilon.$$

Mientras que si $p = \infty$ se tiene que $\beta_j^2 \leq C_2 \mu(\Omega) \|h_j\|_p \cdot \varepsilon$. Entonces, usando estas estimaciones, si $p \in (1, \infty)$

$$\frac{\beta_j}{\|h_j\|_p} \leq 2C_1 \cdot \varepsilon^{\frac{p-1}{p}} + C_2 \mu(\Omega)^{\frac{p-1}{p}} \|h_j\|_p \cdot \varepsilon \text{ para todo } j \geq j_0.$$

y si $p = \infty$, $\frac{\beta_j}{\|h_j\|_p} \leq C_2 \mu(\Omega) \cdot \varepsilon$. Por lo tanto, se concluye que para $p \in (1, \infty]$

$$\frac{1}{\|h_j\|_p} \left(\mathcal{I}_\varphi(x + h_j) - \mathcal{I}_\varphi(x) - \int_\Omega D\varphi_\omega(x(\omega))(h_j(\omega)) d\mu \right) \to 0,$$

cuando $j \to \infty$. Por último, es claro que $L^p(\Omega, X) \ni h \mapsto \int_\Omega D\varphi_\omega(x(\omega))(h(\omega))$ es lineal y continua (por Hölder), así que esto prueba que $\mathcal{I}_\varphi$ es Frechet diferenciable. Para ver que es

$\mathcal{C}^1$ si $p \geq 2$, sea $u \in L^p(\Omega, X)$ con $\|u\|_p \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
& |\int_\Omega D\varphi_\omega(y(\omega))(u(\omega)) - D\varphi_\omega(x(\omega))(u(\omega))d\mu| \\
\leq\ & \int_\Omega |D\varphi_\omega(y(\omega))(u(\omega)) - D\varphi_\omega(x(\omega))(u(\omega))|d\mu \\
\leq\ & \mu(\Omega)^{\frac{p-2}{p}} \|y - x\|_p \cdot \|u\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{p-2}{p}} \|y - x\|_p
\end{aligned}$$

se sigue que $\|D\mathcal{I}_\varphi(y) - D\mathcal{I}_\varphi(x)\| \leq \mu(\Omega)^{\frac{p-2}{p}} \|y - x\|_p$ lo que prueba que $x \mapsto D\mathcal{I}_\varphi(x)$ es continua. □

Observación 2.2.2 Cuando $p = 1$, el resultado anterior no se cumple. En efecto, considerar $X = \mathbb{R}$, $\Omega = [0, 1]$ y la cualquier función $\varphi\colon X \to [0, \infty)$ convexa, $\mathcal{C}^\infty$ y no lineal (que puede estar asociada, por ejemplo, a la multifunción $M\colon \omega \rightrightarrows \varphi^{-1}(0)$). No es difícil ver que $\mathcal{I}_\varphi$ es Gateaux-diferenciable en $L^1(\Omega, X)$ y su derivada es $D\mathcal{I}_\varphi(x) = \int_0^1 \langle \varphi'(x(\omega)), \cdot\rangle d\mu$. Si $\mathcal{I}_\varphi$ es Frechet-diferenciable, entonces su derivada de Frechet coincide con su derivada de Gateaux. Se pueden tomar las funciones $h_\varepsilon := \mathbf{1}_{[0,\varepsilon]}$, para cada $\varepsilon > 0$. Sea $a \in \mathbb{R}$ y la función $x_a\colon \Omega \to \mathbb{R}$ que cumple que $x_a(\omega) = a$ para todo $\omega \in \Omega$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|h_\varepsilon\|_1} |\mathcal{I}_\varphi(h_\varepsilon + x_a) - \mathcal{I}_\varphi(x_a) - D\mathcal{I}_\varphi(x_a)(h_\varepsilon)| &= \frac{1}{\varepsilon}|\varepsilon\varphi(a+1) - \varepsilon\varphi(a) - \varphi'(a)\varepsilon| \\
&= |\varphi(a+1) - \varphi'(a) - \varphi(a)|,
\end{aligned}$$

luego si se escoge $a \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(a+1) - \varphi(a) \neq \varphi'(a)$, entonces la cantidad anterior no converge a cero. Esto prueba que $\mathcal{I}_\varphi$ en general no es Frechet diferenciable en $L^1(\Omega, X)$.

Observación 2.2.3 Si $p = \infty$, se puede probar, usando las misma ideas de la demostración del Teorema 2.2.1, que el funcional $\mathcal{I}_\varphi$ (definido en (2.15)) es de clase $\mathcal{C}^\infty$, donde su derivada está dada por $D^k\mathcal{I}_\varphi(x)(h_1, ..., h_k) = \int_\Omega D^k\varphi_\omega(x(\omega))(h_1(\omega), ..., h_k(\omega))d\mu$.

El siguiente resultado es una versión más general del Teorema 2.2.1 donde ahora se considera una multifunción aleatoria definida sobre $\Omega \times H$ a valores en X, las ideas de la demostración son bastante similares.

Teorema 2.2.4 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y completo. Sea $p > 2$. Sea $M\colon \Omega \times H \rightrightarrows X$ una multifunción satisfaciendo las hipótesis del Teorema 2.0.5. Suponga que existe $x \in H$ y $y \in L^p(\Omega, X)$ tal que μ-c.t.p. $(x, y(\omega)) \in \mathrm{gph}(M_\omega)$. Entonces, existe un normal integrand C^∞ y convexo en X, $\varphi\colon \Omega \times H \times X \to [0, \infty)$ tal que

$$S_M^p(x) = \left\{y \in L^p(\Omega, X)\colon \mathcal{I}_\varphi(x, y) := \int_\Omega \varphi_\omega(x, y(\omega))d\mu = 0\right\}, \tag{2.18}$$

donde $S_M^p(x)$ denota el conjunto de selecciones p-integrables de $\omega \rightrightarrows M(\omega, x)$, para cada $x \in H$. Además, el funcional integral $\mathcal{I}_\varphi$ es Frechet diferenciable sobre $H \times L^p(\Omega, X)$, con derivada dada por

$$D\mathcal{I}_\varphi(x, y) = \int_\Omega D\varphi_\omega(x, y(\omega))d\mu \text{ para } x \in H \text{ y } y \in L^p(\Omega, X), \tag{2.19}$$

donde la integral anterior es la Gelfand. Si $p \geq 3$, entonces $\mathcal{I}_\varphi$ es de clase $\mathcal{C}^1$.

Demostración. Considere el integrand φ asociado a M dado por el Teorema 2.0.5. Por hipótesis, existe $x_0 \in H$ tal que $S_M^p(x_0) \neq \emptyset$, luego sea $y_0 \in S_M^p(x_0)$. Entonces, en virtud de (2.1), si $(x, y) \in H \times L^p(\Omega, X)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_\varphi(x,y) &\leq \int_\Omega (\|x - x_0\| + \|y(\omega) - y_0(\omega)\|) \sup_{t\in[0,1]} \|D\varphi_\omega((x, y(\omega)) + t(x_0, y_0(\omega)))\| d\mu \\
&\leq C_1 \int_\Omega (\|x - x_0\| + \|y(\omega) - y_0(\omega)\|)(\|y(\omega)\| + \|y_0(\omega)\| + 1)(\|x\| + \|x_0\| + 1) d\mu \\
&\leq C_1(\|x\| + \|x_0\| + 1)(\|x - x_0\| \int_\Omega (\|y(\omega)\| + \|y_0(\omega)\| + 1) d\mu \\
&\quad + \int_\Omega (\|y(\omega) - y_0(\omega)\|(\|y(\omega)\| + \|y_0(\omega)\| + 1) d\mu) \\
&\leq C_1(\|x\| + \|x_0\| + 1)(\|x - x_0\| \int_\Omega (\|y(\omega)\| + \|y_0(\omega)\| + 1) d\mu \qquad (2.20) \\
&\quad +3 \int_\Omega (\|y(\omega)\|^2 + \|y_0(\omega)\|^2 + 1) d\mu),
\end{aligned}
$$

luego, como $p \in (2, \infty]$ y la medida es finita entonces $L^p(\Omega, X)$ está contenido en $L^1(\Omega, X) \cap L^2(\Omega, X)$, por lo tanto las integrales en (2.20) son finitas, luego $0 \leq \mathcal{I}_\varphi(x, y) < \infty$, así que $\mathcal{I}_\varphi$ toma valores finitos en $H \times L^p(\Omega, X)$. La igualdad (2.18) puede ser fácilmente verificada gracias a las propiedades de φ. De igual manera que en el teorema anterior, se verifica que $\omega \mapsto D\varphi_\omega(x, y(\omega))$ es Gelfand integrable.
Ahora, se procede a demostrar que $\mathcal{I}_\varphi$ satisface (2.19). En efecto, como φ es medible, la integral en el lado derecho de (2.19) está bien definida. Además, por la fórmula de Taylor, para todo $(\omega, x, y) \in \Omega \times H \times X$

$$
\|\varphi_\omega((x, y) + (h, k)) - \varphi_\omega(x, y) - D\varphi_\omega(x, y)(h, k)\| \leq R_2 \|(h, k)\|^2, \tag{2.21}
$$

donde

$$
R_n \;:=\; \sup_{t\in[0,1]} \|D^n\varphi_\omega((x, y) + t(h, k))\| \leq C_n(1 + \|y\| + \|k\|)(1 + (\|x\| + \|h\|)^n),
$$

gracias al Teorema 2.0.5-(e). Fijar $\varepsilon > 0$ y considerar una secuencia $(h_j, k_j) \subset H \times L^p(\Omega, X)$ convergiendo a 0. Entonces, se puede encontrar $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq j_0$

$$
\begin{aligned}
\alpha_j := \mu(A_j) \leq \varepsilon &\quad \text{si } p \in (2, \infty), \\
\mu(A_j) = 0 &\quad \text{si } p = \infty,
\end{aligned}
$$

donde, $A_j := \{\omega \in \Omega : \|(h_j, k_j(\omega))\| > \varepsilon\}$. Ahora, se consideran las cantidades

$$
\beta_j := \left\| \int_\Omega T_j(\omega) d\mu \right\|, \;\; \beta_j^1 \;:=\; \left\| \int_{A_j} T_j(\omega) d\mu \right\|, \;\; \beta_j^2 := \left\| \int_{A_j^c} T_j(\omega) d\mu \right\|,
$$

donde

$$
T_j(\omega) := \varphi_\omega((x, y(\omega)) + (h_j, k_j(\omega))) - \varphi_\omega(x, y(\omega)) - D\varphi_\omega(x, y(\omega))(h_j, k_j(\omega)).
$$

Para hacer las estimaciones de estas cantidades, será útil la desigualdad de Hölder y el teorema del valor medio. También se considerará la norma usual en $H \times L^p(\Omega, X)$ dada por

$\|(x,y)\| := \|x\| + \|y\|_p$.

Estimación de β_j^1: Es claro que $\beta_j^1 = 0$ para $p = \infty$. Entonces, se verá el caso $p \in (2,\infty)$. Usando (2.7) y la Proposición 1.3.11, y se define $\gamma_n := C_n(1 + (\|x\| + \|h_j\|)^n)$, entonces

$$
\begin{aligned}
&\int_{A_j} |T_j(\omega)| d\mu \\
\leq &\int_{A_j} |\left(\varphi_\omega((x,y(\omega)) + (h_j,k_j(\omega))) - \varphi_\omega(x,y(\omega))\right)| d\mu + \int_{A_j} |D\varphi_\omega(x,y(\omega))(h_j,k_j(\omega))| d\mu \\
\leq &\gamma_1 \int_{A_j} (1 + \|y(\omega)\| + \|k_j(\omega)\|)\|(h_j,k_j(\omega))\| d\mu \\
&+ \int_{A_j} C_1(1 + \|y(\omega)\|)(1 + \|x\|)\|(h_j,k_j(\omega))\| d\mu \\
\leq &2 \cdot \gamma_1 \int_{A_j} (1 + \|y(\omega)\| + \|k_j(\omega)\|)\|(h_j,k_j(\omega))\| d\mu \\
\leq &2 \cdot \gamma_1 \cdot \|(h_j,k_j)\| \cdot \mu(A_j)^{\frac{p-2}{p}} \cdot (\|k_j\|_p + \|y\|_p + \mu(\Omega)^{\frac{p-1}{p}})(1 + \mu(\Omega)^{\frac{p-1}{p}}) \\
\leq &2 \cdot \gamma_1 \cdot \|(h_j,k_j)\| \cdot \varepsilon^{\frac{p-2}{p}} \cdot (\|k_j\|_p + \|y\|_p + \mu(\Omega)^{\frac{p-1}{p}})(1 + \mu(\Omega)^{\frac{p-1}{p}}).
\end{aligned}
$$

Esto permite concluir que

$$\beta_j^1 \leq 2 \cdot \gamma_1 \cdot \|(h_j,k_j)\| \cdot \varepsilon^{\frac{p-2}{p}} \cdot (\|k_j\|_p + \|y\|_p + \mu(\Omega)^{\frac{p-1}{p}})(1 + \mu(\Omega)^{\frac{p-1}{p}}).$$

Estimación de β_j^2: Usando (2.21) y con argumentos similares a los de antes, se obtiene que si $p \in [2,\infty)$

$$\beta_j^2 \leq \varepsilon \cdot \gamma_2(1 + \mu(\Omega)^{\frac{p-1}{p}}) \cdot (\|k_j\|_p + \|y\|_p + \mu(\Omega)^{\frac{p-1}{p}})\mu(\Omega)^{\frac{p-2}{p}} \|(h_j,k_j)\|.$$

y si $p = \infty$, entonces $\beta_j^2 \leq \varepsilon \cdot \gamma_2(1 + \|k_j\|_p + \|y\|_p) \cdot \|(h_j,k_j)\| \cdot \mu(\Omega)$. Entonces, gracias a estas estimaciones, se concluye que para $p \in (2,\infty]$

$$\frac{1}{\|(h_j,k_j)\|}\left(\mathcal{I}_\varphi((x,y) + (h_j,k_j)) - \mathcal{I}_\varphi(x,y) - \int_\Omega D\varphi_\omega(x,y(\omega))(h_j,k_j(\omega)) d\mu\right) \to 0,$$

si $j \to \infty$. De forma similar que en el Teorema 2.2.1 se prueba que si $p \geq 3$, entonces $(x,y) \mapsto D\mathcal{I}_\varphi$ es continua, y por lo tanto $\mathcal{I}_\varphi$ es de clase $\mathcal{C}^1$. $\square$

2.3. Ejemplos en Optimización

En esta sección se muestran dos ejemplos donde los resultados previos pueden ser utilizados para dar condiciones de optimalidad en problemas de optimización.
El primer ejemplo trata sobre la minimización de una función con restricciones de equilibrio, la cual involucra una multifunción.

Ejemplo 2.3.1 (Optimización con restricciones de equilibrio) Considerar el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
&\min \psi(x,y) \\
&\text{s.t } y \in M(x) \text{ y } x \in C,
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

donde $\psi\colon \mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es la función objetivo, $C \subset \mathbb{R}^s$ es un conjunto cerrado, y $M\colon \mathbb{R}^s \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ es una multifunción p-w-usc con valores convexos, $\operatorname{gph}(M)$ es cerrado. Se ha demostrado que las condiciones de optimalidad para esta clase de problemas pueden ser escritas en términos de reglas de Fermat generalizadas involucrando subdiferenciales de ψ, conos normales de $\operatorname{gph} M$ y C (ver, e.g., [33, Chapter 5.2.1]). En este caso, la multifunción no depende de alguna variable en un espacio de medida, entonces al aplicar el Teorema 2.0.5, se obtiene una función $\mathcal{C}^\infty$, $\varphi\colon \mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^m \to [0,\infty)$ tal que $\operatorname{gph}(M) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^m \colon \varphi(x,y) = 0\}$. Luego, por [33, Proposition 5.2], se tiene que, si $(\overline{x},\overline{y})$ es una solución local del problema (2.22), entonces

$$\hat{\partial}(-\psi)(\overline{x},\overline{y}) \subset N_{\operatorname{gph}(M)\cap C\times\mathbb{R}^m}(\overline{x},\overline{y}).$$

Si además, $N_{\operatorname{gph}(M)}(\overline{x},\overline{y}) \cap (-N_{C\times\mathbb{R}^m}(\overline{x},\overline{y})) = \{(0,0)\}$, por [33, Theorem 3.4] se tiene que

$$\hat{\partial}(-\psi)(\overline{x},\overline{y}) \subset N_{\operatorname{gph}(M)}(\overline{x},\overline{y}) \cap N_{C\times\mathbb{R}^m}(\overline{x},\overline{y}) = N_{\operatorname{gph}(M)}(\overline{x},\overline{y}) \cap N_C(\overline{x}) \times \{0\},$$

luego, como $\operatorname{gph}(M) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^m \colon \varphi(x,y) \leq 0\}$, por [10, Theorem 6.2]

$$N_{\operatorname{gph}(M)}(\overline{x},\overline{y}) \subset \limsup_{(x,y)\to(\overline{x},\overline{y})} \mathbb{R}_+\nabla\varphi(x,y).$$

Es decir, en este caso, el cálculo de la condición de optimalidad se facilita gracias a la representación suave de la multifunción. $\square$

El segundo ejemplo corresponde a un problema de optimización estocástica en dos etapas. Este tipo de problema en un vector inicial de decisión, que luego de la realización de un fenómeno aleatorio, se incluye esta información, y entonces se debe hacer una elección, todo esto con el mínimo costo (ver [50, 40] para más detalles).

Ejemplo 2.3.2 (Optimización estocástica en dos etapas) Sea $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, y considere la formulación del problema de optimización estocástica en dos etapas

$$\begin{aligned} &\min \mathcal{I}_\psi(x,y) := \int_\Omega \psi(\omega,x,y(\omega))\mathbb{P}(d\omega) \\ &\text{s.t } y(\omega) \in M(\omega,x) \text{ c.t.p. } \omega \in \Omega, x \in \mathbb{R}^s \text{ y } y \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^m), \end{aligned} \tag{2.23}$$

donde $M\colon \Omega\times\mathbb{R}^s \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ es una multifunción aleatoria satisfaciendo las hipótesis del Teorema 2.0.5 y $\psi\colon \Omega\times\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es un normal integrand, el cual es convexo con respecto a la variable en $\mathbb{R}^m$ y satisface (2.11). Notar que el problema (2.23) puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} &\min \mathcal{I}_\psi(x,y) := \int_\Omega \psi(\omega,x,y(\omega))\mathbb{P}(d\omega) \\ &\text{s.t } y \in S_M^p(x),\ x \in \mathbb{R}^s. \end{aligned}$$

Luego, si el normal integrand $\mathcal{C}^\infty$, $\varphi\colon \Omega\times\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^m \to [0,\infty)$ es el representante de la multifunción M dado por el Teorema 2.0.5. Entonces, suponiendo que el conjunto factible es no vacío, gracias al Teorema 2.2.4, el problema puede reescribirse como

$$\begin{aligned} &\min \mathcal{I}_\psi(x,y) := \int_\Omega \psi(\omega,x,y(\omega))\mathbb{P}(d\omega) \\ &\text{s.t } \mathcal{I}_\varphi(x,y) = 0. \end{aligned}$$

Luego, para dar una condición de optimalidad, por una una parte es necesario el cálculo del cono normal de $\{(x, y) : \mathcal{I}_\varphi(x, y) = 0\}$, el Teorema 2.2.4 asegura que el funcional $\mathcal{I}_\varphi$ es de clase $\mathcal{C}^1$ cuando $p > 3$, pero dado que este no es convexo, es más complejo verificar si los puntos de ese conjunto satisfacen alguna condición de calificación. Para mostrar un cálculo explícito, se simplificará el problema (2.23) por el siguiente:

$$\begin{aligned} &\min \mathcal{I}_\psi(x, y) := \int_\Omega \psi(\omega, x, y(\omega))\mathbb{P}(d\omega) \\ &\text{s.t } y(\omega) \in M(\omega) \text{ c.t.p. } \omega \in \Omega, x \in C \text{ y } y \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m), \end{aligned} \tag{2.24}$$

donde $M : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ es una multifunción medible con valores convexos, cerrados y no vacíos, y además $C \subset \mathbb{R}^s$ es cerrado. Luego por el Teorema 2.2.1, existe una función $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, convexa y $\mathcal{C}^\infty$ tal que (2.15) se tiene, por lo tanto el problema (2.24) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} &\min \mathcal{I}_\psi(x, y) := \int_\Omega \psi(\omega, x, y(\omega))\mathbb{P}(d\omega) \\ &\text{s.t } \mathcal{I}_\varphi(y) = 0, x \in C. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Luego, sea $D := \{y \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) \colon \mathcal{I}_\varphi(y) \leq 0\}$, entonces si (x, y) es una solución local de (2.25)

$$\hat{\partial}(-\mathcal{I}_\psi)(x, y) \subset N_{C\times D}(x, y) = N_C(x) \times N_D(y),$$

pero por el Teorema (2.2.1), el funcional $\mathcal{I}_\varphi$ es convexo y $\mathcal{C}^1$ si $p > 2$, así que por [10, Theorem 3.1], se tiene que

$$N_D(y) = \limsup_{z\to y} \mathbb{R}_+ D\mathcal{I}_\varphi(z) = \limsup_{z\to y} \mathbb{R}_+ \left[\int_\Omega D\varphi_\omega(z(\omega))\mathbb{P}(d\omega)\right].$$

$\square$

Capítulo 3

Funcionales Integrales en Espacios de Banach no Separables

3.1. Intercambio del ínfimo con la integral sobre funciones continuas

La fórmula de intercambio del ínfimo con la integral, muestra que minimizar un funcional integral sobre un espacio de funciones medibles equivale a integrar el ínfimo del integrand. En [45, Theorem 14.60] se prueba un resultado de intercambio integral en dimensión finita, sobre un espacio de funciones descomponible, donde la función que se considera es un normal integrand. El propósito de esta sección, es dar un resultado de intercambio en un espacio de Banach general, donde se considera el problema de minimizar un funcional integral sobre el espacio de funciones continuas de un espacio métrico a un Banach.

Acá se considera un espacio de Banach X y (T, d) un espacio métrico, con estructura medible $(T, \mathcal{A}, \mu)$, donde $\mathcal{A}$ es σ-finita y completa con μ regular interna y $\mathcal{B}(T) \subset \mathcal{A}$.

Lema 3.1.1 Sea X un espacio de Banach y T un espacio métrico. Sea $f : T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función tal que $t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_t$ es lsc. Entonces,

(a) El mapeo $(t, x^*) \mapsto f_t^*(x^*)$ es lsc, donde X^* se considera con la topología débil*.

(b) La función infimal $m_f(t) := \inf_{x \in X} f(t, x)$ es usc.

(c) Si se asume que para todo $t \in T$ la función f_t es lsc, entonces para todo $\phi(\cdot) \in \mathcal{C}(T, X)$ la función $t \mapsto f_t(\phi(t))$ es $\mathcal{A}$-medible.

Demostración. (a) Sea $t \in T$, $x^* \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ con $f_t^*(x^*) > \alpha$, entonces por definición, existe $x \in X$ tal que $\langle x^*, x \rangle - f_t(x) > \alpha$. Luego, por la continuidad del producto de dualidad $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se tiene que existe vecindades abiertas $W_1 \in \mathcal{N}_x$, $W_2 \in \mathcal{N}_{x^*}$ y $\eta > 0$ tal que

$$\langle w^*, w \rangle - \alpha > \eta > f_t(x), \ \forall w \in W_1, \ \forall w^* \in W_2. \tag{3.1}$$

Entonces, se tiene que $(x, f_t(x)) \in \operatorname{epi} f_t \cap (W_1 \times (-\infty, \eta))$, luego, como $t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_t$ es lsc, existe $U \in \mathcal{N}_t$ tal que

$$\operatorname{epi} f_{t'} \cap (W_1 \times (-\infty, \eta)) \neq \emptyset, \ \forall t' \in U,$$

entonces, usando (3.1), se tiene que para todo $t' \in U$ existe $w_{t'} \in W_1$ tal que

$$f_{t'}(w_{t'}) < \eta < \langle w^*, w_{t'}\rangle - \alpha, \forall w^* \in W_2.$$

En consecuencia, $f_{t'}^*(w^*) > \alpha$, para todo $t' \in U$ y $w^* \in W_2$, de donde se concluye que f^* es lsc.
(b) Notando que $m_f(t) = \inf_{x\in X} f(t,x) = -\sup_{x\in X}\langle 0, x\rangle - f(t,x) = -f_t^*(0)$, luego, se concluye por (a) que m_f es usc.
(c) Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$, se define

$$g_k(t,x) := \begin{cases} f(t,x), & \text{si } \|x-\phi(t)\| < 1/k, \\ \infty, & \text{si } \|x-\phi(t)\| \geq 1/k. \end{cases}$$

Se probará que para cada $k \in \mathbb{N}$, la multifunción $t \rightrightarrows \operatorname{epi} g_k(t,\cdot)$ es lsc. En efecto, considerar $t \in T$, $(x,\alpha) \in X \times \mathbb{R}$ y un conjunto abierto $U \times V$ tal que $(x,\alpha) \in \operatorname{epi} g_k(t,\cdot) \cap (U \times V)$. Por lo tanto, $\|x-\phi(t)\| < 1/k$, por continuidad se pueden tomar abiertos $U_1 \in \mathcal{N}_x$ y $W \in \mathcal{N}_t$ con $U_1 \subset U$ tal que $\|x'-\phi(t')\| < 1/k$ para todo $(t',x') \in W \times U_1$. Particularmente, $(x,\alpha) \in \operatorname{epi} f_t \cap (U_1 \times V)$, entonces como $t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_t$ es lsc, existe $W_1 \in \mathcal{N}_t$ con $W_1 \subset W$ tal que $\operatorname{epi} f_{t'} \cap (U_1 \times V) \neq \emptyset$ para todo $t' \in W_1$. Por lo tanto, $\operatorname{epi} g_k(t',\cdot) \cap (U \times V) \neq \emptyset$ para todo $t \in W_1$, que prueba que $t \rightrightarrows \operatorname{epi} g_k(t,\cdot)$ es lsc.

Ahora, $t \mapsto \inf_{x\in X} g_k(t,x) = -g_k^*(t,0)$ es usc (por la parte anterior) y en consecuencia medible. Finalmente, dado que f_t es semicontinua inferior, se tiene que

$$f(t,\phi(t)) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{x\in X} g_k(t,x), \ \forall t \in T,$$

de acá se concluye que $t \mapsto f(t,\phi(t))$ es medible. □

El siguiente lema es un resultado de selección continua para conjuntos de subnivel.

Lema 3.1.2 Sea $f\colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función tal que $B \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_t$ es lsc y toma valores convexos y cerrados, donde $B \subset T$. Si existe una función $\alpha\colon B \to \mathbb{R}$ que es lsc y que cumple que $m_f(t) < \alpha(t), \forall t \in B$, entonces existe una función continua $x\colon B \to X$ tal que $f(t,x(t)) \leq \alpha(t), \forall t \in B$.

Demostración. Se define la multifunción $G\colon B \rightrightarrows X$ dada por

$$G(t) := \{x \in X\colon f(t,x) \leq \alpha(t)\}.$$

Es claro que para todo $t \in B$, $G(t)$ es convexo, cerrado y no vacío, pues $m_f(t) < \alpha(t)$. Ahora, se probará que G es lsc. En efecto, considerar $\bar{t} \in B$ y un conjunto abierto $V \subset X$ tal que $G(\bar{t}) \cap V \neq \emptyset$, entonces, sea $x \in V$ tal que $f_{\bar{t}}(x) \leq \alpha(\bar{t})$. Como $m_f(\bar{t}) < \alpha(\bar{t})$, existe $z \in X$ tal que $f_{\bar{t}}(z) < \alpha(\bar{t})$. Considerar $z_\lambda := (1-\lambda)x + \lambda z$ con $\lambda \in (0,1)$, como $z_\lambda \to x$ cuando $\lambda \to 0$, se tiene que existe $\lambda_0 > 0$ tal que $z_\lambda \in V$ para todo $\lambda \in (0,\lambda_0)$, y por convexidad, $f_{\bar{t}}(z_\lambda) < \alpha(\bar{t})$. Se fija $\lambda \in (0,\lambda_0)$ y $\eta \in (f_{\bar{t}}(z_\lambda), \alpha(\bar{t}))$. Por un lado, dado que α es lsc, la función $(t,\gamma) \in B \times \mathbb{R} \mapsto \alpha(t) - \gamma$ es lsc, entonces existe $U_1 \times I \in \mathcal{N}_{(\bar{t},\eta)}$ tal que $\alpha(t) > \gamma$ para todo $(t,\gamma) \in U_1 \times I$. Por otro lado, como $\operatorname{epi} f_{\bar{t}} \cap \hat{V} \neq \emptyset$, donde $\hat{V} := V \times I$, existe $U_2 \in \mathcal{N}_{\bar{t}}$ tal que $\operatorname{epi} f_t \cap \hat{V} \neq \emptyset$, para todo $t \in U_2$, por lo tanto $G(t) \cap V \neq \emptyset$ para todo $t \in U_1 \cap U_2$, lo que prueba que G es lsc.

Entonces, por el Teorema 1.4.7, se tiene que existe $x \in \mathcal{C}(B, X)$ con $x(t) \in G(t)$ para todo $t \in B$, entonces $f(t, x(t)) \leq \alpha(t), \forall t \in B$. $\square$

El lema anterior motivará un resultado de selección medible de multifunciones a valores en un Banach no separable, más adelante se detallará esto.

La función infimal (asociada a f) es la función $m_f \colon T \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$m_f(t) := \inf_{x \in X} f_t(x).$$

Se define

$$\mathcal{D}_c(m_f) := \{h \in \mathcal{C}(T, \mathbb{R}) \cap L^1(T) \colon m_f(t) < h(t), \text{ para todo } t \in T\}.$$

Si T es un espacio métrico, entonces para cualquier función semicontinua superior $g \colon T \to \mathbb{R}$ existe una función continua $h \colon T \to \mathbb{R}$ tal que $g(t) < h(t)$, para todo $t \in T$. (ver, e.g., [18, Chapter VIII, Theorem 4.3, p. 171]). Sin embargo, no es claro cuando el conjunto $\mathcal{D}_c(m_f)$ es no vacío en un espacio de medida cualquiera. A pesar de esto, cuando este conjunto es no vacío, se puede probar que el valor de la integral de m_f es igual al ínfimo de la integral de las funciones en $\mathcal{D}_c(m_f)$, como muestra el siguiente Lema.

Lema 3.1.3 Sea $f \colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función tal que $t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_t$ es lsc. Si se asume que $\mathcal{D}_c(m_f) \neq \emptyset$, la siguiente igualdad se tiene:

$$\int_T m_f(t) d\mu = \inf \left\{ \int_T \beta(t) d\mu \colon \beta \in \mathcal{D}_c(m_f) \right\}. \tag{3.2}$$

Demostración. Primero que todo, considerar $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones continuas $\ell \colon T \to \mathbb{R}$ tal que $m_f(t) < \ell(t)$ para todo $t \in T$, el cual es no vacío (ver, e.g., [8, Chapter IX, §6, Proposition 5]). Entonces, por [7, Theorem 4.7.1] existe una secuencia de funciones continuas $(\ell_k) \subset \mathcal{F}$ tal que $\hat{\ell}(t) := \inf_k \ell_k(t)$ satisface que para todo $\ell \in \mathcal{F}$

$$\hat{\ell}(t) \leq \ell(t), \ \mu\text{-c.t.p.} \tag{3.3}$$

Además, la secuencia puede considerarse decreciente. Entonces, por el Teorema 1.3.5 se tiene que

$$\int_T \hat{\ell} d\mu = \inf \left\{ \int_T \beta(t) d\mu \colon \beta \in \mathcal{D}_c(m_f) \right\}.$$

Ahora, suponga por contradicción que existe un conjunto medible A con $\mu(A) > 0$ tal que $m_f(t) < \hat{\ell}(t)$ para todo $t \in A$. Entonces, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(A_\beta) > 0$, donde

$$A_\beta := \{t \colon m_f(t) < \beta < \hat{\ell}(t)\}.$$

Dado que μ es σ-finito y regular interna, se puede encontrar un conjunto compacto $K \subset A_\beta$ tal que $\mu(K) > 0$. Ahora, para cada $t \in K$, por [8, Chapter IX, §6, Proposition 5] existe una función $\rho_t \in \mathcal{F}$ tal que $\rho_t(t) < \beta$, y por la continuidad de ρ_t existe $U_t \in \mathcal{N}_t$ tal que

$$\rho_t(t') < \beta, \ \forall t' \in U_t.$$

Entonces, se tiene que $(U_t)_{t\in K}$ es un recubrimiento abierto de K y por la compacidad, existe $t_1, ..., t_n \in K$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{t_i}$. Entonces, existe i tal que $\mu(K \cap U_{t_i}) > 0$ y por lo tanto $\mu(A_\beta \cap U_{t_i}) > 0$. Entonces, ρ_{t_i} contradice la minimalidad de $\hat{\ell}$ en (3.3) y esto prueba (3.2). □

Ahora, se presenta el principal resultado en esta parte, el cual establece el intercambio del ínfimo con la integral.

Teorema 3.1.4 Sea T un espacio métrico y μ una medida σ-finita y regular interna sobre $\mathcal{A}$. Se asume que $\mathcal{D}_c(m_f) \neq \emptyset$. Sea $f : T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función tal que $f_t \in \Gamma(X)$ para todo $t \in T$, y $t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_t$ es lsc. Entonces,

$$\inf \left\{ \int_T f(t, \phi(t)) d\mu \colon \phi \in \mathcal{C}(T, X) \right\} = \int_T m_f(t) d\mu. \tag{3.4}$$

Demostración. Primero, en (3.4), la desigualdad $\geq$ siempre se tiene, entonces, se probará la opuesta. Sea $\beta \in \mathcal{D}_c(m_f)$, por el Lema 3.1.2, se tiene que existe una función continua $x \colon T \to X$ tal que $f(t, x(t)) \leq \beta(t), \forall t \in T$. Entonces,

$$\inf \left\{ \int_T f(t, \phi(t)) d\mu \colon \phi(\cdot) \in \mathcal{C}(T, X) \right\} \leq \int_T f(t, x(t)) d\mu \leq \int_T \beta(t) d\mu.$$

Por lo tanto, por el Lema 3.1.3, la igualdad (3.4) se tiene. □

La siguiente proposición establece una condición suficiente para asegurar que $\mathcal{D}_c(m_f)$ sea no vacío cuando $\int_T m_f(t) d\mu < \infty$.

Proposición 3.1.5 Si (T, d) es un espacio métrico separable, y μ cumple que, para todo $x \in T$, existe $U \in \mathcal{N}_x$ tal que $\mu(U) < \infty$, entonces, el conjunto $\mathcal{D}_c(m_f)$ es no vacío.

Demostración. La demostración será dividida en las siguientes afirmaciones:
Afirmación 1: Existe un recubrimiento abierto $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de T tal que $\mu(\mathrm{cl}(U_n)) < \infty$ y $U_n \subset U_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Demostración de la Afirmación 1: Primero que todo, notar que para todo $x \in T$, existe $O_x \in \mathcal{N}_x$ tal que $\mu(O_x) < \infty$, como $x \in O_x$, existe $r_x > 0$ tal que $V_x := \{y \in T : d(x, y) < r_x\} \subset \{y \in T \colon d(x, y) \leq r_x\} \subset O_x$ entonces $\mathrm{cl}(V_x) \subset O_x$. Luego, se tiene que $(V_x)_{x\in T}$ es un recubrimiento abierto de T, por lo tanto, usando [51, Theorem 2.3.17] existe un subrecubrimiento numerable $(V_{x_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de T y se puede definir $U_n := \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$, que satisface $\mu(\mathrm{cl}(U_n)) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(\mathrm{cl}(V_{x_i})) < \infty$ y se concluye.
Afirmación 2: Existe una función continua e integrable $\varphi \colon T \to (0, \infty)$.
Demostración de la Afirmación 2: Por la Afirmación 1, existe un recubrimiento abierto $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de T tal que $\mu(\mathrm{cl}(U_n)) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto de T, existe una partición de la unidad $\{\varphi_n \colon T \to [0, 1]\}$ subordinada a (U_n) tal que $\sum_n \varphi_n(t) = 1, \forall t \in T$, $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subset U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\{\mathrm{supp}(\varphi_n)\}$ es un recubrimiento localmente finito y φ_n es continua para todo $n \in \mathbb{N}$ (ver [18, Chap. VIII, Sec. 5, Theorem 4.2]). Como $\mu(U_n) < \infty$, se tiene que $\varphi_n \in L^1(T)$. Ahora, escogiendo una secuencia de

números reales positivos $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\varepsilon_i \int_T \varphi_i < \frac{1}{2^i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces, se puede definir $\varphi := \sum_{i\in\mathbb{N}} \varepsilon_i\varphi_i$, la cual es continua, integrable y $\varphi(t) > 0, \forall t \in T$.

Afirmación 3: Sea $\phi\colon T \to \mathbb{R}$ una función acotada superiormente tal que existe un conjunto abierto V, con $\operatorname{supp}(\phi) \subset V$ y $\mu(\operatorname{cl}(V)) < \infty$. Entonces $\mathcal{D}_c(\phi) \neq \emptyset$.

Demostración de la Afirmación 3: Sea $F := \operatorname{supp}(\phi)$. Usando [19, Urysohn's Lemma 4.15], existe una función continua $\ell\colon T \to [0,1]$ tal que $\ell|_F = 1$ y $\ell|_{V^c} = 0$, es claro que $\operatorname{supp}(\ell) \subset \operatorname{cl}(V)$ y como $\mu(\operatorname{cl}(V)) < \infty$, $\ell \in L^1(T)$. Se define $M := \sup\{\phi(t)\colon t \in T\} < \infty$, y también se toma la función φ obtenida en la Afirmación 2, luego la función $g(t) := M \cdot \ell(t) + \varphi(t)$ es continua e integrable, y $g(t) > \phi(t), \forall t \in T$, entonces $g \in \mathcal{D}_c(\phi)$.

Afirmación 4: $\mathcal{D}_c(m_f) \neq \emptyset$.

Demostración de la Afirmación 4: Como $\int_T m_f(t) < \infty$, entonces la función $p := \max\{m_f, 0\}$ es integrable. Ahora, se considera el mismo recubrimiento abierto $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ encontrado en la Afirmación 1. Como m_f es usc, para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $V_n = \{t \in T\colon m_f(t) < n\}$ es abierto, se puede definir $O_n := U_n \cap V_n$, dado que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia creciente de conjuntos, se tiene que $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Se toma una partición de la unidad $\{\varphi_i\colon T \to [0,1]\}_{i\in\mathbb{N}}$ subordinada a $\{O_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i(t) = 1, \forall t \in T$, $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subset O_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, $\{\operatorname{supp}(\varphi_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento localmente finito y φ_i es continua para todo $i \in \mathbb{N}$. Se define $\psi_i := p \cdot \varphi_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Es claro que $\operatorname{supp}\psi_i \subset \operatorname{supp}\varphi_i \subset O_i$ y $\psi_i(t) \leq i, \forall t \in T$ entonces es acotada superiormente y $\operatorname{supp}\psi_i \subset U_i$, que satisface $\mu(\operatorname{cl}(U_i)) < \infty$. Por la Afirmación 3, se tiene que $\mathcal{D}_c(\psi_i) \neq \emptyset$, y por el Lema 3.1.3, para todo $i \in \mathbb{N}$, existe $\beta_i \in \mathcal{D}_c(\psi_i)$ tal que

$$\int_T \beta_i(t)d\mu \leq \int_T \psi_i(t)d\mu + \frac{1}{2^i}.$$

Se define $\beta := \sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_i$ y como $0 \leq \psi_i < \beta_i$ y β_i es continua, β es lsc. También, se tiene que

$$m_f(t) \leq p(t) = p(t)\sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i(t) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \psi_i(t) < \beta(t),$$

y $\sum_{i\in\mathbb{N}} \psi_i = p$. Además, se tiene que $\int_T \beta(t)d\mu \leq \int_T p(t)d\mu + 1 < \infty$, pues $p \in L^1(T)$. Por lo tanto, β es una función lsc e integrable tal que $m_f(t) < \beta(t), \forall t \in T$. Finalmente, usando [18, Chap VIII, Sec. 5, Theorem 4.3], existe una función continua $h\colon T \to \mathbb{R}$ tal que $m_f(t) < h(t) < \beta(t), \forall t \in T$ y entonces $h \in \mathcal{D}_c(m_f)$. $\square$

3.2. Lusin integrands y propiedades básicas

En esta sección se introducirá la noción de Lusin integrand y algunas propiedades de esta clase de funciones. Esta clase de funciones jugará un rol importante en los resultados posteriores a esta sección, pues esto permitirá considerar funciones a valores en la recta extendida. Además, en esta sección, se mostrarán condiciones suficientes para asegurar que ciertas funciones sean Lusin integrand, lo que hace que esta noción sea estable bajo operaciones que son comúnmente utilizadas en optimización y teoría de control.

Definición 3.2.1 La función $f\colon T\times X \to \overline{\mathbb{R}}$ es un *Lusin integrand* (con respecto a $(T, \mathcal{A}, \mu)$), si para cada $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ y todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto compacto $B \subset A$ con $\mu(A\backslash B) < \varepsilon$ tal que $B \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_t$ es lsc. Además, una familia de funciones $f_i\colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i \in I$, es llamada *uniformemente de Lusin* (con respecto a $(T, \mathcal{A}, \mu)$, si para cada $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ y todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto compacto $B \subset A$ con $\mu(A\backslash B) < \varepsilon$ tal que

$B \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_i(t,\cdot)$ es lsc, para todo $i \in I$.

Para multifunciones generales, la noción anterior puede ser extendida como muestra la siguiente definición.

Definición 3.2.2 Una multifunción $C\colon T \rightrightarrows X$ se dice de *Lusin* (con respecto a $(T, \mathcal{A}, \mu)$, si para todo $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ y todo $\varepsilon > 0$ existe un compacto $B \subset A$ con $\mu(A \backslash B) < \varepsilon$ tal que $B \ni t \rightrightarrows C(t)$ es lsc. Además, una familia de multifunciones $C_i\colon T \rightrightarrows X$, $i \in I$, se dice uniformemente de Lusin (con respecto a $(T, \mathcal{A}, \mu)$, si para todo $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ y todo $\varepsilon > 0$ existe un compacto $B \subset A$ con $\mu(A \backslash B) < \varepsilon$ tal que $B \ni t \rightrightarrows C_i(t)$ es lsc, para todo $i \in I$.

El siguiente Lema establece la estabilidad bajo ciertas operaciones con Lusin integrands, y algunas propiedades que cumplen dichas funciones.

Lema 3.2.3 Se cumplen las siguientes afirmaciones

(a) Sean $f, g\colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ Lusin integrands, entonces la inf-convolución $f \Box g\colon (t,x) \mapsto \inf_{y \in X}\{f_t(y) + g_t(x-y)\}$ es un Lusin integrand.

(b) Sea $f\colon T \times X \to \mathbb{R}$ una función simple, esto es,

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_i(t)\varphi_i(x),$$

donde $a_i\colon T \to \mathbb{R}$ son funciones medibles y $\varphi_i\colon X \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. Si para cada compacto $K \subset T$ y $x \in X$, la serie converge uniformemente en K (x fijo), entonces f es un Lusin integrand.

(c) Sea $f\colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ un Lusin integrand, entonces $(t,x) \mapsto \operatorname{cl} f_t(x)$ es un Lusin integrand.

(d) Si $f\colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ es un Lusin integrand, entonces para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ la multifunción

$$T \ni t \rightrightarrows \{x \in X\colon f(t,x) < \alpha\}$$

es de Lusin.

(e) Si X es separable y $C\colon T \rightrightarrows X$ es una multifunción a valores cerrados, entonces $C\colon T \rightrightarrows X$ es una multifunción de Lusin si y sólo si C es medible. En particular, $f\colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ es un normal integrand si y sólo si f es un Lusin integrand.

Demostración. Primero que todo, se probará la siguiente afirmación:
Afirmación 1: Dada una función $h\colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ y un conjunto $B \subset T$, entonces $B \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} h_t$ es lsc si y sólo si $B \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi}_s h_t := \{(x,\alpha)\colon h(t,x) < \alpha\}$ es lsc.
Demostración de la Afirmación 1: En efecto, sea $U \times I$ un conjunto abierto de $X \times \mathbb{R}$, es claro que

$$\{t \in B\colon \operatorname{epi} g_t \cap (U \cap I) \neq \emptyset\} = \{t \in B\colon \operatorname{epi}_s g_t \cap (U \times I) \neq \emptyset\},$$

y se puede concluir directamente.
(a) Sea $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ y $\varepsilon > 0$, es posible escoger un compacto $B \subset A$ tal que $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$ tal que $B \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_t$ y $B \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} g_t$ sean lsc. Además, se tiene que

$$\operatorname{epi}_s(f \Box g)_t = \operatorname{epi}_s f_t + \operatorname{epi}_s g_t.$$

Usando la Afirmación 1, se tiene que $B \in t \rightrightarrows \operatorname{epi}_s f_t$ y $B \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi}_s g_t$ son lsc y por [23, Proposition 2.59 (a)] se puede obtener que $B \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi}_s(f\Box g)_t$ es lsc. Finalmente, por la Afirmación 1, se tiene que $B \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi}(f\Box g)_t$ es lsc.

(b) Sea $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ y $\varepsilon > 0$. Por el Corolario 1.3.13, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto compacto $K_n \subset A$ con $\mu(A \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ tal que $a_n \colon K_n \to \mathbb{R}$ es continua. Tomando $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$, se tiene que $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$, se probará que $K \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_t$ es lsc. En efecto, sea $U \times I$ un abierto de $X \times \mathbb{R}$, si se toma $\hat{t} \in K$ tal que existe $(\hat{x}, \hat{\alpha}) \in U \times I$ y $f(\hat{t}, \hat{x}) \leq \hat{\alpha}$, usando la hipótesis, se tiene que $K \ni t \mapsto f(t, \hat{x})$ es continua. Como I es abierto, existe $\beta \in I$ tal que $\beta > \hat{\alpha}$, entonces por continuidad, se puede encontrar una vecindad V de $\hat{t}$ tal que $f(t, \hat{x}) < \beta$ para todo $t \in V$ y esto prueba que $\{t \in K \colon \operatorname{epi} f_t \cap (U \times I) \neq \emptyset\}$ es un conjunto abierto en K.

(c) En este caso, se tiene que $\operatorname{epi} \operatorname{cl} f_t = \operatorname{cl}(\operatorname{epi} f_t)$ para todo $t \in T$, y usando el hecho que para todo abierto $U \times I \subset X \times \mathbb{R}$ y $B \subset T$

$$\begin{aligned}\{t \in B \colon \operatorname{epi} f_t \cap (U \times I) \neq \emptyset\} &= \{t \in B \colon \operatorname{cl}(\operatorname{epi} f_t) \cap (U \times I) \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in B \colon \operatorname{epi}(\operatorname{cl} f_t) \cap (U \times I) \neq \emptyset\},\end{aligned}$$

se puede concluir que $(t, x) \mapsto \operatorname{cl} f_t(x)$ es un Lusin integrand.

(d) Sea $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $K \subset A$ compacto tal que $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ tal que $K \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_t$ es lsc. Se probará que $C \colon K \ni t \rightrightarrows \{x \in X \colon f(t, x) < \alpha\}$ es lsc. Sea U un abierto de X y $\mathcal{V} = \{t \in K \colon C(t) \cap U \neq \emptyset\}$. Sea $\hat{t} \in \mathcal{V}$, luego existe $\hat{x} \in U$ tal que $f(\hat{t}, \hat{x}) < \alpha$, por tanto existe $\delta > 0$ tal que $f(\hat{t}, \hat{x}) < \alpha - \delta$, notar que

$$V = \{t \in K \colon \operatorname{epi} f_t \cap (U \times (\alpha - \delta, \alpha)) \neq \emptyset\}$$

es una vecindad de $\hat{t}$ (en K), y además si $t \in V$ existe $(x, \beta) \in U \times (\alpha - \delta, \alpha)$ tal que $f(t, x) \leq \beta < \alpha$ por tanto $t \in \mathcal{V}$, luego $V \subset \mathcal{V}$, esto implica que $\mathcal{V}$ es un abierto de K, y entonces C es lsc.

(e) Si C es una multifunción de Lusin, existe una secuencia disjunta de compactos con medida finita $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $K_n \ni t \rightrightarrows C(t)$ es lsc y $\mu(T \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n)) = 0$. Es claro que $K_n \ni t \rightrightarrows C(t)$ es medible para todo $n \in \mathbb{N}$ por lo tanto, como $(T, \mathcal{A}, \mu)$ es completo, $T \ni t \rightrightarrows C(t)$ es medible. Recíprocamente, si C es medible, por la Proposición 1.4.1 y el Teorema 1.4.6, existe $x_k \colon \operatorname{dom} C \to X$ medible tal que $C(t) = \operatorname{cl}(\{x_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}})$ para todo $t \in \operatorname{dom} C$. Como C es medible, $\operatorname{dom} C \in \mathcal{A}$. Sea $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ y $\varepsilon > 0$, luego existe $K_1 \subset A \cap \operatorname{dom} C$ compacto tal que $\mu((A \cap \operatorname{dom} C) \setminus K_1) < \varepsilon/2$ y $x_k \colon K_1 \to X$ es continua para todo $k \in \mathbb{N}$ (Corolario 1.3.13), luego si U es un abierto de X, se sigue que

$$\{t \in K_1 \colon C(t) \cap U \neq \emptyset\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} x_j^{-1}(U) \cap K_1 \cap \operatorname{dom} C = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} x_j^{-1}(U) \cap K_1,$$

que es un abierto de K_1. Además, como μ es regular interna, existe un compacto $K_2 \subset A \setminus \operatorname{dom} C$ tal que $\mu((A \setminus \operatorname{dom} C) \setminus K_2) < \varepsilon/2$, si $K = K_1 \cup K_2$, se tiene que $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$, luego si U es abierto de X entonces

$$\{t \in K \colon C(t) \cap U \neq \emptyset\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} x_j^{-1}(U) \cap K,$$

y esto es un abierto de K pues $x_j^{-1}(U) \cap K_2 = \emptyset$ para todo j, por tanto $K \ni t \rightrightarrows C(t)$ es lsc, y así C es una multifunción de Lusin. Para lo último, basta aplicar lo recién demostrado en $T \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_t$ y ocupar la Proposición 1.4.3. □

Cuando X no es separable, existen multifunciones medibles que no son multifunciones de Lusin, por lo tanto el Lema 3.2.3-(e) no es cierto en el caso no separable, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2.4 Se considera el espacio de Banach $X = \ell^2([0,1])$ (que es no separable) y $T = [0,1]$ con la medida de Lebesgue, además, se considera la base canónica de X denotada por $\{e_s\}_{s \in [0,1]}$ donde $(e_s)_s = 1$ y $(e_s)_t = 0$ si $t \neq s$. Se define la multifunción $F \colon T \rightrightarrows X$ como $F(t) = \{e_s \colon s \leq t\}$, entonces F es medible a valores cerrados y F no es una multifunción de Lusin. En efecto, sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, se define $\hat{t} := \inf\{t \in [0,1] \colon \|e_t - x\| < \varepsilon\}$, entonces

$$\{t \in [0,1] \colon C(t) \cap \{y \in X \colon \|y - x\| < \varepsilon\} \neq \emptyset\} = \begin{cases} (\hat{t}, 1] & \text{si } \|e_{\hat{t}} - x\| \geq \varepsilon \\ [\hat{t}, 1] & \text{si } \|e_{\hat{t}} - x\| < \varepsilon \end{cases},$$

que es un conjunto medible en cualquier caso, lo que prueba que C es medible. Por otro lado, sea $K \subset [0,1]$ es un conjunto compacto con medida no nula, entonces K es infinito no numerable por tanto existe $s \in K$ y una secuencia $(s_n) \subset K$ tal que $s_n \to s$ y $s_n < s$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego,

$$\{t \in [0,1] \colon C(t) \cap \{y \in X \colon \|e_s - y\| < 1/2\} \neq \emptyset\} = [s,1] \cap K,$$

que no puede ser abierto en K por la existencia de la secuencia (s_n). De esta manera, la multifunción C no es de Lusin.

Para el siguiente resultado, será necesario definir otra propiedad para multifunciones. Una multifunción $F \colon T \times X \rightrightarrows Y$ es de *Scorza-Dragoni* (con respecto a $(T, \mathcal{A}, \mu)$, si para cada $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un compacto $B \subset A$ con $\mu(A \backslash B) < \varepsilon$ tal que $F \colon B \times X \rightrightarrows Y$ es lsc y tiene grafo cerrado. Particularmente, una función $f \colon T \times X \to Y$ se dice una función de Scorza-Dragoni, con respecto a $(T, \mathcal{A}, \mu)$, si la multifunción $F(t,x) := \{f(t,x)\}$ es de Scorza-Dragoni, esto es, para todo $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ y todo $\varepsilon > 0$, existe un compacto $B \subset A$ con $\mu(A \backslash B) < \varepsilon$ tal que $f \colon B \times X \to Y$ es continua.

Observación 3.2.5 La propiedad de Scorza-Dragoni ha sido usada por diversos autores. En concreto, el primer resultado que menciona esta clase de mapeos fue probado en [1], para funciones reales y continuidad en vez de semicontinuidad inferior de multifunciones. Posteriormente, resultados similares fueron probados para multifunciones (ver, e.g., [13, 22, 45])). En la referencias [48, 28, 31, 1] se encuentran resultados más profundos y discusiones.

Proposición 3.2.6 Sea $f \colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ un Lusin integrand, $g \colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función de Scorza-Dragoni. Sea $F \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función usc tal que $\forall x \in \mathbb{R} \colon F(\cdot, x)$ es creciente. Entonces $F(f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot))$ es un Lusin integrand. En particular, $f + g$ y $f - g$ son Lusin integrands y si g toma valores positivos, entonces $f \cdot g$ también es un Lusin integrand.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe un conjunto compacto $K \subset A$ con $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ tal que $K \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_t$ es lsc y $g|_{K \times X}$ es continua. Se probará que $K \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} F(f_t(\cdot), g_t(\cdot))$ es lsc. En efecto, sea $U \times I$ un abierto de $X \times \mathbb{R}$, se toma $\hat{t} \in K$ tal que existe $(\hat{x}, \hat{\alpha}) \in U \times I$ y $F(f(\hat{t}, \hat{x}), g(\hat{t}, \hat{x})) < \hat{\alpha}$, luego como F es usc, existe $J_1 \times I_1$, vecindad de $(f(\hat{t}, \hat{x}), g(\hat{t}, \hat{x}))$, tal que $F(s,t) < \hat{\alpha}$ para todo $(s,t) \in J_1 \times I_1$. También, como g es continua en $(\hat{t}, \hat{x})$, existe una vecindad $V \times U_1$ de $(\hat{t}, \hat{x})$ tal que $g(t,x) \in J_1$ para todo $(t,x) \in V \times U_1$, donde $U_1 \subset U$ y se puede ver que $V_1 := \{t \in T \colon \operatorname{epi} f_t \cap U_1 \times I_1 \neq \emptyset\}$ es una vecindad e $\hat{t}$ en K, porque $K \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_t$ es lsc. Ahora, si se toma $t \in V \cap V_1$, se tiene que existe $(x, \alpha) \in U_1 \times I_1$ tal que $f(t,x) \leq \alpha$ y $g(t,x) \in J_1$ entonces

$$F(f(t,x), g(t,x)) \leq F(\alpha, g(t,x)) < \hat{\alpha},$$

y esto prueba que $\{t \in T \colon \operatorname{epi} F(f_t(\cdot), g_t(\cdot)) \cap (U \times I) \neq \emptyset\}$ es un conjunto abierto de K, entonces $K \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} F(f_t(\cdot), g_t(\cdot))$ es lsc. Para la última parte, basta tomar las funciones $(x,y) \mapsto x + y$, $(x,y) \mapsto x - y$ y $(x,y) \mapsto x \cdot |y|$. $\square$

Respecto a familias uniformemente de Lusin, se pueden enunciar las siguientes propiedades.

Lema 3.2.7 Se cumplen las siguientes afirmaciones

(a) Sea $\{f_i \colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}\}_{i \in I}$ una familia uniformemente de Lusin. Entonces $f(t,x) := \inf_{i \in I} f_i(t,x)$ es un Lusin integrand.

(b) Sea $\{f_i \colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}\}_{i \in I}$ una familia uniformemente de Lusin. Si $g \colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función de Scorza-Dragoni. Entonces, la familia $\{f_i - g\}_{i \in I}$ es uniformemente de Lusin.

(c) Sean $f_i \colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ para $i \in \mathbb{N}$ funciones que son Lusin integrand con respecto a μ. Entonces $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_i$ es un Lusin integrand con respecto a μ y $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una familia uniformemente de Lusin.

(d) Sea $\{C_i \colon T \rightrightarrows X\}_{i \in I}$ una familia de multifunciones, entonces $\{C_i \colon T \rightrightarrows X\}_{i \in I}$ es una familia uniformemente de Lusin de multifunciones si y sólo si $\{(t,x) \mapsto \delta_{C_i(t)}(x)\}_{i \in I}$ es una familia uniformemente de Lusin.

Demostración. (a) Sea $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ y $\varepsilon > 0$. Como $\{f_i\}_{i \in I}$ es una familia uniformemente de Lusin, se tiene que existe un conjunto compacto $K \subset A$ con $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ tal que $K \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_i(t, \cdot)$ es lsc para todo $i \in I$. Se afirma que $K \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_t$ es lsc. En efecto, sea $U \times J \subset X \times \mathbb{R}$ un conjunto abierto, luego si $\hat{t} \in K$ es tal que existe $(\hat{x}, \hat{\alpha}) \in U \times J$ con $f(\hat{t}, \hat{x}) \leq \hat{\alpha}$, se puede encontrar $\hat{\beta} \in J$ con $\hat{\beta} > \hat{\alpha}$, entonces $f(\hat{t}, \hat{x}) < \hat{\beta}$, y luego existe $i \in I$ tal que $f_i(\hat{t}, \hat{x}) < \hat{\beta}$. Como $K \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_i(t, \cdot)$ es lsc, el conjunto $V = \{t \in K \colon \operatorname{epi} f_i(t, \cdot) \cap (U \times J) \neq \emptyset\} \in \mathcal{N}_{\hat{t}}$, y es claro que $V \subset \{t \in K \colon \operatorname{epi} f_t \cap (U \times J) \neq \emptyset\}$, esto prueba que $K \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_t$ es lsc.

(b) Sea $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ y $\varepsilon > 0$. Como $\{f_i\}_{i \in I}$ es una familia uniformemente de Lusin, se tiene que existe un conjunto compacto $K \subset A$ con $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ tal que $K \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_i(t, \cdot)$ es lsc para todo $i \in I$ y $g|_{K \times X}$ es continua. Se afirma que $K \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi}(f_i(t, \cdot) - g_t)$ es lsc para todo $i \in I$. En efecto, sea $U \times J \subset X \times \mathbb{R}$ un conjunto abierto, si $\hat{t} \in K$ es tal que existe $(\hat{x}, \hat{\alpha}) \in U \times J$ con $f_i(\hat{t}, \hat{x}) - g(\hat{t}, \hat{x}) \leq \hat{\alpha}$, se puede escoger $\hat{\beta} \in J$ con

$\hat{\beta} > \hat{\alpha}$, entonces $f_i(\hat{t},\hat{x}) - g(\hat{t},\hat{x}) < \hat{\beta}$ y entonces existe $\eta \in \mathbb{R}$ tal que $f_i(\hat{t},\hat{x}) < \eta < g(\hat{t},\hat{x}) + \hat{\beta}$ y por continuidad, existe una vecindad $V \times U_1$ de $(\hat{t},\hat{x})$ con $U_1 \subset U$ tal que $g(t,x) > \eta - \hat{\beta}$ para todo $(t,x) \in V \times U_1$. Como $K \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_i(t,\cdot)$ es lsc, el conjunto $V_1 = \{t \in K\colon \operatorname{epi} f_i(t,\cdot) \cap (V_1 \times (-\infty,\eta)) \neq \emptyset\} \in \mathcal{N}_{\hat{t}}$ y entonces si $t \in V \cap V_1$, existe $(x,\alpha) \in V_1 \times (-\infty,\eta)$ tal que $f_i(t,x) \leq \alpha < \eta < g(t,x) + \hat{\beta} \Rightarrow f_i(t,x) - g(t,x) < \hat{\beta}$ lo que prueba que $\{t \in K\colon \operatorname{epi}(f_i(t,\cdot) - g_t) \cap (U \times J) \neq \emptyset\}$ es un conjunto abierto para todo $i \in I$.

(c) Sea $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ y $\varepsilon > 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se puede escoger un compacto $K_n \subset A$ tal que $\mu(K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ y $K_n \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_n(t,\cdot)$. Entonces, definiendo $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$, y entonces $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $K \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_n(t,\cdot)$, lo que prueba esta parte.

(d) Para cada $i \in I$, $\operatorname{epi} \delta_{C_i(t)} = C_i(t) \times [0,\infty)$. Sea $i \in I$ y $U \times J$ un abierto de $X \times \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
&\{t \in T\colon \operatorname{epi} \delta_{C_i(t)} \cap (U \times J) \neq \emptyset\} \\
&= \{t \in T\colon C_i(t) \cap U \neq \emptyset \text{ y } J \cap [0,\infty) \neq \emptyset\} \\
&= \begin{cases} \{t \in T\colon C_i(t) \cap U \neq \emptyset\} & \text{si } J \cap [0,\infty) \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{si } J \cap [0,\infty) = \emptyset. \end{cases}
\end{aligned}$$

esto prueba directamente la afirmación, por las definiciones correspondientes. □

La siguiente proposición muestra la preservación de la propiedad de Lusin integrand bajo operaciones de ínfimo y supremo.

Teorema 3.2.8 Sea $F\colon T \times X \rightrightarrows Y$ una multifunción de Scorza-Dragoni y $f\colon T \times X \times Y \to \mathbb{R}$ una función de Scorza-Dragoni. Entonces, la función marginal

$$v(t,x) := \inf\{f(t,x,y)\colon y \in F(t,x)\},$$

es un Lusin integrand. Además, si F toma valores localmente compactos, es decir, para todo $(t,x) \in T \times X$, existe una vecindad U de (t,x) tal que $F(U)$ es relativamente compacto, luego

$$u(t,x) := \sup\{f(t,x,y)\colon y \in F(t,x)\},$$

es un Lusin integrand.

Demostración. Se considera $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ y $\varepsilon > 0$. Como f es una función de Scorza-Dragoni y F es una multifunción de Scorza-Dragoni, existe un conjunto compacto $B \subset A$ con $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$ tal que $f\colon B \times X \times Y \to \mathbb{R}$ es continua y $F\colon B \times X \rightrightarrows Y$ es lsc y su grafo es cerrado.
Afirmación 1: $B \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} v_t$ es lsc.
Demostración de la Afirmación 1: Se toma $\hat{t} \in \{t \in B\colon \operatorname{epi} v_t \cap (U \cap I) \neq \emptyset\}$ donde $U \times I$ es un abierto de $X \times \mathbb{R}$, entonces existe $(\hat{x},\hat{\alpha}) \in U \times I$ tal que $v(\hat{t},\hat{x}) \leq \hat{\alpha}$, y se puede encontrar $\hat{y} \in Y$ con $\hat{y} \in F(\hat{t},\hat{x})$ tal que $f(\hat{t},\hat{x},\hat{y}) \leq \hat{\alpha}$. Se puede escoger $\beta > \hat{\alpha}$, porque I es abierto y por continuidad existe $O_1 \times U_1 \times V_1$, vecindad de $(\hat{t},\hat{x},\hat{y})$, tal que $f(t,x,y) < \beta$ para todo $(t,x,y) \in O_1 \times U_1 \times V_1$ donde $U_1 \subset U$. Por otro lado, como $F|_B$ es lsc, existe $O_2 \times U_2$ vecindad de $(\hat{t},\hat{x})$ tal que $O_2 \times U_2 \subset \{(t,x) \in B \times X\colon F(t,x) \cap V_1 \neq \emptyset\}$, donde $U_2 \subset U$. Entonces, si $t \in O_1 \cap O_2$, se puede tomar $x \in U_1 \cap U_2$ y encontrar $y \in V_1$ tal que $y \in F(t,x) \cap V_1$, entonces

$f(t,x,y) < \beta \Rightarrow v(t,x) < \beta$, por lo tanto $O_1 \cap O_2 \subset \{t \in B\colon \operatorname{epi} v_t \cap (U \cap I) \neq \emptyset\}$ y esto prueba que $B \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} v_t$ es lsc.

Afirmación 2: Si F toma valores localmente compacto, entonces $B \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} u_t$ es lsc.

Demostración de la Afirmación 2: En efecto, se considera un conjunto abierto $U \times I$ de $X \times \mathbb{R}$ y se supone que $D := \{t \in B\colon \operatorname{epi} u_t \cap U \times I \neq \emptyset\}$ no es un conjunto abierto, entonces existe $\hat{t} \in D$ y una secuencia $t_n \to \hat{t}$ ($t_n \in B$) tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{epi} u_{t_n} \cap (U \times I) = \emptyset$. Además, se tiene que existe $V_1 \times U_1 \in \mathcal{N}_{(\hat{t},\hat{x})}$ tal que $F(V_1 \times U_1)$ es relativamente compacto. Ahora, se sabe que existe $(\hat{x}, \hat{\alpha}) \in U \times I$ tal que $u(\hat{t}, \hat{x}) \leq \hat{\alpha}$, se toma $\gamma \in I$ con $\gamma > \hat{\alpha}$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $u(t_n, \hat{x}) > \gamma$ y entonces existe $y_n \in F(t_n, \hat{x})$ tal que $f(t_n, \hat{x}, y_n) > \gamma$. Como $t_n \to \hat{t}$, existe N tal que $t_n \in V_1$ si $n \geq N$, entonces $y_n \in F(V_1 \times U_1)$ cuando $n \geq N$ y entonces existe $\hat{y} \in Y$ y una subsucesión $\{y_{g(n)}\}$ tal que $y_{g(n)} \to \hat{y}$. Como $F|_B$ tiene el grafo cerrado, se obtiene que $\hat{y} \in F(\hat{t}, \hat{x})$, pero se tiene que $f(t_{g(n)}, \hat{x}, y_{g(n)}) > \gamma$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por continuidad $f(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}) \geq \gamma > \hat{\alpha}$ por lo tanto $u(\hat{t}, \hat{x}) > \hat{\alpha}$. Esto es una contradicción, entonces D es un conjunto abierto y entonces $B \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} u_t$ es lsc.

Finalmente, estas dos afirmaciones prueban que las funciones v y u son integrands de Lusin con las respectivas hipótesis. $\square$

Un resultado de selección medible

El Teorema 1.4.6 da un resultado de selección medible para multifunciones a valores en un Banach separable, este resultado es una potente herramienta que da lugar a muchas aplicaciones, especialmente en optimización de funcionales integrales (ver, e.g., [45, Theorem 14.60] o [38, Theorem 6.4.16]). Con este mismo propósito, en esta sección se mostrará un resultado de selección medible en el caso donde X no es necesariamente separable, es por esto que se define una importante clase de integrands.

Definición 3.2.9 Una función $f\colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ se dice un *integrand admisible* si existe una familia uniformemente de Lusin $\{f_i\colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}\}_{i \in I}$ tal que para todo $(i,t) \in I \times T$ $f_i(t, \cdot) \in \Gamma(X)$ y $\operatorname{epi} f_t = \operatorname{cl}(\operatorname{epi}(\inf_{i \in I} f_i(t, \cdot)))$ para todo $t \in T$.

Evidentemente, un Lusin integrand $h\colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ que cumple que $h_t \in \Gamma(X)$ para todo $t \in T$, es un integrand admisible. Además, gracias al Lema 3.2.7-(a) y el Lema 3.2.3-(c) se tiene que un integrand admisible resulta ser un Lusin integrand. La siguiente proposición muestra que cuando X es separable, la noción de integrand admisible se reduce a la de normal integrand.

Proposición 3.2.10 Sea X un espacio de Banach separable, sea $f\colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Entonces, f es un integrand admisible si y sólo si f es un normal integrand.

Demostración. Si f es un integrand admisible, entonces es un Lusin integrand, luego por el Lema 3.2.3-(e) se tiene que f es un normal integrand. Para probar la recíproca, sea $D = \operatorname{dom}(\operatorname{epi} f)$, por el Teorema 1.4.6, existen funciones medibles $x_n\colon D \to X$ y $\alpha_n\colon D \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{epi} f_t = \operatorname{cl}(\{x_n(t), \alpha_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}})$ para todo $t \in D$, entonces puede definirse la función,

$$f_n\colon D \times X \ni (t,x) \mapsto \alpha_n(t) + \delta_{\{x_n(t)\}}(x),$$

mientras que si $t \notin D$, entonces se define $f_n(t, \cdot) = \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que

$f_n(t,\cdot) \in \Gamma(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y es fácil ver que f_n es un Lusin integrand pues

$$\operatorname{epi} f_n(t,\cdot) = \begin{cases} \{x_n(t)\} \times [\alpha_n(t), \infty) & \text{si } t \in D, \\ \emptyset \quad \text{si } t \notin D. \end{cases}$$

entonces por la Proposición 3.2.7-(c), $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia uniformemente de Lusin y $\operatorname{epi} f_t = \operatorname{cl}(\operatorname{epi}(\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(t,\cdot)))$, por lo tanto f es un integrand admisible. $\square$

Cuando X es un espacio de Banach cualquiera, la siguiente proposición muestra que cuando la función es semicontinua superior en T, esta resulta un integrand admisible.

Proposición 3.2.11 Sea $f\colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Si f_t es lsc para todo $t \in T$ y para todo $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ y $\varepsilon > 0$, existe un compacto $K \subset A$ tal que $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ y $K \ni t \mapsto f(t,x)$ es usc para todo $x \in X$. Entonces, f es un integrand admisible. En particular, si f es una función de Scorza-Dragoni tal que para todo $t \in T$, f_t es lsc, esta resulta ser un integrand admisible.

Demostración. Sea $x \in X$, se define $f_x\colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ como

$$f_x(t,y) = \begin{cases} f(t,x) & \text{si } y = x, \\ \infty & \text{si } y \neq x. \end{cases}$$

Es claro que $f_x(t,\cdot) \in \Gamma(X)$. Se probará que $\operatorname{epi} f_t = \operatorname{cl}(\operatorname{epi}(\inf_{z\in X} f_z(t,\cdot)))$. En efecto, si $(x,\alpha) \in \operatorname{epi} f_t \implies f(t,x) \le \alpha$, sigue que $f_x(t,x) = f(t,x) \le \alpha \implies \inf_{z\in X} f_z(t,x) \le \alpha \implies (x,\alpha) \in \operatorname{epi}(\inf_{z\in X} f_z(t,\cdot))$ lo que prueba que $\operatorname{epi} f_t \subset \operatorname{cl}(\operatorname{epi}(\inf_{z\in X} f_z(t,\cdot)))$. Para ver la inclusión recíproca, sea $(x,\alpha) \in \operatorname{cl}(\operatorname{epi}(\inf_{z\in X} f_z(t,\cdot)))$ entonces existe una secuencia $(x_n,\alpha_n)_n \subset \operatorname{epi}(\inf_{z\in X} f_z(t,\cdot))$ tal que $x_n \to x$ y $\alpha_n \to \alpha$, luego $\inf_{z\in X} f_z(t,x_n) \le \alpha_n < \alpha_n + \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego existe $z_n \in X$ tal que $f_{z_n}(t,x_n) < \alpha_n + \frac{1}{n}$ por tanto $z_n = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y entonces $f(t,x_n) < \alpha_n + \frac{1}{n}$, así que tomando $n \to \infty$ y ocupando que f_t es lsc, $f(t,x) \le \liminf f(t,x_n) \le \alpha$ por tanto $(x,\alpha) \in \operatorname{epi} f_t$ y así se concluye la igualdad $\operatorname{epi} f_t = \operatorname{cl}(\operatorname{epi}(\inf_{z\in X} f_z(t,\cdot)))$. Por otro lado, sea $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ y $\varepsilon > 0$ luego existe $K \subset A$ compacto tal que $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ y para todo $x \in X$, $K \ni t \mapsto f(t,x)$ es usc, se verá que $K \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_x(t,\cdot)$ es lsc para todo $x \in X$. Sea $U \times J$ un abierto de $X \times \mathbb{R}$, sea $\mathcal{U} = \{t \in K\colon \operatorname{epi} f_x(t,\cdot) \cap (U \times J) \neq \emptyset\}$ entonces si $\hat{t} \in \mathcal{U}$ se tiene que existe $y \in U$ y $\beta \in J$, tal que $f_x(\hat{t},y) < \beta$ y por tanto $f(\hat{t},x) < \beta$, como $f(\cdot,x)$ es usc, entonces existe $V_{\hat{t}}$, vecindad de $\hat{t}$ en K, tal que $f(t,x) < \beta$ para todo $t \in V_{\hat{t}}$, entonces claramente $V_{\hat{t}} \subset \mathcal{U}$ y por tanto $\mathcal{U}$ es un abierto en K, lo que prueba que $K \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_x(t,\cdot)$ es lsc, luego $\{f_x\colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}\}_{x\in X}$ es una familia uniformemente de Lusin, por tanto f es un integrand admisible. $\square$

Además, es posible definir una noción similar para multifunciones, se dirá que $C\colon T \rightrightarrows X$ es una multifunción admisible si existe una familia uniformemente de Lusin $\{C_i\colon T \rightrightarrows X\}_{i\in I}$ tal que $C(t) = \operatorname{cl}(\bigcup_{i\in I} C_i(t))$ para todo $t \in T$ y C_i toma valores convexos y cerrados para todo $i \in I$. En este contexto, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.2.12 $C\colon T \rightrightarrows X$ es una multifunción admisible si y sólo si $(t,x) \mapsto \delta_{C(t)}(x)$ es un integrand admisible.

Demostración. Si $C\colon T \rightrightarrows X$ es admisible, $C(t) = \operatorname{cl}(\bigcup_{i\in I} C_i(t))$ para todo $t \in T$ donde $\{C_i\colon T \rightrightarrows X\}_{i\in I}$ es una familia uniformemente de Lusin y C_i toma valores convexos y cerrados para todo $i \in I$. Teniendo en cuenta la Proposición 3.2.7-(d), se tiene que $((t,x) \mapsto \delta_{C_i(t)}(x))_{i\in I}$ es una familia uniformemente de Lusin. Además, $\operatorname{epi}\delta_{C(t)} = \operatorname{cl}(\operatorname{epi}(\inf_{i\in I}\delta_{C_i(t)}))$, puesto que $\operatorname{epi}(\inf_{i\in I}\delta_{C_i(t)}) = \bigcup_{i\in I} C_i(t) \times [0,\infty)$ y entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{cl}(\operatorname{epi}(\inf_{i\in I}\delta_{C_i(t)}) &= \operatorname{cl}\left(\bigcup_{i\in I} C_i(t)\right) \times [0,\infty)\\ &= C(t)\times[0,\infty) = \operatorname{epi}\delta_{C(t)}\end{aligned}$$

lo que prueba que $(t,x) \mapsto \delta_{C(t)}(x)$ es un integrand admisible. Para probar la inclusión opuesta, se supondrá que $(t,x) \mapsto \delta_{C(t)}(x)$ es un integrand admisible, entonces existe una familia uniformemente de Lusin $\{f_i\}_{i\in I}$ con $f_i \in \Gamma(X)$ para todo $i \in I$, tal que

$$\operatorname{epi}\delta_{C(t)} = \operatorname{cl}(\operatorname{epi}(\inf_{i\in I} f_i(t,\cdot))) = C(t)\times[0,\infty).$$

Para todo $(i,\varepsilon) \in I \times [-1,1] =: J$, se considera la multifunción $C_i^\varepsilon \colon T \rightrightarrows X$ definida por

$$C_i^\varepsilon(t) = \operatorname{cl}(\{x \in X \colon f_i(t,x) < \varepsilon\}),$$

se probará que $C(t) = \operatorname{cl}(\bigcup_{(i,\varepsilon)\in J} C_i^\varepsilon(t))$. Si $x \in C(t)$, entonces $(x,0) \in \operatorname{cl}(\operatorname{epi}(\inf_{i\in I} f_i(t,\cdot)))$, luego existe $x_n \to x$ y $\alpha_n \to 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $i \in I$ con $f_i(t,x_n) < \alpha_n \Rightarrow x_n \in C_i^{\alpha_n}(t)$ y entonces $x_n \in \bigcup_{(i,\varepsilon)\in J} C_i^\varepsilon(t)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego tomando $n \to \infty$, $x \in \operatorname{cl}(\bigcup_{(i,\varepsilon)\in J} C_i^\varepsilon(t))$. Si $x \in \operatorname{cl}(\bigcup_{(i,\varepsilon)\in J} C_i^\varepsilon(t))$, existe una secuencia (x_n) tal que $x_n \to x$ y $(i_n,\varepsilon_n) \in J$ con $f_{i_n}(t,x_n) < \varepsilon_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y entonces $(x_n,\varepsilon_n) \in \operatorname{epi}(\inf_{i\in I} f_i(t,\cdot))$, luego $(x_n,\varepsilon_n) \in C(t)\times[0,\infty)$, y entonces $x_n \in C(t)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y como $C(t)$ es cerrado, sigue que $x \in C(t)$. Finalmente, $\{C_i^\varepsilon \colon T \rightrightarrows X\}_{(i,\varepsilon)\in J}$ es uniformemente de Lusin gracias al Lema 3.2.3-(d) y [38, Proposition 6.1.19]. $\square$

El siguiente Lema es la versión medible del Lema 3.1.2. Ahora, se considera el ínfimo de una familia que es uniformente de Lusin.

Lema 3.2.13 Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de funciones que es uniformemente de Lusin, también, se asume que $f_i(t,\cdot) \in \Gamma(X)$ para todo $i \in I$ y $t \in T$. Sea $A \subset T$ con $A \in \mathcal{A}$. Se considera $f(t,x) := \inf_{i\in I} f_i(t,x)$ y suponga que existe una función medible $\alpha\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $m_f(t) < \alpha(t), \forall t \in A$. Entonces, existe una función fuertemente medible $x\colon A \to X$ tal que $f(t,x(t)) \le \alpha(t)$ μ-c.t.p. en A.

Demostración. Sea $A' = \{t \in A \colon \alpha(t) < \infty\}$, claramente $A' \in \mathcal{A}$. Como $\{f_i\}_{i\in I}$ es una familia uniformemente de Lusin, $\alpha\colon A' \to \mathbb{R}$ es una función medible y μ es σ-finita, se puede escoger una secuencia disjunta de compactos con medida finita $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\mu(A' \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)) = 0$, y para todo $n \in \mathbb{N}$, $\alpha\colon B_n \to \mathbb{R}$ es una función continua y $B_n \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_i(t,\cdot)$ es lsc, $\forall i \in I$. Fijando $n \in \mathbb{N}$, se toma $t \in B_n$, dado que $m_f(t) < \alpha(t)$, existe $i(t) \in I$ tal que $m_{f_{i(t)}}(t) < \alpha(t)$, por el Lema 3.1.1-(b), $m_{f_{i(t)}}$ es usc en B_n y dado que $\alpha|_{B_n}$ es continua, se tiene que existe $U_t \in \mathcal{N}_t$ ($U_t \subset B_n$) tal que $m_{f_{i(t)}}(s) < \alpha(s), \forall s \in U_t$. Notar que $(U_t)_{t\in B_n}$ es un recubrimiento abierto de B_n y por compacidad, existen $t_1,...,t_j \in B_n$ tal que $B_n = \bigcup_{k=1}^j U_{t_k}$, por el Lema 3.1.2 se tiene que existe una función continua $x_{t_k}\colon U_{t_k} \to X$ tal que $f_{i(t_k)}(s, x_{t_k}(s)) \le \alpha(s), \forall s \in U_{t_k}$, entonces $f(s,x_{t_k}(s)) \le \alpha(s), \forall s \in U_{t_k}$. Se define la función $x_n\colon B_n \to X$ dada por $x_n(t) = \sum_{k=1}^j x_{t_k}(t)\mathbf{1}_{A_k}$ donde $A_k = U_{t_k} \setminus \bigcup_{\ell=1}^{k-1} U_{t_\ell}$ para $k > 1$ y $A_1 = U_{t_1}$, y se observa que $f(t,x_n(t)) \le \alpha(t), \forall t \in B_n$. Finalmente, se define la función medible $x'\colon A' \to X$ (la cual es fuertemente medible) dada por $x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)\mathbf{1}_{B_n}$, y se tiene que $f(t, x'(t)) \leq \alpha(t), \forall t \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, luego, basta considerar $x_0 \in X$ cualquiera y tomar $x(t) = x'(t)\mathbf{1}_{A'} + x_0\mathbf{1}_{A\setminus A'}$ y se tiene que x es fuertemente medible y $f(t, x(t)) \leq \alpha(t)$ para todo $x \in A$, y se concluye el resultado. □

El siguiente Lema muestra una propiedad de funciones que será útil más adelante.

Lema 3.2.14 Sean $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones tal que $\operatorname{epi} f = \operatorname{cl}(\operatorname{epi} g)$. Entonces $\inf_{x\in X} f(x) = \inf_{x\in X} g(x)$.

Demostración. Es claro que

$$
\begin{aligned}
\inf_{x\in X} f(x) &= \inf\{\alpha\colon (x,\alpha) \in \operatorname{epi} f, x \in X\} \\
&= \inf\{\alpha\colon (x,\alpha) \in \operatorname{cl}(\operatorname{epi} f), x \in X\} \\
&= \inf\{\alpha\colon (x,\alpha) \in \operatorname{epi} g, x \in X\} = \inf_{x\in X} g(x),
\end{aligned}
$$

y se concluye. □

El resultado anterior será clave para probar una nueva versión del Lema 3.2.13, esta vez, para integrands admisibles.

Teorema 3.2.15 Sea f un integrand admisible. Sea $A \subset T$ con $A \in \mathcal{A}$. Suponga que existe una función medible $\alpha\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $m_f(t) < \alpha(t), \forall t \in A$. Entonces, existe una función fuertemente medible $x\colon A \to X$ tal que $f(t, x(t)) \leq \alpha(t)$ μ-c.t.p. en A.

Demostración. Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ la familia uniformemente de Lusin tal que

$$\operatorname{epi} f_t = \operatorname{cl}(\operatorname{epi}(\inf_{i\in I} f_i(t,\cdot))),$$

con $f_i(t,\cdot) \in \Gamma(X), \forall (i,t) \in I \times T$. Se considera $g(t,x) := \inf_{i\in I} f_i(t,x)$, se tiene que $\operatorname{epi} f_t = \operatorname{cl}(\operatorname{epi} g_t)$ para todo $t \in T$, por lo tanto, por el Lema 3.2.14, se tiene que, para todo $t \in T$, $m_f(t) = m_g(t)$. Ahora, se puede aplicar el Lema 3.2.13 a la familia $\{f_i\}_{i\in I}$ y obtener una función fuertemente medible $x\colon A \to X$ tal que $g(t, x(t)) \leq \alpha(t)$ μ-c.t.p. en A, entonces $f(t, x(t)) \leq \alpha(t)$ μ-c.t.p. en A pues $f \leq g$ puntualmente. □

Del teorema anterior y los resultados previos se desprende directamente que existen selecciones medibles para multifunciones admisibles, como establece el siguiente corolario.

Corolario 3.2.16 Sea $C\colon T \rightrightarrows X$ una multifunción admisible, entonces existe una función fuertemente medible $x\colon \operatorname{dom} C \to X$ tal que $x(t) \in C(t)$ μ-c.t.p. en $\operatorname{dom} C$.

Demostración. Por la Proposición 3.2.12 se tiene que $(t,x) \mapsto \delta_{C(t)}(x)$ es un integrand admisible, además $\inf_{x\in X} \delta_{C(t)}(x) = 0$ para todo $t \in \operatorname{dom} C$. Luego si se toma $\alpha(t) = 1$ para todo $t \in T$, se tiene que $\inf_{x\in X} \delta_{C(t)}(x) < \alpha(t), \forall t \in \operatorname{dom} C$, sigue por el Teorema 3.2.15 que existe $x\colon \operatorname{dom} C \to X$ fuertemente medible tal que $\delta_{C(t)}(x(t)) \leq \alpha(t) = 1$ μ-c.t.p. en $\operatorname{dom} C$ lo que implica que $x(t) \in C(t)$ μ-c.t.p. en $\operatorname{dom} C$. □

3.3. Conjugada de Funcionales Integrales sobre espacios descomponibles

En esta sección se mostrará la fórmula de la conjugada de Fenchel para un funcional integral, cuando este es definido sobre un espacio de funciones descomponible y el integrand que define el funcional es admisible, sin asumir hipótesis de separabilidad del espacio X. Esta fórmula se fue desarrollada en [14, Theorem VII-7] en el caso separable, mientras que en [14, Theorem VII-14] se muestra un resultado parcial en espacios reflexivos (no necesariamente separables), donde se asume una hipótesis muy particular sobre el integrand.

Siguiendo las ideas de [14], sea $\mathcal{L}$ un espacio vectorial de funciones fuertemente medibles $x\colon T \to X$. Se dice que $\mathcal{L}$ es *descomponible* si para cada $x \in \mathcal{L}$, y toda función fuertemente medible $y\colon T \to X$ con $y(T)$ relativamente compacto, y cada conjunto $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$, la función $x\mathbf{1}_{A^c} + y\mathbf{1}_A$ pertenece $\mathcal{L}$.

Lema 3.3.1 Sea μ una medida regular interna, σ-finita y completa sobre un espacio métrico T y un Lusin integrand $f\colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$, donde f_t es lsc para todo $t \in T$. Si $x\colon T \to X$ y $x^*\colon T \to X^*$ son funciones fuertemente medibles, entonces $t \mapsto f(t, x(t))$ y $t \mapsto f^*(t, x^*(t))$ son $\mathcal{A}$-medibles.

Demostración. Se define $\varphi(t) := f(t, x(t))$. Primero se considera $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$. se afirma que existe un conjunto medible $B \subset A$ con $\mu(A\backslash B) = 0$ tal que φ es medible en B. En efecto, se considera una secuencia creciente de conjuntos compactos $B_k^1 \subset A$ tal que $\mu(A\backslash \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k^1) = 0$ y $B_k^1 \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_t$ es lsc para todo k, por el Lema 3.1.1-(a), se tiene que f^* es medible sobre $B_k^1 \times X^*$, pues f^* es lsc, entonces $B_k^1 \ni t \mapsto f^*(t, x^*(t))$ es medible para todo $k \in \mathbb{N}$ y por tanto $t \mapsto f^*(t, x^*(t))$ es $\mathcal{A}$-medible pues $(T, \mathcal{A}, \mu)$ es completo. Además, por el Corolario 1.3.13 aplicado a $x|_A$, existe una secuencia creciente de compactos $B_k^2 \subset A$ tal que $\mu(A\backslash \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k^2) = 0$ y $B_k^2 \ni t \mapsto x(t)$ es continua. Se define $B_k := B_k^1 \cap B_k^2$, entonces por el Lema 3.1.1-(c), φ es medible en B_k, entonces definiendo $B := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$ se tiene que $\mu(A\backslash B) = 0$, y la función $B \ni t \mapsto f(t, x(t))$ es $\mathcal{A}$-medible, y por tanto es $\mathcal{A}$-medible en T ya que la medida es completa. $\square$

Sean $x\colon T \to X$ y $x^*\colon T \to X^*$ funciones fuertemente medibles, se definen

$$\mathcal{I}_f(x) = \int_T f(t, x(t))d\mu \text{ y } \mathcal{I}_{f^*}(x^*) = \int_T f^*(t, x^*(t))d\mu. \tag{3.5}$$

Si $f\colon T \times X \to \mathbb{R}$ es un Lusin integrand con f_t lsc para todo $t \in T$, el Lema anterior respalda que las integrales estén bien definidas. Para funciones débil* medibles, la definición anterior no tiene sentido, pues la conclusión del Lema 3.3.1 no es cierta en general en ese caso. En efecto, si X es un espacio de Banach no separable, pueden existir funciones débil* medibles $x^*\colon T \to X^*$ tal que la función $t \mapsto f^*(t, x^*(t))$ no es medible. Por ejemplo, si $X = \ell^2([0,1])$ (que es un Hilbert con el producto $\langle x, y\rangle := \sum_{t\in[0,1]} x_t y_t$) y $T = [0,1]$ con la medida de Lebesgue, además se considera la base canónica $(e_t)_{t\in[0,1]} \subset X$. Se sabe que existe $I \subset [0,1]$ tal que I no es Lebesgue medible. Se define la función $x^*\colon T \to X^*$ dada por $x^*(t) = e_t\mathbf{1}_I(t) - e_t\mathbf{1}_{[0,1]\backslash I}(t)$. Además, se considera la función $f\colon (t, x) \in T \times X \mapsto \delta_C(x)$ donde $C = \{x \in X\colon 0 \leq x_t \leq 1,\ \forall t \in [0,1]\}$ (f es admisible), es fácil ver que $f^*(t, y^*) = \sup_{x\in C}\langle y^*, x\rangle$. Notar que, si $x \in X$, el conjunto $\{t \in [0,1]\colon x_t \neq 0\}$ es numerable, entonces la función $t \mapsto \langle x^*(t), x\rangle$ es medible para todo $x \in X$, entonces x^* es débil* medible, pero

$$\begin{aligned}\{t \in T\colon f^*(t, x^*(t)) > 0\} &= \{t \in T\colon \sup_{x\in C}\langle x^*(t), x\rangle > 0\} \\ &= \{t \in I\colon \sup_{x\in C} x_t > 0\} \cup \{t \notin I\colon \inf_{x\in C} x_t < 0\} = I,\end{aligned}$$

y por lo tanto la función $t \mapsto f^*(t, x^*(t))$ no es medible.

El siguiente resultado dice que los integrands admisibles cumplen las mismas propiedades expuestas en el Lema 3.3.1.

Lema 3.3.2 Sea f un integrand admisible. Si $x\colon T \to X$ y $x^*\colon T \to X^*$ son funciones fuertemente medibles, entonces los mapeos $t \mapsto f(t, x(t))$ y $t \mapsto f^*(t, x^*(t))$ son $\mathcal{A}$-medibles.

Demostración. Por el Lema 3.2.7-(a) y el Lema 3.2.3-(c) f es un Lusin integrand, además f_t sea lsc para todo $t \in T$, entonces esto es una consecuencia directa del Lema 3.3.1. $\square$

El Lema 3.3.2 dice que la definición en (3.5) puede ser extendida al caso en que f es un integrand admisible. Ahora se procede a mostrar el principal resultado de esta sección, el cual establece una fórmula de la conjugada de Fenchel para el funcional integral de un integrand admisible.

Teorema 3.3.3 Sea μ una medida regular interna σ-finita sobre un espacio métrico T. Sea f un integrand admisible. También, sea $\mathcal{L}$ un espacio descomponible de funciones fuertemente medibles, tal que existe $u \in \mathcal{L}$ con $\mathcal{I}_f(u) < \infty$. Si $x^*\colon T \to X^*$ es una función fuertemente medible tal que para todo $x \in \mathcal{L}$ la función $t \mapsto \langle x^*(t), x(t)\rangle$ es integrable. Entonces

$$\mathcal{I}_{f^*}(x^*) = \sup\left\{\int_T (\langle x^*(t), x(t)\rangle - f(t, x(t)))\, d\mu\colon x \in \mathcal{L}\right\}. \tag{3.6}$$

Demostración. Primero, si existe algún $v \in \mathcal{L}$ tal que $\mathcal{I}_f(v) = -\infty$, el resultado se tiene trivialmente, entonces se puede asumir que $\mathcal{I}_f(v) > -\infty$ para todo $v \in \mathcal{L}$, así se tendrá que $\mathcal{I}_f(u) \in \mathbb{R}$. Se define $\psi(t, x) = f(t, x) - \langle x^*(t), x\rangle$. Notar que $f^*(t, x^*(t)) \geq \langle x^*(t), u(t)\rangle - f(t, u(t)) =: g(t)$ y $g \in L^1(T)$ pues $\mathcal{I}_f(u) \in \mathbb{R}$ luego, por la Proposición 1.3.7

$$\mathcal{I}_{f^*}(x^*) = \int_T f^*(t, x^*(t))d\mu = \sup\left\{\int_T \phi(t)\colon \phi \in L^1(T) \text{ y } \phi(t) < f^*(t, x^*(t)) \ \mu\text{-c.t.p.}\right\}. \tag{3.7}$$

El resto de la demostración está dividido en las siguientes Afirmaciones:
Afirmación 1: La función ψ es un integrand admisible.
Demostración de la Afirmación 1: Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ la familia uniformemente de Lusin tal que

$$\operatorname{epi} f_t = \operatorname{cl}(\operatorname{epi}(\inf_{i\in I} f_i(t, \cdot))),$$

con $f_i(t, \cdot) \in \Gamma(X), \forall (i, t) \in I \times T$. Se considera $g_i(t, x) := f_i(t, x) - \langle x^*(t), x\rangle$ y se probará que $\operatorname{epi} \psi_t = \operatorname{cl}(\operatorname{epi}(\inf_{i\in I} g_i(t, \cdot)))$. En efecto, es claro que $\inf_{i\in I} g_i(t, \cdot) \geq \psi_t$ puntualmente, entonces $\operatorname{epi}(\inf_{i\in I} g_i(t, \cdot)) \subset \operatorname{epi} \psi_t$ para todo $t \in T$ y como ψ_t es lsc, se tiene que $\operatorname{cl}(\operatorname{epi}(\inf_{i\in I} g_i(t, \cdot))) \subset \operatorname{epi} \psi_t$. Para probar la inclusión opuesta, sea $(x, \alpha) \in \operatorname{epi} \psi_t$, entonces $f_t(x) - \langle x^*(t), x\rangle \leq \alpha$. Si $U \times J$ es una vecindad de (x, α), se puede escoger $\beta \in J$ con $\beta > \alpha$ tal que $f_t(x) - \langle x^*(t), x\rangle < \beta$ y entonces existe $\eta \in \mathbb{R}$ tal que $f_t(x) - \beta < \eta < \langle x^*(t), x\rangle$, por continuidad existe una vecindad de x, $U_1 \subset U$, tal que para todo $x' \in U_1$, $\langle x^*(t), x'\rangle > \eta$, por otro lado, se tiene que $f(t,x) < \beta+\eta$, por lo tanto $\operatorname{epi}(\inf_{i\in I} f_i(t,\cdot)) \cap (U_1 \times (-\infty, \beta+\eta)) \neq \emptyset$, así, existe $(\hat{x}, \hat{\alpha}) \in U_1 \times (-\infty, \beta+\eta)$ tal que $\inf_{i\in I} f_i(t,\hat{x}) \le \hat{\alpha} < \beta+\eta < \beta + \langle x^*(t), \hat{x}\rangle$ y por lo tanto $\inf_{i\in I} g_i(t,\hat{x}) < \beta$, entonces $\operatorname{epi}(\inf_{i\in I} g_i(t,\cdot)) \cap (U \times J) \neq \emptyset$ lo que prueba que $(x,\alpha) \in \operatorname{cl}(\operatorname{epi}(\inf_{i\in I} g_i(t,\cdot)))$. Finalmente, por el Corolario 1.3.13, se tiene que para todo $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ y $\varepsilon > 0$, existe un conjunto compacto $K \subset A$ con $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ tal que $x^*\colon K \to X^*$ es continua, entonces $K \times X \ni (t,x) \mapsto \langle x^*(t), x\rangle$ es continua, entonces por el Lema 3.2.7-(b), se tiene que $\{g_i\}_{i\in I}$ es una familia uniformemente de Lusin y se concluye.

Afirmación 2: La fórmula (3.6) se tiene.
Demostración de la Afirmación 2: Sea $\varepsilon > 0$ y $\beta \in L^1(T)$ tal que $f^*(t, x^*(t)) > \beta(t)$ μ-c.t.p. se puede asumir que esta desigualdad es válida en todo T, entonces $m_\psi(t) < -\beta(t)$ para todo $t \in T$, luego por el Teorema 3.2.15 existe una función fuertemente medible $y\colon T \to X$ tal que $\psi(t, y(t)) \le -\beta(t)$ μ-c.t.p., luego, por la Proposición 1.3.14, existe un conjunto compacto de medida finita $B \subset T$ tal que

$$\int_{B^c} |\beta(t)| d\mu < \varepsilon/2 \text{ y } \int_{B^c} |\psi(t, u(t))| d\mu < \varepsilon/2,$$

ya que β y $\psi(\cdot, u(\cdot))$ son integrables y además por el Corolario 1.3.13 se puede asumir que $B \ni t \mapsto y(t)$ es continua. Luego,

$$\int_B \beta(t) d\mu \le \int_B \langle x^*(t), y(t)\rangle - f(t, y(t)) d\mu,$$

Ahora, como y es continua sobre B y este es compacto, se tiene que $y(B)$ es compacto, entonces como $\mathcal{L}$ es descomponible (extendiendo y a todo T, por cero fuera de B) la función $z(t) := u(t)\mathbf{1}_{B^c} + y(t)\mathbf{1}_B$ pertenece a $\mathcal{L}$ y

$$\begin{aligned}
\int_T \beta(t) d\mu &= \int_B \beta(t) d\mu + \int_{B^c} \beta(t) d\mu \\
&\le \int_B \left(\langle x^*(t), y(t)\rangle - f(t, y(t))\right) d\mu + \varepsilon/2 \\
&\le \varepsilon/2 + \int_T \left(\langle x^*(t), z(t)\rangle - f(t, z(t))\right) d\mu + \int_{B^c} \psi(t, u(t)) d\mu \\
&\le \varepsilon + \int_T \left(\langle x^*(t), z(t)\rangle - f(t, z(t))\right) d\mu \\
&\le \varepsilon + \sup\left\{ \int_T \left(\langle x^*(t), x(t)\rangle - f(t, x(t))\right) d\mu \colon x \in \mathcal{L} \right\}.
\end{aligned}$$

Lo anterior se cumple para todo $\beta \in L^1(T)$ tal que $\beta(t) < f^*(t, x^*(t))$ μ-c.t.p., entonces por (3.7) se sigue que

$$\sup\left\{ \int_T \left(\langle x^*(t), x(t)\rangle - f(t, x(t))\right) d\mu(t) \colon x \in \mathcal{L} \right\} + \varepsilon \ge \mathcal{I}_{f^*}(x^*).$$

Por la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$, se concluye la desigualdad $\le$ en (3.6). La desigualdad opuesta siempre se tiene, así que se concluye la demostración. $\square$

Ahora, se considera el problema de optimización

$$\min_{x\in\mathcal{L}} \mathcal{I}_f(x), \tag{3.8}$$

donde la función f, como en el Teorema 3.3.3, es un integrand admisible. Con esto, es posible dar condiciones de optimalidad al problema (3.8).

Corolario 3.3.4 Bajo las mismas suposiciones del Teorema 3.3.3, se tiene que $\bar{x} \in \mathcal{L}$ resuelve el problema de optimización (3.8) si y sólo si para casi todo $t \in T$, $\bar{x}(t)$ resuelve el problema de optimización

$$\min_{x\in X} f_t(x).$$

Demostración. Usando el Teorema 3.3.3, es claro que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_f(\bar{x}) &= \inf\{\mathcal{I}_f(x) \colon x \in \mathcal{L}\} = -\sup\{-\mathcal{I}_f(x) \colon x \in \mathcal{L}\}\\ &= -\mathcal{I}_{f^*}(0) = \int_T \inf_{x\in X} f_t(x) d\mu.\end{aligned}$$

Entonces, se tiene que $f_t(\bar{x}(t)) = \inf_{x\in X} f_t(x)$ μ-c.t.p. que concluye la demostración. $\square$

Se define $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ como el conjunto de funciones fuertemente medibles $x^* \colon T \to X^*$ tal que para todo $x \in \mathcal{L}$, la función $t \mapsto \langle x^*(t), x(t)\rangle$ es integrable. El conjunto $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ es un espacio vectorial. Usando esta notación, el funcional $\mathcal{I}_{f^*} \colon \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \to \overline{\mathbb{R}}$ está bien definido. En el caso en que tanto $\mathcal{L}$ como $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ tengan estructura de espacios vectoriales topológicos, se asumirá que $\mathcal{L}$ y $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ están en dualidad, donde el producto de dualidad está dado por

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathcal{L} \times \mathcal{P}_{\mathcal{L}} &\to \mathbb{R}\\ (x, x^*) &\mapsto \int_T \langle x^*(t), x(t)\rangle d\mu.\end{aligned}$$

Para $\varepsilon \geq 0$ se define el conjunto $\mathcal{Z}(\varepsilon) := \{\ell \in L^1(T) \colon \ell(t) \geq 0$ μ-c.t.p. y $\int_T \ell(t)d\mu \leq \varepsilon\}$. El siguiente corolario muestra una caracterización del subdiferencial del operador $\mathcal{I}_f$, obtenido gracias al Teorema 3.3.3.

Corolario 3.3.5 Bajo las hipótesis del Teorema 3.3.3, se tiene que para todo $x \in \mathcal{L}$ donde $|\mathcal{I}_f(x)| < \infty$ y $\varepsilon \geq 0$

$$\partial_\varepsilon \mathcal{I}_f(x) = \bigcup_{\eta\in\mathcal{Z}(\varepsilon)} \{x^* \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \colon x^*(t) \in \partial_{\eta(t)} f_t(x(t)) \ \mu\text{-c.t.p.}\}. \tag{3.9}$$

Demostración. En este caso, se tiene que

$$\partial_\varepsilon \mathcal{I}_f(x) = \left\{ y^* \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \colon \mathcal{I}_f(y) + \varepsilon \geq \mathcal{I}_f(x) + \int_T \langle y^*(t), y(t) - x(t)\rangle, \ \forall y \in \mathcal{L} \right\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
& x^* \in \partial_\varepsilon \mathcal{I}_f(x) \\
\iff\quad & \varepsilon + \mathcal{I}_f(y) \geq \mathcal{I}_f(x) + \int_T \langle x^*(t), y(t) - x(t)\rangle d\mu \ , \forall y \in \mathcal{L} \\
\iff\quad & \varepsilon + \int_T (\langle x^*(t), x(t)\rangle - f(t, x(t))) d\mu \geq \sup\left\{ \int_T \langle x^*(t), y(t)\rangle d\mu - \mathcal{I}_f(y) \colon y \in \mathcal{L} \right\} \\
\iff\quad & \mathcal{I}_f(x) - \int_T \langle x^*(t), x(t)\rangle d\mu + \mathcal{I}_{f^*}(x^*) \leq \varepsilon \\
\iff\quad & \int_T (f(t, x(t)) - \langle x^*(t), x(t)\rangle + f^*(t, x^*(t))) d\mu \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ahora, por la desigualdad de Young-Fenchel (ver [55, Theorem 2.3.1 (ii)]), se tiene que $\eta(t) := f(t, x(t)) - \langle x^*(t), x(t)\rangle + f^*(t, x^*(t)) \geq 0$ para todo $t \in T$, luego $\eta \in \mathcal{Z}(\varepsilon)$ y además por [55, Theorem 2.4.2 (ii)]

$$f(t, x(t)) - \langle x^*(t), x(t)\rangle + f^*(t, x^*(t)) \leq \eta(t) \iff x^*(t) \in \partial_{\eta(t)} f_t(x(t)),$$

lo que prueba que x^* pertenece al conjunto del lado derecho en (3.9). Recíprocamente, si existe $\eta \in \mathcal{Z}(\varepsilon)$ tal que $x^*(t) \in \partial_{\eta(t)} f_t(x(t))$ μ-c.t.p. con $x^* \in \mathcal{P}_\mathcal{L}$, entonces por [55, Theorem 2.4.2 (ii)]

$$\begin{aligned}
x^*(t) \in \partial_{\eta(t)} f_t(x(t)) \ \mu\text{-c.t.p.} \quad & \iff \quad f(t, x(t)) - \langle x^*(t), x(t)\rangle + f^*(t, x^*(t)) \leq \eta(t) \ \mu\text{-c.t.p.} \\
& \implies \quad \mathcal{I}_f(x) + \mathcal{I}_{f^*}(x^*) - \langle x^*, x\rangle \leq \int_T \eta(t) d\mu \leq \varepsilon \\
& \implies \quad \mathcal{I}_f(x) + (\mathcal{I}_f)^*(x^*) - \langle x^*, x\rangle \leq \varepsilon \\
& \implies \quad x^* \in \partial_\varepsilon \mathcal{I}_f(x),
\end{aligned}$$

lo que prueba la igualdad. □

El caso $\mathcal{L} = L^p(T, X)$.

Para cada $p \in [1, \infty]$, el espacio $L^p(T, X)$ es descomponible. Cuando X es un espacio de Asplund, se tiene que X^* cumple la propiedad de Radon Nikodym (Proposición 1.3.24) y entonces por el Teorema 1.3.22, para X espacio de Asplund, si $p < \infty$, el espacio dual de $L^p(T, X)$ se identifica con $L^q(T, X^*)$, donde $1/p + 1/q = 1$, y si $p = \infty$, el dual de $L^\infty(T, X)$ está caracterizado por la suma directa $L^1(T, X^*) \oplus L^{\text{sing}}(T, X)$.

Proposición 3.3.6 Suponga que X es un espacio de Asplund. Considere $p, q \in [1, \infty]$ con $1/p + 1/q = 1$. Si $\mathcal{L} = L^p(T, X)$, entonces $\mathcal{P}_\mathcal{L} = L^q(T, X^*)$.

Demostración. Primero que todo, si $x^* \in L^q(T, X^*)$, usando la desigualdad de Hölder ($1 < p < \infty$), es claro que $\langle x^*(\cdot), x(\cdot)\rangle \in L^1(T)$ para todo $x \in L^p(T, X)$ (cuando $p = 1$ o $p = \infty$, la estimación es obvia), y esto prueba que $L^q(T, X^*) \subset \mathcal{P}_\mathcal{L}$. Por otro lado, si $x^* \in \mathcal{P}_\mathcal{L}$, se puede definir la siguiente función, $\varphi \colon L^p(T, X) \to L^1(T)$ dada por

$$x \mapsto \varphi(x) = \langle x^*(\cdot), x(\cdot)\rangle.$$

Es claro que φ está bien definida y es lineal, se verá que φ tiene el grafo cerrado. En efecto, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(T,X)$ una secuencia tal que $x_n \to x$ en $L^p(T,X)$ y $\varphi(x_n) \to y \in L^1(T)$. Como $x_n \to x$ en $L^p(T,X)$ y $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $L^1(T)$, se tiene que existe una subsecuencia $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ la cual converge c.t.p. a x y $\varphi(x_{n_k})$ converge c.t.p. a y. Ahora, dado que $\varphi(x_{n_k}) = \langle x^*(\cdot), x_{n_k}(\cdot)\rangle$ y x_{n_k} converge c.t.p. a x, se tiene que $\varphi(x_{n_k})$ converge c.t.p. a $\varphi(x)$, entonces $y = \varphi(x)$. Esto prueba que φ tiene grafo cerrado y entonces por el Teorema 1.1.8, se tiene que φ es una función continua. Entonces, existe $C > 0$ tal que

$$\int_T |\langle x^*(t), x(t)\rangle| d\mu \leq C\|x\|_p,$$

y entonces, el funcional lineal

$$\ell \colon x \in L^p(T,X) \mapsto \int_T \langle x^*(t), x(t)\rangle d\mu$$

es continuo, entonces $\ell \in L^p(T,X)^*$. Por tanto, si $p < \infty$, entonces $x^* \in L^q(T,X^*)$ pues $L^p(T,X)^*$ se identifica con $L^q(T,X^*)$.

Si $p = \infty$, se tiene que $\ell \in L^\infty(T,X)^*$, y entonces existe $y^* \in L^1(T,X^*)$ y una medida singular $\hat{\lambda}$ tal que $\ell = \langle y^*, \cdot\rangle + \langle \hat{\lambda}, \cdot\rangle$. Se va a probar que $x^* = y^*$. Por contradicción, si $x^* \neq y^*$, se considera $h^* := x^* - y^*$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto $A := \{t \in T \colon \|h^*(t)\| > \varepsilon\}$ tiene medida positiva, dado que μ es σ-finita, se puede asumir que $\mu(A) < \infty$. Ahora, se puede considerar un conjunto compacto $K \subset A$ tal que $\mu(K) > 0$ y $h^* \colon K \to X^*$ es continua, luego se define la multifunción

$$\Gamma \colon K \ni t \rightrightarrows \{x \in X \colon \langle h^*(t), x\rangle \geq \varepsilon\}.$$

Como $K \subset A$, es fácil ver que Γ toma valores convexos, cerrados y no vacíos. También, Γ es lsc. En efecto, sea U un conjunto abierto de X, considere $\hat{t} \in K$ tal que $\Gamma(\hat{t}) \cap U \neq \emptyset$, entonces existe $\hat{x} \in U$ tal que $\langle h^*(\hat{t}), \hat{x}\rangle \geq \varepsilon$, como U es abierto, existe $\overline{x} \in U$ tal que $\langle h^*(\hat{t}), \overline{x}\rangle > \varepsilon$. Dado que $h^* \colon K \to X^*$ es continua, existe $V \in \mathcal{N}_{\hat{t}}$ tal que $\langle h^*(t), \overline{x}\rangle > \varepsilon$ para todo $t \in V$ y esto prueba que $\{t \in K \colon \Gamma(t) \cap U \neq \emptyset\}$ es un conjunto abierto de K, entonces Γ es lsc. Por el Teorema 1.4.7, existe $\varphi \in \mathcal{C}(K,X)$ tal que $\varphi(t) \in \Gamma(t)$, para todo $t \in K$.

Por otro lado, dado que $\hat{\lambda}$ es singular, se tiene que existe $(A_n) \subset \mathcal{A}$ tal que $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $A_n \subset A_{n+1}$ y para todo $B \in \mathcal{A}$ con $\mu(B) < \infty$, $\hat{\lambda}|_{B\cap A_n} = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En este caso, se tiene que

$$\langle \hat{\lambda}, x\rangle = \int_T \langle h^*(t), x(t)\rangle d\mu.$$

Es claro que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(K \cap A_j) > 0$ (pues $\mu(K) > 0$) y entonces para todo $x \in L^\infty(T,X)$,

$$\int_{K\cap A_j} \langle h^*(t), x(t)\rangle d\mu = 0.$$

Como $\varphi \in \mathcal{C}(K,X)$, se tiene que $\varphi \mathbf{1}_K \in L^\infty(T,X)$ y además $\varphi(t) \in \Gamma(t)$ para todo $t \in K$, entonces

$$\int_{K\cap A_j} \langle h^*(t), \varphi(t)\mathbf{1}_K(t)\rangle d\mu \geq \mu(A_j \cap K) \cdot \varepsilon > 0,$$

lo que es una contradicción, entonces $h^* = 0$, luego $x^* = y^* \in L^1(T,X)$. Finalmente, se concluye que $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = L^q(T,X^*)$ para todo $p, q \geq 1$ con $1/p + 1/q = 1$. $\square$

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Teorema 3.3.3 y el Corolario 3.3.5.

Corolario 3.3.7 Sea μ una medida regular interna σ-finita sobre un espacio métrico T. Considere un integrand admisible f. Suponga que X es un espacio de Asplund, y considere el funcional integral $\mathcal{I}_f$ definido sobre el espacio de funciones p-integrables $L^p(T, X)$, entonces bajo las hipótesis del Teorema 3.3.3, se cumple la siguiente fórmula

$$(\mathcal{I}_f)^*(x^*) = \mathcal{I}_{f^*}(x^*) \text{ para todo } x^* \in L^q(T, X^*) \text{ para } p \in [1, \infty],$$

y si $p \in [1, \infty)$ y $|\mathcal{I}_f(x)| < \infty$:

$$\partial_\varepsilon \mathcal{I}_f(x) = \bigcup_{\eta \in \mathcal{Z}(\varepsilon)} \{x^* \in L^q(T, X^*) \colon x^*(t) \in \partial_{\eta(t)} f_t(x(t)) \ \mu\text{-c.t.p.}\},$$

donde $1/p + 1/q = 1$.

Notar que el Teorema 3.3.3 entrega una expresión para la conjugada de $\mathcal{I}_f$ sobre un espacio de funciones fuertemente medibles (que fue denotado por $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$), determinado por el conjunto descomponible $\mathcal{L}$. El espacio dual de $L^\infty(T, X)$ no es un espacio de funciones fuertemente medibles, y de hecho, el Corolario 3.3.7 entrega la fórmula de la conjugada sólo sobre $L^1(T, X^*)$. El objetivo es entregar una fórmula de la conjugada del funcional sobre el dual de $L^\infty(T, X)$, y así también calcular su ε-subdiferencial. Este resultado generaliza [30, Theorem 6.4], en donde se obtiene la misma fórmula, pero cuando X es un espacio de Banach separable. Las ideas de la demostración, son similares a las expuestas en dicho resultado.

Teorema 3.3.8 Sea μ una medida regular interna σ-finita sobre un espacio métrico (T, d). Considere un integrand admisible f. Suponga que X es un espacio de Asplund, y considerar el funcional integral $\mathcal{I}_f$ definido sobre el espacio $L^\infty(T, X)$ donde existe $u \in L^\infty(T, X)$ tal que $\mathcal{I}_f(u) < \infty$, entonces para todo $x^* \in L^1(T, X^*)$ y $\lambda^* \in L^\infty(T, X)^*$ una medida singular, se tiene la siguiente fórmula

$$(\mathcal{I}_f)^*(x^* + \lambda^*) = \mathcal{I}_{f^*}(x^*) + \sigma_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\lambda^*). \tag{3.10}$$

Además, para todo $\varepsilon \geq 0$ y $x \in L^\infty(T, X)$ donde $|\mathcal{I}_f(x)| < \infty$, si $v^* \in L^1(T, X^*)$ y $\lambda^* \in L^{\text{sing}}(T, X)$, entonces $v^* + \lambda^* \in \partial_\varepsilon \mathcal{I}_f(x)$ si y sólo si existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ y $\ell \in \mathcal{Z}(\varepsilon_1)$ con $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon$ tal que

$$v^*(t) \in \partial_{\ell(t)} f_t(x(t)) \ \mu\text{-c.t.p. y } \lambda^* \in N^{\varepsilon_2}_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(x).$$

Demostración. Primero que todo, si existe $v \in L^\infty(T, X)$ tal que $\mathcal{I}_f(v) = -\infty$, se tiene que $(\mathcal{I}_f)^*(x^* + \lambda^*) = \infty$ y $(\mathcal{I}_f)^*(x^*) = \mathcal{I}_{f^*}(x^*) = \infty$, así que (3.10) se tiene trivialmente. De ahora en adelante se asumirá que $\mathcal{I}_f(v) > -\infty$ para todo $v \in L^\infty(T, X)$, por lo tanto $|\mathcal{I}_f(u)| < \infty$, además $\operatorname{dom} \mathcal{I}_f \neq \emptyset$, por ende $\mathcal{I}_f$ es propia. Por el Corolario 3.3.7, $(\mathcal{I}_f)^*(x^*) = \mathcal{I}_{f^*}(x^*)$ para $x^* \in L^1(T, X^*)$, luego, se tiene que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{I}_f)^*(x^* + \lambda^*) &= \sup\{\langle x^* + \lambda^*, x\rangle - \mathcal{I}_f(x) \colon x \in L^\infty(T, X)\} \\
&= \sup\{\langle x^*, x\rangle - \mathcal{I}_f(x) + \langle \lambda^*, x\rangle \colon x \in \operatorname{dom} \mathcal{I}_f\} \\
&\leq (\mathcal{I}_f)^*(x^*) + \sup\{\langle \lambda^*, x\rangle \colon x \in \operatorname{dom} \mathcal{I}_f\} \\
&= \mathcal{I}_{f^*}(x^*) + \sigma_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\lambda^*).
\end{aligned}$$

Ahora, se probará la desigualdad opuesta. Sea $\varepsilon > 0$, si $\mathcal{I}_{f^*}(x^*) < \infty$, se puede tomar $x_1 \in \operatorname{dom} \mathcal{I}_f$ tal que $\langle x^*, x_1 \rangle - \mathcal{I}_f(x_1) \geq \mathcal{I}_{f^*}(x^*) - \varepsilon$ y si $\mathcal{I}_{f^*}(x^*) = \infty$, se puede escoger $x_1 \in \operatorname{dom} \mathcal{I}_f$ tal que $\langle x^*, x_1 \rangle - \mathcal{I}_f(x_1) \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Similarmente, se puede tomar $x_2 \in \operatorname{dom} \mathcal{I}_f$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \lambda^*, x_2 \rangle \geq \sigma_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\lambda^*) - \varepsilon \quad &\text{si} \qquad \sigma_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\lambda^*) < \infty, \\ \langle \lambda^*, x_2 \rangle \geq \frac{1}{\varepsilon} \quad &\text{si} \qquad \sigma_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\lambda^*) = \infty. \end{aligned}$$

Como $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} \mathcal{I}_f$, por la Proposición 1.3.6 existe $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{A^c} |\langle x^*(t), x_1(t) \rangle - f(t, x_1(t))| d\mu &< \varepsilon, \\ \int_{A^c} |\langle x^*(t), x_2(t) \rangle - f(t, x_2(t))| d\mu &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Ahora, como λ^* es una medida singular, existe una secuencia $(A_n) \subset \mathcal{A}$ tal que $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ con $A_n \subset A_{n+1}$ y para todo $B \in \mathcal{A}$ con $\mu(B) < \infty$, $\lambda^*|_{A_n \cap B} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, se considera

$$y_n(t) = \begin{cases} x_1(t) & \text{si } t \in A \cap A_n, \\ x_2(t) & \text{si } t \in (A \cap A_n)^c. \end{cases}$$

Se tiene que $\lambda^*|_{A_n \cap A} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que $\langle \lambda^*, y_n \rangle = \langle \lambda^*, x_2 \rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, como $\mu(A) < \infty$, se tiene que $\mu(A \cap A_n^c) \to 0$, luego se puede escoger $k \in \mathbb{N}$ tal que para $i = 1, 2$

$$\int_{A \cap A_k^c} |\langle x^*(t), x_i(t) \rangle - f(t, x_i(t))| d\mu < \varepsilon.$$

Ahora, se puede ver que

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_f)^*(x^* + \lambda^*) &\geq \langle x^* + \lambda^*, y_k \rangle - \mathcal{I}_f(y_k) \\ &= \langle \lambda^*, x_2 \rangle + \langle x^*, y_k \rangle - \mathcal{I}_f(y_k). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \langle x^*, y_k \rangle - \mathcal{I}_f(y_k) &= \int_{A \cap A_k} \langle x^*(t), x_1(t) \rangle - f(t, x_1(t)) d\mu \\ &\quad + \int_{A^c \cup A_k^c} \langle x^*(t), x_2(t) \rangle - f(t, x_2(t)) d\mu \\ &= \langle x^*, x_1 \rangle - \mathcal{I}_f(x_1) - \int_{A^c} \langle x^*(t), x_1(t) \rangle - f(t, x_1(t)) d\mu \\ &\quad - \int_{A \cap A_k^c} \langle x^*(t), x_1(t) \rangle - f(t, x_1(t)) d\mu \\ &\quad + \int_{A^c} \langle x^*(t), x_2(t) \rangle - f(t, x_2(t)) d\mu \\ &\quad + \int_{A \cap A_k^c} \langle x^*(t), x_2(t) \rangle - f(t, x_2(t)) d\mu \\ &\geq \langle x^*, x_1 \rangle - \mathcal{I}_f(x_1) - 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Entonces, se obtiene que

$$(\mathcal{I}_f)^*(x^* + \lambda^*) \geq \langle \lambda^*, x_2 \rangle + \langle x^*, x_1 \rangle - \mathcal{I}_f(x_1) - 4\varepsilon.$$

Finalmente, si $\mathcal{I}_{f^*}(x^*) = \infty$ o $\sigma_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\lambda^*) = \infty$, se tiene que

$$\langle \lambda^*, x_2 \rangle + \langle x^*, x_1 \rangle - \mathcal{I}_f(x_1) \geq \min \left\{ \frac{2}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{I}_{f^*}(x^*) - \varepsilon, \frac{1}{\varepsilon} + \sigma_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\lambda^*) - \varepsilon \right\},$$

y tomando $\varepsilon \to 0^+$, se obtiene que $(\mathcal{I}_f)^*(x^* + \lambda^*) = \infty$. Cuando $\mathcal{I}_{f^*}(x^*) < \infty$ y $\sigma_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\lambda^*) < \infty$, se obtiene que para todo $\varepsilon > 0$

$$(\mathcal{I}_f)^*(x^* + \lambda^*) \geq \mathcal{I}_{f^*}(x^*) + \sigma_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\lambda^*) - 6\varepsilon,$$

entonces tomando $\varepsilon \to 0^+$ se obtiene que $(\mathcal{I}_f)^*(x^* + \lambda^*) \geq \mathcal{I}_{f^*}(x^*) + \sigma_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\lambda^*)$. En ambos casos, se puede concluir que

$$(\mathcal{I}_f)^*(x^* + \lambda^*) = \mathcal{I}_{f^*}(x^*) + \sigma_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\lambda^*).$$

Para probar la última propiedad, se considera $\varepsilon \geq 0$ y $v \in L^\infty(T, X)$ donde $|\mathcal{I}_f(v)| < \infty$. Notar que, por [55, Theorem 2.4.2 (ii)] y la fórmula (3.10):

$$\begin{aligned} v^* + \lambda^* \in \partial_\varepsilon \mathcal{I}_f(v) \quad &\iff \quad \mathcal{I}_f(v) + (\mathcal{I}_f)^*(v^* + \lambda^*) - \langle v^* + \lambda^*, v \rangle \leq \varepsilon \\ &\iff \quad \mathcal{I}_f(v) + \mathcal{I}_{f^*}(v^*) - \langle v^*, v \rangle + \sigma_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\lambda^*) - \langle \lambda^*, v \rangle \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego, sea $\ell(t) := f(t, v(t)) + f^*(t, v^*(t)) - \langle v^*(t), v(t) \rangle$ ($\ell(t) \geq 0$ por la desigualdad de Fenchel-Young), y es claro que $\ell \in L^1(T, \mathbb{R}_+)$ por tanto μ-c.t.p. se tiene que $\ell(t) < \infty$. Además, sea $\varepsilon_1 := \mathcal{I}_f(v) + \mathcal{I}_{f^*}(v^*) - \langle v^*, v \rangle = \int_T \ell(t) d\mu$ y $\varepsilon_2 := \sigma_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\lambda^*) - \langle \lambda^*, v \rangle$, entonces

$$v^* + \lambda^* \in \partial_\varepsilon \mathcal{I}_f(v) \implies \int_T \ell(t) d\mu + \varepsilon_2 \leq \varepsilon \implies \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon.$$

Se tiene además que $\ell \in \mathcal{Z}(\varepsilon_1)$ y μ-c.t.p.

$$f(t, v(t)) + f^*(t, v^*(t)) - \langle v^*(t), v(t) \rangle \leq \ell(t) < \infty \implies v^*(t) \in \partial_{\ell(t)} f_t(v(t)),$$

y también $\sigma_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\lambda^*) - \langle \lambda^*, v \rangle \leq \varepsilon_2 \implies \lambda^* \in N^{\varepsilon_2}_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(v)$. Recíprocamente, si existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ con $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon$ y $\ell \in \mathcal{Z}(\varepsilon_1)$ tal que $v^*(t) \in \partial_{\ell(t)} f_t(v(t))$ μ-c.t.p. y $\lambda^* \in N^{\varepsilon_2}_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(v)$ entonces

$$\begin{aligned} &f(t, v(t)) + f^*(t, v^*(t)) - \langle v^*(t), v(t) \rangle \leq \ell(t) \ \mu\text{-c.t.p.} \\ \implies \quad &\mathcal{I}_f(v) + \mathcal{I}_{f^*}(v^*) - \langle v^*, v \rangle \leq \int_T \ell(t) d\mu \leq \varepsilon_1, \end{aligned}$$

y $\langle \lambda^*, u - v \rangle \leq \varepsilon_2 \ \forall u \in \operatorname{dom} \mathcal{I}_f$ entonces $\sigma_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\lambda^*) - \langle \lambda^*, v \rangle \leq \varepsilon_2$, y así

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}_f(v) + (\mathcal{I}_f)^*(v^* + \lambda^*) - \langle v^* + \lambda^*, v \rangle \\ = \quad & \mathcal{I}_f(v) + \mathcal{I}_{f^*}(v^*) + \sigma_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\lambda^*) - \langle v^* + \lambda^*, v \rangle \\ = \quad & (\mathcal{I}_f(v) + \mathcal{I}_{f^*}(v^*) - \langle v^*, v \rangle) + (\sigma_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\lambda^*) - \langle \lambda^*, v \rangle) \\ \leq \quad & \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que prueba que $v^* + \lambda^* \in \partial_\varepsilon \mathcal{I}_f(v)$. $\square$

Ahora, se considera la siguiente clase de funcionales integrales definidos sobre el espacio de Asplund X, dados por

$$\begin{aligned} E_f \colon X &\to \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto \int_T f_t(x) d\mu. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Donde f se considera un Lusin integrand con $f_t \in \Gamma(X)$ para todo $t \in T$.

Lema 3.3.9 Sea μ una medida regular interna σ-finita sobre un espacio métrico T. Considerar un Lusin integrand $f \colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ con $f_t \in \Gamma(X)$ para todo $t \in T$. Suponer que X es un espacio de Asplund, y asuma que existe una función integrable $k \in L^1(T)$, $x_0 \in L^\infty(T, X)$ con $|\mathcal{I}_f(x_0)| < \infty$ y $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(t, x) \leq k(t), \forall x \in \mathbb{B}_\varepsilon(x_0(t)), \forall t \in T.$$

Entonces, $\mathcal{I}_f$ es continua en x_0 sobre $L^\infty(T, X)$ (en la topología fuerte) y $\mathcal{I}_f$ es propia.

Demostración. Sea $(x_n) \subset L^\infty(T, X)$ una secuencia con $x_n \to x_0$ en $L^\infty(T, X)$, se probará que $\mathcal{I}_f(x_n) \to \mathcal{I}_f(x_0)$. En efecto, en primer lugar notar que como $f(\cdot, x_0(\cdot)) \in L^1(T)$ entonces $f_t(x_0(t)) \in \mathbb{R}$ μ-c.t.p. por lo tanto f_t es propia μ-c.t.p, además, como $k \in L^1(T)$, entonces $k(t) < \infty$, μ-c.t.p. entonces f_t es acotada superiormente en una vecindad de $x_0(t)$, entonces por [55, Theorem 2.2.11] se tiene que f_t es Lipschitz continua en $\mathbb{B}_\varepsilon(x_0(t))$ con constante $C_\varepsilon(k(t) - f_t(x_0(t)))$, μ-c.t.p., donde $C_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon}$. Por lo tanto, $f_t(x_n(t)) \to f_t(x_0(t))$, μ-c.t.p., también existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $\|x_n(t) - x_0(t)\| \leq \varepsilon$, μ-c.t.p. y entonces si $n \geq N$, μ-c.t.p. se tiene que

$$\begin{aligned} |f(t, x_n(t)) - f(t, x_0(t))| &\leq C_\varepsilon(k(t) - f(t, x_0(t)))\|x_n(t) - x_0(t)\| \\ &\leq \varepsilon \cdot C_\varepsilon \cdot (k(t) - f(t, x_0(t))) \end{aligned}$$

y por lo tanto $|f(t, x_n(t))| \leq \varepsilon \cdot C_\varepsilon \cdot (k(t) - f(t, x_0(t))) + |f(t, x_0(t))| \in L^1(T)$, entonces por el Teorema 1.3.5

$$\int_T f(t, x_n(t)) d\mu \to \int_T f(t, x_0(t)) d\mu,$$

y se puede concluir que $\mathcal{I}_f(x_n) \to \mathcal{I}_f(x_0)$. Por último, dado que f_t es continua en $x_0(t)$ μ-c.t.p. se tiene que $\partial_0 f_t(x_0(t))$ es no vacío (ver [55, Theorem 2.4.12]), luego, μ-c.t.p. existe $x_t^* \in X^*$ tal que

$$\langle x_t^*, x - x_0(t) \rangle + f_t(x_0(t)) \leq f_t(x), \forall x \in X.$$

De acá sigue que si $h \in X$ con $\|h\| \leq 1$ y $0 < \lambda < \varepsilon$ entonces

$$\langle x_t^*, h \rangle \leq \frac{f_t(x_0(t) + \lambda h) - f_t(x_0(t))}{\lambda} \leq C_\varepsilon(k(t) - f_t(x_0(t))),$$

por lo tanto $\|x_t^*\| \leq C_\varepsilon \cdot (k(t) - f_t(x_0(t)))$, entonces si $x \in L^\infty(T, X)$, se tiene que

$$\langle x_t^*, x(t) - x_0(t) \rangle \geq -\|x - x_0\|_\infty \cdot C_\varepsilon \cdot (k(t) - f_t(x_0(t))),$$

entonces

$$\mu\text{-c.t.p. } f_t(x(t)) \geq f_t(x_0(t)) - \|x - x_0\|_\infty \cdot C_\varepsilon \cdot (k(t) - f_t(x_0(t))),$$

sigue que $\mathcal{I}_f(x) > -\infty$, lo que muestra que $\mathcal{I}_f$ es propia. $\square$

Con el Lema anterior, es posible calcular el subdiferencial de E_f, como muestra el siguiente resultado.

Teorema 3.3.10 Sea μ una medida regular interna σ-finita sobre un espacio métrico T. Considerar un Lusin integrand $f\colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ con $f_t \in \Gamma(X)$ para todo $t \in T$. Suponer que X es un espacio de Asplund, y asuma que existe una función $k \in L^1(T)$, $x_0 \in X$ con $|E_f(x_0)| < \infty$ y $\delta > 0$ tal que

$$f(t,x) \leq k(t), \forall x \in \mathbb{B}_\delta(x_0), \forall t \in T.$$

Entonces, para todo $x \in X$ tal que $|E_f(x)| < \infty$ y $\varepsilon \geq 0$

$$\partial_\varepsilon E_f(x) = \bigcup_{\substack{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \geq 0 \\ \ell \in \mathcal{Z}(\varepsilon_1) \\ \varepsilon_1+\varepsilon_2 \leq \varepsilon}} \int_T \partial_{\ell(t)} f_t(x) d\mu + N^{\varepsilon_2}_{\operatorname{dom} E_f}(x), \tag{3.12}$$

donde

$$\int_T \partial_{\eta(t)} f_t(x) d\mu := \left\{ \int_T x^*(t) d\mu \in X^* \mid \begin{array}{c} x^* \in L^1(T, X^*) \text{ y} \\ x^*(t) \in \partial_{\eta(t)} f_t(x) \ \mu\text{-a.e.} \end{array} \right\}.$$

Demostración. Para todo $x \in X$, se define $\phi_x\colon T \to X$ dado por $\phi_x(t) = x, \forall t \in T$, es claro que $\phi_x \in L^\infty(T,X)$ para todo $x \in X$. Si se considera $\Phi\colon X \to L^\infty(T,X)$ dada por $\Phi(x) = \phi_x$, la cual es lineal y continua, se puede ver que $E_f = \mathcal{I}_f \circ \Phi$. Por el Corolario 3.3.9, se tiene que $\mathcal{I}_f$ es propia y continua en ϕ_{x_0} y usando la regla de la cadena (ver, e.g. [55, Theorem 2.8.1]), para todo $x \in \operatorname{dom} E_f$, se tiene la siguiente igualdad

$$\partial_\varepsilon E_f(x) = \partial_\varepsilon(\mathcal{I}_f \circ \Phi)(x) = \Phi^* \partial_\varepsilon \mathcal{I}_f(\Phi(x)). \tag{3.13}$$

Para $x^* \in L^1(T,X)$ y $\lambda^* \in L^{\text{sing}}(T,X)$, se puede ver que

$$\Phi^*(x^* + \lambda^*) = \int_T \langle x^*(t), \cdot \rangle d\mu + \Phi^*(\lambda^*). \tag{3.14}$$

Para probar la igualdad (3.12), por un lado, si $x^* \in X^*$ pertenence al conjunto del lado derecho de la igualdad (3.12), existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ con $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon$ y $\ell \in \mathcal{Z}(\varepsilon_1)$ tal que

$$x^* \in \int_T \partial_{\ell(t)} f_t(x) d\mu + N^{\varepsilon_2}_{\operatorname{dom} E_f}(x),$$

y entonces, existe $v^* \in L^1(T,X^*)$ y $\lambda \in N^{\varepsilon_2}_{\operatorname{dom} E_f}(x)$ tal que $x^* = \int_T \langle v^*(t), \cdot \rangle d\mu + \lambda$ y μ-c.t.p. $v^*(t) \in \partial_{\ell(t)} f_t(x)$, por lo tanto, se tiene que

$$\mu\text{-c.t.p., } -f_t(y) + f_t(x) + \langle v^*(t), y - x \rangle \leq \ell(t) \ \forall y \in \operatorname{dom} E_f$$

e integrando esta desigualdad se obtiene que

$$-E_f(y) + E_f(x) + \int_T \langle v^*(t), y - x\rangle \leq \int_T \ell(t)d\mu \leq \varepsilon_1.$$

También se tiene que $\lambda \in N^{\varepsilon_2}_{\operatorname{dom} E_f}(x) \Rightarrow \langle \lambda, y - x\rangle \leq \varepsilon_2, \forall y \in \operatorname{dom} E_f$, sigue que

$$E_f(x) - E_f(y) + \int_T \langle v^*(t), y - x\rangle + \langle \lambda, y - x\rangle \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon,\ \forall y \in \operatorname{dom} E_f,$$

y esto equivale a $\int_T \langle v^*(t), \cdot\rangle d\mu + \lambda = x^* \in \partial_\varepsilon E_f(x)$. Por otro lado, si $x^* \in \partial_\varepsilon E_f(x)$, por (3.13), existe $u^* = v^* + \lambda^* \in \partial_\varepsilon \mathcal{I}_f(\Phi(x))$ (con $v^* \in L^1(T, X^*)$ y $\lambda^* \in L^{\text{sing}}(T, X)$) tal que $x^* = \Phi^*(u^*)$. En virtud del Teorema 3.3.8, existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ y $\ell \in \mathcal{Z}(\varepsilon_1)$ con $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon$ tal que $v^*(t) \in \partial_{\ell(t)} f_t(x)$ μ-c.t.p. y $\lambda^* \in N^{\varepsilon_2}_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\Phi(x))$. Entonces, se tiene que $\int_T \langle v^*(t), \cdot\rangle d\mu \in \int_T \partial_{\ell(t)} f_t(x) d\mu$, y dado que $\lambda \in N_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\Phi(x))$, sigue que $\langle \lambda^*, y - \Phi(x)\rangle \leq \varepsilon_2,\ \forall y \in \operatorname{dom} \mathcal{I}_f$, es claro que si $y \in \operatorname{dom} E_f$, entonces $\Phi(y) \in \operatorname{dom} \mathcal{I}_f$, luego $\langle \lambda^*, \Phi(y) - \Phi(x)\rangle \leq \varepsilon_2, \forall y \in \operatorname{dom} E_f$, esto implica que $\langle \Phi^*(\lambda^*), y - x\rangle \leq \varepsilon_2, \forall y \in \operatorname{dom} E_f$, entonces $\Phi^*(\lambda^*) \in N^{\varepsilon_2}_{\operatorname{dom} E_f}(x)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} x^* &= \Phi^*(u^*) \\ &= \Phi^*(v^* + \lambda^*) \\ &= \int_T \langle v^*(t), \cdot\rangle d\mu + \Phi^*(\lambda^*) \\ &\in \int_T \partial_{\ell(t)} f_t(x) d\mu + N^{\varepsilon_2}_{\operatorname{dom} E_f}(x). \end{aligned}$$

Esto muestra que x^* pertenece al conjunto del lado derecho en la igualdad (3.12). Esto finaliza la demostración. □

También, bajo ciertas hipótesis, es posible calcular la conjugada de E_f, lo cual extiende el resultado mostrado en [42, Theorem 23 (c)].

Teorema 3.3.11 Sea μ una medida regular interna σ-finita sobre un espacio métrico T. Considere un Lusin integrand $f\colon T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ con $f_t \in \Gamma(X)$ para todo $t \in T$. Suponga que X es un espacio de Asplund, y asuma que $\operatorname{dom} \mathcal{I}_f = L^\infty(T, X)$, que existe $x_0 \in X$ tal que $|E_f(x_0)| < \infty$, una función $k \in L^1(T)$ y $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(t, x) \leq k(t), \forall x \in \mathbb{B}_\varepsilon(x_0), \forall t \in T.$$

Entonces,

$$(E_f)^*(x^*) = \inf\{\mathcal{I}_{f^*}(v^*)\colon v^* \in L^1(T, X^*) \text{ y } \int_T v^*(t) d\mu = x^*\}. \tag{3.15}$$

Demostración. Si existe $\overline{x} \in X$ tal que $E_f(\overline{x}) = -\infty$, es claro que $(E_f)^*(x^*) = \infty$ para todo $x^* \in X^*$, pero además se tiene que $\mathcal{I}_f(\Phi(\overline{x})) = -\infty$, así que también se tiene que $\infty = (\mathcal{I}_f)^*(v^*) = \mathcal{I}_{f^*}(v^*)$ para todo $v^* \in L^1(T, X^*)$, por lo tanto en ese caso la igualdad (3.15) se tiene. Entonces, se asumirá que E_f es una función propia. Por el Lema 3.3.9, se puede observar que $\mathcal{I}_f$ es propia y continua en x_0. Usando la misma notación del Teorema 3.3.10, se tiene que $E_f = \mathcal{I}_f \circ \Phi$ y el operador adjunto de Φ fue calculado en (3.14). Por [24, Theorem 3, p. 179] y el Teorema 3.3.8, para $x^* \in X^*$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(E_f)^*(x^*) &= (\mathcal{I}_f \circ \Phi)^*(x^*) \\
&= \inf \left\{ (\mathcal{I}_f)^*(v^* + \lambda^*) \colon \begin{array}{c} v^* \in L^1(T, X^*), \lambda^* \in L^{\text{sing}}(T, X), \\ \Phi^*(v^* + \lambda^*) = x^* \end{array} \right\} \\
&= \inf \left\{ \mathcal{I}_{f^*}(v^*) + \sigma_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\lambda^*) \colon \begin{array}{c} v^* \in L^1(T, X^*), \lambda^* \in L^{\text{sing}}(T, X), \\ \Phi^*(v^* + \lambda^*) = x^* \end{array} \right\}. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Además, se tiene que $\sigma_{\operatorname{dom} \mathcal{I}_f}(\lambda^*) = \infty$ para todo $\lambda^* \in L^{\text{sing}}(T, X) \setminus \{0\}$. Lo último indica que el ínfimo en (3.16) no depende de λ^*, entonces se concluye que

$$(E_f)^*(x^*) = \inf \left\{ \mathcal{I}_{f^*}(v^*) \colon v^* \in L^1(T, X^*) \text{ y } \Phi^*(v^*) = x^* \right\},$$

pero la condición $\Phi^*(v^*) = x^*$ significa que $\int_T v^*(t) d\mu = x^*$ y se concluye. $\square$

3.4. Subdiferencial de Clarke de Funcionales Integrales

El propósito de esta sección es caracterizar el subdiferencial de Clarke del funcional $x \in L^p(T, X) \mapsto \mathcal{I}_f(x)$ cuando f no satisface hipótesis de convexidad, utilizando los resultados previos. Se sigue considerando a X como un espacio de Asplund.

Teorema 3.4.1 Sean $p, q \in [1, \infty]$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sea $x \in L^p(T, X)$. Sea $f \colon T \times X \to \mathbb{R}$ un integrand admisible tal que:

(a) Si $p \in [1, \infty)$, existe $k_p \in L^q(T, \mathbb{R}_+)$ tal que f_t es $k_p(t)$-Lipschitz en X, para todo $t \in T$.

(b) Si $p = \infty$, entonces existe $\varepsilon > 0$ y $k_\infty \in L^1(T, \mathbb{R}_+)$ tal que f_t es $k_\infty(t)$-Lipschitz en $\mathbb{B}_\varepsilon(x(t))$ para todo $t \in T$.

Además, se supone que la función $T \times X \ni (t, v) \mapsto df_t(x(t); v)$ es un Lusin integrand entonces se tiene que

$$d\mathcal{I}_f(x; v) \leq \int_T df_t(x(t); v(t)) d\mu, \ \forall v \in L^p(T, X). \quad (3.17)$$

Además, la siguiente inclusión se tiene

$$\overline{\partial} \mathcal{I}_f(x) \subset \{x^* \in L^q(T, X^*) \colon x^*(t) \in \overline{\partial} f_t(x(t)) \ \mu\text{-c.t.p.}\}. \quad (3.18)$$

Demostración. Como $(t, v) \mapsto df_t(x(t); v)$ es un Lusin integrand, se tiene que $t \mapsto df_t(x(t); v(t))$ es una función medible (Lema 3.3.1). Se define para $y \in X$, $v \in L^p(T, X)$ y $s > 0$

$$\varphi_{y,v,s}(t) := \frac{f(t, y + sv(t)) - f(t, y)}{s}.$$

Si $p \in [1, \infty)$, dado que f_t es $k_p(t)$-Lipschitz, $|\varphi_{y,v,s}(t)| \leq k_p(t) \|v(t)\|$ para todo $t \in T$. Si $p = \infty$, entonces $|\varphi_{y,v,s}(t)| \leq k_\infty(t) \|v(t)\|$ para todo $t \in T$, $y \in \mathbb{B}_{\varepsilon/2}(x(t))$ y $s < \frac{\varepsilon}{2\|v\|_\infty}$. Por la desigualdad de Hölder, se tiene que $k_p(\cdot)\|v(\cdot)\| \in L^1(T)$ para todo $p \in [1, \infty]$. Entonces, para todo $p \in [1, \infty]$, $t \mapsto df_t(x(t); v(t))$ pertenece a $L^1(T)$. Ahora, por contradicción, si (3.17) no se tiene, sigue que existe $\delta > 0$ y secuencias $y_n \xrightarrow{p} x$ y $s_n \to 0^+$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\int_T \frac{f(t, y_n(t) + s_n v(t)) - f(t, y_n(t))}{s_n} d\mu > \int_T df_t(x(t); v(t)) d\mu + \delta.$$

Luego,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_T \frac{f(t, y_n(t) + s_n v(t)) - f(t, y_n(t))}{s_n} d\mu \geq \int_T df_t(x(t); v(t)) d\mu + \delta.$$

Por lo tanto, salvo subsucesión, se tiene que μ-c.t.p. $y_n(t) \to x(t)$. Entonces, μ-c.t.p.

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \frac{f(t, y_n(t) + s_n v(t)) - f(t, y_n(t))}{s_n} &\leq \limsup_{y\to x(t), s\to 0^+} \frac{f(t, y + sv(t)) - f(t, y)}{s} \\ &= df_t(x(t), v(t)), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\int_T \limsup_{n\to\infty} \frac{f(t, y_n(t) + s_n v(t)) - f(t, y_n(t))}{s_n} d\mu \leq \int_T df_t(x(t), v(t)) d\mu,$$

pero, en virtud del Lema de Fatou (ver [7, Theorem 2.8.3]), se tiene que

$$\begin{aligned} \int_T df_t(x(t), v(t)) d\mu &\geq \int_T \limsup_{n\to\infty} \frac{f(t, y_n(t) + s_n v(t)) - f(t, y_n(t))}{s_n} d\mu \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \int_T \frac{f(t, y_n(t) + s_n v(t)) - f(t, y_n(t))}{s_n} d\mu \\ &\geq \int_T df_t(x(t); v(t)) d\mu + \delta, \end{aligned}$$

que es una contradicción. Se sigue que

$$\limsup_{y \xrightarrow{p} x, s\to 0^+} \int_T \frac{f(t, y(t) + sv(t)) - f(t, y(t))}{s} d\mu \leq \int_T df_t(x(t); v(t)) d\mu.$$

Con el resultado anterior, se probará la inclusión

$$\overline{\partial}\mathcal{I}_f(x) \subset \{x^* \in L^q(T, X^*) \colon x^*(t) \in \overline{\partial} f_t(x(t)) \ \mu\text{-c.t.p.}\}.$$

En efecto, si $x^* \in \overline{\partial}\mathcal{I}_f(x) \Rightarrow d\mathcal{I}_f(x; v) \geq \langle x^*, v\rangle, \forall v \in L^p(T, X)$, si se define $g(t, u) := df_t(x(t); u)$, se tiene que para todo $v \in L^p(T, X)$, $\mathcal{I}_g(v) \geq \langle x^*, v\rangle$, es claro que $\mathcal{I}_g(0) = 0$, por lo tanto $x^* \in \partial\mathcal{I}_g(0)$. Ahora, como g_t es convexa y Lipschitz, y g es un Lusin integrand, las hipótesis del Teorema 3.3.3 se tienen, y por lo tanto se puede aplicar el Corolario 3.3.5, obteniendo que $x^* \in \partial_0\mathcal{I}_g(0)$ equivale a $x^*(t) \in \partial_0 g_t(0)$ μ-c.t.p. y como $g_t(0) = 0$ para todo $t \in T$, sigue que μ-c.t.p., $\langle x^*(t), v\rangle \leq df_t(x(t); v), \forall v \in X$ y así μ-c.t.p., $x^*(t) \in \overline{\partial} f_t(x(t))$. $\square$

De los supuestos del Teorema 3.4.1, la única hipótesis que no es fácil verificar es que el mapeo $(t, v) \mapsto df_t(x(t); v)$ sea un Lusin integrand. Recordar que siempre la función $(x, v) \mapsto df_t(x; v)$ es usc para todo $t \in T$ (ver [16, Chapter 2, Proposition 1.1 (b)]). En la siguiente proposición, se entregan condiciones que aseguran el cumplimiento de dicha hipótesis.

Proposición 3.4.2 Se asume que $f\colon T \times X \to \mathbb{R}$ es un Lusin integrand tal que f_t es $k(t)$-Lipschitz donde k está definido igual que en el Teorema 3.4.1.

(a) Si la función $(t, x, v) \mapsto df_t(x; v)$ es usc, entonces, para cualquier función fuertemente medible $x\colon T \to X$, la función $(t, v) \mapsto df_t(x(t); v)$ es un Lusin integrand.

(b) Si f_t es convexa para todo $t \in T$ y f es una función de Scorza-Dragoni, entonces $(t, v) \mapsto df_t(x(t); v)$ es un Lusin integrand.

Demostración. (a) Sea $A \subset T$ con $\mu(A) < \infty$ y $\varepsilon > 0$. Por el Corolario 1.3.13, existe un subconjunto compacto $B \subset A$ con $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$ tal que $x\colon B \to X$ es continua. Por otro lado, sea $U \times I$ un conjunto abierto de $X \times \mathbb{R}$, si $\hat{t} \in B$ es tal que existe $(\hat{v}, \hat{\alpha}) \in U \times I$ con $df_{\hat{t}}(x(\hat{t}); \hat{v}) \leq \hat{\alpha}$. Dado que $(t, x, v) \mapsto df_t(x; v)$ es usc, se tiene que existe una vecindad $V \times U_1 \times U_2$ de $(\hat{t}, x(\hat{t}), \hat{v})$ tal que $df_t(x; v) \leq \hat{\alpha}$ para todo $(t, x, v) \in V \times U_1 \times U_2$. Finalmente, se puede ver que si $t \in V \cap x^{-1}(U_1)$ (que es una vecindad de $\hat{t}$), entonces $df_t(x(t); \hat{v}) \leq \hat{\alpha}$ y así el conjunto $\{t \in B\colon (U \times I) \cap \operatorname{epi} df_t(x(t); \cdot) \neq \emptyset\}$ es abierto, y se concluye que $(t, v) \mapsto df_t(x(t); v)$ es un Lusin integrand.
(b) Como para cada $t \in T$, f_t es convexa, entonces (ver [16, Proposition 4.3, Chapter 2])

$$df_t(x(t); v) = f_t'(x(t); v) = \inf_{s>0} \frac{f(t, x(t) + sv) - f(t, x(t))}{s}$$

sea $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ y $\varepsilon > 0$, luego existe un compacto K tal que $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$, $x\colon K \to X$ y $f\colon K \times X \to \mathbb{R}$ son continuas. Sea $U \times J$ un abierto de $X \times \mathbb{R}$, luego, sea $\hat{t} \in K$ tal que existe $\hat{v} \in U$ y $\alpha, \beta \in I$ tal que $df_{\hat{t}}(x(\hat{t}); \hat{v}) \leq \alpha < \beta$, luego existe $s > 0$ tal que

$$\frac{f_{\hat{t}}(x(\hat{t}) + s\hat{v}) - f_{\hat{t}}(x(\hat{t}))}{s} < \beta,$$

pero se observa que $K \ni t \mapsto \frac{f_t(x(t)+s\hat{v}) - f_t(x(t))}{s}$ es continua, por lo tanto existe V, vecindad de $\hat{t}$ en K tal que

$$\frac{f_t(x(t) + s\hat{v}) - f_t(x(t))}{s} < \beta, \ \forall t \in V,$$

entonces sigue que $df_t(x(t); \hat{v}) < \beta$ para todo $t \in V$, lo que prueba que $K \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} df_t(x(t); \cdot)$ es lsc, y entonces $(t, v) \mapsto df_t(x(t); v)$ es un Lusin integrand. □

Respecto al operador E_f definido en (3.11), se pueden obtener resultados similares a los del Teorema 3.4.1.

Teorema 3.4.3 Sea $f\colon T \times X \to \mathbb{R}$ una función tal que $t \mapsto f(t, x)$ es medible para todo $x \in X$. Sea $x \in X$, suponga que existe $\varepsilon > 0$ y $k \in L^1(T, \mathbb{R}_+)$ tal que f_t es $k(t)$-Lipschitz en $\mathbb{B}_\varepsilon(x)$ para todo $t \in T$ y que $(t, v) \mapsto df_t(x; v)$ es un Lusin integrand, entonces

$$dE_f(x)(v) \leq \int_T df_t(x)(v) d\mu, \forall v \in X, \tag{3.19}$$

y

$$\overline{\partial} E_f(x) \subset \left\{ \int_T x^*(t) d\mu\colon x^* \in L^1(T, X^*) \text{ y } x^*(t) \in \overline{\partial} f_t(x) \ \mu\text{-a.e.} \right\}. \tag{3.20}$$

Demostración. En efecto, notar que si $y \in \mathbb{B}_{\varepsilon/2}(x)$, $v \in X$ y $s < \frac{\varepsilon}{2\|v\|}$,

$$\left|\frac{f(t, y+sv) - f(t,y)}{s}\right| \leq k(t)\|v\|,$$

por lo tanto

$$|df_t(x;v)| \leq \|v\| k(t) \text{ para todo } t \in T, \tag{3.21}$$

así que $t \mapsto df_t(x;v) \in L^1(T)$, para todo $v \in X$. Por el lema de Fatou (ver [7, Theorem 2.8.3]), se tiene que

$$\begin{aligned} dE_f(x;v) &= \limsup_{s \to 0^+, y \to x} \int_T \frac{f_t(y+sv) - f_t(y)}{s} d\mu \\ &\leq \int_T \limsup_{s \to 0^+, y \to x} \frac{f_t(y+sv) - f_t(y)}{s} d\mu = \int_T df_t(x;v) d\mu, \end{aligned}$$

y se concluye (3.19). Por otra parte, sea $x^* \in \overline{\partial} E_f(x)$, sigue que $\langle x^*, v\rangle \leq dE_f(x;v)$ para todo $v \in X$, luego, por (3.19) se tiene que

$$\langle x^*, v\rangle \leq \int_T df_t(x;v) d\mu, \forall v \in X.$$

Si se define $g\colon (t,v) \mapsto df_t(x;v)$, entonces $\langle x^*, v\rangle \leq E_g(v), \forall v \in X$, entonces como $E_g(0) = 0$, $x^* \in \partial_0 E_g(0)$. Además, por hipótesis se tiene que g es un Lusin integrand, además g_t es convexa para todo $t \in T$ y por (3.21) sigue que $|g(t,v)| \leq k(t)\|v\|$, por lo tanto, por el Teorema 3.3.10,

$$\begin{aligned} \partial_0 E_g(0) &= \int_T \partial_0 g_t(0) d\mu \\ &= \left\{ \int_T y^*(t) d\mu \colon y^* \in L^1(T,X) \text{ y } y^*(t) \in \partial_0 g_t(0) \ \mu\text{-c.t.p.} \right\} \\ &= \left\{ \int_T y^*(t) d\mu \colon y^* \in L^1(T,X) \text{ y } y^*(t) \in \overline{\partial} f_t(x) \ \mu\text{-c.t.p.} \right\}, \end{aligned}$$

pues $\operatorname{dom} E_g = X$ por (3.21) y $\partial_0 g_t(0) = \overline{\partial} f_t(x)$ para todo $t \in T$, así que se concluye (3.20). □

Observación 3.4.4 Cuando f es convexa, para que $(t,v) \mapsto df_t(x;v)$ sea un Lusin integrand y $t \mapsto f(t,x)$ sea medible para todo $x \in X$, basta que f sea un Lusin integrand y f_t es lsc para todo $t \in T$.

Otra observación importante trata acerca de la caracterización total del subdiferencial de Clarke y bajo que condición se cumple.

Observación 3.4.5 Una función $f\colon T \times X \to \mathbb{R}$ localmente lipschitz en x se dice regular en x si $df_t(x;v) = f_t'(x;v) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f_t(x+\lambda v) - f_t(x)}{\lambda}$ para todo $t \in T$ y para todo $v \in X$. Una aplicación directa del lema de Fatou permite concluir que si bajo las hipótesis del Teorema 3.4.1 y si f_t es regular en $x(t)$ para todo $t \in T$ entonces la desigualdad (3.17) y la inclusión (3.18) se convierten en igualdades. De igual manera, bajo las hipótesis del Teorema 3.4.3 y si f_t es regular en x para todo $t \in T$, entonces la desigualdad (3.19) y la inclusión (3.20) llegan a ser igualdades.

3.5. Un problema de Cálculo de Variaciones

En esta sección, se considera un espacio de Asplund X, tal que X satisface la propiedad de Radon-Nikodym y el siguiente problema de cálculo de variaciones

$$\begin{aligned} \min \ & \ell(x(a), x(b)) + \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \\ & x \in AC^{1,p}([a,b], X), \ (x(a), x(b)) \in S. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Este problema se ha estudiado en [16, Theorem 5.22] y en un contexto más general en [15, Chapter 18], pero en ambos ha sido tratado cuando X es un espacio de dimensión finita. Se considerará $p \in (1, \infty)$, $S \subset X \times X$ es un conjunto cerrado no vacío, $\ell \colon X \times X \to \mathbb{R}$ es una función localmente Lipschitz y $f \colon [a,b] \times X \times X \to \mathbb{R}$ es un Lusin integrand tal que $f(t, \cdot, \cdot)$ es $k(t)$-Lipschitz, donde $k \in L^q([a,b])$ con $1/p + 1/q = 1$, por ende $k \in L^1([a,b])$. El objetivo es entregar condiciones de optimalidad para dicho problema.

Se dirá que x es solución local de un problema de optimización $\min\{L(y) \colon y \in Y\}$ (con Y Banach) si existe $\varepsilon > 0$ tal que $L(x) \leq L(y)$ para todo $y \in \mathbb{B}_\varepsilon(x)$.

La siguiente proposición muestra que se puede remover la condición inicial y final del problema (3.22) considerando un problema penalizado.

Proposición 3.5.1 Considerando el problema anterior, x es solución local del problema (3.22), si y sólo si, $(x(a), x(b)) \in S$ y existe $K > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > K$, x es solución local del siguiente problema

$$\begin{aligned} \min \ & \ell(x(a), x(b)) + \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))dt + n \cdot d((x(a), x(b)); S) \\ & x \in AC^{1,p}([a,b], X). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Demostración. Se define

$$J(x) := \ell(x(a), x(b)) + \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))dt,$$

y

$$J_n(x) := \ell(x(a), x(b)) + \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))dt + n \cdot d((x(a), x(b)); S).$$

Si x es una solución local del problema (3.22) entonces $J(x) \leq J(y)$ para todo y punto factible del problema (3.22) y $\|y - x\|_{AC^{1,p}} \leq \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$. Dado que ℓ es localmente lipschitz, existe $\delta > 0$ y $M > 0$ tal que

$$|\ell(z, w) - \ell(u, v)| \leq M(\|z - u\| + \|w - v\|), \forall (z, w), (u, v) \in \mathbb{B}_\delta((x(a), x(b))).$$

Se toma $K := M + \|k\|_1 \left(1 + \frac{1}{b-a}\right)$. Se procede por contradicción, luego existe $i \in \mathbb{N}$ con $i > K$ y una secuencia $(x_i^n) \subset AC^{1,p}([a,b], X)$ tal que $J_i(x_i^n) < J_i(x) = J(x)$ para todo

$n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} \|x_i^n - x\|_{AC^{1,p}} = 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se puede encontrar $(\mu_n, \sigma_n) \in S$ tal que

$$\|\mu_n - x_i^n(a)\| + \|\sigma_n - x_i^n(b)\| \leq d((x_i^n(a), x_i^n(b)); S) + \varepsilon_n,$$

donde $\varepsilon_n = \min\{\frac{J(x)-J_i(x_i^n)}{2K}, \frac{1}{n}\}$. Para $n \in \mathbb{N}$, se considera la función

$$y_n(t) := x_i^n(t) + \frac{t-a}{b-a}(\sigma_n - x_i^n(b)) + \frac{b-t}{b-a}(\mu_n - x_i^n(a)).$$

Es fácil ver que $y_n \in AC^{1,p}([a,b], X)$, $y_n(a) = \mu_n$ y $y_n(b) = \sigma_n$ y entonces $(y_n(a), y_n(b)) \in S$. También, se tiene que

$$\begin{aligned} \max\{\|y_n - x_i^n\|_\infty, \|\dot{y}_n - \dot{x}_i^n\|_\infty\} &\leq \|\sigma_n - x_i^n(b)\| + \|\mu_n - x_i^n(a)\| \\ &\leq d((x_i^n(a), x_i^n(b)); S) + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Es claro que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\max\{\|y_n - x\|_\infty, \|y_n - x_i^n\|_\infty\} \leq \min\{\varepsilon, \delta\}$ para todo $n \geq N$. Ahora, para $n \geq N$ se puede hacer la siguiente estimación

$$\begin{aligned} J(y_n) - J(x_i^n) &= \ell(y_n(a), y_n(b)) - \ell(x_i^n(a), x_i^n(b)) \\ &\quad + \int_a^b f(t, y_n(t), \dot{y}_n(t)) - f(t, x_i^n(t), \dot{x}_i^n(t))dt \\ &\leq M(\|\sigma_n - x_i^n(b)\| + \|\mu_n - x_i^n(a)\|) \\ &\quad + \int_a^b k(t)(\|y_n(t) - x_i^n(t)\| + \|\dot{y}_n(t) - \dot{x}_i^n(t)\|)dt \\ &= M(\|\sigma_n - x_i^n(b)\| + \|\mu_n - x_i^n(a)\|) \\ &\quad + (\|\sigma_n - x_i^n(b)\| + \|\mu_n - x_i^n(a)\|) \int_a^b k(t) \left(\frac{t-a}{b-a} + \frac{1}{b-a}\right) dt \\ &\leq (\|\sigma_n - x_i^n(b)\| + \|\mu_n - x_i^n(a)\|) \left(M + \|k\|_1 \left(1 + \frac{1}{b-a}\right)\right), \end{aligned}$$

y esto muestra que si $n \geq N$, $J(y_n) \leq J(x_i^n) + K(\|\mu_n - x_i^n(a)\| + \|\sigma_n - x_i^n(b)\|)$, y como y_n es un punto factible para el problema (3.22) entonces $J(x) \leq J(x_i^n) + K(\|\mu_n - x_i^n(a)\| + \|\sigma_n - x_i^n(b)\|)$ para todo $n \geq N$ y se obtiene que

$$J(x) \leq J(x_i^n) + K(d((x_i(a), x_i(b)); S) + \varepsilon_n) \leq J_i(x_i^n) + \frac{J(x) - J_i(x_i^n)}{2} < J(x),$$

lo que es una contradicción. La implicación opuesta es directa. □

Ahora, se sabe que $x \in AC^{1,p}([a,b], X)$ si y sólo si existe $y \in L^p([a,b], X)$ tal que $x(t) = x(a) + \int_a^t y(s)ds$ en $[a,b]$ (Teorema 1.3.27). Luego, se puede considerar el conjunto

$$A := \left\{(u, x, y) \in X \times L^p([a,b], X)^2 \colon x(t) = u + \int_a^t y(s)ds,\ \forall t \in [a,b]\right\}.$$

Entonces se tiene la siguiente proposición,

Proposición 3.5.2 x es una solución local del problema (3.23) si y solo si $(x(a), x, \dot{x})$ es una solución local del siguiente problema

$$\begin{aligned} &\min \ \ell(x(a), x(b)) + \int_a^b f(t, x(t), y(t))dt + n \cdot d((x(a), x(b)); S) \\ &\quad (u, x, y) \in A. \end{aligned} \tag{3.24}$$

donde $n > K$, con $K > 0$ dado por la Proposición 3.5.1.

Demostración. Sea

$$W(u, x, y) := \ell(x(a), x(b)) + \int_a^b f(t, x(t), y(t))dt + n \cdot d((x(a), x(b)); S).$$

Haciendo uso de la notación de la demostración de la Proposición 3.5.1, si x es una solución local del problema (3.23), entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $J_n(x) \leq J_n(y)$ para todo $y \in AC^{1,p}([a, b], X)$ con $\|y - x\|_{AC^{1,p}} \leq \varepsilon$ donde $n > K$ con $K > 0$ dado por la Proposición 3.5.1, luego, si $(u, z, y) \in A$, entonces $z(t) = u + \int_a^t y(s)ds$ para todo $t \in [a, b]$, luego $u = z(a)$ y además $y(t) = \dot{z}(t)$ para todo $t \in [a, b]$ y por tanto $z \in AC^{1,p}([a, b], X)$, por el Lema 1.3.29, se sabe que existe $C > 0$ (que sólo depende de a, b y p) tal que $\|z - x\|_p \leq C\|z - x\|_{AC^{1,p}}$, luego

$$\begin{aligned} \|(u, z, y) - (x(a), x, \dot{x})\| &= \|u - x(a)\| + \|z - x\|_p + \|y - \dot{x}\|_p \\ &= \|z(a) - x(a)\| + \|z - x\|_p + \|\dot{z} - \dot{x}\|_p \\ &= \|z - x\|_{AC^{1,p}} + \|z - x\|_p \\ &\leq (C + 1)\|z - x\|_{AC^{1,p}}. \end{aligned}$$

Luego, si $\|(u, z, y) - (x(a), x, \dot{x})\| \leq \varepsilon$ implica que $\|z - x\|_{AC^{1,p}} \leq \varepsilon$ entonces $W(u, z, y) = J_n(z) \geq J_n(x) = W(x(a), x, \dot{x})$ lo que prueba que $(x(a), x, \dot{x})$ es solución local de (3.24). Recíprocamente, si $(x(a), x, \dot{x})$ es solución local de (3.24), entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $W(x(a), x, \dot{x}) \leq W(u, z, y)$ donde $\|(u, z, y) - (x(a), x, \dot{x})\| \leq \varepsilon$, luego, si $\|w - x\|_{AC^{1,p}} \leq \frac{\varepsilon}{C+1}$, entonces $\|(w(a), w, \dot{w}) - (x(a), x, \dot{x})\| \leq \varepsilon$, y $J_n(x) = W(x(a), x, \dot{x}) \leq W(w(a), w, \dot{w}) = J_n(w)$ lo que prueba que x es solución local de (3.23). $\square$

El siguiente Lema caracteriza el cono normal limiting del conjunto A definido anteriormente.

Lema 3.5.3 Si $(u^*, x^*, y^*) \in N_A(u, x, y)$ con $(u, x, y) \in A$, entonces

$$y^*(t) = -\int_t^b x^*(s)ds \text{ para todo } t \in [a, b]$$

y $y^*(a) = u^* = -\int_a^b x^*(s)ds$.

Demostración. Es fácil ver que A es un conjunto convexo y cerrado, luego si $(u^*, x^*, y^*) \in N_A(u, x, y)$ entonces $\langle (u^*, x^*, y^*), (u, x, y)\rangle \geq \langle (u^*, x^*, y^*), (u', x', y')\rangle$ para todo $(u', x', y') \in A$ (ver [39, Proposition 6.6]). Entonces,

$$\langle u^*, u - u'\rangle \geq \int_a^b \langle x^*(t), x'(t) - x(t)\rangle dt + \int_a^b \langle y^*(t), y'(t) - y(t)\rangle dt,$$

pero se tiene que $x(t) = u + \int_a^t y(s)ds$ y $x'(t) = u' + \int_a^t y'(s)ds$ para todo $t \in [a, b]$, y por lo tanto se obtiene que

$$\begin{aligned}\langle u^* + \int_a^b x^*(t)dt, u - u'\rangle &\geq \int_a^b \frac{d}{dt}\langle -\int_t^b x^*(s)ds, \int_a^t y'(s) - y(s)ds\rangle dt \\ &\quad + \int_a^b \langle y^*(t) + \int_t^b x^*(s)ds, y'(t) - y(t)\rangle dt \\ &= \int_a^b \langle y^*(t) + \int_t^b x^*(s)ds, y'(t) - y(t)\rangle dt,\end{aligned}$$

donde la última igualdad es gracias al Teorema Fundamental del Cálculo. Ahora, notar que la desigualdad

$$\langle u^* + \int_a^b x^*(t)dt, u - u'\rangle \geq \int_a^b \langle y^*(t) + \int_t^b x^*(s)ds, y'(t) - y(t)\rangle dt$$

se tiene para todo $u' \in X$ y $y' \in L^p([a,b], X)$, y entonces se puede concluir que $y^*(t) = -\int_t^b x^*(s)ds$ y $u^* = -\int_a^b x^*(t)dt$. □

El siguiente resultado muestra la condición de optimalidad para el problema (3.22).

Teorema 3.5.4 Sea x una solución local del problema (3.22), entonces existe $p \in AC^{1,q}([a,b], X^*)$ tal que

$$(\dot{p}, p) \in \overline{\partial}\mathcal{I}_f(x, \dot{x})$$

y

$$(p(a), -p(b)) \in \partial\ell(x(a), x(b)) + N_S(x(a), x(b)).$$

Demostración. Primero que todo, notar que, para $n > K$, el problema (3.24) puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}\min\ &(\ell \circ \Phi)(u,x,y) + \mathcal{I}_f(u,x,y) + (n \cdot d(\cdot; S) \circ \Phi)(u,x,y) + \delta_A(u,x,y) \\ &(u,x,y) \in X \times L^p([a,b], X) \times L^p([a,b], X).\end{aligned} \tag{3.25}$$

Donde $\Phi\colon (u,x,y) \mapsto (u, u + \int_a^b y(s)ds)$ y $\mathcal{I}_f\colon (u,x,y) \mapsto \int_a^b f(t, x(t), y(t))dt$. Por [17, Corollary 3, p. 100], se tiene que $L^p([a,b], X)$ es un espacio de Asplund. Ahora, si x es una solución de (3.22), por los resultados anteriores se tiene que $z := (x(a), x, \dot{x})$ es una solución de (3.25), luego por la Proposición 1.2.13 se tiene que

$$\begin{aligned}(0,0,0) &\in \partial(\ell \circ \Phi + \mathcal{I}_f + n \cdot d(\cdot; S) \circ \Phi + \delta_A)(z) \\ &\subset \partial(\ell \circ \Phi)(z) + \partial\mathcal{I}_f(z) + \partial((n \cdot d(\cdot; S)) \circ \Phi)(z) + \partial\delta_A(z),\end{aligned}$$

donde se ocupa la regla de la suma (ver Teorema 1.2.12). Por la regla de la cadena (ver [39, Theorem 6.23 & Proposition 6.14 (a)]) se tiene que $\partial(\ell \circ \Phi)(z) \subset \Phi^*\partial\ell(\Phi(z))$, y similarmente, gracias a la Proposición 1.2.11 se obtiene que

$$\partial((nd(\cdot; S)) \circ \Phi)(z) \subset \Phi^*\partial(nd(\cdot; S))(\Phi(z)) = \Phi^*(n\partial d(\cdot; S)(\Phi(z))) \subset \Phi^* N_S(\Phi(z)).$$

Por lo tanto, como se tiene que $\partial\mathcal{I}_f(z) \subset \overline{\partial}\mathcal{I}_f(z)$ (Proposición 1.2.16), entonces

$$(0,0,0) \in \Phi^*\partial\ell(\Phi(z)) + \overline{\partial}\mathcal{I}_f(z) + \Phi^* N_S(\Phi(z)) + N_A(z).$$

Dado que $\mathcal{I}_f$ no depende de la variable u, se tiene que $\overline{\partial}\mathcal{I}_f(z) = \{0\} \times \overline{\partial}\mathcal{I}_f(x, \dot{x})$. Por otro lado, se tiene que $\Phi^*(u^*, v^*) = (u^* + v^*, 0, v^*)$. Luego, existe $(u_1^*, v^*) \in \partial\ell(\Phi(z))$, $(u_2^*, x^*, y^*) \in N_A(z)$, y $(u_3^*, w^*) \in N_S(\Phi(z))$ tal que

$$\begin{aligned}
-\Phi^*(u_1^*, v^*) - (u_2^*, x^*, y^*) - \Phi^*(u_3^*, w^*) &\in \overline{\partial}\mathcal{I}_f(z) \\
-(u_1^* + v^*, 0, v^*) - (u_2^*, x^*, y^*) - (u_3^* + w^*, 0, w^*) &\in \overline{\partial}\mathcal{I}_f(z) \\
(-u_1^* - v^* - w^* - u_2^* - u_3^*, -x^*, -v^* - w^* - y^*) &\in \{0\} \times \overline{\partial}\mathcal{I}_f(x, \dot{x}),
\end{aligned}$$

entonces $u_1^* + v^* + w^* + u_2^* + u_3^* = 0$. Por el Lema (3.5.3), se tiene que $y^*(t) = -\int_t^b x^*(s)ds$ y $u_2^* = -\int_a^b x^*(s)ds$. Se define $p(t) := u_1^* + u_2^* + u_3^* + \int_t^b x^*(s)ds$, entonces $\dot{p}(t) = -x^*(t)$ y

$$p(t) = u_1^* + u_2^* + u_3^* + \int_t^b x^*(s)ds = -v^* - w^* - y^*,$$

y se concluye que $(\dot{p}, p) \in \overline{\partial}\mathcal{I}_f(x, \dot{x})$. Finalmente, se puede ver que

$$\begin{aligned}
(p(a), -p(b)) &= (u_1^* + u_2^* + u_3^* + \int_a^b x^*(s)ds, -u_1^* - u_2^* - u_3^*) \\
&= (u_1^* + u_2^* + u_3^* + \int_a^b x^*(s)ds, v^* + w^*) \\
&= (u_1^* + u_3^*, v^* + w^*) \\
&= (u_1^*, v^*) + (u_3^*, w^*) \\
&\in \partial\ell(\Phi(z)) + N_S(\Phi(z)) = \partial\ell(x(a), x(b)) + N_S(x(a), x(b)),
\end{aligned}$$

y se finaliza la demostración. □

Corolario 3.5.5 Suponga que f cumple las hipótesis del Teorema 3.4.1. Entonces, si x es una solución local del problema (3.22), existe una función absolutamente continua $p\colon [a, b] \to X^*$ tal que

$$(\dot{p}(t), p(t)) \in \overline{\partial}f(t, x(t), \dot{x}(t)) \ t\text{-c.t.p.}$$

y

$$(p(a), -p(b)) \in \partial\ell(x(a), x(b)) + N_S(x(a), x(b))$$

Demostración. Esto es una consecuencia directa del Teorema 3.5.4 y la inclusión (3.18) del Teorema 3.4.1. □

3.6. Aplicación al Sweeping Process

El *sweeping process* es una inclusión diferencial de primer orden que involucra el cono normal de un conjunto convexo cerrado que depende del tiempo. Fue introducido por J.J. Moreau como un modelo de elastoplasticidad en mecánica (see [36, 37, 35]). En su forma más simple, consiste en encontrar una solución absolutamente continua $x\colon [a, b] \to H$ de la siguiente inclusión diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) \text{ c.t.p. } t \in [a, b], \\ x(a) = x_0 \in C(a). \end{cases} \tag{3.26}$$

Sin embargo, debido a la presencia del cono normal, la definición anterior requiere implícitamente que $x(t) \in C(t)$ para todo $t \in [a, b]$. Entonces, para que el sweeping process admita una solución en el sentido anterior, se requieren algunas propiedades de continuidad sobre la multifunción C. En este contexto, el primer resultado sobre la existencia de soluciones para el sweeping process (3.26) (ver [36]) requiere que

$$\operatorname{Haus}(C(t), C(s)) \leq \kappa|t-s| \quad t, s \in [a, b], \tag{3.27}$$

donde $\kappa \geq 0$ y $\operatorname{Haus}(A, B)$ es la distancia de Hausdorff entre los conjuntos cerrados A y B. Debido a intereses prácticos en problemas de mecánica, donde saltos y colisiones pueden ocurrir (ver, e.g., [34, 9, 52]), se han extendido las nociones de solución al caso donde las discontinuidades en la multifunción C son permitidas (típicamente de variación acotada). En esta sección, se estudiarán dos nociones de soluciones en el contexto discontinuo y se probará que ambas nociones son equivalentes con hipótesis bastante generales.
En lo que sigue, H será un espacio de Hilbert. La primera definición está basada en [53] y es la noción de solución más utilizada.

Definición 3.6.1 Se dice que $x\colon [a, b] \to H$ es una *solución en el sentido de medidas diferenciales* del sweeping process (3.26) si

(a) El mapeo $x(\cdot)$ es de variación acotada en $[a, b]$, continuo a la derecha, y satisface $x(a) = x_0$ y $x(t) \in C(t)$ para todo $t \in [a, b]$.

(b) Existe una medida de Radon ν con respecto a la cual la medida diferencial dx de $x(\cdot)$ es absolutamente continua con $\frac{dx}{d\nu}(\cdot) \in L^1_\nu([a, b]; H)$ y

$$\frac{dx}{d\nu}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) \quad \nu\text{-c.t.p. } t \in [a, b].$$

Ahora, se define la noción de "solución integral", la cual está basada en [26, 27] (ver también [41]).

Definición 3.6.2 Se dice que $x\colon [a, b] \to H$ es una *solución integral* del sweeping process (3.26) si

(a) El mapeo $x(\cdot)$ es de variación acotada en $[a, b]$, continua a la derecha, y satisface $x(a) = x_0$ y $x(t) \in C(t)$ para todo $t \in [a, b]$.

(b) Existe una medida de Radon positiva ν con respecto a la cual la medida diferencial dx de $x(\cdot)$ es absolutamente continua con $\frac{dx}{d\nu}(\cdot) \in L^1_\nu([a, b]; H)$ y para todo $y \in \mathcal{C}([a, b], H)$ con $y(t) \in C(t)$ ν-c.t.p. $t \in [a, b]$:

$$\int_a^b \left\langle \frac{dx}{d\nu}(t), y(t) - x(t) \right\rangle d\nu \geq 0.$$

Se observa que la equivalencia entre ambas definiciones no es trivial. En efecto, por un lado, la definición 3.6.2 requiere la existencia de selecciones continuas de C, las cuales no necesariamente existen. Por otro lado, la definición 3.6.1 está basada en una caracterización puntual del cono normal.

El siguiente resultado muestra, como una consecuencia del Teorema 3.1.4, la equivalencia entre estas dos definiciones para una multifunción $C\colon [a,b] \rightrightarrows H$ que toma valores convexos, cerrados, no vacíos y acotados.

Teorema 3.6.3 Sea $C\colon [a,b] \rightrightarrows H$ una multifunción que cumple (3.27), que toma valores convexos, cerrados, no vacíos y acotados. Entonces, $x(\cdot)$ es una solución integral si, y sólo si $x(\cdot)$ es una solución en el sentido de medidas diferenciales.

Demostración. Por un lado, si $x(\cdot)$ es una solución en el sentido de medidas diferenciales (Definición 3.6.1), es suficiente integrar la función $\langle \frac{dx}{d\nu}(\cdot), y(\cdot) - x(\cdot)\rangle$ en $[a,b]$, para toda función $y \in \mathcal{C}([a,b],H)$ que cumple que $y(t) \in C(t)$ ν-c.t.p., y luego concluir que $x(\cdot)$ es una solución integral.

Por otro lado, sea $x\colon [a,b] \to H$ una solución integral, i.e., para todo $y \in \mathcal{C}([a,b],H)$ con $y(t) \in C(t)$ ν-c.t.p. $t \in [a,b]$:

$$\int_a^b \left\langle \frac{dx}{d\nu}(t), y(t) - x(t) \right\rangle d\nu \geq 0$$

Entonces, se tiene que

$$\beta := \inf\left\{ \int_a^b \left\langle \frac{dx}{d\nu}(t), y(t) - x(t) \right\rangle + \delta_{C(t)}(y(t)) d\nu \colon y \in \mathcal{C}([a,b],H) \right\} \geq 0.$$

Ahora, se define

$$f_t(y) := \left\langle \frac{dx}{d\nu}(t), y - x(t) \right\rangle + \delta_{C(t)}(y).$$

Es posible probar que f es un Lusin integrand. En efecto, sea $A \in \mathcal{L}([a,b])$ y $\varepsilon > 0$, se puede escoger un conjunto compacto $K \subset A$ con $\nu(A \setminus K) < \varepsilon$ tal que $\frac{dx}{d\nu}\colon K \to H$ y $x\colon K \to H$ son continuas (Corolario 1.3.13). Entonces, $K \times X \ni (t,y) \mapsto \left\langle \frac{dx}{d\nu}(t), y - x(t) \right\rangle$ es continua, por lo tanto, esta es un función de Scorza-Dragoni. También, se observa que para todo $t \in [a,b]$, $\operatorname{epi} \delta_{C(t)} = C(t) \times [0,\infty)$ y como C es lsc (ver [38, Proposition 6.1.37]), se tiene que $t \rightrightarrows \operatorname{epi} \delta_{C(t)}$ es lsc, entonces por 3.2.6, $K \ni t \rightrightarrows \operatorname{epi} f_t$ es lsc. Por el Teorema 3.1.4, existe una secuencia creciente de compactos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\beta_n := \inf\left\{ \int_{K_n} f_t(\phi(t)) d\nu \colon \phi \in \mathcal{C}(K_n, H) \right\} = \int_{K_n} \inf_{y \in H} f_t(y) d\nu,$$

con $\nu([a,b] \setminus (\bigcup K_n)) = 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $\phi_n \in \mathcal{C}(K_n, H)$ tal que

$$\beta_n + \frac{1}{n} \geq \int_{K_n} f_t(\phi_n(t)) d\nu,$$

lo que implica que $\phi_n(t) \in C(t)$ ν-c.t.p. $t \in K_n$. Sin perdida de generalidad se puede asumir que $\phi_n(t) \in C(t)$ para todo $t \in K_n$ (si no, reducir el compacto usando que ν es una medida de Radon). Si $U_n(t) := \{x \in H \colon \|\phi_n(t) - x\| < 1/n\}$, se considera la multifunción

$$\hat{M}_n \colon t \rightrightarrows \begin{cases} U_n(t) & \text{si } t \in K_n, \\ H & \text{si } t \notin K_n, \end{cases}$$

que tiene grafo abierto y $\hat{M}_n(t) \cap C(t) \neq \emptyset$ para todo $t \in [a,b]$. Entonces, en virtud de [38, Proposition 6.1.24], la multifunción $\hat{M}_n \cap C$ es lsc. Por [38, Proposition 6.1.19], se tiene que $M_n(t) := \mathrm{cl}(\hat{M}_n(t) \cap C(t))$ es lsc y

$$M_n \colon t \rightrightarrows \begin{cases} \mathrm{cl}(U_n(t) \cap C(t)) & \text{si } t \in K_n, \\ C(t) & \text{si } t \notin K_n. \end{cases}$$

Es claro que M_n toma valores convexos, cerrados y no vacíos. Entonces, por el Teorema 1.4.7, se obtiene una selección continua de M_n, denotada por φ_n que satisface: $\|\varphi_n(t) - \phi_n(t)\| \leq 1/n$ para todo $t \in K_n$ y $\varphi_n(t) \in C(t),\ \forall t \in H$. Ahora, se observa que

$$\begin{aligned} \int_{K_n} f_t(\phi_n(t))d\nu &= \int_a^b f_t(\varphi_n(t))d\nu + \int_{K_n} f_t(\phi_n(t)) - f_t(\varphi_n(t))d\nu \\ &\quad - \int_{[a,b]\setminus K_n} f_t(\varphi_n(t))d\nu \\ &\geq \beta + \int_{K_n} f_t(\phi_n(t)) - f_t(\varphi_n(t))d\nu - \int_{[a,b]\setminus K_n} f_t(\varphi_n(t))d\nu. \end{aligned}$$

Además, por una parte

$$\begin{aligned} \left| \int_{K_n} f_t(\phi_n(t)) - f_t(\varphi_n(t))d\nu \right| &\leq \int_{K_n} |f_t(\phi_n(t)) - f_t(\varphi_n(t))|d\nu \\ &= \int_{K_n} \left| \left\langle \frac{dx}{d\nu}(t), \phi_n(t) - \varphi_n(t) \right\rangle \right| d\nu \\ &\leq \frac{1}{n} \int_a^b \left\| \frac{dx}{d\nu}(t) \right\| d\nu. \end{aligned}$$

y por otra parte,

$$\begin{aligned} \left| \int_{[a,b]\setminus K_n} f_t(\varphi_n(t))d\nu \right| &\leq \int_{[a,b]\setminus K_n} |f_t(\varphi_n(t))|d\nu \\ &= \int_{[a,b]\setminus K_n} \left| \left\langle \frac{dx}{d\nu}(t), \varphi_n(t) - x(t) \right\rangle \right| d\nu \\ &\leq \int_{[a,b]\setminus K_n} \left\| \frac{dx}{d\nu}(t) \right\| \cdot \|\varphi_n(t) - x(t)\| d\nu \leq R \int_{[a,b]\setminus K_n} \left\| \frac{dx}{d\nu}(t) \right\| d\nu, \end{aligned}$$

donde $R > 0$ satisface que $\sup_{t\in[a,b]} \mathrm{diam}(C(t)) \leq R$. Tal R existe, pues C toma valores acotados, y la hipótesis (3.27) permite probar que C tiene valores uniformemente acotados. Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\beta_n + \frac{1}{n} \geq \beta - \frac{1}{n} \int_a^b \left\| \frac{dx}{d\nu}(t) \right\| d\nu - R \int_{[a,b]\setminus K_n} \left\| \frac{dx}{d\nu}(t) \right\| d\nu.$$

Entonces, si $n \to \infty$, se obtiene que $\liminf_{n\to\infty} \beta_n \geq \beta$. Además,

$$\liminf_{n\to\infty} \beta_n = \liminf_{n\to\infty} \int_{K_n} \inf_{y\in H} f_t(y)d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_{K_n} \inf_{y\in H} f_t(y)d\nu = \int_a^b \inf_{y\in H} f_t(y)d\nu,$$

donde fue usado el Teorema 1.3.5, dado que $t \mapsto \inf_{y\in H} f_t(y)$ es integrable. Por lo tanto,

$$\int_a^b \inf_{y\in H} f(t,y)d\nu \geq \beta \geq 0.$$

Finalmente, como $\inf_{y\in H} f(t,y) \leq 0$ ν-c.t.p. $t \in [a,b]$ (porque $x(t) \in C(t)$ ν-c.t.p.. $t \in [a,b]$), se concluye que $\inf_{y\in H} f(t,y) \geq 0$ ν-c.t.p. $t \in [a,b]$, lo que prueba que $x(\cdot)$ es una solución en el sentido de medidas diferenciales. $\square$

Observación 3.6.4 La condición (3.27) se puede relajar. En efecto, por un lado, se puede pedir que exista una función $r\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua tal que $\text{Haus}(C(t), C(s)) \leq |r(t) - r(s)|$ para todo $t, s \in [a,b]$. También se puede cambiar pidiendo que $t \mapsto C(t)$ sea continua respecto a la distancia de Hausdorff y $\operatorname{int} C(t) \neq \emptyset$ para todo $t \in [a,b]$. Ambas condiciones garantizan que el problema expuesto en la Definición 3.6.1 tiene solución (ver [29, Theorem 8 & Theorem 9]) y el Teorema 3.6.3 se cumple.

Conclusiones

En esta tesis, se obtuvieron resultados muy satisfactorios que generalizaron los trabajos que se tenían como motivación previa. Por un lado, el Teorema 2.0.5 nos da una basta caracterización de multifunciones medibles a partir de los minimizadores de un normal integrand $\mathcal{C}^\infty$, que gracias a las propiedades de la multifunción, cumple propiedades de convexidad, continuidad débil y además sus derivadas están acotadas por polinomios. Esto fue útil para deducir la existencia de aproximaciones suaves (Corolario 2.1.1) tanto para multifunciones como también para normal integrands (Corolario 2.1.2 y Teorema 2.1.3). Estos resultados, además, sirvieron para dar aplicaciones en problemas de optimización, como muestran los ejemplos 2.3.1 y 2.3.2, los cuales consisten en representar conjuntos factibles de problemas de optimización que involucran multifunciones como conjunto de nivel o subnivel de una función suave, gracias a los resultados previos mostrados en el capítulo.

Por otro lado, se demostró una fórmula de intercambio integral sobre espacios de funciones continuas a valores en un espacio de Banach general, extendiendo este resultado que sólo se conocía sobre espacios de Banach separables y específicamente en espacios descomponibles. Se logró extender la fórmula de la conjugada de Fenchel de un funcional integral a espacios de Banach no separables cuando este se define sobre un espacio descomponible, considerando una clase de integrands más reducida, que son los integrands admisibles, cuya definición depende de una clase más grande, que son los integrand de Lusin. Esta clase de funciones permitía superar el obstáculo de no tener selecciones medibles de conjuntos de subnivel del integrand, para el caso de un normal integrand en un espacio no separable, que impedía extender directamente el caso separable al caso general. En esta búsqueda de selecciones medibles, se demostró un resultado de selección para multifunciones admisibles de un espacio de medida (con estructura de espacio métrico) a un Banach cualquiera (Corolario 3.2.16). Se detalló el caso particular de la fórmula de la conjugada, cuando el funcional se define sobre espacios de funciones p-integrables (donde $p \in [1, \infty]$) a valores en un Asplund sin hipótesis de separabilidad, en este caso, se obtuvo una fórmula para el ε-subdiferencial del funcional integral ($\varepsilon \geq 0$), también se estudia el caso en donde el funcional integral se define sobre funciones constantes, es decir, resulta ser una función sobre el espacio X (como muestra (3.11)). Las aplicaciones de estos resultados, por una parte, muestran una desigualdad para la subderivada de Clarke del funcional integral, que permite obtener una descripción del subdiferencial de Clarke del funcional. Con el resultado anterior, se muestra una condición de optimalidad para un problema de cálculo de variaciones. Finalmente, gracias a la fórmula de intercambio integral, se demuestra que la formulación clásica del sweeping process es equivalente a la formulación integral del mismo problema.

Como trabajo futuro, respecto a los resultados obtenidos en el Capítulo 2, se podría intentar regularizar algún problema de control óptimo ocupando el Teorema 2.1.3 o el Corolario

2.1.4 para probar existencia de soluciones a esos problemas. En el estudio de la fórmula de la conjugada de Fenchel, surgieron varias preguntas que aún están abiertas, principalmente acerca de la clase de integrands para los cuales la fórmula es válida. En efecto, no es claro si la clase de integrands admisibles está estrictamente contenida en la clase de integrands de Lusin que son lsc puntualmente, o si en algún caso son iguales (en el caso separable esto está resuelto gracias a la Proposición 3.2.10), pero esto puede resultar difícil de comprobar, por lo que sería más útil ver si el Teorema 3.2.15 se sigue cumpliendo para Lusin integrands que son lsc puntualmente. También sería prudente estudiar qué tan lejanas están estas clases de funciones de la noción de normal integrand en el caso general, pues esta clase es mucho más versátil de trabajar. Con respecto al subdiferencial de Clarke del funcional integral, queda por explorar un poco más si las hipótesis exigidas en el Teorema 3.4.1 pueden relajarse, pues comprobar que la subderivada de Clarke sea un Lusin integrand puede resultar complicado. Sobre el problema de cálculo de variaciones que se presenta en (3.22), es posible hacer un intento de debilitar aún más las hipótesis sobre la continuidad de las funciones que definen la función objetivo, por ejemplo, ver como cambia la condición de optimalidad si es que sólo se asume que el integrand f es localmente Lipschitz, hipótesis que usualmente es asumida en problemas de este estilo (ver e.g. [15, Theorem 18.1]).

Bibliografía

[1] Z. Artstein y K. Prikry. «Carathéodory selections and the Scorza Dragoni property». En: *J. Math. Anal. Appl.* 127.2 (1987), págs. 540-547. ISSN: 0022-247X.

[2] J.-P. Aubin e I. Ekeland. *Applied nonlinear analysis*. Reprint of the 1984 original. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006, págs. x+518. ISBN: 0-486-45324-3.

[3] J.-P. Aubin y H. Frankowska. *Set-valued analysis*. Mod. Birkhäuser Class. Reprint of the 1990 edition [MR1048347]. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2009, págs. xx+461. ISBN: 978-0-8176-4847-3.

[4] D. Azagra y J. Ferrera. «Every closed convex set is the set of minimizers of some C^∞-smooth convex function». En: *Proc. Amer. Math. Soc.* 130.12 (2002), págs. 3687-3692. ISSN: 0002-9939.

[5] H. H. Bauschke y P. L. Combettes. *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*. Second. CMS Books Math./Ouvrages Math. SMC. With a foreword by Hédy Attouch. Springer, Cham, 2017, págs. xix+619. ISBN: 978-3-319-48310-8.

[6] J. B. van den Berg, W. Hetebrij y B. Rink. «The parameterization method for center manifolds». En: *J. Differential Equations* 269.3 (2020), págs. 2132-2184. ISSN: 0022-0396.

[7] V. I. Bogachev. *Measure theory. Vol. I, II.* Springer-Verlag, Berlin, 2007, Vol. I: xviii+500 pp., Vol. II: xiv+575. ISBN: 978-3-540-34513-8.

[8] N. Bourbaki. *General topology. Chapters 5–10.* Elem. Math. (Berlin). Translated from the French, Reprint of the 1989 English translation. Springer-Verlag, Berlin, 1998, págs. iv+363. ISBN: 3-540-64563-2.

[9] B. Brogliato. *Nonsmooth mechanics*. Third. Comm. Control Engrg. Ser. Models, dynamics and control. Springer, [Cham], 2016, págs. xxii+629. ISBN: 978-3-319-28662-4.

[10] A. Cabot y L. Thibault. «Sequential formulae for the normal cone to sublevel sets». En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 366.12 (2014), págs. 6591-6628. ISSN: 0002-9947.

[11] H. Cartan. *Differential calculus*. Exercises by C. Buttin, F. Rideau and J. L. Verley, Translated from the French. Hermann, Paris; Houghton Mifflin Co., Boston, Mass., 1971, pág. 160.

[12] B. Cascales, V. Kadets y J. Rodríguez. «Measurability and selections of multi-functions in Banach spaces». En: *J. Convex Anal.* 17.1 (2010), págs. 229-240. ISSN: 0944-6532.

[13] C. Castaing. «Une nouvelle extension du théorème de Dragoni-Scorza». En: *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 271 (1970), A396-A398. ISSN: 0151-0509.

[14] C. Castaing y M. Valadier. *Convex analysis and measurable multifunctions*. Lecture Notes in Math., Vol. 580. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977, págs. vii+278.

[15] F. Clarke. *Functional analysis, calculus of variations and optimal control.* Vol. 264. Grad. Texts in Math. Springer, London, 2013, págs. xiv+591. ISBN: 978-1-4471-4819-7.

[16] F. H. Clarke y col. *Nonsmooth analysis and control theory.* Vol. 178. Grad. Texts in Math. Springer-Verlag, New York, 1998, págs. xiv+276. ISBN: 0-387-98336-8.

[17] J. Diestel y J. J. Uhl Jr. *Vector measures.* Math. Surveys, No. 15. With a foreword by B. J. Pettis. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977, págs. xiii+322.

[18] J. Dugundji. *Topology.* Reprinting of the 1966 original, Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics. Allyn y Bacon, Inc., Boston, Mass.-London-Sydney, 1978, págs. xv+447. ISBN: 0-205-00271-4.

[19] G. B. Folland. *Real analysis.* Second. Pure Appl. Math. (N. Y.) Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, págs. xvi+386. ISBN: 0-471-31716-0.

[20] L. Gasiński y N. S. Papageorgiou. *Nonlinear analysis.* Vol. 9. Ser. Math. Anal. Appl. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006, págs. xii+971. ISBN: 978-1-58488-484-2.

[21] P. Hájek. «Smooth functions on c_0». En: *Israel J. Math.* 104 (1998), págs. 17-27. ISSN: 0021-2172.

[22] C. J. Himmelberg y F. S. Van Vleck. «An extension of Brunovský's Scorza Dragoni type theorem for unbounded set-valued functions». En: *Math. Slovaca* 26.1 (1976), págs. 47-52. ISSN: 0025-5173.

[23] S. Hu y N. S. Papageorgiou. *Handbook of multivalued analysis. Vol. I.* Vol. 419. Math. Appl. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997, págs. xvi+964.

[24] A. D. Ioffe y V. M. Tihomirov. *Theory of extremal problems.* Vol. 6. Stud. Math. Appl. Translated from the Russian by Karol Makowski. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1979, págs. xii+460. ISBN: 0-444-85167-4.

[25] A. Ionescu Tulcea y C. Ionescu Tulcea. *Topics in the theory of lifting.* Ergeb. Math. Grenzgeb., Band 48. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1969, págs. x+190.

[26] P. Krejci y T. Roche. «Lipschitz continuous data dependence of sweeping processes in BV spaces». En: *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* 15.3 (2011), págs. 637-650. ISSN: 1531-3492.

[27] P. Krejčí y M. Liero. «Rate independent Kurzweil processes». En: *Appl. Math.* 54.2 (2009), págs. 117-145. ISSN: 0862-7940.

[28] A. Kucia. «Scorza Dragoni type theorems». En: *Fund. Math.* 138.3 (1991), págs. 197-203. ISSN: 0016-2736.

[29] M. Kunze y M. D. P. Monteiro-Marques. «An introduction to Moreau's sweeping process». En: *Impacts in mechanical systems (Grenoble, 1999).* Vol. 551. Lecture Notes in Phys. Springer, Berlin, 2000, págs. 1-60.

[30] V. L. Levin. «Convex integral functionals and the theory of lifting». En: *Russian Mathematical Surveys* 30.2 (1975), pág. 119.

[31] S. Łojasiewicz Jr. «Some theorems of Scorza-Dragoni type for multifunctions with application to the problem of existence of solutions for differential multivalued equations». En: *Mathematical control theory.* Vol. 14. Banach Center Publ. PWN, Warsaw, 1985, págs. 625-643.

[32] E. Michael. «A selection theorem». En: *Proc. Amer. Math. Soc.* 17 (1966), págs. 1404-1406. ISSN: 0002-9939.

[33] B. S. Mordukhovich. *Variational analysis and generalized differentiation II.* Vol. 331. Grundlehren Math. Wiss. Springer-Verlag, Berlin, 2006, i–xxii and 1-610. ISBN: 978-3-540-25438-6.

[34] J. J. Moreau. «Numerical aspects of the sweeping process». En: vol. 177. 3-4. Computational modeling of contact and friction. 1999, págs. 329-349.

[35] J.J. Moreau. «Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space». En: *J. Differential Equations* 26.3 (1977), págs. 347-374.

[36] J.J. Moreau. «Rafle par un convexe variable. I». En: *Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe, Vol. I, Exp. No. 15.* U.É.R. de Math., Univ. Sci. Tech. Languedoc, Montpellier, 1971, págs. 1-43.

[37] J.J. Moreau. «Rafle par un convexe variable. II». En: *Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe, Vol. II, Exp. No. 3.* U.É.R. de Math., Univ. Sci. Tech. Languedoc, Montpellier, 1972, págs. 1-36.

[38] N. S. Papageorgiou y S. Th. Kyritsi-Yiallourou. *Handbook of applied analysis.* Vol. 19. Adv. Mech. Math. Springer, New York, 2009, págs. xviii+793. ISBN: 978-0-387-78906-4.

[39] J.-P. Penot. *Calculus without derivatives.* Vol. 266. Grad. Texts in Math. Springer, New York, 2013, págs. xx+524. ISBN: 978-1-4614-4537-1.

[40] A. Prékopa. *Stochastic programming.* Vol. 324. Math. Appl. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1995, págs. xviii+599. ISBN: 0-7923-3482-5.

[41] V. Recupero. «*BV* continuous sweeping processes». En: *J. Differential Equations* 259.8 (2015), págs. 4253-4272. ISSN: 0022-0396.

[42] R. T. Rockafellar. *Conjugate duality and optimization.* Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 16. Lectures given at the Johns Hopkins University, Baltimore, Md., June, 1973. Society for Industrial y Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1974, págs. vi+74.

[43] R. T. Rockafellar. «Integrals which are convex functionals». En: *Pacific J. Math.* 24 (1968), págs. 525-539. ISSN: 0030-8730.

[44] R. T. Rockafellar. «Integrals which are convex functionals. II». En: *Pacific J. Math.* 39 (1971), págs. 439-469. ISSN: 0030-8730.

[45] R. T. Rockafellar y R. J.-B. Wets. *Variational analysis.* Vol. 317. Grundlehren Math. Wiss. Springer-Verlag, Berlin, 1998, págs. xiv+733. ISBN: 3-540-62772-3.

[46] M. E. Rudin. «A new proof that metric spaces are paracompact». En: *Proc. Amer. Math. Soc.* 20 (1969), pág. 603. ISSN: 0002-9939.

[47] W. Rudin. *Functional analysis.* Second. Internat. Ser. Pure Appl. Math. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991, págs. xviii+424. ISBN: 0-07-054236-8.

[48] T. Rzeżuchowski. «Scorza-Dragoni type theorem for upper semicontinuous multivalued functions». En: *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math.* 28.1-2 (1980), 61-66 (1981). ISSN: 0137-639x.

[49] J. San Martín. *Teoría de la Medida.* Editorial Universitaria, 2018. ISBN: 978-956-11-2577-3.

[50] A. Shapiro, D. Dentcheva y A. Ruszczyński. *Lectures on stochastic programming*. Second. Vol. 9. MOS-SIAM Ser. Optim. Modeling and theory. Society for Industrial y Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA; Mathematical Optimization Society, Philadelphia, PA, 2014, págs. xviii+494. ISBN: 978-1-611973-42-6.

[51] S. Shirali y H. L. Vasudeva. *Metric spaces*. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2006, págs. viii+222. ISBN: 1-85233-922-5.

[52] D. E. Stewart. *Dynamics with inequalities*. Impacts and hard constraints. Society for Industrial y Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2011, págs. xiv+387. ISBN: 978-1-611970-70-8.

[53] L. Thibault. «Moreau sweeping process with bounded truncated retraction». En: *J. Convex Anal.* 23.4 (2016), págs. 1051-1098. ISSN: 0944-6532.

[54] L. Veselý y L. Zajíček. «Delta-convex mappings between Banach spaces and applications». En: *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* 289 (1989), pág. 52. ISSN: 0012-3862.

[55] C. Zălinescu. *Convex analysis in general vector spaces*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002, págs. xx+367. ISBN: 981-238-067-1.

Índice alfabético