



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

COMPLEMENTARIEDAD EN LA TECNOLOGÍA DE ACUMULACIÓN DE  
CAPITAL HUMANO EN UN MODELO DE CRECIMIENTO DE LARGO PLAZO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN  
ECONOMÍA APLICADA

SAMUEL NAÍN HABBIB LÁSCAR GAJARDO

PROFESORA GUÍA:  
PAMELA JERVIS ORTIZ

PROFESORA CO-GUÍA:  
ALESSANDRA PIZZO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
BERNABÉ LÓPEZ-MARTIN  
BENJAMÍN VILLENA ROLDÁN

SANTIAGO DE CHILE  
2022

RESUMEN DE TESIS PARA OPTAR AL GRADO  
DE MAGÍSTER EN ECONOMÍA APLICADA  
POR: SAMUEL NAÍN LÁSCAR GAJARDO  
FECHA: 2022  
PROF. GUÍA: PAMELA JERVIS  
PROF. CO-GUÍA: ALESSANDRA PIZZO

## **COMPLEMENTARIEDAD EN LA TECNOLOGÍA DE ACUMULACIÓN DE CAPITAL HUMANO EN UN MODELO DE CRECIMIENTO DE LARGO PLAZO**

El capital humano es un componente crucial en el desarrollo humano y el crecimiento económico, implicando que sea un ámbito prioritario en el diseño de políticas públicas. Para el buen diseño de estas, es fundamental entender los mecanismos por los cuales la política pública puede incidir en la acumulación de capital humano. Los modelos macroeconómicos que incorporan capital humano, han tendido a asumir que distintas fuentes de acumulación pueden ser sustituidas de manera perfecta, lo que contradice la evidencia mostrada por la literatura de desarrollo humano. Así, es relevante preguntarse por la incidencia sobre el equilibrio macroeconómico y la decisión de política de complejizar la tecnología de acumulación de capital humano incorporando complementariedad.

Esta tesis presenta un modelo macroeconómico de crecimiento endógeno basado en la acumulación de capital humano con fricciones en el mercado laboral. La tecnología de acumulación de capital humano expuesta presenta dos componentes, el primero está asociado a la acumulación de experiencia laboral, mientras que el segundo está asociado a capacitación *on the job*. El modelo se basa en el trabajo de Chen *et al.* (2011), pero contribuye flexibilizando el supuesto de perfecta sustituibilidad entre distintos *inputs* de acumulación de capital humano. Esto es relevante, ya que entrega la posibilidad de modelar con mayor precisión la mecánica de formación de habilidades de acuerdo con la evidencia existente sobre desarrollo humano.

El modelo desarrollado en esta tesis también contribuye en incorporar la tecnología de formación de capital humano de Cunha y Heckman (2007), lo que permite comparar los resultados de las simulaciones para la economía de Estados Unidos. A partir de esto, se extiende el análisis calibrando para la economía chilena. Los resultados numéricos muestran que mayores grados de complementariedad disminuye la sensibilidad del equilibrio macroeconómico de largo plazo ante variaciones exógenas. Luego, al simular una política de gasto en capital humano sujeta a un presupuesto fiscal balanceado, se advierte que la presencia de mayores grados de complementariedad puede generar cambios significativos en la decisión de política.

Si el objetivo de política pública es estimular el crecimiento económico de largo plazo, existen escenarios donde resulta conveniente realizar una política sobre el componente de experiencia laboral. Incluso en términos de bienestar, la complementariedad es relevante, ya que, al asumir una tecnología de acumulación de sustitutos perfectos, existe un *tradeoff* entre bienestar y crecimiento económico. En cambio, al agregar complementariedad, existen escenarios en que es posible conseguir mayor crecimiento económico y menor disminución en el bienestar del hogar, contradiciendo los resultados de Chen *et al.* (2011).

El ejercicio realizado en esta tesis explicita que, si no se considera la complementariedad entre distintos factores de acumulación de capital humano, el hacedor de política podría estar tomando decisiones equivocadas, lo que impactaría negativamente al crecimiento económico.

## Tabla de Contenido

1. Introducción .....	1
2. Literatura Relacionada: Crecimiento de Largo Plazo, Fricciones en Mercado Laboral y Complementariedad en la Formación de Capital Humano .....	4
3. Modelo de Crecimiento Económico con Fricciones en el Mercado Laboral y Complementariedad en la Tecnología de Acumulación de Capital Humano .....	9
3.1. Supuestos Generales .....	9
3.2. Firmas.....	9
3.2.1. Mecanismo de Creación de Vacantes .....	10
3.2.2. Tecnología de Producción .....	10
3.2.3. Precio del Capital y Relación con Razón Capital-Trabajo .....	11
3.3. Hogares .....	11
3.4. Tecnología de Acumulación de Capital Humano .....	12
3.5. Fricciones del Mercado Laboral y Evolución del Empleo .....	14
3.6. Mercado de Bienes .....	15
4. Optimización y Equilibrio de Estado Estacionario .....	16
4.1. Optimización .....	16
4.1.1. Pseudoproblema del Planificador Social.....	16
4.1.2. Condiciones de Primer Orden.....	17
4.1.3. Condiciones de Benveniste-Scheinkman .....	19
4.2. Senda de Crecimiento Balanceado (SCB) .....	20
5. Análisis Numérico para Estados Unidos .....	24
5.1. Calibración .....	24
5.2. Valores de Calibración de $\zeta$ y $D$ .....	26
5.3. Variación Exógena de Parámetros .....	27
5.3.1. Marco Analítico de Interpretación a partir de Chen <i>et al.</i> (2011).....	28
5.3.2. Análisis Numérico con Sustituibilidad Perfecta.....	32
5.3.3. Análisis Numérico sin Sustituibilidad Perfecta.....	34
5.4. Política de Capital humano.....	39
5.4.1. Modelamiento de Aplicación de Subsidio con Presupuesto Balanceado .....	39
5.4.2. Obtención de Subsidios de Capital Humano.....	40
5.4.3. Obtención del Precio del Capital Humano.....	40
5.4.4. Simulación de Política de Capital Humano.....	41
5.4.5. Efecto de Política de Capital Humano sobre Bienestar .....	48
6. Análisis Numérico para Chile.....	53

6.1.	Calibración .....	53
6.2.	Valores de Calibración de $\zeta$ y $D$ .....	56
6.3.	Variación Exógena de Parámetros .....	56
6.3.1.	Análisis Numérico con Sustituibilidad Perfecta.....	56
6.3.2.	Análisis Numérico sin Sustituibilidad Perfecta.....	58
6.4.	Política de Capital Humano .....	62
6.4.1.	Simulación de Política de Capital Humano.....	62
6.4.2.	Efecto de Política de Capital Humano sobre Bienestar .....	67
7.	Resumen y Observaciones Finales .....	71
8.	Bibliografía .....	74
	Anexos .....	78
	Anexo A: Condiciones de Primer Orden .....	78
	CPO Consumo.....	78
	CPO Esfuerzo Trabajo.....	78
	CPO Esfuerzo Aprendizaje.....	78
	CPO Esfuerzo Búsqueda Empleo .....	79
	CPO Creación de Vacantes .....	79
	Anexo B: Condiciones de Benveniste-Scheinkman.....	81
	Para Capital Físico .....	81
	Para Capital Humano.....	81
	Para Empleo .....	82
	Anexo C: Desarrollo Relaciones Intertemporales e Intratemporales Considerando Condiciones de Benveniste-Scheinkman .....	83
	Obtención de Ecuación 24 .....	83
	Obtención de Ecuación 25 .....	84
	Obtención de Ecuación 26 .....	85
	Anexo D: Desarrollo Ecuaciones de Senda de Crecimiento Balanceado.....	86
	Obtención de Ecuación 30 .....	86
	Obtención de Ecuación 31 .....	86
	Obtención de Ecuación 32 .....	87
	Obtención de Ecuación 33 .....	88
	Obtención de Ecuación 34 .....	90
	Obtención de Ecuación 35 .....	92
	Obtención de Ecuación 36 .....	93
	Anexo E: Relaciones Fundamentales de Equilibrio (ecuaciones auxiliares para Anexo D) .....	95

Anexo F: Análisis de Sensibilidad de Calibración ante Cambios en Factor, Elasticidad de Sustitución y Multiplicador de Habilidades para la Calibración de Estados Unidos .....	98
Sensibilidad ante Cambios en Factor $f$ .....	98
Sensibilidad ante Cambios en Parámetro de Capital Humano $\lambda$ .....	99
Sensibilidad ante Cambios en Elasticidad de Sustitución $\chi$ .....	100
Anexo G: Efecto de Grado de Complementariedad sobre Parámetros de Acumulación de Capital Humano.....	101
Anexo H: Obtención de Ecuación (59).....	104

# 1. Introducción

Existe consenso en la literatura de que el capital humano es una de las principales variables que permiten explicar el crecimiento económico (Rodríguez, 2017). En efecto los trabajos pioneros de crecimiento endógeno de Mankiw *et al.* (1992) y Lucas (1988) se basan en el rol del desarrollo del capital humano para explicar el crecimiento de largo plazo, siendo la educación uno de sus principales determinantes (Osio, 2019). La teoría indica que existirían dos mecanismos por el cual incide en el crecimiento económico: por un lado, el nivel de capital humano es un factor de producción, por otro lado, es una fuente primaria de mejora en productividad en la que se basaría el crecimiento económico (Hanushek & Woessmann, 2008).

La comprensión de la relevancia del desarrollo del capital humano sobre el crecimiento económico ha justificado que sea uno de los principales objetivos de la política pública en las últimas décadas en diversos países en todo el mundo (OECD, 2021). Los gobiernos han realizado importantes esfuerzos de inversión en políticas que han tenido por objetivo ampliar el acceso a la educación y capacitación de la población en todos sus niveles, procurando mejorar el estándar de calidad.

Con el objetivo de tener una mejor comprensión de los mecanismos por los cuales la política pública puede incidir en el desarrollo del capital humano se han formulado variados modelos que han permitido establecer distintas vías por las cuales el capital humano puede afectar la generación de ingresos y el crecimiento económico. Por ejemplo, Kaas y Zink (2011) establecen que existe espacio para la política pública para corregir la ineficiencia en la asignación de trabajadores en puestos de trabajo en función de su nivel habilidad ante la existencia de restricciones de crédito. En otro ámbito, pero relacionado también se han desarrollado modelos que han buscado explicar determinantes del nivel de gasto en capital humano, por ejemplo, Camargo y Stein (2022), a través de un modelo de votación, establecen que mayor restricción al crédito se relaciona negativamente con el nivel de gasto de gobierno en capital humano.

Por su parte, Chen, Chen y Wang (2011) desarrollaron un modelo que busca evaluar la efectividad de formas definidas de política de capital humano a través de un modelo de crecimiento endógeno de largo plazo en un marco de *search and matching*. Este trabajo busca poner el foco en cómo distintas formas de política de gasto en capital humano pueden afectar el equilibrio macroeconómico de largo plazo en un contexto en que el mercado laboral presenta fricciones de corto plazo. A partir de los resultados de la simulación del modelo, los autores dan gran importancia a las políticas enfocadas en la mejora de los incentivos del esfuerzo de aprendizaje de la capacitación *on the job*.

En general los trabajos que han buscado estudiar el vínculo entre capital humano y crecimiento económico han asumido que no es relevante distinguir entre los distintos factores que afectan el proceso de formación de habilidades. Esto quiere decir que la función de producción de capital humano no distingue entre las fuentes de generación de capital humano, lo que ha llevado a suponer que la tecnología de acumulación de capital humano tiene una forma funcional lineal, implicando la existencia de sustituibilidad perfecta entre sus componentes de inversión en capital humano, sin embargo, esta puede no ser la forma más precisa de modelar. Un ejemplo de esto es la evidencia

reportada por Cunha *et al.* (2006), que señala que existen distintos períodos sensibles y críticos en el proceso desarrollo de habilidades lo que implica que no se puede asumir que la inversión distintos períodos de formación de habilidades puedan sustituirse perfectamente entre sí. En vista de los hallazgos expuestos por la literatura, ignorar la complementariedad entre distintas fuentes de acumulación de capital humano puede cambiar completamente las decisiones de política que se tomen.

Los modelos macroeconómicos vinculados al capital humano han tendido a asumir este supuesto de sustituibilidad perfecta, lo que ha generado una brecha en la literatura. En vista de este hecho resulta pertinente incorporar nociones de complementariedad en la formación de habilidades a modelos que examinen política de gasto en capital humano y evaluar sus implicancias. Así, las preguntas de investigación que motivan esta tesis son:

- Considerando un modelo de crecimiento de largo plazo, ¿en qué medida podría afectar asumir una tecnología de acumulación de capital humano que incorpora complementariedad a la formación de habilidades, a variables como crecimiento económico, nivel de empleo y nivel de consumo?
- ¿Asumir cierto grado de complementariedad en la tecnología de formación de capital humano puede cambiar las decisiones de política de gasto en esta materia?

Esta tesis busca hacerse cargo de estas preguntas considerando un modelo de crecimiento endógeno basado en la acumulación de capital humano con fricciones en el mercado laboral. En concreto, se toma la modelación hecha por Chen *et al.* (2011), modificando la tecnología de sustituibilidad perfecta, por una que permite agregar complementariedad entre los *inputs* de la función de acumulación de capital humano basada en los trabajos de Cunha *et al.* (2006), y Cunha y Heckman (2007).

Calibrando para la economía de Estados Unidos y para Chile, las simulaciones de variación de parámetros exógenos de esta tesis muestran que al aumentar los grados de complementariedad en la tecnología de capital humano, el crecimiento económico, el nivel de empleo y el esfuerzo de aprendizaje tienden a perder capacidad de respuesta ante cambios exógenos en parámetros afectos a la política de capital humano y del mercado laboral. Esto implica que variables de interés como crecimiento económico y nivel de empleo tenderían, en el largo plazo, a ser más estables al exhibir mayor complementariedad. Por otro lado, los resultados de las simulaciones de política de capital humano que mantienen un presupuesto de gasto de gobierno balanceado, establecen que existen escenarios donde es preferible destinar recursos al mejoramiento del parámetro exógeno que no incide sobre el esfuerzo de aprendizaje, antes que invertir en el mejoramiento de parámetros de capacitación *on the job*. Estos resultados van en sentido contrario a lo visto en el trabajo de Chen *et al.* (2011), donde se asume perfecta sustituibilidad en la formación de capital humano. Por lo tanto se concluye que los supuestos asumidos sobre la tecnología de acumulación de capital humano pueden cambiar de forma relevante la decisión de política pública sobre el gasto en capital humano.

Este trabajo sigue de la siguiente forma. En la sección 2 se revisa la literatura asociada a esta tesis donde se exponen brevemente los marcos teóricos relacionados. En la sección 3 se presenta el

modelo que permite responder las preguntas de investigación planteadas en esta introducción. En la sección 4 se desarrolla la optimización del modelo y se presentan las ecuaciones que definen la senda de crecimiento balanceado. En la sección 5 se presentan los resultados de calibración para la economía estadounidense, la mecánica del modelo ante variaciones en parámetros exógenos, y la simulación de política de capital humano y sus repercusiones en bienestar. En la sección 6 se repite el ejercicio de la sección 5, pero considerando una calibración que simula la economía chilena. En la sección 7 se concluye.

## 2. Literatura Relacionada: Crecimiento de Largo Plazo, Fricciones en Mercado Laboral y Complementariedad en la Formación de Capital Humano

Esta tesis presenta vínculos con tres literaturas distintas, a saber, crecimiento económico de largo plazo y su vínculo con el capital humano; fricciones en el mercado laboral siguiendo el marco de análisis de Diamond (1982), Mortensen (1982) y Pissarides (1984); y, por último, con la tecnología de acumulación de capital humano de complementariedad dinámica basada en Cunha y Heckman (2007).

El punto de partida del estudio del crecimiento económico tomó como determinantes los factores productivos capital físico y fuerza laboral (Solow, 1956; Solow 1957). Más tarde, el trabajo de Uzawa (1965) fue uno de los primeros en incluir, bajo el marco conceptual desarrollado por Solow, al capital humano como uno de los determinantes del crecimiento de largo plazo; en específico, consideró al capital humano el responsable del crecimiento del parámetro tecnológico y, a su vez, uno de los determinantes de la productividad del trabajo. Pasaría un largo tiempo hasta que Lucas (1988) extendiera el modelo de Uzawa para concluir que el crecimiento del capital humano está relacionado con la calidad de la educación y el tiempo que las personas dedican al estudio. Luego, Lucas (2009) extendió su trabajo donde fundamenta que la escolaridad es una condición necesaria pero no suficiente para generar crecimiento sostenido en el tiempo, sino que es preciso explorar otras formas de capital humano para para integrarlos en el análisis. En efecto, estipula que es necesario que diferentes formas de capital humano interactúen en el trabajo (*on the job*), en vez de sólo la escolaridad (Rodríguez, 2017).

Por su parte, Romer (1986) siguiendo la idea de *learning-by-doing* de Arrow (1962) buscó explicar la manera en que puede existir crecimiento sostenido en base al supuesto de que el conocimiento (capital humano en términos de Uzawa) es un bien de capital intangible con productividad marginal creciente, pero que está acotado por los retornos marginales decrecientes en la tecnología de generación de conocimiento. Romer (1986) señala que su modelación, a diferencia de Uzawa (1965), presenta retornos crecientes a escala con lo que consigue un modelo con crecimiento de largo plazo.

Parte de la literatura ha buscado de complejizar el análisis de los determinantes del crecimiento de largo plazo mediante la integración de fricciones de corto plazo en el mercado laboral. La relevancia de la incorporación de estas fricciones pasa por la idea de que existen mecanismos de corto plazo que pueden afectar el crecimiento, y que, por lo tanto, hacen pertinentes políticas gubernamentales de estabilización macroeconómica con el fin de permitir tener tasas de crecimiento sostenidas (Laing *et al.*, 1995). Con este propósito una rama de la literatura ha tomado el marco conceptual de Diamond, Mortensen y Pissarides, que deja de lado el supuesto de que el mercado laboral es un mercado walrasiano, y en vez de esto, asume la existencia de una función de *matching* que determina estocásticamente el número de emparejamientos entre trabajadores desempleados y las vacantes ofrecidas por las firmas. En este marco conceptual, existe un

porcentaje constante de trabajadores, que permanece desempleado involuntariamente lo que permite explicar la existencia del desempleo friccional.

Siguiendo la línea de la incorporación de fricciones de corto plazo en el mercado laboral, la metodología de modelación de esta tesis se relaciona con la estructura de los modelos de búsqueda aplicados a ciclos económicos reales desarrollados por Merz (1995) y Andolfatto (1996). En principio, el objetivo de esta aproximación es hacerse cargo de algunos hechos estilizados que los modelos de ciclo económico real (Real Business Cycle o RBC) convencionales no logran integrar en su mecánica.

La incorporación de fricciones en el mercado laboral en reemplazo del supuesto walrasiano permite replicar la observación empírica de que los salarios tienden a no variar en ciclo económico al mismo ritmo de la productividad. En cambio, dado que las fricciones del mercado laboral provocan que los emparejamientos trabajador-empleador no sean inmediatos, su incorporación logra emular el hecho de que la productividad tiende a anteceder a las variaciones en el desempleo a lo largo del ciclo económico (Merz, 1995), y además, permite obtener la correlación negativa entre desempleo y número de vacantes (Andolfatto, 1996). Estos trabajos ponen el énfasis en estudiar la influencia de las fricciones de corto plazo con el fin de explicar los mecanismos de propagación de shocks tecnológicos sobre el ciclo económico real.

Como se mencionó en la introducción, esta tesis busca generalizar el trabajo de Chen *et al.* (2011), y en ese aspecto está sujeta a los mismos términos del trabajo en que se basa. Por un lado, esta modelación tiene la particularidad de ir en oposición a la teoría convencional del ciclo económico real que estipula cambios tecnológicos de largo plazo pueden provocar fluctuaciones del ciclo económico en el corto plazo. Al contrario, el modelo desarrollado aquí asume que las fricciones de corto plazo en el mercado laboral pueden influir en el equilibrio macroeconómico de largo plazo. Por otro lado, también se distingue de Andolfatto y Merz ya que en esta modelación no se busca estudiar mecanismos de propagación de shocks.

Dado el fuerte vínculo que existe entre la acumulación del capital humano y el mercado laboral, la relación entre capital humano, fuerza laboral y crecimiento es lógica, por lo que resulta natural integrar el marco de análisis de fricciones del mercado laboral con la literatura que toma al capital humano como uno de los principales motores del crecimiento económico. En esta línea se enmarca de manera temprana el trabajo de Laing *et al.* (1995). Los autores establecen una relación de dependencia entre escolaridad y capacidad de aprendizaje *on the job*, lo que determina el nivel de crecimiento económico. Los autores muestran que el nivel óptimo de inversión en educación depende, a fin de cuentas, de las fricciones de búsqueda y costos de entrada al mercado laboral por lo que se establece una relación, a través del nivel de escolaridad, entre las fricciones de corto plazo en el mercado laboral y crecimiento de largo plazo.

También de manera pionera, pero situando el énfasis en el vínculo entre crecimiento económico y desempleo de largo plazo mediado por la destrucción creativa, se encuentra el trabajo de Aghion y Howitt (1994). Los autores asumen que aumentos en el desarrollo de conocimientos productivos inducen mayores niveles de desempleo debido a la mayor rapidez con que la innovación industrial deja obsoletas ciertas actividades económicas al ser reemplazadas por otros métodos de

producción. Si las mejoras productivas provienen de un capital humano general (no específico a ciertas actividades económicas), la destrucción creativa no debería influir de manera relevante en el desempleo, pero si, en cambio, el crecimiento económico se basa en actividades específicas donde los nuevos empleos creados son los que generan las mejoras productivas, el conocimiento *on the job* tendería a quedar obsoleto provocando un aumento en el desempleo de largo plazo en caso que las fricciones en el mercado laboral se mantengan constantes.

Entendiendo el capital humano como un determinante del crecimiento económico, es lógico que se preste para el análisis de política pública. En particular, siguiendo un modelo de crecimiento con fricciones en el mercado laboral, Chen *et al.* (2011) buscaron centrar el análisis respecto a las posibilidades de la política pública sobre la acumulación de capital humano en el que distinguieron dos fuentes de acumulación. Por un lado, existe un componente de capacitación *on the job* que depende del esfuerzo endógeno de aprendizaje del trabajador que puede ser interpretado, en parte, como un resultado de la educación terciaria. Por otro lado, existe un componente exógeno de generación de capital humano que no depende de esfuerzo del trabajador y que puede interpretarse como un factor supeditado a la acumulación de experiencia laboral (Chen *et al.*, 2011).

La modelación de Chen *et al.* (2011) distingue dos tasas de acumulación de capital humano, donde la principal diferencia entre estas depende de si la generación de capital humano es una decisión del hogar o no. En ese sentido, los autores señalan que el nivel del componente que no depende del nivel de esfuerzo (la acumulación de experiencia laboral) puede pensarse como un *input* que refleja la formación de habilidades común para toda la población, lo que a grandes rasgos, puede modificarse mediante la educación formal obligatoria<sup>1</sup>. Los autores realizan un análisis numérico en base a la simulación de la economía de Estados Unidos donde consideran que ambas fuentes de acumulación de capital humano son susceptibles a ser modificadas por la política pública. A partir de sus resultados, concluyen que, en términos de crecimiento económico de largo plazo, en los escenarios dispuestos, será preferible promover la política de capital humano sobre el componente endógeno (capacitación *on the job*), antes que el exógeno (de experiencia laboral), debido al incentivo que provoca la política sobre el esfuerzo de aprendizaje.

En general los modelos económicos que incorporan el desarrollo del capital humano tienden a considerarlo un factor único donde se asume implícitamente que los *inputs* de la función de producción de habilidades son perfectamente sustituibles entre sí. Cunha y Heckman (2007) presentan como ejemplo de este tipo de modelación a Becker y Tomes (1986); Aiyagari, Greenwood y Seshadri (2002); y Benabou (2002). La modelación de Chen *et al.* (2011) sigue la línea de modelación de los ejemplos citados.

Una manera que ha encontrado la literatura para incorporar complementariedad en la función de acumulación de capital humano ha sido mediante reconocer el rol que juegan las distintas etapas de desarrollo. En efecto Cunha y Heckman (2007) señalan que un modelo que busque ser fidedigno

---

<sup>1</sup> Bajo esa línea argumental el nivel del componente exógeno puede interpretarse como un resultado de la educación preescolar, primaria y secundaria, en caso de que haya una norma que las haga obligatorias.

a la evidencia reportada por la literatura del desarrollo humano debe reconocer los siguientes puntos:

1. La influencia de los padres es un factor clave que determinan el desarrollo de su hijo.
2. Inversiones en capital humano en distintos períodos de desarrollo deben distinguirse entre sí, especialmente al considerar el período de la infancia.
3. Existe un *tradeoff* entre equidad y eficiencia para la inversión en edades tardías, pero no para inversión en edades tempranas de desarrollo.
4. Las habilidades son creadas, no sólo heredadas, y son múltiples en variedad. En su categorización más general se pueden distinguir habilidades cognitivas y habilidades no cognitivas.
5. La dicotomía tradicional entre habilidades adquiridas y habilidades innatas es errónea, porque ambas están sujetas a ser modificadas en su interacción con el ambiente.

Sustentado en los hechos reconocidos anteriormente, Cunha *et al.* (2006) desarrollan un modelo que tiene el propósito de explicar los hechos empíricos mencionados. De esta manera estipulan que la tecnología de acumulación de capital humano debe considerar una formulación multietápica, donde cada período reconoce una etapa del ciclo de formación de habilidades. Así, bajo este marco conceptual, el desarrollo de habilidades se genera de manera encadenada donde la inversión hecha en la etapa  $t$ , genera habilidades que serán útiles para la producción de habilidades de la etapa  $t + 1$  del desarrollo humano.

Esta tecnología presenta dos características:

1. *Autoproductividad*: Esta característica señala que el nivel de habilidad en  $t$  causa la producción de las habilidades en  $t + 1$ . Un ejemplo de esto se encuentra en el rol que juega la seguridad emocional como promotor de la curiosidad, lo que permite un aprendizaje robusto en edades tardías.
2. *Complementariedad dinámica*: Esta característica señala que las habilidades producidas en  $t$ , elevan la productividad de la inversión en habilidades en  $t + 1$ . Ejemplificándolo de manera simple, esto significa que es menos costoso enseñarle a una persona a utilizar el diccionario, si es que en una etapa previa se le enseñó a leer de manera efectiva.

De manera conjunta, la autoproduktividad y la complementariedad dinámica, implican que las habilidades de hoy producen las habilidades de mañana, por lo tanto, un alto nivel de inversión en  $t$ , produce un efecto multiplicador en la generación de habilidades, lo que a su vez significa que altos niveles de inversión en capital humano en edades tempranas, deben ser acompañados de altos niveles de inversión en edades tardías para que la inversión resulte globalmente efectiva. Una consecuencia inmediata es que es mucho más eficiente, cuando es posible, remediar carencias en capital humano en edades tempranas en comparación a remediarlo en edades tardías de desarrollo humano.

Si bien la modelación de la formación de capital humano de Cunha y Heckman está pensada principalmente períodos de la infancia, donde se reportan los mayores retornos debido al proceso en cadena descrito, existe evidencia de que, al menos para habilidades no cognitivas, esta

descripción de la formación del capital humano se extiende a la adolescencia e incluso hasta los primeros años de la segunda década de vida, donde el córtex prefrontal todavía es maleable (Dahl, 2004). En términos más amplios, Cunha *et al.* (2006) presentan variada evidencia que señala que es posible remediar en la adolescencia, a través de la escolaridad y programas enfocados a desarrollar habilidades no cognitivas, los déficits de inversión en habilidades de edades tempranas, sin embargo, las brechas entre aventajados y desaventajados tienden a mantenerse o agudizarse. Además, muestran que mientras más tardía sea la intervención, menor es el poder de acción de la remediación.

Otra manera de pensar la necesidad de incluir complementariedad entre los *inputs* de la tecnología de acumulación de capital humano es considerar la posible complementariedad entre capital humano general y capital humano específico. En efecto de manera análoga a lo desarrollado por Cunha y Heckman se puede argumentar que para adquirir de manera efectiva algún conocimiento laboral específico, es requerido tener habilidades y conocimientos generales que permitan luego facilitar la profundización del conocimiento. De este modo, se podría lograr mayor eficiencia de inversión en conocimiento específico, si es que se tienen adecuados conocimientos de carácter general, y al revés, para que la formación de capital general sea efectiva, debe ser acompañado por mayor inversión en capital humano específico.

En función de los objetivos de esta tesis, resulta fundamental considerar la complementariedad de los componentes de acumulación del capital humano en un modelo de crecimiento endógeno. Dado el fuerte vínculo entre el mercado laboral y la formación del capital humano, este trabajo incorpora la tecnología de Cunha y Heckman (2007) a un marco que permite la existencia de fricciones de corto plazo y con ello estudiar si puede afectar el equilibrio macroeconómico de largo plazo.

### 3. Modelo de Crecimiento Económico con Fricciones en el Mercado Laboral y Complementariedad en la Tecnología de Acumulación de Capital Humano

Considerando la revisión de literatura hecha en la sección 2, aquí se presentan las características estructurales del modelo, donde se describirán los supuestos y sus componentes. La mayor parte de este trabajo se basa en el marco conceptual desarrollado por Chen *et al.* (2011), donde se lleva a cabo la generalización de la tecnología de acumulación de capital humano que permite agregar complementariedad entre los factores de acumulación de capital humano. En primer lugar, se presentan los supuestos básicos del modelamiento. En segundo lugar, se describen los dos agentes que componen la economía (hogares y firmas) y sus características. En tercer lugar, se especifica la tecnología de acumulación de capital humano donde se incorpora la tecnología planteada por Cunha y Heckman (2007), siendo el elemento que distingue a esta tesis. Finalmente, se explican los supuestos el funcionamiento del mercado de bienes y del mercado laboral con fricciones.

#### 3.1. Supuestos Generales

- El tiempo es discreto.
- La economía es cerrada.
- Existe sólo un bien de consumo final en la economía.
- Existe un continuo de firmas idénticas competitivas cuya densidad es 1, que pueden modelarse mediante una gran firma representativa con retornos constantes de escala.
- Existe un continuo de hogares idénticos de vida infinita cuya densidad es 1, que puede modelarse mediante un gran hogar representativo que define las preferencias de las familias en la economía.
- Los agentes económicos son racionales y no hay incertidumbre respecto al futuro.
- Existen dos factores productivos propiedad de las familias: Capital físico  $k$  y Trabajo  $L$ , donde el trabajo puede ser potenciado mediante acumulación de capital humano  $h$ .
- Firms y hogares intercambian bienes y factores de producción en el mercado de factores.
- El mercado de bienes es walrasiano: el precio de mercado iguala oferta y demanda, permitiendo que el mercado se despeje.
- El mercado del capital es perfecto.
- El mercado del trabajo es imperfecto, presentando fricciones de búsqueda y *matching*, y donde se debe ejercer un esfuerzo de búsqueda de empleo, para tener posibilidad de encontrar trabajo.

#### 3.2. Firms

En cada período  $t$ , la firma representativa renta el capital  $k_t > 0$  a un precio competitivo  $r_{k_t} > 0$ . Contrata en el mercado laboral una masa de trabajo  $n_t \in (0,1)$  que exhibe un nivel de esfuerzo laboral  $\ell_t \in (0,1)$  y un nivel de capital humano  $h_t > 0$ , a un nivel de salario  $w_t > 0$  por trabajador para producir una cantidad de bien final  $y_t > 0$ .

### 3.2.1. Mecanismo de Creación de Vacantes

Por el lado de la firma, el proceso de contratación de trabajadores considera un costo de creación y mantención de vacantes abiertas  $v_t > 0$  en cada período. Este costo se puede pensar como el gasto necesario en recursos humanos para reclutar trabajadores y mantenerlos en la firma, es decir, gasto en posteo de vacantes, gasto de trámites y documentación de personal, gasto mantención de los espacios de trabajo, entre otros.

Dado que se interpreta como un gasto en recursos humanos, este costo de vacantes implica que parte de los trabajadores contratados deben utilizarse en recursos humanos. Es decir, no todos los trabajadores de la firma están destinados la producción del bien final, sino que una fracción  $\Phi(v_t)$  está comprometido únicamente a recursos humanos. Esto implica que el costo de creación de vacantes está modelado en términos de fuerza laboral lo que da una intuición a la búsqueda de datos para establecer la calibración del modelo. Este costo de creación de vacantes se expresa de la siguiente forma

$$\Phi(v_t) = \phi v_t^\varepsilon, \quad (1)$$

dónde  $\varepsilon > 1$  y  $\phi > 0$ . En esta expresión, el número de trabajadores destinados a recursos humanos  $\Phi(v_t)$ , es función del número de vacantes abiertas  $v_t$ ; un parámetro  $\phi$  que representa desplazamientos exógenos en este costo; y  $\varepsilon$  que representa el grado de convexidad de la función de costo de creación de vacantes.

### 3.2.2. Tecnología de Producción

La firma produce con tecnología Cobb-Douglas que presenta retornos constantes a escala de la siguiente forma:

$$y_t = Ak_t^\alpha [L_t]^{1-\alpha},$$

donde  $\alpha \in (0,1)$  es la participación del capital en la producción o elasticidad producto del capital,  $A > 0$  representa un parámetro de eficiencia tecnológica o productividad total de los factores,  $k_t$  representa la cantidad de factor capital utilizado en la producción en el período  $t$  y  $L_t > 0$  representa el factor trabajo utilizado en la producción en el período  $t$ . El factor trabajo  $L_t$  al descomponerse en esfuerzo laboral, capital humano, uso de trabajo y costo de creación de vacantes, queda definido por la siguiente ecuación:

$$L_t = (n_t - \phi v_t^\varepsilon) \ell_t h_t,$$

es decir, la cantidad utilizada de trabajo en la producción está compuesta por la masa laboral contratada  $n_t$ , menos el costo de contratación en términos de fuerza laboral  $\Phi(v_t) = \phi v_t^\varepsilon$ . En este modelamiento, la fuerza laboral utilizada en la producción está ponderada por el nivel de esfuerzo de trabajo  $\ell_t$  (elegido por los trabajadores) y el nivel de capital humano  $h_t$  que viene del proceso de optimización de los hogares. Por lo tanto, la función de producción queda expresada de la siguiente forma:

$$y_t = Ak_t^\alpha [(n_t - \phi v_t^\varepsilon) \ell_t h_t]^{1-\alpha}. \quad (2)$$

### 3.2.3. Precio del Capital y Relación con Razón Capital-Trabajo

Bajo el supuesto de competencia perfecta en el mercado del factor capital, el precio de renta del capital  $r_{k_t}$  debe ser igual al producto marginal del capital, por lo que obtenemos:

$$r_{k_t} = y_{t k_t} = A\alpha \left[ \frac{k_t}{(n_t - \Phi(v_t))\ell_t h_t} \right]^{\alpha-1}, \quad (3)$$

lo cual expresa que el retorno del capital es decreciente en la razón capital-trabajo.

En secciones posteriores será útil para explicar los determinantes del crecimiento de largo plazo obtener una expresión para la razón efectiva entre el capital y el trabajo  $q_t$  en función del precio del capital, por lo que se desarrollan las siguientes equivalencias:

$$q_t \equiv \frac{k_t}{(n_t - \Phi(v_t))\ell_t h_t} = \left( \frac{A\alpha}{r_{k_t}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (4)$$

### 3.3. Hogares

Siguiendo la idea de Lucas (1990), se propone un “gran hogar” representativo que refleja las preferencias unificadas de todos los miembros del hogar. Esto permite capturar la utilidad de un continuo de miembros del hogar, es decir, de la fracción empleados  $n_t$  y de la fracción de desempleados  $1 - n_t$ . El uso de este artificio tiene por finalidad simplificar el análisis, ya que evita seguir preferencias individuales de cada miembro específico en el hogar.

La utilidad del hogar representativo  $U(\cdot)$  depende del consumo conjunto  $c_t > 0$ , y de la cantidad de ocio del que gocen empleados y desempleados. Los miembros empleados del hogar dividen el total de su tiempo entre esfuerzo laboral  $\ell_t$ , esfuerzo de aprendizaje  $e_t \in (0,1)$  y ocio  $(1 - e_t - \ell_t)$ . Por su parte, los desempleados dividen su tiempo entre esfuerzo de búsqueda de empleo  $s_t \in (0,1)$ , y ocio  $(1 - s_t)$ .

La expresión matemática de la utilidad del hogar representativo en este modelo viene dada por:

$$U(c_t, \ell_t, e_t, s_t, n_t) = u(c_t) + n_t \Lambda^1(1 - \ell_t - e_t) + (1 - n_t) \Lambda^2(1 - s_t), \quad (5)$$

donde  $u(\cdot), \Lambda^1(\cdot), \Lambda^2(\cdot)$  son funciones crecientes y cóncavas.

Es pertinente indicar que las funciones  $\Lambda^1(\cdot), \Lambda^2(\cdot)$ , en general serán distintas, porque empleados y desempleados tenderán a valorar de forma distinta el ocio. En particular se esperaría que la fracción desempleada del hogar valore menos el ocio, porque es un ocio fruto de desempleo involuntario. Formas específicas de las funciones en (5), serán definidas en la sección 4.3.

Luego, la función objetivo que se busca maximizar es el valor presente de las utilidades del hogar representativo de vida infinita  $\Omega(\cdot)$ , donde se elige nivel de consumo  $c_t$ , esfuerzo de trabajo  $\ell_t$ , esfuerzo de aprendizaje  $e_t$ , esfuerzo de búsqueda de empleo  $s_t$  y nivel de empleo  $n_t$  quedando de la siguiente forma:

$$\Omega = \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^t U(c_t, \ell_t, e_t, s_t, n_t) , \quad (6)$$

con  $\rho > 0$  exógeno, el cual refleja la tasa subjetiva de preferencia temporal del hogar.

El problema de maximización de los hogares estará sujeto a tres restricciones: 1) restricción tecnológica de acumulación de capital humano, 2) ecuación de movimiento de empleo que incorpora tecnología de *matching* de creación de empleo; y 3) restricción presupuestaria. En las siguientes secciones se detalla las características de estas restricciones.

### 3.4. Tecnología de Acumulación de Capital Humano

Tomando la formulación original de Chen *et al.* (2011), y siguiendo el trabajo de Cunha *et al.* (2006), y de Cunha y Heckman (2007), se propone la siguiente tecnología de acumulación del capital humano:

$$h_{t+1} = (1 + [f\lambda(\zeta)^{\chi} + (f - f\lambda)(Dn_t e_t)^{\chi}]^{1/\chi}) h_t , \quad (7)$$

donde  $f\lambda(\zeta)^{\chi}$  determina la tasa exógena de acumulación de capital humano y  $(f - f\lambda)(Dn_t e_t)^{\chi}$  determina la tasa endógena de acumulación de capital humano compuesta por esfuerzo de aprendizaje y nivel de empleo. Los parámetros  $\zeta$  y  $D$  son modificables por la política pública. Específicamente,  $\zeta$  es un parámetro que representa la tasa de acumulación capital humano como resultado de la acumulación de experiencia laboral independiente del esfuerzo de aprendizaje, mientras que  $D$  es un parámetro que potencia el efecto de aumentos en esfuerzo de aprendizaje que forma el capital humano *on the job* mediante capacitaciones<sup>2</sup>.

Por su parte  $\lambda \in (0,1)$  representa la importancia relativa de las tasas de acumulación de habilidades. Este parámetro también se suele denominar “multiplicador de habilidades” en Cunha *et al.* (2006). Luego  $\chi \in (-\infty, 1]$  es el parámetro de complementariedad de la función CES. Por último,  $f > 0$  es un parámetro (factor) que normaliza la suma de los ponderadores que determinan el multiplicador de generación de habilidades.

La tecnología de formación de capital humano propuesta en (7) es un caso general de lo formulado por Chen *et. al* (2011). En ese trabajo, los autores utilizan una tecnología de acumulación de capital humano que determina la sustituibilidad perfecta de la inversión entre las dos fuentes de acumulación de capital humano. Esto implica que mejoras en  $\zeta$  puede remediar bajas tasas de inversión en  $D$  perfectamente. Sin embargo, este tipo de tecnología de formación de capital humano no corresponde con la evidencia empírica vista en la sección 2. En efecto, Cunha *et al.* (2006) muestran amplia evidencia que señala que la generación de capital humano no tiene por qué ser perfectamente sustituibles entre los *inputs* de formación de capital humano.

Es necesario notar que si fijamos los parámetros en  $f = 2$ ,  $\lambda = 0.5$  y  $\chi = 1$ , obtenemos

---

<sup>2</sup> La literatura hace referencia a “*training*” que en esta tesis se traduce como capacitación o entrenamiento laboral.

$$h_{t+1} = (1 + \zeta + Dn_t e_t)h_t, \quad (8)$$

lo que permite recuperar la tecnología de acumulación de capital humano formulada en *Chen et al.* (2011) que a su vez es una extensión de Lucas (1988,1993).

Con el fin de simplificar la notación asumiremos que la normalización de la suma de los ponderadores es  $f = 1$  a menos que se diga explícitamente lo contrario. Es decir, trabajaremos con la siguiente ecuación, que se corresponde con el planteamiento original de Cunha y Heckman (2007).

$$h_{t+1} = (1 + [\lambda(\zeta)^\chi + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^\chi]^{1/\chi})h_t \quad (9)$$

Esta formulación permite hacerse cargo de la pregunta de investigación de esta tesis, ya que posibilita, mediante variaciones del parámetro  $\chi$ , ajustar los grados de complementariedad de la tecnología de acumulación de capital humano y evaluar la sensibilidad de las variables macroeconómicas, donde  $\chi < 1$  consigue eliminar el supuesto de sustituibilidad perfecta entre los *inputs* de la tecnología de acumulación de capital humano asumida por *Chen et al.* (2011).

El parámetro  $\chi$  determina la facilidad para compensar bajas tasas de acumulación de capital humano exógena con producción de capital humano endógeno. Por lo tanto, representa el grado de complementariedad entre  $\zeta$  y  $Dn_t e_t$ , es decir, si  $\chi$  es pequeño, un bajo nivel de  $\zeta$  no es fácilmente sustituible por el nivel de  $Dn_t e_t$  en la producción de capital humano. Además, si  $\chi$  es pequeño, entonces niveles altos de tasas de acumulación endógena deberían complementarse con niveles altos de la tasa de acumulación exógena. La medida que se suele utilizar para evaluar el grado la complementariedad es la elasticidad de sustitución que para una función CES viene dada por  $\sigma_\chi \equiv 1/(1 - \chi)$ . Esta es una medida que denota qué tan fácil es sustituir entre los *inputs* de acumulación de capital humano. Mide cuánto debe ajustarse  $\zeta$  ante caídas en  $Dn_t e_t$  para mantener el nivel de acumulación de capital humano. Si  $\chi \rightarrow 1$ , entonces  $\sigma_\chi \rightarrow \infty$ , mientras que si  $\chi \rightarrow -\infty$ , entonces  $\sigma_\chi \rightarrow 0$ .

Por su parte, el parámetro  $\lambda$  corresponde al multiplicador de habilidad que revela que la productividad de  $\zeta$  mejora el nivel de capital humano a través de la autoproduktividad y la complementariedad dinámica mencionadas en la sección 2. Es un parámetro exógeno que determina la importancia relativa en la formación de capital humano de cada una de las tasas. Es necesario hacer notar que la literatura de formación de habilidades establece que  $\lambda$  debería pertenecer al rango (0.5, 1), ya que este rango de valores refleja que el desarrollo de habilidades en etapas tempranas de desarrollo, tienen un mayor impacto en la generación de capital humano que el desarrollo de capital humano en edades tardías<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> En beneficio del ejercicio de simulación, asumiremos que la tasa exógena puede ser modificada en cierto grado mediante políticas sobre escolaridad obligatoria, y la tasa endógena se puede modificar hasta cierto punto mediante políticas sobre educación terciaria lo que implicaría que  $\lambda \in (0.5, 1)$ .

### 3.5. Fricciones del Mercado Laboral y Evolución del Empleo

Con el propósito de incorporar fricciones de entrada de empleo se debe especificar una función de emparejamiento o *matching function*. Siguiendo a Chen *et al.* (2011), se adopta el enfoque de Diamond (1982) en el cual el número de emparejamientos exitosos depende del grado de “estrechez” del mercado (*market tightness*), esto es, la razón entre número de vacantes  $v_t$  y el número de desempleados buscando empleo  $(1 - n_t)$ . En el caso específico de este modelo, dado que los desempleados pueden elegir su nivel de esfuerzo de búsqueda  $s_t$ , la medida de estrechez  $\theta_t > 0$  del mercado laboral debe ser ponderada por la intensidad de búsqueda, por lo que toma la siguiente forma:

$$\theta_t \equiv \frac{s_t(1 - n_t)}{v_t} .$$

A partir de lo anterior, y asumiendo retornos constantes de escala en la función de emparejamiento, el número de emparejamientos en cada período  $m_t > 0$  se determina por:

$$m_t = B[s_t(1 - n_t)]^\beta v_t^{1-\beta} , \quad (10)$$

donde  $B > 0$  es un parámetro exógeno de eficiencia de emparejamiento entre buscadores de empleo y puestos de trabajo, y  $\beta \in (0,1)$  es el parámetro que define la elasticidad de la función de *matching* asociada a los trabajadores.

A continuación, se determina la ecuación del movimiento del empleo. Se consideran  $\psi > 0$  la tasa exógena de destrucción de empleo o probabilidad de que un *match* se rompa (*separation rate*),  $\eta_t \equiv \frac{m_t}{v_t}$  la tasa de contratación de la firma (*recruitment rate*), y  $\mu_t \equiv \frac{m_t}{s_t(1-n_t)}$  la tasa a la que se encuentra trabajo o probabilidad de creación de empleo (*job finding rate*). Dado que cada vacante puede ser ocupada sólo por un trabajador, el flujo de entrada de trabajadores queda determinado por  $m_t$ , y el flujo de salida de trabajadores queda determinado por  $\psi n_t$ . De lo anterior tenemos que la evolución del empleo en la economía es:

$$n_{t+1} - n_t = m_t - \psi n_t .$$

Luego despejando  $n_{t+1}$  obtenemos

$$n_{t+1} = m_t + (1 - \psi)n_t , \quad (11)$$

a continuación, reemplazamos (10) en (11) para conseguir la ecuación que define la evolución del empleo

$$n_{t+1} = B[s_t(1 - n_t)]^\beta v_t^{1-\beta} + (1 - \psi)n_t . \quad (12)$$

### 3.6. Mercado de Bienes

Por simplicidad, la economía consta de sólo un bien final de consumo. Se asume un mercado walrasiano por lo que la demanda agregada del bien debe igualar la oferta agregada, es decir el gasto conjunto de los hogares debe igualar a la producción total de la economía

$$c_t + [k_{t+1} - (1 - \delta)k_t] = Ak_t^\alpha [(n_t - \phi v_t^\varepsilon) \ell_t h_t]^{1-\alpha}, \quad (13)$$

donde  $\delta \in (0,1)$  es la tasa de depreciación del capital físico.

El lado izquierdo de la ecuación (13), la demanda agregada, considera la suma del consumo más la inversión bruta menos la depreciación. El lado derecho considera el resultado de la función de producción.

El modelamiento propuesto en esta sección sigue muy de cerca al modelo de Chen *et al.* (2011), distinguiéndose sólo por la generalización de la tecnología de acumulación de capital humano vista en 3.4. Esto implica que lo propuesto aquí tiene directa relación con ese trabajo y por lo tanto sus resultados son comparables con los de esta tesis.

## 4. Optimización y Equilibrio de Estado Estacionario

El principal objetivo de este trabajo es contrastar dos políticas de capital humano, una que favorece a la tasa de acumulación exógena, y otra que busca favorecer a la tasa de acumulación endógena<sup>4</sup>. Este tipo de intervenciones sólo inciden en la tecnología de acumulación de capital humano y no en las restricciones de los hogares y las firmas, por lo tanto es posible hacer el análisis de equilibrio general resolviendo el pseudo problema del Planificador Social<sup>5</sup>. La factibilidad de este enfoque de análisis se basa en que se cumple la condición de Hosios (1990), esto es, que el poder de negociación de los trabajadores  $\beta$  iguale a la elasticidad de la función de emparejamiento.

Evidentemente sería muy inusual que en una economía la condición de Hosios se cumpla y que, por lo tanto, opere la propiedad descrita anteriormente. Sin embargo, asumir el cumplimiento de esta condición es conveniente por al menos dos motivos. En primer lugar, permite establecer un punto de referencia de eficiencia, porque la resolución del pseudo problema del planificador social asegura el óptimo de eficiencia económica (Hosios, 1990), implicando que los resultados de política deben considerarse como un resultado en “el mejor de los mundos”. En segundo lugar, el cumplimiento de esta condición posibilita simplificar los pasos de análisis, ya que en vez de resolver el equilibrio descentralizado en el cual cada agente de la economía (hogares y firmas) resuelven su problema económico de manera independiente, es posible obtener el equilibrio descentralizado mediante la resolución del problema de un planificador social.

En lo que sigue de esta sección, se procederá de la siguiente forma. Primero se planteará el problema y se derivarán las condiciones de optimización del pseudo problema del planificador social. Además, se derivarán las condiciones de Benveniste-Scheinkman (teorema de la envolvente) con el fin de obtener valores del equilibrio de la senda de crecimiento balanceado (*balanced growth path*) que permitirá mejorar la exposición del análisis posterior. Luego, se explicarán las relaciones fundamentales de equilibrio que definen el modelo. Finalmente se definirán la dinámica del equilibrio junto con el equilibrio de crecimiento balanceado.

### 4.1. Optimización

#### 4.1.1. Pseudoproblema del Planificador Social

La resolución del problema del planificador social se resuelve mediante programación dinámica. De este modo, se plantea la siguiente ecuación de Bellman;

$$\Omega(k_t, h_t, n_t) = \max_{c_t, \ell_t, e_t, s_t, v_t} U(c_t, \ell_t, e_t, s_t, n_t) + \frac{1}{1+\rho} \Omega(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}), \quad (14)$$

---

<sup>4</sup> Esta categorización proviene directamente de Chen *et al.* (2011) donde denominan a estos dos tipos de política como “mejoramiento de experiencia laboral” y “mejoramiento de capacitación *on the job*”, respectivamente.

<sup>5</sup> El problema de optimización es un “pseudo” problema debido a que el planificador social no puede elegir de forma discrecional la búsqueda y emparejamiento entre trabajadores y vacantes. Además, toma los precios como dados al momento de considerar programas de política pública.

sujeto a restricciones tecnológicas y walrasiana (9),(12) y (13), a las de no negatividad y a las condiciones de valores iniciales  $h = h_0$ ,  $k = k_0$ . Es pertinente hacer notar que en este caso sólo hay una función valor a optimizar, la que considera el bienestar de los hogares.

#### 4.1.2. Condiciones de Primer Orden

Para facilitar la exposición, primero se define el valor marginal del capital humano acumulado para el  $t$  y  $t+1$ .

$$MVH_t \equiv \Omega_h(k_t, h_t, n_t) \quad , \quad MVH_{t+1} \equiv \frac{\Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} ;$$

y se define el valor marginal del empleo para  $t$  y  $t + 1$

$$MVN_t \equiv \Omega_n(k_t, h_t, n_t) \quad , \quad MVN_{t+1} \equiv \frac{\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} .$$

Se optimiza respecto al consumo  $c$ , esfuerzo de trabajo  $\ell$ , esfuerzo de aprendizaje  $e$ , intensidad de búsqueda de trabajo  $s$  y creación de vacantes de trabajo  $v$ :

#### C.P.O Consumo

$$\frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial c} = U_c + \frac{\Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} (-1) = 0 , \quad (15)$$

#### C.P.O. Esfuerzo Laboral

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial \ell} &= U_\ell + \frac{\Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} (1 - \alpha) A k_t^\alpha [(n_t - \Phi(v_t)) h_t]^{(1-\alpha)} \ell_t^{-\alpha} = 0 , \\ -U_\ell &= \frac{\Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} (1 - \alpha) A q_t^\alpha [(n_t - \Phi(v_t)) h_t] . \end{aligned} \quad (16)$$

#### C.P.O Esfuerzo de Aprendizaje

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial e} &= U_e + \frac{\Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} \frac{\partial h_{t+1}}{\partial e_t} = 0 , \\ \frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial e} &= U_e + \frac{\Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} \frac{\partial}{\partial e_t} \left( (1 + [\lambda(\zeta)^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x]^{1/x}) h_t \right) = 0 , \\ -U_e &= \frac{\Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} h_t (1 - \lambda) (Dn_t)^x e_t^{x-1} (\lambda \zeta^x + (1 - \lambda) (Dn_t e_t)^x)^{\frac{(1-x)}{x}} , \end{aligned} \quad (17)$$

## C.P.O Esfuerzo de Búsqueda de Empleo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial s} &= U_s + \frac{\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} B \beta [1 - n_t]^\beta v_t^{1-\beta} s_t^{\beta-1} = 0, \\ -U_s &= \frac{\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} \mu_t \beta (1 - n_t). \end{aligned} \quad (18)$$

## C.P.O Creación de Vacantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial v} &= \frac{\Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} A k_t^\alpha (\ell_t h_t)^{(1-\alpha)} (1 - \alpha) (n_t - \Phi(v_t))^{-\alpha} (-\Phi_v(v_t)) \\ &\quad + \frac{\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} \left[ B [s_t (1 - n_t)]^\beta v_t^{1-\beta} v^{-1} (1 - \beta) \right] = 0, \\ U_c (1 - \alpha) A q_t^\alpha \ell_t h_t (\Phi_v(v_t)) &= \frac{\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} [\eta_t (1 - \beta)], \end{aligned} \quad (19)$$

de las condiciones de primer orden<sup>6</sup>, obtenemos las siguientes relaciones intertemporales e intratemporales.

$$-\frac{U_\ell}{U_c} = (1 - \alpha) A q_t^\alpha [(n_t - \Phi(v_t)) h_t], \quad (20)$$

$$-U_e = MVH_{t+1} h_t (1 - \lambda) (Dn_t)^\chi e_t^{\chi-1} (\lambda \zeta^\chi + (1 - \lambda) (Dn_t e_t)^\chi)^{(1-\chi)/\chi}, \quad (21)$$

$$-U_s = \frac{\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} \mu_t \beta (1 - n_t), \quad (22)$$

$$U_c (1 - \alpha) A q_t^\alpha \ell_t h_t (\Phi_v(v_t)) = MVN_{t+1} [\eta_t (1 - \beta)]. \quad (23)$$

La ecuación (20) se obtiene de dividir la ecuación (16) por la ecuación (15). Esta igualdad refleja el *tradeoff* existente entre el consumo y el ocio, es decir, refleja la decisión de cuánto tiempo el hogar destina tiempo al esfuerzo de trabajo que determina el nivel de consumo, por contrapartida del tiempo dedicado al ocio. El lado izquierdo muestra la tasa marginal de sustitución entre el consumo y el esfuerzo de trabajo, mientras que el lado derecho muestra el costo relativo, en términos de producto marginal, de aumentar el consumo o el esfuerzo de trabajo.

La ecuación (21) se obtiene de desarrollar y reorganizar la ecuación (17) y de incorporar la definición  $MVH_{t+1} \equiv \frac{\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho}$ . Esta ecuación muestra el *tradeoff* entre sacrificar utilidad de tiempo de ocio con el fin de destinarlo a aumentar el nivel de aprendizaje, y el beneficio en producto debido al aumento de capital humano futuro. El lado izquierdo representa la utilidad sacrificada

<sup>6</sup> Derivación detallada de ecuaciones en anexo A.

por el ocio perdido, mientras que el lado derecho representa la ganancia neta del esfuerzo de aprendizaje.

La ecuación (22) se obtiene directamente de la ecuación (18) al añadir la definición  $MVN_{t+1} \equiv \frac{\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1+\rho}$ . Esta ecuación muestra el *tradeoff* entre sacrificar utilidad de tiempo de ocio de los individuos desempleados del hogar con el fin de destinarlo al nivel de esfuerzo de buscar empleo  $s_t$ , y el beneficio en producto  $\mu_t \beta (1 - n_t)$  debido al aumento del nivel de empleo futuro. El lado izquierdo representa la utilidad sacrificada por el ocio perdido, mientras que el lado derecho representa la ganancia neta del esfuerzo de búsqueda de empleo.

La ecuación (23) se obtiene de reemplazar la ecuación (15) en (19), y añadir la definición  $MVN_{t+1} \equiv \frac{\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1+\rho}$ . Representa el problema del planificador social sobre la elección óptima de apertura de vacantes. Para interpretar correctamente esta ecuación debemos tener en consideración que  $\eta_t (1 - \beta)$  representa el aumento en empleo debido al aumento de vacantes abiertas para el reclutamiento de trabajadores, y que, por otro lado,  $(1 - \alpha) A q_t^\alpha \ell_t h_t (\Phi_v(v_t))$  denota el costo marginal de creación de vacantes en términos de producción debido a la pérdida de trabajadores en producción. Por lo tanto, esta ecuación indica que el beneficio marginal de tener una vacante abierta debe igualar el costo marginal de mantener la vacante abierta.

#### 4.1.3. Condiciones de Benveniste-Scheinkman

Con el propósito de tener las ecuaciones suficientes para definir las variables endógenas del modelo, se obtienen las condiciones de Benveniste-Scheinkman, que determinan los stocks de capital y el nivel de empleo  $(k, h, n)$ .

##### Para el Capital Físico

$$\frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial k_t} = \frac{\partial U(c_t, \ell_t, e_t, s_t, n_t)}{\partial k_t} + \frac{1}{1+\rho} \frac{\partial \Omega(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{\partial k_t} .$$

##### Para el Capital Humano

$$\frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial h_t} = \frac{\partial U(c_t, \ell_t, e_t, s_t, n_t)}{\partial h_t} + \frac{1}{1+\rho} \frac{\partial \Omega(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{\partial h_t} .$$

##### Para el Empleo

$$\frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial n_t} = \frac{\partial U(c_t, \ell_t, e_t, s_t, n_t)}{\partial n_t} + \frac{1}{1+\rho} \frac{\partial \Omega(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{\partial n_t} .$$

El desarrollo de las tres ecuaciones anteriores se presenta en el anexo B. Luego combinando el desarrollo de las condiciones de Benveniste-Scheinkman (B.1) – (B.3) y la Condiciones de Primer Orden (15)-(19), se obtienen las siguientes ecuaciones<sup>7</sup>:

<sup>7</sup> Ver desarrollo en anexo C.

$$(1 + \rho) \frac{U_{c_t}}{U_{c_{t+1}}} = [(1 - \delta) + \alpha A q_{t+1}^{(\alpha-1)}] , \quad (24)$$

$$h_t MVH_t = - \frac{U_e \left( 1 + [\lambda(\zeta)^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x]^{\frac{1}{x}} \right) e_t}{(1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x (\lambda(\zeta)^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x)^{\frac{(1-x)}{x}}} - \ell_t U_\ell , \quad (25)$$

$$MVN_t \cdot n_t = n_t U_n + \left[ - \frac{n_t U_\ell \ell_t}{[(n_t - \Phi(v_t))]} - U_e e_t - \frac{n_t U_s}{\mu \beta (1 - n_t)} (1 - \psi - s_t \beta \mu_t) \right]. \quad (26)$$

La ecuación (24) gobierna las decisiones de ahorro-consumo. El lado izquierdo representa la tasa marginal de sustitución de consumo intertemporal, mientras que el lado derecho representa la tasa de retorno del capital. A mayor retorno del capital, los individuos tienen mayores incentivos a ahorrar, aumentando el consumo futuro mediante la inversión.

La ecuación (25) describe la evolución temporal del capital humano. En equilibrio, la valoración depende de la tecnología de acumulación de capital humano. Si  $\chi = 1$ ,  $\lambda = 0.5$  y  $f = 2$ , se recupera la ecuación que gobierna el capital humano de Chen *et al.* (2011)

$$h_t MVH_t = - \frac{U_e (1 + \zeta) e_t}{Dn_t e_t} - \ell_t U_\ell .$$

La ecuación (26) describe la evolución del empleo en el tiempo, el cual consta de cuatro factores. Depende positivamente de la utilidad marginal de los empleados; negativamente de del esfuerzo laboral de los empleados; negativamente del esfuerzo de aprendizaje de los empleados; y negativamente del esfuerzo de búsqueda de empleo.

#### 4.2. Senda de Crecimiento Balanceado (SCB)

Para el desarrollo analítico, desde aquí en adelante, se especifican las formas funcionales de la función de bienestar del hogar (5), siguiendo lo propuesto por Chen *et al.* (2011):

$$u(c_t) = \ln(c_t) ; \quad \Lambda^1(1 - l_t - e_t) = \frac{\gamma_1(1 - l_t - e_t)^{1-\sigma}}{1-\sigma} ; \quad \Lambda^2(1 - s_t) = \frac{\gamma_2(1 - s_t)^{1-\sigma}}{1-\sigma} .$$

Donde  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_2 > 0$ ,  $\sigma > 0$ , con lo que obtenemos

$$U(c_t, \ell_t, e_t, s_t, n_t) = \ln(c_t) + n_t \frac{\gamma_1(1 - l_t - e_t)^{1-\sigma}}{1 - \sigma} + (1 - n_t) \frac{\gamma_2(1 - s_t)^{1-\sigma}}{1 - \sigma} . \quad (27)$$

Bajo esta forma funcional es conveniente para simplificar la notación, definir la razón de la utilidad marginal entre el ocio de los empleados y el ocio de los desempleados.

$$R \equiv \frac{\gamma_1(1 - l_t - e_t)^{-\sigma}}{\gamma_2(1 - s_t)^{-\sigma}} \quad (28)$$

Con el objeto de realizar el análisis de crecimiento de largo plazo, se pone el foco en la senda de crecimiento balanceado (SCB). El modelo presenta crecimiento perpetuo debido a la acumulación de capital humano, por lo que se trabaja con las variables en razones estacionarias que definen la senda de crecimiento balanceado en la cual consumo, capital físico, capital humano y producto crecen a tasa constante. Considerando que la función de producción es homogénea de grado uno en los factores productivos y que la tecnología de capital humano es lineal en  $h$ , las variables mencionadas crecen de manera perpetua a la misma tasa constante  $g$ , mientras otras variables y parámetros se mantienen en valores constantes.

Las tres formas funcionales son estrictamente crecientes y cóncavas. En el caso particular de las funciones de utilidad del ocio de empleados y desempleados, sólo se distinguen por los parámetros  $\gamma$ . En específico, existen al menos dos motivos que justifican que los empleados valoren más el ocio que los desempleados, es decir, que  $\gamma_1 > \gamma_2$ . Por un lado, los empleados tienen una decisión más compleja que los desempleados. En efecto, los empleados tienen tres opciones en las que distribuir su tiempo (ocio, esfuerzo de trabajo  $\ell$ , o esfuerzo de aprendizaje  $e$ ), mientras que el desempleado sólo debe decidir entre cuánto esfuerzo  $s$  dedicar a la búsqueda de empleo, y cuánto al ocio. Por lo tanto, el costo de oportunidad del ocio sería mayor para los empleados. El segundo motivo que justifica la distinta valoración del ocio es el hecho de que el ocio de los desempleados es fruto de un desempleo involuntario, dando coherencia a que los desempleados valoren menos el ocio que los empleados.

A partir de la construcción de la SCB de la economía, se derivará el equilibrio de estado estacionario. Este equilibrio estará determinado por la razón producto-capital humano  $y/h$ , la razón consumo-capital humano  $c/h$ , nivel de esfuerzo de trabajo  $\ell$ , nivel de esfuerzo de aprendizaje  $e$ , nivel de esfuerzo de búsqueda de empleo  $s$ , razón stock de capital físico-capital humano  $k/h$ , nivel de empleo  $n$ , número de emparejamientos del mercado laboral  $m$  y retorno del capital  $r_k$ . Como se mencionó antes, simultáneamente, consumo, producto, capital físico y humano crecen a tasa común y constante  $g$ . No está de más recordar que en estado estacionario las variables no dependen del tiempo, por lo que no tiene propósito escribir el subíndice  $t$ .

El equilibrio dinámico requiere que se cumplan las siguientes condiciones:

- La función de producción está dada por (2).
- Los agentes de la economía toman decisiones óptimas, es decir, se cumplen (20)-(23) y (24)-(26).
- Capital humano evoluciona de acuerdo con (9).
- El empleo evoluciona de acuerdo con (12).
- La razón capital trabajo está representado por (4).
- El proceso de emparejamiento en el mercado laboral satisface (10).
- El mercado de bienes se despeja cumpliendo la ley de Walras, es decir, se satisface (13).

En primer lugar, se construye la relación que existe entre desempleo y vacantes (Curva de Beveridge), a lo largo de la SCB, la cual, en estado estacionario, debe satisfacer el equilibrio de emparejamiento entre número vacantes abiertas y número de desempleados. En particular, en el

caso de este modelo, la Curva de Beveridge establece un vínculo entre número de vacantes  $v$ , tasa de desempleo ampliada  $u \equiv (s(1 - n))$ , tasa a la que se encuentra trabajo  $\mu$ , tasa de destrucción de empleo  $\psi$ , esfuerzo de búsqueda de empleo  $s$ , parámetro de eficiencia de pareo  $B$  y tasa de reclutamiento  $\eta$ , de la siguiente manera:

$$\psi n = \mu s(1 - n) = \eta v = B[s(1 - n)]^\beta v^{(1-\beta)}. \quad (29)$$

Es decir, en estado estacionario el flujo de destrucción de empleo ( $\psi n$ ), debe igualar el flujo de creación de empleo considerando el flujo de trabajadores ( $\mu s(1 - n)$ ), y además debe igualar el flujo de creación de vacantes ( $\eta v$ ), que deben igualar el total de emparejamientos generados ( $m \equiv [s(1 - n)]^\beta v^{(1-\beta)}$ ).

Luego, podemos reescribir la ecuación que define la tecnología de capital humano (9) y obtener<sup>8</sup>:

$$e = \frac{1}{Dn} \left( \frac{g^\lambda - \lambda \zeta^\lambda}{(1-\lambda)} \right)^{1/\lambda}. \quad (30)$$

Luego, al reordenar la condición de despeje de los mercados (13) y aplicando las propiedades de la SCB, podemos obtener<sup>9</sup>:

$$\frac{c}{h} = (Aq^\alpha - q(\delta + g))(n - \Phi(v))\ell. \quad (31)$$

Esta expresión define una relación estacionaria entre el consumo y el capital humano. Continuando, a partir de la ecuación (24) es directo obtener<sup>10</sup>

$$g = \frac{r_k - \rho - \delta}{1 + \rho}. \quad (32)$$

Esta relación responde a la regla de Keynes-Ramsey para el incremento del consumo, que establece que el consumo aumentará en el tiempo siempre que el retorno del capital sea mayor a la tasa de descuento subjetiva  $\rho$  más la tasa de depreciación del capital  $\delta$ .

Para seguir el análisis del comportamiento de las variables en la SCB es necesario determinar las relaciones entre las valoraciones marginales del capital, capital humano y el empleo las cuales se calculan en el anexo E.

La obtención de las siguientes ecuaciones se encuentra en el anexo D, el cual se apoya en el anexo E.

<sup>8</sup> Derivación de esta ecuación en anexo D.

<sup>9</sup> Derivación de esta ecuación en anexo D.

<sup>10</sup> Derivación de esta ecuación en anexo D.

$$\rho + \rho g = (1 - \lambda) Dn \left( \frac{g^\lambda - \lambda \zeta^\lambda}{(1 - \lambda)} \right)^{(\lambda-1)/\lambda} g^{(1-\lambda)} \ell \quad (33)$$

$$\frac{\rho + \psi}{\mu \beta} + \frac{1 - s\sigma}{1 - \sigma} = R \left( \frac{(1 - \ell - \sigma e)}{(1 - \sigma)} + \frac{n\ell}{[(n - \Phi(v))]} \right) \quad (34)$$

$$R \frac{\ell \Phi_v(v) n}{(n - \Phi(v))} = \frac{\eta(1 - \beta)}{\mu \beta} \quad (35)$$

$$(1 - \ell - e)^{-\sigma} \gamma_1 n = \frac{(\delta + g + (1 + g)\rho)}{\rho(1 + g) + (1 - \alpha)(\delta + g)} \frac{(1 - \alpha)}{\ell} \quad (36)$$

La ecuación (33) está basada en la ecuación de acumulación del capital humano; la ecuación (34) se basa en la evolución intertemporal del empleo; mientras que la ecuación (35) se basa en el *tradeoff* de la creación de vacantes. Finalmente, la ecuación (36) es requerida para solucionar el sistema de ecuaciones que de fine la SCB y junto con (34) facilitará el análisis posterior.

## 5. Análisis Numérico para Estados Unidos

El estudio del modelo se realizará mediante el análisis numérico. En primer lugar, se procederá con la calibración para la economía de Estados Unidos. En segunda instancia, se replicarán los resultados de Chen *et al.* (2011) para Estados Unidos. En tercer lugar, se realizará un análisis de sensibilidad ante cambios en elasticidad de sustitución y el multiplicador de habilidades. En cuarto lugar, se efectuará un análisis de variación de parámetros exógenos sobre variables clave del modelo. Finalmente se proponen y ejecutan dos políticas de capital humano sujeto a el cumplimiento de la restricción presupuestaria del gobierno.

### 5.1. Calibración

Chen *et al.* (2011) calibran los valores de los parámetros para simular los datos trimestrales de la economía de Estados Unidos en el período 1951-2003. Para comenzar, establecen los valores de referencia para Estados Unidos presentados en la tabla 1.

Tabla 1: Valores de parámetros de calibración para Estados Unidos

Parámetro de Referencia	Símbolo	Valor
Tasa de crecimiento económico per cápita	$g$	0.0045
Tasa depreciación capital	$\delta$	0.02
Tasa de descuento intertemporal subjetiva	$\rho$	0.01
Razón stock capital físico-capital humano	$k/h$	1
Fracción del tiempo destinado a trabajo	$\ell$	0.32
Fracción del tiempo destinado a aprendizaje	$e$	0.08
Participación capital en producto	$\alpha$	0.36
Participación del trabajador en función de matching	$\beta$	0.72
Tasa de destrucción de empleo	$\psi$	0.0986
Tasa a la que se encuentra trabajo	$\mu$	0.8334
Tasa de participación laboral	$n+u$	0.615
Medida de desempleo	$u$	0.065
Razón de vacantes abiertas - búsqueda de empleo	$v/u$	1
Elasticidad oferta trabajo	$(1/\ell - 1) / \sigma$	1.1
Costo de creación de vacante por empleado	$\Phi(v)/n$	0.025

El crecimiento trimestral del PIB se cuantifica en  $g = 0.0045$ , y la depreciación trimestral se establece en  $\delta = 0.02$ . Siguiendo a Kydland y Prescott (1991), la tasa subjetiva de preferencia intertemporal se asume  $\rho = 0.01$ , siendo un supuesto muy utilizado en la literatura macroeconómica. Luego se asume que la razón entre el capital físico y humano es  $k/h = 1$ . Chen *et al.* (2011), a través del uso de la Encuesta de Uso de Tiempo Estadounidense, establecen que un hombre promedio dedica una fracción  $\ell = 0.32$  de su tiempo diario al trabajo, y que el 60% del tiempo lo dedica al ocio, por lo tanto, el tiempo promedio dedicado al aprendizaje se establece en  $e = 1 - 0.32 - 0.6 = 0.08$ . Se asume la participación del capital en  $\alpha = 0.36$ , luego basado en Shimer (2005) el parámetro de elasticidad de los trabajadores de la función de emparejamiento se establece en  $\beta = 0.72$ , la tasa trimestral de destrucción empleo en  $\psi = 0.986$ , la tasa a la que se

encuentra trabajo  $\mu = 0.834$  y la razón entre la creación de vacantes y tasa de desempleo  $v/u = 1$ . A partir de datos históricos se establece la fuerza laboral en  $n + u = 61.5\%$ .

Se selecciona el valor  $\sigma = 1.93$  para alcanzar una elasticidad de oferta laboral de  $(1/0.32 - 1)/1.93 = 1.1$  lo cual de acuerdo con Chen *et al.* (2011), va en línea con la literatura macroeconómica. Finalmente, se fija el costo de creación de vacantes por empleado en  $\Phi(v)/n = 2.5\%$ , lo que permitirá calcular los parámetros  $\varepsilon$  y  $\phi$  de la función de costo de vacante.

A partir de los valores de calibración se puede obtener el resto de los parámetros y variables del modelo que permitirá realizar las simulaciones. En la tabla 2 se presentan los valores calculados.

Tabla 2: Valores calibrados a partir de parámetros de calibración para Estados Unidos

Variable calibrada	Símbolo	Valor
Parámetro de eficiencia productiva	$A$	0.2965
Parámetro de eficiencia de matching	$B$	0.8336
Razón capital-producto	$k/y$	10.4212
Razón consumo-producto	$c/y$	0.7447
Razón consumo-capital humano	$c/h$	0.0715
Parámetro de costo de creación de vacante	$\phi$	6.0729
Tasa de retorno del capital	$r_k$	0.0345
Elasticidad de sustitución del ocio	$\sigma$	1.9318
Medida de desempleo	$u$	0.065
Fracción población dedicada al empleo	$n$	0.55
Intensidad de búsqueda de empleo	$s$	0.1445
Creación de vacante	$v$	0.065
Elasticidad de costo de creación de vacante	$\varepsilon$	2.2286
Tasa de reclutamiento de trabajadores	$\eta$	0.8336
Coefficiente de función de utilidad	$\gamma_1$	1.8203
Coefficiente de función de utilidad	$\gamma_2$	1.4365

A partir de la ecuación (32) se puede obtener directamente el valor de  $r_k = 0.0345$ , luego, como se mencionó previamente, se define arbitrariamente  $\sigma = 1.93$ . El número de empleados se obtiene de restar la fuerza laboral menos la medida de desempleo con  $n = 0.615 - 0.065 = 0.55$ , con lo que se obtiene inmediatamente el valor de intensidad de búsqueda de empleo  $s = 0.065/(1 - 0.55) = 0.1445$ . El valor de  $\gamma_1$  se obtiene directamente de la ecuación (36), con lo que se consigue el valor de  $R$  de la ecuación (34) y por consiguiente  $\gamma_2$  de la definición de  $R$  en (28). El valor del número de vacantes  $v = 0.065$  se obtiene del supuesto que fija la razón número de vacantes y medida de desempleo en  $v/u = 1$ . Luego, la tasa de reclutamiento de las empresas es  $\eta = \psi \cdot n/v = 0.8336$ . La función de costo de creación de vacante toma el valor  $\Phi(v) = 0.025 \cdot 0.55 = 0.01375$  con lo que a continuación se puede obtener el parámetro de eficiencia de la función de producción  $A$  a partir de la ecuación (4).

Para seguir el cálculo se debe obtener una expresión para  $\Phi_v(v)$

$$\Phi_v(v_t) = \varepsilon \phi v_t^{\varepsilon-1}. \quad (37)$$

Utilizando los cálculos anteriores, de la ecuación (35) se consigue una expresión para  $\Phi_v(v)$  con lo que se puede obtener el valor de  $\varepsilon$  al dividir la ecuación (1) en (37). Luego el valor del parámetro de la función de costo de vacante  $\phi = 6.0729$  queda definido a partir de reemplazar en (37). A partir de la ecuación (29), es posible calcular el parámetro de eficiencia de la función de emparejamiento  $B = 0.833$ .

Utilizando la función de producción (2) se obtiene la razón capital producto  $k/y = 10.42$ , el valor de la razón capital-trabajo  $q$  queda definida a partir de la ecuación (4). La razón consumo-capital humano  $c/h = 0.0715$  se obtiene de (31) y la razón consumo-producto se obtiene de dividir  $\frac{c/h}{k/y}$  donde se utiliza el valor de calibración  $k/y = 1$ , obteniendo  $c/y = 0.7447$ .

Finalmente, para obtener los valores de calibración de  $\zeta$  y  $D$  se resuelve el sistema de ecuaciones definido por (30) y (33), donde se deben fijar en valores arbitrarios  $\chi$ ,  $\lambda$  y  $f$ . Dependiendo de los valores de estos parámetros,  $\zeta$  y  $D$  tomarán distintos valores de calibración.

## 5.2. Valores de Calibración de $\zeta$ y $D$

De acuerdo a la tecnología de capital humano propuesta en (7), es necesario definir tres valores arbitrariamente, a saber,  $\chi$  el parámetro que define la elasticidad de sustitución  $1/(1 - \chi)$ , la importancia relativa de las tasas de acumulación de capital humano definidos por el parámetro  $\lambda$ , y el factor que normaliza la suma de los ponderadores  $f$ .

Cunha *et al.* (2006) y Cunha y Heckman (2007), presentan evidencia empírica que muestra que la inversión temprana en capital humano tiene mayor grado efectividad en la acumulación de capital humano, respecto a la inversión tardía, así en beneficio del ejercicio de simulación, asumiremos que la tasa exógena de acumulación de capital humano puede ser modificada en cierto grado mediante políticas sobre escolaridad obligatoria, y asimismo, se entenderá que la tasa endógena se puede modificar, hasta cierto grado, mediante políticas sobre educación terciaria lo que implicaría que  $\lambda \in (0.5, 1)$ . A su vez, los autores muestran evidencia que sugiere la necesidad de reconocer la complementariedad de los períodos de inversión, lo que en teoría indica que la elasticidad de sustitución de la función CES  $\frac{1}{1-\chi} \in (-\infty, 1]$ , lo que a su vez implica que  $\chi \in (0, \infty)$ .

Para los propósitos de esta tesis, el dominio relevante de análisis para el factor es  $f \in \{1,2\}$ . Esto se debe a que en caso de que  $f = 2$  se obtiene la ecuación (8) lo que permite replicar la modelación y los resultados de Chen *et al.* (2011). Por otra parte, en caso de que  $f = 1$ , se obtiene la tecnología de acumulación de capital humano propuesta por Cunha y Heckman (2007) presentada en la ecuación (9).

La tabla 3, presenta los valores de calibración  $\chi$ ,  $\lambda$  y  $f$  que serán utilizados en las siguientes secciones para la simulación del modelo.

Tabla 3: Valores de calibración utilizados en simulaciones

$\chi$	$\sigma_\chi \equiv 1/(1 - \chi)$	$\lambda$	$f$	$\zeta$	$D$
1	indeterminado	0.5	2	0.00199	0.05707
1	indeterminado	0.5	1	0.00398	0.11415
0.7225	3.604	0.72	1	0.00229	0.26566
0.5220	2.092	0.72	1	0.00177	0.38331

La primera columna presenta el valor de  $\chi$ , que determina directamente el valor de la elasticidad de sustitución  $\sigma_\chi$  presentado en la segunda columna. La tercera columna presenta el valor del multiplicador de habilidades que señala la importancia relativa de las tasas en la producción de capital humano. La columna 4 presenta el valor de normalización de la suma de los ponderadores que permite replicar la tecnología de Chen *et al.* (2011) o de Cunha y Heckman según su valor específico. Las columnas 5 y 6 presentan los valores de calibración que se obtienen de resolver el sistema de ecuaciones definido por (30) y (33).

En la segunda fila de la tabla 3 se presenta el caso de calibración donde la tecnología de acumulación es lineal utilizada por Chen *et al.* (2011), lo que permite la sustituibilidad perfecta entre las tasas de generación de capital humano. La fila 3 presenta el caso de calibración donde la tecnología de acumulación es lineal, pero el factor que normaliza la suma de los ponderadores es 1, lo que permite obtener la tecnología de Cunha y Heckman. Debe notarse que, en ambos casos, el multiplicador de habilidad  $\lambda$  toma el valor de 0.5, lo que implica que los *inputs* tienen la misma importancia relativa en la producción de capital humano.

La fila 4 muestra el caso donde la elasticidad de sustitución entre las tasas de acumulación de capital humano presenta cierto grado de complementariedad alcanzando un valor para la elasticidad  $\sigma_\chi = 3.6$  y el multiplicador de habilidades es  $\lambda = 0.72$ , es decir, la tasa de acumulación exógena tiene una mayor relevancia en la tecnología de acumulación de capital humano respecto a la tasa de acumulación endógena. La última fila presenta los valores de calibración en un contexto en que la tecnología de acumulación de capital humano presenta mayor grado de complementariedad ( $\sigma_\chi = 2.092$ ), y el multiplicador de habilidades se mantiene en 0.72.

La secuencia de valores elegidos permite la comparación entre la tecnología de acumulación lineal, frente a tecnologías de acumulación de capital humano que presentan grados de complementariedad y donde la tasa de acumulación exógena tiene un peso relativo mayor en la producción de capital humano respecto a la tasa de acumulación endógena. Un análisis de la sensibilidad de calibración ante la fijación de distintos de valores  $\chi$ ,  $\lambda$  y  $f$  se puede encontrar en el anexo F.

### 5.3. Variación Exógena de Parámetros

En esta sección se examinan cuantitativamente los efectos de la variación exógena de los parámetros modificable por la política de capital humano ( $\zeta$  y  $D$ ), parámetros del mercado laboral ( $B$ ,  $\psi$ ,  $\phi$ ) sobre variables endógenas de interés de estado estacionario, a saber, crecimiento económico ( $g$ ), razón consumo-capital humano ( $c/h$ ), razón capital físico-humano ( $k/h$ ), razón producto-capital humano ( $y/h$ ), empleo ( $n$ ), desempleo ( $s(1 - n) \equiv u$ ), esfuerzo de trabajo ( $\ell$ ),

esfuerzo de aprendizaje ( $e$ ), esfuerzo de búsqueda ( $s$ ), tasa a la que se encuentra empleo ( $\mu$ ), tasa de contratación de trabajadores ( $\eta$ ) y número de vacantes ( $v$ ). En la tabla 4 se presentan los resultados que replican los resultados de Chen *et al.* (2011), la tabla 5 y tabla 6 presentan los resultados asumiendo la existencia de complementariedad en la tecnología de acumulación de capital humano en el espíritu de Cunha y Heckman.

### 5.3.1. Marco Analítico de Interpretación a partir de Chen *et al.* (2011)

Como se mencionó en la sección 3.4, si fijamos  $f = 2$ ,  $\lambda = 0.5$  y  $\chi = 1$ , la tecnología de acumulación de capital humano reproduce la modelación de Chen *et al.* (2011) vista en la ecuación (8). Dada la mayor complejidad de las ecuaciones (30) y (33), se toma el caso particular de Chen *et al.* (2011) y desde ese caso se extrapola el análisis al caso general.

Las ecuaciones que determinan la SCB se pueden reorganizar en un sistema de dos ecuaciones y dos variables en el plano  $(\mu, n)$ . Una vez que los valores de  $(\mu, n)$  quedan fijos, las demás variables endógenas pueden ser derivadas de manera recursiva. Primero, a partir de la Curva de Beveridge (29), se reescribe la tasa de contratación de las empresas  $\eta$ , el número de vacantes  $v$  y el esfuerzo de búsqueda de empleo  $s$  en función de la tasa a la que se encuentra trabajo  $\mu$  y el nivel de empleo  $n$  quedando lo siguiente.

$$\eta = B[s(1 - n)]^\beta v^{-\beta} \quad (38)$$

$$\mu = B[s(1 - n)]^{-(1-\beta)} v^{(1-\beta)} \quad (39)$$

Luego de (38) y (39) se obtiene

$$\eta = B^{\frac{1}{1-\beta}} \mu^{\frac{-\beta}{1-\beta}} \quad (40)$$

La expresión anterior implica que mejoras en la eficiencia de emparejamiento  $B$  conlleva aumentos en la tasa de contratación de las empresas, y que aumentos en la tasa a la que se encuentra trabajo  $\mu$ , disminuye la masa de individuos buscando trabajo lo que disminuye la tasa de contratación  $\eta$ . Luego, de la Curva de Beveridge (CB) se despejan las vacantes  $\eta = \frac{\psi n}{v}$  y se reemplaza en (40) con lo que obtenemos

$$v = \psi n B^{\frac{-1}{1-\beta}} \mu^{\frac{\beta}{1-\beta}}. \quad (41)$$

Con esto se consigue la expresión para las vacantes  $v(\mu, n; B, \psi)$ . Luego  $v_B < 0$ ,  $v_\mu > 0$ ,  $v_\psi > 0$ ,  $v_n > 0$ .

Mejoras en eficiencia de emparejamiento, permite que el mercado laboral sea más dinámico y que por lo tanto haya menos vacantes disponibles. Una mayor tasa a la que se encuentra trabajo genera que haya una menor masa de individuos buscando trabajo, lo que disminuye la tasa de contratación provocando que haya más vacantes disponibles. Una mayor tasa de separación de empleo implica

que habrá más vacantes sin llenar. Una mayor tasa de empleo induce a que en equilibrio tenga que existir un mayor número de vacantes para estar renovando la masa de empleados en cada período.

Luego de la CB es directo obtener

$$s = \frac{\psi n}{\mu(1-n)}, \quad (42)$$

donde  $s_\mu < 0$ ,  $s_\psi > 0$ ,  $s_n > 0$ .

Si aumenta la tasa a la que se encuentra empleo, los trabajadores no requieren dedicar tanto esfuerzo en la búsqueda de empleo para conseguir la misma empleabilidad. Si la tasa de destrucción de empleo aumenta, para compensar la menor empleabilidad, los trabajadores tienen que destinar más esfuerzo en la búsqueda de empleo. Un aumento en la cantidad de empleo implica que se requiere más esfuerzo de búsqueda para mantener la tasa a la que se contratan trabajadores que sustente el equilibrio en la economía. En equilibrio general, una mayor cantidad de empleo se puede entender como que el mercado está presentando mejores oportunidades laborales, lo que implica mayor incentivo al esfuerzo de búsqueda.

Se puede expresar  $\ell$  en función de los parámetros vistos y las variables endógenas  $(\mu, n)$ . Utilizando el caso particular ( $f = 2$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $\chi = 1$ ) de la ecuación (30) obtenemos

$$eDn + \zeta = g. \quad (43)$$

Luego del caso particular de la ecuación (33), tenemos

$$g = \frac{Dn\ell}{\rho} - 1. \quad (44)$$

Y así de (43) y (44) obtenemos

$$e = \frac{\ell}{\rho} - \frac{(1 + \zeta)}{Dn}, \quad (45)$$

de (35) y (28) obtenemos

$$\frac{\gamma_1(1 - \ell - e)^{-\sigma}}{\gamma_2(1 - s)^{-\sigma}} \frac{\ell\Phi_v(v)}{(n - \Phi(v))} = \frac{\eta(1 - \beta)}{\mu\beta}. \quad (46)$$

Despejamos el esfuerzo laboral  $\ell$

$$\ell\gamma_1(1 - \ell - e)^{-\sigma} = \frac{\eta(1 - \beta)(n - \Phi(v))\gamma_2(1 - s)^{-\sigma}}{\mu\beta\Phi_v(v)},$$

combinamos con (45) y obtenemos

$$\ell \left( 1 + \frac{1 + \zeta}{Dn} - \frac{1 + \rho}{\rho} \ell \right)^{-\sigma} = \frac{\eta(1 - \beta)(n - \Phi(v))\gamma_2(1 - s)^{-\sigma}}{\mu \beta \Phi_v(v)}. \quad (47)$$

Donde queda una función implícita de  $\ell$ . De esta expresión se obtienen las siguientes relaciones:

$$\ell_\mu < 0, \ell_n \leq 0, \ell_B > 0, \ell_\psi \leq 0, \ell_\phi < 0, \ell_D > 0, \ell_\zeta < 0$$

De las cuales se debe considerar que las primeras dos son efectos totales, y las últimas cinco son efectos parciales que no consideran el ajuste en  $\mu$ ,  $n$ , ya que las variables están en función del par  $(\mu, n)$ , los cuales se asumen fijos al derivar.

La primera relación se explica por el hecho de que a mayor tasa a la que se encuentra trabajo, se realizan más emparejamientos trabajador-firma, lo que reduce el retorno neto del empleo. Esto implica que disminuye el retorno marginal del trabajo, y dado que el esfuerzo laboral y nivel de empleo en la función de producción son factores complementarios, se genera una disminución en el retorno del esfuerzo laboral. Lo anterior explica que la tasa a la que se encuentra empleo afecte negativamente en el esfuerzo laboral.

La segunda relación es ambigua. Por un lado, el aumento en el empleo disminuye el beneficio marginal del esfuerzo laboral a través de la disminución del producto marginal del empleo; por otro lado, el aumento en empleo aumenta el beneficio marginal del esfuerzo laboral por la complementariedad señalada anteriormente (más empleados, implica que es más rentable cada unidad de esfuerzo laboral).

Las relaciones parciales se verán en mayor detalle en el análisis numérico de las tablas 4, 5 y 6 en las cuales se considera el efecto total. Luego es posible obtener  $g$ ,  $r_k$  y  $q$  en términos de  $(\mu, n; B, \phi, \psi, \zeta, D, \chi = 1, \lambda = 0.5)$ :

De reemplazar (47) en (44) se obtiene

$$g(\mu, n; B, \phi, \psi, \zeta, D, \chi = 1, \lambda = 0.5) = \frac{Dn}{\rho} \frac{\eta}{\mu \beta} \frac{(n - \Phi(v))\gamma_2(1 - s)^{-\sigma}}{\Phi_v(v)\gamma_1(1 - \ell - e)^{-\sigma}} \gamma_1(1 - \ell - e)^\sigma - 1 \quad (48)$$

De reemplazar (48) en (32) y se obtiene

$$r_k(\mu, n; B, \phi, \psi, \zeta, D, \chi = 1, \lambda = 0.5) = \left( \frac{Dn}{\rho} \frac{\eta(1 - \beta)(n - \Phi(v))\gamma_2(1 - s)^{-\sigma}}{\mu \beta \Phi_v(v)\gamma_1(1 - \ell - e)^{-\sigma}} \gamma_1(1 - \ell - e)^\sigma - 1 \right) (1 + \rho) + \rho + \delta. \quad (49)$$

Seguimos reemplazando (49) en (32) para obtener

$$q(\mu, n; B, \phi, \psi, \zeta, D, \chi = 1, \lambda = 0.5) = \left( \frac{A\alpha}{\left( \frac{Dn\eta(1-\beta)}{\rho} \frac{(n-\Phi(v))\gamma_2(1-s)^{-\sigma}}{\mu\beta} \frac{\gamma_1(1-\ell-e)^{-\sigma}}{\Phi_v(v)\gamma_1(1-\ell-e)^{-\sigma}} \gamma_1(1-\ell-e)^\sigma - 1 \right) (1+\rho) + \rho + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (50)$$

Luego, para (48) se puede demostrar siguiendo a Chen *et al.* (2011) y Yukhtenko (2014) las siguientes relaciones:

$$g_\mu < 0, g_n \leq 0, g_B > 0, g_\psi \leq 0, g_\phi < 0, g_D > 0, g_\zeta < 0$$

La relación negativa entre crecimiento y tasa a la que se encuentra empleo proviene de que  $g_\ell > 0$ , esto se debe a que un mayor nivel de esfuerzo induce mayor acumulación de capital humano a través del incentivo al empleo que impacta la tecnología de acumulación de capital humano, y a través de la función de producción, que hace más atractiva la acumulación de capital humano. Luego, de la ecuación (47) sabemos que  $\ell_\mu < 0$ , por lo tanto, se tiene que por efecto cadena que  $g_\ell \cdot \ell_\mu < 0$ , implicando que  $g_\mu < 0$ .

Por otro lado, la relación ambigua entre crecimiento y el nivel de empleo, proviene del hecho que existe una relación ambigua entre nivel de esfuerzo y nivel de empleo ( $\ell_n \leq 0$ ), luego por efecto cadena, dada la ambigüedad que existe entre el esfuerzo laboral y el nivel de empleo, esta ambigüedad se traspaasa la relación entre crecimiento y el empleo ( $g_\ell \cdot \ell_n = g_n \leq 0$ ).

Dado que estas funciones asumen el par  $(\mu, n)$  como valores fijos, sólo permiten analizar las relaciones directas entre los parámetros de mercado laboral y capital humano con  $g, r_k, q$  pero no consideran los efectos endógenos del par  $(\mu, n)$ . Sin embargo, se puede obtener intuición la mecánica del modelo. Así, es posible reemplazar las ecuaciones (47)-(50) en (34) y (36) para obtener una pseudo oferta de trabajo  $LS(\mu, n; B, \phi, \psi, \zeta, D, \chi = 1, \lambda = 0.5)$ , y una pseudo demanda de trabajo  $LD(\mu, n; B, \phi, \psi, \zeta, D, \chi = 1, \lambda = 0.5)$  en el plano  $(\mu, n)$ . Luego, los movimientos de los parámetros del mercado laboral y del capital humano representan movimientos exógenos en las curvas.

LS presenta una relación positiva entre empleo  $n$  y la probabilidad de emparejamiento  $\mu$ , mientras que LD presenta una relación negativa entre  $n$  y  $\mu$ . Se debe notar que son pseudo curvas de oferta y demanda debido a que cumplen con las condiciones de equilibrio de emparejamiento y de la ley de Walras, sin embargo, el empleo queda en función de la probabilidad de emparejamiento en vez del salario. El movimiento de estas dos curvas permite entender de mejor manera el equilibrio del modelo en estado estacionario.

La pendiente negativa de LD se explica por la relación entre la probabilidad de que se genere un *match* y el retorno del empleo. Una mayor probabilidad de hacer *match* disminuye el beneficio marginal del empleo lo que implica que un mayor  $\mu$  disminuya la demanda por trabajo. La pendiente positiva da LS se explica de lo visto en (47) que muestra que, a mayor probabilidad de generación de un *match*, el esfuerzo laboral disminuye. Esto significa que aumenta el ocio, lo que

se compensa con un aumento en el esfuerzo de aprendizaje implicando un alza en la generación de capital humano. Dado que el capital humano acumulado es un factor que complementa al trabajo, esto implica que aumenta el beneficio neto de contratación lo que aumenta el empleo. Por otro lado, cambios en parámetros de mercado laboral y parámetros de capital humano, implicarán desplazamientos de las curvas LS y LD.

En el equilibrio de calibración la complementariedad de los factores entre el empleo y el esfuerzo laboral es una fuerza dominante, por lo que la relación entre crecimiento y el nivel de empleo visto en ecuación (48) es positiva ( $g_n > 0$ ). En particular, el crecimiento económico tiene un efecto del empleo (positivo y negativo comentado anteriormente) y otro efecto que proviene del cambio en la tasa a la que se encuentra empleo que es negativo.

De la calibración se sostiene que mejoras en parámetros de capital humano ( $\zeta, D$ ), crea dos efectos contrarios sobre el crecimiento económico. Por un lado, se genera un efecto positivo a través del empleo, y por otro un efecto negativo a través de la probabilidad de generar emparejamientos. El efecto positivo dominante del empleo viene de la complementariedad de los factores en creación de capital humano, mientras que el efecto negativo de la tasa de emparejamiento proviene del aumento en facilidad de la generación de empleo, lo que provoca que bajen los incentivos a la acumulación de capital humano y por lo tanto haya menos crecimiento económico. Dado que el parámetro  $D$  tiene influencia directa sobre el esfuerzo de aprendizaje, el efecto sobre el crecimiento es mucho mayor en comparación al efecto de  $\zeta$  que no incide en esta variable directamente.

### 5.3.2. Análisis Numérico con Sustituibilidad Perfecta

En la tabla 4 se presentan los cambios porcentuales de distintas variables de interés respecto al valor de referencia de calibración (*benchmark*), ante aumentos exógenos de 1% en parámetros de mercado laboral y de capital humano, en el caso de que la tecnología de acumulación de capital humano presenta sustituibilidad perfecta entre sus tasas de acumulación. Tal como se mencionó antes, al fijar  $f = 1$ ,  $\lambda = 0.5$  y  $\chi = 1$ , se replica la tecnología lineal de Chen *et al.* (2011) con la salvedad de que el factor utilizado en esta tesis es  $f = 1$  en vez de  $f = 2$ .

Al observar la tabla 4 es posible notar que el aumento en cualquiera de los parámetros sujetos a política de capital humano aumenta el esfuerzo de aprendizaje, lo que implica un aumento en el empleo y el crecimiento económico. Dado que ambos parámetros aumentan la acumulación de capital humano, esto implica que ambos aumentan la productividad del trabajo lo que induce una mayor participación laboral e incentiva un aumento en el esfuerzo de búsqueda laboral por parte de los trabajadores, y un aumento en las vacantes abiertas por parte de las firmas.

Por un lado, el aumento en el esfuerzo de búsqueda de empleo aumenta la medida de desempleo  $u \equiv s(1 - n)$ , pero por otro lado induce la disminución de individuos desempleados, por lo tanto, el efecto neto es ambiguo, sin embargo, para esta calibración, el efecto que domina es el de esfuerzo de búsqueda. Dada la existencia de estos efectos que van en direcciones opuestas, el aumento en desempleo es menor al aumento en apertura de vacantes. Lo anterior, por definición, es una caída en la tasa de reclutamiento de las empresas  $\eta = \mu s(1 - n)/v$ . Luego en compañía del aumento del esfuerzo de aprendizaje, el esfuerzo de trabajo decrece. En respuesta a la mayor rentabilidad del capital humano respecto al capital físico, se produce una sustitución entre estos factores lo que

implica una disminución en la razón capital físico-capital humano. Los aumentos en costos de contratación (por convexidad en la función de costo de creación de vacantes) junto con la disminución en el esfuerzo laboral y el aumento en el capital humano provocan que el producto efectivo  $y/h$  disminuya.

En el caso de mejoras en los parámetros del mercado laboral (aumento en la eficiencia de emparejamiento  $B$ , disminución de la tasa de destrucción de empleo  $\psi$ , y disminución de parámetro exógeno de costo de contratación  $\phi$ ), aumentan el nivel de empleo y la probabilidad de generación de un emparejamiento. El aumento en productividad causa un mayor ingreso que incentiva el aumento en empleo, esfuerzo de aprendizaje y esfuerzo de búsqueda de empleo, sin embargo, el alza en la probabilidad de emparejamiento también genera un incentivo a bajar el esfuerzo de búsqueda de empleo y el esfuerzo laboral. Bajo esta calibración el efecto del aumento en el ingreso es el que domina.

Considerando la Curva de Beveridge en (29), aumentos en la eficiencia expanden la CB lo que implica aumentos en  $(\mu, \eta)$ . Por otro lado, disminuciones en  $\phi$  y  $\psi$  implican un movimiento a lo largo de la BC, aumentando  $\mu$  y disminuyendo  $\eta$ . Mayor eficiencia en emparejamientos y disminución en costos de creación de vacantes inducen mayor número de vacantes, mientras que una menor tasa de destrucción de empleo provoca que no sea necesario crear más vacantes para mantener el nivel de empleo, lo que se traduce sólo en disminución en la tasa de contratación de las firmas. Mejoras en parámetros del mercado laboral permiten un mayor nivel de empleo que, por complementariedad de factores, implica un aumento en la productividad marginal del capital humano. Esto genera un incentivo en el esfuerzo de aprendizaje que conlleva una disminución en el esfuerzo laboral, y un aumento en el esfuerzo de búsqueda de empleo que incide en un aumento en el desempleo. El aumento en capital humano repercute en un aumento en el crecimiento de la economía que, de forma análoga al caso de aumentos en los parámetros de capital humano, genera una sustitución de capital humano por capital físico, reduciendo la razón  $k/h$ . Los aumentos costos de contratación junto con la disminución en el esfuerzo laboral y el aumento en el capital humano provocan que el producto efectivo  $y/h$  disminuya.

En términos amplios, el crecimiento económico, el empleo, la participación laboral, la creación de vacantes, el esfuerzo de aprendizaje y el esfuerzo en búsqueda de empleo son más sensibles a cambios en el parámetro de acumulación de capital humano  $D$ , seguido por cambios en el parámetro de eficiencia  $B$ , y la tasa de destrucción de empleo  $\psi$ . En contraste, cambios en el parámetro  $\zeta$  tiene menor respuesta en las variables endógenas del modelo. Por otro lado, aumentos en el parámetro  $D$  induce mayor declinación en esfuerzo laboral, el producto efectivo, consumo efectivo, esfuerzo laboral y aumentos en la tasa de desempleo. El parámetro de eficiencia de emparejamiento ejerce un mayor efecto sobre la tasa de separación de empleo. Mientras que la tasa de contratación de las firmas es más sensible ante cambios en el parámetro de capital humano de capacitación *on the job*. Finalmente, crecimiento, empleo y la medida aumentada de desempleo siempre se mueven en la misma dirección ante cambio en los parámetros.

### 5.3.3. Análisis Numérico sin Sustituibilidad Perfecta

En la tabla 4 se observó el comportamiento del modelo ante cambios en parámetros del mercado laboral y del capital humano en un contexto de perfecta sustituibilidad en la tecnología de acumulación de capital humano. En la tabla 5 y la tabla 6 se estudian el efecto de las mismas variaciones exógenas, pero considerando una tecnología de acumulación de capital humano que presenta cierto grado de complementariedad ( $\chi < 1$ ) y asimetría en los pesos relativos de los *inputs* de acumulación de capital humano ( $\lambda > 0.5$ ) de manera que se simula un caso más cercano a la evidencia empírica. La tabla 5 presenta el caso específico en que  $\chi = 0.7225$  y  $\lambda = 0.72$ , mientras que en la tabla 6 se presenta el caso en que se aumenta el grado de complementariedad a  $\chi = 0.522$  dejando fijo el multiplicador de habilidades en  $\lambda = 0.72$ .

Lo primero que llama la atención de la tabla 5 respecto a la tabla 4 es que, en general, la sensibilidad de todas las variables endógenas tiende a disminuir ante cambios en parámetros de capital humano y del mercado laboral. En particular destaca la menor incidencia del parámetro asociado a la acumulación endógena de capital humano  $D$  sobre el crecimiento económico (cae de +20.97% a +4.02%) y sobre el esfuerzo de aprendizaje (cae de +29.06% a +5.16%). También se observa un notorio declive en la sensibilidad de reacción en el esfuerzo laboral (aumenta de -6.06% a -1.09%), el empleo (cae de +5.50% a +0.97%) y del esfuerzo de búsqueda de empleo (cae de +12.71% a +2.13%).

La disminución en la influencia del parámetro asociado a la acumulación de capital humano *on the job*  $D$ , se explica por el hecho de que la complementariedad ( $\chi < 1$ ) restringe la efectividad del movimiento de sólo un parámetro de capital humano lo que disminuye la efectividad de una variación exógena de  $D$ . Dado que existe cierto grado de complementariedad, una mayor tasa de capital humano endógeno debe ser acompañada por una mayor tasa de capital humano exógeno. Teniendo en cuenta que el parámetro  $\zeta$  es fijo y que no existe otra manera de aumentar la acumulación de capital humano asociada a la mejora de experiencia laboral, entonces el efecto del cambio en  $D$  se ve restringido.

Por su parte la sensibilidad de las variables endógenas al cambio exógeno en el parámetro de experiencia laboral  $\zeta$  aumenta respecto al caso de sustituibilidad perfecta. En particular, la posibilidad que aumentos en la tasa exógena  $\zeta$  pueda ser acompañada por aumentos en la tasa endógena de acumulación de capital humano mediante el aumento en el esfuerzo de aprendizaje y el nivel de empleo, incide en que se observa un mayor crecimiento económico (aumenta de +0.55% a +0.92%), mayor influencia sobre el esfuerzo de aprendizaje (aumenta de +0.16% a 0.72%) y mayor esfuerzo de búsqueda (aumenta de +0.08% a +0.30%). A diferencia de lo visto para el parámetro de capacitación *on the job*, en general, los cambios en  $\zeta$  aumentan su influencia sobre las variables endógenas.

Tabla 4: Efecto sobre variables de interés ante cambios exógenos en variables de política con  $\chi = 1$ ,  $\lambda = 0.5$  y  $f = 1$

	$g$	$c/h$	$k/h$	$y/h$	$n$	$\ell$	$e$	$s$	$\mu$	$\eta$	$v$	$u$	$n + u$
Benchmark	0.0045	0.0714	0.9996	0.0959	0.5503	0.3198	0.0802	0.1447	0.8342	0.8345	0.0650	0.0650	0.6154
$\zeta$ alza en 1%	0.55%	-0.05%	-0.11%	-0.04%	0.03%	-0.03%	0.16%	0.08%	0.00%	0.00%	0.04%	0.03%	0.03%
$D$ alza en 1%	20.97%	-2.98%	-5.25%	-2.63%	5.50%	-6.06%	29.06%	12.71%	0.35%	-0.90%	6.46%	5.13%	5.46%
$B$ alza en 1%	4.84%	-0.45%	-1.00%	-0.37%	1.70%	-1.65%	6.83%	2.60%	1.24%	0.40%	1.30%	0.46%	1.57%
$\psi$ alza en y 1%	-4.77%	0.45%	1.00%	0.36%	-1.68%	1.69%	-6.97%	-2.47%	-0.23%	0.58%	-1.27%	-0.47%	-1.55%
$\phi$ alza en 1%	-0.62%	0.06%	0.13%	0.05%	-0.22%	0.22%	-0.90%	-0.33%	-0.15%	0.40%	-0.61%	-0.07%	-0.20%

Nota: Números reportados en filas 3 a 7 son cambios porcentuales respecto de su valor benchmark presentados en fila 3 debido a un aumento exógeno de 1% en las variables claves de la columna 1.

Tabla 5: Efecto sobre variables de interés ante cambios exógenos en variables de política con  $\chi = 0.7225$ ,  $\lambda = 0.72$  y  $f = 1$

	$g$	$c/h$	$k/h$	$y/h$	$n$	$\ell$	$e$	$s$	$\mu$	$\eta$	$v$	$u$	$n + u$
Benchmark	0.0045	0.0715	1.0000	0.0960	0.5501	0.3200	0.0800	0.1445	0.8342	0.8345	0.0650	0.0650	0.6151
$\zeta$ alza en 1%	0.92%	-0.10%	-0.21%	-0.09%	0.14%	-0.15%	0.72%	0.30%	0.01%	-0.02%	0.16%	0.13%	0.14%
$D$ alza en 1%	4.02%	-0.54%	-0.99%	-0.47%	0.97%	-1.09%	5.16%	2.13%	0.05%	-0.14%	1.11%	0.92%	0.97%
$B$ alza en 1%	0.84%	0.12%	0.03%	0.14%	0.58%	-0.39%	0.91%	0.13%	1.17%	0.56%	0.02%	-0.58%	0.46%
$\psi$ alza en 1%	-0.78%	-0.12%	-0.03%	-0.13%	-0.55%	0.37%	-0.86%	-0.06%	-0.17%	0.43%	0.02%	0.61%	-0.43%
$\phi$ alza en 1%	-0.10%	-0.02%	0.00%	-0.02%	-0.07%	0.05%	-0.11%	-0.02%	-0.15%	0.38%	-0.45%	0.07%	-0.06%

Nota: Números reportados en filas 3 a 7 son cambios porcentuales respecto de su valor benchmark presentados en fila 3 debido a un aumento exógeno de 1% en las variables claves de la columna 1.

Tabla 6: Efecto sobre variables de interés ante cambios exógenos en variables de política con  $\chi = 0.522$ ,  $\lambda = 0.72$  y  $f = 1$

	$g$	$c/h$	$k/h$	$y/h$	$n$	$\ell$	$e$	$s$	$\mu$	$\eta$	$v$	$u$	$n + u$
Benchmark	0.0045	0.0715	1.0000	0.0960	0.5501	0.3200	0.0800	0.1445	0.8342	0.8345	0.0650	0.0650	0.6151
$\zeta$ alza en 1%	0.94%	-0.11%	-0.21%	-0.09%	0.15%	-0.16%	0.76%	0.32%	0.01%	-0.02%	0.17%	0.14%	0.15%
$D$ alza en 1%	2.48%	-0.32%	-0.60%	-0.27%	0.54%	-0.61%	2.87%	1.18%	0.03%	-0.08%	0.62%	0.51%	0.54%
$B$ alza en 1%	0.52%	0.17%	0.11%	0.18%	0.49%	-0.29%	0.44%	-0.06%	1.16%	0.58%	-0.08%	-0.66%	0.37%
$\psi$ alza en 1%	-0.49%	-0.16%	-0.11%	-0.17%	-0.47%	0.28%	-0.42%	0.12%	-0.16%	0.42%	0.11%	0.69%	-0.34%
$\phi$ alza en 1%	-0.07%	-0.02%	-0.01%	-0.02%	-0.06%	0.04%	-0.06%	0.01%	-0.15%	0.37%	-0.44%	0.08%	-0.05%

Nota: Números reportados en filas 3 a 7 son cambios porcentuales respecto de su valor benchmark presentados en fila 3 debido a un aumento exógeno de 1% en las variables claves de la columna 1.

Para el caso de mejoras en los parámetros del mercado laboral (aumentos en  $B$  y disminuciones en  $\psi$  y  $\phi$ ) en general se observa una menor sensibilidad de reacción de las variables endógenas a la variación de los parámetros, con excepción de la tasa de contratación de las empresas  $\eta$  ante aumentos en  $B$  (aumenta de +0.40% a +0.56%). Esta menor sensibilidad general viene del hecho que el esfuerzo de aprendizaje tiene variaciones menores respecto al caso de sustituibilidad perfecta lo que incide en una menor acumulación de capital humano traduciéndose en una reducción de los efectos sobre crecimiento económico, empleo y, por consiguiente, sobre las demás variables de la economía. Dado que en esta especificación existe cierto grado de complementariedad, esto implica que la generación de capital humano *on the job* tiene menos capacidad de incidencia sobre la acumulación de capital humano, lo que disminuye el aumento por complementariedad del valor marginal del empleo. La menor rentabilidad del empleo genera que el esfuerzo de búsqueda aumente menos respecto al escenario de sustituibilidad perfecta lo que permite que el esfuerzo laboral disminuya en menor medida. Dado que el empleo aumenta en menor proporción, también incide en un menor aumento de la masa de trabajadores acotando el efecto sobre la participación laboral.

En el caso específico de mejoras en la tasa de destrucción de empleo, el menor aumento en la rentabilidad de la producción respecto al escenario de tecnología de acumulación de sustitutos perfectos induce a que la disminución en el empleo no alcance a ser compensado por la menor disminución en el esfuerzo de búsqueda lo que produce una reducción en el número de vacantes disponibles siguiendo la relación descrita por la CB en (29). El menor esfuerzo de búsqueda más la disminución en el número de desempleados genera que, a diferencia del caso de sustitutos perfectos, la medida de desempleo  $u \equiv s(1 - n)$  disminuya ante mejoras en parámetros de mercado laboral. La menor rentabilidad del capital humano anula la sustitución de capital humano por capital físico dejándolo en razón unitaria. Luego, el acotado aumento en capital humano, el bajo aumento en costos de contratación por el menor aumento en empleo y la baja caída en esfuerzo laboral permite que, en contraste a la especificación de sustitutos perfectos, el producto y consumo efectivo aumenten.

La tabla 6 presenta el efecto de variaciones exógenas en parámetros del mercado laboral y parámetros de capital humano sujetos a política pública aumentando el grado de complementariedad y manteniendo la asimetría de la tabla 5 ( $\chi = 0.522, \lambda = 0.72$ ).

En primera instancia, se destaca que disminuye impacto de la variación del parámetro de capacitación *on the job*  $D$  sobre todas las variables endógenas. En efecto, el aumento en la complementariedad restringe la efectividad del aumento en el esfuerzo de aprendizaje en la generación de capital humano, lo que se traduce en una reducción en el esfuerzo de aprendizaje (cae de +5.16% a +2.87%), lo que conlleva una disminución del crecimiento económico (cae de +4.02% a +2.48%) y una disminución en el esfuerzo de búsqueda (cae de +2.13% a +1.18%). De forma análoga a lo visto en la tabla 5, la menor generación de capital humano implica una disminución de la sensibilidad de las demás variables de la economía.

Respecto a alzas del parámetro de experiencia laboral  $\zeta$  se observa un impacto casi nulo sobre las variables endógenas respecto a lo visto en la tabla 5. En efecto, se observa un leve aumento el crecimiento económico (aumento de +0.92% a +0.94%), leve aumento en el empleo (aumento de +0.14% a +0.15%) y leve aumento del esfuerzo de búsqueda (aumento de +0.30% a +0.32%). Dado que  $\zeta$  no tiene incidencia directa sobre el esfuerzo de aprendizaje, y por lo tanto sobre la elección endógena de la tasa de acumulación de capital humano, el aumento de complementariedad no genera efectos relevantes sobre la tasa de crecimiento de capital humano, crecimiento económico, empleo y las demás variables de la economía respecto a los resultados de la tabla 5.

En línea con lo visto para los parámetros de capital humano, en general también se observa una caída de la sensibilidad de las variables endógenas respecto a cambios exógenos en los parámetros que definen el mercado laboral ante aumentos en el grado de complementariedad. En el caso particular del desempleo, las disminuciones en esta variable se ven exacerbadas respecto a lo visto en la tabla 5 aunque de manera muy acotada para la tasa de destrucción de empleo.

A diferencia de lo visto en la tabla 5, en el caso de un mayor grado de complementariedad, las mejoras en los parámetros del mercado laboral siempre generan una disminución en el esfuerzo de búsqueda de empleo. La menor alza en empleo junto con el menor esfuerzo de búsqueda de empleo, inciden directamente en la tasa de desempleo, disminuyéndola aún más respecto a lo visto anteriormente. Por otro lado, el menor aumento en la rentabilidad de la producción induce a que la disminución en el empleo supere el efecto compensatorio del aumento en el esfuerzo de búsqueda, lo que ocasiona una reducción en el número de vacantes en los casos de mejora del parámetro de eficiencia de *matching*  $B$ , y en el caso de disminuciones de la tasa de destrucción de empleo  $\psi$ .

Nuevamente, el menor aumento en capital humano, el bajo aumento en costos de contratación por el menor aumento en empleo y la baja caída en esfuerzo laboral, causa que el producto y consumo efectivo aumenten. Las limitadas mejoras en productividad del capital humano junto con las mejoras en productividad debido a las mejoras en los parámetros del mercado laboral, aumento en empleo y menor caída en el esfuerzo laboral, repercuten en que el capital físico termine sustituyendo al capital humano en todos los casos, lo que aumenta la razón  $k/h$ .

En términos generales el aumento en la complementariedad afecta en menor medida el efecto de la tasa de destrucción de empleo respecto a cualquier otro parámetro estudiado. El parámetro que más se ve afectado es el de generación de capital humano *on the job*  $D$ , reduciendo muy significativamente su efecto sobre las variables endógenas de la economía. Por su parte el parámetro de experiencia laboral  $\zeta$  al no incidir directamente en el esfuerzo de aprendizaje que impacta en la decisión de inversión de capital humano del hogar, mantiene estable su nivel de incidencia sobre las variables de la economía al momento de aumentar el grado de complementariedad.

A grandes rasgos, de este análisis se puede concluir que si se considera una tecnología de acumulación de capital humano donde existe complementariedad entre los parámetros de capital humano objetivos de la política pública, aumentos en complementariedad restringe la influencia de cambios exógenos en el equilibrio de largo plazo de la economía. Esto implica que la política pública que busque cambiar parámetros del mercado laboral o de capital humano estará más restringida en su capacidad de alterar el equilibrio macroeconómico de largo plazo.

## 5.4. Política de Capital humano

### 5.4.1. Modelamiento de Aplicación de Subsidio con Presupuesto Balanceado

Se consideran dos subsidios  $b_\zeta$  y  $b_D$  proporcionales al capital humano que modifican la ecuación de acumulación de capital humano (9) de la siguiente forma

$$h_{t+1} = \left( 1 + \left[ \lambda \left( \zeta(1 + b_\zeta) \right)^x + (1 - \lambda)(D(1 + b_D)n_t e_t)^x \right]^{1/x} \right) h_t.$$

Donde  $b_\zeta \geq 0$  es un subsidio proporcional al parámetro  $\zeta$ , y  $b_D \geq 0$  es un subsidio proporcional al parámetro  $D$ . Al desarrollar la expresión, obtenemos

$$h_{t+1} = \left( h_t + \left[ \lambda(h_t \zeta + h_t \zeta b_\zeta)^x + (1 - \lambda)(h_t D n_t e_t + h_t D n_t e_t b_D)^x \right]^{1/x} \right).$$

Estos subsidios son financiados mediante un impuesto de suma alzada del 1% del producto efectivo de estado estacionario de la economía de la siguiente forma  $T/h = 0.01 \cdot y/h = 0.00096$ .

La inclusión de los subsidios modifica las ecuaciones (30) y (33) de la SCB de la siguiente manera

$$\frac{1}{D(1 + b_D)n} \left( \frac{g^x - \lambda \left( \zeta(1 + b_\zeta) \right)^x}{(1 - \lambda)} \right)^{1/x} = e_t, \quad (51)$$

$$\rho + \rho g = (1 - \lambda)D(1 + b_D)n \left( \frac{g^x - \lambda \left( \zeta(1 + b_\zeta) \right)^x}{(1 - \lambda)} \right)^{(\alpha-1)/x} g^{(1-\alpha)} \ell, \quad (52)$$

mientras que la inclusión del impuesto de suma alzada  $T/h$  modifica la ecuación (31) disminuyendo el consumo efectivo de estado estacionario

$$\frac{c}{h} = (Aq^\alpha - q(\delta + g))(n - \Phi(v))\ell - \frac{T}{h}. \quad (53)$$

### 5.4.2. Obtención de Subsidios de Capital Humano

Se examinan dos opciones de política de capital humano. La primera opción considera destinar todo el ingreso del impuesto  $\frac{T}{h}$  para financiar un subsidio  $b_\zeta$ , a determinar en equilibrio general, orientado únicamente a mejorar el parámetro  $\zeta$ . La segunda opción considera destinar todo el ingreso del impuesto  $\frac{T}{h}$  para financiar un subsidio  $b_D$ , a determinar en equilibrio general, orientado únicamente a mejorar el parámetro  $D$ .

Si se utiliza todo el impuesto recaudado para el subsidio en mejora de experiencia laboral, entonces se debe cumplir que  $h_t \zeta b_\zeta = T/P_h$ , lo que termina definiendo el nivel del subsidio

$$b_\zeta = \frac{T}{h_t} \frac{1}{\zeta P_h} . \quad (54)$$

Luego, si se utiliza todo el impuesto recaudado para el subsidio en mejora de generación de capital humano de capacitación on the job, entonces se debe cumplir que  $h_t D n_t e_t b_D = T/P_h$  lo que termina definiendo el nivel del subsidio

$$b_D = \frac{T}{h_t} \frac{1}{D n_t e_t P_h} . \quad (55)$$

### 5.4.3. Obtención del Precio del Capital Humano

El proceso de optimización del hogar implica que el precio relativo del capital humano en unidad de producto  $P_h$  multiplicado por la utilidad marginal del consumo, debe ser igual a la valoración marginal del capital humano, por lo que la razón de precios debe igualar la razón de utilidad entre capital humano y consumo

$$\frac{P_h}{P_c} = \frac{U_{h_{t+1}}}{U_c} .$$

Normalizando el precio del consumo a 1 y utilizando la notación de la utilidad marginal del capital humano ( $MVH_{t+1}$ ) se consigue

$$P_h = \frac{MVH_{t+1}}{U_c}$$

$$P_h U_c = MVH_{t+1}$$

A continuación, aplicamos la forma funcional del consumo utilizada en la sección 4.2 para obtener

$$P_h \frac{1}{c} = MVH_{t+1}$$

$$P_h = MVH_{t+1} \cdot c .$$

De la ecuación (21) se tiene que:

$$-U_e = MVH_{t+1} h_t (1 - \lambda)(Dn_t)^x e_t^{x-1} (\lambda \zeta^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x)^{(1-x)/x}$$

Se aplica la forma funcional específica de  $U_e = -(1 - \ell_t - e_t)^{-\sigma} n_t \gamma_1$ , con lo que se obtiene

$$MVH_{t+1} h_t (1 - \lambda)(Dn_t)^x e_t^{x-1} (\lambda \zeta^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x)^{(1-x)/x} = (1 - \ell_t - e_t)^{-\sigma} n_t \gamma_1.$$

Ahora se reemplaza  $MVH_{t+1}(P_h)$  en la ecuación anterior

$$P_h \frac{h_t}{c} (1 - \lambda)(Dn_t)^x e_t^{x-1} (\lambda \zeta^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x)^{(1-x)/x} = (1 - \ell_t - e_t)^{-\sigma} n_t \gamma_1$$

Se despeja  $P_h$

$$P_h = \frac{(1 - \ell_t - e_t)^{-\sigma} n_t \gamma_1 \left(\frac{c}{h}\right)}{(1 - \lambda)(Dn_t)^x e_t^{x-1} (\lambda \zeta^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x)^{(1-x)/x}}.$$

Se reemplaza  $c/h$  de la ecuación (53) con lo que obtenemos la expresión para el precio del capital humano en estado estacionario

$$P_h = \frac{(1 - \ell - e)^{-\sigma} n \gamma_1 \left( (Aq^\alpha - q(\delta + g))(n - \Phi(v))\ell - \frac{T}{h} \right)}{(1 - \lambda)(Dn)^x e^{x-1} (\lambda \zeta^x + (1 - \lambda)(Dne)^x)^{(1-x)/x}}$$

Al incorporar los subsidios obtenemos

$$P_h = \frac{(1 - \ell - e)^{-\sigma} n \gamma_1 \left( (Aq^\alpha - q(\delta + g))(n - \Phi(v))\ell - \frac{T}{h} \right)}{(1 - \lambda)(D(1 + b_D)n)^x e^{x-1} \left( \lambda (\zeta(1 + b_\zeta))^x + (1 - \lambda)(D(1 + b_D)ne)^x \right)^{(1-x)/x}} \quad (56)$$

Junto con la sustitución de las ecuaciones (30), (31) y (33) por las ecuaciones (51), (52) y (53), para la aplicación efectiva de la política de capital humano, el modelo debe incorporar las ecuaciones que definen los subsidios (54) o (55), según sea el caso, y la ecuación que define el precio del capital humano (56).

#### 5.4.4. Simulación de Política de Capital Humano

Las tablas 7, 8 y 9 presentan los resultados de aplicar una política de subsidio, según lo descrito en la sección 5.4.2, a los parámetros de la tecnología de acumulación de capital humano  $(\zeta, D)$ , por separado, considerando distintos valores de  $\chi$  y  $\lambda$ . El nivel de subsidio se calcula en proporción al parámetro de capital humano correspondiente, y su valor se resuelve endógenamente en el modelo al determinar el equilibrio general. La tabla 7 presenta el escenario en que la tecnología de acumulación de capital humano es de perfectos sustitutos y se pondera de igual manera la formación de las dos fuentes de acumulación de capital

humano ( $\chi = 1, \lambda = 0.5$ ). La proporción subsidiada corresponde a lo que permite el gasto del 1% del PIB efectivo de estado estacionario ( $T/h = 0.01 \cdot y/h = 0.00096$ ). En caso de subsidiar el componente de experiencia laboral, la proporción total de subsidio alcanza 3.96% del parámetro  $\zeta$ , por otro lado, en caso de subsidiar sólo el componente de capacitación *on the job*, el subsidio alcanza 1.98% del parámetro  $D$ .

De la tabla 7 se destaca que la política de subsidio sobre el parámetro  $D$  genera mayores efectos sobre todas las variables endógenas, respecto a la política aplicada sobre el parámetro  $\zeta$ . En particular, el mayor efecto se observa sobre el crecimiento de la economía alcanzando +38.59% para la política sobre capacitación *on the job* versus +2.16% en caso de la política sobre experiencia laboral. Los aumentos en capital humano se ven reflejados en una disminución en la razón  $y/h$ , aumentos en el nivel de empleo, aumentos en esfuerzo de aprendizaje y disminuciones en el esfuerzo de trabajo y el nivel de ocio. Las mejoras en capital humano también inciden positivamente en el esfuerzo de búsqueda, la participación laboral y el número de vacantes creadas. En el caso de la política de mejora en experiencia laboral, la tasa a la que se encuentra empleo no se ve afectada, mientras que, para la política de mejora en capacitación *on the job*, se ve un aumento en 0.7%. Finalmente, la tasa de contratación de las empresas se ve reducida en el caso de ambas políticas<sup>11</sup>.

En la tabla 8 se repite el ejercicio hecho en la tabla 7, con la diferencia de que en este caso se aumenta la complementariedad y se asume que el parámetro asociado a la experiencia laboral tiene mayor ponderación en la tecnología de acumulación de capital humano ( $\chi = 0.7225, \lambda = 0.72$ ). En este caso la proporción subsidiada de  $\zeta$  aumenta a 6.91%, mientras que la proporción subsidiada de  $D$  disminuye a 1.26%.

En este escenario se destaca que si bien la política sobre capacitación *on the job* aumenta más el esfuerzo de aprendizaje (+6.51%) respecto a la política sobre experiencia laboral (+4.90%), el aumento en el crecimiento económico aumenta más en el caso de la política sobre  $\zeta$  (+6.35%) que sobre  $D$  (+5.09%). Este resultado es notable porque invierte el patrón visto en el caso de sustitución perfecta presentado en la tabla 7. Es decir, si asumimos una tecnología con cierto grado de complementariedad y un multiplicador de habilidades  $\lambda = 0.72$ , las conclusiones sobre los resultados de las políticas se invierten.

La intuición de esto se explica por dos motivos. Por un lado, dado que el multiplicador de habilidades pondera más la acumulación de capital humano de experiencia laboral por sobre

---

<sup>11</sup> Es preciso señalar que la tabla 7 presenta el caso desarrollado por Chen *et al.* (2011), y si bien, los resultados de esta tesis van en la misma dirección respecto al artículo original, numéricamente son distintos. La diferencia se explica por el hecho de que el factor visto en la ecuación (7) que utiliza Chen *et al.* (2011) ( $f = 2$ ) es distinto al usado en esta tesis ( $f = 1$ ), lo que incide en el precio del capital humano representado por la ecuación (56). El menor valor del factor disminuye el precio del capital humano, lo que permite que la proporción subsidiada sea mayor posibilitando un mayor efecto de política. En la tabla 4 no hay subsidios involucrados, por lo que el valor del factor no incide en el resultado implicando que los resultados numéricos de Chen *et al.* son los mismos de esta tesis.

la de capacitación *on the job*, cada unidad subsidiada de  $\zeta$  tiene mayor impacto en la acumulación de capital humano. Por otro lado, dado que existe cierto grado de complementariedad, el esfuerzo de aprendizaje por sí solo pierde eficacia para la acumulación de capital humano, ya que la complementariedad implica que una alta acumulación de capital humano de capacitación *on the job* debe ser acompañada por una alta acumulación de capital humano de experiencia laboral. Dado que el parámetro  $\zeta$  es fijo y no existe otra manera de aumentar la acumulación de capital humano de experiencia laboral, el subsidio  $b_D$  sólo cambia la tasa de acumulación asociada a la capacitación *on the job*; mientras que cuando el subsidio se aplica sobre  $\zeta$ , el aumento en la tasa de acumulación de capital humano de experiencia laboral puede ser acompañado por aumentos en la tasa de acumulación de capital humano de capacitación *on the job* a través del aumento en el esfuerzo de aprendizaje  $e$  y el aumento en empleo  $n$ .

El efecto visto para el crecimiento económico también se observa para el resto de las variables endógenas, donde los efectos de las dos políticas de capital humano alcanzan niveles similares. En el caso del empleo, mayores tasas de acumulación de capital humano vuelven más rentable la contratación lo que aumenta el nivel de empleo, el esfuerzo de aprendizaje y esfuerzo de búsqueda. El gran aumento en esfuerzo de aprendizaje implica una disminución en el ocio y el nivel de esfuerzo laboral. Luego, existen mayores incentivos a abrir vacantes lo que aumenta la tasa a la que se encuentra empleo, por lo tanto, disminuye la tasa de contratación. Los aumentos en capital humano implican que en todos los casos disminuya el consumo y producto efectivos. En general, los efectos de política sobre el parámetro de capacitación *on the job* tienden a acotarse respecto a la tabla 7, mientras que los efectos de la política sobre el parámetro de experiencia laboral tienden a aumentar lo que reduce las brechas vistas en el caso de sustituibilidad perfecta.

En la tabla 9 se repite el ejercicio presentado en la tabla 8, con la excepción de que sólo se aumenta el grado de complementariedad, manteniendo el peso relativo de las tasas de acumulación de capital humano ( $\chi = 0.522$ ,  $\lambda = 0.72$ ). En este caso el subsidio sobre el componente de experiencia laboral aumenta a 8.98%, mientras que el subsidio al componente de capacitación *on the job* disminuye a 0.91%. En este escenario de mayor complementariedad, la política sobre el parámetro de experiencia laboral aumenta su efecto en todas las variables de la economía respecto a la política sobre capacitación *on the job*. En particular se destaca que el subsidio sobre  $\zeta$  aumenta en 8.50% el crecimiento de largo plazo, y aumenta en 6.74% el esfuerzo de aprendizaje en comparación con los aumentos de 2.24% y 2.60%, generados por el subsidio sobre  $D$ , respectivamente.

En general se observa que, a mayor grado de complementariedad, la política de capital humano sobre  $\zeta$  tiende a ser más efectiva sobre las variables endógenas del modelo que la política de subsidio sobre  $D$ . Los efectos más destacados se observan sobre el crecimiento económico, el esfuerzo de aprendizaje y el esfuerzo de búsqueda de empleo. En un segundo orden de sensibilidad se encuentra el efecto sobre el número de vacantes creadas, el esfuerzo

laboral, el nivel de empleo y la participación laboral. Las variables endógenas menos sensibles tienden a ser el consumo y producción efectiva, la tasa a la que se encuentra empleo y la tasa de contratación.

La mayor efectividad de la política de experiencia laboral ante el aumento de complementariedad en parte se explica por el aumento de la proporción del subsidio destinado a financiar la política. Al observar la ecuación (54) que define  $b_\zeta$ , se advierte que el nivel del subsidio depende negativamente del parámetro  $\zeta$  y del precio del capital humano  $P_h$ . Luego, como se muestra en el anexo G, para Estados Unidos, disminuciones en la sustituibilidad se traducen en que la calibración del parámetro  $\zeta$  sea cada vez menor ( $\partial\zeta/\partial\chi > 0$ ), lo que permite que haya un mayor subsidio por unidad del parámetro de experiencia laboral. Por otro lado, a medida que disminuye la sustituibilidad, el precio unitario del capital humano se vuelve menor para el financiamiento del subsidio del parámetro  $\zeta$ . De la ecuación (56) que define el precio del capital humano y de considerar la última columna de las tablas 7-9 se observa que, a mayor subsidio, el precio del capital humano es menor, es decir, mientras mayor es el subsidio aplicado, se hace más eficiente el gasto unitario en capital humano. Estos dos efectos se refuerzan permitiendo explicar el aumento en el subsidio a medida que aumenta la complementariedad.

Por otro lado, al observar la ecuación (55) que define  $b_D$  se observa una relación análoga a lo visto en (54) con  $b_\zeta$ . Sin embargo, como se presenta en el anexo G, a medida que disminuye la sustituibilidad, la calibración del parámetro  $D$  aumenta ( $\partial D/\partial\chi < 0$ ), por lo que cada vez es menor la proporción del parámetro que se puede subsidiar sujeto a un presupuesto fijo. Por su parte, el precio del capital humano al igual que en el caso anterior, también disminuye al aplicar el subsidio, pero a medida que aumenta la complementariedad, la disminución del precio es cada vez más acotada. A diferencia de lo visto para  $b_\zeta$  en que los efectos de calibración y caída en precio se refuerzan, en el caso de  $D$ , los efectos tienen sentido opuesto, y, más aún, el efecto de calibración domina al efecto de la caída del precio del capital humano, lo que implica que cada vez sea menor la proporción subsidiada en relación con el aumento en complementariedad.

Dado que las dos políticas inciden directamente sobre el nivel de capital humano en la función de producción y su eficiencia en acumulación, por un lado, el esfuerzo de aprendizaje se ve incentivado. Por otro lado, debido a la complementariedad del capital humano con el empleo, aumenta el nivel de empleo lo que incide incentiva el esfuerzo de búsqueda de empleo. Un mayor esfuerzo de aprendizaje repercute en que disminuya el esfuerzo dedicado al trabajo  $\ell$ , y disminuya el ocio de los empleados  $(1 - \ell - e)$ , mientras que el aumento en el esfuerzo de búsqueda de empleo va de la mano con un aumento de la creación de vacantes por parte de las firmas, y un leve aumento en la tasa a la que se encuentra trabajo  $\mu$ . Finalmente, mayores aumentos de vacantes respecto a la medida de desempleo, implica una caída en la tasa de contratación de las firmas  $\eta$ .

Resulta interesante que los resultados vistos en las simulaciones de política contrastan con lo visto en el ejercicio de variación de parámetros exógenos de las secciones 5.3.2 y 5.3.3. En efecto, ante cambios exógenos de los parámetros  $\zeta$  y  $D$ , las variables endógenas siempre fueron más sensibles ante cambios en el parámetro de capacitación *on the job*, sin importar el grado de complementariedad o del multiplicador de habilidad. Sin embargo, en el ejercicio de simulación de esta sección, hemos visto que existe un par  $(\chi = \chi_0, \lambda = \lambda_0)$  a partir del cual es más eficiente destinar todo el subsidio a la formación de capital humano de experiencia laboral.

Las implicancias de política pública de este ejercicio son claras, si no se considera la complementariedad entre las distintas fuentes de acumulación de capital humano y no se hace un esfuerzo por tener una estimación ésta, el hacedor de política podría estar tomando decisiones equivocadas al momento de ejecutar una política de formación de capital humano determinada. Una mala decisión en la composición del gasto puede generar ineficiencias importantes en términos de crecimiento económico e incentivo al esfuerzo laboral, retrasando el progreso económico.

Tabla 7: Experimento de ejecución de política con  $\chi = 1, \lambda = 0.5$  y  $f = 1$

	$g$	$c/h$	$y/h$	$n$	$\ell$	$e$	$1 - \ell - e$	$s$	$\mu$	$\eta$	$v$	$n+u$	$\zeta$	$D$	$P_h$
Benchmark	0.0045	0.0714	0.0959	0.5503	0.3198	0.0802	0.6000	0.1447	0.8342	0.8345	0.0650	0.6154	0.0040	0.1141	6.1130
Subsidio aplicado															
sobre $\zeta$	2.16%	-1.54%	-1.16%	0.13%	-0.12%	0.61%	-0.01%	0.30%	0.00%	-0.01%	0.14%	0.13%	-	-	-0.34%
	3.96%														
sobre $D$	38.59%	-6.85%	-5.88%	9.69%	-10.45%	51.12%	-1.26%	23.60%	0.70%	-1.77%	11.66%	9.61%	-	-	-5.22%
	1.98%														

Nota: Números reportados son cambios porcentuales respecto de su valor benchmark presentados en fila 3 debido a la aplicación del subsidio de la columna 1.

Tabla 8: Experimento de ejecución de política con  $\chi = 0.7225, \lambda = 0.72$  y  $f = 1$

	$g$	$c/h$	$y/h$	$n$	$\ell$	$e$	$1 - \ell - e$	$s$	$\mu$	$\eta$	$v$	$n+u$	$\zeta$	$D$	$P_h$
Benchmark	0.0045	0.0715	0.0959	0.5501	0.3199	0.0800	0.6000	0.1445	0.83422	0.8345	0.065	0.61514	0.0022	0.2656	6.11414
Subsidio aplicado															
sobre $\zeta$	6.35%	-2.05%	-1.59%	0.95%	-1.03%	4.90%	-0.10%	2.09%	0.05%	-0.12%	1.07%	0.95%	-	-	-0.80%
	6.91%														
sobre $D$	5.09%	-0.68%	-0.59%	1.23%	-1.38%	6.51%	-0.13%	2.70%	0.07%	-0.18%	1.41%	1.22%	-	-	-0.79%
	1.26%														

Nota: Números reportados son cambios porcentuales respecto de su valor benchmark presentados en fila 3 debido a la aplicación del subsidio de la columna 1.

Tabla 9: Experimento de ejecución de política con  $\chi = 0.522$ ,  $\lambda = 0.72$ ,  $f = 1$

	$g$	$c/h$	$y/h$	$n$	$\ell$	$e$	$1 - \ell - e$	$s$	$\mu$	$\eta$	$v$	$n+u$	$\zeta$	$D$	$P_h$
Benchmark	0.00450	0.07146	0.09596	0.55010	0.31997	0.08001	0.60002	0.14452	0.83422	0.83454	0.06499	0.61512	0.0018	0.3833	6.1142
Subsidio aplicado															
sobre $\zeta$	8.50%	-2.29%	-1.80%	1.31%	-1.41%	6.74%	-0.14%	2.88%	0.07%	-0.17%	1.48%	1.30%	-	-	-1.02%
8.98%															
sobre $D$	2.24%	-1.63%	-1.25%	0.49%	-0.55%	2.60%	-0.05%	1.07%	0.03%	-0.07%	0.56%	0.49%	-	-	-0.44%
0.91%															

Nota: Números reportados son cambios porcentuales respecto de su valor benchmark presentados en fila 3 debido a la aplicación del subsidio de la columna 1.

#### 5.4.5. Efecto de Política de Capital Humano sobre Bienestar

Para evaluar los escenarios de política, se realiza un análisis de bienestar a través de una descomposición en la utilidad de los hogares. Para esto, se computa la utilidad de todo el ciclo vital de los hogares y se procede a comparar los cambios en utilidad considerando cada uno de los escenarios vistos anteriormente.

En primer lugar, es necesario obtener una expresión que permita calcular la utilidad a través de todo el ciclo vital. De las ecuaciones (5) y (6) se obtiene

$$\Omega(k_t, h_t, n_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^t u(c_t) + n_t \Lambda^1 (1 - \ell_t - e_t) + (1 - n_t) \Lambda^2 (1 - s_t), \quad (57)$$

Luego, al aplicar las formas funcionales vistas en la sección 4.2, obtenemos la expresión de la utilidad específica para las formas funcionales utilizadas

$$\Omega(k_t, h_t, n_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^t \left( \ln(c_t) + \frac{n_t \gamma_1 (1 - \ell_t - e_t)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} + \frac{(1 - n_t) \gamma_2 (1 - s_t)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} \right). \quad (58)$$

Luego al desarrollar la expresión obtenemos la siguiente ecuación que permite computar la utilidad del ciclo vital asociado al equilibrio de estado estacionario<sup>12</sup>.

$$\Omega(k, h, n) = \frac{1+\rho}{\rho} \left[ \ln\left(\frac{c}{h}\right) + \ln(1+g) \frac{1}{\rho} + \frac{n \gamma_1 (1 - \ell - e)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} + \frac{(1-n) \gamma_2 (1-s)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} \right]. \quad (59)$$

A partir de los sumandos de la ecuación (59) podemos descomponer la utilidad en cuatro partes, a saber, consumo efectivo, crecimiento económico, ocio de los empleados y ocio de los desempleados. Luego, el cambio en utilidad debido a la aplicación de las políticas de capital humano se descompone respecto a la utilidad inicial de la siguiente forma:

$$\frac{\Delta \Omega(k, h, n)}{|\Omega_0(k, h, n)|} = \frac{\Delta \Omega(c/h)}{|\Omega_0(k, h, n)|} + \frac{\Delta \Omega(g)}{|\Omega_0(k, h, n)|} + \frac{\Delta \Omega(n, \ell, e)}{|\Omega_0(k, h, n)|} + \frac{\Delta \Omega(n, s)}{|\Omega_0(k, h, n)|}, \quad (60)$$

donde  $|\Omega_0(k, h, n)|$  es el valor absoluto de la utilidad del hogar evaluada en los valores de estado estacionario antes de la aplicación de la política de capital humano,  $\Delta \Omega(k, h, n)$  es el cambio total en utilidad producto de alcanzar el nuevo estado estacionario a causa a la política de subsidio de gobierno,  $\Delta \Omega(c/h)$  es el cambio en utilidad debido al cambio en el consumo efectivo,  $\Delta \Omega(g)$  es el cambio en utilidad debido al cambio en el crecimiento económico sustentado en mejoras de capital humano,  $\Delta \Omega(n, \ell, e)$  es el cambio en utilidad debido al

<sup>12</sup> Derivación de esta ecuación en anexo G.

cambio en el ocio de los empleados y  $\Delta \Omega(n, s)$  es el cambio en utilidad debido al cambio en el ocio de los desempleados.

Las tablas 10, 11 y 12 presentan la descomposición de la utilidad descrita en la ecuación (60), en base a las distintas parametrizaciones vistas en la sección 5.4.4. Específicamente, la tabla 10 presenta la descomposición de la utilidad en la parametrización de tecnología de acumulación de capital humano lineal y con igual importancia entre las tasas de formación de capital humano ( $\chi = 1, \lambda = 0.5$ ). La tabla 11 presenta la descomposición de la utilidad en un escenario donde existe complementariedad y mayor peso relativo de la tasa de experiencia laboral sobre la de capacitación *on the job* ( $\chi = 0.7225, \lambda = 0.72$ ). Finalmente, en la tabla 12 se presenta la descomposición de la utilidad manteniendo la asimetría en el peso relativo de las tasas de acumulación de capital humano, pero aumentando aún más la complementariedad ( $\chi = 0.522, \lambda = 0.72$ ).

En primer lugar, es necesario hacer notar que los cambios totales en utilidad  $\Omega(\cdot)$  son negativos para todos los escenarios dispuestos. Esto es lógico porque se asumió que el equilibrio del modelo cumple con la condición de Hosios, lo que implica que se está logrando el mayor grado de eficiencia posible, por lo tanto, cualquier equilibrio que se genere a causa de la política de gobierno, supone una disminución en la utilidad. Lo anterior significa que este ejercicio es útil para comparar ambas políticas de capital humano, mas no para mejorar la asignación de equilibrio bajo la condición de Hosios.

También se destaca que, en los tres escenarios, la política de capital humano aplicado sobre experiencia laboral genera menor pérdida de bienestar total que la política sobre capital humano de capacitación *on the job*. En el caso lineal (tabla 10), esto sucede porque la política sobre el parámetro  $D$  incentiva de manera importante el esfuerzo de aprendizaje lo que genera una gran pérdida de bienestar debido a la disminución de ocio de los empleados, que la mejora en utilidad por aumento en crecimiento económico no alcanza a compensar<sup>13</sup>.

Luego, en el escenario de complementariedad de la tabla 11, la política de capital humano de mejora de experiencia laboral posibilita que, la mejora en bienestar debido al crecimiento económico, más que compense la pérdida en bienestar por la disminución del ocio de los trabajadores ante aumentos en esfuerzo de aprendizaje. Finalmente, en el escenario de mayor complementariedad (tabla 12), las mejoras en bienestar debido al subsidio sobre  $\zeta$  que aumenta el crecimiento económico, más que compensan las pérdidas en utilidad de los otros componentes, lo que no ocurre en el caso del subsidio sobre  $D$ . Por lo tanto, dado que el subsidio destinado a  $\zeta$  tiene menos incidencia en el esfuerzo de aprendizaje, en general tiende a distorsionar menos las decisiones óptimas de los hogares en contraste con política sobre  $D$  lo que explica la diferencia observada en términos de bienestar.

---

<sup>13</sup> Por lo explicado en la nota al pie 11, los resultados de la tabla 10 son numéricamente distintos a resultados equivalentes en Chen *et al.* (2011).

Del ejercicio de análisis de bienestar, se observa que, para la calibración de la economía de Estados Unidos, en escenarios de mayor complementariedad entre las tasas de acumulación de capital humano, el diseño de política debería dar preferencia a la política de subsidio sobre experiencia laboral, ya que es el que menos se desvía de las decisiones óptimas de los agentes de la economía. Dado que el estímulo del parámetro de experiencia laboral, por la existencia de complementariedad, debe ser acompañado de una mayor tasa de capacitación *on the job*, incentiva el esfuerzo de aprendizaje, lo que implica un aumento del crecimiento económico más eficiente. En el caso de que se subsidie el parámetro  $D$ , dado que  $\zeta$  es fijo, no es posible acompañar con mayor generación de capital humano de experiencia laboral. Por lo tanto, el subsidio resulta menos eficiente en la generación de crecimiento económico, luego, esta pérdida de eficiencia resulta en que no se alcanza a compensar la pérdida de utilidad por el menor consumo de ocio asociado al aumento de esfuerzo de aprendizaje.

En general si sólo consideráramos el escenario de sustitutos perfectos, existe un *tradeoff* entre el objetivo de estimular el crecimiento económico y minimizar la pérdida de bienestar. Si se busca potenciar el crecimiento económico, se debería subsidiar el parámetro  $D$  a costa de mayor pérdida de bienestar. En cambio, si se prefiere la menor pérdida de utilidad, se debería considerar el subsidio del parámetro  $\zeta$ .

Por otra parte, en un escenario de mayor complementariedad, si se considera el estímulo del crecimiento económico un objetivo de política pública prioritario, según lo visto en la sección 5.4.4, el subsidio al parámetro de experiencia laboral es el que resulta más efectivo. Luego, el análisis de bienestar refuerza el hecho de que, en escenarios de alta complementariedad, es preferible un diseño de política que favorezca la generación de capital humano de experiencia laboral. Esto implica que en escenarios de mayor complementariedad no existe *tradeoff* entre los dos diseños de política, sino que siempre es preferible subsidiar el parámetro  $\zeta$ .

Tabla 10: Descomposición del bienestar ante aplicación subsidios con  $\chi = 1$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $f = 1$

	$\Omega$	Consumo	Capital Humano	Ocio Empleados	Ocio Desempleados
Subsidio aplicado					
sobre $\zeta$	-0.16%	-0.33%	0.21%	-0.05%	0.02%
3.96%					
sobre $D$	-0.43%	-1.50%	3.66%	-4.03%	1.44%
1.98%					

Nota: Números reportados son cambios porcentuales respecto de al valor benchmark de la utilidad total.

Tabla 11: Descomposición del bienestar ante aplicación subsidios con  $\chi = 0.7225$ ,  $\lambda = 0.72$ ,  $f = 1$

	$\Omega$	Consumo	Capital Humano	Ocio Empleados	Ocio Desempleados
Subsidio aplicado					
sobre $\zeta$	-0.08%	-0.44%	0.60%	-0.38%	0.14%
6.91%					
sobre $D$	-0.26%	-0.43%	0.48%	-0.50%	0.18%
1.26%					

Nota: Números reportados son cambios porcentuales respecto de al valor benchmark de la utilidad total.

Tabla 12: Descomposición del bienestar ante aplicación subsidios con  $\chi = 0.522$ ,  $\lambda = 0.72$ ,  $f = 1$

	$\Omega$	Consumo	Capital Humano	Ocio Empleados	Ocio Desempleados
Subsidio aplicado					
sobre $\zeta$	-0.02%	-0.49%	0.81%	-0.53%	0.20%
8.98%					
sobre $D$	-0.26%	-0.35%	0.21%	-0.20%	0.07%
0.91%					

Nota: Números reportados son cambios porcentuales respecto de al valor benchmark de la utilidad total.

## 6. Análisis Numérico para Chile

### 6.1. Calibración

En esta sección se busca aplicar el modelo expuesto en esta tesis a una economía en desarrollo, por lo que se calibra los parámetros para la economía chilena. La tabla 13 presenta los valores de referencia obtenidos. El dato de crecimiento per cápita se obtiene de Banco Central de Chile (2017) que proyecta un crecimiento tendencial de largo plazo anual al 2050 de 3.2%. Luego al descontar el crecimiento de la fuerza laboral que, para el mismo período, corresponde a 0.8% anual, se obtiene un crecimiento per cápita de 2.4%. Por lo tanto, el crecimiento trimestral es  $g = 1.024^{1/4} - 1 \approx 0.005947$ .

La tasa de depreciación del capital y la tasa natural de desempleo se obtienen de las actas del Comité Consultivo del PIB Tendencial en Dipres (2021) proyectadas hasta el año 2026. La tasa de depreciación anual se establece en 5.9%, por lo tanto, la tasa trimestral de depreciación es  $\delta = 1.059^{1/4} - 1 \approx 0.01443$ , por otra parte, el comité establece que la tasa natural de desempleo es de 7.2%. Luego, se considera que la tasa intertemporal de descuento subjetiva toma el valor estándar asumido por la literatura  $\rho = 0.01$  que, por ejemplo, también es asumido en Bauducco y Caputo (2010).

Basados en la encuesta nacional de uso de tiempo del INE del año 2015, Jara-Díaz y Candia (2017) establecen que la fracción del tiempo de la semana laboral dedicada al trabajo remunerado corresponde aproximadamente a una fracción  $\ell = 0.32$  semanal y que el tiempo dedicado a educarse en trabajadores entre 15 y 65 años corresponde aproximadamente a una fracción de 2% del total de la semana. Sin embargo, la información de Chen *et al.* (2011) incorpora otras fuentes de aprendizaje en este apartado como capacitaciones y aprendizaje en el trabajo, por lo tanto se considera una fracción de aprendizaje  $e = 0.04$ , luego la fracción de tiempo destinado al ocio es  $1 - 0.32 - 0.04 = 0.64$ .

La participación del capital físico en la economía chilena se obtiene del Informe Anual de la Comisión Nacional de Productividad de 2016, que también es utilizado por Dipres, correspondiendo a  $\alpha = 0.48$ . Por su parte, la tasa de participación laboral se obtiene de promediar las estimaciones de participación laboral del Ministerio de Desarrollo Social desde 1992 hasta 2020 calculados a partir de la Encuesta Casen. Así la participación laboral corresponde a  $FL \equiv n + u = 0.563$ .

Las tasas de destrucción de empleo y la tasa a la que se encuentra trabajo se obtienen de Naudón y Pérez (2018) que calculan los *hazard rates* para Chile. Se toman los valores más recientes asociados al 7.7% de desempleo correspondiente al período 2010-2015. La tasa mensual de destrucción de empleo corresponde a 2.8%, por lo que la tasa trimestral es  $\psi = 1 - (1 - 0.028)^3 \approx 0.0817$ . Luego el valor de la probabilidad a la que se encuentra trabajo se obtiene de la Curva de Beveridge, donde sabemos que el valor trimestral es  $\mu = n\psi / u = 0.5549$ .

Finalmente, debido a la ausencia de datos comparables a los de Estados Unidos, se toma de *benchmark* la calibración de Chen *et al.* (2011) para los datos de Chile. La relación  $k/h$  se normaliza en 1, se establece la participación del trabajador en la función de *matching*  $\beta = 0.72$  y la razón entre vacantes abiertas y búsqueda de empleo; estos tres datos siguen a Chen *et al.* (2011). Luego, se asume a partir de Sánchez y Villena (2021) que la elasticidad de oferta de trabajo chilena debe ser menor a la de Estados Unidos, por lo que se fija en 0.91 veces la de Estados estableciéndose en  $(1/\ell - 1)/\sigma = 1$ . Finalmente, se asume que el costo de creación de vacantes por trabajador en Chile debería ser mayor a la de Estados Unidos, por lo que se fija en 1.2 veces mayor al valor de calibración presentado para Estados Unidos, estableciéndose en  $\Phi(v)/n = 0.03$ .

Tabla 13: Valores de parámetros de calibración para Chile

Parámetro de Referencia	Símbolo	Valor
Tasa de crecimiento económico per cápita	$g$	0.0059
Tasa depreciación capital	$\delta$	0.014
Tasa de descuento intertemporal subjetiva	$\rho$	0.01
Razón stock capital físico-capital humano	$k/h$	1
Fracción del tiempo destinado a trabajo	$\ell$	0.32
Fracción del tiempo destinado a aprendizaje	$e$	0.04
Participación capital en producto	$\alpha$	0.48
Participación del trabajador en función de matching	$\beta$	0.72
Tasa de destrucción de empleo	$\psi$	0.0817
Tasa a la que se encuentra trabajo	$\mu$	0.5549
Tasa de participación laboral	$n+u$	0.563
Medida de desempleo	$u$	0.072
Razón de vacantes abiertas - búsqueda de empleo	$v/u$	1
Elasticidad oferta trabajo	$(1/\ell - 1) / \sigma$	1
Costo de creación de vacante por empleado	$\Phi(v)/n$	0.03

Al comparar los datos chilenos con los datos de referencia para Estados Unidos (tabla 1), se observan algunas diferencias que merecen ser comentadas. En primer lugar, el crecimiento trimestral per cápita para Chile es mayor (0.0059 versus 0.0045), esto se puede explicar por un efecto de catch-up de economía en desarrollo, donde el capital y la tecnología tienden a generar rendimientos marginales mayores de los factores respecto a economías desarrolladas. En el caso de la depreciación del capital, Chile presenta una menor tasa (0.014 versus 0.02). Si bien el tiempo de esfuerzo laboral es idéntico para ambas economías (0.32), el esfuerzo de aprendizaje es menor para Chile (0.04 versus 0.08). Esto implica que los empleados chilenos consumen más ocio que sus pares estadounidenses. Una diferencia relevante es la participación del capital en la calibración para Chile, mucho mayor a la de Estados Unidos (0.48, versus 0.36). Respecto a las tasas de destrucción de empleo y la tasa a la que se encuentra trabajo, Chile muestra un mercado laboral menos dinámico, ya que ambas tasas

son menores a las de Estados Unidos. Junto con esto, la tasa de desempleo estadounidense de largo plazo es menor a la chilena, y la participación laboral es mayor en Estados Unidos.

Tabla 14: Valores calibrados a partir de parámetros de calibración para Chile

Variable calibrada	Símbolo	Valor
Parámetro de eficiencia productiva	$A$	0.1682
Parámetro de eficiencia de matching	$B$	0.5569
Razón capital-producto	$k/y$	15.7684
Razón consumo-producto	$c/y$	0.6786
Razón consumo-capital humano	$c/h$	0.0430
Parámetro de costo de creación de vacante	$\phi$	31.7105
Tasa de retorno del capital	$r_k$	0.0304
Elasticidad de sustitución del ocio	$\sigma$	2.125
Medida de desempleo	$u$	0.072
Fracción población dedicada al empleo	$n$	0.491
Intensidad de búsqueda de empleo	$s$	0.1415
Creación de vacante	$v$	0.072
Elasticidad de costo de creación de vacante	$\varepsilon$	2.9169
Tasa de reclutamiento de trabajadores	$\eta$	0.5569
Coefficiente de función de utilidad	$\gamma_1$	1.8891
Coefficiente de función de utilidad	$\gamma_2$	1.7853

De forma análoga a lo visto en la sección 5.1 en la calibración para Estados Unidos, a partir de los valores de referencia de la tabla 13, se obtiene el resto de los parámetros y valores de referencia de las variables del modelo que permite realizar las simulaciones para la economía chilena. En la tabla 14 se presentan los valores calculados.

En relación con lo visto para Estados Unidos en la tabla 2, la calibración para Chile presenta un menor valor para el parámetro de eficiencia productiva  $A$  y de eficiencia de *matching* en el mercado del trabajo,  $B$  lo que es esperable en una economía menos desarrollada y con mayores fricciones en el mercado laboral. Asimismo, Estados Unidos presenta menor desempleo, mayor esfuerzo de búsqueda de empleo y mayor participación laboral. Luego, la razón capital físico-producto es mayor para Chile, mientras que la razón consumo-producto y consumo-capital humano es mayor para Estados Unidos.

La tasa de retorno del capital es levemente mayor para Estados Unidos. En contraste, el parámetro exógeno  $\phi$  de costo de creación de vacante es mayor para Chile, así como la convexidad de la función de costos representado por el parámetro  $\varepsilon$ . La elasticidad de sustitución del ocio por trabajo es mayor para Chile, determinado por el supuesto de la menor elasticidad de la oferta de trabajo. Finalmente, la tasa de creación de vacantes  $v$ , por construcción, es un espejo de la tasa de desempleo, siendo mayor para Chile, y los parámetros exógenos  $\gamma_i$  que determinan la valoración por el ocio son mayores para Chile, donde el trabajador empleado valora más el ocio que el trabajador desempleado.

## 6.2. Valores de Calibración de $\zeta$ y $D$

La tabla 15 expone los valores de calibración  $\chi$ ,  $\lambda$  y  $f$  que son utilizados en los ejercicios de simulación para la economía chilena. Al igual que la tabla 3, la primera columna presenta el valor de  $\chi$ , que determina el valor de la elasticidad de sustitución  $\sigma_\chi$  presentado en la segunda columna. La tercera columna presenta el valor de multiplicador de habilidades que especifica la importancia relativa de las fuentes de acumulación de capital humano. La columna 4 presenta el valor de normalización de la suma de los ponderadores. Las columnas 5 y 6 presentan los valores de calibración que se obtienen de resolver el sistema de ecuaciones definido por (30) y (33).

Tabla 15: Valores de calibración utilizados en simulaciones

$\chi$	$\sigma_\chi = 1/(1 - \chi)$	$\lambda$	$f$	$\zeta$	$D$
1	indeterminado	0.5	1	0.00938	0.12805
0.7225	3.604	0.72	1	0.00674	0.20528
0.522	2.092	0.72	1	0.00708	0.17681

En relación con la calibración para Estados Unidos expuesta en la tabla 3, esta tabla sólo considera el caso en que el factor de normalización de ponderadores es  $f = 1$ . La calibración para Chile de los parámetros  $\zeta$  y  $D$ , en general, presenta valores más altos para  $\zeta$  y menores para  $D$  respecto a Estados Unidos.

## 6.3. Variación Exógena de Parámetros

Las tablas 16, 17 y 18 repiten el ejercicio de las tablas 4, 5 y 6, pero, en este caso, para la economía chilena. Se presentan los cambios porcentuales de distintas variables de interés respecto al valor de referencia de calibración (*benchmark*) ante aumentos exógenos de 1% en parámetros de mercado laboral ( $B$ ,  $\psi$ ,  $\phi$ ) y de acumulación de capital humano ( $\zeta$ ,  $D$ ) en distintos escenarios de complementariedad y multiplicadores de habilidad. La tabla 16 muestra el caso de sustituibilidad perfecta entre las tasas de acumulación de capital humano ( $\lambda = 0.5$  y  $\chi = 1$ ), la tabla 17 muestra el caso en que no existe sustituibilidad perfecta ( $\chi = 0.7225$ ), y el multiplicador de habilidades da mayor peso relativa al componente de experiencia laboral en la acumulación de capital humano ( $\lambda = 0.72$ ). La tabla 18, presenta el escenario en que se mantiene el multiplicador de habilidades en  $\lambda = 0.72$ , pero se aumenta el grado de complementariedad a  $\chi = 0.522$ .

### 6.3.1. Análisis Numérico con Sustituibilidad Perfecta

En general se observa el mismo patrón de sensibilidad de las variables endógenas respecto a los cambios exógenos visto para el caso de Estados Unidos y por lo tanto las explicaciones de las relaciones entre variables vistas en la sección 5.3, son válidas para esta sección. Con el propósito de no ser repetitivo respecto a lo visto para la calibración estadounidense, aquí se buscará dar relevancia, más allá de las diferencias numéricas, lo que distingue los resultados de Chile respecto a los de Estados Unidos.

La tabla 16 presenta un patrón similar al escenario de sustituibilidad perfecta visto para Estados Unidos en la tabla 4, es decir, el aumento en cualquiera de los parámetros sujetos a política de capital humano, aumenta el esfuerzo de aprendizaje, lo que implica un aumento en el empleo y el crecimiento económico. Ambos parámetros aumentan la tasa de acumulación de capital humano, lo que implica un aumento en la productividad del trabajo lo que, a su vez induce una mayor participación laboral e incentiva un aumento en el esfuerzo de búsqueda laboral por parte de los trabajadores, y un aumento en las vacantes abiertas por parte de las firmas.

En comparación a Estados Unidos, se observan mayores cambios porcentuales en todas las variables endógenas debido al alza en el parámetro de experiencia laboral. Por otro lado, para la calibración chilena, el alza en el parámetro de capacitación *on the job*, implica un menor aumento en el crecimiento de todas las variables respecto a lo visto para Estados Unidos, con excepción del esfuerzo de aprendizaje. Esto último, se debe a que el *benchmark* de esfuerzo de aprendizaje para Chile es relativamente bajo.

Es necesario detenerse un momento en las variables del mercado laboral. Al aplicar logaritmo natural y diferenciar la Curva de Beveridge descrita en la ecuación (29), sabemos que los movimientos del equilibrio de estado estacionario deben respetar la siguiente condición:

$$\Delta\% \eta \approx \Delta\% \mu + \Delta\% u - \Delta\% v. \quad (61)$$

Es decir, el cambio porcentual en la tasa de contratación es aproximadamente igual al cambio porcentual en la tasa a la que se encuentra empleo, más el cambio porcentual en la tasa de desempleo, menos el cambio porcentual en la fracción de vacantes creadas por las firmas. Por lo tanto, variaciones en las condiciones del mercado laboral deben compensarse manteniendo el equilibrio descrito por estas cuatro variables. Intuitivamente, si la tasa de contratación aumenta puede deberse a que: 1) disminuyó el total de vacantes disponibles; 2) porque hay una mayor cantidad de trabajadores buscando empleo; 3) debido a que los trabajadores están encontrando empleo más rápidamente; o 4) debido a una combinación de estas tres posibilidades.

Considerando que la calibración para Chile asume un costo exógeno de creación de vacantes  $\phi$  y convexidad de la función de costos  $\varepsilon$  mayores respecto a Estados Unidos, se observa un patrón distinto de variación en  $\eta, \mu, u, v$  respecto a lo visto en la tabla 4. En efecto, un aumento de 1% en el parámetro de experiencia laboral aumenta más el desempleo y la creación de vacantes para la calibración de Chile respecto a la de Estados Unidos, sin embargo, se observa lo contrario para el parámetro de capacitación *on the job*. Por otro lado, la diferencia  $\Delta\% u - \Delta\% v$  es positiva y mayor a  $\Delta\% \eta$  para Chile ante aumentos en ambos parámetros de acumulación de capital humano, lo que implica que se observe un cambio negativo en la tasa a la que se encuentra empleo  $\mu$ . Esto va en oposición de lo que se vio para la calibración de Estados Unidos en la tabla 4.

En el caso de mejoras en los parámetros del mercado laboral (aumento en eficiencia de emparejamiento  $B$ , disminución de la tasa de destrucción de empleo  $\psi$ , y disminución de parámetro exógeno de costo de contratación  $\phi$ ), para Chile se presenta el mismo patrón de signos de variaciones visto en la tabla 4 para Estados Unidos, esto es, aumentan el nivel de empleo y la probabilidad de generación de un emparejamiento. El aumento en productividad causa un mayor ingreso que incentiva el aumento en empleo, esfuerzo de aprendizaje y esfuerzo de búsqueda de empleo, sin embargo, el alza en la probabilidad de emparejamiento genera un incentivo a bajar el esfuerzo de búsqueda de empleo y a bajar el esfuerzo laboral. Bajo esta calibración el efecto del aumento en el ingreso es el que domina.

En términos generales, ante la mejora en eficiencia de emparejamiento y las variables del mercado laboral, se observa mayor sensibilidad de reacción para todas las variables en la calibración de Chile, donde destaca el efecto sobre el esfuerzo de aprendizaje. Por su parte, las variaciones en los parámetros del mercado laboral generan una menor sensibilidad de reacción. Se destaca que el crecimiento económico muestra menor sensibilidad de reacción ante los cambios en los parámetros exógenos. Por último, resulta interesante que la variación exógena del parámetro de experiencia laboral es la única que produce una reacción mayor en todas las variables endógenas respecto a los resultados para la calibración estadounidense.

### **6.3.2. Análisis Numérico sin Sustituibilidad Perfecta**

La tabla 17 presenta los resultados para la calibración chilena, donde se disminuye el grado de sustituibilidad a  $\chi = 0.7225$  y se incorpora asimetría al peso relativo de las tasas de acumulación humano dando mayor importancia al factor de experiencia laboral ( $\lambda = 0.72$ ). De manera análoga a lo visto para Estado Unidos en la tabla 5, en la tabla 17 se observa, en general, una menor sensibilidad de reacción de las variables endógenas ante aumentos en la complementariedad entre las tasas en relación con el caso de sustituibilidad perfecta.

En contraste con lo visto para Estados Unidos, la sensibilidad de las variables endógenas ante el aumento exógeno del parámetro  $\zeta$  cambia muy poco, sin aumentar en ningún caso, respecto al escenario de sustituibilidad perfecta. Se observa un menor crecimiento económico (disminuye de +1.05% a +1%), menor esfuerzo de aprendizaje (disminuye de +1.12% a +0.92%) y menor esfuerzo de búsqueda (disminuye de +0.22% a +0.19%). Por otro lado, similar a lo visto para el caso de Estados Unidos, se destaca la menor influencia del parámetro  $D$  sobre el crecimiento económico (disminuye de +11.38% a +0.93%) y sobre el esfuerzo de aprendizaje (disminuye de +46.78% a +3.11%). En la misma línea, la mejora en  $D$  disminuye el esfuerzo de búsqueda de empleo (cae de +7.82% a +0.51%), aumenta el esfuerzo laboral (aumenta de -4.51% a -0.30%) y disminuye el empleo (cae de +3.76% a +0.25%). A diferencia de lo visto para Estados Unidos, las mejoras en ambos parámetros de capital humano generan disminuciones en la tasa a la que se encuentra empleo  $\mu$ , y aumentos en la tasa de contratación de las firmas  $\eta$ .

Para el caso de mejoras en los parámetros del mercado laboral (aumentos en  $B$  y disminuciones en  $\psi$  y  $\phi$ ) en general, y de manera similar a lo visto para Estados Unidos, se observa una menor sensibilidad de reacción de las variables. En el caso específico de mejoras en la tasa de destrucción de empleo se da una diferencia respecto a Estados Unidos, en particular se observa un leve aumento en el número de vacantes disponibles. Finalmente, el menor esfuerzo de búsqueda más la disminución en el número de desempleados genera que la medida de desempleo  $u \equiv s(1 - n)$  disminuya ante mejoras en parámetros de mercado laboral. Luego la menor rentabilidad del capital humano anula la sustitución de capital humano por capital físico disminuyendo el producto efectivo. Luego, el acotado aumento en capital humano, el bajo aumento en costos de contratación por el menor aumento en empleo y la baja caída en esfuerzo laboral permite que el producto y consumo efectivo aumenten.

La tabla 18 presenta los resultados para la calibración chilena, donde se disminuye el grado de sustituibilidad a  $\chi = 0.522$  y se mantiene la asimetría que da mayor importancia al factor de experiencia laboral ( $\lambda = 0.72$ ). De manera análoga a lo visto para Estados Unidos en la tabla 6, la tabla 18, en general, presenta una menor sensibilidad de reacción de las variables endógenas ante aumentos en la complementariedad. En primer lugar, se destaca que la sensibilidad de las variables endógenas ante mejoras en el parámetro de experiencia laboral no cambia respecto a tabla 17. Esto es similar a lo visto para Estados Unidos al comparar las tablas 5 y 6.

Por otra parte, disminuye la incidencia del parámetro de capacitación *on the job* sobre las variables endógenas. En concreto destacan la reducción del efecto positivo sobre el esfuerzo de aprendizaje (disminuye de +3.11% a +1.48%) y la reducción del efecto sobre el crecimiento económico (cae de +0.93% a +0.55%). En línea con lo visto para los parámetros de capital humano, ante aumentos en el grado de complementariedad, en general, también se observa una caída de la sensibilidad de las variables endógenas respecto a cambios exógenos en los parámetros que definen el mercado laboral.

Al considerar los resultados de las tablas 16, 17 y 18, se observa un patrón similar al visto para Estados Unidos, es decir, mayores grados de complementariedad, implican una disminución en la sensibilidad de reacción de las variables endógenas ante cambios en parámetros exógenos del mercado laboral y de acumulación de capital humano. En particular para la calibración chilena se advierten variaciones particularmente extremas en el esfuerzo de aprendizaje, lo cual se explica por el hecho de que en el caso chileno, el esfuerzo de aprendizaje de referencia es la mitad del estadounidense, por lo que una política que afecte a esta variable tiene más espacio de reacción en términos porcentuales. El ejercicio para la calibración de Chile repite la conclusión general vista para Estados Unidos: al incorporar una tecnología de acumulación de capital humano donde existe una complementariedad entre las tasas de acumulación de capital humano, aumentos en complementariedad limita la capacidad de influencia en parámetros exógenos de todas las variables de la economía.

Tabla 16: Efecto sobre variables de interés ante cambios exógenos en variables de política con  $\chi = 1$ ,  $\lambda = 0.5$  y  $f = 1$

	$g$	$c/h$	$k/h$	$y/h$	$n$	$\ell$	$e$	$s$	$\mu$	$\eta$	$v$	$u$	$n + u$
Benchmark	0.0059	0.043	1.00	0.0634	0.491	0.32	0.04	0.1415	0.5569	0.5569	0.072	0.072	0.563
$\zeta$ alza en 1%	1.05%	-0.24%	-0.39%	-0.19%	0.11%	-0.10%	1.12%	0.22%	-0.01%	0.02%	0.09%	0.12%	0.11%
$D$ alza en 1%	11.38%	-3.60%	-5.24%	-3.12%	3.76%	-4.51%	46.78%	7.82%	-0.15%	0.40%	3.34%	3.92%	3.78%
$B$ alza en 1%	3.86%	-0.89%	-1.47%	-0.72%	1.92%	-1.86%	16.02%	2.71%	1.11%	0.73%	1.19%	0.81%	1.78%
$\psi$ alza en y 1%	-3.74%	0.88%	1.46%	0.71%	-1.86%	1.88%	-16.11%	-2.53%	-0.10%	0.26%	-1.14%	-0.78%	-1.72%
$\phi$ alza en 1%	-0.38%	0.09%	0.15%	0.07%	-0.19%	0.19%	-1.60%	-0.26%	-0.11%	0.27%	-0.46%	-0.08%	-0.17%

Nota: Números reportados en filas 3 a 7 son cambios porcentuales respecto de su valor benchmark presentados en fila 3 debido a un aumento exógeno de 1% en las variables claves de la columna 1.

Tabla 17: Efecto sobre variables de interés ante cambios exógenos en variables de política con  $\chi = 0.7225$ ,  $\lambda = 0.72$  y  $f = 1$

	$g$	$c/h$	$k/h$	$y/h$	$n$	$\ell$	$e$	$s$	$\mu$	$\eta$	$v$	$u$	$n + u$
Benchmark	0.0059	0.043	1.00	0.0634	0.491	0.32	0.04	0.1415	0.5569	0.5569	0.072	0.072	0.563
$\zeta$ alza en 1%	1.00%	-0.22%	-0.37%	-0.18%	0.09%	-0.08%	0.92%	0.19%	-0.01%	0.02%	0.07%	0.10%	0.09%
$D$ alza en 1%	0.93%	-0.27%	-0.41%	-0.23%	0.25%	-0.30%	3.11%	0.51%	-0.01%	0.03%	0.22%	0.26%	0.25%
$B$ alza en 1%	0.30%	0.26%	0.21%	0.27%	0.70%	-0.38%	0.74%	0.21%	1.16%	0.59%	0.10%	-0.46%	0.55%
$\psi$ alza en 1%	-0.28%	-0.25%	-0.20%	-0.26%	-0.65%	0.35%	-0.70%	-0.12%	-0.16%	0.41%	-0.07%	0.50%	-0.50%
$\phi$ alza en 1%	-0.03%	-0.02%	-0.02%	-0.03%	-0.07%	0.04%	-0.07%	-0.02%	-0.11%	0.29%	-0.35%	0.04%	-0.05%

Nota: Números reportados en filas 3 a 7 son cambios porcentuales respecto de su valor benchmark presentados en fila 3 debido a un aumento exógeno de 1% en las variables claves de la columna 1.

Tabla 18: Efecto sobre variables de interés ante cambios exógenos en variables de política con  $\chi = 0.522$ ,  $\lambda = 0.72$  y  $f = 1$

	$g$	$c/h$	$k/h$	$y/h$	$n$	$\ell$	$e$	$s$	$\mu$	$\eta$	$v$	$u$	$n + u$
Benchmark	0.0059	0.043	1.00	0.0634	0.491	0.32	0.04	0.1415	0.5569	0.5569	0.072	0.072	0.563
$\zeta$ alza en 1%	1.00%	-0.22%	-0.37%	-0.18%	0.09%	-0.08%	0.92%	0.19%	-0.01%	0.02%	0.07%	0.10%	0.09%
$D$ alza en 1%	0.55%	-0.15%	-0.23%	-0.13%	0.12%	-0.14%	1.48%	0.25%	-0.01%	0.02%	0.11%	0.13%	0.12%
$B$ alza en 1%	0.18%	0.30%	0.27%	0.31%	0.65%	-0.32%	0.21%	0.13%	1.16%	0.58%	0.07%	-0.50%	0.50%
$\psi$ alza en 1%	-0.17%	-0.28%	-0.26%	-0.29%	-0.61%	0.31%	-0.20%	-0.04%	-0.16%	0.42%	-0.03%	0.55%	-0.46%
$\phi$ alza en 1%	-0.02%	-0.03%	-0.03%	-0.03%	-0.06%	0.03%	-0.02%	-0.01%	-0.11%	0.29%	-0.35%	0.05%	-0.05%

Nota: Números reportados en filas 3 a 7 son cambios porcentuales respecto de su valor benchmark presentados en fila 3 debido a un aumento exógeno de 1% en las variables claves de la columna 1.

## 6.4. Política de Capital Humano

Las tablas 19, 20 y 21 presentan los resultados de aplicar una política de subsidio a los parámetros de la tecnología de acumulación de capital humano considerando los distintos valores de  $\chi$  y  $\lambda$  vistos en el ejercicio de variación exógena de la sección anterior. La proporción subsidiada corresponde a lo que permite el gasto del 1% del *benchmark* del PIB efectivo chileno de estado estacionario ( $T/h = 0.01 \cdot y/h = 0.00063$ ).

### 6.4.1. Simulación de Política de Capital Humano

La tabla 19 presenta el escenario en que la tecnología de acumulación de capital humano es de perfectos sustitutos y se ponderan de igual manera las tasas de acumulación de capital humano ( $\chi = 1, \lambda = 0.5$ ). En caso de subsidiar el componente de experiencia laboral, la proporción total de subsidio alcanza 2.07% del parámetro  $\zeta$ , por otro lado, en caso de subsidiar sólo el componente de capacitación *on the job*, el subsidio alcanza 3.30% del parámetro  $D$ .

Similar a lo visto para la calibración de la economía de Estados Unidos, los resultados presentados en la tabla 19 muestran que la política de subsidio sobre el parámetro de capacitación *on the job* genera mayores efectos sobre todas las variables endógenas, respecto a la política aplicada sobre el parámetro de experiencia laboral. En particular para el crecimiento económico, el efecto de la política sobre  $D$  genera un aumento de +35.15% versus +2.17% en caso de la política sobre  $\zeta$ .

Los aumentos en capital humano a partir de la política sobre el parámetro de capacitación *on the job* se ven reflejados en una significativa disminución en la razón  $y/h$  (-10.34%), un aumento en el nivel de empleo (+10.72%), un acentuado aumento en esfuerzo de aprendizaje (+132.78%), y disminuciones en el esfuerzo de trabajo (-12.38%) y el nivel de ocio (-2.11%). La gran mejora en capital humano también incide de manera importante en el esfuerzo de búsqueda (+23.89%), la participación laboral (+10.76%) y el número de vacantes creadas (+9.76%). Por último, se observa una reducción de -0.34% en la tasa a la que se encuentra empleo y un aumento de 0.87% de la tasa de contratación. En caso de la especificación de sustituibilidad perfecta, las magnitudes para la calibración chilena son mucho mayores a las vistas para Estados Unidos. Por otra parte, los efectos del subsidio sobre el parámetro de experiencia laboral son muy acotados, pero en el mismo sentido que los visto para el subsidio de capacitación *on the job*.

En la tabla 20 se repite el ejercicio de la tabla 19, con la diferencia de que en este caso se aumenta la complementariedad y se asume que el parámetro asociado a la acumulación de experiencia laboral tiene mayor ponderación en la tecnología de acumulación de capital humano ( $\chi = 0.7225, \lambda = 0.72$ ). En este caso el subsidio sobre  $\zeta$  aumenta a 2.89%, mientras que el subsidio sobre  $D$  aumenta a 4.23%.

En este escenario la política sobre capacitación *on the job* aumenta más el esfuerzo de aprendizaje (+13.63%) respecto a la política sobre experiencia laboral (+2.66%), a su vez el

aumento en el crecimiento económico aumenta más en el caso de la política sobre capacitación *on the job* (+4.09%) que la política de experiencia laboral (+2.90%). Este resultado continúa la tendencia vista en la tabla 19, aunque los efectos aquí son menores para todas las variables endógenas, en que no se exhiben cambios relevantes respecto a los resultados visto en la tabla 19.

En la tabla 21 se repite el ejercicio presentado en la tabla 20, con la excepción de que sólo se aumenta el grado de complementariedad, manteniendo el peso relativo de las tasas de acumulación de capital humano ( $\chi = 0.522$ ,  $\lambda = 0.72$ ). En este caso el subsidio sobre el componente de experiencia laboral disminuye a 2.75%, observándose un aumento menor a lo visto en la tabla 20. Por su parte el subsidio al componente de capacitación *on the job* aumenta a 5.18%. En este escenario de mayor complementariedad, la política sobre el parámetro de experiencia laboral tiene un efecto similar en todas las variables de la economía respecto a la política sobre capacitación *on the job*, con excepción del efecto sobre el esfuerzo de aprendizaje.

Contrario a lo visto para Estados Unidos, se observa que, para la calibración chilena, a menor grado de sustituibilidad, la política de capital humano sobre la experiencia laboral tiende a ser menos efectiva sobre las variables endógenas del modelo respecto a la política de subsidio sobre la capacitación *on the job*. En parte, esto se explica por la relación entre el grado de sustituibilidad  $\chi$  y los valores de calibración  $\zeta$  y  $D$ . Tal como se presenta en el anexo G, a medida que disminuye la sustituibilidad, la calibración del parámetro  $D$  disminuye ( $\partial D / \partial \chi > 0$ ), y lo contrario ocurre para  $\zeta$  ( $\partial \zeta / \partial \chi < 0$ ). Por lo tanto en la tabla 21, existe un aumento en el valor de calibración del parámetro  $\zeta$  y una disminución el valor de calibración del parámetro  $D$  respecto a la tabla 20.

Luego, de la ecuación (54) se advierte que existe una relación negativa entre  $\zeta$  y  $b_\zeta$ , por lo que aumentos en  $\zeta$  implican que se financia una menor proporción de este parámetro, provocando que sea menos efectiva la política. La disminución en el nivel de subsidio conlleva disminuciones en la reacción de las variables endógenas ante la aplicación de la política de capital humano respecto al caso de mayor sustituibilidad. De la misma ecuación (54) también notamos que existe una relación negativa entre  $\zeta$  y  $P_h$ , luego, de las tablas 20 y 21, se advierte que un menor grado de sustituibilidad implica un aumento en el precio del capital humano, lo que refuerza la disminución del subsidio  $b_\zeta$ .

Por su parte de la ecuación (55) notamos que existe una relación negativa entre  $D$  y  $b_D$ , por lo que disminuciones en  $D$  implican que se financia una mayor proporción de este parámetro, haciendo más efectiva la política. Además, de la ecuación (55) también se observa que existe una relación negativa entre  $b_D$  y  $P_h$ , asimismo, de las tablas 20 y 21, es posible notar que un menor grado de sustituibilidad implica un aumento en el precio del capital humano, lo que va en contra del efecto de calibración sobre  $D$ . Sin embargo, el efecto positivo de calibración domina al efecto negativo del precio del capital humano, por lo que observamos alzas en el

nivel de subsidio del parámetro de capacitación *on the job*. Los resultados muestran que si bien el subsidio es mayor, no logra aumentar la sensibilidad de reacción de las variables endógenas; esto se debe a que los aumentos de generación de capital humano de capacitación *on the job* no son acompañados de aumentos de capital humano de experiencia laboral lo que hace menos efectiva la política de subsidio.

En otro ámbito, respecto a lo visto para Estados Unidos, se observa que debido al mayor costo de vacantes y a la mayor convexidad de la función de costos, la calibración chilena tiende a ajustar el mercado laboral mediante la tasa de contratación y la tasa a la que se encuentra empleo antes que por medio del cambio en el número de vacantes disponibles.

La dirección de los resultados vistos en las simulaciones de política no contrasta con lo visto en el ejercicio de variación de parámetros exógenos de las secciones 6.3.1 y 6.3.2. En efecto, con excepción del crecimiento económico, ante cambios exógenos de los parámetros  $\zeta$  y  $D$ , las variables endógenas tendieron a ser igual o más sensibles ante cambios en el parámetro de capacitación *on the job* respecto al parámetro de experiencia laboral. Sin embargo, en el ejercicio de simulación de políticas de capital humano de esta sección, hemos visto que, en distintos escenarios de complementariedad, en términos del efecto sobre el crecimiento económico, tiende a predominar una preferencia por subsidiar el parámetro de capacitación *on the job*, lo que contrasta con lo visto para la calibración de Estados Unidos.

Esto se debe a que, a diferencia del visto para Estados Unidos, en la calibración chilena, aumentos en complementariedad se traducen en disminuciones de la proporción subsidiada del parámetro  $\zeta$  lo que implica que la política sea cada vez menos efectiva para incidir sobre el parámetro de experiencia laboral. Las implicancias de política pública de este ejercicio ya no son evidentes, ya que, en escenarios de alta complementariedad, no se observa un claro beneficio de la política enfocada a la capacitación *on the job* por sobre la política de mejora del parámetro de experiencia laboral o viceversa.

Tabla 19: Experimento de ejecución de política con  $\chi = 1$ ,  $\lambda = 0.5$  y  $f = 1$

	$g$	$c/h$	$y/h$	$n$	$\ell$	$e$	$1 - \ell - e$	$s$	$\mu$	$\eta$	$v$	$n+u$	$\zeta$	$D$	$P_h$
Benchmark	0.0059	0.0430	0.0634	0.4910	0.3200	0.0400	0.6400	0.1415	0.5569	0.5569	0.0720	0.5630	0.0094	0.1280	3.2782
Subsidio aplicado															
sobre $\zeta$	2.17%	-1.96%	-1.39%	0.22%	-0.21%	2.30%	-0.04%	0.46%	-0.02%	0.05%	0.18%	0.22%	-	-	-0.53%
	2.07%														
sobre $D$	35.15%	-12.15%	-10.34%	10.72%	-12.38%	132.78%	-2.11%	23.89%	-0.34%	0.87%	9.76%	10.76%	-	-	-9.64%
	3.30%														

Nota: Números reportados son cambios porcentuales respecto de su valor benchmark presentados en fila 3 debido a la aplicación del subsidio de la columna 1.

Tabla 20: Experimento de ejecución de política con  $\chi = 0.7225$ ,  $\lambda = 0.72$  y  $f = 1$

	$g$	$c/h$	$y/h$	$n$	$\ell$	$e$	$1 - \ell - e$	$s$	$\mu$	$\eta$	$v$	$n+u$	$\zeta$	$D$	$P_h$
Benchmark	0.0059	0.0430	0.0634	0.4910	0.3200	0.0400	0.6400	0.1415	0.5569	0.5569	0.0720	0.5630	0.0067	0.2053	3.2782
Subsidio aplicado															
sobre $\zeta$	2.90%	-2.11%	-1.51%	0.27%	-0.24%	2.66%	-0.05%	0.55%	-0.02%	0.06%	0.21%	0.27%	-	-	-0.65%
	2.89%														
sobre $D$	4.09%	-2.67%	-2.02%	1.11%	-1.32%	13.63%	-0.19%	2.26%	-0.05%	0.14%	0.97%	1.12%	-	-	-1.16%
	4.23%														

Nota: Números reportados son cambios porcentuales respecto de su valor benchmark presentados en fila 3 debido a la aplicación del subsidio de la columna 1.

Tabla 21: Experimento de ejecución de política con  $\chi = 0.522$ ,  $\lambda = 0.72$ ,  $f = 1$

	$g$	$c/h$	$y/h$	$n$	$\ell$	$e$	$1 - \ell - e$	$s$	$\mu$	$\eta$	$v$	$n+u$	$\zeta$	$D$	$P_h$
Benchmark	0.0059	0.0430	0.0634	0.4910	0.3200	0.0400	0.6400	0.1415	0.5569	0.5569	0.0720	0.5630	0.0071	0.1768	3.2782
Subsidio aplicado															
sobre $\zeta$	2.76%	-2.08%	-1.48%	0.25%	-0.22%	2.52%	-0.05%	0.52%	-0.02%	0.06%	0.20%	0.25%	-	-	-0.62%
2.75%															
sobre $D$	2.90%	-2.26%	-1.66%	0.64%	-0.75%	7.76%	-0.11%	1.31%	-0.03%	0.09%	0.56%	0.65%	-	-	-0.80%
5.18%															

Nota: Números reportados son cambios porcentuales respecto de su valor benchmark presentados en fila 3 debido a la aplicación del subsidio de la columna 1.

#### 6.4.2. Efecto de Política de Capital Humano sobre Bienestar

En esta sección, se aplica el análisis de bienestar expuesto en la sección 5.4.5 utilizando los resultados de Chile. Nuevamente se descompone la utilidad de toda la vida de los hogares considerando cada uno de los escenarios de elasticidad de sustitución y valores de  $\lambda$  elegidos anteriormente. Las tablas 22, 23 y 24 presentan la descomposición descrita en la ecuación (60). La tabla 22 presenta la descomposición de la utilidad para el escenario del par ( $\chi = 1, \lambda = 0.5$ ). La tabla 23 presenta los resultados en el caso del escenario del par ( $\chi = 0.7225, \lambda = 0.72$ ) y por último la tabla 24 presenta la descomposición de la utilidad en caso del par ( $\chi = 0.522, \lambda = 0.72$ ). Es pertinente recordar que este ejercicio es útil para comparar ambas políticas de capital humano, pero no para mejorar la asignación de equilibrio, ya que es un equilibrio que cumple con la condición de Hosios.

Al igual que lo visto para Estados Unidos, en el caso de la calibración chilena se destaca que, en los tres escenarios, la política de capital humano sobre la experiencia laboral genera menor pérdida de bienestar total que la política sobre capital humano de capacitación *on the job*. Sin embargo, para la calibración chilena, los distintos escenarios planteados no hacen variar de manera relevante la utilidad total del hogar. En efecto, el rango de variación pertenece a  $[-0.19\%, -0.14\%]$ , siendo mucho menor al rango de variación de la utilidad para Estados Unidos ( $[-0.16\%, -0.02\%]$ ). La descomposición de la utilidad indica que los factores más relevantes en distintos escenarios tienden a ser el de consumo y el de capital humano.

En contraste, para Chile el subsidio al parámetro  $D$  provoca un rango de variación mayor en la utilidad total ( $[-0.92\%, -0.26\%]$ ) respecto a lo visto para la calibración estadounidense ( $[-0.43\%, -0.26\%]$ ). Además, a medida que disminuye el grado de sustitución, la pérdida de utilidad disminuye, lo que no ocurre para el caso del parámetro  $\zeta$ . La descomposición de la utilidad muestra que entre los distintos escenarios, los factores capital humano, ocio de empleados y capital humano, varían de forma relevante.

Similar a lo visto para Estados Unidos, en todos los escenarios se observa que la política de capital humano de experiencia laboral posibilita que la mejora en bienestar debido al crecimiento económico, más que compense la pérdida en bienestar por la disminución del ocio de los trabajadores ante aumentos en esfuerzo de aprendizaje. Lo anterior también se observa para la política sobre el parámetro de capacitación *on the job* en la calibración chilena, lo que contrasta con lo visto para Estados Unidos.

En general para Chile, se observa que la política sobre la experiencia laboral no hace variar demasiado la utilidad en sus componentes. Esto se debe a que, para la calibración chilena, la política de capital humano no tiene demasiada incidencia sobre el parámetro de experiencia laboral y por lo tanto no afecta de manera relevante el esfuerzo de aprendizaje y el nivel del ocio. Por otra parte, la composición de la variación de la utilidad varía de forma relevante para la política destinada a subsidiar el parámetro de capacitación *on the job*. En el caso de sustituibilidad perfecta, la mayor utilidad proviene de las mejoras en crecimiento debido al

aumento en la tasa de acumulación de capital humano, mientras que la mayor desutilidad se origina en la pérdida de ocio, debido al mayor esfuerzo de aprendizaje. Luego en el escenario de mayor complementariedad (tabla 24), la fuente de utilidad sigue originándose en el crecimiento económico, pero la mayor desutilidad proviene de la disminución en consumo.

En el escenario presentado en la tabla 24, la diferencia de utilidad total entre opciones de políticas es menor en el caso chileno que en el caso estadounidense. Esto último implica que en términos de utilidad la decisión de política, si bien sigue dando preferencia a la política de capital humano sobre el parámetro de experiencia laboral, el costo de oportunidad en términos de utilidad es menor. En otras palabras, si el criterio de decisión de política tuviera en consideración el crecimiento económico como fin en sí mismo, ya no sería evidente que sea preferible mejorar el parámetro de experiencia laboral por sobre el parámetro de capacitación *on the job* en términos de utilidad.

Tabla 22: Descomposición del bienestar ante aplicación subsidios con  $\chi = 1$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $f = 1$

	$\Omega$	Consumo	Capital Humano	Ocio Empleados	Ocio Desempleados
Subsidio aplicado					
sobre $\zeta$	-0.19%	-0.41%	0.26%	-0.07%	0.03%
2.07%					
sobre $D$	-0.92%	-2.66%	4.26%	-3.74%	1.22%
3.30%					

Números reportados son cambios porcentuales respecto de al valor benchmark de la utilidad total.

Tabla 23: Descomposición del bienestar ante aplicación subsidios con  $\chi = 0.7225$ ,  $\lambda = 0.72$ ,  $f = 1$

	$\Omega$	Consumo	Capital Humano	Ocio Empleados	Ocio Desempleados
Subsidio aplicado					
sobre $\zeta$	-0.14%	-0.44%	0.35%	-0.09%	0.03%
2.89%					
sobre $D$	-0.30%	-0.56%	0.50%	-0.37%	0.13%
4.23%					

Números reportados son cambios porcentuales respecto de al valor benchmark de la utilidad total.

Tabla 24: Descomposición del bienestar ante aplicación subsidios con  $\chi = 0.522$ ,  $\lambda = 0.72$ ,  $f = 1$

	$\Omega$	Consumo	Capital Humano	Ocio Empleados	Ocio Desempleados
Subsidio aplicado					
sobre $\zeta$	-0.15%	-0.43%	0.33%	-0.08%	0.03%
2.75%					
sobre $D$	-0.26%	-0.47%	0.35%	-0.22%	0.07%
5.18%					

Números reportados son cambios porcentuales respecto de al valor benchmark de la utilidad total.

## 7. Resumen y Observaciones Finales

En esta tesis se desarrolló un modelo de crecimiento endógeno basado en la acumulación de capital humano con fricciones en el mercado laboral. La tecnología de acumulación de capital humano expuesta presenta dos fuentes de acumulación de capital humano siendo una generalización de la tecnología propuesta por Chen *et al.* (2011). Esta formulación presenta la novedad de que admite la presencia de complementariedad entre los *inputs* de acumulación de capital humano siguiendo la tecnología de Cunha y Heckman (2007) que busca describir la evidencia presentada por la literatura sobre formación de habilidades resumida en Cunha *et al.* (2006).

El análisis numérico de variación exógena presentados para Estados Unidos y Chile en las secciones 5.3 y 6.3, respectivamente, muestran que considerar la existencia de complementariedad entre las tasas de formación de capital humano provoca que disminuya la sensibilidad del equilibrio macroeconómico ante variaciones exógenas. También se observa que mayores niveles de complementariedad merma especialmente la influencia del parámetro de capacitación *on the job*. Esto se debe a que el cambio exógeno en el parámetro  $D$ , no puede ser acompañado por cambios en la generación de capital humano de experiencia laboral, por otro lado, cambios exógenos en  $\zeta$  pueden ser acompañados por aumentos en esfuerzo de aprendizaje, lo que implica mayor efectividad en la formación de capital humano. En particular para Estados Unidos, el parámetro que más se ve afectado es el de capacitación *on the job*  $D$ , reduciendo significativamente su efecto sobre las variables endógenas de la economía. Por su parte el efecto de variaciones exógenas del parámetro de experiencia laboral  $\zeta$  es más estable al momento de aumentar el grado de complementariedad. En el caso de Chile, se exhiben variaciones particularmente extremas en el esfuerzo de aprendizaje, lo cual se explica porque el valor de referencia de esta variable en el caso chileno es la mitad del estadounidense, por lo que una política que afecte principalmente a esta variable tiene más espacio de reacción en términos porcentuales.

Por su parte, las simulaciones de política de gasto en capital humano sujeta a un presupuesto balanceado presentadas en las secciones 5.4.4 y 6.4.1, para Estados Unidos y Chile, respectivamente, mostraron que la presencia de complementariedad puede generar cambios significativos en los efectos de política, y por lo tanto, modificar la decisión de política. La modelación de la política de capital humano implicó que se incorporaran tres variables endógenas al modelo, a saber, los subsidios sobre los parámetros de acumulación de capital humano  $(b_\zeta, b_D)$ , y el precio del capital humano  $P_h$ . La incorporación de estas tres variables incidió de manera relevante sobre el equilibrio general de la economía enriqueciendo el comportamiento y análisis del modelo.

En particular para Estados Unidos, la simulación de política de capital humano ante la presencia de complementariedad mostró que existe un par  $(\chi = \chi_0, \lambda = \lambda_0)$  tal que la política

de gasto sobre el parámetro  $\zeta$  es más eficiente que la política destinada al parámetro  $D$ . Este resultado invierte las conclusiones vistas ante el mismo ejercicio realizado por Chen *et al.* (2011) en base a una tecnología de acumulación de capital humano de sustituibilidad perfecta entre tasas de acumulación de capital humano. Este hecho permite hacerse cargo de las preguntas de investigación que motivaron esta tesis, ya que se concluye que asumir complementariedad entre las tasas de acumulación de capital humano puede afectar de manera relevante el desempeño de variables macroeconómicas, e incluso, cambiar la decisión de política en función del grado de complementariedad y de la variable endógena que se tenga por objetivo estimular.

En el caso de Chile se observó que, en distintos escenarios de complementariedad, en términos del efecto sobre el crecimiento económico, tiende a predominar una preferencia por subsidiar el parámetro de capacitación *on the job*, lo que contrasta con lo visto para la calibración de Estados Unidos. Esto se debe a que en la calibración chilena, aumentos en complementariedad se traducen en disminuciones de la proporción subsidiada del parámetro  $\zeta$  lo que implica que la política sea cada vez menos efectiva para incidir sobre este parámetro. A su vez, aumentos en complementariedad implican aumentos de la proporción subsidiada del parámetro  $D$ , sin embargo, este hecho no logra aumentar la sensibilidad de reacción de las variables endógenas, ya que los aumentos de generación de capital humano de capacitación *on the job* no son acompañados de aumentos de capital humano de experiencia laboral lo que hace menos efectiva la política de subsidio. Las implicancias de política del caso chileno en escenarios de alta complementariedad no son evidentes respecto al caso estadounidense, ya que no se observa un claro beneficio de la política enfocada al parámetro de capacitación *on the job* por sobre la política de mejora del parámetro de experiencia laboral o viceversa.

El análisis de bienestar presentados para Estados Unidos y Chile en las secciones 5.4.5 y 6.4.2, respectivamente, otorga otro criterio para la toma de decisiones de política pública. En el caso estadounidense, el análisis de bienestar refuerza la idea que la complementariedad es relevante para la toma de decisiones. Al asumir una tecnología de acumulación de sustitutos perfectos, existe un *tradeoff* entre bienestar y crecimiento económico, porque ante sustituibilidad perfecta de las tasas de acumulación de capital humano, si se busca priorizar el crecimiento económico, es conveniente subsidiar el parámetro de capacitación *on the job* a costa de mayor pérdida de utilidad. En cambio, al incorporar complementariedad, existe un par  $(\chi = \chi_0, \lambda = \lambda_0)$  tal que subsidiar el parámetro de experiencia laboral permite conseguir mayor crecimiento económico y además una menor disminución en el bienestar del hogar. En el caso de Chile, en el escenario de sustituibilidad perfecta, existe el mismo *tradeoff* entre crecimiento económico y pérdida de utilidad vista para Estados Unidos. Sin embargo, en el escenario de mayor complementariedad, el crecimiento y las pérdidas de utilidad total son similares entre ambas opciones de política, por lo que no es claro cuál de las dos políticas de capital humano se debería preferir.

En términos generales al comparar los resultados entre la economía estadounidense y la economía chilena se puede concluir que las implicancias de política tienen una fuerte relación con el tipo de economía que se esté calibrando. Esto que sugiere que es necesario diferenciar la política pública en función del nivel de desarrollo de la economía.

Lógicamente el modelo es extensible a la incorporación de más fuentes de acumulación de capital humano, con distintos niveles de complementariedad entre tasas. Además, dentro de las extensiones se debería buscar incorporar la decisión endógena de los hogares en la inversión en capital humano. De aquí podrían observarse efectos de sustitución entre el gasto de gobierno y gasto de los hogares lo que enriquecería el análisis. Junto con esto sería relevante incorporar restricciones de liquidez, lo que daría un rol relevante a la política pública que tendría por objetivo corregir la falla de mercado.

Finalmente, una reflexión relevante que se extrae de esta tesis es que en la práctica desconocemos la elasticidad de sustitución y el multiplicador de habilidad de la economía, por lo que en el momento de diseñar la política pública estamos actuando a ciegas en estos términos, lo que impacta en las posibilidades de conseguir los objetivos de política. Este ejercicio explicita que, si no se considera la complementariedad entre distintos factores de acumulación de capital humano y no se hace un esfuerzo por tener una estimación de ésta, el hacedor de política podría estar tomando decisiones equivocadas al momento de ejecutar una política de generación de capital humano específica. Una mala decisión en la composición del gasto puede determinar ineficiencias relevantes en términos de crecimiento económico e incentivo al esfuerzo laboral, retrasando el progreso económico.

## 8. Bibliografía

- Aghion, P., & Howitt, P. (1994). Growth and Unemployment. *The Review of Economic Studies*, 61(3), 477–494. <https://doi.org/10.2307/2297900>
- Andolfatto, D. (1996). Business Cycles and Labor-Market Search. *The American Economic Review*, 86(1), 112–132. <http://www.jstor.org/stable/2118258>
- Arrow, K. (1962). *The Review of Economic Studies*, Volume 29, Issue 3, June 1962, Pages 155–173, <https://doi.org/10.2307/2295952>
- Aiyagari, S. R., Greenwood, J., & Seshadri, A. (2002). Efficient investment in children. *Journal of economic theory*, 102(2), 290-321. <https://doi.org/10.1006/jeth.2001.2852>
- Banco Central de Chile, (2017). Crecimiento Tendencial: Proyección de Mediano Plazo y Análisis de sus Determinantes. Recuperado de: <https://www.bcentral.cl/contenido/-/detalle/crecimiento-tendencial-proyeccion-de-mediano-plazo-y-analisis-de-sus-determinantes-4>
- Bauducco, S., & Caputo, R. (2010). Price level targeting and inflation targeting: A review. *Documentos de Trabajo (Banco Central de Chile)*, (601), 1. Recuperado de: [https://www.bcentral.cl/nota-de-prensa-detalle/-/asset\\_publisher/L832eVmsZG9c/content/id/1791411](https://www.bcentral.cl/nota-de-prensa-detalle/-/asset_publisher/L832eVmsZG9c/content/id/1791411)
- Becker, G. S., & Tomes, N. (1986). Human capital and the rise and fall of families. *Journal of labor economics*, 4(3, Part 2), S1-S39. <https://doi.org/10.1086/298118>
- Benabou, R. (2002). Tax and education policy in a heterogeneous-agent economy: What levels of redistribution maximize growth and efficiency?. *Econometrica*, 70(2), 481-517. <https://doi.org/10.1111/1468-0262.00293>
- Camargo, B., & Stein, G. (2022). Credit constraints and human capital policies. *Journal of Public Economics*, 208, 104624. <https://doi.org/10.1016/j.jpubeco.2022.104624>
- Chen, B. L., Chen, H. J., & Wang, P. (2011). Labor-market frictions, human capital accumulation, and long-run growth: positive analysis and policy evaluation. *International Economic Review*, 52(1), 131-160. <https://doi.org/10.1111/j.1468-2354.2010.00622.x>
- Comisión Nacional de Productividad, (2016). La productividad en Chile: Una mirada de largo plazo. *Informe anual 2016*. Recuperado de: <https://cnep.cl/estudios/informe-anual-de-productividad-2016/>
- Cunha, F., & Heckman, J. (2007). The technology of skill formation. *American economic review*, 97(2), 31-47. Doi: 10.1257/aer.97.2.31
- Cunha, F., Heckman, J. J., Lochner, L., & Masterov, D. V. (2006). Interpreting the evidence on life cycle skill formation. *Handbook of the Economics of Education*, 1, 697-812. [https://doi.org/10.1016/S1574-0692\(06\)01012-9](https://doi.org/10.1016/S1574-0692(06)01012-9)

- Dahl, R. E. (2004). Adolescent brain development: a period of vulnerabilities and opportunities. Keynote address. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 1021(1), 1-22. <https://doi.org/10.1196/annals.1308.001>
- Diamond, P. A. (1982). Wage determination and efficiency in search equilibrium. *The Review of Economic Studies*, 49(2), 217-227. <https://doi.org/10.2307/2297271>
- Dipres, (Septiembre, 2021). Acta Resultados del Comité Consultivo del PIB Tendencial. Recuperado de: <https://hdl.handle.net/11626/17803>
- Hanushek, A. E., & Woessmann, L. (2008). The role of cognitive skill in economic development. *Journal of Economic Literature*, 46(3), 607-68. <https://doi.org/10.1257/jel.46.3.607>
- Hosios, A. J. (1990). On the efficiency of matching and related models of search and unemployment. *The Review of Economic Studies*, 57(2), 279-298. <https://doi.org/10.2307/2297382>
- Jara-Díaz, S. y Candia, D. (2017). Uso del tiempo en Chile: Análisis preliminar y posibilidades de modelación. *Estudios de Transporte*, 21(2). Recuperado de: <https://estudiosdetransporte.org/sochitran/article/view/211>
- Kaas, L., & Zink, S. (2011). Human capital investment with competitive labor search. *European Economic Review*, 55(4), 520-534. <https://doi.org/10.1016/j.eurocorev.2010.07.004>
- Kydland, F. E., & Prescott, E. C. (1991). Hours and employment variation in business-cycle theory. In *Business Cycles* (pp. 107-134). Palgrave Macmillan, London. DOI: 10.1007/978-1-349-11570-9\_5
- Laing, D., Palivos, T., & Wang, P. (1995). Learning, Matching and Growth. *The Review of Economic Studies*, 62(1), 115–129. <https://doi.org/10.2307/2297844>
- Lucas Jr, R. E. (1988). On the mechanics of economic development. *Journal of monetary economics*, 22(1), 3-42. [https://doi.org/10.1016/0304-3932\(88\)90168-7](https://doi.org/10.1016/0304-3932(88)90168-7)
- Lucas Jr, R. E. (1990). Liquidity and interest rates. *Journal of economic theory*, 50(2), 237-264. [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(90\)90001-Z](https://doi.org/10.1016/0022-0531(90)90001-Z)
- Lucas Jr, R. E. (1993). Making a miracle. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 251-272. <https://doi.org/10.2307/2951551>
- Lucas Lucas, R (2009). Ideas and growth. *Economica*, 76, 1-19. <http://www.jstor.org/stable/40071767>
- Mankiw, N. G., Romer, D., & Weil, N. D. (1992). A contribution to the empirics of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 107(2), 407-437. <https://doi.org/10.2307/2118477>

- Merz, M. (1995). Search in the labor market and the real business cycle. *Journal of monetary Economics*, 36(2), 269-300. [https://doi.org/10.1016/0304-3932\(95\)01216-8](https://doi.org/10.1016/0304-3932(95)01216-8)
- Ministerio de Desarrollo Social, (2022). Data Social [Archivo de datos]. Recuperado de: <https://datasocial.ministeriodesarrollosocial.gob.cl/fichaIndicador/540/1/0/0/54>
- Mortensen, D. T. (1982). Property rights and efficiency in mating, racing, and related games. *The American Economic Review*, 72(5), 968-979. <https://www.jstor.org/stable/1812016>
- Naudón, A., & Pérez, A. (2018). Unemployment dynamics in Chile: 1960-2015. *Economía chilena*, vol. 21, no. 1. <https://repositoriodigital.bcentral.cl/xmlui/handle/20.500.12580/3595>
- OECD (2021), Education at a Glance 2021: OECD Indicators, OECD Publishing, Paris, <https://doi.org/10.1787/b35a14e5-en>
- Osiobe, E. U. (2019). A Literature Review of Human Capital and Economic Growth. *Business and Economic Research*, 9(4), 179. <https://doi.org/10.5296/BER.V9I4.15624>
- Pissarides, C. A. (1984). Efficient job rejection. *The Economic Journal*, 94, 97-108. <https://doi.org/10.2307/2232658>
- Rodríguez, A. (2017). Crecimiento económico y capital humano: metodología para la simulación de una variante del Modelo de Lucas con aplicación a México. *Revista mexicana de economía y finanzas*, 12(2), 23-47. Recuperado de [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1665-53462017000200023](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-53462017000200023)
- Romer, P. M. (1986). Increasing Returns and Long-Run Growth. *Journal of Political Economy*, 94(5), 1002–1037. <http://www.jstor.org/stable/1833190>
- Sánchez, R. y Villena, R., (2021). *Competencia en el mercado laboral chileno y su efecto en la brecha salarial de género*, Centro de Estudios Públicos. Recuperado de: [https://www.cepchile.cl/cep/site/docs/20211027/20211027100916/pder588\\_rsanchez\\_mvillena.pdf](https://www.cepchile.cl/cep/site/docs/20211027/20211027100916/pder588_rsanchez_mvillena.pdf)
- Shimer, R. (2005). The cyclical behavior of equilibrium unemployment and vacancies. *American economic review*, 95(1), 25-49. DOI: 10.1257/0002828053828572
- Solow, R (1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics*, 70. 65-94. <https://doi.org/10.2307/1884513>
- Solow, R (1957). Technical Change and the Aggregate Production Function. *Review of Economic and Statistics*, 39, 312-320. <https://doi.org/10.2307/1926047>
- Uzawa, H. (1965). Optimum technical change in an aggregative model of economic growth. *International economic review*, 6(1), 18-31. <https://doi.org/10.2307/2525621>

- Yukhtenko, A. (2014). Labor Market Search and On-the-Job Learning in a Growth Model with Human Capital. [Tesis de magister no publicada].  
Recuperado de: <https://helda.helsinki.fi/handle/10138/135428?show=full>

## Anexos

### Anexo A: Condiciones de Primer Orden

Derivación de ecuaciones (15)-(19)

#### CPO Consumo

$$\frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial c} = U_c + \frac{\Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} (-1) = 0$$

#### CPO Esfuerzo Trabajo

$$\frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial \ell} = U_\ell + \frac{\Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} (1 - \alpha) A k_t^\alpha [(n_t - \Phi(v_t)) h_t]^{(1-\alpha)} \ell_t^{-\alpha} = 0$$

$$-U_\ell = \frac{\Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} (1 - \alpha) A \left( \frac{k_t}{(n_t - \Phi(v_t)) h_t \ell_t} \right)^\alpha [(n_t - \Phi(v_t)) h_t]$$

$$-U_\ell = \frac{\Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} (1 - \alpha) A q_t^\alpha [(n_t - \Phi(v_t)) h_t]$$

#### CPO Esfuerzo Aprendizaje

$$\frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial e} = U_e + \frac{\Omega_e(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} \frac{\partial h_{t+1}}{\partial e_t} = 0$$

$$\frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial e} = U_e + \frac{\Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} \frac{\partial}{\partial e_t} \left( (1 + [\lambda(\zeta)^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x]^{1/x}) h_t \right) = 0$$

$$\frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial e} = U_e + \frac{\Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} h_t^{1/x} \left( \left( [\lambda(\zeta)^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x]^{1/x} \right)^{-1} (1 - \lambda) x (Dn_t)^x e_t^{x-1} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial e} &= U_e + \frac{\Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} h_t (1 - \lambda) (Dn_t)^x e_t^{x-1} \left( \left( [\lambda(\zeta)^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x]^{\frac{1}{x}-1} \right) \right) \\ \frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial e} &= U_e + \frac{\Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} h_t (1 - \lambda) (Dn_t)^x e_t^{x-1} (\lambda \zeta^x + (1 - \lambda)(Dn_t)^x e_t^x)^{(1-x)/x} \\ -U_e &= \frac{\Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} h_t (1 - \lambda) (Dn_t)^x e_t^{x-1} (\lambda \zeta^x + (1 - \lambda)(Dn_t)^x e_t^x)^{(1-x)/x}\end{aligned}$$

### CPO Esfuerzo Búsqueda Empleo

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial s} &= U_s + \frac{\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} B \beta [1 - n_t]^\beta v_t^{1-\beta} s_t^{\beta-1} = 0 \\ -U_s &= \frac{\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} \beta B s_t^\beta [1 - n_t]^\beta v_t^{1-\beta} s_t^{-1} \\ -U_s &= \frac{\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} \frac{m_t}{(1 - n_t) s_t} \beta (1 - n_t) \\ -U_s &= \frac{\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} \mu \beta (1 - n_t)\end{aligned}$$

### CPO Creación de Vacantes

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial v} &= \frac{\Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} A k_t^\alpha (\ell_t h_t)^{(1-\alpha)} (1 - \alpha) (n_t - \Phi(v_t))^{-\alpha} (-\Phi_v(v_t)) \\ &+ \frac{\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} [B [s_t (1 - n_t)]^\beta v_t^{1-\beta} v^{-1} (1 - \beta)] = 0\end{aligned}$$

$$\frac{\Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} (1 - \alpha) A k_t^\alpha \left( (n_t - \Phi(v_t)) \ell_t h_t \right)^{-\alpha} \ell_t h_t (\Phi_v(v_t)) = \frac{\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} [m_t v^{-1} (1 - \beta)]$$

$$\frac{\Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} (1 - \alpha) A q_t^\alpha \ell_t h_t (\Phi_v(v_t)) = \frac{\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} [\eta_t (1 - \beta)]$$

Luego usando de CPO1  $\frac{\Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} = U_c$ , obtenemos

$$U_c (1 - \alpha) A q_t^\alpha \ell_t h_t (\Phi_v(v_t)) = \frac{\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} [\eta_t (1 - \beta)] .$$

## Anexo B: Condiciones de Benveniste-Scheinkman

Derivación ecuaciones

### Para Capital Físico

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial k_t} &= \frac{\partial U(c_t, \ell_t, e_t, s_t, n_t)}{\partial k_t} + \frac{1}{1 + \rho} \frac{\partial \Omega(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{\partial k_t} \\
 &= \frac{1}{1 + \rho} \Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) \left[ (1 - \delta) + \alpha A k_t^{\alpha-1} [(n_t - \Phi(v_t)) \ell_t h_t]^{(1-\alpha)} \right] \\
 &= \frac{1}{1 + \rho} \Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) \left[ (1 - \delta) + \alpha A \left[ \frac{A k_t}{(n_t - \Phi(v_t)) \ell_t h_t} \right]^{(\alpha-1)} \right] \\
 \frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial k_t} &= \frac{1}{1 + \rho} \Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) [(1 - \delta) + \alpha A q_t^{(\alpha-1)}] \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

### Para Capital Humano

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial h_t} &= \frac{\partial U(c_t, \ell_t, e_t, s_t, n_t)}{\partial h_t} + \frac{1}{1 + \rho} \frac{\partial \Omega(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{\partial h_t} \\
 &= 0 + \frac{1}{1 + \rho} \left[ \Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) \frac{\partial h_{t+1}}{\partial h_t} + \Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) \frac{\partial k_{t+1}}{\partial h_t} \right] \\
 &= \frac{1}{1 + \rho} \left[ \Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) (1 + [\lambda(\zeta)^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x]^{1/x}) + \Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) (1 - \alpha) A k_t^\alpha [(n_t - \Phi(v_t)) \ell_t]^{(1-\alpha)} h_t^{-\alpha} \right] \\
 \frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial h_t} &= \frac{1}{1 + \rho} \left[ \Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) (1 + [\lambda(\zeta)^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x]^{1/x}) + \Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) (1 - \alpha) A q_t^\alpha (n_t - \Phi(v_t)) \ell_t \right] \tag{B.2}
 \end{aligned}$$

**Para Empleo**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial n_t} &= \frac{\partial U(c_t, \ell_t, e_t, s_t, n_t)}{\partial n_t} + \frac{1}{1 + \rho} \frac{\partial \Omega(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{\partial n_t} \\
&= U_n + \frac{1}{1 + \rho} \left[ \Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) \frac{\partial k_{t+1}}{\partial n_t} + \Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) \frac{\partial h_{t+1}}{\partial n_t} + \Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) \frac{\partial n_{t+1}}{\partial n_t} \right] \\
&= U_n + \frac{1}{1 + \rho} \left[ \Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) (1 - \alpha) A k_t^\alpha \left( (n - \Phi(v)) \ell_t h_t \right)^{-\alpha} \ell_t h_t + \Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) \frac{\partial h_{t+1}}{\partial n_t} \right. \\
&\quad \left. + \Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) \left( (1 - \psi) + s_t \beta B v_t^{(1-\beta)} ((1 - n_t) s_t)^{\beta-1} (-1) \right) \right] \\
\frac{\partial \Omega(k_t, h_t, n_t)}{\partial n_t} &= U_n + \frac{1}{1 + \rho} \left[ \Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) (1 - \alpha) A q_t^\alpha \ell_t h_t \right. \\
&\quad \left. + \Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) h_t (1 - \lambda) (D e_t)^\chi n_t^{\chi-1} (\lambda \zeta^\chi + (1 - \lambda) (D e_t n_t)^\chi)^{(1-\chi)/\chi} - \Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) (1 - \psi - s_t \beta \mu_t) \right] \quad (B.3)
\end{aligned}$$

## Anexo C: Desarrollo Relaciones Intertemporales e Intratemporales Considerando Condiciones de Benveniste-Scheinkman

### Obtención de Ecuación (24)

Se adelanta un período (B. 1)

$$\Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) = \frac{1}{1 + \rho} \Omega_k(k_{t+2}, h_{t+2}, n_{t+2}) [(1 - \delta) + \alpha A q_{t+1}^{(\alpha-1)}]$$

Se adelanta un período la ecuación (15)

$$U_{c_{t+1}} = \frac{\Omega_k(k_{t+2}, h_{t+2}, n_{t+2})}{1 + \rho} \quad (\text{C. 1})$$

Se divide (C. 1) en (15)

$$\frac{U_{c_t}}{U_{c_{t+1}}} = \frac{\Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})(1 + \rho)}{\Omega_k(k_{t+2}, h_{t+2}, n_{t+2})(1 + \rho)} = \frac{\Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{\Omega_k(k_{t+2}, h_{t+2}, n_{t+2})} \quad (\text{C. 2})$$

Ahora se usa (B. 1) para reemplazar en (C. 2) y se desarrolla

$$\begin{aligned} \frac{U_{c_t}}{U_{c_{t+1}}} \Omega_k(k_{t+2}, h_{t+2}, n_{t+2}) &= \frac{1}{1 + \rho} \Omega_k(k_{t+2}, h_{t+2}, n_{t+2}) [(1 - \delta) + \alpha A q_{t+1}^{(\alpha-1)}] \\ \frac{U_{c_t}}{U_{c_{t+1}}} &= \frac{1}{1 + \rho} [(1 - \delta) + \alpha A q_{t+1}^{(\alpha-1)}], \end{aligned}$$

con lo que obtenemos (24).

**Obtención de Ecuación (25)**

De (16) sabemos que:

$$\Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) = -\frac{U_\ell(1 + \rho)}{(1 - \alpha)Aq_t^\alpha[(n_t - \Phi(v_t))h_t]}.$$

De (17) sabemos que:

$$\Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) = -\frac{U_e(1 + \rho)}{h_t(1 - \lambda)(Dn_t)^x e_t^{\lambda-1}(\lambda\zeta^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x)^{(1-x)/x}}.$$

Se reemplazan (16) y (17) en (B.2) y se desarrolla

$$\Omega_h(k_t, h_t, n_t) = \frac{1}{1 + \rho} \left[ -\frac{U_e(1 + \rho)}{h_t(1 - \lambda)(Dn_t)^x e_t^{\lambda-1}(\lambda\zeta^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x)^{(1-x)/x}} \left(1 + [\lambda(\zeta)^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x]^{\frac{1}{x}}\right) - \frac{U_\ell(1 + \rho)}{(1 - \alpha)Aq_t^\alpha[(n_t - \Phi(v_t))h_t]} (1 - \alpha)Aq_t^\alpha(n_t - \Phi(v_t))\ell_t \right]$$

$$\Omega_h(k_t, h_t, n_t) = -\frac{U_e \left(1 + [\lambda(\zeta)^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x]^{\frac{1}{x}}\right)}{h_t(1 - \lambda)(Dn_t)^x e_t^{\lambda-1}(\lambda\zeta^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x)^{(1-x)/x}} - \frac{\ell_t U_\ell}{h_t}$$

$$h_t MVH_t \equiv h_t \Omega_h(k_t, h_t, n_t) = -\frac{U_e \left(1 + [\lambda(\zeta)^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x]^{\frac{1}{x}}\right) e_t}{(1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x (\lambda\zeta^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x)^{\frac{(1-x)}{x}}} - \ell_t U_\ell ,$$

con lo que obtenemos (25).

**Obtención de Ecuación (26)**

De (18) sabemos que:

$$\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) = -\frac{U_s(1 + \rho)}{\mu \beta(1 - n_t)}.$$

Se reemplaza (18) en (B.3)

$$\begin{aligned} \Omega_n = U_n + \frac{1}{1 + \rho} & \left[ -\frac{U_\ell(1 + \rho)}{(1 - \alpha)Aq_t^\alpha [(n_t - \Phi(v_t))h_t]} (1 - \alpha)Aq_t^\alpha \ell_t h_t \right. \\ & - \frac{U_e(1 + \rho)}{h_t(1 - \lambda)(Dn_t)^\chi e_t^{\chi-1} (\zeta^\chi + (1 - \lambda)(Dn_t)^\chi e_t^\chi)^{(1-\chi)/\chi}} h_t(1 - \lambda)(De_t)^\chi n_t^{\chi-1} (\zeta^\chi + (1 - \lambda)(De_t)^\chi n_t^\chi)^{(1-\chi)/\chi} \\ & \left. - \frac{U_s(1 + \rho)}{\mu \beta(1 - n_t)} (1 - \psi - s_t \beta \mu_t) \right] \\ \Omega_n = U_n + & \left[ -\frac{U_\ell}{[(n_t - \Phi(v_t))]} \ell_t - \frac{U_e e_t}{n_t} - \frac{U_s}{\mu \beta(1 - n_t)} (1 - \psi - s_t \beta \mu_t) \right], \end{aligned}$$

Multiplicamos la igualdad por  $n_t$

$$MVN_t \cdot n_t \equiv \Omega_n n_t = n_t U_n + \left[ -\frac{n_t U_\ell}{[(n_t - \Phi(v_t))]} \ell_t - U_e e_t - \frac{n_t U_s}{\mu \beta(1 - n_t)} (1 - \psi - s_t \beta \mu_t) \right]$$

con lo que obtenemos (26).

## Anexo D: Desarrollo Ecuaciones de Senda de Crecimiento Balanceado

### Obtención de Ecuación (30)

Se comienza de la tecnología de acumulación de capital humano (9)

$$h_{t+1} = (1 + [\lambda(\zeta)^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x]^{1/x})h_t$$
$$\frac{h_{t+1}}{h_t} = 1 + [\lambda \zeta^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x]^{1/x}.$$

Al considerar que el capital humano crece a tasa constante  $g$  obtenemos

$$1 + g = 1 + [\lambda \zeta^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x]^{1/x}$$
$$g^x = \lambda \zeta^x + (1 - \lambda)(Dn_t e_t)^x$$
$$\frac{1}{Dn_t} \left( \frac{g^x - \lambda \zeta^x}{(1 - \lambda)} \right)^{1/x} = e_t,$$

luego, en estado estacionario, no tiene sentido el uso del subíndice  $t$  con lo que se obtiene la ecuación (30).

### Obtención de Ecuación (31)

Se parte del equilibrio del mercado de bienes en (13) y desarrollamos

$$c_t + [k_{t+1} - (1 - \delta)k_t] = Ak_t^\alpha [(n_t - \Phi(v_t))\ell_t h_t]^{(1-\alpha)}$$
$$c_t = A \frac{k_t^\alpha}{\left( (n_t - \Phi(v_t))\ell_t h_t \right)^\alpha} (n_t - \Phi(v_t))\ell_t h_t - [k_{t+1} - (1 - \delta)k_t]$$

$$\begin{aligned} \frac{c_t}{h_t} &= \frac{(Aq_t^\alpha (n_t - \Phi(v_t)) \ell_t h_t - [k_{t+1} - (1 - \delta)k_t])}{h_t} \\ \frac{c_t}{h_t} &= Aq_t^\alpha (n_t - \Phi(v_t)) \ell_t + \frac{(1 - \delta)k_t - k_{t+1}}{h_t} \\ \frac{c_t}{h_t} &= \left( Aq_t^\alpha + \frac{(1 - \delta)k_t - k_{t+1}}{(n_t - \Phi(v_t)) \ell_t h_t} \right) (n_t - \Phi(v_t)) \ell_t \\ \frac{c_t}{h_t} &= \left( Aq_t^\alpha + \frac{k_t}{(n_t - \Phi(v_t)) \ell_t h_t} \left( (1 - \delta) - \frac{k_{t+1}}{k_t} \right) \right) (n_t - \Phi(v_t)) \ell_t \\ \frac{c_t}{h_t} &= (Aq_t^\alpha + q_t((1 - \delta) - (1 + g))) (n_t - \Phi(v_t)) \ell_t \\ \frac{c_t}{h_t} &= (Aq_t^\alpha - q_t(\delta + g)) (n_t - \Phi(v_t)) \ell_t \end{aligned}$$

luego, en estado estacionario no tiene sentido el uso del subíndice t con lo que se obtiene la ecuación (31).

### Obtención de Ecuación (32)

Se comienza desde la ecuación (24)

$$\frac{U_{c_t}}{U_{c_{t+1}}} = \frac{1}{1 + \rho} [(1 - \delta) + \alpha Aq_{t+1}^{(\alpha-1)}]$$

Se aplican formas funcionales propuestas en la sección 4.3

$$\frac{\frac{1}{c_t}}{\frac{1}{c_{t+1}}} = \frac{1}{1 + \rho} [(1 - \delta) + \alpha Aq_{t+1}^{(\alpha-1)}]$$

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{1}{1+\rho} [(1-\delta) + \alpha A q_{t+1}^{(\alpha-1)}]$$

Se utilizan ecuaciones (3) y (4) en ecuación anterior y se desarrolla

$$1 + g = \frac{1}{1+\rho} [(1-\delta) + r_{k_{t+1}}]$$

$$g = \frac{(1-\delta) + r_{k_{t+1}} - 1 - \rho}{1+\rho}$$

$$g = \frac{r_{k_{t+1}} - (\rho + \delta)}{1+\rho},$$

luego, en estado estacionario no tiene sentido el uso del subíndice t con lo que se obtiene la ecuación (32).

### Obtención de Ecuación (33)

Tenemos la siguiente relación de la ecuación (25)

$$h_t MVH_t \equiv h_t \Omega_h(k_t, h_t, n_t) = - \frac{U_e \left( 1 + [\lambda \zeta^\chi + (1-\lambda)(Dn_t e_t)^\chi]^{\frac{1}{\chi}} \right) e_t}{(1-\lambda)(Dn_t e_t)^\chi (\lambda \zeta^\chi + (1-\lambda)(Dn_t e_t)^\chi)^{\frac{(1-\chi)}{\chi}}} - \ell_t U_\ell$$

También sabemos de (17) que:

$$-U_e = MVH_{t+1} h_t (1-\lambda)(Dn_t)^\chi e_t^{\chi-1} (\lambda \zeta^\chi + (1-\lambda)(Dn_t e_t)^\chi)^{(1-\chi)/\chi}, \quad (D.1)$$

Y además sabemos de la ecuación (E. 8) en el anexo E que:

$$\Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) = \frac{\Omega_h(k_t, h_t, n_t)}{(1+g)} \Rightarrow MVH_{t+1} = \frac{\Omega_h(k_t, h_t, n_t)}{(1+g)(1+\rho)}$$

Por lo que reemplazamos (E. 8) en (D. 1) para obtener

$$-U_e = \frac{\Omega_h(k_t, h_t, n_t)}{(1+g)(1+\rho)} h_t (1-\lambda) (Dn_t)^x e_t^{x-1} (\lambda \zeta^x + (1-\lambda) (Dn_t e_t)^x)^{(1-x)/x}, \quad (D.2)$$

luego reemplazamos ecuación (25) en (D. 2) y desarrollamos

$$-U_e = \frac{1}{(1+\rho)(1+g)h_t} \left( -\frac{U_e \left( 1 + [\lambda \zeta^x + (1-\lambda) (Dn_t e_t)^x]^{\frac{1}{x}} \right) e_t}{(1-\lambda) (Dn_t e_t)^x (\lambda \zeta^x + (1-\lambda) (Dn_t e_t)^x)^{\frac{(1-x)}{x}}} - \ell_t U_\ell \right) h_t (1-\lambda) (Dn_t)^x e_t^{x-1} (\lambda \zeta^x + (1-\lambda) (Dn_t e_t)^x)^{\frac{(1-x)}{x}},$$

además, al aplicar las formas funcionales, sabemos que  $U_e = U_\ell$ , y continuamos desarrollando

$$-1 = \frac{1}{(1+\rho)(1+g)} \left( -\frac{\left( 1 + [\lambda \zeta^x + (1-\lambda) (Dn_t e_t)^x]^{\frac{1}{x}} \right) e_t}{(1-\lambda) (Dn_t e_t)^x (\lambda \zeta^x + (1-\lambda) (Dn_t e_t)^x)^{\frac{(1-x)}{x}}} - \ell_t \right) (1-\lambda) (Dn_t)^x e_t^{x-1} (\lambda \zeta^x + (1-\lambda) (Dn_t e_t)^x)^{\frac{(1-x)}{x}},$$

$$(1+\rho)(1+g) = \left( \frac{\left( 1 + [\lambda \zeta^x + (1-\lambda) (Dn_t e_t)^x]^{\frac{1}{x}} \right) e_t}{(1-\lambda) (Dn_t e_t)^x (\lambda \zeta^x + (1-\lambda) (Dn_t e_t)^x)^{\frac{(1-x)}{x}}} + \ell_t \right) (1-\lambda) (Dn_t)^x e_t^{x-1} (\lambda \zeta^x + (1-\lambda) (Dn_t e_t)^x)^{\frac{(1-x)}{x}}.$$

$$(1+\rho)(1+g) = 1 + [\lambda \zeta^x + (1-\lambda) (Dn_t e_t)^x]^{\frac{1}{x}} + (1-\lambda) (Dn_t)^x e_t^{x-1} (\lambda \zeta^x + (1-\lambda) (Dn_t e_t)^x)^{(1-x)/x} \ell_t$$

$$1 + \rho + g + \rho g = 1 + [\lambda \zeta^x + (1-\lambda) (Dn_t e_t)^x]^{\frac{1}{x}} + (1-\lambda) (Dn_t)^x e_t^{x-1} (\lambda \zeta^x + (1-\lambda) (Dn_t e_t)^x)^{(1-x)/x} \ell_t \quad (D.3)$$

Se reemplaza ecuación (30) en (D.3)

$$\begin{aligned}
\rho + g + \rho g &= \left[ \lambda \zeta^x + (1 - \lambda) \left( Dn_t \frac{1}{Dn_t} \left( \frac{g^x - \lambda \zeta^x}{(1 - \lambda)} \right)^{1/x} \right)^x \right]^{\frac{1}{x}} \\
&\quad + (1 - \lambda) (Dn_t)^x \frac{1}{(Dn_t)^{(x-1)}} \left( \frac{g^x - \lambda \zeta^x}{(1 - \lambda)} \right)^{(x-1)/x} \left( \lambda \zeta^x + (1 - \lambda) \left( Dn_t \frac{1}{Dn_t} \left( \frac{g^x - \lambda \zeta^x}{(1 - \lambda)} \right)^{1/x} \right)^x \right)^{(1-x)/x} \ell_t \\
\rho + g + \rho g &= \left[ \lambda \zeta^x + (1 - \lambda) \left( \frac{g^x - \lambda \zeta^x}{(1 - \lambda)} \right)^{\frac{1}{x}} \right]^{\frac{1}{x}} + (1 - \lambda) Dn_t \left( \frac{g^x - \lambda \zeta^x}{(1 - \lambda)} \right)^{(x-1)/x} \left( \lambda \zeta^x + (1 - \lambda) \left( \frac{g^x - \lambda \zeta^x}{(1 - \lambda)} \right)^{\frac{1}{x}} \right)^{(1-x)/x} \ell_t, \\
\rho + g + \rho g &= g + (1 - \lambda) Dn_t \left( \frac{g^x - \lambda \zeta^x}{(1 - \lambda)} \right)^{(x-1)/x} g^{(1-x)} \ell_t, \\
\rho + \rho g &= (1 - \lambda) Dn_t \left( \frac{g^x - \lambda \zeta^x}{(1 - \lambda)} \right)^{(x-1)/x} g^{(1-x)} \ell_t, \tag{62}
\end{aligned}$$

luego en estado estacionario no tiene sentido el uso subíndice t con lo que se obtiene la ecuación (33).

### Obtención de Ecuación (34)

De la ecuación (26), sabemos que

$$\Omega_n = U_n + \left[ -\frac{U_\ell}{[(n_t - \Phi(v_t))]} \ell_t - \frac{U_e e_t}{n_t} - \frac{U_s}{\mu \beta (1 - n_t)} (1 - \psi - s_t \beta \mu_t) \right].$$

Al aplicar las formas funcionales, sabemos que  $U_e = U_\ell$ , y se aplica forma funcional de  $U_n$  propuesta en sección 4.3

$$\Omega_n = \frac{\gamma_1 (1 - \ell_t - e_t)^{(1-\sigma)} - \gamma_2 (1 - s_t)^{(1-\sigma)}}{1 - \sigma} + \left[ -\frac{U_e}{[(n_t - \Phi(v_t))]} \ell_t - \frac{U_e e_t}{n_t} - \frac{U_s}{\mu \beta (1 - n_t)} (1 - \psi - s_t \beta \mu_t) \right]$$

$$\Omega_n = \frac{\gamma_1(1 - \ell_t - e_t)^{(1-\sigma)} - \gamma_2(1 - s_t)^{(1-\sigma)}}{1 - \sigma} - U_e \left[ \frac{\ell_t}{[(n_t - \Phi(v_t))]} + \frac{e_t}{n_t} \right] - \frac{U_s}{\mu \beta(1 - n_t)} (1 - \psi - s_t \beta \mu_t).$$

Se aplica forma funcional de  $U_s$  y  $U_e$

$$\Omega_n = \frac{\gamma_1(1 - \ell_t - e_t)^{(1-\sigma)} - \gamma_2(1 - s_t)^{(1-\sigma)}}{1 - \sigma} + (1 - \ell_t - e_t)^{-\sigma} n_t \gamma_1 \left[ \frac{\ell_t}{[(n_t - \Phi(v_t))]} + \frac{e_t}{n_t} \right] + \frac{(1 - s_t)^{-\sigma} (1 - n_t) \gamma_2}{\mu \beta(1 - n_t)} (1 - \psi - s_t \beta \mu_t). \quad (D.4)$$

se utiliza E. 9 y (18) con forma funcional aplicada y se reemplaza en (D. 4)

$$\frac{\gamma_2(1 + \rho)}{\mu \beta(1 - s_{t-1})^\sigma} = \frac{\gamma_1(1 - \ell_t - e_t)^{(1-\sigma)} - \gamma_2(1 - s_t)^{(1-\sigma)}}{1 - \sigma} + \frac{n_t \gamma_1}{(1 - \ell_t - e_t)^\sigma} \left[ \frac{\ell_t}{[(n_t - \Phi(v_t))]} + \frac{e_t}{n_t} \right] + \frac{\gamma_2}{\mu \beta(1 - s_t)^\sigma} (1 - \psi - s_t \beta \mu_t)$$

se multiplica a ambos lados de la ecuación por  $(1 - s_{t-1})^\sigma / \gamma_2$ , y desarrollamos

$$\frac{(1 + \rho)}{\mu \beta} = \frac{(1 - s_{t-1})^\sigma}{\gamma_2} \left( \frac{\gamma_1(1 - \ell_t - e_t)^{(1-\sigma)} - \gamma_2(1 - s_t)^{(1-\sigma)}}{1 - \sigma} \right) + \frac{(1 - s_{t-1})^\sigma}{\gamma_2} \frac{n_t \gamma_1}{(1 - \ell_t - e_t)^\sigma} \left[ \frac{\ell_t}{[(n_t - \Phi(v_t))]} + \frac{e_t}{n_t} \right] + \frac{(1 - \psi - s_t \beta \mu_t)}{\mu \beta}$$

se incorpora la ecuación (28) para ahorrar notación y se desarrolla

$$\frac{(1 + \rho)}{\mu \beta} = \frac{\gamma_1(1 - s_{t-1})^\sigma (1 - \ell_t - e_t)^{(1-\sigma)}}{\gamma_2(1 - \sigma)} - \frac{(1 - s_t)}{1 - \sigma} + R n_t \left[ \frac{\ell_t}{[(n_t - \Phi(v_t))]} + \frac{e_t}{n_t} \right] + \frac{(1 - \psi - s_t \beta \mu_t)}{\mu \beta}$$

$$\frac{(1 + \rho)}{\mu \beta} = \frac{\gamma_1(1 - s_{t-1})^\sigma (1 - \ell_t - e_t)}{\gamma_2(1 - \ell_t - e_t)^\sigma (1 - \sigma)} - \frac{(1 - s_t)}{1 - \sigma} + R n_t \left[ \frac{\ell_t}{[(n_t - \Phi(v_t))]} + \frac{e_t}{n_t} \right] + \frac{(1 - \psi - s_t \beta \mu_t)}{\mu \beta}$$

$$\frac{(1 + \rho)}{\mu \beta} - \frac{(1 - \psi - s_t \beta \mu_t)}{\mu \beta} + \frac{(1 - s_t)}{1 - \sigma} = R \frac{(1 - \ell_t - e_t)}{(1 - \sigma)} + R \left[ \frac{n_t \ell_t}{[(n_t - \Phi(v_t))]} + e_t \right]$$

$$\frac{\rho + \psi}{\mu \beta} + \frac{(1 - s_t)}{1 - \sigma} + s_t = R \left( \frac{(1 - \ell_t - e_t)}{(1 - \sigma)} + \frac{n_t \ell_t}{[(n_t - \Phi(v_t))]} + e_t \right)$$

$$\frac{\rho + \psi}{\mu \beta} + \frac{1 - s_t \sigma}{1 - \sigma} = R \left( \frac{(1 - \ell_t - \sigma e_t)}{(1 - \sigma)} + \frac{n_t \ell_t}{[(n_t - \Phi(v_t))]} \right)$$

luego en estado estacionario no tiene sentido el uso subíndice t con lo que se obtiene la ecuación (34).

### Obtención de Ecuación (35)

De (23) tenemos

$$U_c(1 - \alpha) A q_t^\alpha \ell_t h_t (\Phi_v(v_t)) = MVN_{t+1} [\eta_t(1 - \beta)]$$

$$\frac{1}{c_t} (1 - \alpha) A q_t^\alpha \ell_t h_t (\Phi_v(v_t)) = MVN_{t+1} [\eta_t(1 - \beta)]$$

Luego se usa ecuación (20), con formas funcionales de utilidad aplicada

$$\frac{(1 - \ell_t - e_t)^{-\sigma} \gamma_1 n_t}{(1 - \alpha) A q_t^\alpha (n_t - \Phi(v_t)) h_t} (1 - \alpha) A q_t^\alpha \ell_t h_t (\Phi_v(v_t)) = MVN_{t+1} [\eta_t(1 - \beta)]$$

$$\frac{(1 - \ell_t - e_t)^{-\sigma} \gamma_1 n_t}{(n_t - \Phi(v_t))} \ell_t (\Phi_v(v_t)) = MVN_{t+1} [\eta_t(1 - \beta)]$$

ahora reemplazamos (E. 9) en la expresión anterior

$$\frac{(1 - \ell_t - e_t)^{-\sigma} \gamma_1 n_t}{(n_t - \Phi(v_t))} \ell_t (\Phi_v(v_t)) = \frac{\Omega_n(k_t, h_t, n_t)}{1 + \rho} [\eta_t(1 - \beta)]$$

$$\frac{(1 - \ell_t - e_t)^{-\sigma} \gamma_1 n_t}{(n_t - \Phi(v_t))} \ell_t (\Phi_v(v_t)) = \frac{(1 - s_{t-1})^{-\sigma} \gamma_2}{\mu \beta} [\eta_t(1 - \beta)]$$

$$\frac{(1 - \ell_t - e_t)^{-\sigma} \gamma_1 n_t}{(1 - s_{t-1})^{-\sigma} \gamma_2} \frac{\ell_t \Phi_v(v_t)}{(n_t - \Phi(v_t))} = \frac{\eta_t(1 - \beta)}{\mu \beta}$$

$$R \frac{\ell_t \Phi_v(v_t) n_t}{(n_t - \Phi(v_t))} = \frac{\eta_t(1 - \beta)}{\mu \beta}$$

luego en estado estacionario no tiene sentido el uso subíndice t con lo que se obtiene la ecuación (35)

### Obtención de Ecuación (36)

Se iguala (31) con (20) aplicando formas funcionales de la sección 4.2

$$(Aq^\alpha - q(\delta + g))(n - \Phi(v))\ell = \frac{(1 - \alpha)Aq_t^\alpha [(n_t - \Phi(v_t))]}{(1 - \ell_t - e_t)^{-\sigma} \gamma_1 n_t}$$

$$(1 - \ell_t - e_t)^{-\sigma} \gamma_1 n_t = \frac{(1 - \alpha)Aq_t^\alpha}{(Aq^\alpha - q(\delta + g))\ell}$$

$$(1 - \ell_t - e_t)^{-\sigma} \gamma_1 n_t = \frac{(1 - \alpha)A}{(A - q^{(1-\alpha)}(\delta + g))\ell}$$

Se utiliza ecuación (4) en la expresión anterior

$$(1 - \ell_t - e_t)^{-\sigma} \gamma_1 n_t = \frac{(1 - \alpha)A}{\left(A - \frac{A\alpha}{r_{kt}}(\delta + g)\right)\ell}$$

Ahora se utiliza ecuación (32) en la ecuación anterior y se desarrolla

$$(1 - \ell_t - e_t)^{-\sigma} \gamma_1 n_t = \frac{(1 - \alpha)}{\left(1 - \frac{\alpha}{\delta + \rho + (1 + \rho)g}(\delta + g)\right)\ell}$$

$$(1 - \ell_t - e_t)^{-\sigma} \gamma_1 n_t = \frac{(1 - \alpha)}{\left( \frac{\delta + \rho + (1 + \rho)g - \alpha(\delta + g)}{\delta + \rho + (1 + \rho)g} \right)^\ell}$$

$$(1 - \ell_t - e_t)^{-\sigma} \gamma_1 n_t = \frac{(\delta + \rho + (1 + \rho)g)}{(\delta + \rho + (1 + \rho)g) - \alpha(\delta + g)} \frac{(1 - \alpha)}{\ell}$$

$$(1 - \ell_t - e_t)^{-\sigma} \gamma_1 n_t = \frac{(\delta + g + \rho g + \rho)}{\delta + g + \rho g + \rho - \alpha(\delta + g)} \frac{(1 - \alpha)}{\ell}$$

$$(1 - \ell_t - e_t)^{-\sigma} \gamma_1 n_t = \frac{(\delta + g + (1 + g)\rho)}{\rho(1 + g) + (1 - \alpha)(\delta + g)} \frac{(1 - \alpha)}{\ell}$$

luego en estado estacionario no tiene sentido el uso subíndice t con lo que se obtiene la ecuación (36)

## Anexo E: Relaciones Fundamentales de Equilibrio (ecuaciones auxiliares para Anexo D)

- **Cálculos previos necesarios**

Primero se aplica formas funcionales de sección 4.2 a (15), (17), (18)

$$\frac{1}{c_t} = \frac{\Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} \quad (\text{E. 1})$$

$$\frac{-n_t \gamma_1}{(1 - \ell_t - e_t)^\sigma} = \frac{\Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} h_t (1 - \lambda) (Dn_t)^\chi e_t^{\chi-1} (\lambda \zeta^\chi + (1 - \lambda) (Dn_t)^\chi e_t^\chi)^{(1-\chi)/\chi} \quad (\text{E. 2})$$

$$(1 - s_t)^{-\sigma} (1 - n_t) \gamma_2 = \frac{\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}{1 + \rho} \mu \beta (1 - n_t) \quad (\text{E. 3})$$

Se retrasan en un período (15), (17), (18)

$$\frac{1}{c_{t-1}} = \frac{\Omega_k(k_t, h_t, n_t)}{1 + \rho} \quad (\text{E. 4})$$

$$\frac{-n_{t-1} \gamma_1}{(1 - \ell_{t-1} - e_{t-1})^\sigma} = \frac{\Omega_h(k_t, h_t, n_t)}{1 + \rho} h_{t-1} (1 - \lambda) (Dn_{t-1})^\chi e_{t-1}^{\chi-1} (\lambda \zeta^\chi + (1 - \lambda) (Dn_{t-1})^\chi e_{t-1}^\chi)^{(1-\chi)/\chi} \quad (\text{E. 5})$$

$$(1 - s_{t-1})^{-\sigma} (1 - n_{t-1}) \gamma_2 = \frac{\Omega_n(k_t, h_t, n_t)}{1 + \rho} \mu \beta (1 - n_{t-1}) \quad (\text{E. 6})$$

- **Relación de equilibrio 1:**

Se divide (E. 1)/ (E. 4) y se desarrolla

$$\frac{c_t}{c_{t-1}} = \frac{(1 + \rho) \Omega_k(k_t, h_t, n_t)}{(1 + \rho) \Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})} = \frac{\Omega_k(k_t, h_t, n_t)}{\Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})}$$

$$1 + g = \frac{\Omega_k(k_t, h_t, n_t)}{\Omega_k(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})} \quad (\text{E. 7})$$

con lo que se obtiene la primera relación de equilibrio (E. 7) que señala que  $\Omega_k(k_t, h_t, n_t)$  es decreciente a tasa constante  $g$  en la SCB.

- **Relación de equilibrio 2**

Se divide (E. 2) / (E. 5) y se desarrolla

$$\frac{-n_{t-1}\gamma_1}{(1 - \ell_{t-1} - e_{t-1})^\sigma} \left( \frac{(1 - \ell_t - e_t)^\sigma}{-n_t\gamma_1} \right) = \frac{(1 + \rho)\Omega_h(k_t, h_t, n_t) h_{t-1}(1 - \lambda)(Dn_{t-1})^\chi e_{t-1}^{\chi-1} (\lambda\zeta^\chi + (1 - \lambda)(Dn_{t-1})^\chi e_{t-1}^\chi)^{(1-\chi)/\chi}}{(1 + \rho)\Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) h_t(1 - \lambda)(Dn_t)^\chi e_t^{\chi-1} (\lambda\zeta^\chi + (1 - \lambda)(Dn_t)^\chi e_t^\chi)^{(1-\chi)/\chi}}$$

En estado estacionario variables endógenas toman valores de estado estacionario.

$$\frac{-n\gamma_1}{(1 - \ell - e)^\sigma} \left( \frac{(1 - \ell - e)^\sigma}{-n\gamma_1} \right) = \frac{(1 + \rho)\Omega_h(k_t, h_t, n_t) h_{t-1}(1 - \lambda)(Dn)^\chi e^{\chi-1} (\lambda\zeta^\chi + (1 - \lambda)(Dn)^\chi e^\chi)^{(1-\chi)/\chi}}{(1 + \rho)\Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) h_t(1 - \lambda)(Dn)^\chi e^{\chi-1} (\lambda\zeta^\chi + (1 - \lambda)(Dn)^\chi e^\chi)^{(1-\chi)/\chi}}$$

$$1 = \frac{\Omega_h(k_t, h_t, n_t) h_{t-1}}{\Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) h_t}$$

$$1 + g = \frac{\Omega_h(k_t, h_t, n_t)}{\Omega_h(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})} \quad (\text{E. 8})$$

con lo que se obtiene la segunda relación de equilibrio (E. 8) que señala que  $\Omega_h(k_t, h_t, n_t)$  es decreciente a tasa constante  $g$  en la SCB.

- **Relación de equilibrio 3**

Se divide (E. 3) / (E. 6) y se desarrolla

$$\frac{(1 - s_{t-1})^{-\sigma}(1 - n_{t-1})\gamma_2}{(1 - s_t)^{-\sigma}(1 - n_t)\gamma_2} = \frac{(1 + \rho)\Omega_n(k_t, h_t, n_t)}{(1 + \rho)\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})} \frac{\mu\beta(1 - n_{t-1})}{\mu\beta(1 - n_t)}$$

$$\frac{(1 - s)^{-\sigma}(1 - n)\gamma_2}{(1 - s)^{-\sigma}(1 - n)\gamma_2} = \frac{\Omega_n(k_t, h_t, n_t)}{\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1})} \frac{(1 - n)}{(1 - n)}$$

$$\Omega_n(k_{t+1}, h_{t+1}, n_{t+1}) = \Omega_n(k_t, h_t, n_t) \quad (\text{E. 9})$$

con lo que se obtiene la tercera relación de equilibrio (E. 9) que señala que  $\Omega_n(k_t, h_t, n_t)$  se mantiene constante en la SCB.

## Anexo F: Análisis de Sensibilidad de Calibración ante Cambios en Factor, Elasticidad de Sustitución y Multiplicador de Habilidades para la Calibración de Estados Unidos

### Sensibilidad ante Cambios en Factor $f$

En la tabla F.1 se presenta un análisis de sensibilidad de la calibración de  $\zeta$  y  $D$  ante aumentos consecutivos del factor  $f$  donde se mantienen fijos  $\chi = 1$  y  $\lambda = 0.5$ . La primera columna presenta aumentos consecutivos en 25% para el factor  $f$ . Las segunda y tercera columnas presentan los valores que toman la calibración de  $\zeta$  y  $D$ , respectivamente. Las cuarta y quinta columnas presentan el cambio porcentual de  $\zeta$  y  $D$ , respectivamente, ante los cambios en el factor.

De la tabla F.1 se puede concluir que condicional a que  $\chi = 1$  y  $\lambda = 0.5$ , aumento el factor  $f$ , disminuye en proporción inversa la calibración de  $\zeta$  y  $D$ , es decir un aumento de una proporción  $k$  en  $f$ , disminuye en  $1/k$  veces la calibración  $\zeta$  y  $D$ .

Tabla F.1: Sensibilidad ante cambios en factor con  $\chi = 1$  y  $\lambda = 0.5$

$f$	$\zeta$	$D$	cambio en $\zeta$	cambio en $D$
0.8	0.00497	0.14268	-	-
1	0.00398	0.11415	-20%	-20%
1.25	0.00318	0.09132	-20%	-20%
1.56	0.00255	0.07305	-20%	-20%
1.95	0.00204	0.05844	-20%	-20%

En la tabla F.2 se repite el ejercicio hecho en la tabla F.1 con la salvedad de que se fija  $\lambda = 0.72$ . Los valores de calibración que toman  $\zeta$  y  $D$  en este ejercicio son distintos a los vistos en la tabla F.1, sin embargo, se mantienen el cambio proporcional visto anteriormente, es decir, aumentos en 25% en  $f$  disminuye en 20% el valor de calibración en  $\zeta$  y  $D$ .

Tabla F.2: Sensibilidad ante cambios en factor con  $\chi = 1$  y  $\lambda = 0.72$

$f$	$\zeta$	$D$	cambio en $\zeta$	cambio en $D$
0.8	0.00345	0.25479	-	-
1	0.00276	0.20384	-20%	-20%
1.25	0.00221	0.16307	-20%	-20%
1.56	0.00177	0.13045	-20%	-20%
1.95	0.00141	0.10436	-20%	-20%

De las tablas F.1 y F.2 se concluye que si la tecnología de acumulación de capital humano es perfectamente sustituible entre tasas de acumulación ( $\chi = 1$ ), la calibración de  $\zeta$  y  $D$  serán inversamente proporcionales al valor que tome la normalización de los ponderadores  $f$  sin importar los valores específicos que tome  $\lambda$ .

### Sensibilidad ante Cambios en Parámetro de Capital Humano $\lambda$

En la tabla F.3 se presenta un análisis de sensibilidad de la calibración de  $\zeta$  y  $D$  ante aumentos consecutivos del parámetro  $\lambda$  donde se mantienen fijos valores  $\chi = 1$  y  $f = 1$ . La primera columna presenta aumentos consecutivos de 20% para el factor  $\lambda$ . Las segunda y tercera columnas presentan los valores que toman la calibración de  $\zeta$  y  $D$ , respectivamente. Las cuarta y quinta columnas presentan el cambio porcentual de  $\zeta$  y  $D$ , respectivamente, ante los aumentos en el parámetro  $\lambda$ .

De la tabla F.3 se observa que condicional a que  $\chi = 1$  y  $f = 1$ , el parámetro  $\lambda$  aumenta en proporción inversa la calibración de  $\zeta$ , es decir un aumento de una proporción  $k$  en  $\lambda$ , disminuye en  $1/k$  veces la calibración  $\zeta$ . Mientras que para  $D$ , a mayor valor de  $\lambda$ , el valor de calibración de  $D$  aumenta, y el cambio porcentual de la calibración es cada vez mayor para mayores valores de  $\lambda$ , es decir un aumento de una proporción  $k$  en  $\lambda$ , aumenta la calibración  $D$  en proporción ascendente  $k' > k$ .

Tabla F.3: Sensibilidad ante cambios en  $\lambda$  con  $f = 1$  y  $\chi = 1$

$\lambda$	$\zeta$	$D$	cambio en $\zeta$	cambio en $D$
0.417	0.00477	0.09784	-	-
0.5	0.00398	0.11415	-16.7%	16.7%
0.6	0.00331	0.14268	-16.7%	25.0%
0.72	0.00276	0.20384	-16.7%	42.9%

En la tabla F.4 se repite el ejercicio hecho en la tabla F.3 con la salvedad de que se fija  $\chi = 0.7225$ . Los valores de calibración que toman  $\zeta$  y  $D$  en este ejercicio son distintos a los vistos en la tabla F.3, sin embargo, se mantiene el cambio porcentual visto anteriormente para  $\zeta$ , sólo que con una constante proporcional mayor. Luego, se observa para  $D$  lo mismo que se vio en la tabla F.3, con la salvedad de que en el caso de la tabla F.4 caso la razón a la que aumenta  $D$  es mayor que la vista anteriormente.

Tabla F.4: Sensibilidad ante cambios en  $\lambda$  con  $f = 1$  y  $\chi = 0.7225$

$\lambda$	$\zeta$	$D$	cambio en $\zeta$	cambio en $D$
0.417	0.00488	0.09619	-	-
0.5	0.00379	0.11907	22.3%	23.8%
0.6	0.00295	0.16215	22.3%	36.2%
0.72	0.00229	0.26566	22.3%	63.8%

De las tablas F.3 y F.4 se concluye que si la tecnología de acumulación de capital humano es perfectamente sustituible entre tasas de acumulación ( $\chi = 1$ ), el cambio la calibración  $\zeta$  será inversamente proporcional al valor que tome la normalización de los ponderadores  $\lambda$  sin importar los valores específicos que tome  $\lambda$ . Luego si existe algún grado de complementariedad ( $\chi < 1$ ), la calibración de  $\zeta$  cambia en una proporción inversa mayor a la que cambia el multiplicador  $\lambda$ . Por otro lado, para el parámetro  $D$ , aumentos proporcionales

en  $\lambda$ , aumenta el cambio porcentual de calibración haya o no complementariedad, sin embargo en presencia de complementariedad, la proporción de cambio es mayor en  $D$ .

### Sensibilidad ante Cambios en Elasticidad de Sustitución $\chi$

En la tabla F.5 se presenta un análisis de sensibilidad de la calibración de  $\zeta$  y  $D$  ante disminuciones consecutivas del parámetro  $\chi$  donde se mantienen fijos valores  $\lambda = 0.5$  y  $f = 1$ . La primera columna presenta disminuciones consecutivas en 15% para el parámetro  $\chi$ . Las segunda y tercera columnas presentan el valor que toman las calibraciones de  $\zeta$  y  $D$ , respectivamente. Las cuarta y quinta columnas presentan el cambio porcentual de  $\zeta$  y  $D$ , respectivamente, ante los cambios en el parámetro  $\chi$ .

De la tabla F.5 se observa que condicional a que  $\lambda = 0.5$  y  $f = 1$ , disminuciones en el parámetro  $\chi$ , disminuye en mayor proporción la calibración de  $\zeta$ , es decir, una disminución de una proporción  $k$  en  $\chi$ , disminuye en  $k' > k$  veces la calibración  $\zeta$  y la disminución porcentual en  $\zeta$  es cada vez mayor. Mientras que para  $D$  se observa una relación inversa, es decir, a menor valor de  $\chi$ , el valor de calibración de  $D$  aumenta, y el cambio porcentual de calibración es cada vez mayor para menores valores de  $\chi$ .

Tabla F.5: Sensibilidad ante cambios en  $\chi$  con  $\lambda = 0.5$  y  $f = 1$

$\chi$	$\zeta$	$D$	cambio en $\zeta$	cambio en $D$
1	0.00398	0.11415	-	-
0.85	0.00389	0.11638	-2.2%	2.0%
0.723	0.00379	0.11907	-2.5%	2.3%
0.614	0.00368	0.12230	-3.0%	2.7%

En la tabla F.6 se repite el ejercicio hecho en la tabla F.5 con la salvedad de que se fija  $\lambda = 0.72$ . Se observa un patrón similar a lo visto con anterioridad, en que si bien, los valores de calibración que toman  $\zeta$  y  $D$  en este ejercicio son distintos a los vistos en la tabla F.5, se mantiene que el parámetro  $\chi$  influye en proporción incremental a la calibración de  $\zeta$  y  $D$ . Es decir, a mayor complementariedad, el cambio porcentual en las calibraciones aumenta respecto a lo visto en la tabla F.5, y las tasas de aumento de los parámetros, también se incrementan.

Tabla F.6: Sensibilidad ante cambios en  $\chi$  con  $f = 1$  y  $\lambda = 0.72$

$\chi$	$\zeta$	$D$	cambio en $\zeta$	cambio en $D$
1	0.00284	0.19025	-	-
0.85	0.00270	0.20383	-5.0%	7.1%
0.723	0.00233	0.24822	-13.6%	21.8%
0.614	0.00203	0.31440	-12.9%	26.7%

## Anexo G: Efecto de Grado de Complementariedad sobre Parámetros de Acumulación de Capital Humano

En este anexo presenta las derivadas de los parámetros exógenos de capital humano ( $\zeta, D$ ) considerando las calibraciones para Chile y Estados Unidos. Al resolver el sistema de ecuaciones definido por (30) y (33) obtenemos:

$$\zeta = \left( \frac{g^{\chi\ell} - e g^{(\chi-1)} (\rho + \rho g)}{\lambda\ell} \right)^{1/\chi}$$

$$D = \left( \frac{(\rho + \rho g)}{(1-\lambda)e^{(\chi-1)}g^{(1-\chi)}\ell n^\chi} \right)^{1/\chi} .$$

Al derivar respecto al parámetro que define el grado de complementariedad  $\chi$  se obtiene:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \chi} = \left[ \left( \frac{g^{\chi\ell} - e g^{(\chi-1)} (\rho + \rho g)}{\lambda\ell} \right)^\chi \log(g) \chi - \log \left( \frac{g^{\chi\ell} - e g^{(\chi-1)} (\rho + \rho g)}{\lambda\ell} \right) \right] \cdot \frac{1}{\chi^2}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \chi} = \left[ \left( \frac{e^{1-\chi} g^{\chi-1} (g\rho + \rho)}{(1-\lambda)\ell n^\chi} \right)^\chi \left( \log \left( \frac{ne}{g} \right) + \log \left( \frac{e^{1-\chi} g^{\chi-1} (g\rho + \rho)}{(1-\lambda)\ell n^\chi} \right) \right) \right] \cdot \frac{1}{\chi^2} .$$

De las expresiones anteriores y con la asistencia de un software, es posible notar que los signos de las derivadas dependen de la calibración del modelo. A partir de los datos de la figura H.1 y H.2 en este anexo notamos que para calibración para Estados Unidos  $\frac{\partial \zeta}{\partial \chi} > 0$  y  $\frac{\partial D}{\partial \chi} < 0$ . Por otro lado, de las figuras H.3 y H.4 notamos que para la calibración de la economía chilena se obtiene que  $\frac{\partial \zeta}{\partial \chi} < 0$  y  $\frac{\partial D}{\partial \chi} > 0$ .

El parámetro clave que incide en los parámetros de acumulación de capital humano es el esfuerzo de aprendizaje ( $e$ ). Si el esfuerzo de aprendizaje es lo suficientemente alto ( $e = 0.08$ ), en el caso de Estados Unidos, a mayor complementariedad, mayor es el valor de calibración de  $\zeta$  y menor es el valor de calibración de  $D$ . Luego si el nivel de esfuerzo de aprendizaje es lo suficientemente bajo ( $e = 0.04$ ), a mayor grado de complementariedad, menor es el valor de calibración de  $\zeta$  y mayor es el valor de calibración de  $D$ .

Sabemos que los valores  $\zeta$  y  $D$  se pueden interpretar como parámetros asociados a los *inputs* de desarrollo humano que determinan la acumulación de capital humano de los hogares. Dado que son valores de calibración, dependen de la complementariedad y multiplicador de habilidades asumidos. Luego, a mayor complementariedad, si el valor de  $e$  es muy pequeño, el modelo tiende a calibrar dando más relevancia al parámetro asociado a la experiencia laboral. Mientras que, si el valor del esfuerzo de aprendizaje es relativamente alto, el modelo tiende a calibrar dando más relevancia al parámetro  $D$ . Esta diferencia en el comportamiento

de la calibración es relevante para explicar la proporción de subsidio aplicado ante cambios en grado de complementariedad estudiados en las secciones 5.4 y 6.4.

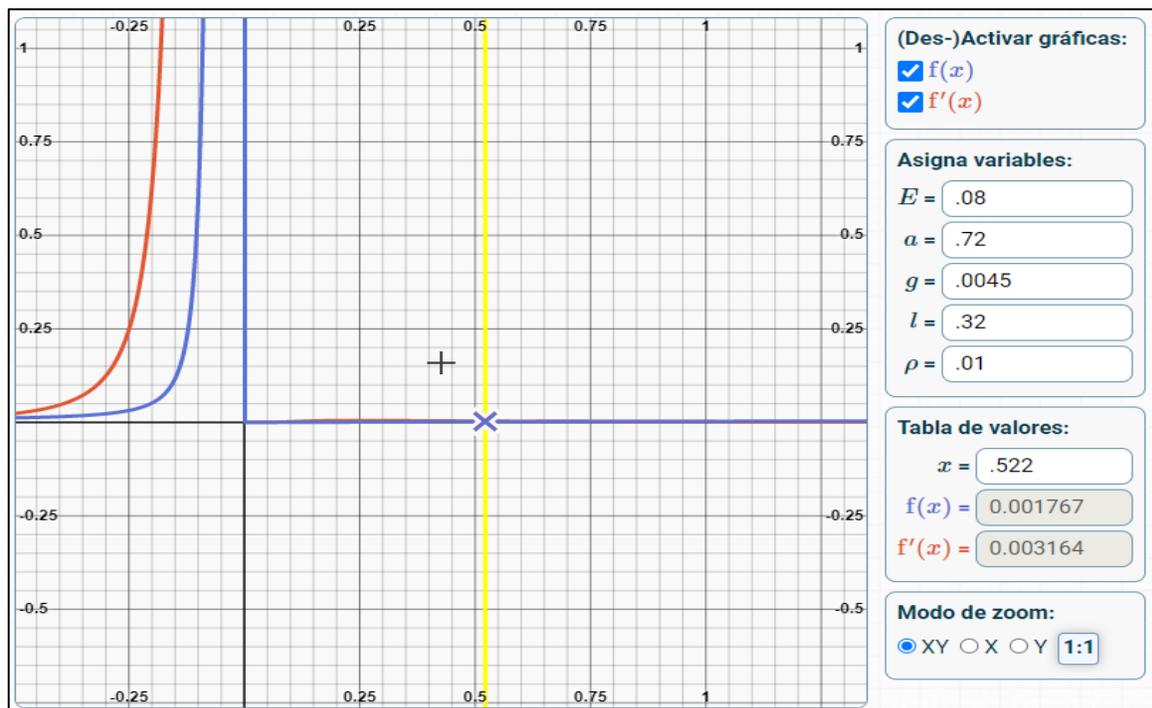


Figura H.1: Derivada de  $\zeta$  respecto a  $\chi$  para la calibración de Estados Unidos. El eje de las abscisas representa el parámetro  $\zeta$ , y el de las ordenadas el parámetro  $\chi$ .

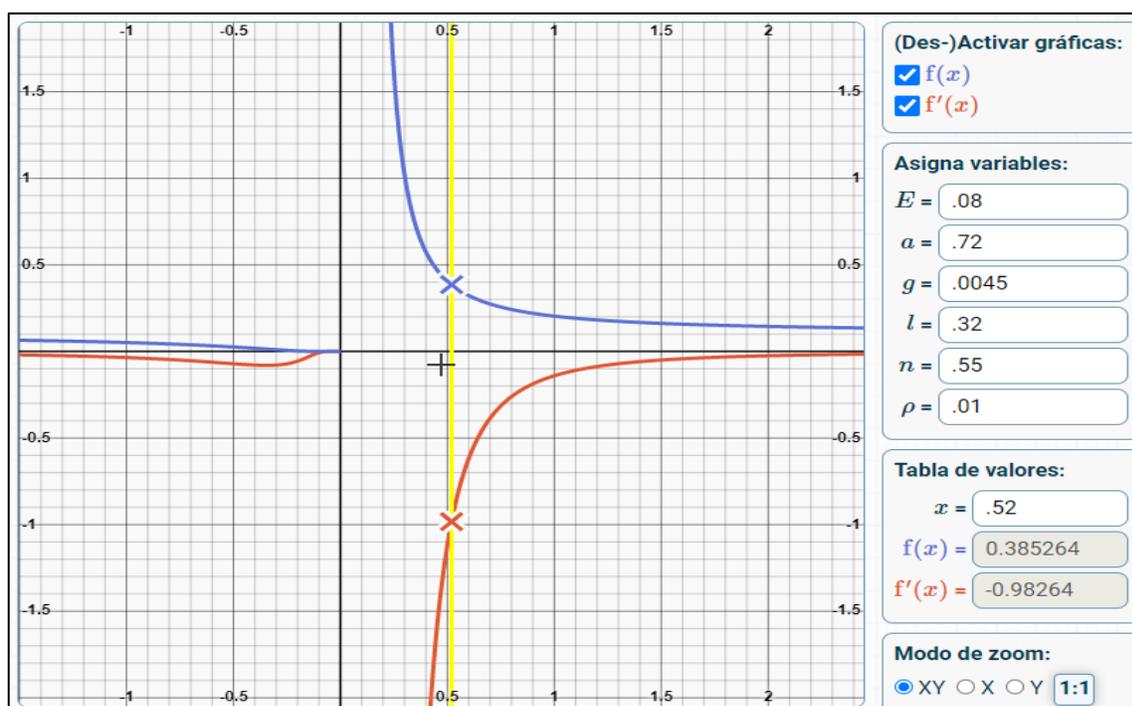


Figura H.2: Derivada de  $D$  respecto a  $\chi$  para la calibración de Estados Unidos. El eje de las abscisas representa el parámetro  $D$ , y el de las ordenadas el parámetro  $\chi$ .

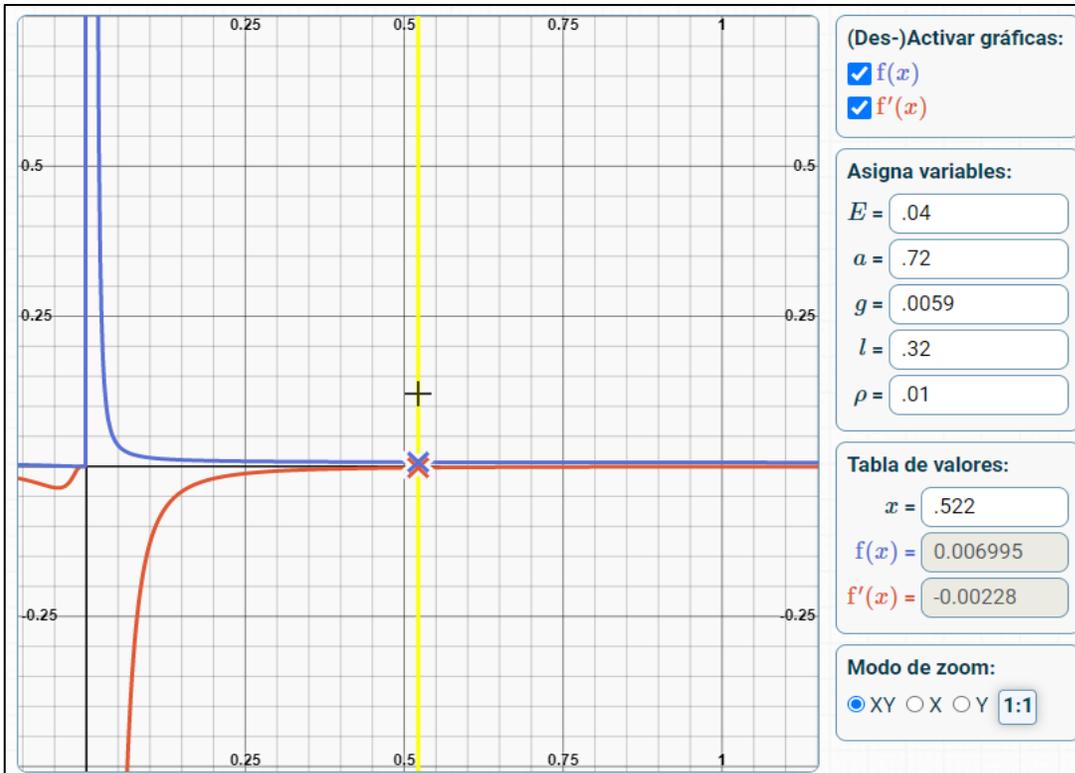


Figura H.3: Derivada de  $\zeta$  respecto a  $\chi$  para la calibración de Chile. El eje de las abscisas representa el parámetro  $\zeta$  y el de las ordenadas el parámetro  $\chi$ .

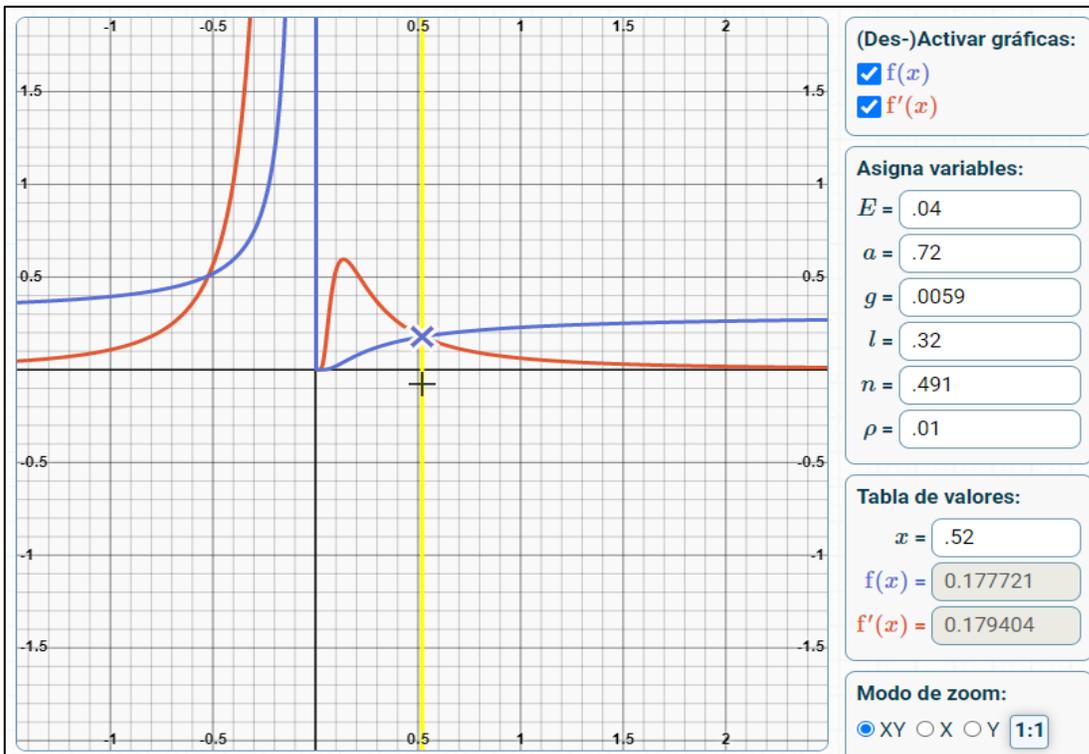


Figura H.4: Derivada de  $D$  respecto a  $\chi$  para la calibración de Chile. El eje de las abscisas representa el parámetro  $D$  y el de las ordenadas el parámetro  $\chi$ .

## Anexo H: Obtención de Ecuación (59)

Comenzamos por la ecuación (58) y desarrollamos

$$\begin{aligned}\Omega(k_t, h_t, n_t) &= \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^t \left( \ln(c_t) + \frac{n_t \gamma_1 (1 - \ell_t - e_t)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} + \frac{(1-n_t) \gamma_2 (1-s_t)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} \right) \\ \Omega(k_t, h_t, n_t) &= \sum_{t=0}^{\infty} \left( \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^t \ln(c_t) \right) \\ &\quad + \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^t \left( \frac{n_t \gamma_1 (1 - \ell_t - e_t)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} + \frac{(1-n_t) \gamma_2 (1-s_t)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} \right)\end{aligned}$$

En estado estacionario, los valores de  $n_t, \ell_t, e_t, s_t$  alcanzan valor de largo plazo constante

$$\begin{aligned}\Omega(k_t, h_t, n_t) &= \sum_{t=0}^{\infty} \left( \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^t \ln(c_t) \right) \\ &\quad + \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^t \left( \frac{n \gamma_1 (1 - \ell - e)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} + \frac{(1-n) \gamma_2 (1-s)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} \right)\end{aligned}$$

Se aplica fórmula de progresión geométrica infinita decreciente a la segunda sumatoria para obtener<sup>14</sup>

$$\Omega(k_t, h_t, n_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \left( \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^t \ln(c_t) \right) + \frac{1+\rho}{\rho} \left( \frac{n \gamma_1 (1 - \ell - e)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} + \frac{(1-n) \gamma_2 (1-s)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} \right)$$

Multiplicamos un 1 conveniente  $h_t/h_t$  y seguimos desarrollando

$$\begin{aligned}\Omega(k_t, h_t, n_t) &= \sum_{t=0}^{\infty} \left( \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^t \ln \left( \frac{c_t}{h_t} h_t \right) \right) \\ &\quad + \frac{1+\rho}{\rho} \left( \frac{n \gamma_1 (1 - \ell - e)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} + \frac{(1-n) \gamma_2 (1-s)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} \right)\end{aligned}$$

<sup>14</sup> Consideremos la serie  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  donde  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ . Además, sabemos que  $r = \frac{a_t}{a_{t-1}} = \frac{1}{1+\rho}$ , y  $a_1 = 1$ , por lo que  $S_n = a_1 \frac{(r^n - 1)}{r - 1}$ . Cuando la suma de una progresión geométrica tiende al infinito, converge de la siguiente manera

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{\left( \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^n - 1 \right)}{\frac{1}{1+\rho} - 1} = \frac{1+\rho}{\rho} \equiv \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^t$$

$$\Omega(k_t, h_t, n_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \left( \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^t \left( \ln \left( \frac{c_t}{h_t} \right) + \ln(h_t) \right) \right) + \frac{1+\rho}{\rho} \left( \frac{n\gamma_1(1-\ell-e)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} + \frac{(1-n)\gamma_2(1-s)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} \right)$$

Sabemos que en estado estacionario  $c_t/h_t$  es constante por lo que se sustraen los subíndices temporales

$$\Omega(k_t, h_t, n_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^t \ln \left( \frac{c}{h} \right) + \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^t \ln(h_t) + \frac{1+\rho}{\rho} \left( \frac{n\gamma_1(1-\ell-e)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} + \frac{(1-n)\gamma_2(1-s)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} \right)$$

Ahora, considerando las ecuaciones (9) y (30) se puede demostrar que  $\frac{h_t}{h_{t-1}} = 1 + g$ , y además asumiendo que el valor inicial del stock de capital humano es  $h_0 = 1$ , obtenemos lo siguiente<sup>15</sup>

$$\Omega(k_t, h_t, n_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^t \ln \left( \frac{c}{h} \right) + \sum_{t=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^t \ln((1+g)^t) + \frac{1+\rho}{\rho} \left( \frac{n\gamma_1(1-\ell-e)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} + \frac{(1-n)\gamma_2(1-s)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} \right)$$

$$\Omega(k_t, h_t, n_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^t \ln \left( \frac{c}{h} \right) + \ln(1+g) \sum_{t=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^t t + \frac{1+\rho}{\rho} \left( \frac{n\gamma_1(1-\ell-e)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} + \frac{(1-n)\gamma_2(1-s)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} \right)$$

Ahora es necesario aplicar la fórmula de sumatoria infinita conocida  $\sum_{t=1}^{\infty} tx^t = \frac{x}{(1-x)^2}$ , y desarrollamos

---

<sup>15</sup> Al desarrollar recursivamente sabemos que

$$h_t(1+g)^j = h_{t+j}$$

por lo que

$$\ln(h_t) = \ln((1+g)^t)$$

$$\Omega(k_t, h_t, n_t) = \frac{1 + \rho}{\rho} \ln\left(\frac{c}{h}\right) + \ln(1 + g) \frac{1 + \rho}{\rho^2} + \frac{1 + \rho}{\rho} \left( \frac{n\gamma_1(1 - \ell - e)^{(1-\sigma)}}{1 - \sigma} + \frac{(1 - n)\gamma_2(1 - s)^{(1-\sigma)}}{1 - \sigma} \right)$$

$$\Omega(k_t, h_t, n_t) = \frac{1 + \rho}{\rho} \left[ \ln\left(\frac{c}{h}\right) + \ln(1 + g) \frac{1}{\rho} + \left( \frac{n\gamma_1(1 - \ell - e)^{(1-\sigma)}}{1 - \sigma} + \frac{(1 - n)\gamma_2(1 - s)^{(1-\sigma)}}{1 - \sigma} \right) \right]$$

Con lo que se obtiene la ecuación (59).