



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

**CONDICIONES DE OPTIMALIDAD PARA LA PROGRAMACIÓN CÓNICA  
CON RESTRICCIONES DE COMPLEMENTARIEDAD**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,  
MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

**JAVIER IVÁN MADARIAGA ROMÁN**

PROFESOR GUÍA:  
HÉCTOR RAMÍREZ CABRERA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
ALEJANDRO JOFRÉ CÁCERES  
ANTON SVENSSON GRAAN

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por:  
ANID-Subdirección de Capital Humano/Magíster Nacional/2021-22210692,  
CMM ANID BASAL FB210005

SANTIAGO DE CHILE  
2023

RESUMEN TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE  
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,  
MENCION MATEMÁTICAS APLICADAS  
Y MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO  
POR: JAVIER IVÁN MADARIAGA ROMÁN  
FECHA: 2023  
PROF. GUÍA: HÉCTOR RAMÍREZ CABRERA

## CONDICIONES DE OPTIMALIDAD PARA LA PROGRAMACIÓN CÓNICA CON RESTRICCIONES DE COMPLEMENTARIEDAD

El principal proposito de esta tesis es estudiar la generalización cónica a los problemas MPCC, denominados CMPCC (*Conic Mathematical Programs with Complementarity Constraints*). Debido a la dificultad para calificar los puntos en estos problemas (e.g., la calificación de restricciones de Robinson no se cumple en ningún punto factible), es necesario formular nuevos conceptos y definiciones de puntos estacionarios, con los cuales se pueden escribir condiciones de optimalidad duales. A partir de los resultados existentes para MPCC y con recientes resultados expuestos para el cono de las matrices semidefinidas y el cono de segundo orden, se presentan definiciones generales, junto con nuevas nociones de puntos faciales. Finalmente, se estudia la relación entre las distintas nociones. Por el otro lado, usando uno de los resultados de Chi Ngoc Do, se estudia la relación entre el cono tangente del cono de complementariedad con el subdiferencial de la segunda subderivada de la funcion indicatriz. Adicionalmente, a conocimiento del autor, se define por primera vez la segunda subderivada parabólica. Así, a partir de una nueva versión del teorema de Do, se estudia la relación entre el conjunto tangente de segundo orden del cono de complementariedad y el subdiferencial de la segunda subderivada parabólica. Finalmente, se presenta una nueva calificación de restricción facial con la cual se pueden escribir condiciones de optimalidad primales.

RESUMEN TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE  
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,  
MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS  
Y MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO  
POR: JAVIER IVÁN MADARIAGA ROMÁN  
FECHA: 2023  
PROF. GUÍA: HÉCTOR RAMÍREZ CABRERA

## ON OPTIMALITY CONDITIONS FOR NONLINEAR CONIC PROGRAMMING WITH COMPLEMENTARITY CONSTRAINTS

The main purpose of this thesis is to study the conic generalization of MPCC problems, called Conic Mathematical Programs with Complementarity Constraints (CMPCC). Due to the difficulty in qualifying the points in these problems (e.g., the Robinson constraint qualification does not hold at any feasible point), it is necessary to formulate new concepts and definitions of stationary points with which dual optimality conditions can be written. Building on existing results for MPCC and recently reported results for the cone of semidefinite matrices and the second-order cone, general definitions are presented, along with new notions of facial points. Finally, the relationship between all of them is studied. On the other hand, using one of Chi Ngoc Do's results, the relationship between the tangent cone of the complementarity cone with the subdifferential of the second subderivative of the indicator function is studied. Additionally, to the author's knowledge, the second parabolic subderivative is defined for the first time. Thus, from a new version of Do's theorem, the relationship between the second order tangent set of the complementarity cone and the subdifferential of the second parabolic subderivative is studied. Finally, a new facial constraint qualification is presented with which primal optimality conditions can be written.

*“La matematica è l’alfabeto con il  
quale DIO ha scritto l’Universo.”*  
*–Galileo Galilei–*

# Agradecimientos

Quisiera comenzar agradeciendo a mi hermosa familia. A mi madre Judith Román Parra y a mi padre Edgar Madariaga Rubilar por heredarme su fe, por criarme y formarme siempre con su amor incondicional. A mis hermanos mayores, Andrea, Samuel, Pablo y Diego, quienes han sido siempre mis ídolos y ejemplos de vida. No solo son tremendos profesionales, si no también muy buenas personas.

A mis amigos del colegio, Lucas, Abel, Alf, Brian, Chalo, Ruiz, Barny, Mati, Miki, Solanich y Waldo. Porque siempre he tenido en ustedes un lugar de ocio y de entretenición, pero también sé que puedo contar con ustedes para conversar de lo que sea. Gracias por compartir juntos tantos buenos momentos!

Porque sin ellos mi paso por el DIM habría sido horrible, quiero agradecer al grupo Los Chacras y a aquellos amigos que hice en la facultad: Azocar, Barri, Benja, Bruninho, Chocho, Choco, Gitano, Hitori Bocchi, Javo, Joaking, Lucho, Majo, Nico, Pavlito, Pelela, Vivi y tarK7. Gracias por ser tan secos y ser constante motivación a aprender más, y también gracias por ser tan bacanes, tan chacotas, y por todas las cumbias chetas compartidas. También quiero agradecer a Natacha, y a todos los funcionarios del DIM-CMM quienes, sin darnos cuenta, son los responsables de que todo funcione correctamente.

Durante estos años, dos académicos han sido fundamentales para mi formación. Gracias a Javier Bustos-Jiménez por recibirme en el Niclabs y darme espacio para las burradas matemáticas. Gracias a Héctor Ramírez, quien me aceptó como profesor auxiliar, como practicante, como tesista. Agradezco profundamente todo lo que aprendí de ustedes, y espero algún día convertirme en un académico e investigador de su nivel.

Agradezco a Catalina su compañía directa e indirecta durante todos estos años. Por el apoyo que me ha entregado y el amor que he recibido de su parte. Espero de corazón que nos acompañemos en todo lo que vivamos.

Gracias a Dios por darme la vida, y a Cristo por renovarla día tras día.

# Tabla de Contenido

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. Teoría de conos . . . . .	3
1.2. Geometría variacional . . . . .	8
1.3. Geometría variacional para conos propios . . . . .	12
1.4. Límite de funciones . . . . .	15
1.5. Diferenciabilidad generalizada . . . . .	17
1.6. Descripción del problema . . . . .	24
<b>2. Puntos Estacionarios y Condiciones de Primer Orden</b>	<b>26</b>
2.1. Introducción y contexto . . . . .	26
2.2. Condiciones de primer orden para un problema de optimización general . . . . .	26
2.3. Falla de la calificación de Robinson . . . . .	27
2.4. Puntos estacionarios en la literatura . . . . .	28
2.4.1. Puntos estacionarios en MPCC . . . . .	28
2.4.2. Puntos estacionarios en SDCMPCC . . . . .	31
2.4.3. Puntos estacionarios en SOCMPC . . . . .	34
2.4.4. Puntos estacionarios de Wachsmuth para CMPCC . . . . .	37
2.5. Generalizaciones para CMPCC . . . . .	38
2.5.1. Puntos B-estacionarios . . . . .	39
2.5.2. Puntos S-estacionarios . . . . .	39
2.5.3. Puntos M- y C-estacionarios . . . . .	43
2.5.4. Puntos W-estacionarios . . . . .	45
2.6. Puntos estacionarios faciales para CMPCC . . . . .	46
2.6.1. Relación con los puntos W-estacionarios . . . . .	47
2.6.2. Relación con el punto M-estacionario . . . . .	50
2.6.3. Condiciones de optimalidad basadas en puntos faciales . . . . .	51
2.6.4. Puntos Facial-Reducido estacionarios . . . . .	51
2.7. Resumen de resultados . . . . .	55
2.8. Discusión y Comentarios . . . . .	55
<b>3. Geometría Variacional para el Cono de Complementariedad</b>	<b>58</b>
3.1. Introducción y contexto . . . . .	58
3.2. Geometría variacional vía proyección ortogonal . . . . .	59
3.3. Cono tangente del cono de complementariedad . . . . .	60
3.3.1. Función de curvatura . . . . .	60

3.3.2.	Caracterización del cono tangente . . . . .	63
3.3.3.	Cono tangente por definición . . . . .	65
3.4.	Conjunto tangente de segundo orden del cono de complementariedad . . . . .	66
3.4.1.	Conjunto tangente de segundo orden por definición . . . . .	66
3.4.2.	Segunda subderivada parabólica . . . . .	67
3.4.3.	Extensión del teorema de Do . . . . .	75
3.4.4.	Función de curvatura de segundo orden . . . . .	78
3.4.5.	Caracterización del conjunto tangente de segundo orden . . . . .	80
3.5.	Cono normal del conjunto de complementariedad . . . . .	81
3.6.	Geometría variacional vía subdiferenciales . . . . .	83
3.7.	Condiciones de optimalidad bajo calificación facial . . . . .	84
3.8.	Discusión y Comentarios . . . . .	85
	<b>Conclusiones</b>	<b>89</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>91</b>

# Introducción

La programación con restricciones de complementariedad (MPCC por sus siglas en inglés) consta de problemas de optimización finito dimensionales en los cuales la restricción toma la forma

$$G(x) \geq 0, \quad H(x) \geq 0, \quad G(x)^\top H(x) = 0,$$

con  $G, H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  funciones de clase  $\mathcal{C}^2$ . La complementariedad en la restricción provoca dificultades a la hora de trabajar con estos problemas, e.g., la calificación de restricciones de Mangasarian-Fromovitz no se cumple en ningún punto factible [1, 2]. Dado lo anterior, diversos autores han contribuido para reformular los problemas MPCC obteniendo, por ejemplo, nuevos y diferentes conceptos para puntos estacionarios. En las últimas dos décadas el problema MPCC ha sido profundamente estudiado, tanto desde el ámbito teórico [3, 4, 2, 5, 6, 7] como el numérico [6, 8].

El principal foco de esta tesis consiste en estudiar la generalización cónica a los problemas MPCC. Sea  $\mathbb{E}$  un espacio Euclidiano de producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y norma inducida  $\|\cdot\|$  (típicamente  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^m$ ), y sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio con su cono dual  $\mathcal{K}^* \subset \mathbb{E}$ . Entonces interesa estudiar los problemas de optimización con restricciones del tipo

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x); \quad \text{s.a. } G(x) \in \mathcal{K}, \quad H(x) \in \mathcal{K}^*, \quad \langle G(x), H(x) \rangle = 0.$$

Estos problemas denominados de programación cónica con restricciones de complementariedad (CMPCC por sus siglas en inglés) han sido objeto de estudio en los últimos años para elecciones particulares del cono  $\mathcal{K}$ , por ejemplo, al considerar el cono de las matrices semidefinidas positivas [9, 10, 11], o el cono de segundo orden [12, 13, 14, 15]. Asimismo, al considerar  $\mathcal{K} = \mathbb{R}_+^n$ , el ortante no negativo, se recupera el problema MPCC.

La relevancia de estudiar los problemas CMPCC recae en su rol y participación en modelos de ingeniería, equilibrios económicos, juegos multi-level [3, 16], y en equilibrios de Nash [17]. Estos problemas también guardan gran relación con las condiciones de KKT [18] y por esto, con los problemas *bilevel*, incluso cuando estos problemas no son equivalentes (e.g., [19, 20, 21]).

La organización de esta tesis es como sigue: En el Capítulo 1 se exponen las bases matemáticas en las que se fundamenta este trabajo. De este modo, se presentan los principales resultados en Teoría de Conos, así también herramientas del Análisis Variacional tales como los elementos de la Geometría Variacional, definiciones para Límite de funciones tanto univaluadas como multivaluadas, y Generalizaciones de la derivada como la subderivada, el subdiferencial, la derivada gráfica, entre otras. Finalmente, se presenta el problema a estudiar junto con sus reformulaciones más recurrentes en la literatura.



Análogo al resultado en MPCC, en el Capítulo 2 se muestra que la calificación de restricciones de Robinson no se cumple en ningún punto factible para los problemas CMPCC. Esto motiva a presentar diferentes definiciones para puntos estacionarios. Luego se recopilan las principales definiciones de la literatura, y se obtienen nociones para el problema general CMPCC. Se estudian las relaciones entre las diferentes definiciones. Finalmente se entregan dos nuevas nociones para puntos estacionarios débiles a partir de conceptos geométricos del problema. Estas nociones son comparadas con las presentadas anteriormente.

Una de las formulaciones más estudiadas es la cual reemplaza la restricción de complementariedad por la restricción

$$(G(x), H(x)) \in \mathcal{M} \quad \text{donde } \mathcal{M} := \{(s, s^*) : s \in \mathcal{K}, s^* \in \mathcal{K}^*, \langle s, s^* \rangle = 0\}.$$

Como  $\mathcal{M}$  (o bien, el cono de complementariedad de  $\mathcal{K}$ ) es un conjunto no convexo, la teoría clásica de optimización con restricciones no es aplicable. En esta línea de análisis no convexo, en el Capítulo 3 se relaciona el cono tangente de  $\mathcal{M}$  con el subdiferencial de la segunda subderivada de la función indicatriz  $\delta_{\mathcal{K}}$ , usando uno de los resultados de Do [22, Teo. 3.9]. Además, de acuerdo al estudio realizado, se define por primera vez la segunda subderivada parabólica. Luego, a través de una extensión del resultado de Do, se caracteriza el conjunto tangente de segundo orden de  $\mathcal{M}$  vía el subdiferencial de la segunda subderivada parabólica de la función  $\delta_{\mathcal{K}}$ . En último lugar, se presentan estimaciones para los conos normales asociados a  $\mathcal{M}$ . A partir de estos elementos se presentan condiciones de optimalidad de primer y segundo orden. A modo de conclusión, se hace una síntesis del trabajo, destacando las principales contribuciones, y se discuten posibles extensiones y generalizaciones a los resultados.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se exponen las nociones, definiciones y resultados básicos que se utilizan a lo largo de este trabajo. Las demostraciones correspondientes no son entregadas en su totalidad, y por lo tanto, en cada sección se dan referencias pertinentes para encontrar dichos resultados.

Debido a que la extensión del problema MPCC que se estudiará corresponde a una generalización cónica, es importante rescatar los principales resultados relacionado al estudio de conos. Por esto, en la Sección 1.1 se presentan los principales resultados en Teoría de Conos. En la Sección 1.2 se introducen las definiciones y resultados provenientes del Análisis Variacional, donde se estudian los conjuntos tangentes y normales, sus propiedades, sus reglas de cálculo, entre otros. En la Sección 1.3 se muestran los resultados del Análisis Variacional cuando el conjunto a estudiar es un cono. Con base en el Análisis Variacional, en la Sección 1.4 se introducen nuevas definiciones para límite y convergencia de funciones, tanto univaluadas como multivaluadas. Estas nociones fundamentales son aplicadas en la Sección 1.5, obteniendo los principales resultados en Diferenciabilidad Generalizada. Finalmente, la Sección 1.6 entrega una descripción más detallada del problema a estudiar, así como las principales reformulaciones presentes en la literatura.

La notación utilizada en este trabajo es la usual:  $B(x, r)$  denota la bola (abierta) centrada en  $x$  con radio  $r$ . Para un conjunto  $C$ , se denota por  $\text{int } C$ ,  $\text{ri } C$ ,  $\text{cl } C$ ,  $\text{bd } C$ ,  $\text{co } C$ ,  $\text{cone } C$ , a su interior, interior relativo, clausura, frontera, envoltura convexa, y envoltura cónica respectivamente. Se denota por  $o(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  a un mapeo con la propiedad que  $o(t)/t \rightarrow 0$  cuando  $t \downarrow 0$ . Para una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\nabla f(x)$  denota su gradiente, y  $\nabla^2 f(x)$  denota su Hessiano. En el caso de funciones generales  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ , su primera y segunda derivada son denotadas por  $DF(x)$  y  $D^2F(x)$  respectivamente. Para un operador  $A : X \rightarrow Y$ ,  $A^* : Y \rightarrow X$  denota su operador adjunto.

### 1.1. Teoría de conos

En esta sección se entregan los principales resultados en Teoría de conos, los cuales pueden ser encontrados en los trabajos de Barker [23, 24]. En todas las definiciones se considerará que el espacio a trabajar es  $\mathbb{E}$ , un espacio Euclidiano dotado del producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , y su norma inducida  $\|\cdot\|$ . Estas nociones pueden ser directamente extendidas a espacios

de Hilbert de dimensión infinita, ver por ejemplo [25]. En primer lugar, es necesario entregar la definición geométrica de cono.

**Definición 1.1.1** (Cono) *Se dice que  $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{E}$  es un cono si para todo  $s \in \mathcal{K}$  y todo  $\alpha > 0$  se tiene que*

$$\alpha s \in \mathcal{K}$$

Adicionalmente, algunos autores incorporan en la definición de cono que el conjunto  $\mathcal{K}$  también sea un conjunto convexo. En este trabajo de ser necesario enfatizar que el cono es convexo se le dirá *cono convexo*. También se puede notar que la definición no implica que el 0 pertenezca al cono.

**Definición 1.1.2** (Cono puntiagudo) *Sea  $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{E}$  un cono, se dice que  $\mathcal{K}$  es puntiagudo si*

$$\mathcal{K} \cap (-\mathcal{K}) = \{0\}.$$

Análogamente se puede entender que un cono es puntiagudo si el único subespacio vectorial contenido en el cono, es el espacio trivial dado por  $\{0\}$ . La siguiente definición engloba estas propiedades deseables en un cono.

**Definición 1.1.3** (Cono propio) *Se dice que  $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{E}$  es un cono propio si es un cono, es convexo, es cerrado, es puntiagudo y tiene interior no vacío.*

A menos que se indique lo contrario, en las propiedades y resultados que serán presentados en este trabajo se asumirá que  $\mathcal{K}$  es un cono propio. Esto es útil pues la mayoría de los conos de interés en la programación cónica son propios: los conos poliedrales, el cono de las matrices semidefinidas positivas, el cono de segundo orden, etc. A continuación, se definen los conos duales y polares, definiciones importantes debido a su participación en la restricción de complementariedad.

**Definición 1.1.4** *Sea  $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{E}$ . Se define el cono dual de  $\mathcal{K}$  y el cono polar de  $\mathcal{K}$ , denotados por  $\mathcal{K}^*$  y  $\mathcal{K}^\circ$  respectivamente, a los conjuntos*

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^* &:= \{s^* \in \mathbb{E} : \langle s, s^* \rangle \geq 0 \quad \forall s \in \mathcal{K}\}, \\ \mathcal{K}^\circ &:= \{s^* \in \mathbb{E} : \langle s, s^* \rangle \leq 0 \quad \forall s \in \mathcal{K}\},\end{aligned}$$

*de donde se obtiene inmediatamente que  $\mathcal{K}^\circ = -\mathcal{K}^*$ .*

Cuando el cono  $\mathcal{K}$  es tal que  $\mathcal{K} = \mathcal{K}^*$ , el cono recibe el nombre de autodual. Algunos conos importantes como el ortante no negativo, el cono de las matrices semidefinidas positivas y el cono de segundo orden, son autoduales. A pesar de que no todos los conos propios cumplen esto, la siguiente proposición muestra cómo el cono dual de un cono propio sigue manteniendo estas buenas propiedades.

**Proposición 1.1.5** *Si  $\mathcal{K}$  es un cono propio, entonces  $\mathcal{K}^*$  también lo es, y además  $\mathcal{K}^{**}$  (el*

como bidual, o el cono dual de  $\mathcal{K}^*$ ) es igual a  $\mathcal{K}$ .

Una de las definiciones más importantes en la Teoría de Conos es lo que se denomina “cara”. Por un lado, esta definición tiene alto impacto en el estudio de propiedades geométricas de los conos (e.g. [26, 27]). Por el otro, ha sido una pieza clave en el estudio de los problemas de optimización con restricciones cónicas (e.g. [28, 29]). Si bien no existe una definición única en la literatura, todas son equivalentes a la siguiente definición de cara.

**Definición 1.1.6** (Cara) *Sea  $\mathcal{K}$  un cono y sea  $F \subseteq \mathcal{K}$ . Se dice que  $F$  es una cara de  $\mathcal{K}$  (denotado por  $F \triangleleft \mathcal{K}$ ) si*

$$\forall s \in F, \quad \forall s_1, s_2 \in \mathcal{K} \text{ tal que } s = s_1 + s_2 \implies s_1, s_2 \in F.$$

Todas las cara de  $\mathcal{K}$ , desde la cara trivial  $\{0\}$  hasta  $\mathcal{K}$  mismo, también son conos. Una subclase de las caras son las llamadas caras expuestas. Su definición permite conocer explícitamente el conjunto, ya que proviene de una intersección de conjuntos.

**Definición 1.1.7** (Cara expuesta) *Sea  $F \triangleleft \mathcal{K}$  una cara del cono  $\mathcal{K}$ . Se dice que  $F$  es una cara expuesta de  $\mathcal{K}$  si se puede escribir como la intersección de  $\mathcal{K}$  con un hiperplano soportante dado por  $s^* \in \mathcal{K}^*$ , i.e.,*

$$F = \mathcal{K} \cap \{s^*\}^\perp.$$

Claramente toda cara expuesta es una cara. No obstante, la otra implicancia no siempre es cierta. Esto motiva la siguiente definición que resume aquellos conos donde esto sí se cumple.

**Definición 1.1.8** (Cono facialmente expuesto) *Se dice que el cono  $\mathcal{K}$  es facialmente expuesto si todas sus caras son caras expuestas.*

No todos los conos propios son facialmente expuesto. Una revisión de ejemplos de esto se pueden encontrar en [27]. Al estudiar la factibilidad de problemas con restricciones cónicas, Lourenço introdujo la noción de función residual facial [30, Def. 16], la cual fue extendida a funciones residual facial de un paso [31, Def. 3.4]. Esta función muestra cotas de error a la distancia a una cara expuesta.

**Definición 1.1.9** (Función residual facial de un paso) *Sea  $\mathcal{K}$  un cono propio y sea  $s^* \in \mathcal{K}^*$ . Una función  $\psi_{\mathcal{K},s^*} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  se dice una función residual facial de un paso para  $\mathcal{K}$  y  $s^*$  si*

1.  $\psi_{\mathcal{K},s^*}$  es no negativa y monótona no decreciente en cada argumento.
2.  $\psi_{\mathcal{K},s^*}(0, t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ .
3. Para todo  $s \in \text{span } \mathcal{K}$  y  $\varepsilon \geq 0$ :

$$d(s, \mathcal{K}) \leq \varepsilon, \quad \langle s, s^* \rangle \leq \varepsilon \implies d(s, \mathcal{K} \cap \{s^*\}^\perp) \leq \psi_{\mathcal{K},s^*}(\varepsilon, \|s\|).$$

**Observación** Siempre se pueden encontrar funciones residual facial para cualquier cono  $\mathcal{K}$  y  $s^* \in \mathcal{K}^*$  dados. Más aún, siempre se puede encontrar una de ellas que sea continua [30, Sec. 3.2].

El concepto de dualidad entre las caras de un cono  $\mathcal{K}$  y su dual  $\mathcal{K}^*$  ha sido profundamente estudiado (e.g. [32]). A partir del ortogonal de la cara  $F$ :

$$F^\perp := \{s^* \in \mathbb{E} : \langle s, s^* \rangle = 0, \forall s \in F\},$$

se definen las caras duales.

**Definición 1.1.10** (Cara dual) *Sea  $F \triangleleft \mathcal{K}$ . Se define la cara dual de  $F$  como*

$$F^D := \mathcal{K}^* \cap F^\perp.$$

*Cuando se refiere a una cara del cono dual  $F_* \triangleleft \mathcal{K}^*$ , para evitar confusión, se suele denotar la cara dual de  $F_*$  como*

$$F_*^\delta := \mathcal{K} \cap F_*^\perp.$$

**Observación** En esta definición se ha utilizado la notación de Barker para notar la cara dual. Otros autores denotan ambas caras duales por  $F^\Delta$  y  $F_*^\Delta$  (e.g. [33]), donde además se les denomina caras complementarias o caras conjugadas.

**Proposición 1.1.11** *Las caras duales corresponden efectivamente a caras del cono dual, i.e.,*

$$F^D \triangleleft \mathcal{K}^*, \quad F_*^\delta \triangleleft \mathcal{K}.$$

La siguiente proposición [32, Prop. 3.3] es una caracterización para las caras duales, la cual simplifica el conjunto  $F^\perp$  a simplemente estudiar un hiperplano de la forma  $s^\perp$  (donde  $s^\perp := \{s\}^\perp$ ). Adicionalmente, la proposición revela que todas las caras duales son caras expuestas.

**Proposición 1.1.12** *Sea  $F \triangleleft \mathcal{K}$  una cara del cono  $\mathcal{K}$ , y sea  $\bar{s} \in \text{ri } F$ . Entonces*

$$F^D = \mathcal{K}^* \cap \bar{s}^\perp.$$

*Si  $F_* \triangleleft \mathcal{K}^*$ , con  $\bar{s}^* \in \text{ri } F_*$ . Entonces*

$$F_*^\delta = \mathcal{K} \cap \bar{s}^{*\perp}.$$

Otro elemento de interés al estudiar las caras de un cono  $\mathcal{K}$ , es el concepto de cara minimal (en el sentido de la inclusión) que contenga a cierto elemento  $s \in \mathcal{K}$ . A continuación, se presenta su definición junto con la notación utilizada.

**Definición 1.1.13** *Sea  $s \in \mathcal{K}$ , entonces  $\Phi(s)$  denota la cara minimal de  $\mathcal{K}$  que contiene a*

$s$ , o bien

$$\Phi(s) = \bigcap_{s \in F \triangleleft \mathcal{K}} F.$$

Del mismo modo, si  $s^* \in \mathcal{K}^*$ ,  $\Phi(s^*)$  denota la cara minimal de  $\mathcal{K}^*$  que contiene a  $s^*$ , o bien

$$\Phi(s^*) = \bigcap_{s^* \in F_* \triangleleft \mathcal{K}^*} F_*.$$

El siguiente lema resume propiedades conocidas con respecto a la proyección ortogonal a un cono, cuyas demostraciones se pueden ver en los trabajos de Hiriart-Urruty & Lemaréchal [34, Teo 3.2.3 y 3.2.5].

**Lema 1.1.14** *Sea  $\mathcal{K} \in \mathbb{E}$  un cono convexo y cerrado, sea  $\Pi_{\mathcal{K}}$  la proyección ortogonal a  $\mathcal{K}$ , y sea  $x \in \mathbb{E}$ . Entonces:*

1.  $v = \Pi_{\mathcal{K}}(x) \iff v \in \mathcal{K}, v - x \in \mathcal{K}^*, \langle v - x, v \rangle = 0;$
2.  $\Pi_{\mathcal{K}}(\alpha x) = \alpha \Pi_{\mathcal{K}}(x)$  para todo  $\alpha \geq 0$  y  $\Pi_{\mathcal{K}}(-x) = -\Pi_{-\mathcal{K}}(x);$
3. (Descomposición de Moreau) Para todo  $x \in \mathbb{E}$ , se tiene que

$$x = \Pi_{\mathcal{K}}(x) - \Pi_{\mathcal{K}^*}(-x); \quad \langle \Pi_{\mathcal{K}}(x), \Pi_{\mathcal{K}^*}(-x) \rangle = 0.$$

Hay situaciones donde el cono  $\mathcal{K}$  puede ser parametrizado localmente. Esto es de interés, particularmente en los problemas de programación cónica, pues permite cambiar inclusiones de la forma

$$s \in \mathcal{K},$$

por otras que sean más fácil de estudiar. Se presenta a continuación la reducción cónica [35, Def. 3.135].

**Definición 1.1.15** (Reducción cónica de clase  $\mathcal{C}^k$ ) *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio en  $\mathbb{E}$  un espacio Euclidiano, y sea  $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^m$  un cono puntiagudo. Se dice que  $\mathcal{K}$  es  $\mathcal{C}^k$ -cono reducible a  $\mathbb{K}$  en el punto  $\bar{s} \in \mathcal{K}$  si existe una vecindad  $N$  de  $\bar{s}$  y un mapeo  $\Xi^{\bar{s}} : N \rightarrow \mathbb{R}^m$  de clase  $\mathcal{C}^k$  tal que*

- i)  $D\Xi^{\bar{s}}(\bar{s}) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$  es sobreyectiva,
- ii)  $\mathcal{K} \cap N = \{y \in N : \Xi^{\bar{s}}(y) \in \mathbb{K}\},$
- iii)  $\Xi^{\bar{s}}(\bar{s}) = 0.$

La condición ii) se puede interpretar como que localmente el conjunto  $\mathcal{K}$  es definido a partir de la restricción  $\Xi^{\bar{s}}(y) \in \mathbb{K}$ . Esto permite reescribir restricciones del tipo

$$G(y) \in \mathcal{K} \quad \text{por} \quad \Xi^{\bar{s}}(G(y)) \in \mathbb{K},$$

las cuales son equivalentes en una vecindad de  $\bar{s}$ . Además, la condición iii) nos indica que el punto  $\bar{x}$  desde el cual hacemos nuestro análisis, coincide con el 0 (o bien la punta) del cono  $\mathbb{K}$ . Los conos poliedrales [35, Ej. 3.139] son ejemplos de conos  $\mathcal{C}^\infty$ -cono reducible en todas

partes. El cono de las matrices semidefinidas positivas [35, Ej. 3.140], y el cono de segundo orden [36, Lema 15] cumplen con ser  $\mathcal{C}^2$ -cono reducible en todos sus puntos.

## 1.2. Geometría variacional

El análisis variacional moderno renueva la antigua relación entre el Cálculo Diferencial y la Optimización. De este modo, han surgido numerosas herramientas las cuales se ocupan del estudio de problemas de optimización con restricciones, prestando especial atención al análisis de sensibilidad y su estabilidad. Una característica destacable del análisis variacional moderno es la presencia de técnicas de optimización aplicadas a funciones no diferenciales en el sentido clásico, técnicas que pueden enmarcarse en la teoría general de multifunciones. En las siguientes secciones se enuncian las principales herramientas y resultados del análisis variacional y de la diferenciabilidad generalizada, los cuales serán clave para el estudio posterior del problema CMPCC. Todos estas definiciones y resultados están escritas en términos de los espacios  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$ . Sin embargo, pueden ser interpretados sin problemas en espacios Euclidianos. Para mayor comprensión de los resultados, se pueden consultar los trabajos de Gferer et al. [37], de Mordukhovich [38] y de Rockafellar & Wets [39].

La Geometría Variacional comienza su estudio con funciones multivaluadas, o bien, funciones que tienen conjuntos como imagen. Para comenzar el estudio es fundamental definir el límite de una familia de funciones multivaluadas. Clásicamente, la forma de abordar esto consiste en estudiar los “semilímites”, los cuales siempre existen. Para esto es necesario presentar la convergencia en el sentido de Painlevé-Kuratowski de una sucesión de conjuntos.

**Definición 1.2.1** Para una sucesión de conjuntos  $\{C^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ , se definen el límite inferior y el límite superior de Painlevé-Kuratowski por:

$$\begin{aligned} \liminf_{\nu \rightarrow \infty} C^\nu &:= \{v \in \mathbb{R}^n : \limsup_{\nu \rightarrow \infty} d(v, C^\nu) = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0, B(v, \varepsilon) \cap C^\nu \neq \emptyset \text{ para } \nu \text{ suficientemente grande}\}, \\ \limsup_{\nu \rightarrow \infty} C^\nu &:= \{v \in \mathbb{R}^n : \liminf_{\nu \rightarrow \infty} d(v, C^\nu) = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0, B(v, \varepsilon) \cap C^\nu \neq \emptyset \text{ para una cantidad infinita de } \nu \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

El límite de la sucesión existe cuando los semilímites son iguales:

$$C := \lim_{\nu \rightarrow \infty} C^\nu = \liminf_{\nu \rightarrow \infty} C^\nu = \limsup_{\nu \rightarrow \infty} C^\nu.$$

Entonces  $\{C^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  converge a  $C$  en el sentido de Painlevé-Kuratowski y se denota  $C^\nu \xrightarrow{PK} C$ .

Asimismo, se pueden extender estas nociones de semilímites para mapeos multivaluados. Esto permite incluso describir la propiedad de continuidad de estos mapeos.

**Definición 1.2.2** Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ , denotamos por  $\liminf_{x' \rightarrow x} F(x)$  y  $\limsup_{x' \rightarrow x} F(x)$  al

*límite inferior y superior de Painlevé-Kuratowski, definidos por:*

$$\begin{aligned}\liminf_{x' \rightarrow x} F(x') &:= \bigcap_{x' \rightarrow x} \liminf_{\nu \rightarrow \infty} F(x^\nu) \\ &= \left\{ v \in \mathbb{R}^m : \forall x_k \rightarrow x, \exists v_k \rightarrow v \text{ con } v_k \in F(x_k) \right\}, \\ \limsup_{x' \rightarrow x} F(x') &:= \bigcup_{x' \rightarrow x} \limsup_{\nu \rightarrow \infty} F(x^\nu) \\ &= \left\{ v \in \mathbb{R}^m : \exists x_k \rightarrow x, v_k \rightarrow v \text{ con } v_k \in F(x_k) \right\}.\end{aligned}$$

*El límite de la función multivaluada existe si ambos semilímites son iguales:*

$$L := \lim_{x' \rightarrow x} F(x') = \liminf_{x' \rightarrow x} F(x') = \limsup_{x' \rightarrow x} F(x'),$$

*y se denota por*

$$F(x') \xrightarrow{PK} L.$$

*Cuando  $F(x') \xrightarrow{PK} F(x)$ , se dice que la función multivaluada  $F$  es continua en  $x$ .*

Una noción primitiva para variación en un punto  $s \in \mathbb{R}^n$  viene al considerar una dirección  $d \neq 0$  y reemplazar  $s$  por  $s + \tau d$  para valores muy pequeños de  $\tau$ . Esta noción, presente por ejemplo en las derivadas direccionales, se vuelve difícil de aplicar en la presencia de restricciones donde variaciones en línea recta podrían violarlas. Pensando en sentido contrario, se pueden entender las sucesiones que convergen a  $s$  cumpliendo todas las restricciones como un tipo de variación, donde incluso se puede mantener el concepto de dirección. A continuación, se presenta la definición de conjuntos tangente, los cuales, a partir de los semilímites anteriores, extienden la noción de variación dado el punto  $s \in \mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.2.3** (Conjuntos Tangente) *Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $s \in S$ . El cono tangente regular (o de Clarke), el cono tangente interior, y el cono (Bouligand-Severi) tangente a  $S$  en  $s$  son definidos respectivamente por*

$$\begin{aligned}\widehat{T}_S(s) &:= \liminf_{t \downarrow 0, s' \xrightarrow{S} s} \frac{S - s'}{t} = \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \forall t_k \downarrow 0, s_k \xrightarrow{S} s, \exists d_k \rightarrow d \text{ con } s_k + t_k d_k \in S \right\}, \\ T_S^i(s) &:= \liminf_{t \downarrow 0} \frac{S - s}{t} = \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \forall t_k \downarrow 0, \exists d_k \rightarrow d \text{ con } s + t_k d_k \in S \right\}, \\ T_S(s) &:= \limsup_{t \downarrow 0} \frac{S - s}{t} = \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \exists t_k \downarrow 0, d_k \rightarrow d \text{ con } s + t_k d_k \in S \right\}.\end{aligned}$$

*Para  $s \in S$  y  $d \in T_S(s)$ , los conjuntos tangente interior y exterior de segundo orden en la*



dirección  $d$  son definidos respectivamente por

$$\begin{aligned} T_S^{i,2}(s; d) &:= \liminf_{t \downarrow 0} \frac{S - s - td}{\frac{1}{2}t^2} \\ &= \left\{ w \in \mathbb{R}^n : \forall t_k \downarrow 0, \exists w_k \rightarrow w, \text{ tal que } s + t_k d + \frac{1}{2}t_k^2 w_k \in S \right\}; \\ T_S^2(s; d) &:= \limsup_{t \downarrow 0} \frac{S - s - td}{\frac{1}{2}t^2} \\ &= \left\{ w \in \mathbb{R}^n : \exists t_k \downarrow 0, w_k \rightarrow w, \text{ tal que } s + t_k d + \frac{1}{2}t_k^2 w_k \in S \right\}. \end{aligned}$$

El conjunto  $S$  se dice ser geométricamente derivable en  $s \in S$  si  $T_S^i(s) = T_S(s)$ . Además, si  $T_S^{i,2}(s; d) = T_S^2(s; d)$  para  $d \in T_S(s)$ , el conjunto  $S$  se dice ser geométricamente derivable de segundo orden en  $s$  para la dirección  $d$ , o bien, parabólicamente derivable en  $s$  para  $d$ .

**Observación** Cuando no exista confusión, “cono tangente” refiere al cono Bouligand-Severi tangente, y “conjunto tangente de segundo orden” al conjunto tangente exterior de segundo orden.

Es posible notar que el cono tangente regular en todos los casos es un cono convexo y cerrado. El cono tangente siempre es un cono cerrado y es convexo si el conjunto  $S$  lo es. Por otro lado, el conjunto tangente exterior de segundo orden puede ser un conjunto no convexo incluso si  $S$  lo es. Además, mientras que el cono tangente siempre contiene al vector nulo, el conjunto tangente exterior de segundo orden puede ni siquiera ser un cono e incluso ser vacío [35, Ej. 3.29]. Para un estudio completo de las diferentes definiciones de conos tangente y conjuntos tangente de segundo orden, se recomienda consultar el trabajo de Giorgi et al. [40]. La siguiente Proposición [41, Lema 4] entrega aproximaciones superiores e inferiores para el conjunto tangente exterior de segundo orden.

**Proposición 1.2.4** Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y sea  $s \in S$  y  $d \in \mathbb{R}^n$ . Entonces para todo  $w \in T_S^2(s, d)$  se tiene que

$$w + T_{T_S(s)}(d) \subset T_S^2(s; d) \subset T_{T_S(s)}(d).$$

En particular, si  $0 \in T_S^2(s; d)$ , entonces  $T_S^2(s; d) = T_{T_S(s)}(d)$ .

La siguiente definición presenta una propiedad que relaciona el conjunto tangente de segundo orden y el conjunto  $S$ .

**Definición 1.2.5** (Regularidad exterior de segundo orden) El conjunto  $S$  se dice exteriormente regular de segundo orden en  $s \in S$  si para cualquier sucesión  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$  de la forma  $s_n := s + t_n d + \frac{1}{2}t_n^2 r_n$ , donde  $t_n \downarrow 0$  y  $t_n r_n \rightarrow 0$ , se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(r_n, T_S^2(s; d)) = 0.$$

La regularidad exterior de segundo orden significa que el conjunto tangente de segundo

orden es una aproximación superior de segundo orden para el conjunto  $S$  en  $s$  para la dirección  $d$ . Esta propiedad es clave para el estudio de condiciones de optimalidad de segundo orden en el sentido de que no exista *gap* entre las condiciones necesarias y suficientes [42, Teo. 4.1]

La contraparte natural al concepto “tangente” es el concepto de normalidad, el cual toma sus bases desde los resultados del Análisis Convexo.

**Definición 1.2.6** (Conos Normales) *Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $s \in \text{cl } S$ , el cono normal proximal a  $S$  en  $s$  es definido por*

$$N_S^\pi(s) := \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \exists M > 0, \text{ tal que } \langle v, s' - s \rangle \leq M \|s' - s\|^2 \quad \forall s' \in S \right\};$$

*el cono normal regular o de Fréchet a  $S$  en  $s$  es definido por*

$$\hat{N}_S(s) := \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \langle v, s' - s \rangle \leq o(\|s' - s\|), \quad \forall s' \in S \right\};$$

*el cono normal limitante o de Mordukhovich a  $S$  en  $s$  es definido por*

$$N_S(s) := \limsup_{s' \xrightarrow{S} s} \hat{N}_S(s');$$

*y el cono normal de Clarke a  $S$  en  $s$  es  $N_S^c(s) := \text{cl co } N_S(s)$ .*

Los conos normales corresponden a una definición dual de los conos tangenciales. Esto se puede evidenciar en la siguiente proposición que muestra cómo se comportan estos conjuntos al ver sus conos duales.

**Proposición 1.2.7** *Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  cerrado y  $s \in S$ , se cumplen las correspondencias de dualidad dadas por*

$$\begin{aligned} \hat{N}_S(s) &= -\left(T_S(s)\right)^*, \\ \hat{T}_S(s) &= -\left(N_S(s)\right)^* = -\left(N_S^c(s)\right)^*, \\ N_S^c(s) &= -\left(\hat{T}_S(s)\right)^*. \end{aligned}$$

Finalmente, se presentan las definiciones de regularidad métrica y subregularidad métrica de mapeos multivaluados.

**Definición 1.2.8** (Regularidad métrica) *Un mapeo multivaluado  $G : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  se dice métricamente regular con módulo  $\kappa > 0$  cerca del punto  $(s, s^*) \in \text{gph } G$  si existen vecindades  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  de  $s$  y  $s^*$  respectivamente tal que*

$$d(\tilde{s}, G^{-1}(\tilde{s}^*)) \leq \kappa d(\tilde{s}^*, G(\tilde{s})) \quad \forall (\tilde{s}, \tilde{s}^*) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}.$$

Fijando  $\tilde{s}^* = s^*$  se obtiene la siguiente condición, la cual evidentemente es más débil que regularidad métrica.

**Definición 1.2.9** (Subregularidad métrica) *Un mapeo multivaluado  $G : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  se dice métricamente subregular con módulo  $\kappa > 0$  cerca del punto  $(s, s^*) \in \text{gph } G$  si existe vecindad  $\mathcal{U}$  de  $s$  tal que*

$$d(\tilde{s}, G^{-1}(s^*)) \leq \kappa d(s^*, G(\tilde{s})) \quad \forall \tilde{s} \in \mathcal{U}.$$

En los últimos años se han considerado versiones aún más débil de esta propiedad, por ejemplo la subregularidad métrica direccional [43, Def. 1].

**Definición 1.2.10** (Subregularidad métrica direccional) *Un mapeo multivaluado  $G : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  se dice métricamente subregular con módulo  $\kappa > 0$  cerca del punto  $(s, s^*) \in \text{gph } G$  en la dirección  $d$  si existen  $\rho, \delta > 0$  tal que*

$$d(\tilde{s}, G^{-1}(s^*)) \leq \kappa d(s^*, G(\tilde{s})) \quad \forall \tilde{s} \in s + V_{\rho, \delta}(d),$$

donde

$$V_{\rho, \delta}(d) := \begin{cases} B(0, \rho) & d = 0 \\ \{0\} \cup \{w \in B(0, \rho) \setminus \{0\} : \left\| \frac{w}{\|w\|} - \frac{d}{\|d\|} \right\| \leq \delta\} & d \neq 0 \end{cases}$$

denota la vecindad direccional en la dirección  $d$ .

### 1.3. Geometría variacional para conos propios

En esta sección se estudian las aplicaciones de los elementos del Análisis Variacional cuando el conjunto objetivo es un cono propio  $\mathcal{K}$ . Más aún, la caracterización de los conos tangentes y los conos normales a  $\mathcal{K}$  puede ser realizada a través de las caras minimales. En efecto, el siguiente lema entrega la descripción de los conos tangentes de  $\mathcal{K}$  y de su dual  $\mathcal{K}^*$ .

**Lema 1.3.1** *Sean  $\mathcal{K}, \mathcal{K}^* \subset \mathbb{E}$  conos propios,  $s \in \mathcal{K}$  y  $s^* \in \mathcal{K}^*$ . Entonces*

$$T_{\mathcal{K}}(s) = \left( \Phi(s)^D \right)^*, \quad T_{\mathcal{K}^*}(s^*) = \left( \Phi(s^*)^\delta \right)^*. \quad (1.1)$$

donde  $\Phi(\cdot)^D$  y  $\Phi(\cdot)^\delta$  son los definidos en 1.1.10 y 1.1.13.

DEMOSTRACIÓN. Se prueba solo la segunda igualdad ya que, dado que  $\mathcal{K}^{**} = \mathcal{K}$ , la primera es análoga. Se puede reducir la demostración a estudiar tres casos, que coinciden en estudiar donde se encuentra el elemento  $s^*$ .

1. Si  $s^* = 0$ , entonces

$$\Phi(s^*) = \{0\} \implies \Phi(s^*)^\delta = \mathcal{K} \implies \left( \Phi(s^*)^\delta \right)^* = \mathcal{K}^*.$$

Se obtiene la igualdad 1.1 pues  $T_{\mathcal{K}^*}(0) = \mathcal{K}^*$ .

2. Si  $s^* \in \text{int } \mathcal{K}^*$ , entonces

$$\Phi(s^*) = \mathcal{K}^* \implies \Phi(s^*)^\delta = \{0\} \implies \left( \Phi(s^*)^\delta \right)^* = \mathbb{E}$$

Nuevamente se obtiene la igualdad 1.1 porque para  $s^* \in \text{int } \mathcal{K}^*$ :  $T_{\mathcal{K}^*}(s^*) = \mathbb{E}$ .

3. El último caso ( $s^* \in \text{bd } \mathcal{K}^* \setminus \{0\}$ ) se aborda por doble inclusión. Primero, la inclusión hacia la derecha ( $\subseteq$ ). Sea  $d^* \in T_{\mathcal{K}^*}(s^*)$ , entonces

$$\exists t_n \rightarrow 0^+, d_n^* \rightarrow d^* \text{ tal que } s^* + t_n d_n^* \in \mathcal{K}^* \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sea  $y \in \Phi(s^*)^\delta \subset \mathcal{K}$ . Como para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $s^* + t_n d_n^* \in \mathcal{K}^*$ , entonces

$$\langle s^* + t_n d_n^*, y \rangle \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por la definición de cara dual 1.1.10,  $\langle s^*, y \rangle = 0$ , por lo que en realidad cumple que

$$\langle t_n d_n^*, y \rangle \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como  $t_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\langle d_n^*, y \rangle \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \langle d^*, y \rangle \geq 0.$$

Lo anterior es válido para cualquier  $y \in \Phi(s^*)^\delta$ , lo que implica que  $d^* \in (\Phi(s^*)^\delta)^*$ . Se estudia ahora la inclusión hacia la izquierda ( $\supseteq$ ). Esta es analizada por contrarrecíproca. Si  $d^* \notin T_{\mathcal{K}^*}(s^*)$ , entonces el Teorema de Hahn-Banach es utilizado para separar  $T_{\mathcal{K}^*}(s^*)$  y  $\{d^*\}$ , i.e., existe un vector  $l \neq 0$  tal que

$$\langle l, y \rangle \leq 0 < \langle l, d^* \rangle \quad \forall y \in T_{\mathcal{K}^*}(s^*).$$

Lo anterior es equivalente a que  $l \in N_{\mathcal{K}^*}(s^*) = -[T_{\mathcal{K}^*}(s^*)]^*$ . Como  $\mathcal{K}^*$  (y también  $\mathcal{K}$ ) es un cono propio, tenemos que el cono  $N_{\mathcal{K}^*}(s^*)$  es igual  $(-\mathcal{K}) \cap \{s^*\}^\perp$  [35, Ej. 2.62] por lo que

$$l \in (-\mathcal{K}) \cap \{s^*\}^\perp \text{ o bien } -l \in \mathcal{K} \cap \{s^*\}^\perp = \Phi(s^*)^\delta.$$

Pero por la desigualdad entregada por el Teorema de Hahn-Banach,  $\langle -l, d^* \rangle < 0$  por lo que  $d^* \notin (\Phi(s^*)^\delta)^*$ , con lo que se obtiene el resultado en los tres casos y con ello se concluye el lema. □

Cuando  $\mathcal{K}$  es un cono propio, tanto  $\mathcal{K}$  como  $\mathcal{K}^*$  cumplen con ser conos convexos. Es por esto que el Lema 1.3.1 nos entrega inmediatamente una caracterización para los conos normales de  $\mathcal{K}$  y de  $\mathcal{K}^*$  a partir de la Proposición 1.2.7.

**Lema 1.3.2** *Sean  $\mathcal{K}, \mathcal{K}^* \subset \mathbb{E}$  conos propios,  $s \in \mathcal{K}$  y  $s^* \in \mathcal{K}^*$ . Entonces*

$$N_{\mathcal{K}}(s) = -\Phi(s)^D, \quad N_{\mathcal{K}^*}(s^*) = -\Phi(s^*)^\delta;$$

donde  $\Phi(\cdot)^D$  y  $\Phi(\cdot)^\delta$  son los definidos en 1.1.10 y 1.1.13.

Los lemas 1.3.1 y 1.3.2 muestran cómo una definición propia de la Teoría de Conos, como lo es la cara minimal, se encuentra relacionado con los elementos del Análisis Variacional. El siguiente lema aborda el concepto de convergencia de conjuntos al considerar la sucesión de

caras minimales de  $\mathcal{K}$ .

**Lema 1.3.3** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un cono propio facialmente expuesto, sean  $s \in \mathcal{K}$ ,  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$  una sucesión tal que  $s_n \rightarrow s$ . Entonces existe una subsucesión  $s_{m(n)}$  y una cara  $F \triangleleft \mathcal{K}$  tal que  $\Phi(s_{m(n)})$  converge (en el sentido de Painlevé-Kuratowski) a  $F$ , y cumple que  $\Phi(s) \subset F$ .*

DEMOSTRACIÓN. Como  $\mathcal{K}$  es un cono facialmente expuesto, se tiene que para cada cara existe un vector en  $\mathcal{K}^*$  el cual expone dicha cara, i.e., existen  $\{s_n^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}^*$  tal que

$$\Phi(s_n) = \mathcal{K} \cap \{s_n^*\}^\perp.$$

Se puede suponer que dichos vectores cumplen que  $\|s_n^*\| \leq 1$ , de modo que  $s_n^*$  converge (pasando por subsucesión de ser necesario) a algún vector  $s^* \in \mathcal{K}^*$ . Se enuncia a continuación el Teorema de Compacidad de Conjuntos de Zarankiewicz para sucesiones de conjuntos cerrados [44], el cual asegurará que se trabaja con una sucesión de conjuntos que convergen en el sentido de Painlevé-Kuratowski.

**Teorema de Bolzano-Weierstrass Generalizado.** *Sean  $\{A_n\}$  una sucesión de conjuntos cerrados en un espacio métrico separable  $(\mathcal{X}, d)$ . Entonces  $\{A_n\}$  tiene una subsucesión convergente en el sentido de Painlevé-Kuratowski.*

Gracias al teorema, se puede asumir (pasando nuevamente por una subsucesión) que  $\Phi(s_n)$  es convergente en el sentido de Painlevé-Kuratowski a cierto conjunto  $F$ . Más aún, se demostrará que  $F$  es la cara expuesta por  $s^*$ . Como todas las caras cumplen que  $\Phi(s_n) \subseteq \mathcal{K}$  el cual es cerrado, se tiene que  $F \subseteq \mathcal{K}$ . Para la primera inclusión ( $\subseteq$ ) sea  $\bar{s} \in F$  con lo que existe una sucesión  $\Phi(s_n) \ni \bar{s}_n \rightarrow \bar{s}$ . Al notar que para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$\langle \bar{s}, s^* \rangle = \langle \bar{s} - \bar{s}_n, s^* \rangle + \langle \bar{s}_n, s^* - s_n^* \rangle + \langle \bar{s}_n, s_n^* \rangle. \quad (1.2)$$

Los primeros dos términos del lado derecho convergen a 0 porque  $\bar{s}_n \rightarrow \bar{s}$  y  $s_n^* \rightarrow s^*$ . El tercer término es siempre nulo porque

$$\bar{s}_n \in \Phi(s_n) = \mathcal{K} \cap \{s_n^*\}^\perp.$$

Al tomar límite en la ecuación (1.2) obtenemos que  $\bar{s} \in \mathcal{K} \cap \{s^*\}^\perp$  con lo que  $F \subset \mathcal{K} \cap \{s^*\}^\perp$ . Para la otra inclusión ( $\supseteq$ ) sea  $\bar{s} \in \mathcal{K} \cap \{s^*\}^\perp$ , y se considera la sucesión dada por

$$\bar{s}_n := \Pi_{\Phi(s_n)}(\bar{s}) = \Pi_{\mathcal{K} \cap \{s_n^*\}^\perp}(\bar{s}).$$

Como  $\Phi(s_n)$  converge a  $F$ , se tiene que  $\Pi_{\Phi(s_n)}(\bar{s}) \rightarrow \Pi_F(\bar{s})$  [39, Prop. 4.9]. Así, basta ver que  $\Pi_F(\bar{s}) = \bar{s}$  para concluir la inclusión. Para esto se utiliza la función de residuo facial de un paso (Def. 1.1.9)  $\psi_{\mathcal{K}, s^*}$ , sobre la cual se tiene la desigualdad

$$\|\bar{s} - \Pi_{\mathcal{K} \cap \{s_n^*\}^\perp}(\bar{s})\| = d(\bar{s}, \mathcal{K} \cap \{s_n^*\}^\perp) \leq \psi_{\mathcal{K}, s^*}(\langle \bar{s}, s_n^* \rangle, \|\bar{s}\|).$$

Dado que  $\langle \bar{s}, s_n^* \rangle \rightarrow 0$ , gracias a las propiedades de la función  $\psi_{\mathcal{K}, s^*}$  (ver Def. 1.1.9), se obtiene que

$$\|\bar{s} - \Pi_{\mathcal{K} \cap \{s_n^*\}^\perp}(\bar{s})\| \rightarrow 0,$$

lo que concluye que  $\bar{s} = \Pi_F(\bar{s})$  y por lo tanto  $\mathcal{K} \cap \{s^*\}^\perp \subset F$ . Así, se ha demostrado que

la sucesión de caras  $\Phi(s_n)$  converge en el sentido de Painlevé-Kuratowski a otra cara  $F$ . Finalmente, se puede notar que  $s \in F$  pues  $s_n \in \Phi(s_n)$  y  $s_n \rightarrow s$  por lo que, como  $F$  es una cara de  $\mathcal{K}$ , contiene la cara minimal de  $s$ , con lo que se concluye el lema en su totalidad.  $\square$

**Observación** Para la demostración del Lema anterior se ha utilizado que el cono es facialmente expuesto. En particular, se ha utilizado para incorporar la función de residuo facial y así demostrar que el límite  $F$  es efectivamente una cara. Está abierta la demostración para el caso general (donde no se considere que el cono es facialmente expuesto). En ese caso se puede probar que la sucesión de caras converge (pasando por subsucesión) a algún conjunto  $F \subset \mathcal{K}$ , mas no es inmediato obtener que este conjunto es una cara de  $\mathcal{K}$ .

## 1.4. Límite de funciones

En esta sección se presentan nociones sobre la convergencia de una familia de funciones univaluadas y multivaluadas. Estas definiciones tienen su origen en el estudio del Análisis Variacional, precisamente la convergencia definida por los semilímites de Painlevé-Kuratowski. Además, serán importantes para entregar los conceptos en Diferenciabilidad Generalizada en la siguiente sección. Se inicia esta sección presentando definiciones claves sobre funciones univaluadas. Para una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , su *epigrafo* viene dado por

$$\text{epi } f := \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\},$$

y su *dominio* es el conjunto

$$\text{dom } f := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}.$$

La noción de epigrafo se puede utilizar para caracterizar muchas propiedades para las funciones a valores en los reales extendidos. Entre las más importantes, una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es *inferior semicontinua* si y solo si  $\text{epi } f$  es un conjunto cerrado, y es *convexa* si y solo si  $\text{epi } f$  es un conjunto convexo. A partir de este concepto, se puede introducir una nueva noción de convergencia para sucesiones de funciones a valores en los reales extendidos.

**Definición 1.4.1** (epi-límites) *Para cualquier sucesión  $\{f^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  de funciones en  $\mathbb{R}^n$ , el epi-límite inferior  $e\text{-lim inf}_\nu f^\nu$  es la función cuyo epigrafo es el límite superior de los conjuntos  $\text{epi } f^\nu$ :*

$$\text{epi} \left( e\text{-lim inf}_{\nu \in \mathbb{N}} f^\nu \right) := \limsup_{\nu \in \mathbb{N}} (\text{epi } f^\nu).$$

*El epi-límite superior  $e\text{-lim sup}_\nu f^\nu$  es la función cuyo epigrafo es el límite inferior de los conjuntos  $\text{epi } f^\nu$ :*

$$\text{epi} \left( e\text{-lim sup}_{\nu \in \mathbb{N}} f^\nu \right) := \liminf_{\nu \in \mathbb{N}} (\text{epi } f^\nu).$$

*Cuando estas funciones coinciden, se dice que la función epi-límite, denotada por  $e\text{-lim}_\nu f^\nu$ , existe y coincide con el epi-límite superior e inferior. En este caso se dice que las funciones  $f^\nu$  epi-convergen a  $f$ , lo cual se simboliza por  $f^\nu \xrightarrow{e} f$ . Así,*

$$f^\nu \xrightarrow{e} f \iff \text{epi } f^\nu \xrightarrow{PK} \text{epi } f.$$

Estas definiciones se pueden caracterizar por medio de límites inferiores y superiores de sucesiones reales, tal como muestra la siguiente proposición [39, Prop. 7.2].

**Proposición 1.4.2** (caracterización de epi-límites) *Sea  $\{f^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones en  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $x$  cualquier punto en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces*

$$\begin{aligned} \text{e-lim inf}_{\nu \in \mathbb{N}} f^\nu(x) &= \min \left\{ \alpha \in \overline{\mathbb{R}} : \exists x^\nu \rightarrow x \text{ tal que } \liminf_{\nu \in \mathbb{N}} f^\nu(x^\nu) = \alpha \right\}. \\ \text{e-lim sup}_{\nu \in \mathbb{N}} f^\nu(x) &= \min \left\{ \alpha \in \overline{\mathbb{R}} : \exists x^\nu \rightarrow x \text{ tal que } \limsup_{\nu \in \mathbb{N}} f^\nu(x^\nu) = \alpha \right\}. \end{aligned}$$

Más aún,  $f^\nu \xrightarrow{e} f$  si y solo si en cada punto  $x$  se tiene que

$$\begin{cases} \liminf_{\nu} f^\nu(x^\nu) \geq f(x) & \text{para toda sucesión } x^\nu \rightarrow x, \\ \limsup_{\nu} f^\nu(x^\nu) \leq f(x) & \text{para alguna sucesión } x^\nu \rightarrow x. \end{cases}$$

La siguiente definición extiende el conocido *límite puntual* de funciones univaluadas para aquellas multivaluadas. Al igual que en el caso anterior, esto es posible al utilizar los semilímites de Painlevé-Kuratowski como se muestra en la siguiente definición.

**Definición 1.4.3** (Límite puntual de mapeos) *Para una sucesión de mapeos multivaluados  $F^\nu : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ , el límite puntual inferior y el límite puntual superior vienen dados por los mapeos  $\text{p-lim inf}_{\nu} F^\nu$  y  $\text{p-lim sup}_{\nu} F^\nu$  definidos en cada punto  $x$  por*

$$\begin{aligned} \left( \text{p-lim inf}_{\nu \in \mathbb{N}} F^\nu \right)(x) &:= \liminf_{\nu \in \mathbb{N}} F^\nu(x), \\ \left( \text{p-lim sup}_{\nu \in \mathbb{N}} F^\nu \right)(x) &:= \limsup_{\nu \in \mathbb{N}} F^\nu(x). \end{aligned}$$

Cuando estas funciones coinciden, entonces el límite puntual, denotado por  $\text{p-lim}_{\nu} F^\nu$ , existe y se dice que las funciones  $F^\nu$  convergen puntualmente a  $F$ , lo cual se simboliza por  $F^\nu \xrightarrow{p} F$ . Así

$$F^\nu \xrightarrow{p} F \iff F^\nu(x) \xrightarrow{PK} F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

La convergencia puntual es una noción atractiva de estudiar debido a que coincide con el concepto clásico de convergencia puntual cuando los mapeos son univaluados. Una última definición de convergencia es la que nace a partir de estudiar el gráfico de una función:

**Definición 1.4.4** *Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  un mapeo multivaluado. Se define el gráfico de  $F$  por*

$$\text{gph } F := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : y \in F(x) \right\}.$$

**Definición 1.4.5** (Límite gráfico de mapeos) *Para una sucesión de mapeos multivaluados  $F^\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , el límite gráfico inferior  $\text{g-lim inf}_{\nu} F^\nu$  es el mapeo cuyo gráfico es el límite*

inferior de los conjuntos  $\text{gph } F^\nu$ :

$$\text{gph} \left( \text{g-lim inf}_{\nu \in \mathbb{N}} F^\nu \right) := \liminf_{\nu \in \mathbb{N}} (\text{gph } F^\nu).$$

A su vez, el límite gráfico superior  $\text{g-lim sup}_{\nu} F^\nu$  es el mapeo cuyo gráfico es el límite superior de los conjuntos  $\text{gph } F^\nu$ :

$$\text{gph} \left( \text{g-lim sup}_{\nu \in \mathbb{N}} F^\nu \right) := \limsup_{\nu \in \mathbb{N}} (\text{gph } F^\nu).$$

Cuando estas funciones coinciden, entonces el límite gráfico, denotado por  $\text{g-lim}_{\nu} F^\nu$ , existe y se dice que las funciones  $F^\nu$  convergen gráficamente a  $F$ , lo cual se simboliza por  $F^\nu \xrightarrow{g} F$ . Así

$$F^\nu \xrightarrow{g} F \iff \text{gph } F^\nu \xrightarrow{PK} \text{gph } F.$$

Una completa revisión de las propiedades de estos límites se puede encontrar en los trabajos de Rockafellar & Wets [39].

## 1.5. Diferenciabilidad generalizada

La Diferenciabilidad generalizada extiende los conceptos de derivada en dos situaciones importantes: Por un lado, cuando la función no es suave (incluso discontinua). Por otro lado, cuando la función es multivaluada. Existen muchas otras definiciones fuera de las enunciadas a continuación, pero en el marco de este trabajo solo serán presentadas las siguientes: derivadas direccionales, subderivadas, subdiferenciales, derivadas gráficas y coderivadas.

El primer concepto a definir son las derivadas direccionales [35, Def. 2.45], noción bien conocida y utilizada en el área de la optimización.

**Definición 1.5.1** (Derivada direccional) *Para una función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , la derivada direccional de  $F$  en  $s$  en la dirección  $d$  se define como*

$$F'(s; d) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{F(s + td) - F(s)}{t},$$

cuando el límite existe. Si  $F$  es direccionalmente diferenciable en  $s$  para  $d$ , su segunda derivada direccional parabólica en  $w$  se define por

$$F''(s; d; w) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{F\left(s + td + \frac{1}{2}t^2w\right) - F(s) - tF'(s; d)}{\frac{1}{2}t^2},$$

cuando el límite existe. Más aún, si el siguiente límite existe

$$F''(s; d; w) = \lim_{\substack{t \downarrow 0 \\ w' \rightarrow w}} \frac{F\left(s + td + \frac{1}{2}t^2w'\right) - F(s) - tF'(s; d)}{\frac{1}{2}t^2},$$

entonces se dice que  $F$  es parabólica direccionalmente diferenciable de segundo orden en  $s$



según  $d, w$  en el sentido de Hadamard.

En general, la parabólica diferenciabilidad direccional de segundo orden en el sentido de Hadamard es más fuerte que la primera definición. Sin embargo, estos conceptos coinciden cuando  $F$  es localmente Lipschitz en  $s$ . Además, cuando  $F$  es parabólica direccionalmente diferenciable en  $s$  según  $d, w$  en el sentido de Hadamard, entonces se cumple que

$$F\left(s + td + \frac{1}{2}t^2w + o(t^2)\right) = F(s) + tF'(s; d) + \frac{1}{2}t^2F''(s; d, w) + o(t^2).$$

A continuación, se presentan las subderivadas [39, Cap. 8], las cuales guardan relación con la derivada direccional cuando la función considerada tiene como recorrido  $\mathbb{R}$ . No obstante, aún cuando la derivada direccional respectiva exista, su valor puede diferir al de la subderivada.

**Definición 1.5.2** (Subderivada) *Para una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  y un punto  $s$  con  $f(s)$  finito, la función subderivada de  $f$  en  $s$  se define por*

$$df(s)(d) := \liminf_{\substack{\tau \downarrow 0 \\ d' \rightarrow d}} \frac{f(s + \tau d') - f(s)}{\tau}.$$

La siguiente proposición muestra que, como es una generalización de la derivada, coincide con ella en el caso diferenciable. También se revela el resultado de la subderivada al ser evaluada en la función indicatriz de un conjunto.

**Proposición 1.5.3** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una función de clase  $C^1$  en  $s$ , entonces se cumple que*

$$df(s)(d) = f'(s; d) = \nabla f(s)^\top d.$$

Para  $\delta_C$ , la función indicatriz del conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  con  $s \in C$ , se cumple que

$$d\delta_C(s)(d) = \delta_{T_C(s)}(d).$$

En la misma línea, a continuación se presentan dos definiciones para la segunda subderivada [39, Cap. 13]. Una de ellas recoge la noción de segundo orden al utilizar la (primera) subderivada. La otra puede ser evaluada en distintos vectores  $s^* \in \mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.5.4** (Segunda subderivada) *Para una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  y un punto  $s$  con  $f(s)$  finito, la segunda subderivada de  $f$  en  $s$  relativa a  $s^* \in \mathbb{R}^n$  es definida por*

$$d^2f(s|s^*)(d) := \liminf_{\substack{\tau \downarrow 0 \\ d' \rightarrow d}} \Delta_\tau^2 f(s|s^*)(d'),$$

donde

$$\Delta_\tau^2 f(s|s^*)(d) := \frac{f(s + \tau d) - f(s) - \tau \langle s^*, d \rangle}{\frac{1}{2}\tau^2}.$$

La segunda subderivada de  $f$  (sin mención a  $s^*$ ) es definida por

$$d^2f(s)(d) := \liminf_{\substack{\tau \downarrow 0 \\ d' \rightarrow d}} \Delta_\tau^2 f(s)(d'),$$

donde

$$\Delta_\tau^2 f(s)(d) := \frac{f(s + \tau d) - f(s) - \tau df(s)}{\frac{1}{2}\tau^2}.$$

Al igual que en la (primera) subderivada, la segunda subderivada generaliza el concepto de segunda derivada, y la siguiente proposición muestra esta igualdad cuando la función es de clase  $\mathcal{C}^2$ .

**Proposición 1.5.5** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una función de clase  $\mathcal{C}^2$  en  $s$ , entonces se cumple que*

$$d^2f(s|\nabla f(s))(d) = d^2f(s)(d) = \nabla^2 f(s)(d, d).$$

Para  $\delta_C$ , la función indicatriz del conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $s \in C$ , se cumple que

$$d^2\delta_C(s)(d) = \delta_{T_C(s)}(d).$$

**Definición 1.5.6** *Sea  $s$  un punto donde la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es finita. Se dice que  $f$  es dos veces epi-diferenciable en  $s$  para  $s^*$  si las funciones  $\Delta_\tau^2 f(s|s^*)$  epi-convergen a  $d^2f(s|s^*)$  cuando  $\tau \downarrow 0$ . Si además la función  $d^2f(s|s^*)$  es propia, se dice que  $f$  es propiamente dos veces epi-diferenciable en  $s$  para  $s^*$ .*

**Observación** A pesar de la semejanza entre ambas segundas subderivadas, como por ejemplo en el caso diferenciable escogiendo  $s^* = \nabla f(s)$ , al ser evaluadas en la función indicatriz ocurre un fenómeno importante a destacar. Mientras que la segunda subderivada de  $\delta_C$  entrega (al igual que la primera subderivada) la indicatriz del cono tangente, i.e.  $\delta_{T_C(s)}$ , la segunda subderivada relativa a algún  $s^*$  es una función no trivial. Rockafellar & Wets conjeturaron que la segunda subderivada de la función indicatriz de un conjunto  $C$  relativa a algún  $s^*$  se encuentra relacionada con la curvatura del conjunto [39]. Esta observación será retomada más adelante en este trabajo.

La segunda subderivada relativa a  $s^*$  tiene un buen comportamiento en el caso convexo. En primer lugar, cuando  $f$  es una función convexa, inferiormente semicontinua y propia, su segunda subderivada en  $s$  relativa a  $s^*$  es una función convexa. La siguiente proposición nos muestra el resultado de Rockafellar & Wets en relación a la conjugada convexa [39, Prop. 13.20 & Teo. 13.21].

**Proposición 1.5.7** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una función convexa, inferiormente semicontinua y propia, y sea  $f^*$  su conjugada convexa. Sea  $s \in \text{dom } f$  y  $s^* \in \partial f(s)$ . Entonces  $f$  es propiamente dos veces epi-diferenciable en  $s$  para  $s^*$  si y solo si  $f^*$  es propiamente dos veces epi-diferenciable en  $s^*$  para  $s$ . En dicho caso la función  $d^2f(s|s^*)$  también es convexa y no*

negativa, y se cumple la relación de conjugada

$$\frac{1}{2}d^2f(s|s^*) \xleftrightarrow{*} \frac{1}{2}d^2f^*(s^*|s).$$

La segunda subderivada permite presentar una nueva definición para la regularidad de conjuntos como muestra la siguiente proposición [45, Def. 3.1]. Esta propiedad es estrictamente más débil que la regularidad de segundo orden (Def. 1.2.5), y tiene importantes aplicaciones en condiciones de optimalidad suficientes de segundo orden en término de las segundas subderivadas [39, Cap. 13].

**Definición 1.5.8** (Regularidad parabólica de conjuntos) *Un conjunto no vacío  $C \subset \mathbb{R}^n$  se dice parabólicamente regular en  $s \in C$  para  $s^* \in \mathbb{R}^n$  si para cualquier  $d \in \mathbb{R}^n$  con  $d^2\delta_C(s|s^*)(d) < \infty$  entonces existe, entre todas las sucesiones  $t_n \downarrow 0$  y  $d_n \rightarrow d$  que cumplen que*

$$\Delta_{t_n}^2 \delta_C(s|s^*)(d_n) \rightarrow d^2\delta_C(s|s^*)(d) \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

*sucesiones que además cumplen que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|d_n - d\|}{t_n} < \infty.$$

A continuación, se presenta la subderivada parabólica [39, Cap. 13]. Esta aplicación se relaciona con la derivada direccional parabólica de segundo orden.

**Definición 1.5.9** (Subderivada parabólica) *Para una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , la subderivada parabólica de  $f$  en  $s$  relativa a  $d \in \mathbb{R}^n$  con  $df(s)(d)$  finito es definida por*

$$d_p f(s)(d)(w) := \liminf_{\substack{\tau \downarrow 0 \\ w' \rightarrow w}} \frac{f(s + \tau d + \frac{1}{2}\tau^2 w') - f(s) - \tau df(s)(d)}{\frac{1}{2}\tau^2}.$$

**Observación** En la literatura a la subderivada parabólica se le denota por  $d^2f(s)(d|w)$ , siendo una notación similar a la utilizada para la segunda subderivada. La distinción realizada en este trabajo tomará más sentido en el Capítulo 3 cuando se presente la segunda subderivada parabólica.

La siguiente proposición [39, Ej. 13.60; Ej. 13.62], de forma análoga a la Proposición 1.5.3, muestra como se comporta la subderivada parabólica en dos casos de interés.

**Proposición 1.5.10** *Para la función indicatriz  $\delta_C$  de un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$ , dado un punto  $s \in C$  y una dirección  $d \in T_C(s)$ , se tiene que*

$$d_p \delta_C(s)(d)(w) = \delta_{T_C^2(s;d)}(w).$$

Además, cuando  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^2$  en  $s$ , se tiene

$$d_p f(s)(d)(w) = f''(s; d; w) = \nabla^2 f(s)(d, d) + \nabla f(s)^\top w.$$

La siguiente proposición [39, Prop. 13.64] muestra una de las relaciones más importantes entre la segunda subderivada y la subderivada parabólica.

**Proposición 1.5.11** *Para  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , cualquier punto  $s$  con  $f(s)$  finito, cualquier vector  $d$  tal que  $df(s)(d)$  sea finito, y para cualquier vector  $s^*$  tal que  $df(s)(d) = \langle d, s^* \rangle$ , entonces se cumple que*

$$\inf_w \left\{ d_p f(s)(d)(w) - \langle w, s^* \rangle \right\} \geq d^2 f(s|s^*)(d).$$

El término de subdiferencial se origina inicialmente como generalizaciones del gradiente de funciones convexas. No obstante, el concepto ha sido replanteado múltiples veces, obteniendo resultados frente a la ausencia de convexidad. A continuación, se presentan las generalizaciones más utilizadas en el área del Análisis Variacional no convexo.

**Definición 1.5.12** (Subdiferencial) *Para una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  y un punto  $s$  con  $f(s)$  finito, se define el subdiferencial regular o de Fréchet de  $f$  en  $s$  como el conjunto*

$$\widehat{\partial} f(s) := \left\{ s^* : \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(s+h) - f(s) - \langle s^*, h \rangle}{\|h\|} \geq 0 \right\};$$

el subdiferencial limitante o de Mordukovich o básico de  $f$  en  $s$  como el conjunto

$$\partial f(s) := \limsup_{s' \rightarrow s} \widehat{\partial} f(s').$$

Cuando  $f$  es Lipschitz continua en  $s$ , entonces

$$\partial^c f(s) := \text{co } \partial f(s)$$

denota al subdiferencial de Clarke de  $f$  en  $s$ .

Al igual que en los casos anteriores, la siguiente proposición muestra cómo esta definición corresponde a una generalización del gradiente, y cómo extiende la definición original para funciones convexas.

**Proposición 1.5.13** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continuamente diferenciable en  $s$ . Entonces*

$$\widehat{\partial} f(s) = \partial f(s) = \{\nabla f(s)\}.$$

Sea  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una función convexa. Entonces

$$\widehat{\partial} \tilde{f}(s) = \partial \tilde{f}(s) = \partial_{\text{co}} \tilde{f}(s),$$

donde  $\partial_{\text{co}} \tilde{f}(s)$  corresponde al subdiferencial convexo clásico del Análisis Convexo.

Para un estudio más completo de los subdiferenciales y sus propiedades, se referencian los trabajos de Kruger [46], de Mordukhovich [47], y de Clarke [48]. El siguiente Teorema, demostrado por primera vez por Attouch [49, Teo. 3.66], relaciona la epi-convergencia de funciones, con la convergencia gráfica de sus subdiferenciales.

**Lema 1.5.14** (Teorema de Attouch) *Sean  $\{\varphi\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\varphi$  funciones propias, convexas e inferiormente semicontinuas. Entonces  $\varphi = e\text{-lim } \varphi_n$  si y solo si se cumplen:*

(i)  $\partial\varphi = g\text{-lim } \partial\varphi_n$ .

(ii)  $\exists(x_n, v_n) \rightarrow (x, v)$  con  $v_n \in \partial\varphi_n(x_n)$ ,  $v \in \partial\varphi(x)$ ,  $\varphi_n(x_n) \rightarrow \varphi(x)$ .

El estudio sobre diferenciabilidad generalizada también ha abordado otro tipos de funciones como son las funciones multivaluadas. Las siguientes definiciones hacen uso de los elementos definidos en la geometría variacional para extraer nuevas nociones sobre diferenciabilidad.

**Definición 1.5.15** (Derivada gráfica) *Para un mapeo multivaluado  $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  y un par  $(s, s^*)$  tal que  $s^* \in F(s)$ , se define la derivada gráfica de  $F$  en  $s$  para  $s^*$  como el mapeo multivaluado  $DF(s|s^*) : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  tal que*

$$\begin{aligned} DF(s|s^*)(d) &:= \left\{ d^* \in \mathbb{R}^m : (d, d^*) \in T_{\text{gph } F}(s, s^*) \right\} \\ &= \limsup_{\substack{\tau \downarrow 0 \\ d' \rightarrow d}} \Delta_\tau F(s|s^*)(d'), \end{aligned}$$

donde

$$\Delta_\tau F(s|s^*)(d') := \frac{F(s + \tau d') - s^*}{\tau}.$$

Además, se dirá que  $F$  es proto-diferenciable en  $s$  para  $s^*$  si los mapeos  $\Delta_\tau F(s|s^*)$  convergen gráficamente a  $DF(s|s^*)(d)$  cuando  $\tau \downarrow 0$ .

El Lema 1.5.16 presentado a continuación [22, Teo. 3.9], es importante por dos razones. En primer lugar, relaciona tres de las generalizaciones enunciadas (segunda subderivada, subdiferencial y derivada gráfica). En segundo lugar, es una de las herramientas más utilizadas en el análisis variacional en los últimos años (ver por ejemplo Mohammadi et al. [45]).

**Lema 1.5.16** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una función convexa, propia e inferiormente semicontinua. Sean  $s \in \mathbb{R}^n$ ,  $s^* \in \partial f(s)$ . Entonces el mapeo  $\partial f$  es proto-diferenciable en  $s$  para  $s^*$  si y solo si  $f$  es dos veces epi-diferenciable en  $s$  para  $s^*$ , y se cumple que*

$$D(\partial f)(s|s^*) = \partial \left( \frac{1}{2} d^2 f(s|s^*) \right).$$

El lema anterior puede ser enunciado para una familia más grande de funciones, por ejemplo que en vez de ser convexas sean prox-regulares y subdiferencialmente continuas [39, Teo. 13.40]. También se puede relajar la hipótesis sin suponer ninguna de estas características (no convexas, prox-regular ni subdiferencialmente continuas), pero utilizando en su lugar el

subdiferencial proximal [50, Prop. 4.2]. Como las funciones convexas, propias e inferiormente semicontinuas cumplen ser prox-regulares y subdiferencialmente continuas en cada punto de su dominio [39, Ej. 13.30], es suficiente el enunciado presentado en el Lema 1.5.16 para este trabajo. Esto porque el caso de interés será cuando la función sea la indicatriz de un cono propio  $\mathcal{K}$ , la cual es convexa, propia e inferiormente semicontinua.

**Definición 1.5.17** (Coderivada) *Para un mapeo multivaluado  $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  y un par  $(s, s^*)$  tal que  $s^* \in F(s)$ , se define la coderivada de  $F$  en  $s$  para  $s^*$  como el mapeo multivaluado  $D^*F(s|s^*) : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$  tal que*

$$D^*F(s|s^*)(d^*) := \left\{ d \in \mathbb{R}^n : (d, -d^*) \in N_{\text{gph } F}(s, s^*) \right\}.$$

Las próximas dos definiciones corresponden a extensiones para derivadas de orden superior. En primer lugar, la derivada gráfica de segundo orden que, análogo a la derivada gráfica, utiliza el conjunto tangente de segundo orden [51, 52].

**Definición 1.5.18** (Derivada gráfica de segundo orden) *Para  $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  y  $(s, s^*, d, d^*)$  tales que  $s^* \in F(s)$  y  $d^* \in DF(s|s^*)(d)$ , se define la derivada gráfica de segundo orden de  $F$  en  $(s, s^*)$  para la dirección  $(d, d^*)$  como el mapeo multivaluado  $D^2F(s|s^*)(d|d^*) : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  tal que*

$$\begin{aligned} D^2F(s|s^*)(d|d^*)(w) &:= \left\{ w^* \in \mathbb{R}^m : (w, w^*) \in T_{\text{gph } F}^2((s, s^*), (d, d^*)) \right\} \\ &= \limsup_{\substack{\tau \downarrow 0 \\ w' \rightarrow w}} \Delta_\tau^2 F(s|s^*)(d|d^*)(w'), \end{aligned}$$

donde

$$\Delta_\tau^2 F(s|s^*)(d|d^*)(w') := \frac{F(s + \tau d + \frac{1}{2}\tau^2 w') - s^* - \tau d^*}{\frac{1}{2}\tau^2}.$$

Además, se dirá que  $F$  es dos veces proto-diferenciable en  $(s, s^*)$  para  $(d, d^*)$  si los mapeos  $\Delta_\tau^2 F(s|s^*)(d|d^*)$  convergen gráficamente a  $D^2F(s|s^*)(d|d^*)$  cuando  $\tau \downarrow 0$ .

En segundo lugar, se presenta el subdiferencial de segundo orden [53], el cual se define a partir de la composición del subdiferencial con la coderivada.

**Definición 1.5.19** (Subdiferencial de segundo orden) *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una función finita en  $s$ , y sea  $s^* \in \partial f(s)$ . Entonces el subdiferencial de segundo orden de  $f$  en  $s$  relativo a  $s^*$  viene dado por*

$$\partial^2 f(s|s^*)(d^*) := D^*(\partial f)(s|s^*)(d^*).$$

Al igual que en todos los casos anteriores, la siguiente proposición muestra el resultado de la derivada gráfica, la coderivada, la derivada gráfica de segundo orden y el subdiferencial de segundo orden frente a una función diferenciable.

**Proposición 1.5.20** Sea  $f$  una función univaluada de clase  $\mathcal{C}^1$ . Entonces se cumple que

$$Df(s|f(s))(d) = \{\nabla f(s)d\}; \quad D^*f(s|f(s))(d^*) = \{\nabla f(s)^*d^*\}.$$

Más aún, si  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^2$ , entonces

$$\begin{aligned} D^2f(s|f(s))(d|\nabla f(s)d)(w) &= \{\nabla^2 f(s)(d, d) + \nabla f(s)w\}; \\ \partial^2 f(s|\nabla f)(d^*) &= \{\nabla^2 f(s)d^*\}. \end{aligned}$$

## 1.6. Descripción del problema

En esta sección se presenta el problema principal a estudiar en la presente tesis, acompañado de sus principales reformulaciones. Se debe recordar que a lo largo de este trabajo se considerará a  $\mathbb{E}$ , un espacio Euclidiano dotado del producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y con la norma inducida por el producto interno  $\|\cdot\|$ . En la mayoría de los ejemplos que se discutirán,  $\mathbb{E}$  será escogido como el espacio  $\mathbb{R}^m$  para cierto  $m \geq 1$ . No obstante, también serán de interés otros espacios como por ejemplo  $\mathbb{S}^m$ , el espacio de las matrices simétricas de dimensión  $m \times m$ .

Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $G, H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{E}$  funciones de clase  $\mathcal{C}^2$ . Sea además  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio, y  $\mathcal{K}^* \subset \mathbb{E}$  el cono dual de  $\mathcal{K}$ . Este trabajo se centra en estudiar el problema de Programación Cónica con Restricciones de Complementariedad CMPCC (por sus siglas en inglés *Conic Mathematical Programming with Complementarity Constrains*) dado por

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x); & (\text{CMPCC}) \\ \text{s.a.} \quad & \mathcal{K} \ni G(x) \perp H(x) \in \mathcal{K}^*. \end{aligned}$$

La notación presentada en la restricción del problema en realidad es una simplificación para las siguientes tres restricciones:

$$G(x) \in \mathcal{K}, \quad H(x) \in \mathcal{K}^*, \quad \langle G(x), H(x) \rangle = 0.$$

El problema anterior se puede entender como un problema de programación cónica, donde el cono convexo viene dado por  $\mathcal{H} := \mathcal{K} \times \mathcal{K}^* \times \{0\}$  y la restricción viene dada por

$$\left( G(x), H(x), \langle G(x), H(x) \rangle \right) \in \mathcal{H}. \quad (1.3)$$

Más aún, como  $G(x) \in \mathcal{K}$  y  $H(x) \in \mathcal{K}^*$ , entonces, por definición de cono dual, siempre se cumple que su producto interno es no negativo, o bien

$$\langle G(x), H(x) \rangle \geq 0.$$

Dado lo anterior, se puede reformular el problema a uno de programación cónica donde el cono propio viene dado por  $\mathcal{H} := \mathcal{K} \times \mathcal{K}^* \times \mathbb{R}_-$  y la restricción también viene dada por (1.3).

Esta reformulación en la literatura es nombrada por (K-CMPCC), y se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x); & (\text{K-CMPCC}) \\ \text{s.a.} \quad & G(x) \in \mathcal{K}, \quad H(x) \in \mathcal{K}^*, \\ & \langle G(x), H(x) \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Otra forma de reformular el problema CMPCC consiste en trasladar la complementariedad en la restricción desde la función hasta el conjunto objetivo. En otras palabras, consiste en estudiar el problema

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x); & (\text{M-CMPCC}) \\ \text{s.a.} \quad & (G(x), H(x)) \in \mathcal{M}(\mathcal{K}), \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{M}(\mathcal{K}) := \{(s, s^*) : s \in \mathcal{K}, s^* \in \mathcal{K}^*, \langle s, s^* \rangle = 0\}.$$

En la literatura,  $\mathcal{M}(\mathcal{K})$  es conocido como el Cono/Conjunto de Complementariedad de  $\mathcal{K}$ . Cuando no exista ambigüedad, se usará indistintamente  $\mathcal{M}(\mathcal{K})$  y  $\mathcal{M}$  para denotarlo. Es inmediato notar que el conjunto  $\mathcal{M}$  es un cono, pero no es convexo. Esto genera que el problema M-CMPCC sea complicado de abordar pues toda la teoría clásica para la programación cónica convexa no es aplicable. Aún así, esta es una de las formulaciones más estudiadas en la literatura debido a que se pueden encontrar condiciones de optimalidad basadas en calificaciones de restricciones que se cumplen en el problema, ver por ejemplo [5].

Una última reformulación usual en la literatura consta de utilizar la primera propiedad del Lema 1.1.14, la cual dice que

$$(s, s^*) \in \mathcal{M} \iff s = \Pi_{\mathcal{K}}(s - s^*).$$

Con esto se puede reescribir CMPCC para obtener el problema C-CMPCC:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x); & (\text{C-CMPCC}) \\ \text{s.a.} \quad & \Pi_{\mathcal{K}}(G(x) - H(x)) - G(x) = 0. \end{aligned}$$

El principal conflicto con los problemas (C-CMPCC) es que la función  $\Pi_{\mathcal{K}}$  no es una función suave. Esto ocasiona que no se pueda utilizar la teoría clásica suave para optimización, y se necesiten técnicas relacionadas al Análisis no suave.

En el Capítulo 2 se presentarán los puntos estacionarios que se obtienen al estudiar condiciones de optimalidad en las distintas reformulaciones del problema (CMPCC). En el Capítulo 3 se estudiarán propiedades geométricas del conjunto de complementariedad  $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ .



# Capítulo 2

## Puntos Estacionarios y Condiciones de Primer Orden

### 2.1. Introducción y contexto

Este capítulo comienza evidenciando cómo, de forma análoga al caso MPCC donde la calificación de restricciones de Mangasarian-Fromovitz falla en todo punto, en la generalización CMPCC la calificación de Robinson falla en todo punto factible. Esto motiva a realizar una revisión de los puntos estacionarios existentes en la literatura para el problema MPCC. Adicionalmente, en los últimos años se ha prestado atención al estudio del problema CMPCC cuando se considera el cono de matrices simétricas semidefinidas positivas o el cono de segundo orden. El objetivo de este capítulo es, a partir de lo presentado en la literatura, reconocer las distintas definiciones de puntos estacionarios para el caso general CMPCC. Además en este capítulo se discute cómo se relacionan las distintas definiciones. Finalmente, presentando nuevas definiciones de puntos estacionarios débiles, las cuales se encuentran basadas en conceptos geométricos como lo son las caras de los conos.

### 2.2. Condiciones de primer orden para un problema de optimización general

Es necesario comenzar el capítulo entregando las condiciones necesarias de primer orden para el problema cónico no lineal de la forma

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x); \\ \text{s.a.} \quad & h(x) = 0, \\ & g(x) \leq 0, \\ & F(x) \in \mathbb{K}, \end{aligned} \tag{CNLP}$$

donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  son funciones continuamente diferenciables, y  $\mathbb{K}$  es un convexo cerrado en  $\mathbb{R}^m$ . Se define por  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$L(x, \mu, \lambda, \eta) := f(x) + \langle \mu, h(x) \rangle + \langle \lambda, g(x) \rangle + \langle \eta, F(x) \rangle,$$

la función lagrangeana del problema (CNLP).

**Definición 2.2.1** (Calificación de restricción de Robinson [54]) *Se dice que la calificación de restricción de Robinson se cumple en un punto factible  $\bar{x}$  de (CNLP), si los gradientes  $\nabla h_i(\bar{x})$ ,  $i = 1, \dots, p$  son linealmente independientes y existe un vector  $d \in \mathbb{R}^n$  tal que*

$$\begin{aligned} \nabla h_i(\bar{x})^\top d &= 0, \quad i = 1, \dots, p, \\ \nabla g_i(\bar{x})^\top d &< 0, \quad i \in I := \{i | g_i(\bar{x}) = 0, i = 1, \dots, q\}, \\ F(\bar{x}) + DF(\bar{x})d &\in \text{int } \mathbb{K}. \end{aligned}$$

A continuación, se presenta la condición necesaria de primer orden para (CNLP) bajo la calificación de restricción de Robinson [35].

**Lema 2.2.2** *Sea  $\bar{x}$  un mínimo local de (CNLP) tal que la calificación de restricción de Robinson se cumple en él. Entonces existen multiplicadores de KKT  $(\mu, \lambda, \eta) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^m$  tal que*

$$\begin{aligned} \nabla_x L(\bar{x}, \mu, \lambda, \eta) &= 0, \\ \lambda &\geq 0, \quad \langle \lambda, g(\bar{x}) \rangle = 0, \\ \eta &\in N_{\mathbb{K}}(F(\bar{x})). \end{aligned}$$

## 2.3. Falla de la calificación de Robinson

Por completitud en este trabajo, se demuestra que la calificación de restricciones de Robinson no se cumple en ningún punto factible del problema (CMPCC) cuando se le estudia como un problema de optimización con restricciones cónicas y convexas.

**Lema 2.3.1** *La calificación de restricciones de Robinson no se cumple en ningún punto factible del problema (CMPCC) al estudiarlo como un problema de optimización con restricciones cónicas convexas.*

DEMOSTRACIÓN. Esta demostración está basada en el trabajo de Zhang et al. [55] para el cono de segundo orden. Para una demostración más general en problemas con restricciones de complementariedad en espacios de Banach y utilizando la calificación de restricciones de Kurcyusz-Robinson-Zowe, se puede consultar el trabajo de Mehritz [56, Cap. 3]. Para el caso general finito dimensional, se considera la reformulación convexa (K-CMPCC). Siguiendo la estructura del problema (CNLP), hay ausencia de funciones  $g, h$ , y se identifica

$$F(x) := \left( G(x), H(x), \langle G(x), H(x) \rangle \right),$$

junto con  $\mathcal{H} = \mathcal{K} \times \mathcal{K}^* \times \mathbb{R}_-$ . Si se supone que existe un punto  $\bar{x}$  factible para CMPCC que cumple la calificación de restricción de Robinson, entonces se puede encontrar un vector

$d \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$G(\bar{x}) + DG(\bar{x})d \in \text{int } \mathcal{K}, \quad (2.1)$$

$$H(\bar{x}) + DH(\bar{x})d \in \text{int } \mathcal{K}^*, \quad (2.2)$$

$$\langle DG(\bar{x})d, H(\bar{x}) \rangle + \langle G(\bar{x}), DH(\bar{x})d \rangle < 0. \quad (2.3)$$

Al definir  $A := G(\bar{x}) + DG(\bar{x})d \in \text{int } \mathcal{K}$ ,  $B := H(\bar{x}) + DH(\bar{x})d \in \text{int } \mathcal{K}^*$ , entonces

$$DG(\bar{x})d = A - G(\bar{x}) \quad \text{y} \quad DH(\bar{x})d = B - H(\bar{x}).$$

Como  $G(\bar{x}) \in \mathcal{K}$ ,  $H(\bar{x}) \in \mathcal{K}^*$ ,  $\langle G(\bar{x}), H(\bar{x}) \rangle = 0$ , se cumple que

$$\begin{aligned} \langle DG(\bar{x})d, H(\bar{x}) \rangle + \langle G(\bar{x}), DH(\bar{x})d \rangle &= \langle A, H(\bar{x}) \rangle + \langle B, G(\bar{x}) \rangle - 2\langle G(\bar{x}), H(\bar{x}) \rangle \\ &\geq 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

lo cual es una contradicción con la desigualdad (2.3).  $\square$

Este resultado extiende lo que ocurre en el caso (MPCC) con la calificación de Mangasarian-Fromovitz para el caso (CMPCC). Como la calificación de restricciones de Robinson falla en todos los puntos factibles de (CMPCC), la condición clásica de KKT podría no cumplirse en un mínimo local. Por la dificultad para calificar soluciones del problema, se debe seguir un camino similar al caso (MPCC), donde se han formulado otras definiciones para puntos estacionarios. Estas definiciones, acompañadas de sus calificaciones de restricciones respectivas, son las que entregarán condiciones necesarias de primer orden para el problema.

## 2.4. Puntos estacionarios en la literatura

### 2.4.1. Puntos estacionarios en MPCC

Es importante estudiar las definiciones de puntos estacionarios para (MPCC) puesto que serán la base para definirlos en el caso general (CMPCC). De los trabajos de Ye [4, 5] obtenemos condiciones de optimalidad necesarias y suficientes para el problema MPCC descrito por

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x); \quad \text{s.a. } 0 \leq G(x) \perp H(x) \geq 0. \quad (\text{MPCC})$$

A continuación, se presentan las principales definiciones presentes en sus trabajos. Hay que destacar que estos no son los únicos resultados presentes en la literatura. En los últimos años muchos autores han complementado estos resultados, ver por ejemplo [7, 57, 58, 59].

**Definición 2.4.1** (Punto B-estacionario) *Un punto  $\bar{x}$  factible para (MPCC) se dice ser un punto Bouligand estacionario (B-estacionario) si*

$$\nabla f(\bar{x})^\top d \geq 0 \quad \forall d \in T_{\mathcal{F}}(\bar{x}),$$

donde  $\mathcal{F}$  es el conjunto factible, i.e.,  $\mathcal{F} := \{x : 0 \leq G(x) \perp H(x) \geq 0\}$ .

Cualquier solución óptima del problema (MPCC) será un punto B-estacionario. El problema con esta caracterización se centra en la dificultad de expresar el cono tangente del conjunto factible. Otras definiciones para puntos estacionarios que sean más sencillas de aplicar serán de mayor utilidad para resolver estos problemas. Dado un vector  $\bar{x}$  factible para (MPCC), se definen los siguientes conjuntos de índices:

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha(\bar{x}) := \{i : G_i(\bar{x}) = 0, H_i(\bar{x}) > 0\}, \\ \beta &= \beta(\bar{x}) := \{i : G_i(\bar{x}) = 0, H_i(\bar{x}) = 0\}, \\ \gamma &= \gamma(\bar{x}) := \{i : G_i(\bar{x}) > 0, H_i(\bar{x}) = 0\}.\end{aligned}$$

Al conjunto de índices  $\beta$  se le conoce como el conjunto *degenerado*. Cuando  $\beta$  es vacío, se dice que el vector  $\bar{x}$  satisface *complementariedad estricta*. A continuación, se presentan las principales concepciones de condiciones estacionarias duales para el problema (MPCC).

**Definición 2.4.2** (Punto S-estacionario para MPCC) *Un punto  $\bar{x}$  factible para (MPCC) se dice ser un punto fuertemente estacionario (S-estacionario por su nombre en inglés) si se cumple la condición de KKT para el problema MPCC relajado (R-MPCC) en el punto  $\bar{x}$ :*

$$\begin{aligned}\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x); & \text{(R-MPCC)} \\ \text{s.a.} \quad & G_i(x) = 0, \quad i \in \alpha, \\ & H_i(x) = 0, \quad i \in \gamma, \\ & G_i(x) \geq 0, H_i(x) \geq 0, \quad i \in \beta.\end{aligned}$$

**Definición 2.4.3** (Punto M-estacionario para MPCC) *Un punto  $\bar{x}$  factible para (MPCC) se dice ser un punto Mordukhovich estacionario (M-estacionario) si se cumple la condición no suave de KKT involucrando el subgradiente limitante para el problema (M-MPCC) en el punto  $\bar{x}$ :*

$$\begin{aligned}\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x); & \text{(M-MPCC)} \\ \text{s.a.} \quad & (G(x), H(x)) \in \mathcal{M},\end{aligned}$$

donde  $\mathcal{M}$  es el cono de complementariedad del ortante no negativo, y el problema (M-MPCC) coincide con el problema (M-CMPCC) al considerar  $\mathcal{K} = \mathbb{R}_+^n$ .

**Definición 2.4.4** (Punto C-estacionario para MPCC) *Un punto  $\bar{x}$  factible para (MPCC) se dice ser un punto Clarke estacionario (C-estacionario) si se cumple la condición no suave de KKT utilizando el gradiente generalizado de Clarke en la reformulación no suave del problema*

MPCC (NS-MPCC) en el punto  $\bar{x}$ :

$$\begin{aligned}
 & \min_{x \in \mathbb{R}^n} && f(x); && \text{(NS-MPCC)} \\
 & \text{s.a.} && G_i(x) = 0, && i \in \alpha, \\
 & && H_i(x) = 0, && i \in \gamma, \\
 & && \min \{G_i(x), H_i(x)\} = 0, && i \in \beta.
 \end{aligned}$$

**Definición 2.4.5** (Punto A-estacionario para MPCC) *Sea  $(\beta_1, \beta_2)$  una partición de  $\beta$  tal que  $\beta_1 \cup \beta_2 = \beta$  y  $\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset$ . El punto  $\bar{x}$  factible para (MPCC) se dice ser un punto alternativamente estacionario (A-estacionario) si se cumple la condición de KKT para el problema MPCC alternativo (A-MPCC) en el punto  $\bar{x}$ :*

$$\begin{aligned}
 & \min_{x \in \mathbb{R}^n} && f(x); && \text{(A-MPCC)} \\
 & \text{s.a.} && G_i(x) = 0, && i \in \alpha \cup \beta_2, \\
 & && H_i(x) = 0, && i \in \gamma \cup \beta_1, \\
 & && G_i(x) \geq 0, && i \in \beta_1, \\
 & && H_i(x) \geq 0, && i \in \beta_2.
 \end{aligned}$$

**Definición 2.4.6** (Punto W-estacionario para MPCC) *Un punto  $\bar{x}$  factible para (MPCC) se dice ser un punto débilmente estacionario (W-estacionario por su nombre en inglés) si se cumple la condición de KKT para el problema MPCC ajustado (T-MPCC) en el punto  $\bar{x}$ :*

$$\begin{aligned}
 & \min_{x \in \mathbb{R}^n} && f(x); && \text{(T-MPCC)} \\
 & \text{s.a.} && G_i(x) = 0, && i \in \alpha, \\
 & && H_i(x) = 0, && i \in \gamma, \\
 & && G_i(x) = 0 = H_i(x), && i \in \beta.
 \end{aligned}$$

Las definiciones anteriores están relacionadas entre si, y el siguiente diagrama resume esta relación.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \implies & \text{C-estacion.} & \implies & \\
 \text{S-estacion.} & \implies & \text{M-estacion.} & & & & \text{W-estacion.} \\
 & & & \implies & \text{A-estacion.} & \implies & 
 \end{array}$$

Se puede notar que todas las definiciones para puntos estacionarios provienen de estudiar las condiciones de optimalidad de otro problema, el cual se encuentra relacionado con el problema (MPCC). Por esto es importante encontrar calificaciones de restricciones que nos permitan asegurar que estas definiciones se cumplan en óptimos locales del problema principal. En la literatura, se han presentado muchas de ellas, por ejemplo: MPEC Abadie CQ, MPEC Kuhn-Tucker CQ, entre otras [5]. Flegel & Kanzow demostraron que, bajo la calificación de restricciones de Guignard, todo punto B-estacionario es también un punto S-estacionario [60]. Ye postuló que la condición M-estacionaria es la más apropiada para el

estudio de los problemas (MPCC). Esto debido a que es suficientemente fuerte (solo por debajo de la condición S-estacionaria), y se cumple bajo casi todas las calificaciones de restricciones definidas para el problema [5]. Para cerrar esta Sección, se presenta la calificación de restricciones generalizada de Mangasarian-Fromovitz para los problemas MPCC, con la cual se escribe la condición necesaria de primer orden para la M-estacionaridad.

**Definición 2.4.7** (MPCC-GMFCQ) *Sea  $\bar{x}$  un punto factible para (MPCC) tal que  $G, H$  son funciones continuamente diferenciables en  $\bar{x}$ . Diremos que la calificación de restricciones generalizada de Mangasarian-Fromovitz para MPCC se cumple en  $\bar{x}$  si*

i) *para toda partición de  $\beta$  en los conjuntos  $P, Q, R$  con  $R \neq \emptyset$ , existe una dirección  $d$  tal que*

$$\begin{aligned}\nabla G_i(\bar{x})^\top d &= 0 \quad \forall i \in \alpha \cup Q, \\ \nabla H_i(\bar{x})^\top d &= 0 \quad \forall i \in \gamma \cup P, \\ \nabla G_i(\bar{x})^\top d &\geq 0, \nabla H_i(\bar{x})^\top d \geq 0 \quad i \in R;\end{aligned}$$

*y para algún  $i \in R$  o bien  $\nabla G_i(\bar{x})^\top d > 0$  o  $\nabla H_i(\bar{x})^\top d > 0$ .*

ii) *para toda partición de  $\beta$  en conjuntos  $P, Q$ , los gradientes*

$$\begin{aligned}\nabla G_i(\bar{x}) \quad \forall i \in \alpha \cup Q, \\ \nabla H_i(\bar{x}) \quad \forall i \in \gamma \cup P,\end{aligned}$$

*son linealmente independientes y existe una dirección  $d$  tal que*

$$\begin{aligned}\nabla G_i(\bar{x})^\top d &= 0 \quad \forall i \in \alpha \cup Q, \\ \nabla H_i(\bar{x})^\top d &= 0 \quad \forall i \in \gamma \cup P.\end{aligned}$$

**Teorema 2.4.8** (Condición necesaria del tipo Kuhn-Tucker para puntos M-estacionarios) *Sea  $\bar{x}$  un óptimo local del problema (MPCC) tal que  $G, H$  son funciones continuamente diferenciables en  $\bar{x}$ . Si MPCC-GMFCQ se cumple en  $\bar{x}$ , entonces  $\bar{x}$  es un punto M-estacionario.*

## 2.4.2. Puntos estacionarios en SDCMPCC

En esta Sección se resumen los resultados para puntos estacionarios en el problema de complementariedad asociado al cono de matrices simétricas semidefinidas descrito por:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x); \quad 0 \preceq G(x) \perp H(x) \preceq 0. \quad (\text{SDCMPCC})$$

Es importante recalcar que el problema no está presentado de la misma forma en la que se han planteado los problemas (CMPCC). Sin embargo, esto no es ningún inconveniente, pues su restricción es equivalente a

$$0 \preceq G(x) \perp -H(x) \preceq 0.$$

La razón de estudiar esta variación del problema es la siguiente descomposición. Dado un punto  $\bar{x}$  factible para (SDCMPCC), se define  $A := G(\bar{x}) + H(\bar{x})$ . Entonces, se puede hallar una descomposición por valores propios de la forma

$$A = P \begin{pmatrix} \Lambda_\alpha & & \\ & 0_\beta & \\ & & \Lambda_\gamma \end{pmatrix} P^\top, \quad (2.5)$$

donde

$$\alpha := \{i : \lambda_i(A) > 0\}, \beta := \{i : \lambda_i(A) = 0\}, \gamma := \{i : \lambda_i(A) < 0\}, P = [P_\alpha \ P_\beta \ P_\gamma].$$

A continuación, se presentan las definiciones de puntos estacionarios para este problema. Para definir la condición S-estacionaria en el problema (SDCMPCC) se parte de la base de que en los problemas (MPCC) esta condición es equivalente a encontrar un multiplicador proximal en el problema (M-MPCC) [4, Teo. 3.2]. Partiendo de esto, se presenta la definición entregada por Ding et al. [9, Def. 5.1], la cual es escrita gracias a un previo cálculo explícito del cono normal proximal.

**Definición 2.4.9** (Punto S-estacionario para SDCMPCC) *Sea  $\bar{x}$  una solución factible de (SDCMPCC). Tomando  $A := G(\bar{x}) + H(\bar{x})$  y su descomposición por valores propios como en (2.5). Se dice que  $\bar{x}$  es un punto S-estacionario para el problema (SDCMPCC) si existe un multiplicador proximal para el problema (M-MPCC) al considerar el cono de las matrices semidefinidas positivas (considerando el cambio de signo para la función  $H$ ). Esto es equivalente a que existan  $(\Gamma^G, \Gamma^H) \in \mathcal{S}^m \times \mathcal{S}^m$  tal que*

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + DG(\bar{x})^* \Gamma^G + DH(\bar{x})^* \Gamma^H &= 0, \\ \tilde{\Gamma}_{\alpha\alpha}^G &= 0, \quad \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^G = 0, \quad \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^G = 0, \\ \tilde{\Gamma}_{\gamma\gamma}^H &= 0, \quad \tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^H = 0, \quad \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^H = 0, \\ \Sigma_{\alpha\gamma} \circ \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^G + (E_{\alpha\gamma} - \Sigma_{\alpha\gamma}) \circ \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^H &= 0, \\ \tilde{\Gamma}_{\beta\beta}^G &\preceq 0, \quad \tilde{\Gamma}_{\beta\beta}^H \succeq 0; \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde  $\tilde{\Gamma}^G = P^\top \Gamma^G P$ ,  $\tilde{\Gamma}^H = P^\top \Gamma^H P$ ,  $\Sigma \in \mathcal{S}^m$  es definido por

$$\Sigma_{ij} := \frac{\max\{\lambda_i(A), 0\} - \max\{\lambda_j(A), 0\}}{\lambda_i(A) - \lambda_j(A)}, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad \text{con } \frac{0}{0} := 1;$$

y  $E$  es una matriz de  $m \times m$  tal que todas sus entradas son unos.

La definición para punto M-estacionario, al igual que en el caso (MPCC), proviene del cono normal limitante del cono de complementariedad  $\mathcal{M}(\mathcal{S}_+^m)$ . La siguiente definición [9, Def. 6.1] es escrita gracias al cálculo previo del cono normal limitante.

**Definición 2.4.10** (Punto M-estacionario para SDCMPCC) *Sea  $\bar{x}$  una solución factible de (SDCMPCC). Tomando  $A := G(\bar{x}) + H(\bar{x})$  y su descomposición por valores propios como en (2.5). Diremos que  $\bar{x}$  es un punto M-estacionario para el problema (SDCMPCC) si*

existe un multiplicador limitante para el problema (M-CMPCC) al considerar el cono de las matrices semidefinidas positivas (considerando el cambio de signo para la función  $H$ ). Esto es equivalente a que existan  $(\Gamma^G, \Gamma^H) \in \mathcal{S}^m \times \mathcal{S}^m$  tal que

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + DG(\bar{x})^* \Gamma^G + DH(\bar{x})^* \Gamma^H &= 0, \\ \tilde{\Gamma}_{\alpha\alpha}^G &= 0, \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^G = 0, \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^G = 0, \\ \tilde{\Gamma}_{\gamma\gamma}^H &= 0, \tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^H = 0, \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^H = 0, \\ \Sigma_{\alpha\gamma} \circ \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^G + (E_{\alpha\gamma} - \Sigma_{\alpha\gamma}) \circ \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^H &= 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

y existe una matriz ortogonal  $Q \in \mathcal{O}^{|\beta|}$ , una partición de  $\beta$  de la forma  $(\beta_+, \beta_0, \beta_-)$ , y matrices  $\Xi_1$  y  $\Xi_2$  definidas como en las ecuaciones (25) y (26) del trabajo de Ding et al. [9] tal que

$$\Xi_1 \circ Q^\top \tilde{\Gamma}_{\beta\beta}^G Q + \Xi_2 \circ Q^\top \tilde{\Gamma}_{\beta\beta}^H Q = 0, \quad (2.8)$$

$$Q_{\beta_0}^\top \tilde{\Gamma}_{\beta\beta}^G Q_{\beta_0} \preceq 0, \quad Q_{\beta_0}^\top \tilde{\Gamma}_{\beta\beta}^H Q_{\beta_0} \succeq 0, \quad (2.9)$$

donde  $\tilde{\Gamma}^G, \tilde{\Gamma}^H, \Sigma \in \mathcal{S}^m$  y  $E$  son como en la Def. 2.4.9.

El punto C-estacionario se define a partir de la condición de KKT no suave por medio del subdiferencial de Clarke en el problema (C-CMPCC). Del mismo modo que en los casos anteriores, Ding et al., [9, Def. 7.1] presentan la definición gracias a un previo cálculo del conjunto de multiplicadores.

**Definición 2.4.11** (Punto C-estacionario para SDCMPCC) *Sea  $\bar{x}$  una solución factible de (SDCMPCC). Tomando  $A := G(\bar{x}) + H(\bar{x})$  y su descomposición por valores propios como en (2.5). Diremos que  $\bar{x}$  es un punto C-estacionario para el problema (SDCMPCC) si se cumple la condición de KKT no-suave para el problema (C-CMPCC) al considerar el cono de las matrices semidefinidas positivas (considerando el cambio de signo para la función  $H(\cdot)$ ). Esto es equivalente a que existan  $(\Gamma^G, \Gamma^H) \in \mathcal{S}^m \times \mathcal{S}^m$  tal que*

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + DG(\bar{x})^* \Gamma^G + DH(\bar{x})^* \Gamma^H &= 0, \\ \tilde{\Gamma}_{\alpha\alpha}^G &= 0, \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^G = 0, \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^G = 0, \\ \tilde{\Gamma}_{\gamma\gamma}^H &= 0, \tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^H = 0, \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^H = 0, \\ \Sigma_{\alpha\gamma} \circ \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^G + (E_{\alpha\gamma} - \Sigma_{\alpha\gamma}) \circ \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^H &= 0, \\ \langle \tilde{\Gamma}_{\beta\beta}^G, \tilde{\Gamma}_{\beta\beta}^H \rangle &\leq 0; \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde  $\tilde{\Gamma}^G, \tilde{\Gamma}^H, \Sigma \in \mathcal{S}^m$  y  $E$  son como en 2.4.9.

En último lugar, Wu et al. [10] entregaron la noción para punto débilmente estacionario (W-estacionario) para el problema (SDCMPCC). Esta noción se encuentra basada únicamente en una relajación en las condiciones que debe cumplir el multiplicador de modo que sea implicada por todas las demás, por lo que no proviene de un problema ajustado como en el caso (MPCC).

**Definición 2.4.12** (Punto W-estacionario para SDCMPCC) *Sea  $\bar{x}$  una solución factible de*



(SDCMPCC). Tomando  $A := G(\bar{x}) + H(\bar{x})$  y su descomposición por valores propios como en (2.5). Diremos que  $\bar{x}$  es un punto  $W$ -estacionario para el problema (SDCMPCC) si existen  $(\Gamma^G, \Gamma^H) \in \mathcal{S}^m \times \mathcal{S}^m$  tal que

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + DG(\bar{x})^* \Gamma^G + DH(\bar{x})^* \Gamma^H &= 0, \\ \tilde{\Gamma}_{\alpha\alpha}^G &= 0, \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^G = 0, \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^G = 0, \\ \tilde{\Gamma}_{\gamma\gamma}^H &= 0, \tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^H = 0, \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^H = 0, \\ \Sigma_{\alpha\gamma} \circ \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^G + (E_{\alpha\gamma} - \Sigma_{\alpha\gamma}) \circ \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^H &= 0; \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde  $\tilde{\Gamma}^G, \tilde{\Gamma}^H, \Sigma \in \mathcal{S}^m$  y  $E$  son como en 2.4.9.

El siguiente diagrama resume la relación encontrada por Ding et al. [9] entre los puntos estacionarios presentados, junto con la definición de débilmente estacionario.

$$\text{S-estacion.} \quad \implies \quad \text{M-estacion.} \quad \implies \quad \text{C-estacion.} \quad \implies \quad \text{W-estacion.}$$

Adicionalmente los autores presentan nuevas calificaciones de restricciones mediante las cuales se satisfacen las condiciones de optimalidad de estos puntos estacionarios (ver por ejemplo [9, Cor. 5.1, Teo. 6.1, Teo. 7.1]). Al igual que en el caso MPCC, presentaremos la condición necesaria de primer orden para la condición M-estacionaria.

**Teorema 2.4.13** (Condición necesaria del tipo Kuhn-Tucker para puntos M-estacionarios) *Sea  $\bar{x}$  un óptimo local del problema (SDCMPCC) tal que  $G, H$  son funciones continuamente diferenciables en  $\bar{x}$ . Si el problema (M-CMPCC) asociado al cono de las matrices semidefinidas positivas cumple con ser Clarke calmado en  $\bar{x}$ , y se cumple la calificación de restricciones SDCMPCC-LICQ, i.e., no existe un vector no nulo  $(\Gamma^G, \Gamma^H) \in \mathcal{S}^m \times \mathcal{S}^m$  tal que*

$$\begin{aligned} DG(\bar{x})^* \Gamma^G + DH(\bar{x})^* \Gamma^H &= 0, \\ \tilde{\Gamma}_{\alpha\alpha}^G &= 0, \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^G = 0, \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^G = 0, \\ \tilde{\Gamma}_{\gamma\gamma}^H &= 0, \tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^H = 0, \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^H = 0, \\ \Sigma_{\alpha\gamma} \circ \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^G + (E_{\alpha\gamma} - \Sigma_{\alpha\gamma}) \circ \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^H &= 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Entonces  $\bar{x}$  es un punto M-estacionario del problema (SDCMPCC).

### 2.4.3. Puntos estacionarios en SOCMPCC

En esta Sección se resumen los resultados para puntos estacionarios en el problema de complementariedad asociado al cono de segundo orden:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x); \quad \mathcal{Q}_M \ni G(x) \perp H(x) \in \mathcal{Q}_M, \tag{SOCMPCC}$$

donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G, H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^M$  son funciones dos veces continuamente diferenciables,  $\mathcal{Q}_M := \mathcal{Q}_{m_1} \times \mathcal{Q}_{m_2} \times \cdots \times \mathcal{Q}_{m_J}$  con  $M = \sum_{j=1}^J m_j$  y

$$\mathcal{Q}_{m_j} := \left\{ (s_0, \bar{s}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m_j-1} : s_0 \geq \|\bar{s}\| \right\},$$

con  $G(x) = (G_1(x), G_2(x), \dots, G_J(x))$  y  $H(x) = (H_1(x), H_2(x), \dots, H_J(x))$ . Además, dado un punto  $s = (s_0, \bar{s}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m_j-1}$ , se denota a su reflexión por  $\hat{s} := (s_0, -\bar{s})$ . Dado un punto  $\bar{x}$  factible para (SOCMPCC), se definen los siguientes conjuntos de índices, los cuales vienen a ser análogos para los conjuntos  $\alpha, \beta, \gamma$  definidos para (MPCC); y para la descomposición de valores propios realizada para (SDCMPCC).

$$\begin{aligned} N_1(\bar{x}) &:= \{j : G_j(\bar{x}) = 0, H_j(\bar{x}) \in \text{int } \mathcal{Q}_{m_j}\}, \\ N_2(\bar{x}) &:= \{j : G_j(\bar{x}) \in \text{int } \mathcal{Q}_{m_j}, H_j(\bar{x}) = 0\}, \\ N_3(\bar{x}) &:= \{j : G_j(\bar{x}) \in \text{bd } \mathcal{Q}_{m_j} \setminus \{0\}, H_j(\bar{x}) \in \text{bd } \mathcal{Q}_{m_j} \setminus \{0\}\}, \\ N_4(\bar{x}) &:= \{j : G_j(\bar{x}) = 0, H_j(\bar{x}) \in \text{bd } \mathcal{Q}_{m_j} \setminus \{0\}\}, \\ N_5(\bar{x}) &:= \{j : G_j(\bar{x}) \in \text{bd } \mathcal{Q}_{m_j} \setminus \{0\}, H_j(\bar{x}) = 0\}, \\ N_6(\bar{x}) &:= \{j : G_j(\bar{x}) = 0, H_j(\bar{x}) = 0\}. \end{aligned}$$

Claramente  $N_1(\bar{x}) \cup N_2(\bar{x}) \cup N_3(\bar{x}) \cup N_4(\bar{x}) \cup N_5(\bar{x}) \cup N_6(\bar{x}) = \{1, 2, \dots, J\}$ . Se dice que el punto  $\bar{x}$  satisface *complementariedad estricta* si  $G_j(\bar{x}) + H_j(\bar{x}) \in \text{int } \mathcal{Q}_{m_j}$  para todo  $j$ , i.e.,  $N_4(\bar{x}) \cup N_5(\bar{x}) \cup N_6(\bar{x}) = \emptyset$ . Las siguientes definiciones para puntos estacionarios fueron entregadas por Ye & Zhou [61].

**Definición 2.4.14** (Punto W-estacionario para SOCMPCC) *Sea  $\bar{x}$  una solución factible para (SOCMPCC). Esta se dice ser un punto débilmente estacionario (W-estacionario) si existe un multiplicador  $(\lambda^G, \lambda^H) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$  tal que*

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + DG(\bar{x})^* \lambda^G + DH(\bar{x})^* \lambda^H &= 0, \\ \lambda_j^H &= 0 \text{ si } j \in N_1(\bar{x}), \quad \lambda_j^G = 0 \text{ si } j \in N_2(\bar{x}), \\ \lambda_j^G \perp G_j(\bar{x}), \lambda_j^H \perp H_j(\bar{x}), (G_j(\bar{x}))_0 \hat{\lambda}_j^G + (H_j(\bar{x}))_0 \lambda_j^H &\in \mathbb{R}G_j(\bar{x}) \text{ si } j \in N_3(\bar{x}). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Al igual que en el caso de las matrices semidefinidas, esta definición no proviene de la condición de optimalidad de un problema ajustado, y es presentada para ser implicada por todas las demás definiciones. A continuación, se presentan las definiciones para los puntos S-, M-estacionarios. Estas provienen del computo de los conos normal regular y limitante sobre el cono de complementariedad.

**Definición 2.4.15** (Punto S-estacionario para SOCMPCC) *Sea  $\bar{x}$  una solución factible para (SOCMPCC). Esta se dice ser un punto fuertemente estacionario (S-estacionario) si existe un multiplicador  $(\lambda^G, \lambda^H) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$  tal que cumple (2.13), y además*

$$\begin{aligned} \lambda_j^H &\in \mathbb{R}_- \hat{H}_j(\bar{x}), \quad \langle \lambda_j^G, \hat{H}_j(\bar{x}) \rangle \leq 0 \text{ si } j \in N_4(\bar{x}), \\ \lambda_j^G &\in \mathbb{R}_- \hat{G}_j(\bar{x}), \quad \langle \lambda_j^H, \hat{G}_j(\bar{x}) \rangle \leq 0 \text{ si } j \in N_5(\bar{x}), \\ \lambda_j^G &\in -\mathcal{Q}_{m_j}, \quad \lambda_j^H \in -\mathcal{Q}_{m_j} \text{ si } j \in N_6(\bar{x}). \end{aligned}$$

O equivalentemente si  $(\lambda_j^G, \lambda_j^H) \in \hat{N}_{\mathcal{M}(\mathcal{Q}_{m_j})}(G_j(\bar{x}), H_j(\bar{x}))$ ,  $i = 1, \dots, J$ .

**Definición 2.4.16** (Punto M-estacionario para SOCMPC) Sea  $\bar{x}$  una solución factible para (SOCMPCC). Esta se dice ser un punto Mordukhovich estacionario (M-estacionario) si existe un multiplicador  $(\lambda^G, \lambda^H) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$  tal que cumple (2.13), y además

$$\begin{aligned}
& \lambda_j^G \in \mathbb{R}^{m_j}, \lambda_j^H = 0 \quad \text{ó} \quad \lambda_j^G \perp \hat{H}_j(\bar{x}), \lambda_j^H \in \mathbb{R}\hat{H}_j(\bar{x}) \quad \text{ó} \\
& \lambda_j^H \in \mathbb{R}_- \hat{H}_j(\bar{x}), \langle \lambda_j^G, \hat{H}_j(\bar{x}) \rangle \leq 0 \quad \text{si } j \in N_4(\bar{x}), \\
& \lambda_j^G = 0, \lambda_j^H \in \mathbb{R}^{m_j} \quad \text{ó} \quad \lambda_j^G \in \mathbb{R}\hat{G}_j(\bar{x}), \lambda_j^H \perp \hat{G}_j(\bar{x}) \quad \text{ó} \\
& \lambda_j^G \in \mathbb{R}_- \hat{G}_j(\bar{x}), \langle \lambda_j^H, \hat{G}_j(\bar{x}) \rangle \leq 0 \quad \text{si } j \in N_5(\bar{x}), \\
& \lambda_j^G \in -\mathcal{Q}_{m_j}, \lambda_j^H \in -\mathcal{Q}_{m_j} \quad \text{ó} \\
& \lambda_j^H = 0, \lambda_j^G \in \mathbb{R}^{m_j} \quad \text{ó} \quad \lambda_j^G = 0, \lambda_j^H \in \mathbb{R}^{m_j} \quad \text{ó} \\
& \lambda_j^G \in \mathbb{R}_- \xi_j, \lambda_j^H \in \{\xi_j\}^\circ \quad \text{ó} \quad \lambda_j^H \in \mathbb{R}_- \xi_j, \lambda_j^G \in \{\xi_j\}^\circ \quad \text{ó} \\
& \lambda_j^G \perp \xi_j, \lambda_j^H \perp \hat{\xi}_j, \alpha_j \lambda_j^G + (1 - \alpha_j) \lambda_j^H \in \mathbb{R}\xi_j \\
& \text{para cierto } \alpha_j \in [0, 1] \text{ y cierto } \xi_j \in C_j \quad \text{si } j \in N_6(\bar{x});
\end{aligned}$$

donde  $C_j := \{(1, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m_j-1} : \|w\| = 1\}$ .

O equivalentemente si  $(\lambda_j^G, \lambda_j^H) \in N_{\mathcal{M}(\mathcal{Q}_{m_j})}(G_j(\bar{x}), H_j(\bar{x}))$ ,  $i = 1, \dots, J$ .

Del cálculo del subdiferencial de Clarke, también se puede entregar explícitamente la condición C-estacionaria, la cual se presenta a continuación.

**Definición 2.4.17** (Punto C-estacionario para SOCMPC) Sea  $\bar{x}$  una solución factible para (SOCMPCC). Esta se dice ser un punto Clarke estacionario (C-estacionario) si existe un multiplicador  $(\lambda^G, \lambda^H) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$  tal que cumple (2.13), y además

$$\begin{aligned}
& \lambda_j^H \in \mathbb{R}\hat{H}_j(\bar{x}) \text{ si } j \in N_4(\bar{x}), \\
& \lambda_j^G \in \mathbb{R}\hat{G}_j(\bar{x}) \text{ si } j \in N_5(\bar{x}), \\
& \langle \lambda_j^G, \lambda_j^H \rangle \geq 0 \text{ si } j \in N_6(\bar{x}).
\end{aligned}$$

O equivalentemente, si existe un multiplicador que satisface la condición de KKT no suave por medio del subdiferencial de Clarke del problema (C-CMPCC) para el cono de segundo orden.

El siguiente diagrama resume la relación encontrada por Ye & Zhou entre los puntos estacionarios presentados. Podemos notar que la estructura es consistente con lo hallado en los casos (MPCC) y (SDCMPCC).

$$\text{S-estacion.} \quad \implies \quad \text{M-estacion.} \quad \implies \quad \text{C-estacion.} \quad \implies \quad \text{W-estacion.}$$

Se presenta a continuación la condición necesaria para la condición M-estacionaria para el caso (SOCMPCC) [61, Teo. 5.7].

**Teorema 2.4.18** (Condición necesaria para puntos M-estacionarios) Sea  $\bar{x}$  un óptimo local

del problema (SOCMPCC) tal que  $G, H$  son funciones continuamente diferenciables en  $\bar{x}$ . Entonces  $\bar{x}$  es un punto  $M$ -estacionario si se cumple una de las siguientes calificaciones de restricciones:

1. Tanto  $G$  como  $H$  son funciones afines y  $m_j \leq 2$  para  $j = 1, \dots, J$ .
2. El punto  $\bar{x}$  cumple la calificación de restricciones SOCMPCC-NNAMCQ, i.e., no existe un vector no nulo  $(\lambda^G, \lambda^H)$  tal que

$$DG(\bar{x})^* \lambda^G + DH(\bar{x})^* \lambda^H = 0, \quad (\lambda_j^G, \lambda_j^H) \in N_{\mathcal{M}(\mathcal{Q}_{m_j})}(G_j(\bar{x}), H_j(\bar{x})), \quad i = 1, \dots, J.$$

#### 2.4.4. Puntos estacionarios de Wachsmuth para CMPCC

En esta sección se exponen las definiciones de Wachsmuth [62, 63] para puntos estacionarios en el problema (CMPCC). Los resultados originalmente fueron escritos para conos  $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$  donde  $\mathcal{X}$  es cualquier espacio de Banach, incluso de dimensión infinita. Estas definiciones son presentadas para el caso donde el espacio  $\mathcal{X} = \mathbb{E}$  es Euclideo.

**Definición 2.4.19** (Punto S-estacionario en el sentido de Wachsmuth) *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio. Sea  $\bar{x}$  una solución factible del problema (CMPCC) asociado a  $\mathcal{K}$ . Se dice que  $\bar{x}$  es un punto fuertemente estacionario en el sentido de Wachsmuth (S-estacionario de Wachsmuth) si se cumple la condición de KKT para el problema CMPCC relajado (R-CMPCC) en el punto  $\bar{x}$ :*

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x); & \text{(R-CMPCC)} \\ \text{s.a.} \quad & G(x) \in T_{\mathcal{K}^*}(H(\bar{x}))^*, \\ & H(x) \in T_{\mathcal{K}}(G(\bar{x}))^*. \end{aligned}$$

Dado que  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{K}^*$  son conos propios, se puede reescribir el problema (R-CMPCC) utilizando los resultados encontrados en la Sección 1.3.

**Lema 2.4.20** *Sea  $\mathcal{K}$  un cono propio. El problema (R-CMPCC) se puede reescribir, mediante el uso del Lema 1.3.1 como*

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x); \\ \text{s.a.} \quad & G(x) \in \Phi(H(\bar{x}))^\delta, \\ & H(x) \in \Phi(G(\bar{x}))^D. \end{aligned}$$

**Definición 2.4.21** (Punto W-estacionario en el sentido de Wachsmuth) *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio. Sea  $\bar{x}$  una solución factible del problema (CMPCC) asociado a  $\mathcal{K}$ . Se dice que  $\bar{x}$  es un punto débilmente estacionario en el sentido de Wachsmuth (W-estacionario de Wachsmuth) si se cumple la condición de KKT para el problema CMPCC apretado (T-CMPCC) en el*

punto  $\bar{x}$ :

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x); & & \text{(T-CMPCC)} \\ \text{s. a.} & G(x) \in T_{\mathcal{K}^*}(H(\bar{x}))^* \cap (T_{\mathcal{K}}(G(\bar{x}))^*)^\perp, \\ & H(x) \in T_{\mathcal{K}}(G(\bar{x}))^* \cap (T_{\mathcal{K}^*}(H(\bar{x}))^*)^\perp. \end{aligned}$$

Nuevamente se pueden utilizar las propiedades para reescribir el problema (T-CMPCC) como muestra el siguiente Lema.

**Lema 2.4.22** *Sea  $\mathcal{K}$  un cono propio. El problema (T-CMPCC) se puede reescribir, mediante el uso del Lema 1.3.1 como*

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x); \\ \text{s. a.} & G(x) \in \Phi(H(\bar{x}))^\delta \cap \left( \Phi(G(\bar{x}))^D \right)^\perp, \\ & H(x) \in \Phi(G(\bar{x}))^D \cap \left( \Phi(H(\bar{x}))^\delta \right)^\perp. \end{aligned}$$

Estos resultados fueron desarrollados por Wachsmuth para coincidir con las definiciones de puntos fuertemente estacionarios y débilmente estacionarios en (MPCC). En este trabajo se han reescrito estos problemas cambiando los conos tangentes por caras minimales. Esto ayuda a entenderlos desde otra perspectiva, y será la base para presentar los puntos estacionarios faciales en la Sección 2.6 posterior. Wachsmuth presentó condiciones de optimalidad a partir de la calificación de restricciones de Robinson-Zowe-Kurcyusz (RZKCQ) [64, Eq. (1.4)]. El siguiente teorema muestra el resultado de aplicar lo encontrado por Wachsmuth [62, Prop. 4.8].

**Teorema 2.4.23** *Sea  $\bar{x}$  factible para (CMPCC). Además, se asume que se cumple que*

$$D\mathcal{G}(\bar{x})\mathbb{R}^n = \mathbb{E} \times \mathbb{E},$$

donde  $\mathcal{G}(x) = (G(x), H(x))$ . Entonces  $\bar{x}$  cumple RZKCQ para el problema (T-CMPCC). En particular, si  $\bar{x}$  es un mínimo local para (CMPCC), entonces  $\bar{x}$  es un punto S-estacionario en el sentido de Wachsmuth.

## 2.5. Generalizaciones para CMPCC

Con base en lo presentado anteriormente, se presentan las definiciones generales para puntos estacionarios en el problema (CMPCC). Estos resultados son resumidos, comentados y comparados. En particular, se estudian las relaciones entre las distintas definiciones que se pueden presentar para los puntos S-, M-, C- y W-estacionarios.

### 2.5.1. Puntos B-estacionarios

La definición de punto B-estacionario puede ser directamente extendida al problema general (CMPCC) como se muestra a continuación.

**Definición 2.5.1** (Punto B-estacionario para CMPCC) *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio. Sea  $\bar{x}$  una solución factible del problema (CMPCC) asociado a  $\mathcal{K}$ . Se dice que  $\bar{x}$  es un punto Bouligand estacionario (B-estacionario) si*

$$\nabla f(\bar{x})^\top d \geq 0 \quad \forall d \in T_{\mathcal{F}}(\bar{x}),$$

donde  $\mathcal{F}$  denota el conjunto factible, i.e.,  $\mathcal{F} := \{x : \mathcal{K} \ni G(x) \perp H(x) \in \mathcal{K}^*\}$ .

Igual que en los demás casos, esta noción primal de punto estacionario se cumple en cualquier óptimo. Sin embargo, es complicada de aplicar debido a la dificultad para explícitamente el cono tangente del conjunto factible. Esta noción será retomada en el Capítulo 3.

### 2.5.2. Puntos S-estacionarios

Se ha visto cómo la condición fuerte estacionaria (S-estacionario) del punto  $(G(\bar{x}), H(\bar{x}))$  se ha generalizado de diversas formas para coincidir con la definición en el problema (MPCC). Por ejemplo en (SDCMPCC) al buscar un multiplicador en el cono normal proximal del conjunto de complementariedad del cono de matrices semidefinidas positivas

$$N_{\mathcal{M}(S_+^m)}^\pi(G(\bar{x}), H(\bar{x}));$$

en (SOCMPCC) a partir de multiplicadores en el cono normal regular del conjunto de complementariedad del cono de segundo orden

$$\hat{N}_{\mathcal{M}(\mathcal{Q}_m)}(G(\bar{x}), H(\bar{x}));$$

y Wachsmuth lo ha definido a partir de la condición de KKT del problema relajado (R-CMPCC), lo cual es equivalente a estudiar multiplicadores en el conjunto

$$N_{\Phi(H(\bar{x}))^\delta \times \Phi(G(\bar{x}))^\mathcal{D}}(G(\bar{x}), H(\bar{x})).$$

Desde las definiciones de cono normal proximal y regular, es evidente la inclusión

$$N_{\mathcal{M}}^\pi(G(\bar{x}), H(\bar{x})) \subseteq \hat{N}_{\mathcal{M}}(G(\bar{x}), H(\bar{x})).$$

Esto muestra directamente cómo la condición S-estacionaria a partir del cono proximal implica la condición S-estacionaria a partir del cono regular. Para poder relacionar estos resultados con el punto S-estacionario de Wachsmuth, se estudia la relación entre el cono normal regular del conjunto de complementariedad  $\mathcal{M}$  con el cono normal resultante al estudiar el problema (R-CMPCC). Esta relación no es una consecuencia de la descripción de los conjuntos, como se puede observar en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 1** Se considera el problema (CMPCC) asociado a cualquier cono propio  $\mathcal{K}$  en el punto  $(G(\bar{x}), H(\bar{x})) = (0, 0)$ , entonces

$$\begin{aligned}\Phi(G(\bar{x})) = \{0\} &\implies \Phi(G(\bar{x}))^D = \mathcal{K}^*, \\ \Phi(H(\bar{x})) = \{0\} &\implies \Phi(H(\bar{x}))^\delta = \mathcal{K}.\end{aligned}$$

Es claro que  $\mathcal{M}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K} \times \mathcal{K}^* = \Phi(H(\bar{x}))^\delta \times \Phi(G(\bar{x}))^D$  lo que a su vez implica que

$$N_{\Phi(H(\bar{x}))^\delta \times \Phi(G(\bar{x}))^D}(G(\bar{x}), H(\bar{x})) \subset \hat{N}_{\mathcal{M}}(G(\bar{x}), H(\bar{x})),$$

donde se ha utilizado que el conjunto  $\Phi(H(\bar{x}))^\delta \times \Phi(G(\bar{x}))^D$  es convexo.

**Ejemplo 2** Si ahora se considera que  $(G(\bar{x}), H(\bar{x})) \in \text{int } \mathcal{K} \times \{0\}$ , entonces

$$\begin{aligned}\Phi(G(\bar{x})) = \mathcal{K} &\implies \Phi(G(\bar{x}))^D = \{0\}, \\ \Phi(H(\bar{x})) = \{0\} &\implies \Phi(H(\bar{x}))^\delta = \mathcal{K}.\end{aligned}$$

En este caso se obtiene la inclusión

$$\Phi(H(\bar{x}))^\delta \times \Phi(G(\bar{x}))^D = \mathcal{K} \times \{0\} \subset \mathcal{M}(\mathcal{K}),$$

la cual implica la inclusión de los conos normales

$$\hat{N}_{\mathcal{M}}(G(\bar{x}), H(\bar{x})) \subset N_{\Phi(H(\bar{x}))^\delta \times \Phi(G(\bar{x}))^D}(G(\bar{x}), H(\bar{x})).$$

Con estos dos ejemplos se ha visto que no existe una inclusión entre  $\mathcal{M}$  y el conjunto  $\Phi(H(\bar{x}))^\delta \times \Phi(G(\bar{x}))^D$ . A pesar de esto, en esta sección se probará que los conos normales siempre cumplen una inclusión. La siguiente proposición muestra una relación que será de utilidad para la demostración de aquello.

**Proposición 2.5.2** Sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$  y sea  $(\bar{s}, \bar{s}^*) \in \Phi(s^*)^\delta \times \Phi(s)^D$ . Entonces

$$\begin{aligned}(\bar{s}, s^*) &\in \mathcal{M} \cap \Phi(s^*)^\delta \times \Phi(s)^D, \\ (s, \bar{s}^*) &\in \mathcal{M} \cap \Phi(s^*)^\delta \times \Phi(s)^D.\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \{(\bar{s}, \bar{s}^*) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}^* : \bar{s} \perp \bar{s}^*\}, \\ \Phi(s^*)^\delta \times \Phi(s)^D &= \{(\bar{s}, \bar{s}^*) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}^* : \bar{s} \perp s^*, s \perp \bar{s}^*\},\end{aligned}$$

con lo que es directo encontrar las inclusiones propuestas. □

Se procede a enunciar el siguiente teorema, el cual evidencia la relación entre los conos normales en las definiciones para punto fuertemente estacionario en los problemas (CMPCC),

la cual se cumple sea cual sea el punto en  $\mathcal{M}$  desde donde se estudian estos conos.

**Teorema 2.5.3** *Sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$ . Entonces se cumple la siguiente inclusión de los conos normales:*

$$\hat{N}_{\mathcal{M}}(s, s^*) \subset N_{\Phi(s^*)^\delta \times \Phi(s)^D}(s, s^*).$$

DEMOSTRACIÓN. Por contrarrecíproca, sea  $(v, v^*) \notin N_{\Phi(s^*)^\delta \times \Phi(s)^D}(s, s^*)$ . El Teorema de Hahn-Banach permite separar  $\{(v, v^*)\}$  del conjunto  $N_{\Phi(s^*)^\delta \times \Phi(s)^D}(s, s^*)$ , o bien, existe un vector no nulo  $(p, p^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  y  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$\langle (p, p^*); (v, v^*) \rangle > c > \langle (p, p^*); (\bar{v}, \bar{v}^*) \rangle \quad \forall (\bar{v}, \bar{v}^*) \in N_{\Phi(s^*)^\delta \times \Phi(s)^D}(s, s^*).$$

Como  $N_{\Phi(s^*)^\delta \times \Phi(s)^D}(s, s^*)$  es un cono que contiene al  $(0, 0)$ , es fácil ver que  $c > 0$  con lo que se puede reescribir la desigualdad para obtener la siguiente:

$$\langle (p, p^*); (v, v^*) \rangle > 0 \geq \langle (p, p^*); (\bar{v}, \bar{v}^*) \rangle \quad \forall (\bar{v}, \bar{v}^*) \in N_{\Phi(s^*)^\delta \times \Phi(s)^D}(s, s^*).$$

Para  $(v, v^*)$  se puede notar que si el primer término en la desigualdad (el producto interno en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ) es mayor a 0, entonces

$$\langle p, v \rangle > 0 \quad \text{o bien} \quad \langle p^*, v^* \rangle > 0.$$

Como  $\Phi(s^*)^\delta \times \Phi(s)^D$  es un conjunto convexo, entonces es directo de la desigualdad que

$$(p, p^*) \in \left( N_{\Phi(s^*)^\delta \times \Phi(s)^D}(s, s^*) \right)^\circ = T_{\Phi(s^*)^\delta \times \Phi(s)^D}(s, s^*),$$

y por lo tanto se puede describir  $(p, p^*)$  mediante sucesiones  $(p_n, p_n^*) \rightarrow (p, p^*)$  y  $t_n \downarrow 0$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$(s + t_n p_n, s^* + t_n p_n^*) \in \Phi(s^*)^\delta \times \Phi(s)^D.$$

Sin pérdida de generalidad, se asume que  $\langle p, v \rangle = \bar{c} > 0$  para cierto valor de  $\bar{c}$ . Si esto no ocurre, entonces  $\langle p^*, v^* \rangle > 0$  y se puede realizar un desarrollo análogo. Por la Proposición 2.5.2 se cumple que para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$(s + t_n p_n, s^*) \in \mathcal{M}.$$

Además, para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que

$$\frac{\langle (s + t_n p_n, s^*) - (s, s^*); (v, v^*) \rangle}{\|(s + t_n p_n, s^*) - (s, s^*)\|} = \frac{\langle (t_n p_n, 0); (v, v^*) \rangle}{t_n \|(p_n, 0)\|} = \frac{\langle (p_n, 0); (v, v^*) \rangle}{\|(p_n, 0)\|} = \frac{\langle p_n, v \rangle}{\|p_n\|}.$$

Este término no depende de  $t_n$ , y su valor límite viene dado por

$$\frac{\langle p_n, v \rangle}{\|p_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{c}}{\|p\|} = \text{cte.} > 0.$$



Para finalizar, es directo notar que  $s + t_n p_n \rightarrow s$  y que

$$\begin{aligned} \limsup_{(\bar{s}, \bar{s}^*) \xrightarrow{\mathcal{M}} (s, s^*)} \frac{\langle (\bar{s}, \bar{s}^*) - (s, s^*); (v, v^*) \rangle}{\|(\bar{s}, \bar{s}^*) - (s, s^*)\|} &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle (s + t_n p_n, s^*) - (s, s^*); (v, v^*) \rangle}{\|(s + t_n p_n, s^*) - (s, s^*)\|} \\ &= \frac{\bar{c}}{\|p\|} = \text{cte.} > 0. \end{aligned}$$

Por definición de cono normal regular esto significa que  $(v, v^*) \notin \hat{N}_{\mathcal{M}}(s, s^*)$ , concluyendo que

$$\hat{N}_{\mathcal{M}}(s, s^*) \subset N_{\Phi(s^*)^\delta \times \Phi(s)^D}(s, s^*).$$

□

A pesar de que en algunos casos es posible obtener la inclusión en el otro sentido (como fue evidenciado en los ejemplos presentados), se verá cómo en el siguiente ejemplo esto no se cumple. Con esto ya no es posible garantizar que la igualdad de los conjuntos sea una propiedad general.

**Ejemplo 3** Se considera el cono de segundo orden  $\mathcal{Q}^m$  dado por

$$\mathcal{Q}_m := \left\{ s = (s_0, \bar{s}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} : s_0 \geq \|\bar{s}\| \right\},$$

y sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}(\mathcal{Q}_m)$  tal que  $s \in \text{bd } \mathcal{Q}_m \setminus \{0\}$  y  $s^* \in \text{bd } \mathcal{Q}_m \setminus \{0\}$ . Es fácil reconocer las caras

$$\Phi(s) = \text{cone}\{s\}, \quad \Phi(s^*) = \text{cone}\{s^*\}.$$

Con esto, por la estructura del cono de segundo orden, se puede notar que

$$\Phi(s)^D = \text{cone}\{s^*\}, \quad \Phi(s^*)^\delta = \text{cone}\{s\}.$$

Se obtiene entonces la descripción para el cono normal dada por

$$N_{\Phi(s^*)^\delta \times \Phi(s)^D}(s, s^*) = \left\{ (v, v^*) : v \perp s, v^* \perp s^* \right\}.$$

Del resultado de Ye et al. [15, Teo. 5.1], tenemos una descripción para el cono normal de  $\mathcal{M}(\mathcal{Q}_m)$  dado por

$$\hat{N}_{\mathcal{M}(\mathcal{Q}_m)}(s, s^*) = N_{\mathcal{M}(\mathcal{Q}_m)}(s, s^*) = \left\{ (v, v^*) : v \perp s, v^* \perp s^*, s_0 \hat{v} + s_0^* v^* \in \mathbb{R}s \right\},$$

donde  $\hat{v} = (v_0, -\bar{v})$ . Es claro que los conjuntos no coinciden debido a la descripción del cono normal regular. También se puede notar que el cono  $N_{\Phi(s^*)^\delta \times \Phi(s)^D}(s, s^*)$  tampoco se encuentra contenido en el cono normal limitante  $N_{\mathcal{M}(\mathcal{Q}_m)}(s, s^*)$ . Esto es relevante pues muestra que un punto S-estacionario en el sentido de Wachsmuth no necesariamente cumple con ser un punto M-estacionario.

Esta sección se concluye escribiendo las tres formas de presentar los puntos S-estacionarios para los problemas (CMPCC).

**Definición 2.5.4** (Puntos S-estacionario en CMPCC) *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio. Sea  $\bar{x}$  una solución factible del problema (CMPCC) asociado a  $\mathcal{K}$ . Se dice que  $\bar{x}$  es un punto fuertemente estacionario proximal (S-estacionario proximal) si existe un multiplicador proximal para el problema (M-CMPCC), i.e., existe  $(\mu, \mu^*) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$  tal que*

$$\nabla f(\bar{x}) + DG(\bar{x})^* \mu + DH(\bar{x})^* \mu^* = 0, \quad (\mu, \mu^*) \in N_{\mathcal{M}(\mathcal{K})}^\pi(G(\bar{x}), H(\bar{x})).$$

*Se dice que  $\bar{x}$  es un punto fuertemente estacionario regular (S-estacionario regular) si existe un multiplicador regular para el problema (M-CMPCC), i.e., existe  $(\mu, \mu^*) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$  tal que*

$$\nabla f(\bar{x}) + DG(\bar{x})^* \mu + DH(\bar{x})^* \mu^* = 0, \quad (\mu, \mu^*) \in \hat{N}_{\mathcal{M}(\mathcal{K})}(G(\bar{x}), H(\bar{x})).$$

*Se dice que  $\bar{x}$  es un punto fuertemente estacionario en el sentido de Wachsmuth (S-estacionario de Wachsmuth) si existe un multiplicador para el problema relajado (R-CMPCC), i.e., existe  $(\mu, \mu^*) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$  tal que*

$$\nabla f(\bar{x}) + DG(\bar{x})^* \mu + DH(\bar{x})^* \mu^* = 0, \quad (\mu, \mu^*) \in N_{\Phi(H(\bar{x}))^\delta \times \Phi(G(\bar{x}))^D}(G(\bar{x}), H(\bar{x})).$$

La relación entre las definiciones de puntos S-estacionarios se resume en la siguiente proposición.

**Proposición 2.5.5** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio. Sea  $\bar{x}$  una solución factible del problema (CMPCC) asociado a  $\mathcal{K}$ . Luego:*

- i) Si  $\bar{x}$  es un punto S-estacionario proximal, entonces es un punto S-estacionario regular.*
- ii) Si  $\bar{x}$  es un punto S-estacionario regular, entonces es un punto S-estacionario de Wachsmuth.*

### 2.5.3. Puntos M- y C-estacionarios

A pesar de que Wachsmuth comentó en sus trabajos que no es claro cómo definir otras nociones en el caso general [62, Secc. 4.1], posteriores trabajos de investigación como los presentados en los casos (SDCMPCC) y (SOCMPCC) sugieren definir los puntos M- y C-estacionarios a partir de los problemas (M-CMPCC) y (C-CMPCC). Para formalizar esto, a continuación se presentan estas definiciones en el caso general (CMPCC).

**Definición 2.5.6** (Punto M-estacionario para CMPCC) *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio. Sea  $\bar{x}$  una solución factible del problema (CMPCC) asociado a  $\mathcal{K}$ . Se dice que  $\bar{x}$  es un punto Mordukhovich estacionario (M-estacionario) si existe un multiplicador limitante para el problema (M-CMPCC) en el punto  $\bar{x}$ , i.e., un multiplicador  $(\mu, \mu^*)$  tal que*

$$\nabla f(\bar{x}) + DG(\bar{x})^* \mu + DH(\bar{x})^* \mu^* = 0, \quad (\mu, \mu^*) \in N_{\mathcal{M}(\mathcal{K})}(G(\bar{x}), H(\bar{x})). \quad (2.14)$$

**Definición 2.5.7** (Punto C-estacionario para CMPCC) *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio. Sea  $\bar{x}$  una solución factible del problema (CMPCC) asociado a  $\mathcal{K}$ . Se dice que  $\bar{x}$  es un punto Clarke estacionario (C-estacionario) si se cumple la condición de KKT no suave por medio del subdiferencial de Clarke en el problema (C-CMPCC) en el punto  $\bar{x}$ , i.e., un multiplicador  $\lambda \in \mathbb{E}$  tal que*

$$0 \in \nabla f(\bar{x}) + DG(\bar{x})^* \lambda - (DG(\bar{x})^* - DH(\bar{x})^*) \partial^c \Pi_{\mathcal{K}}(G(\bar{x}) - H(\bar{x})) \lambda.$$

Desde las definiciones y las propiedades de los conos normales, se obtiene la siguiente proposición.

**Proposición 2.5.8** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio. Sea  $\bar{x}$  una solución factible del problema (CMPCC) asociado a  $\mathcal{K}$ . Se cumple que:*

- i) Si  $\bar{x}$  es un punto S-estacionario regular, entonces es un punto M-estacionario.*
- ii) Si  $\bar{x}$  es un punto M-estacionario, entonces es un punto C-estacionario.*

DEMOSTRACIÓN. El primer punto se obtiene directamente de la inclusión del cono regular en el cono limitante. Para demostrar el segundo, sea  $(\mu, \mu^*)$  el multiplicador que hace a  $\bar{x}$  un punto M-estacionario. Del resultado de Ye & Zhou [15, Prop. 2.1] se obtiene que

$$(\mu, \mu^*) \in N_{\mathcal{M}(\mathcal{K})}(G(\bar{x}), H(\bar{x})) \iff -\mu^* \in D^* \Pi_{\mathcal{K}}(G(\bar{x}) - H(\bar{x}))(-\mu - \mu^*).$$

Mordukhovich mostró que la envoltura convexa de la coderivada genera los adjuntos del subdiferencial de Clarke [65, (2.23)]. En particular, de esto se obtiene que

$$\begin{aligned} -\mu^* \in D^* \Pi_{\mathcal{K}}(G(\bar{x}) - H(\bar{x}))(-\mu - \mu^*) &\implies -\mu^* \in \left( \partial^c \Pi_{\mathcal{K}}(G(\bar{x}) - H(\bar{x})) \right)^* (-\mu - \mu^*) \\ &\implies -\mu^* \in \partial^c \Pi_{\mathcal{K}}(G(\bar{x}) - H(\bar{x}))(-\mu - \mu^*), \end{aligned}$$

donde se utilizó que los elementos de  $\partial^c \Pi_{\mathcal{K}}$  son autoadjuntos [66, Prop. 1]. Por lo tanto, existe cierto  $A \in \partial^c \Pi_{\mathcal{K}}(G(\bar{x}) - H(\bar{x}))$  tal que

$$-\mu^* = A(-\mu - \mu^*).$$

Denotando  $\lambda := -\mu - \mu^*$ , se obtiene que

$$\mu^* = -A\lambda, \quad \mu = A\lambda - \lambda.$$

Al reemplazar en la definición de punto M-estacionario se obtiene la relación

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla f(\bar{x}) + DG(\bar{x})^*(A\lambda - \lambda) + DH(\bar{x})^*(-A\lambda) \\ &= \nabla f(\bar{x}) + DG(\bar{x})^*A\lambda - DG(\bar{x})^*\lambda - DH(\bar{x})^*A\lambda \\ &= \nabla f(\bar{x}) - DG(\bar{x})^*\lambda + (DG(\bar{x})^* - DH(\bar{x})^*)A\lambda, \end{aligned}$$

lo que demuestra que  $\bar{x}$  es un punto C-estacionario. □

**Observación** El ejemplo visto en la sección anterior muestra que no siempre existe una relación entre los puntos S-estacionarios de Wachsmuth y M-estacionarios. Es más, en dicho ejemplo se puede ver cómo el cono normal limitante está estrictamente contenido en el cono del problema (R-CMPCC). Mehrlitz mostró que cuando  $\mathcal{K}$  es un cono poliédrico, la condición S-estacionaria de Wachsmuth implica ser un punto M-estacionario [56, Prop. 3.11].

Vale mencionar que estas definiciones de puntos M- y C-estacionarios coinciden con los resultados presentados para los casos (MPCC), (SDCMPCC) y (SOCMPCC) por lo que serán consideradas como las generalizaciones naturales para el problema (CMPCC).

## 2.5.4. Puntos W-estacionarios

Al igual que para los puntos S-estacionarios, en la definición de puntos W-estacionarios existen discrepancias en lo definido para los distintos problemas. En el problema (MPCC) se plantea a partir del problema MPCC ajustado (T-MPCC). Wachsmuth presenta su definición para (CMPCC) como extensión de lo anterior por medio del problema (T-CMPCC). Al considerar las definiciones para los problemas (SDCMPCC) y (SOCMPCC), se pueden evidenciar ciertas limitaciones. Por un lado, la definición de Wu (Def. 2.4.12) solo es la relajación de las condiciones, para así obtener una condición más débil. Sin embargo, la definición no proviene de la condición de optimalidad de un problema ajustado. Por otro lado, en el problema (SOCMPCC) ocurre lo mismo, siendo la definición presentada por Ye & Zhou (Def. 2.4.14) una relajación de las condiciones sin un problema ajustado como base. Para el problema (SOCMPCC), Zhan et al. [67, Def. 3.4] han presentado una condición W-estacionaria a partir de un problema apretado. No obstante, esta definición no es válida porque contiene la restricción

$$G_j(x) = 0 = H_j(x), \quad j \in N_4(\bar{x}) \cup N_5(\bar{x}) \cup N_6(\bar{x}),$$

la cual no se satisface nisiquiera por el mismo punto  $\bar{x}$  en las coordenadas  $j \in N_4(\bar{x}) \cup N_5(\bar{x})$  (basta ver la definición de estos conjuntos). Por este motivo no se han incluido dicha definición en el análisis, y se considerará el punto W-estacionario de Wachsmuth como la generalización de la condición débilmente estacionaria para el problema (CMPCC). A continuación, se presenta esta condición escrita de forma general.

**Definición 2.5.9** (Punto W-estacionario en CMPCC) *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio. Sea  $\bar{x}$  una solución factible del problema (CMPCC) asociado a  $\mathcal{K}$ . Se dice que  $\bar{x}$  es un punto débilmente estacionario en el sentido de Wachsmuth (W-estacionario de Wachsmuth) si existe un multiplicador para el problema ajustado (T-CMPCC), i.e., existe  $(\mu, \mu^*) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$  tal que*

$$\nabla f(\bar{x}) + DG(\bar{x})^* \mu + DH(\bar{x})^* \mu^* = 0, \quad (\mu, \mu^*) \in N_C(G(\bar{x}), H(\bar{x}));$$

donde

$$C := \left( \Phi(H(\bar{x}))^\delta \cap \left( \Phi(G(\bar{x}))^D \right)^\perp \right) \times \left( \Phi(G(\bar{x}))^D \cap \left( \Phi(H(\bar{x}))^\delta \right)^\perp \right).$$

Por completitud, a continuación se muestra la relación entre la condición S-estacionaria de Wachsmuth y la W-estacionaria de Wachsmuth en el problema general (CMPCC). La proposición nos muestra el resultado esperado, donde la condición fuerte es más fuerte que la débil.

**Proposición 2.5.10** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio. Sea  $\bar{x}$  una solución factible del problema (CMPCC) asociado a  $\mathcal{K}$ . Si  $\bar{x}$  es un punto S-estacionario de Wachsmuth, entonces es un punto W-estacionario de Wachsmuth.*

DEMOSTRACIÓN. Primero se debe notar que el conjunto  $C$  de la definición de W-estacionario de Wachsmuth es convexo, y cumple que

$$C \subseteq \Phi(H(\bar{x}))^\delta \times \Phi(G(\bar{x}))^D,$$

donde en el lado derecho se puede ver el conjunto del problema (R-CMPCC). Directamente de la definición de cono normal regular se obtiene que

$$\begin{aligned} N_{\Phi(H(\bar{x}))^\delta \times \Phi(G(\bar{x}))^D}(G(\bar{x}), H(\bar{x})) &= \hat{N}_{\Phi(H(\bar{x}))^\delta \times \Phi(G(\bar{x}))^D}(G(\bar{x}), H(\bar{x})) \\ &\subseteq \hat{N}_C(G(\bar{x}), H(\bar{x})) = N_C(G(\bar{x}), H(\bar{x})), \end{aligned}$$

con lo que se obtiene que un punto S-estacionario de Wachsmuth es un punto W-estacionario de Wachsmuth.  $\square$

## 2.6. Puntos estacionarios faciales para CMPCC

En las secciones anteriores se han escrito las definiciones de Wachsmuth a partir de las caras minimales de  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{K}^*$ . Esto motiva a estudiar la definición de punto estacionario basada en el siguiente problema facial.

**Definición 2.6.1** (Punto F-estacionario en CMPCC) *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio. Sea  $\bar{x}$  una solución factible del problema (CMPCC) asociado a  $\mathcal{K}$ . Se dice que  $\bar{x}$  es un punto facialmente estacionario (F-estacionario) para el problema (CMPCC) si se cumple la condición de KKT para el problema CMPCC facial (F-CMPCC) en el punto  $\bar{x}$ :*

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x); & \text{(F-CMPCC)} \\ \text{s. a.} \quad & G(x) \in \Phi(G(\bar{x})), \\ & H(x) \in \Phi(H(\bar{x})). \end{aligned}$$

*Esto es equivalente a que exista  $(\mu, \mu^*) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$  tal que*

$$\nabla f(\bar{x}) + DG(\bar{x})^* \mu + DH(\bar{x})^* \mu^* = 0, \quad (\mu, \mu^*) \in N_{\Phi(G(\bar{x})) \times \Phi(H(\bar{x}))}(G(\bar{x}), H(\bar{x})).$$

Esta definición es interesante por varias razones. En primer lugar, es otra forma de describir condiciones débiles para el problema (CMPCC). Además, tiene una interpretación geométrica sencilla al involucrar las caras minimales para los puntos donde se estudia. Finalmente, a conocimiento del autor, es primera vez que este problema es descrito para establecer puntos estacionarios del problema (CMPCC).

### 2.6.1. Relación con los puntos W-estacionarios

Es de interés saber cómo se vincula esta definición facial con las demás condiciones. Primero se estudiará su relación con la condición W-estacionaria de Wachsmuth. Se comienza viendo la inclusión entre los conjuntos factibles asociados a ambos problemas.

**Proposición 2.6.2** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio y sea  $\bar{x}$  un punto factible para el problema (CMPCC) asociado a  $\mathcal{K}$ . Entonces se cumplen las siguientes inclusiones:*

$$\begin{aligned}\Phi(G(\bar{x})) &\subseteq \Phi(H(\bar{x}))^\delta \cap \left(\Phi(G(\bar{x}))^D\right)^\perp, \\ \Phi(H(\bar{x})) &\subseteq \Phi(G(\bar{x}))^D \cap \left(\Phi(H(\bar{x}))^\delta\right)^\perp.\end{aligned}$$

Además, si  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{K}^*$  son conos facialmente expuestos, entonces se tiene la igualdad de los conjuntos.

DEMOSTRACIÓN. Se prueba solo la primera inclusión ya que la segunda es análoga. Como  $\bar{x}$  es factible para el problema (CMPCC), entonces  $G(\bar{x}) \perp H(\bar{x})$ . Por definición de cara dual es claro que

$$G(\bar{x}) \in \Phi(H(\bar{x}))^\delta.$$

Como la cara minimal de  $G(\bar{x})$  es la menor de las caras de  $\mathcal{K}$  que contiene a  $G(\bar{x})$  y  $\Phi(H(\bar{x}))^\delta$  es una cara que contiene a  $G(\bar{x})$ , entonces se tiene la inclusión

$$\Phi(G(\bar{x})) \subseteq \Phi(H(\bar{x}))^\delta.$$

La definición de cara dual establece que  $\Phi(G(\bar{x}))^D = \mathcal{K}^* \cap \Phi(G(\bar{x}))^\perp$ . Es directo notar que  $\Phi(G(\bar{x})) \perp \Phi(G(\bar{x}))^\perp$  y por lo tanto

$$\Phi(G(\bar{x})) \perp \Phi(G(\bar{x}))^D \iff \Phi(G(\bar{x})) \subseteq \left(\Phi(G(\bar{x}))^D\right)^\perp.$$

Al unir ambas inclusiones se concluye la inclusión. Ahora bien, si  $\mathcal{K}$  es un cono facialmente expuesto, entonces existe un vector  $s^* \in \mathcal{K}^*$  tal que

$$\Phi(G(\bar{x})) = \mathcal{K} \cap \{s^*\}^\perp.$$

Además, por la Proposición 1.1.12

$$\Phi(H(\bar{x}))^\delta = \mathcal{K} \cap \{H(\bar{x})\}^\perp, \quad \Phi(G(\bar{x}))^D = \mathcal{K}^* \cap \{G(\bar{x})\}^\perp.$$

Por la definición es directo notar que

$$s^* \in \Phi(G(\bar{x}))^D \text{ y por lo tanto } \left(\Phi(G(\bar{x}))^D\right)^\perp \subseteq \{s^*\}^\perp.$$

Junto a lo anterior, se tiene la siguiente inclusión

$$\begin{aligned}\Phi(H(\bar{x}))^\delta \cap \left(\Phi(G(\bar{x}))^D\right)^\perp &= \mathcal{K} \cap \{H(\bar{x})\}^\perp \cap \left(\Phi(G(\bar{x}))^D\right)^\perp \\ &\subseteq \mathcal{K} \cap \{H(\bar{x})\}^\perp \cap \{s^*\}^\perp \\ &\subseteq \mathcal{K} \cap \{s^*\}^\perp\end{aligned}$$

Con lo que se concluye la otra inclusión, y por lo tanto la igualdad de los conjuntos en el caso de que el cono sea facialmente expuesto.  $\square$

La inclusión entre el conjunto factible de (T-CMPCC) y (F-CMPCC) también relaciona sus soluciones. Si  $\bar{x}$  es un punto factible para (CMPCC), y es solución óptima para (T-CMPCC), entonces también es solución óptima para (F-CMPCC). Se puede mostrar cómo se relaciona la noción de punto W-estacionario de Wachsmuth con ser un punto F-estacionario.

**Proposición 2.6.3** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio. Sea  $\bar{x}$  una solución factible del problema (CMPCC) asociado a  $\mathcal{K}$ . Si  $\bar{x}$  es un punto W-estacionario de Wachsmuth, entonces es un punto F-estacionario. Además, si los conos  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{K}^*$  son facialmente expuestos, entonces las definiciones son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos

$$C = \left(\Phi(H(\bar{x}))^\delta \cap \left(\Phi(G(\bar{x}))^D\right)^\perp\right) \times \left(\Phi(G(\bar{x}))^D \cap \left(\Phi(H(\bar{x}))^\delta\right)^\perp\right)$$

de la definición de punto W-estacionario de Wachsmuth. Si los conos  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{K}^*$  son facialmente expuestos, por la Proposición 2.6.2 se tiene que

$$\Phi(G(\bar{x})) \times \Phi(H(\bar{x})) = C,$$

por lo que las definiciones son equivalentes porque los conjuntos factibles de ambos problemas son iguales. En el caso general se tiene que

$$\Phi(G(\bar{x})) \times \Phi(H(\bar{x})) \subseteq C,$$

donde los conjuntos en ambos lados son convexos. Esto, junto con la inclusión de sus conos regulares, nos da como resultado

$$\begin{aligned}N_{\Phi(G(\bar{x})) \times \Phi(H(\bar{x}))}(G(\bar{x}), H(\bar{x})) &= \hat{N}_{\Phi(G(\bar{x})) \times \Phi(H(\bar{x}))}(G(\bar{x}), H(\bar{x})) \\ &\subseteq \hat{N}_C(G(\bar{x}), H(\bar{x})) = N_C(G(\bar{x}), H(\bar{x})),\end{aligned}$$

lo que concluye la inclusión entre multiplicadores.  $\square$

La condición W-estacionaria de Wachsmuth fue construida para coincidir con la condición respectiva del caso (MPCC), o bien cuando se estudia el ortante no negativo en  $\mathbb{R}^n$ . Como el ortante no negativo es un cono facialmente expuesto, la Def. 2.4.6 también coincide con la de punto F-estacionario. Esto motiva a presentar la condición facial como otra

generalización de la condición débil del problema (MPCC). Si bien se ha comentado que las condiciones W-estacionarias para los problemas (SDCMPCC) y (SOCMPCC) no vienen de generalizaciones de problemas ajustados, igual pueden ser comparadas con la condición facial. A continuación se estudian estas relaciones.

**Proposición 2.6.4** *Sea  $\bar{x}$  una solución factible del problema (SDCMPCC). Si  $\bar{x}$  es un punto W-estacionario para SDCMPCC (Def. 2.4.12), entonces es un punto F-estacionario.*

DEMOSTRACIÓN. Se estudiará la primera restricción ya que el resultado para la otra se obtiene de forma análoga. Considerando la descomposición de valores propios usual, se puede ver que

$$\Phi(G(\bar{x})) = \left\{ P \begin{pmatrix} M_{\alpha\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^\top : M_{\alpha\alpha} \succeq 0 \right\}.$$

A partir de los Lemas 1.3.1, 1.3.2, y de la caracterización del cono tangente al cono de matrices simétricas semidefinidas positivas [68, Ec. (9)], se puede caracterizar el cono normal a la cara  $\Phi(G(\bar{x}))$  como

$$N_{\Phi(G(\bar{x}))}(G(\bar{x})) = \left\{ P \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_{\alpha\alpha} & \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta} & \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma} \\ \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha} & \tilde{\Gamma}_{\beta\beta} & \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma} \\ \tilde{\Gamma}_{\gamma\alpha} & \tilde{\Gamma}_{\gamma\beta} & \tilde{\Gamma}_{\gamma\gamma} \end{pmatrix} P^\top : \tilde{\Gamma}_{\alpha\alpha} \preceq 0; \langle G(\bar{x}), \Gamma \rangle = 0 \right\}.$$

Por la estructura de  $G(\bar{x})$ , se puede reescribir el cono normal de la forma

$$N_{\Phi(G(\bar{x}))}(G(\bar{x})) = \left\{ P \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_{\alpha\alpha} & \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta} & \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma} \\ \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha} & \tilde{\Gamma}_{\beta\beta} & \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma} \\ \tilde{\Gamma}_{\gamma\alpha} & \tilde{\Gamma}_{\gamma\beta} & \tilde{\Gamma}_{\gamma\gamma} \end{pmatrix} P^\top : \tilde{\Gamma}_{\alpha\alpha} = 0 \right\}.$$

Utilizando esto para ambas restricciones se obtiene que la condición facial para (SDCMPCC) es equivalente a que exista un multiplicador  $(\Gamma^G, \Gamma^H) \in \mathcal{S}^m \times \mathcal{S}^m$  tal que

$$\nabla f(\bar{x}) + DG(\bar{x})^* \Gamma^G + DH(\bar{x})^* \Gamma^H = 0, \quad \tilde{\Gamma}_{\alpha\alpha}^G = 0, \quad \tilde{\Gamma}_{\gamma\gamma}^H = 0.$$

Luego, esta condición es más débil que la condición W-estacionaria presentada para el problema (SDCMPCC) en la Definición 2.4.12.  $\square$

**Proposición 2.6.5** *Sea  $\bar{x}$  una solución factible del problema (SOCMPCC). Si  $\bar{x}$  es un punto W-estacionario para SOCMPCC (Def. 2.4.14) y además satisface complementariedad estricta, entonces es un punto F-estacionario.*

DEMOSTRACIÓN. La condición se puede estudiar por medio de los índices. En los conos de segundo orden las caras son fáciles de encontrar pues solo existen tres casos:

$$\begin{aligned} s = 0 &\implies \Phi(s) = \{0\}, \\ s \in \text{int } \mathcal{Q}_m &\implies \Phi(s) = \mathcal{Q}_m, \\ s \in \text{bd } \mathcal{Q}_m \setminus \{0\} &\implies \Phi(s) = \text{cone}\{s\}. \end{aligned}$$



Gracias a esto, se puede ver que la condición facial es equivalente a que exista un multiplicador  $(\lambda^G, \lambda^H) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$  tal que

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + DG(\bar{x})^* \lambda^G + DH(\bar{x})^* \lambda^H &= 0, \\ \lambda_j^H &= 0 \text{ si } j \in N_1(\bar{x}), \quad \lambda_j^G = 0 \text{ si } j \in N_2(\bar{x}), \\ \lambda_j^G \perp G_j(\bar{x}), \lambda_j^H \perp H_j(\bar{x}) &\text{ si } j \in N_3(\bar{x}), \\ \lambda_j^H \perp H_j(\bar{x}) &\text{ si } j \in N_4(\bar{x}), \\ \lambda_j^G \perp G_j(\bar{x}) &\text{ si } j \in N_5(\bar{x}). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Claramente la condición para los índices  $j \in N_3(\bar{x})$  es más débil que la condición en 2.4.14. Si el punto  $\bar{x}$  cumple complementariedad estricta, entonces  $N_4(\bar{x}) = N_5(\bar{x}) = \emptyset$  con lo que las últimas dos condiciones en (2.15) no existen para ningún índice  $j$  y pueden ser omitidas. Con esto se obtiene que si  $\bar{x}$  cumple la condición W-estacionaria para SOCMPC (Def. 2.4.14) entonces es un punto F-estacionario.  $\square$

**Observación** Lo anterior no se cumple en cualquier caso. En el caso general las condiciones W-estacionaria para SOCMPC (Def. 2.4.14) y F-estacionaria no son comparables. De todas maneras, es fácil verificar (al estudiar las definiciones) que ambas condiciones son implicadas por la condición C-estacionaria para SOCMPC (Def. 2.4.17).

## 2.6.2. Relación con el punto M-estacionario

De las secciones anteriores se conoce que la condición S-estacionaria regular implica tanto la condición M-estacionaria como la condición S-estacionaria de Wachsmuth, pero que de forma general no se pueden comparar estas dos últimas. Además se vió que la condición S-estacionaria de Wachsmuth es más fuerte que la condición W-estacionaria de Wachsmuth, la cual a su vez es más fuerte que la condición F-estacionaria. Para mostrar la relación desde el otro lado, la siguiente proposición une la condición M-estacionaria con la condición F-estacionaria.

**Proposición 2.6.6** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio facialmente expuesto. Sea  $\bar{x}$  una solución factible del problema (CMPCC) asociado a  $\mathcal{K}$ . Si  $\bar{x}$  es un punto M-estacionario, entonces es un punto F-estacionario.*

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier  $(s, s^*) \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$  se sabe que se tiene la inclusión

$$\hat{N}_{\mathcal{M}(\mathcal{K})}(s, s^*) \subseteq N_{\Phi(s) \times \Phi(s^*)}(s, s^*),$$

Entonces, para concluir la proposición basta que se demuestre que

$$N_{\mathcal{M}(\mathcal{K})}(s, s^*) \subseteq N_{\Phi(s) \times \Phi(s^*)}(s, s^*). \tag{2.16}$$

En efecto se tiene que

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{M}(\mathcal{K})}(s, s^*) &= \limsup_{(s', s'^*) \xrightarrow{\mathcal{M}(\mathcal{K})} (s, s^*)} \hat{N}_{\mathcal{M}(\mathcal{K})}(s', s'^*) \\ &\subseteq \limsup_{(s', s'^*) \xrightarrow{\mathcal{M}(\mathcal{K})} (s, s^*)} N_{\Phi(s') \times \Phi(s'^*)}(s', s'^*). \end{aligned}$$

Sea  $(\mu, \mu^*) \in \limsup_{(s', s'^*) \xrightarrow{\mathcal{M}(\mathcal{K})} (s, s^*)} N_{\Phi(s') \times \Phi(s'^*)}(s', s'^*)$ , por lo que existen sucesiones

$$(s_n, s_n^*) \xrightarrow{\mathcal{M}(\mathcal{K})} (s, s^*) \text{ y } (\mu_n, \mu_n^*) \rightarrow (\mu, \mu^*)$$

tal que

$$(\mu_n, \mu_n^*) \in N_{\Phi(s_n) \times \Phi(s_n^*)}(s_n, s_n^*).$$

Como  $\mathcal{K}$  es facialmente expuesto, del Lema 1.3.3 se obtiene que (pasando por subsucesión de ser necesario) estas sucesiones de caras convergen a ciertas caras  $F$  y  $F^*$ , i.e.,

$$\Phi(s_n) \xrightarrow{PK} F, \quad \Phi(s_n^*) \xrightarrow{PK} F^*.$$

Por la aplicación del Teorema de Attouch a funciones indicadoras [69, Teo. 2.4] se cumple que  $\mu \in N_F(s)$ ,  $\mu^* \in N_{F^*}(s^*)$ . Finalmente, el Lema 1.3.3 también indica que estas caras contienen a las caras minimales de  $s$  y de  $s^*$  por lo que, utilizando que las caras son conjuntos convexos, se obtiene finalmente que

$$(\mu, \mu^*) \in N_{\Phi(s) \times \Phi(s^*)}(s, s^*),$$

lo que demuestra (2.16), y con ello la proposición.  $\square$

### 2.6.3. Condiciones de optimalidad basadas en puntos faciales

Una de las ventajas de obtener condiciones estacionarias débiles, como es el caso de la condición facial, es que a partir de las condiciones necesarias para la optimalidad basadas en puntos estacionarios más fuertes, se desprenden inmediatamente nuevas condiciones de optimalidad faciales. Por ejemplo, a continuación se presenta la condición necesaria de optimalidad para puntos F-estacionarios a partir de la condición presentada por Wachsmuth [62, Prop. 4.8].

**Teorema 2.6.7** *Sea  $\bar{x}$  factible para (CMPCC), y supongamos que se cumple que*

$$D\mathcal{G}(\bar{x})\mathbb{R}^n = \mathbb{E} \times \mathbb{E},$$

donde  $\mathcal{G}(x) = (G(x), H(x))$ . Si  $\bar{x}$  es un mínimo local para (CMPCC), entonces  $\bar{x}$  es un punto F-estacionario.

### 2.6.4. Puntos Facial-Reducido estacionarios

En esta sección se presenta otra manera de generalizar la condición débil estacionaria. Al considerar como base el problema ajustado para MPCC, se puede proponer su generalización

mediante el uso de la reducción de conos (Def. 1.1.15). Así, la restricción en el problema (T-MPCC) es equivalente a

$$\begin{aligned}\Xi_{\mathbb{R}_+^n}^{G(\bar{x})}(G(x)) &= 0, \\ \Xi_{\mathbb{R}_+^n}^{H(\bar{x})}(H(x)) &= 0;\end{aligned}$$

donde  $\Xi_{\mathbb{R}_+^n}$  es la reducción canónica del cono  $\mathbb{R}_+^n$  en  $G(\bar{x})$ , y en  $H(\bar{x})$  [35, Ej. 3.138]. La particularidad en la reducción del ortante no negativo es que se cumple la restricción  $\Xi_{\mathbb{R}_+^n}^{\bar{s}}(s) = 0$  si y solamente si  $s$  pertenece a la cara minimal de  $\bar{s}$ , i.e.,  $s \in \Phi(\bar{s})$ . Esto no es cierto con cualquier cono  $\mathcal{K}$  y cualquier reducción de clase  $\mathcal{C}^2$  asociada a él, e.g., al considerar la reducción del cono de segundo orden  $\mathcal{Q}_m$  [36, Lema 15] en un punto  $\bar{s} \in \text{bd } \mathcal{Q}_m \setminus \{0\}$ . En este caso la función de reducción vale 0 en cualquier punto  $s \in \text{bd } \mathcal{Q}_m$  sin importar si pertenece o no a la cara minimal que contiene a  $\bar{s}$ . Lo anterior motiva definir una subclase de las funciones de reducción que cumplan esta propiedad.

**Definición 2.6.8** (Reducción facial de clase  $\mathcal{C}^2$ ) *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  y sea  $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^m$  un cono puntia-gudo. Se dice que  $\mathcal{K}$  es  $\mathcal{C}^2$ -cono facialmente reducible a  $\mathbb{K}$  en el punto  $\bar{s} \in \mathcal{K}$  si existe una vecindad  $N$  de  $\bar{s}$  y un mapeo  $\Xi_{\mathcal{K}}^{\bar{s}} : N \rightarrow \mathbb{R}^m$  de clase  $\mathcal{C}^2$  tal que*

- i)  $D\Xi_{\mathcal{K}}^{\bar{s}}(\bar{s}) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$  es sobreyectiva,
- ii)  $\mathcal{K} \cap N = \{s \in N : \Xi_{\mathcal{K}}^{\bar{s}}(s) \in \mathbb{K}\}$ ,
- iii)  $\Xi_{\mathcal{K}}^{\bar{s}}(\bar{s}) = 0$ ,
- iv)  $\Xi_{\mathcal{K}}^{\bar{s}}(s) = 0 \implies s \in \Phi(\bar{s})$ .

De la definición, es directo notar que cualquier reducción facial de clase  $\mathcal{C}^2$  es particularmente una reducción de clase  $\mathcal{C}^2$ . La siguiente proposición muestra una condición suficiente para obtener una reducción facial a partir de una reducción normal.

**Proposición 2.6.9** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio, sea  $\bar{s} \in \mathcal{K}$  tal que  $\Phi(\bar{s})$  es una cara expuesta por  $s^* \neq 0$ . Sea un mapeo  $\Xi_{\mathcal{K}}^{\bar{s}}$  tal que  $\mathcal{K}$  es  $\mathcal{C}^2$ -cono reducible en  $\bar{s}$  por medio del mapeo  $\Xi_{\mathcal{K}}^{\bar{s}}$  al cono  $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^m$ . Si  $s^* \in \ker D\Xi_{\mathcal{K}}^{\bar{s}}(\bar{s})$ , entonces  $\mathcal{K}$  es  $\mathcal{C}^2$ -cono facialmente reducible en  $\bar{s}$  por medio del mapeo  $(\Xi_{\mathcal{K}}^{\bar{s}}(\cdot), \langle s^*, \cdot \rangle)$  al cono  $\mathbb{K} \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^{m+1}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Primero se puede notar que si  $s^* = 0$ , entonces  $\bar{s} \in \text{int } \mathcal{K}$  y  $\Phi(\bar{s}) = \mathcal{K}$ . Luego  $\Xi_{\mathcal{K}}^{\bar{s}} \equiv 0$  y  $\mathbb{K} = \{0\}$ . Con esto la reducción original ya era una reducción facial. Si se considera  $s^* \neq 0$ , basta ver que el mapeo  $(\Xi_{\mathcal{K}}^{\bar{s}}(\cdot), \langle s^*, \cdot \rangle)$  cumple las cuatro condiciones de la definición de reducción facial.

$$D(\Xi_{\mathcal{K}}^{\bar{s}}(\cdot), \langle s^*, \cdot \rangle)(\bar{s}) = (D\Xi_{\mathcal{K}}^{\bar{s}}(\bar{s}), s^*).$$

Ya que  $\Xi_{\mathcal{K}}^{\bar{s}}(\bar{s})$  es función de reducción, entonces

$$\dim \text{Im } D\Xi_{\mathcal{K}}^{\bar{s}}(\bar{s}) = m.$$

Como  $0 \neq s^* \in \ker D\Xi_{\mathcal{K}}^{\bar{s}}(\bar{s})$ , se obtiene que

$$\dim \ker D\left(\Xi_{\mathcal{K}}^{\bar{s}}(\cdot), \langle s^*, \cdot \rangle\right)(\bar{s}) = \dim \ker D\Xi_{\mathcal{K}}^{\bar{s}}(\bar{s}) - 1,$$

lo que, en función del Teorema de Núcleo-Imagen, implica que

$$\dim \operatorname{Im} D\left(\Xi_{\mathcal{K}}^{\bar{s}}(\cdot), \langle s^*, \cdot \rangle\right)(\bar{s}) = m + 1,$$

obteniendo que es un operador sobreyectivo. La propiedad *ii*) se cumple trivialmente pues al  $s^*$  exponer la cara  $\Phi(\bar{s})$ , se tiene que  $s^* \in \mathcal{K}^*$ , con lo que la igualdad de la propiedad se preserva. La propiedad *iii*) se mantiene pues  $\bar{s} \perp s^*$ . La propiedad *iv*) es una consecuencia directa de que  $s^*$  exponga la cara  $\Phi(\bar{s})$ . Por lo que  $\left(\Xi_{\mathcal{K}}^{\bar{s}}(\cdot), \langle s^*, \cdot \rangle\right)$  es una función de reducción facial para el cono  $\mathcal{K}$  en  $\bar{s}$ .  $\square$

La definición de reducción facial permite plantear un nuevo problema desde el cual estudiar soluciones del problema (CMPCC), como también los puntos estacionarios correspondientes.

**Definición 2.6.10** (Punto FR-estacionario en CMPCC) *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio. Sea  $\bar{x}$  una solución factible del problema (CMPCC) asociado a  $\mathcal{K}$  tal que  $\mathcal{K}$  es facialmente reducible en  $G(\bar{x})$  y  $\mathcal{K}^*$  lo es en  $H(\bar{x})$  por funciones  $\Xi_{\mathcal{K}}^{G(\bar{x})} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ;  $\Xi_{\mathcal{K}^*}^{H(\bar{x})} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{m}}$  respectivamente. Se dice que  $\bar{x}$  es un punto facial-reducido estacionario (FR-estacionario) para el problema (CMPCC) si se cumple la condición de KKT para el problema CMPCC facialmente reducido (FR-CMPCC) en el punto  $\bar{x}$ :*

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x); & \text{(FR-CMPCC)} \\ \text{s.a.} \quad & \Xi_{\mathcal{K}}^{G(\bar{x})}(G(x)) = 0, \\ & \Xi_{\mathcal{K}^*}^{H(\bar{x})}(H(x)) = 0. \end{aligned}$$

Esto es equivalente a que exista  $(\xi, \xi^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\tilde{m}}$  tal que

$$\nabla f(\bar{x}) + DG(\bar{x})^* D\Xi_{\mathcal{K}}^{G(\bar{x})}(G(\bar{x}))^* \xi + DH(\bar{x})^* D\Xi_{\mathcal{K}^*}^{H(\bar{x})}(H(\bar{x}))^* \xi^* = 0.$$

Se puede comparar esta nueva noción de punto estacionario débil, con la noción presentada en secciones anteriores.

**Proposición 2.6.11** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio. Sea  $\bar{x}$  una solución factible del problema (CMPCC) asociado a  $\mathcal{K}$  tal que  $\mathcal{K}$  es facialmente reducible en  $G(\bar{x})$  y  $\mathcal{K}^*$  lo es en  $H(\bar{x})$  por funciones  $\Xi_{\mathcal{K}}^{G(\bar{x})}$  y  $\Xi_{\mathcal{K}^*}^{H(\bar{x})}$  respectivamente. Si  $\bar{x}$  es un punto F-estacionario, entonces también es un punto FR-estacionario.*

DEMOSTRACIÓN. Por la definición de reducción facial, se satisface que

$$\left(\Xi_{\mathcal{K}}^{G(\bar{x})}\right)^{-1}(\{0\}) \subseteq \Phi(G(\bar{x})), \quad \left(\Xi_{\mathcal{K}^*}^{H(\bar{x})}\right)^{-1}(\{0\}) \subseteq \Phi(H(\bar{x}));$$

por lo que existe una inclusión entre los conjuntos factibles. Con esto se puede notar que si  $\bar{x}$  es solución del problema facial, entonces también será solución del problema facial reducido. Dichas inclusiones también muestran la siguiente inclusión de los conos normales

$$N_{\Phi(G(\bar{x}))}(G(\bar{x})) \subseteq \hat{N}_{\left(\Xi_{\mathcal{K}}^{G(\bar{x})}\right)^{-1}(\{0\})}(G(\bar{x})). \quad (2.17)$$

Como  $\Xi_{\mathcal{K}}^{G(\bar{x})} = 0$  y  $D\Xi_{\mathcal{K}}^{G(\bar{x})}$  es sobreyectiva, se puede utilizar el cambio de coordenadas [39, Ej. 6.7] para calcular el cono normal:

$$\hat{N}_{\left(\Xi_{\mathcal{K}}^{G(\bar{x})}\right)^{-1}(\{0\})}(G(\bar{x})) = D\Xi_{\mathcal{K}}^{G(\bar{x})}(G(\bar{x}))^* \hat{N}_{\{0\}}(0) = D\Xi_{\mathcal{K}}^{G(\bar{x})}(G(\bar{x}))^* \mathbb{R}^m. \quad (2.18)$$

Finalmente, al juntar (2.17) y (2.18); se obtiene que si existe un multiplicador facial  $\mu$ , entonces existe un elemento respectivo  $\xi \in \mathbb{R}^m$  tal que

$$\mu = D\Xi_{\mathcal{K}}^{G(\bar{x})}(G(\bar{x}))^* \xi.$$

El argumento se repite de forma análoga para  $\mu^*$  y su respectivo  $\xi^* \in \mathbb{R}^{\bar{m}}$ , con lo que se concluye que desde cualquier multiplicador facial se puede encontrar un multiplicador facial reducido.  $\square$

Se ha visto cómo las diferentes nociones para puntos débilmente estacionarios fueron escritas para coincidir con la definición original en el caso (MPCC). La siguiente proposición resume estas equivalencias.

**Proposición 2.6.12** *Sea  $\bar{x}$  una solución factible para el problema (MPCC), o bien, para el problema (CMPCC) con el cono  $\mathbb{R}_+^n$ . Entonces son equivalentes:*

- i)  $\bar{x}$  es un punto W-estacionario para MPCC.
- ii)  $\bar{x}$  es un punto W-estacionario de Wachsmuth para  $\mathcal{K} = \mathbb{R}_+^n$ .
- iii)  $\bar{x}$  es un punto F-estacionario.
- iv)  $\bar{x}$  es un punto FR-estacionario.

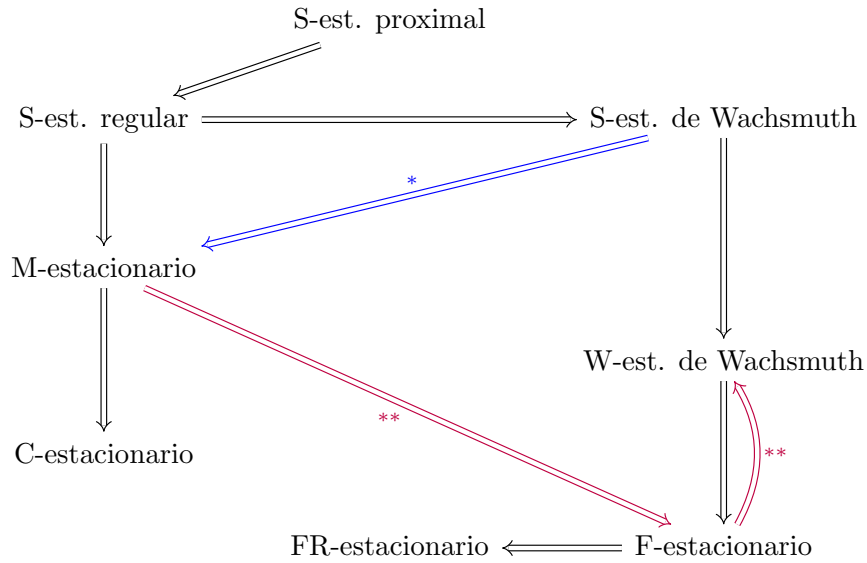
A partir de este resultado se pueden proponer tanto la condición W-estacionaria de Wachsmuth, o las condiciones F-, FR-estacionarias como la propuesta de generalización de la condición W-estacionaria para el problema (MPCC), en el caso general (CMPCC). Como se ha mostrado, en el caso general se cumple la relación

$$\text{W-est. de Wachsmuth} \quad \implies \quad \text{F-estacionario} \quad \implies \quad \text{FR-estacionario.}$$

Con esto la condición FR-estacionaria es la más débil presentada, pero es complicada de entender pues necesita una comprensión de las funciones de reducción facial. La condición F-estacionaria no es tan débil, pero es más directa de utilizar en la medida de que lo es encontrar las caras de los conos  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{K}^*$ .

## 2.7. Resumen de resultados

El siguiente diagrama resume las relaciones encontradas en este capítulo para las distintas nociones de puntos estacionarios del problema (CMPCC).



donde las implicancias denotadas por  $\implies$  se cumplen en el caso general que  $\mathcal{K}$  sea un cono propio, la implicancia  $\overset{*}{\implies}$  cuando además  $\mathcal{K}$  es un cono poliédrico, y las implicancias  $\overset{**}{\implies}$  cuando  $\mathcal{K}$  es un cono facialmente expuesto. Todas las relaciones que no aparecen (y que no pueden ser deducidas por transitividad) no son conocidas.

## 2.8. Discusión y Comentarios

En este capítulo se presentaron las definiciones de puntos estacionarios para el problema (MPCC), así como los recientes resultados para los problemas (SDCMPCC) y (SOCMPCC), y los conceptos introducidos por Wachsmuth. El estudio de estos conceptos permitió formalizar definiciones generales para cualquier problema (CMPCC). Adicionalmente, se estudiaron las relaciones entre estas definiciones para finalmente presentar dos nuevas nociones de puntos estacionarios débiles del problema (CMPCC): los puntos F-estacionarios y los puntos FR-estacionarios. De forma adicional al resumen presentado en la Sección 2.7, a continuación se presenta una serie de puntos y problemas abiertos no abordados en este capítulo:

1. A pesar de que esta tesis ha abordado el caso particular de conos  $\mathcal{K}$  en algún espacio Euclidiano  $\mathbb{E}$ , muchas definiciones y resultados se pueden extender directamente a casos más generales. Por ejemplo, las definiciones de Wachsmuth fueron originalmente escritas para espacios de Banach. Todas las definiciones de puntos estacionarios (S-proximal, S-regular, S-de Wachsmuth, M-, C-, W-de Wachsmuth, F-, FR-) pueden ser directamente comprendidas en el caso infinito dimensional. Sin embargo, no todas las relaciones encontradas en este capítulo pueden ser extendidas en ese contexto. Por ejemplo la relación entre punto M-estacionario y punto F-estacionario (Prop. 2.6.6) se demuestra por medio del Lema 1.3.3 el cual a su vez utiliza que la bola cerrada es compacta. Es por esto que

si se desea estudiar el contexto infinito dimensional (espacios de Hilbert o incluso espacios de Banach), es necesario realizar una revisión completa de todas las propiedades estudiadas.

2. Aún cuando algunos autores han encontrado relaciones entre el punto B-estacionario y las demás definiciones (e.g., Flegel & Kanzow demostraron en el caso (MPCC) que bajo la calificación de restricciones de Guignard todo punto B-estacionario es también un punto S-estacionario [60]), en el caso general no hay una relación. Hay un claro *trade-off* o compensación al momento de utilizar las distintas nociones. En primer lugar, los puntos B-estacionarios se cumplen en las soluciones óptimas del problema sin la necesidad de alguna calificación de restricción. Su problema radica en que necesitan conocer el cono tangente al conjunto factible y, en general, es un conjunto difícil de explicitar. Todas las demás nociones de puntos estacionarios (también llamados puntos estacionarios duales), son más fáciles de aplicar en el sentido que utilizan conjuntos computables. Su problema es que para garantizar que se cumplan en soluciones óptimas, estos puntos deben cumplir con alguna calificación de restricciones.
3. Las tres nociones generales para puntos fuerte estacionarios (Def. 2.5.4) fueron construidas para coincidir con la noción fuerte estacionaria del problema (MPCC). Se ha visto que la noción de punto S-estacionario proximal es más fuerte que la de punto S-estacionario regular. Para los problemas más estudiados en la literatura, se ha visto que estas dos condiciones son equivalentes. Esto debido a que el cono normal proximal al conjunto de complementariedad coincide con el cono normal regular (para (MPCC) ver [4], para (SDCMPCC) ver [9], y para (SOCMPCC) ver [15]). Como trabajo futuro se plantea encontrar condiciones (de ser necesarias) que garanticen que ambos conos normales al conjunto de complementariedad coinciden y, por lo tanto, ambas nociones de puntos fuertemente estacionarios sean equivalentes.
4. En la Proposición 2.6.6 se vio como la condición M-estacionaria implica la condición F-estacionaria cuando el cono  $\mathcal{K}$  es facialmente expuesto. Bajo esta hipótesis, también se vio que la condición F-estacionaria es equivalente a la condición W-estacionaria de Wachsmuth (Prop. 2.6.3). Con ambas proposiciones se concluye que si  $\mathcal{K}$  es facialmente expuesto, entonces la condición M-estacionaria implica la condición W-estacionaria de Wachsmuth. De esto se desprenden dos nuevas preguntas a ser estudiadas. En primer lugar, ¿Se cumple que la condición M-estacionaria implica la condición W-estacionaria de Wachsmuth sin la hipótesis de ser facialmente expuesto? En segundo lugar, ¿Se cumple la relación entre las condiciones M-estacionaria y F-estacionaria bajo la ausencia de la exposición facial de  $\mathcal{K}$ ?
5. La condición C-estacionaria cumple con ser más débil que la condición M-estacionaria (Prop. 2.5.8). Según lo observado en las nociones de la literatura (Sección 2.4), es razonable pensar que la condición C-estacionaria debe ser más fuerte que cualquier noción débil propuesta para el caso general. En esta tesis no fueron estudiadas estas relaciones por la dificultad de expresar el subdiferencial de Clarke en la definición de punto C-estacionario. Por esto, como trabajo futuro queda encontrar condiciones para que se cumplan las relaciones

$$\text{C-est.} \implies \text{W-est. de Wachsmuth,} \quad \text{C-est.} \implies \text{F-est.}$$

6. Como fue visto en la Proposición 2.6.7, la condición F-estacionaria puede ser utilizada para caracterizar soluciones óptimas del problema (CMPCC). Al ser de las condiciones más débiles, se pueden utilizar todas las calificaciones de restricciones que se han empleado en las distintas condiciones de optimalidad (e.g., los Teoremas 2.4.8, 2.4.13, 2.4.18, 2.4.23). Esto motiva la búsqueda de nuevas calificaciones de restricciones débiles sobre las cuales la condición F-estacionaria (respectivamente la condición FR-estacionaria) se satisfaga en una solución óptima.
7. La reducción del cono de segundo orden en su frontera fue uno de los ejemplos que motivó la definición de reducción facial. Lamentablemente, no se puede utilizar la Proposición 2.6.9 para derivar una reducción facial a partir de su reducción clásica [36, Lema 15]. Esto debido a que las hipótesis no se satisfacen. En particular, el vector que expone la cara no pertenece al Kernel de la derivada de la reducción clásica. A futuro se espera encontrar si es que existe, o demostrar que no existe tal reducción facial para este caso.
8. Los resultados de la literatura para el problema (MPCC) utilizan los conjuntos de índices  $\alpha(\bar{x}), \beta(\bar{x}), \gamma(\bar{x})$ . Basado en esto, en el problema (SDCMPCC) se utilizó la descomposición por valores propios para encontrar nuevos conjuntos de índices  $\alpha(\bar{x}), \beta(\bar{x}), \gamma(\bar{x})$  sobre los cuales basar las definiciones de puntos estacionarios. De forma similar, en el problema (SOCMPCC) se definieron los conjuntos de índices  $N_1(\bar{x}), N_2(\bar{x}), N_3(\bar{x}), N_4(\bar{x}), N_5(\bar{x})$  y  $N_6(\bar{x})$ , sobre los cuales se describen los resultados. Los resultados de Wachsmuth, así como las definiciones generales presentadas en este capítulo, son descritas a partir de problemas generales y propiedades geométricas. Se propone como trabajo futuro estudiar formas de generalizar los conjuntos de índices a cualquier problema (CMPCC), y a partir de ellos describir los puntos estacionarios.
9. Existen en la literatura muchas otras definiciones de puntos estacionarios sobre las cuales no se ha detallado en este trabajo (por ejemplo los puntos A-estacionarios en la Definición 2.4.5). Trabajo posterior será estudiar cómo generalizar estas nociones al caso (CMPCC), y ver su relación con las demás condiciones.



# Capítulo 3

## Geometría Variacional para el Cono de Complementariedad

### 3.1. Introducción y contexto

En el Capítulo 2 se estudió como los distintos conos normales del conjunto de complementariedad  $\mathcal{M}(\mathcal{K})$  juegan un rol importante en la descripción de puntos estacionarios duales. Por otro lado, así como la condición B-estacionaria requiere conocer el cono tangente del conjunto factible, la siguiente condición primal de segundo orden [70, Cor. 1.3] también requiere conocer su cono tangente de segundo orden:

**Teorema 3.1.1** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio. Sea  $\bar{x}$  una solución factible del problema (CMPCC) asociado a  $\mathcal{K}$ , donde  $\mathcal{F}$  denota su conjunto factible. Entonces, para todo  $d \in T_{\mathcal{F}}(\bar{x})$  con  $\nabla f(\bar{x})d = 0$  se tiene que*

$$\nabla f(\bar{x})^\top w + \nabla^2 f(\bar{x})(d, d) \geq 0, \quad \forall w \in T_{\mathcal{F}}^2(\bar{x}; d).$$

Bajo calificación de restricciones, se puede realizar regla de la cadena para escribir estos conjuntos a partir de los conjuntos tangentes del cono de complementariedad. Esto se muestra en la siguiente proposición [37, Prop. 5].

**Proposición 3.1.2** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio. Sea  $\bar{x}$  factible para el problema (CMPCC) asociado a  $\mathcal{K}$ , tal que el mapeo multivaluado  $M(x) := \mathcal{G}(x) - \mathcal{M}$  es métricamente subregular en  $(\bar{x}, 0)$  en la dirección  $d$  con módulo  $\kappa$ , donde  $\mathcal{G}(x) := (G(x), H(x))$  y  $\mathcal{M}$  es el cono de complementariedad asociado a  $\mathcal{K}$ . Entonces*

$$d \in T_{\mathcal{F}}(\bar{x}) \iff DG(\bar{x})d \in T_{\mathcal{M}}(\mathcal{G}(\bar{x})).$$

Además, para toda dirección  $d$  tal que  $DG(\bar{x})d \in T_{\mathcal{M}}(\mathcal{G}(\bar{x}))$  se cumple que

$$w \in T_{\mathcal{F}}^2(\bar{x}; d) \iff DG(\bar{x})w + D^2\mathcal{G}(\bar{x})(d, d) \in T_{\mathcal{M}}^2(\mathcal{G}(\bar{x}); DG(\bar{x})d).$$

Debido a las relaciones que utilizan elementos variacionales del cono de complementariedad, los autores han invertido de su esfuerzo para describir explícitamente estos conjuntos. Por ejemplo, Wu et al. [10] a partir de cálculos sobre la proyección ortogonal, caracterizaron el cono tangente de  $\mathcal{M}$  cuando  $\mathcal{K}$  es el cono de matrices semidefinidas positivas. Wachsmuth [63] encontró el mismo resultado mediante aproximaciones tangenciales a  $\mathcal{M}$ . Mediante el uso de la proyección ortogonal, Ye et al. [13] realizaron un trabajo similar para el caso donde  $\mathcal{K}$  es el cono de segundo orden. Esto fue extendido por Chen et al. [14] quienes entregaron una fórmula exacta para su conjunto tangente de segundo orden. De manera casi simultánea Liu & Pan [11] realizaron un desarrollo similar para cuando  $\mathcal{K}$  es el cono de las matrices semidefinidas positivas. También se ha trabajado para caracterizar el cono normal, por ejemplo, Ye et al. [15] encontraron expresiones explícitas para los conos normales proximal, regular y limitante a  $\mathcal{M}$  para cuando  $\mathcal{K}$  es el cono de segundo orden. Recientemente, Thinh et al. [71] extendieron estos resultados a los conos circulares.

El principal aporte de este capítulo consiste en estudiar nuevas formas de relacionar los elementos de la geometría variacional del cono de complementariedad  $\mathcal{M}$ . Para dar comienzo con esto, a continuación se presenta un resumen de las propiedades derivadas de la proyección ortogonal, las cuales han sido claves para los desarrollos realizados en los últimos años. Luego, utilizando las herramientas de la diferenciabilidad generalizada, se presentan novedosos resultados que caracterizan estos conjuntos a partir de subdiferenciales convexos.

## 3.2. Geometría variacional vía proyección ortogonal

La gran mayoría de las caracterizaciones presentes en la literatura [13, 14, 11, 15] se basan en relacionar el cono de complementariedad con la proyección ortogonal. Esta sección tiene como objetivo exponer los principales resultados para caracterizar los elementos variacionales de  $\mathcal{M}$ . El origen de estos resultados se encuentra en la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.1** *Sea  $\mathcal{K}$  un cono propio y sea  $\mathcal{M}$  el cono de complementariedad asociado a  $\mathcal{K}$ . Entonces se cumple que*

$$(s, s^*) \in \mathcal{M} \iff s = \Pi_{\mathcal{K}}(s - s^*), \quad (3.1)$$

donde  $\Pi_{\mathcal{K}}(x) := \arg \min_{x' \in \mathcal{K}} \|x' - x\|$  denota la proyección ortogonal a  $\mathcal{K}$ .

A partir de esta proposición se obtienen los siguientes resultados, los cuales han sido resumidos en la siguiente proposición. Su demostración puede ser encontrar en los trabajos [14, Prop. 4.1], [15, Prop. 2.1], y [12, Prop. 3.1].

**Proposición 3.2.2** *Sea  $\mathcal{K}$  un cono propio, y sea  $\mathcal{M}$  el cono de complementariedad asociado a  $\mathcal{K}$ . Entonces, para  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$  se cumple que*

$$(u, u^*) \in N_{\mathcal{M}}(s, s^*) \iff -u^* \in D^* \Pi_{\mathcal{K}}(s - s^*)(-u - u^*). \quad (3.2)$$

*Si la proyección ortogonal  $\Pi_{\mathcal{K}}$  es direccionalmente diferenciable, para  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$ , entonces se cumple que*

$$(d, d^*) \in T_{\mathcal{M}}(s, s^*) \iff d = \Pi'_{\mathcal{K}}(s - s^*; d - d^*), \quad (3.3)$$

donde  $\Pi'_\mathcal{K}$  es la derivada direccional. Si además la proyección ortogonal  $\Pi_\mathcal{K}$  es parabólica direccionalmente diferenciable de segundo orden en el sentido de Hadamard, para  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$  y  $(d, d^*) \in T_\mathcal{M}(s, s^*)$ , entonces se cumple que

$$(w, w^*) \in T_\mathcal{M}^2((s, s^*); (d, d^*)) \iff w = \Pi''_\mathcal{K}(s - s^*; d - d^*; w - w^*). \quad (3.4)$$

La dificultad de estas caracterizaciones radica en conocer explícitamente la proyección  $\Pi_\mathcal{K}$ , sus derivadas direccionales y su coderivada. Los trabajos donde se ha ocupado esta caracterización contemplan un previo cálculo de la proyección en todos los casos. Esto se ha realizado para ciertos conos como el cono de las matrices semidefinidas, y para el cono de segundo orden.

### 3.3. Cono tangente del cono de complementariedad

El objetivo de esta sección es encontrar una forma alternativa para la caracterización del cono tangente de  $\mathcal{M}$ . Así, como las propiedades estudiadas en la sección anterior tienen su origen en la equivalencia (3.1), en este caso se considerará comenzar por la siguiente proposición.

**Proposición 3.3.1** *Sea  $\mathcal{K}$  un cono propio y sea  $\mathcal{M}$  el cono de complementariedad asociado a  $\mathcal{K}$ . Entonces se cumple que*

$$(s, s^*) \in \mathcal{M} \iff -s^* \in \partial\delta_\mathcal{K}(s).$$

#### 3.3.1. Función de curvatura

Dado  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio, se presenta a continuación la función de curvatura asociada a  $\mathcal{K}$ . Esta definición no es novedosa: por un lado guarda mucha relación con el coeficiente de curvatura definido en espacios de Hilbert por Goncharov & Pereira [72], coincide con el funcional de curvatura direccional definido por Christof & Wachsmuth [73] (restringiéndose a espacios Euclidianos), y ha sido utilizado indirectamente en otros trabajos (e.g., [74]). En esta sección se estudiarán las principales propiedades que satisface la función de curvatura asociada a  $\mathcal{K}$ .

**Definición 3.3.2** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio con  $\mathcal{M}$  el cono de complementariedad asociado a  $\mathcal{K}$  y sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$ . Se define la función de curvatura de  $\mathcal{K}$  en  $s$  con respecto a  $s^*$  en la dirección  $d \in \mathbb{E}$  por*

$$\mathfrak{C}_\mathcal{K}(s, s^*)(d) := \begin{cases} \liminf_{\substack{\tau \downarrow 0, d' \rightarrow d \\ s + \tau d' \in \mathcal{K}}} \frac{\langle d', s^* \rangle}{\tau} & d \in C_\mathcal{K}(s, s^*); \\ +\infty & d \notin C_\mathcal{K}(s, s^*), \end{cases}$$

donde  $C_\mathcal{K}(s, s^*) := T_\mathcal{K}(s) \cap (s^*)^\perp$  se denomina el cono crítico de  $\mathcal{K}$  en  $(s, s^*)$ .

Se puede notar que la función de curvatura de  $\mathcal{K}$  está relacionada con la segunda subderivada, como muestra la siguiente proposición.

**Proposición 3.3.3** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio con  $\mathcal{M}$  el cono de complementariedad asociado a  $\mathcal{K}$  y sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$ . Entonces se cumple la relación*

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(d) = \frac{1}{2}d^2\delta_{\mathcal{K}}(s| - s^*)(d).$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición de segunda subderivada se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}d^2\delta_{\mathcal{K}}(s| - s^*)(d) &= \liminf_{\substack{\tau \downarrow 0 \\ d' \rightarrow \bar{d}}} \frac{\delta_{\mathcal{K}}(s + \tau d') - \delta_{\mathcal{K}}(s) - \tau \langle -s^*, d' \rangle}{\tau^2}, \\ &= \liminf_{\substack{\tau \downarrow 0 \\ d' \rightarrow \bar{d}}} \frac{\delta_{\mathcal{K}}(s + \tau d') - \tau \langle -s^*, d' \rangle}{\tau^2}. \end{aligned}$$

Basta notar que el valor anterior será finito si y sólo si  $d$  pertenece a  $T_{\mathcal{K}}(s)$ . Con esto se puede reescribir la igualdad anterior como

$$\frac{1}{2}d^2\delta_{\mathcal{K}}(s| - s^*)(d) = \begin{cases} \liminf_{\substack{\tau \downarrow 0, d' \rightarrow d \\ s + \tau d' \in \mathcal{K}}} -\tau \frac{\langle -s^*, d' \rangle}{\tau^2} & d \in T_{\mathcal{K}}(s); \\ +\infty & d \notin T_{\mathcal{K}}(s). \end{cases}$$

Como  $\tau \downarrow 0$ , es necesario que la parte superior tienda a cero (o si no el límite se indeterminará), por lo que  $s^* \perp d$ . Con esto se obtiene la definición de la función de curvatura.  $\square$

Gracias a esto, la función de curvatura extrae todas las propiedades que le entrega la segunda subderivada. A continuación se presentan las principales [39, Cap. 13].

**Proposición 3.3.4** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio con  $\mathcal{M}$  el cono de complementariedad asociado a  $\mathcal{K}$ , y sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$ . Entonces la función de curvatura  $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)$  es una función propia, convexa e inferiormente semicontinua, y cumple que*

- $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(\alpha d) = \alpha^2 \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(d) \quad \forall d \in C_{\mathcal{K}}(s, s^*), \alpha > 0.$
- $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(\alpha d) \geq 0 \quad \forall d \in C_{\mathcal{K}}(s, s^*).$

**Proposición 3.3.5** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio con  $\mathcal{M}$  el cono de complementariedad asociado a  $\mathcal{K}$ , y sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$ . La conjugada de Fenchel de  $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)$  se encuentra relacionada con la función  $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}^*}(s^*, s)$  de la siguiente forma:*

$$\left( \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*) \right)^* (-d^*) = \mathfrak{C}_{\mathcal{K}^*}(s^*, s)(d^*)$$

DEMOSTRACIÓN. Por el resultado de Rockafellar & Wets [39, Teo. 13.21], como  $s \in \text{dom} \delta_{\mathcal{K}}$  y

que  $-s^* \in \partial\delta_{\mathcal{K}}(s)$ , se cumple la relación

$$\frac{1}{2}d^2\delta_{\mathcal{K}}(s, -s^*)(d) \quad \xleftrightarrow{*} \quad \frac{1}{2}d^2\delta_{-\mathcal{K}^*}(s^*, -s)(-d^*) = \frac{1}{2}d^2\delta_{\mathcal{K}^*}(s^*, -s)(d^*)$$

En el lado izquierdo se reconoce la función  $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(d)$ , mientras que en el lado derecho se reconoce  $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}^*}(s^*, s)(d^*)$  con lo que se concluye el resultado.  $\square$

Cuando el cono  $\mathcal{K}$  es  $\mathcal{C}^2$ -cono reducible, como corolario directo del resultado de Mohammadi et al. [45, Teo. 6.2] se obtiene una caracterización explícita para la función de curvatura como se muestra en el siguiente resultado.

**Corolario 3.3.6** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio que es  $\mathcal{C}^2$ -cono reducible en  $s \in \mathcal{K}$  a un cono  $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^s$  por medio de la función  $\Xi(\cdot)$ . Sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$ , entonces se puede obtener la función de curvatura mediante el cálculo*

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(d) = \begin{cases} 2\langle \mu, \nabla^2\Xi(s)(d, d) \rangle & d \in C_{\mathcal{K}}(s, s^*), \\ +\infty & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}^s$  es la única solución del sistema

$$-s^* = \nabla\Xi(s)^*\mu, \quad \mu \in N_{\mathbb{K}}(\Xi(s)).$$

Para finalizar el estudio de la función de curvatura en esta sección, a continuación se presentan algunos ejemplos donde se ha encontrado su cálculo explícito.

**Ejemplo 4** Consideremos  $\mathcal{K}$  un cono poliedral, y sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$ . Entonces se cumple que

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(d) = \delta_{C_{\mathcal{K}}(s, s^*)}(d).$$

**Ejemplo 5** [45, Ej. 5.8] Consideremos  $\mathcal{Q}_m$  el cono de segundo orden dado por

$$\mathcal{Q}_m := \left\{ s = (\vec{s}, s_0) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} : \|\vec{s}\| \leq s_0 \right\},$$

y sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}(\mathcal{Q}_m)$ . Entonces para  $d = (\vec{d}, d_0) \in C_{\mathcal{Q}_m}(s, s^*)$  se tiene que

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{Q}_m}(s, s^*)(d) = \frac{\|s^*\|}{\|s\|} \left( d_0^2 - \|\vec{d}\|^2 \right).$$

**Ejemplo 6** [75, Ej. 3.7] Consideremos  $\mathbb{S}_+^m$  el cono de las matrices simétricas semidefinidas positivas de dimensión  $m \times m$ , y sea  $(S, S^*) \in \mathcal{M}(\mathbb{S}_+^m)$ . Entonces para  $D \in C_{\mathbb{S}_+^m}(S, S^*)$  se tiene que

$$\mathfrak{C}_{\mathbb{S}_+^m}(S, S^*)(D) = \langle DS^\dagger D, S^* \rangle.$$

### 3.3.2. Caracterización del cono tangente

En esta sección se verá como la función de curvatura, presentada en la Definición 3.3.2, puede ser utilizada para caracterizar el cono tangente de  $\mathcal{M}$ . En efecto, el siguiente teorema es una aplicación directa del Lema 1.5.16, y muestra esta relación mediante la utilización del subdiferencial de la función de curvatura.

**Teorema 3.3.7** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio con  $\mathcal{M}$  el cono de complementariedad asociado a  $\mathcal{K}$ , y sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$ . Se asume además que  $\delta_{\mathcal{K}}$  es dos veces epi-diferenciable en  $s$  para  $s^*$  (o equivalentemente si  $\partial\delta_{\mathcal{K}}$  es proto-diferenciable en  $s$  para  $s^*$ ), entonces*

$$(d, d^*) \in T_{\mathcal{M}}(s, s^*) \iff -d^* \in \partial\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(d).$$

DEMOSTRACIÓN. Primero se puede notar que

$$(x, x^*) \in \mathcal{M} \iff -x^* \in N_{\mathcal{K}}(x) \iff -x^* \in \partial\delta_{\mathcal{K}}(x) \iff (x, -x^*) \in \text{gph } \partial\delta_{\mathcal{K}}.$$

Luego es evidente que

$$(d, d^*) \in T_{\mathcal{M}}(s, s^*) \iff (d, -d^*) \in T_{\text{gph } \partial\delta_{\mathcal{K}}}(s, -s^*),$$

lo cual, por la Definición 1.5.15, corresponde a que  $-d^* \in D(\partial\delta_{\mathcal{K}})(s| - s^*)(d)$ . Por el Lema 1.5.16 esto es equivalente a que

$$-d^* \in \partial\left(\frac{1}{2}d^2\delta_{\mathcal{K}}(s| - s^*)\right)(d).$$

Dado que  $\frac{1}{2}d^2\delta_{\mathcal{K}}(s| - s^*)(d) = \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(d)$ , se obtiene el resultado que concluye el Teorema.  $\square$

**Observación** De la Proposición 3.3.4 se sabe que la función de curvatura es convexa, propia e inferiormente semicontinua. Por lo tanto el subdiferencial empleado en este resultado es simplemente el subdiferencial clásico del Análisis Convexo.

Así como en la caracterización de la proyección es necesario conocer su derivada direccional, en este caso es necesario conocer explícitamente el subdiferencial de la función de curvatura. No obstante, en muchos casos esta función es nula en el cono crítico, e.g., cuando  $\mathcal{K}$  es un cono poliedral, o bien cuando  $s = 0$  o  $s^* = 0$ . El siguiente corolario del Teorema 3.3.7 revela como se simplifica la caracterización del cono tangente en estos casos.

**Corolario 3.3.8** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio con  $\mathcal{M}$  el cono de complementariedad asociado a  $\mathcal{K}$ , y sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$ . Se asume además que  $\delta_{\mathcal{K}}$  es dos veces epi-diferenciable en  $s$  para  $s^*$  (o equivalentemente si  $\partial\delta_{\mathcal{K}}$  es proto-diferenciable en  $s$  para  $s^*$ ). Si la función de curvatura es nula en  $C_{\mathcal{K}}(s, s^*)$ , i.e.,*

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(d) = \delta_{C_{\mathcal{K}}(s, s^*)}(d),$$

entonces

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{M}}(s, s^*) &= \left\{ (d, d^*) \in T_{\mathcal{K}}(s) \times T_{\mathcal{K}^*}(s^*) : s \perp d^*, d \perp s^*, d \perp d^* \right\} \\ &= \left\{ (d, d^*) \in C_{\mathcal{K}}(s, s^*) \times C_{\mathcal{K}^*}(s^*, s) : d \perp d^* \right\}. \end{aligned}$$

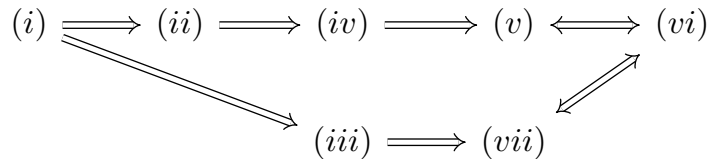
**Observación** En el corolario anterior se puede interpretar el cono tangente a  $\mathcal{M}$  como un tipo de conjunto de complementariedad entre  $C_{\mathcal{K}}(s, s^*)$  y  $C_{\mathcal{K}^*}(s^*, s)$ .

Se ha visto como la segunda epi-diferenciabilidad de  $\delta_{\mathcal{K}}$  (o equivalentemente, la proto-diferenciabilidad de  $\partial\delta_{\mathcal{K}}$ ) es la hipótesis necesaria para que se cumplan los resultados presentados en esta sección. Se puede plantear la siguiente pregunta: ¿Qué tan fácil es que un cono propio  $\mathcal{K}$  cumpla esta hipótesis? Por su definición, se puede ver que  $\partial\delta_{\mathcal{K}}$  es proto-diferenciable en  $s$  para  $-s^* \in \partial\delta_{\mathcal{K}}$  si y sólo si  $\text{gph } \delta_{\mathcal{K}}$  es geoméricamente derivable en  $(s, -s^*)$ . Esto a su vez (bajo cambio de variable) es equivalente a que  $\mathcal{M}$  sea geoméricamente derivable en  $(s, s^*)$ . Estudiar la derivabilidad geométrica de  $\mathcal{M}$  por definición implica conocer de antemano el conjunto  $T_{\mathcal{M}}(s, s^*)$ , lo cual es contradictorio con lo planteado en este capítulo donde se pretende caracterizar dicho conjunto. En la literatura se han presentado diversos resultados los cuales están relacionados (directa e indirectamente) con que  $\mathcal{M}$  sea geoméricamente derivable. El siguiente lema recopila estos resultados y, por lo tanto, da criterios para responder la pregunta.

**Lema 3.3.9** Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio con  $\mathcal{M}$  el cono de complementariedad asociado a  $\mathcal{K}$ , y sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$ . Considere los siguientes enunciados:

- (i)  $\mathcal{K}$  es  $\mathcal{C}^2$ -cono reducible en  $s$  (Def. 1.1.15).
- (ii)  $\mathcal{K}$  es regular de segundo orden en  $s$  (Def. 1.2.5).
- (iii)  $\mathcal{K}$  es parabólicamente derivable en  $s$  para cualquier  $d \in T_{\mathcal{K}}(s)$  y es parabólicamente regular en  $s$  para  $s^*$  (Def. 1.2.3 & Def. 1.5.8).
- (iv) La proyección  $\Pi_{\mathcal{K}}(x)$  es satisface la diferenciabilidad direccional (Def. 1.5.1).
- (v)  $\mathcal{M}$  es geoméricamente derivable en  $(s, s^*)$  (Def. 1.2.3).
- (vi)  $\partial\delta_{\mathcal{K}}$  es proto-diferenciable en  $s$  para  $-s^*$  (Def. 1.5.15)
- (vii)  $\delta_{\mathcal{K}}$  es dos veces epi-diferenciable en  $s$  para  $-s^*$  (Def. 1.5.6)

Entonces se cumplen las siguientes implicancias:



DEMOSTRACIÓN. Primero se puede notar que  $(v) \iff (vi) \iff (vii)$  es directo por el comentario realizado anteriormente. Shapiro demostró [76, Prop. 2.1, Prop. 3.1] que si  $\mathcal{K}$  es  $\mathcal{C}^2$ -cono reducible en  $s$ , entonces es regular de segundo orden en  $s$ , lo cual a su vez implica

que su proyección es direccionalmente diferenciable en todo punto  $x$  tal que  $\Pi_{\mathcal{K}}(x) = s$ . Esto entrega las relaciones  $(i) \implies (ii) \implies (iv)$ .

La implicancia  $(iv) \implies (v)$  fue demostrada separadamente para el cono de segundo orden [12, Prop. 3.1], [13, Prop. 5.2], y para el cono de las matrices semidefinidas positivas [10, Teo. 3.1]. No obstante, la demostración, según el comentario de Ye et al. [14], puede ser extendido a cualquier cono  $\mathcal{K}$ .

La implicancia  $(i) \implies (iii)$  fue explicada en la sección de comentarios de [39, Cap. 13]. Finalmente, la implicancia  $(iii) \implies (vii)$  es uno de los principales resultados de Mohammadi et al. [45]. Con esto se concluye el lema.  $\square$

Con esto no solo se ha presentado la relación entre el cono tangente de  $\mathcal{M}$  con el subdiferencial de la función de curvatura de  $\mathcal{K}$ , si no que también condiciones suficientes para que se cumpla la hipótesis del teorema.

### 3.3.3. Cono tangente por definición

Como último desarrollo sobre el cono tangente, en esta sección se presentan dos resultados muy relacionados entre sí. En primer lugar, si se juntan la Proposición 3.3.5, el Teorema 3.3.7, y la desigualdad de Fenchel-Young (que se torna en igualdad en este caso); se obtiene el siguiente corolario, el cual caracteriza los elementos del cono tangente de  $\mathcal{M}$  mediante una igualdad numérica.

**Corolario 3.3.10** *Sea  $\mathcal{K}$  un cono propio con  $\mathcal{M}$  el cono de complementariedad asociado a  $\mathcal{K}$ , y sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$ . Se asume además que  $\delta_{\mathcal{K}}$  es dos veces epi-diferenciable en  $s$  para  $-s^*$ . Entonces el par  $(d, d^*)$  pertenece al cono tangente  $T_{\mathcal{M}}(s, s^*)$  si y solo si*

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(d) + \mathfrak{C}_{\mathcal{K}^*}(s^*, s)(d^*) = \langle d, -d^* \rangle.$$

**Observación** Se puede notar que no es necesario suponer hipótesis con respecto a la segunda epi-diferenciabilidad de  $(\delta_{\mathcal{K}})^*$ . Esto debido a que si se cumple alguno de los siete enunciados del Lema 3.3.9, entonces  $\delta_{\mathcal{K}}$  es dos veces epi-diferenciable. Luego, por el Lema 1.5.7,  $(\delta_{\mathcal{K}})^*$  también lo es.

En segundo lugar, se presenta por definición la inclusión  $(d, d^*) \in T_{\mathcal{M}}(s, s^*)$ . Esto significa que existe una sucesión de reales  $t_n \rightarrow 0^+$  y sucesiones  $d_n \rightarrow d$ ,  $d_n^* \rightarrow d^*$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$(s + t_n d_n, s^* + t_n d_n^*) \in \mathcal{M},$$

lo cual se puede escribir análogamente como

$$s + t_n d_n \in \mathcal{K}, \quad s^* + t_n d_n^* \in \mathcal{K}^*, \quad \langle s + t_n d_n, s^* + t_n d_n^* \rangle = 0.$$

Utilizando la bilinealidad del producto interno, se puede desarrollar la condición de ortogo-



alidad para obtener la siguiente expresión:

$$\langle s, s^* \rangle + t_n \langle s, d_n^* \rangle + t_n \langle d_n, s^* \rangle + t_n^2 \langle d_n, d_n^* \rangle = 0,$$

la cual, bajo reordenamiento de términos, es igual a

$$\frac{\langle s, d_n^* \rangle}{t_n} + \frac{\langle d_n, s^* \rangle}{t_n} = \langle d_n, -d_n^* \rangle. \quad (3.5)$$

Dado que para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tienen las inclusiones

$$s + t_n d_n \in \mathcal{K}, \quad s^* + t_n d_n^* \in \mathcal{K}^*,$$

en (3.5) se identifican los cocientes que definen las funciones de curvatura  $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)$  y  $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}^*}(s^*, s)$ . Con esto se puede notar que si se toma límite en (3.5), se obtiene la igualdad proveniente del Corolario 3.3.10.

Este resultado es atractivo porque muestra cómo Fenchel-Young para las funciones de curvatura se encontraba escondido dentro de la definición del cono tangente de  $\mathcal{M}$ . Este resultado será el primer paso para la caracterización del conjunto tangente de segundo orden de  $\mathcal{M}$  a través de la definición de una nueva función de curvatura.

## 3.4. Conjunto tangente de segundo orden del cono de complementariedad

El objetivo de esta sección es encontrar una forma alternativa para la caracterización del conjunto tangente de segundo orden de  $\mathcal{M}$  de una forma análoga a lo encontrado para el cono tangente de  $\mathcal{M}$ . La última subsección en la sección anterior motiva investigar lo que sucede dentro de la definición del conjunto tangente de segundo orden de  $\mathcal{M}$ .

### 3.4.1. Conjunto tangente de segundo orden por definición

Se comienza estudiando el conjunto tangente de segundo orden de  $\mathcal{M}$  por definición. Sean  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$  y  $(d, d^*) \in T_{\mathcal{M}}(s, s^*)$ , se estudia la inclusión  $(w, w^*) \in T_{\mathcal{M}}^2((s, s^*); (d, d^*))$ . Esto significa que existen sucesiones  $t_n \downarrow 0$ ,  $w_n \rightarrow w$ ,  $w_n^* \rightarrow w^*$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\left( s + t_n d + \frac{1}{2} t_n^2 w_n, s^* + t_n d^* + \frac{1}{2} t_n^2 w_n^* \right) \in \mathcal{M}.$$

La condición de ortogonalidad para este caso es

$$\left\langle s + t_n d + \frac{1}{2} t_n^2 w_n, s^* + t_n d^* + \frac{1}{2} t_n^2 w_n^* \right\rangle = 0,$$

la cual puede ser expandida a la siguiente expresión al utilizar que  $s \perp s^*$  pues pertenecen a  $\mathcal{M}$ , y que  $d \perp s^*$ ,  $s \perp d^*$  por pertenecer a  $C_{\mathcal{K}}(s, s^*)$  y  $C_{\mathcal{K}^*}(s^*, s)$  respectivamente.

$$\begin{aligned} & \langle \cancel{s}, \cancel{s^*} \rangle^0 + t_n \langle \cancel{s}, \cancel{d^*} \rangle^0 + t_n \langle \cancel{d}, \cancel{s^*} \rangle^0 + \frac{1}{2} t_n^2 \langle s, w_n^* \rangle + \frac{1}{2} t_n^2 \langle w_n, s^* \rangle \\ & + t_n^2 \langle d, d^* \rangle + \frac{1}{2} t_n^3 \langle d, w_n^* \rangle + \frac{1}{2} t_n^3 \langle w_n, d^* \rangle + \frac{1}{4} t_n^4 \langle w_n, w_n^* \rangle = 0. \end{aligned}$$

Reordenando los términos de la expresión se obtiene

$$\frac{2}{t_n^2} \langle s, w_n^* \rangle + \frac{2}{t_n^2} \langle w_n, s^* \rangle + \frac{4}{t_n^2} \langle d, d^* \rangle + \frac{2}{t_n} \langle d, w_n^* \rangle + \frac{2}{t_n} \langle w_n, d^* \rangle = \langle w_n, -w_n^* \rangle.$$

Como  $(d, d^*) \in T_{\mathcal{M}}(s, s^*)$ , utilizando el Corolario 3.3.10 se puede reemplazar el término  $\langle d, d^* \rangle$  por la suma de las funciones de curvatura (con signo negativo). Se identifica nuevamente lo que será un análogo a la igualdad de Fenchel-Young en el límite.

$$\frac{2\langle w_n, s^* + t_n d^* \rangle - 4\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(d)}{t_n^2} + \frac{2\langle s + t_n d, w_n^* \rangle - 4\mathfrak{C}_{\mathcal{K}^*}(s^*, s)(d^*)}{t_n^2} = \langle w_n, -w_n^* \rangle. \quad (3.6)$$

$\downarrow$   
 $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^2(s, s^*; d, d^*)$

$\downarrow$   
 $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}^*}^2(s^*, s; d^*, d)$

Reconociendo la analogía entre los resultado en (3.5), y en (3.6), se puede proponer un candidato para lo que serán estas funciones de curvatura de segundo orden, las cuales serán denotadas por  $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^2(s, s^*; d, d^*)$  y  $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}^*}^2(s^*, s; d^*, d)$ .

Adicionalmente, desde la Proposición 1.5.3 se conoce la relación entre la (primera) subderivada y el cono tangente, dada por  $d\delta_{\mathcal{K}}(s)(d) = \delta_{T_{\mathcal{K}}(s)}(d)$ . Con el Lema 1.5.16, se conoce que la segunda subderivada se relaciona con el cono tangente  $T_{\mathcal{M}}$  por medio de la función de curvatura. Por otro lado, se sabe que la subderivada parabólica cumple que  $d_p \delta_{\mathcal{K}}(s)(d)(w) = \delta_{T_{\mathcal{K}}^2(s; d)}(w)$  (Prop. 1.5.10). Siguiendo la analogía, se busca encontrar una “segunda subderivada parabólica”, la cual pueda ser relacionada con la función de curvatura de segundo orden. El resultado esperado es, con propiedades similares a las utilizadas en la sección anterior, escribir el conjunto tangente de segundo orden para  $\mathcal{M}$  a partir de la función de curvatura de segundo orden.

### 3.4.2. Segunda subderivada parabólica

En esta sección se entrega una propuesta para la definición de la segunda subderivada parabólica, junto con sus principales propiedades. Para entregar esta definición, primero es necesario definir una extensión para la tercera derivada, la cual se presenta a continuación como extensión directa de la segunda subderivada sin mención de  $s^*$ .

**Definición 3.4.1** (Tercera subderivada) *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una función, sea  $s \in \mathbb{R}^n$  un punto tal que  $f(s)$  es finito. La tercera subderivada de  $f$  en  $s$  se define por*

$$d^3 f(s)(d) := \liminf_{\substack{\tau \downarrow 0 \\ d' \rightarrow d}} \frac{f(s + \tau d') - f(s) - \tau d f(s)(d') - \frac{1}{2} \tau^2 d^2 f(s)(d')}{\frac{1}{6} \tau^3}.$$

Existen muchas formas distintas para generalizar la tercera derivada y, por lo tanto, muchas formas para definir terceras subderivadas (por ejemplo, al considerar direcciones  $s^*$ ). La definición anterior es escogida por tres motivos: En primer lugar, esta no será estudiada más a fondo en este trabajo, ya que solo será necesaria para la construcción de la segunda subderivada parabólica. En segundo lugar, la tercera subderivada generaliza correctamente la tercera derivada en el caso que la función sea de clase  $\mathcal{C}^3$ . Por último, la tercera subderivada será nula en el caso que es de interés en este trabajo, que es cuando la función  $f$  sea la indicatriz de un cono propio  $\mathcal{K}$ . La siguiente proposición muestra el cumplimiento del segundo y tercer punto.

**Proposición 3.4.2** *Si  $f$  es una función de clase  $\mathcal{C}^3$ , entonces*

$$d^3 f(s)(d) = f^{(3)}(s)(d, d, d).$$

*Además, al evaluar la tercera subderivada en la función indicatriz de un cono propio  $\mathcal{K}$  se tiene que*

$$d^3 \delta_{\mathcal{K}}(s)(d) = \delta_{T_{\mathcal{K}}(s)}(d).$$

DEMOSTRACIÓN. Para la primera parte se realiza una expansión de Taylor para la función  $f$  en torno a  $s$  como sigue a continuación.

$$f(s + \tau d') = f(s) + \tau \langle \nabla f(s), d' \rangle + \frac{\tau^2}{2} \nabla^2 f(s)(d', d') + \frac{\tau^3}{6} f^{(3)}(s)(d', d', d') + O(\tau^3)$$

Como se cumple que  $df(s)(d') = \langle \nabla f(s), d' \rangle$ , y que  $d^2 f(s)(d') = \nabla^2 f(s)(d', d')$ , entonces

$$d^3 f(s|s^*)(d) = \liminf_{\substack{\tau \downarrow 0 \\ d' \rightarrow d}} \frac{\frac{\tau^3}{6} f^{(3)}(s)(d', d', d') + O(\tau^3)}{\frac{1}{6} \tau^3} = f^{(3)}(s)(d, d, d).$$

Lo que concluye el primer punto. Para el segundo, se reemplaza la función en la Definición 3.4.1 para obtener

$$d^3 \delta_{\mathcal{K}}(s)(d) = \liminf_{\substack{\tau \downarrow 0 \\ d' \rightarrow d}} \frac{\delta_{\mathcal{K}}(s + \tau d') - \delta_{\mathcal{K}}(s) - \tau d \delta_{\mathcal{K}}(s)(d') - \frac{1}{2} \tau^2 d^2 \delta_{\mathcal{K}}(s)(d')}{\frac{1}{6} \tau^3}.$$

Basta replicar el mismo desarrollo realizado en la Proposición 1.5.5, utilizando que  $d \delta_{\mathcal{K}}(s)(\cdot)$  y  $d^2 \delta_{\mathcal{K}}(s)(\cdot)$  son idénticas a la función  $\delta_{T_{\mathcal{K}}(s)}(\cdot)$ . Con esto se concluye toda la Proposición.  $\square$

Se presenta a continuación la propuesta de segunda subderivada parabólica. Este es uno de los resultados principales del capítulo, desde el cual se derivará la caracterización del conjunto tangente de segundo orden de  $\mathcal{M}$ .

**Definición 3.4.3** (Segunda subderivada parabólica) Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una función, sean  $s, s^*, d, d^* \in \mathbb{R}^n$  tal que  $f(s)$ ,  $d^2 f(s|s^*)(d)$ , y  $d^3 f(s)(d)$  son finitos. La segunda subderivada parabólica de  $f$  en  $(s, s^*)$  relativa a  $(d, d^*)$  viene dada por la función

$$d_{p,\tau}^2 f(s|s^*)(d|d^*)(w) := \liminf_{\substack{\tau \downarrow 0 \\ w' \rightarrow w}} \Delta_{p,\tau}^2 f(s|s^*)(d|d^*)(w'), \quad (3.7)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta_{p,\tau}^2 f(s|s^*)(d|d^*)(w) &:= \frac{f(s + \tau d + \frac{1}{2}\tau^2 w) - f(s) - \tau \langle d, s^* \rangle - \frac{1}{2}\tau^2 \langle w, s^* \rangle}{\frac{1}{8}\tau^4} \\ &+ \frac{-\frac{1}{2}\tau^3 \langle w, d^* \rangle - \frac{1}{2}\tau^2 d^2 f(s|s^*)(d) - \frac{1}{6}\tau^3 d^3 f(s)(d)}{\frac{1}{8}\tau^4}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Además se dice que  $f$  es dos veces parabólicamente epi-diferenciable en  $(s, s^*)$  para  $(d, d^*)$  si las funciones  $\Delta_{p,\tau}^2 f(s|s^*)(d|d^*)$  epi-convergen a  $d_{p,\tau}^2 f(s|s^*)(d|d^*)$  cuando  $\tau \downarrow 0$ . Si además la función  $d_{p,\tau}^2 f(s|s^*)(d|d^*)$  es propia,  $f$  se dice ser propiamente dos veces parabólicamente epi-diferenciable en  $(s, s^*)$  para  $(d, d^*)$ .

A primera vista puede parecer que la segunda subderivada parabólica posee una definición complicada, e incluso carente de sentido. No obstante, el siguiente lema muestra lo que ocurre cuando la función  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^3$ , y como este resultado es consistente con los obtenidos en términos de las otras subderivadas (Prop. 1.5.3, 1.5.5 y 1.5.10).

**Lema 3.4.4** Sea  $f$  una función de clase  $\mathcal{C}^3$  en  $s$ , entonces

$$d_{p,\tau}^2 f(s|\nabla f(s))(d|\nabla^2 f(s)d)(w) = 2f^{(3)}(s)(d, d, w) + \nabla^2 f(s)(w, w). \quad (3.9)$$

DEMOSTRACIÓN. Basta realizar una expansión de Taylor para la función  $f$  en torno a  $s$  como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} &f\left(s + \tau d + \frac{1}{2}\tau^2 w'\right) \\ &= f(s) + \left\langle \nabla f(s), \tau d + \frac{1}{2}\tau^2 w' \right\rangle + \frac{1}{2}\nabla^2 f(s)\left(\tau d + \frac{1}{2}\tau^2 w', \tau d + \frac{1}{2}\tau^2 w'\right) \\ &\quad + \frac{1}{6}f^{(3)}(s)\left(\tau d + \frac{1}{2}\tau^2 w', \tau d + \frac{1}{2}\tau^2 w', \tau d + \frac{1}{2}\tau^2 w'\right) + O(\tau^4), \\ &= f(s) + \tau \langle \nabla f(s), d \rangle + \frac{1}{2}\tau^2 \langle \nabla f(s), w' \rangle + \frac{1}{2}\tau^2 \nabla^2 f(s)(d, d) + \frac{1}{2}\tau^3 \nabla^2 f(s)(d, w') \\ &\quad + \frac{1}{8}\tau^4 \nabla^2 f(s)(w', w') + \frac{1}{6}\tau^3 f^{(3)}(s)(d, d, d) + \frac{1}{4}\tau^4 f^{(3)}(s)(d, d, w') + O(\tau^4). \end{aligned}$$

Al utilizar que  $s^* = \nabla f(s)$  y  $d^* = \nabla^2 f(s)d$  y que  $f$  es tres veces continuamente diferenciable

en  $s$ , se obtienen las siguientes identidades.

$$\begin{aligned}\langle d, s^* \rangle &= \langle d, \nabla f(s) \rangle, \\ \langle w', s^* \rangle &= \langle w', \nabla f(s) \rangle, \\ \langle w', d^* \rangle &= \nabla^2 f(s)(d, w'), \\ d^2 f(s|s^*)(d) &= \nabla^2 f(s)(d, d), \\ d^3 f(s)(d) &= f^{(3)}(s)(d, d, d).\end{aligned}$$

Reemplazando en la definición de la subderivada parabólica de segundo orden y utilizando la expansión de Taylor para el primer término, se puede apreciar como la mayoría de los términos son iguales, salvo su signo. Luego de eliminar los términos que se cancelan, la expresión (3.7) se simplifica a la siguiente igualdad.

$$\begin{aligned}d_p^2 f(s|s^*)(d|d^*)(w) &= \liminf_{\substack{\tau \downarrow 0 \\ w' \rightarrow w}} \frac{\frac{1}{4}\tau^4 f^{(3)}(s)(d, d, w') + \frac{1}{8}\tau^4 \nabla^2 f(s)(w', w') + O(\tau^4)}{\frac{1}{8}\tau^4} \\ &= 2f^{(3)}(s)(d, d, w) + \nabla^2 f(s)(w, w),\end{aligned}$$

lo que concluye con el lema. □

**Observación** El resultado anterior revela una razón que sustenta el nombre de la segunda subderivada parabólica. El resultado (3.9) coincide con la derivada con respecto a  $s$  de la subderivada parabólica de parámetros  $s$  y  $d$ , evaluada en  $w$ . En otras palabras, cuando  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^3$  en  $s$ :

$$\begin{aligned}d_p^2 f\left(s \mid \nabla f(s)\right)\left(d \mid \nabla^2 f(s)d\right)(w) &= 2f^{(3)}(s)(d, d, w) + \nabla^2 f(s)(w, w) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \nabla^2 f(s)(d, d) + \langle \nabla f(s), w \rangle \right)(w) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left( d_p f(s)(d) \right)(w).\end{aligned}$$

Esto insinúa que la definición y nombre de la segunda subderivada parabólica tiene sentido pues, de forma análoga a lo que sucede con la subderivada y la segunda subderivada, la segunda subderivada parabólica puede ser entendida como la “derivada” de la (primera) subderivada parabólica.

La siguiente proposición entrega dos propiedades clave que cumple la segunda subderivada parabólica. Por un lado muestra que (igual que en todos los demás casos) es inferiormente semicontinua. Por otro, entrega una cota para su dominio.

**Proposición 3.4.5** *La segunda subderivada parabólica  $d_p^2 f(s|s^*)(d|d^*)$  siempre es una función inferiormente semicontinua. Si se consideran parámetros  $s, s^*, d, d^*$  tal que las funciones  $df(s)$ ,  $d^2 f(s|s^*)$ ,  $d_p f(s)(d)$  y  $d_p^2 f(s|s^*)(d|d^*)$  son propias, entonces el dominio de la segunda*

subderivada parabólica cumple

$$\text{dom } d_p^2 f(s|s^*)(d|d^*) \subset \left\{ w : d_p f(s)(d)(w) - \langle w, s^* \rangle = d^2 f(s|s^*)(d), \right. \\ \left. \liminf_{\substack{\tau \downarrow 0 \\ w' \rightarrow w}} \Theta_\tau(w') = \langle w, d^* \rangle + \frac{1}{3} d^3 f(s)(d) \right\},$$

donde la función  $\Theta_\tau$  está definida por el cociente

$$\Theta_\tau(w') := \frac{\Delta_{p,\tau} f(s)(d)(w') - \langle w', s^* \rangle - d^2 f(s|s^*)(d)}{\tau}.$$

DEMOSTRACIÓN. La semicontinuidad inferior se obtiene directamente de la expresión debido a que la segunda subderivada parabólica corresponde a un epi-límite inferior [39, Prop. 7.4]. Para el segundo punto se consideran parámetros  $s, s^*, d, d^*$  tal que  $df(s), d^2 f(s|s^*), d_p f(s)(d)$  y  $d_p^2 f(s|s^*)(d|d^*)$  son funciones propias. Por la definición de segunda subderivada parabólica (Def. 3.4.3) es directo concluir que para que la función sea finita, se debe cumplir que

$$d \in \text{dom } d^2 f(s|s^*) \cap \text{dom } d^3 f(s).$$

Del resultado de Rockafellar & Wets [39, Prop. 13.5], se cumple que

$$\text{dom } d^2 f(s|s^*) \subset \{d : df(s)(d) = \langle d, s^* \rangle\}.$$

Por lo que se pueden reordenar los términos en la definición de segunda subderivada parabólica, junto con utilizar que  $\langle d, s^* \rangle = df(s)(d)$ , y que  $\Delta_{p,\tau} f(s)(d)(w)$  es el cociente diferencial proveniente de la definición de subderivada parabólica, para obtener la siguiente caracterización.

$$\Delta_{p,\tau}^2 f(s|s^*)(d|d^*)(w) = 8\tau^{-4} \left( \frac{1}{2} \tau^2 \Delta_{p,\tau} f(s)(d)(w) - \frac{1}{2} \tau^2 \langle w, s^* \rangle - \frac{1}{2} \tau^2 d^2 f(s|s^*)(d) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \tau^3 \langle w, d^* \rangle - \frac{1}{6} \tau^3 d^3 f(s)(d) \right) \\ = \frac{\Delta_{p,\tau} f(s)(d)(w) - \langle w, s^* \rangle - d^2 f(s|s^*)(d)}{\tau} - \frac{\langle w, d^* \rangle - \frac{1}{3} d^3 f(s)(d)}{\frac{1}{4}\tau}.$$

Se consideran sucesiones  $w^\nu \rightarrow w$  y  $\tau^\nu \downarrow 0$  tales que, sin pérdida de generalidad, la sucesión  $\Delta_{p,\tau^\nu}^2 f(s|s^*)(d|d^*)(w^\nu)$  converge a un valor  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ , y que por su lado,  $\Delta_{p,\tau^\nu} f(s)(d)(w^\nu)$  converge a algún  $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ . El valor  $d_p^2 f(s|s^*)(d|d^*)(w)$  es por definición el menor  $\alpha$  que se puede obtener, mientras que  $d_p f(s)(d)(w)$  es el menor valor  $\beta$ . Entonces  $\alpha$  viene dado por el límite

$$\alpha = \lim_{\nu} (4/\tau^\nu) \left( \frac{\Delta_{p,\tau^\nu} f(s)(d)(w^\nu) - \langle w^\nu, s^* \rangle - d^2 f(s|s^*)(d)}{\tau^\nu} - \langle w^\nu, d^* \rangle - \frac{1}{3} d^3 f(s)(d) \right),$$

de donde es directo notar por álgebra de límites que

$$\Delta_{p,\tau^\nu} f(s)(d)(w^\nu) - \langle w^\nu, s^* \rangle - d^2 f(s|s^*)(d) \longrightarrow \beta - \langle w, s^* \rangle - d^2 f(s|s^*)(d).$$

Se tiene que la convergencia  $\langle w^\nu, d^* \rangle \rightarrow \langle w, d^* \rangle \in \mathbb{R}$ , y que el valor de  $d^3 f(s)(d)$  es constante y finito. Como  $\tau^\nu \rightarrow 0$ , si el denominador es positivo, entonces el cociente tenderá a infinito y con ello toda la expresión. Escrito de otro modo,

$$\beta - \langle w, s^* \rangle - d^2 f(s|s^*)(d) > 0 \implies \alpha = +\infty.$$

Por lo tanto, para que se cumpla que  $d_p^2 f(s|s^*)(d|d^*)(w) < +\infty$  se debe cumplir que

$$\beta - \langle w, s^* \rangle - d^2 f(s|s^*)(d) \leq 0,$$

y como  $d_p f(s)(d)(w)$  es el menor de los  $\beta$ , implica que

$$d_p f(s)(d)(w) - \langle w, s^* \rangle - d^2 f(s|s^*)(d) \leq 0.$$

Esto junto con la Proposición 1.5.11 entregan la siguiente igualdad que deben cumplir la subderivada parabólica con la segunda subderivada.

$$d_p f(s)(d)(w) - \langle w, s^* \rangle - d^2 f(s|s^*)(d) = 0.$$

Adicionalmente, para que el valor de  $\alpha$  sea finito la sucesión

$$\frac{\Delta_{p,\tau^\nu} f(s)(d)(w^\nu) - \langle w^\nu, s^* \rangle - d^2 f(s|s^*)(d)}{\tau^\nu}$$

debe converger a un valor finito (el cual se denominará  $\gamma \in \mathbb{R}$ ) ya que si no, bajo el argumento anterior, toda la expresión diverge. Repitiendo el análisis para el último conjunto de valores, se debe cumplir que

$$\langle w^\nu, d^* \rangle \longrightarrow \gamma - \frac{1}{3} d^3 f(s)(d),$$

o equivalentemente

$$\langle w, d^* \rangle = \gamma - \frac{1}{3} d^3 f(s)(d).$$

Finalmente, cuando  $\beta$  coincide con  $d_p f(s)(d)(w)$ , se obtiene que

$$\liminf_{\substack{\tau \downarrow 0 \\ w' \rightarrow w}} \Theta_\tau(w') = \langle w, d^* \rangle + \frac{1}{3} d^3 f(s)(d),$$

lo que concluye con la proposición. □

La segunda subderivada parabólica permite extender la noción de regularidad parabólica de conjuntos (Def. 1.5.8), la cual se define a partir de la segunda subderivada de la función indicadora.

**Definición 3.4.6** (Regularidad parabólica de segundo orden) *Un conjunto no vacío  $C \subset \mathbb{R}^n$  se dice dos veces parabólicamente regular en  $s \in C$  para  $s^*, d, d^* \in \mathbb{R}^n$  si para cualquier*

$w \in \mathbb{R}^n$  con  $d_p^2 \delta_C(s|s^*)(d|d^*)(w) < \infty$  entonces entre todas las sucesiones  $t_n \downarrow 0$  y  $w_n \rightarrow w$  que cumplen que

$$\Delta_{p,t_n}^2 \delta_C(s|s^*)(d|d^*)(w_n) \rightarrow d_p^2 \delta_C(s|s^*)(d|d^*)(w) \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

existen tales sucesiones que además cumplen que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|w_n - w\|}{t_n^2} < \infty.$$

Dos hipótesis fundamentales para los próximos resultados se presentan a continuación.

**Definición 3.4.7** Se dice que la función  $f$  satisface la hipótesis (H1) en  $s, s^*, d, d^*$  si

$$d_p^2 f(s|s^*)(d|d^*), d_p^2 f^*(s^*|s)(d^*|d) \text{ son funciones propias.} \quad (\text{H1})$$

Además se dice que la función  $f$  satisface la hipótesis (H2) en  $s, s^*, d, d^*$  si se cumple que

$$d^3 f(s)(d) = 0 = d^3 f^*(s^*)(d^*). \quad (\text{H2})$$

**Observación** La hipótesis (H2) siempre se satisface cuando se considera la función indicadora  $f = \delta_K$ .

Otra propiedad importante es cuando la función  $f$  es convexa. En dicho caso, su segunda subderivada parabólica (bajo segunda epi-diferenciabilidad) también es convexa.

**Proposición 3.4.8** Para cualquier función propia y convexa  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , y parámetros  $(s, s^*) \in \text{gph } \partial f$ ,  $(d, d^*) \in \text{gph } \partial \left( \frac{1}{2} d^2 f(s|s^*) \right)$ . Entonces si  $f$  es dos veces parabólicamente epi-diferenciable en  $(s, s^*)$  para  $(d, d^*)$ , entonces  $d_p^2 f(s|s^*)(d|d^*)$  también es una función convexa.

DEMOSTRACIÓN. Que  $f$  sea dos veces parabólicamente epi-diferenciable en  $(s, s^*)$  para  $(d, d^*)$  significa que  $\Delta_{p,\tau}^2 f(s|s^*)(d|d^*) \xrightarrow{e} d_p^2 f(s|s^*)(d|d^*)$ . Se deduce la convexidad de  $d_p^2 f(s|s^*)(d|d^*)$  debido a que el epi-límite de funciones convexas es una función convexa [39, Teo. 7.17].  $\square$

De forma análoga a la segunda subderivada (Prop. 1.5.7), el siguiente teorema generaliza la relación entre la segunda subderivada parabólica y su conjugada de Fenchel.

**Teorema 3.4.9** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una función inferiormente semicontinua, propia y convexa, y sean  $(s, s^*) \in \text{gph } \partial f$ ,  $(d, d^*) \in \text{gph } \partial \left( \frac{1}{2} d^2 f(s|s^*) \right)$  tal que  $f$  cumple la hipótesis (H2) en  $s, s^*, d, d^*$ . Entonces  $f$  es propiamente dos veces parabólica epi-diferenciable en  $(s, d)$  para  $(s^*, d^*)$  si y solo si  $f^*$  es propiamente dos veces parabólica epi-diferenciable en  $(s^*, d^*)$  para  $(s, d)$ . En ese caso se cumple la relación de conjugada

$$\frac{1}{2} d_p^2 f(s|s^*)(d|d^*) \xleftrightarrow{*} \frac{1}{2} d_p^2 f^*(s^*|s)(d^*|d)$$



DEMOSTRACIÓN. Se definen las funciones  $\varphi_0 := \frac{1}{2}d_p^2 f(s|s^*)(d|d^*)$  y  $\psi_0 := \frac{1}{2}d_p^2 f^*(s^*|s)(d^*|d)$ , y para  $\tau > 0$  se definen

$$\begin{aligned}\varphi_\tau(w) &:= \frac{1}{2}\Delta_{p,\tau}^2 f(s|s^*)(d|d^*)(w), \\ \psi_\tau(w) &:= \frac{1}{2}\Delta_{p,\tau}^2 f^*(s^*|s)(d^*|d)(w).\end{aligned}$$

Así para todo  $\tau > 0$ , las funciones  $\varphi_\tau$  y  $\psi_\tau$  son inferiormente semicontinuas, propias y convexas. Además se cumple que  $\varphi_0 = \text{e-lim inf}_{\tau \downarrow 0} \varphi_\tau$  y  $\psi_0 = \text{e-lim inf}_{\tau \downarrow 0} \psi_\tau$ . Al aplicar transformada de Legendre-Fenchel a la función  $\varphi_\tau$  se obtiene

$$\begin{aligned}\varphi_\tau^*(w^*) &= \sup_{w \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle w, w^* \rangle - \varphi_\tau(w) \right\} \\ &= 4\tau^{-4} \sup_{w \in \mathbb{R}^n} \left\{ \left\langle \frac{1}{2}\tau^2 w, \frac{1}{2}\tau^2 w^* \right\rangle - f\left(s + \tau d + \frac{1}{2}\tau^2 w\right) + f(s) + \langle \tau d, s^* \rangle + \left\langle \frac{1}{2}\tau^2 w, s^* \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \frac{1}{2}\tau^2 w, \tau d^* \right\rangle + \frac{1}{2}\tau^2 d^2 f(s|s^*)(d) + \frac{1}{6}d^3 f(s)(d) \right\}\end{aligned}$$

Como se tiene que  $(s, s^*) \in \text{gph } \partial f$  y que  $(d, d^*) \in \text{gph } \partial \left(\frac{1}{2}d^2 f(s|s^*)\right)$ , se puede utilizar la caracterización del subdiferencial vía igualdad de Fenchel-Young, i.e.,

$$\begin{aligned}f(s) &= \langle s, s^* \rangle - f^*(s^*), \\ \frac{1}{2}\tau^2 d^2 f(s|s^*)(d) &= \langle \tau d, \tau d^* \rangle - \frac{1}{2}\tau^2 d^2 f^*(s^*|s)(d^*).\end{aligned}$$

Adicionalmente la hipótesis (H2) permite cambiar el término correspondiente sin afectar el resultado de la igualdad. Entonces, reemplazando términos se obtiene

$$\begin{aligned}\varphi_\tau^*(w^*) &= 4\tau^{-4} \sup_{w \in \mathbb{R}^n} \left\{ \left\langle \frac{1}{2}\tau^2 w, \frac{1}{2}\tau^2 w^* \right\rangle - f\left(s + \tau d + \frac{1}{2}\tau^2 w\right) + \langle s, s^* \rangle - f^*(s^*) + \langle \tau d, s^* \rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \frac{1}{2}\tau^2 w, s^* \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2}\tau^2 w, \tau d^* \right\rangle + \langle \tau d, \tau d^* \rangle - \frac{1}{2}\tau^2 d^2 f^*(s^*|s)(d^*) - \frac{1}{6}d^3 f^*(s^*)(d^*) \right\} \\ &= 4\tau^{-4} \sup_{w \in \mathbb{R}^n} \left\{ \left\langle s + \tau d + \frac{1}{2}\tau^2 w, s^* + \tau d^* + \frac{1}{2}\tau^2 w^* \right\rangle - f\left(s + \tau d + \frac{1}{2}\tau^2 w\right) - f^*(s^*) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\tau^2 d^2 f^*(s^*|s)(d^*) - \frac{1}{6}d^3 f^*(s^*)(d^*) - \langle s, \tau d^* \rangle - \left\langle s, \frac{1}{2}\tau^2 w^* \right\rangle - \left\langle \tau d, \frac{1}{2}\tau^2 w^* \right\rangle \right\}\end{aligned}$$

$$= 4\tau^{-4} \left\{ f^* \left( s^* + \tau d^* + \frac{1}{2} \tau^2 w^* \right) - f^*(s^*) - \frac{1}{2} \tau^2 d^2 f^*(s^*|s)(d^*) - \frac{1}{6} d^3 f^*(s^*)(d^*) \right. \\ \left. - \langle s, \tau d^* \rangle - \left\langle s, \frac{1}{2} \tau^2 w^* \right\rangle - \left\langle \tau d, \frac{1}{2} \tau^2 w^* \right\rangle \right\} = \psi_\tau(w^*).$$

Se puede replicar el argumento usando que  $f^{**} = f$  y que  $(\frac{1}{2}d^2 f(s|s^*))^{**} = \frac{1}{2}d^2 f(s|s^*)$  para obtener que  $\psi_\tau^* = \varphi_\tau$ . Que  $f$  sea propiamente dos veces parabólica epi-diferenciable en  $(s, d)$  para  $(s^*, d^*)$  es lo mismo a que  $\varphi_\tau \xrightarrow{e} \varphi_0$  (y es propia) cuando  $\tau \downarrow 0$ . Del mismo modo  $f^*$  es propiamente dos veces parabólica epi-diferenciable corresponde a que  $\psi_\tau \xrightarrow{e} \psi_0$  (propia) cuando  $\tau \downarrow 0$ . Esas condiciones son equivalentes porque la epi-convergencia se preserva bajo transformada de Legendre-Fenchel [39, Teo. 11.34], lo cual concluye el resultado.  $\square$

Faltan dos ingredientes para replicar la caracterización del cono tangente (Teo. 3.3.7) pero ahora para el conjunto tangente de segundo orden. Por un lado aún no se ha verificado que la segunda subderivada parabólica de la función  $\delta_K$  coincide con la función de curvatura encontrada en (3.6) (lo cual se desarrolla en la Sección 3.4.4). Por otro lado es necesaria encontrar una relación similar al Lema 1.5.16, pero en este caso con la segunda subderivada parabólica.

### 3.4.3. Extensión del teorema de Do

En esta sección se extiende el resultado del Lema 1.5.16 en términos de la segunda subderivada parabólica, para extender también el Teorema 3.3.7. El siguiente Lema muestra la relación entre los cocientes diferenciales que componen la segunda subderivada parabólica con el de la derivada gráfica de segundo orden.

**Lema 3.4.10** (Relación de cocientes) *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $s$  tal que  $f$  sea finita, y cualquier  $s^* \in \partial f(s)$ . Entonces para todo  $\tau > 0$  se cumple que*

$$\partial \left( \frac{1}{2} \Delta_{p,\tau}^2 f(s|s^*)(d|d^*) \right) = (\Delta_\tau^2 \partial f)(s|s^*)(d|d^*),$$

donde  $\Delta_{p,\tau}^2 f(s|s^*)(d|d^*)$  es el cociente diferencial de la Ecuación 3.8 y

$$(\Delta_\tau^2 \partial f)(s|s^*)(d|d^*)(w) := \frac{\partial f(s + \tau d + \frac{1}{2} \tau^2 w) - s^* - \tau d^*}{\frac{1}{2} \tau^2},$$

previamente presentado en la Definición 1.5.15.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\tau > 0$  fijo y se considera la función

$$\varphi(w) := \frac{1}{2} \Delta_{p,\tau}^2 f(s|s^*)(d|d^*)(w).$$

Considerando la Definición 3.8, es claro que

$$\begin{aligned}\partial\varphi(w) &= 4\tau^{-4} \left[ \frac{1}{2}\tau^2\partial f \left( s + \tau d + \frac{1}{2}\tau^2 w \right) - \frac{1}{2}\tau^2 s^* - \frac{1}{2}\tau^3 d^* \right] \\ &= 2\tau^{-2} \left[ \partial f \left( s + \tau d + \frac{1}{2}\tau^2 w \right) - s^* - \tau d^* \right] \\ &= \left( \Delta_\tau^2 \partial f \right) (s|s^*)(d|d^*)(w),\end{aligned}$$

lo que concluye el resultado.  $\square$

El lema recién presentado es una versión primitiva de la versión extendida del resultado de Do, la cual se presenta a continuación. Este resultado relaciona la segunda subderivada parabólica con la derivada gráfica de segundo orden por medio del subdiferencial.

**Teorema 3.4.11** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una función convexa, propia e inferiormente semicontinua. Sean  $s \in \mathbb{R}^n$ ,  $s^* \in \partial f(s)$ , y sean  $d \in \mathbb{R}^n$ ,  $d^* \in \partial \left( \frac{1}{2}d^2 f(s|s^*) \right) (d)$  tal que  $f$  satisface (H1) en  $s, s^*, d, d^*$ . Entonces el mapeo  $\partial f$  es dos veces proto-diferenciable en  $(s, s^*)$  para  $(d, d^*)$  si y solo si  $f$  es dos veces parabólicamente epi-diferenciable en  $(s, s^*)$  para  $(d, d^*)$ , y se cumple que*

$$D^2 (\partial f) (s|s^*)(d|d^*) = \partial \left( \frac{1}{2}d_p^2 f(s|s^*)(d|d^*) \right). \quad (3.10)$$

**Observación** Para motivar la demostración del Teorema, se presenta a continuación la igualdad cuando la función  $f$  es tres veces continuamente diferenciable. Sea  $f$  de clase  $\mathcal{C}^3$  y sean  $s^* = \nabla f(s)$  y  $d^* = \nabla^2 f(s)d$ . En el lado izquierdo se utiliza que  $\partial f \equiv \{\nabla f\}$ , y que  $\nabla f$  es de clase  $\mathcal{C}^2$ , con lo que se puede utilizar la Proposición 1.5.20. Se obtiene en el lado izquierdo que

$$D^2 (\partial f) (s|s^*)(d|d^*)(w) = f^{(3)}(s)(d, d, \cdot) + \nabla^2 f(s)(w, \cdot).$$

Por el lado derecho, utilizando (3.9) se obtiene que

$$\partial \left( \frac{1}{2}d_p^2 f(s|s^*)(d|d^*) \right) (w) = \nabla_w \left( \frac{1}{2} \left[ 2f^{(3)}(s)(d, d, w) + \nabla^2 f(s)(w, w) \right] \right).$$

Como el gradiente se realiza en función del parámetro  $w$ , estas derivadas son fáciles de calcular y solamente corresponden a

$$\nabla_w \left( f^{(3)}(s)(d, d, w) \right) = f^{(3)}(s)(d, d, \cdot), \quad \nabla_w \left( \nabla^2 f(s)(w, w) \right) = 2\nabla^2 f(s)(w, \cdot),$$

donde además se ha utilizado que  $\nabla^2 f(s)^\top = \nabla^2 f(s)$ . Finalmente se identifica la igualdad

$$\nabla_w \left( \frac{1}{2} \left[ 2f^{(3)}(s)(d, d, w) + \nabla^2 f(s)(w, w) \right] \right) = f^{(3)}(s)(d, d, \cdot) + \nabla^2 f(s)(w, \cdot),$$

la cual coincide con lo encontrado en el lado izquierdo. Con esto se ha visto que cuando  $f$  es tres veces continuamente diferenciable (incluso sin convexidad), se obtiene el resultado del Teorema 3.4.11. A continuación se presenta la demostración para el caso general.

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $f$  una función dos veces parabólicamente epi-diferenciable en  $(s, s^*)$  para

$(d, d^*)$ . Entonces para toda sucesión  $t_n \downarrow 0$  se cumple que

$$\frac{1}{2}\Delta_{p,t_n}^2 f(s|s^*)(d|d^*) \xrightarrow{c} \frac{1}{2}d_p^2 f(s|s^*)(d|d^*).$$

El Teorema de Attouch (Lema 1.5.14) indica la convergencia gráfica de sus subdiferenciales, o bien que

$$\partial \left( \frac{1}{2}\Delta_{p,t_n}^2 f(s|s^*)(d|d^*) \right) \xrightarrow{g} \partial \left( \frac{1}{2}d_p^2 f(s|s^*)(d|d^*) \right).$$

Por la relación de cocientes (Lema 3.4.10), esto es lo mismo que

$$\left( \Delta_{\tau}^2 \partial f \right) (s|s^*)(d|d^*) \xrightarrow{g} \partial \left( \frac{1}{2}d_p^2 f(s|s^*)(d|d^*) \right).$$

Debido a la unicidad del límite gráfico y la definición de derivada gráfica de segundo orden (Def. 1.5.18), se obtiene que  $\partial f$  es dos veces proto-diferenciable en  $(s, s^*)$  para  $(d, d^*)$ . Además se satisface la relación (3.10).

Para estudiar la otra implicancia, se supone que  $f$  es dos veces proto-diferenciable en  $(s, s^*)$  para  $(d, d^*)$ . Entonces, para toda sucesión  $t_n \downarrow 0$  se cumple que

$$\left( \Delta_{t_n}^2 \partial f \right) (s|s^*)(d|d^*) \xrightarrow{g} D^2 (\partial f) (s|s^*)(d|d^*),$$

o equivalentemente, nuevamente utilizando la relación de cocientes (Lema 3.4.10),

$$\partial \left( \frac{1}{2}\Delta_{p,t_n}^2 f(s|s^*)(d|d^*) \right) \xrightarrow{g} D^2 (\partial f) (s|s^*)(d|d^*). \quad (3.11)$$

Como las funciones  $\frac{1}{2}\Delta_{p,t_n}^2 f(s|s^*)(d|d^*)$  son todas convexas, inferiormente semicontinuas y propias, sus subdiferenciales correspondientes son operadores maximales monótonos. La convergencia gráfica de operadores maximales monótonos también lo es [39, Teo. 13.32]. Además la clase de los subdiferenciales de funciones convexas, propias e inferiormente semicontinuas es cerradas bajo convergencia gráfica en la clase de los operadores maximalmente monótonos [49, Cor. 3.65]. Por esto se debe cumplir que

$$D^2 (\partial f) (s|s^*)(d|d^*) = \partial \Phi$$

para cierta función  $\Phi$  convexa, propia e inferiormente semicontinua. Además esto entrega directamente que  $\partial \Phi \neq \emptyset$ , por lo que sean  $(w, w^*) \in \text{gph } \partial \Phi$ . Claramente el valor de  $\Phi(w)$  es finito. La convergencia gráfica en (3.11) (al ser en particular un límite inferior) dice que para cualquier sucesión  $w_n \rightarrow w$ , existe una sucesión  $w_n^* \rightarrow w^*$  tal que

$$w_n^* \in \partial \left( \frac{1}{2}\Delta_{p,t_n}^2 f(s|s^*)(d|d^*) \right) (w_n), \quad (3.12)$$

o de manera equivalente

$$\frac{1}{2}\Delta_{p,t_n}^2 f(s|s^*)(d|d^*)(w_n) + \frac{1}{2}\Delta_{p,t_n}^2 f^*(s^*|s)(d^*|d)(w_n^*) = \langle w_n, w_n^* \rangle. \quad (3.13)$$

Como  $f$  satisface la hipótesis (H1), ambas sucesiones deben ser acotadas inferiormente. Si

esto no ocurre, el valor de la segunda subderivada parabólica en  $w$  (respectivamente en  $w^*$ ) sería  $-\infty$ , lo que contradice la hipótesis. Como el término  $\langle w_n, w_n^* \rangle$  es convergente, se puede suponer que todos los términos son convergentes (pasando por subsucesión si es necesario). También se puede asumir, luego de sumar una constante a  $\Phi$ , que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \Delta_{p, t_n}^2 f(s|s^*)(d|d^*)(w_n) = \Phi(w). \quad (3.14)$$

En síntesis, se cumple que  $\partial \left( \frac{1}{2} \Delta_{p, t_n}^2 f(s|s^*)(d|d^*) \right) \xrightarrow{g} \partial \Phi$ , y que existen  $(w, w^*) \in \text{gph } \Phi$ , y sucesiones  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{w_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que se satisface (3.12), y el límite (3.14). En virtud del Teorema de Attouch (Lema 1.5.14) se concluye que las funciones  $\frac{1}{2} \Delta_{p, t_n}^2 f(s|s^*)(d|d^*)$  epi-convergen a  $\Phi$ . La unicidad del límite y la definición de segunda subderivada parabólica (Def. 3.4.3) entregan que  $f$  es dos veces parabólicamente epi-diferenciable en  $(s, s^*)$  para  $(d, d^*)$ , y que la relación (3.10) es cierta. Con ambas implicancias se concluye el teorema.  $\square$

### 3.4.4. Función de curvatura de segundo orden

Con el trabajo realizado en las secciones anteriores, es posible presentar la curvatura de segundo orden como una consecuencia de la segunda subderivada parabólica. Se toma como base la Proposición 3.3.3, la cual relaciona la segunda subderivada con la función de curvatura, para definir la función de curvatura de segundo orden se comienza desde la siguiente relación.

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^2(s, s^*; d, d^*)(w) = \frac{1}{2} d_p^2 \delta_{\mathcal{K}}(s|s^*)(d|d^*)(w).$$

Otro elemento importante a generalizar es la noción de conjunto crítico (Def. 3.3.2). Esta nueva definición corresponde a la cota para el dominio de la segunda subderivada parabólica encontrada en la Proposición 3.4.5, y difiere a otras definiciones de conjunto crítico de segundo orden en la literatura (e.g., [77, Eq. (4.3)]).

**Definición 3.4.12** (Conjunto crítico de segundo orden) *Se define el conjunto crítico de segundo orden de  $\mathcal{K}$  en  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$  con respecto a  $(d, d^*) \in T_{\mathcal{M}}(s, s^*)$  como el conjunto*

$$C_{\mathcal{K}}^2(s, s^*; d, d^*) := \left\{ w \in T_{\mathcal{K}}^2(s, d) : \langle w, d^* \rangle = \liminf_{\substack{\tau \downarrow 0, w' \rightarrow w \\ s + \tau d + \frac{1}{2} \tau^2 w' \in \mathcal{K}}} \Theta_{\tau}^{\mathcal{K}}(w'), \quad \langle w, s^* \rangle = 2\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(d) \right\},$$

donde la función  $\Theta_{\tau}^{\mathcal{K}}$  está definida (en este caso) por el cociente

$$\Theta_{\tau}^{\mathcal{K}}(w') = \frac{\langle w', s^* \rangle - \langle w, s^* \rangle}{\tau}.$$

Se define a continuación la función de curvatura de segundo orden.

**Definición 3.4.13** Sean  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$ ,  $(d, d^*) \in T_{\mathcal{M}}(s, s^*)$ . Se define la curvatura de segundo

orden de  $\mathcal{K}$  en  $(s, s^*)$  con respecto a  $(d, d^*)$  a la función

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^2(s, s^*; d, d^*)(w) := \begin{cases} \liminf_{\substack{\tau \downarrow 0, w' \rightarrow w \\ s + \tau d + \frac{1}{2}\tau^2 w' \in \mathcal{K}}} \frac{\langle w', s^* + \tau d^* \rangle - 2\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(d)}{\frac{1}{2}\tau^2} & w \in C_{\mathcal{K}}^2(s, s^*; d, d^*) \\ +\infty & w \notin C_{\mathcal{K}}^2(s, s^*; d, d^*). \end{cases}$$

**Proposición 3.4.14** Sean  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$ ,  $(d, d^*) \in T_{\mathcal{M}}(s, s^*)$ . Por la definición de conjunto crítico de segundo orden, se puede reescribir la función de curvatura de segundo orden utilizando que cualquier  $w$  en dicho conjunto debe cumplir que  $\langle w, s^* \rangle = 2\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(d)$ . Podemos escribir la función como

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^2(s, s^*; d, d^*)(w) = \begin{cases} \liminf_{\substack{\tau \downarrow 0, w' \rightarrow w \\ s + \tau d + \frac{1}{2}\tau^2 w' \in \mathcal{K}}} \frac{\langle w', s^* + \tau d^* \rangle - \langle w, s^* \rangle}{\frac{1}{2}\tau^2} & w \in C_{\mathcal{K}}^2(s, s^*; d, d^*) \\ +\infty & w \notin C_{\mathcal{K}}^2(s, s^*; d, d^*). \end{cases}$$

A continuación se presentan tres casos en los cuales se puede conocer o restringir el valor de la función de curvatura de segundo orden.

**Proposición 3.4.15** Sean  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$ ,  $(d, d^*) \in T_{\mathcal{M}}(s, s^*)$ .

- i) Si  $(s, s^*) = (0, 0)$ , entonces  $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^2(0, 0; d, d^*)(w) = \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(d, d^*)(w)$ .
- ii) Si  $(d, d^*) = (0, 0)$ , entonces  $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^2(s, s^*; 0, 0)(w) = \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(w)$ .
- iii) Si  $d^*$  es una dirección admisible de  $\mathcal{K}^*$ , entonces  $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^2(s, s^*; d, d^*)(w) \geq 0$  para todo  $w$ .

DEMOSTRACIÓN. El punto i) es directo de notar que

$$\liminf_{\substack{\tau \downarrow 0, w' \rightarrow w \\ \tau d + \frac{1}{2}\tau^2 w' \in \mathcal{K}}} \frac{\langle w', \tau d^* \rangle - 2\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(0, 0)(d)}{\frac{1}{2}\tau^2} = \liminf_{\substack{\tau \downarrow 0, w' \rightarrow w \\ d + \frac{1}{2}\tau w' \in \mathcal{K}}} \frac{\langle w', d^* \rangle}{\frac{1}{2}\tau} = \liminf_{\substack{\tau' \downarrow 0, w' \rightarrow w \\ d + \tau' w' \in \mathcal{K}}} \frac{\langle w', d^* \rangle}{\tau'} = \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(d, d^*)(w).$$

Para el segundo punto, se puede notar que

$$\liminf_{\substack{\tau \downarrow 0, w' \rightarrow w \\ s + \frac{1}{2}\tau^2 w' \in \mathcal{K}}} \frac{\langle w', s^* \rangle - 2\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(0)}{\frac{1}{2}\tau^2} = \liminf_{\substack{\tau' \downarrow 0, w' \rightarrow w \\ s + \tau' w' \in \mathcal{K}}} \frac{\langle w', s^* \rangle}{\tau'} = \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(w).$$

Para el último punto, si  $w \notin C_{\mathcal{K}}^2(s, s^*; d, d^*)$ , el resultado es directo. En el otro caso, sean  $w \in C_{\mathcal{K}}^2(s, s^*; d, d^*)$ ,  $t_n \downarrow 0$  y  $w_n \rightarrow w$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que  $s + t_n d + \frac{1}{2}t_n^2 w_n \in \mathcal{K}$ . Se considera el numerador del cociente de la definición de función de curvatura de segundo orden:

$$X_n := \langle w_n, s^* + t_n d^* \rangle - 2\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(d).$$

Por la Prop. 3.3.5, lo anterior se puede reescribir para obtener

$$X_n = \langle w_n, s^* \rangle + \langle w_n, t_n d^* \rangle + 2\mathfrak{C}_{\mathcal{K}^*}(s^*, s)(d^*) + 2\langle d, d^* \rangle.$$

Como la función de curvatura es no negativa, se puede acotar  $X_n$  por

$$X_n \geq \frac{\langle \frac{1}{2}t_n^2 w_n, s^* \rangle + \langle \frac{1}{2}t_n^2 w_n, t_n d^* \rangle + \langle t_n d, t_n d^* \rangle}{\frac{1}{2}t_n^2} =: \frac{Y_n}{\frac{1}{2}t_n^2}.$$

Al utilizar que  $s \perp s^*$ ,  $d \perp s^*$ ,  $s \perp d^*$ , se puede reescribir  $Y_n$  por

$$Y_n = \left\langle s + t_n d + \frac{1}{2}t_n^2 w_n, s^* + t_n d^* \right\rangle.$$

Si  $d^*$  es una dirección admisible de  $\mathcal{K}^*$  en  $s^*$  (i.e., para  $t$  suf. pequeño  $s^* + td^* \in \mathcal{K}^*$ ), entonces para  $n$  suficientemente grande se cumple que  $Y_n \geq 0$  por ser un producto entre elementos de  $\mathcal{K}$  y de  $\mathcal{K}^*$ . A su vez, esto implica que  $X_n \geq 0$  y, por lo tanto, que el límite en  $n \in \mathbb{N}$  del cociente de la función de curvatura de segundo orden es no negativo. Como esto es válido para cualquier sucesión, también lo es para el  $\liminf$  con lo que se concluye el resultado.  $\square$

### 3.4.5. Caracterización del conjunto tangente de segundo orden

La función de curvatura de segundo orden corresponde al límite de los cocientes encontrados en la definición del conjunto tangente de segundo orden de  $\mathcal{M}$  en (3.6). Más aún, a partir de la extensión del teorema de Do se puede enunciar la relación entre el conjunto tangente de segundo orden con el subdiferencial de la función de curvatura de segundo orden.

**Teorema 3.4.16** *Sean  $\mathcal{K}, \mathcal{K}^* \subset \mathbb{E}$  conos propios, sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$  y  $(d, d^*) \in T_{\mathcal{M}}(s, s^*)$  tal que  $\delta_{\mathcal{K}}$  es propiamente dos veces parabólicamente epi-diferenciable en  $(s, -s^*)$  para  $(d, -d^*)$ , entonces*

$$(w, w^*) \in T_{\mathcal{M}}^2((s, s^*); (d, d^*)) \iff -w^* \in \partial\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^2(s, s^*; d, d^*)(w).$$

DEMOSTRACIÓN. Primero se debe notar que si  $\delta_{\mathcal{K}}$  es propiamente dos veces parabólicamente epi-diferenciable en  $(s, -s^*)$  para  $(d, -d^*)$ , entonces (por el Teo. 3.4.9)  $\delta_{\mathcal{K}}$  cumple la hipótesis (H1). Luego, similar a la demostración del Teorema 3.3.7, se puede notar que

$$(w, w^*) \in T_{\mathcal{M}}^2((s, s^*); (d, d^*)) \iff (w, -w^*) \in T_{\text{gph } \partial\delta_{\mathcal{K}}}^2((s, -s^*); (d, -d^*)),$$

lo cual, por la definición de derivada gráfica de segundo orden, corresponde a que

$$-w^* \in D^2(\partial\delta_{\mathcal{K}})(s| - s^*)(d| - d^*)(w).$$

Luego, utilizando el Teorema 3.4.11 lo anterior equivale a que

$$-w^* \in \partial \left( \frac{1}{2} d_{\text{p}}^2 \delta_{\mathcal{K}}(s| - s^*)(d| - d^*) \right) (w),$$

con lo que se concluye por la construcción de la función de curvatura de segundo orden.  $\square$

En el Lema 3.3.9 se mostraron enunciados que aseguran el cumplimiento de la segunda epi-diferenciabilidad de  $\delta_{\mathcal{K}}$  (o equivalentemente, la proto-diferenciabilidad de  $\partial\delta_{\mathcal{K}}$ ). De forma análoga se puede realizar el estudio para la segunda parabólica epi-diferenciabilidad de  $\delta_{\mathcal{K}}$  o bien, la segunda proto-diferenciabilidad de  $\partial\delta_{\mathcal{K}}$ . Por su definición, se puede ver que  $\partial\delta_{\mathcal{K}}$  es dos veces proto-diferenciable en  $(s, -s^*)$  para  $(d, -d^*)$  si y sólo si  $\text{gph } \delta_{\mathcal{K}}$  es parabólicamente derivable en  $(s, -s^*)$  para  $(d, -d^*)$ . Esto a su vez (bajo cambio de variable) es equivalente a que  $\mathcal{M}$  sea parabólicamente derivable en  $(s, s^*)$  para  $(d, d^*)$ . Adicionalmente, Chen et al.[14] mostraron que la diferenciabilidad direccional parabólica en el sentido de Hadamard de la proyección ortogonal es condición suficiente para la derivabilidad parabólica de  $\mathcal{M}$ . Esto se resume en el siguiente lema.

**Lema 3.4.17** *Sea  $\mathcal{K}$  un cono propio con  $\mathcal{M}$  el cono de complementariedad asociado a  $\mathcal{K}$ , y sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$  y  $(d, d^*) \in T_{\mathcal{M}}(s, s^*)$ . Considere los siguientes enunciados:*

- (i) *La proyección  $\Pi_{\mathcal{K}}(x)$  es parabólica direccionalmente diferenciable de segundo orden en el sentido de Hadamard (Def. 1.5.1).*
  - (ii)  *$\mathcal{M}$  es parabólicamente derivable en  $(s, s^*)$  para  $(d, d^*)$  (Def. 1.2.3).*
  - (iii)  *$\partial\delta_{\mathcal{K}}$  es dos veces proto-diferenciable en  $(s, -s^*)$  para  $(d, -d^*)$  (Def. 1.5.18)*
  - (iv)  *$\delta_{\mathcal{K}}$  es dos veces parabólicamente epi-diferenciable en  $(s, -s^*)$  para  $(d, -d^*)$  (Def 3.4.3)*
- Entonces se cumplen las siguientes implicancias:*

$$(i) \implies (ii) \iff (iii) \iff (iv)$$

### 3.5. Cono normal del conjunto de complementariedad

En esta sección se busca replicar el trabajo realizado para el cono tangente y el conjunto tangente de segundo orden de  $\mathcal{M}$ , en el cono normal. Como se muestra en la siguiente proposición, se puede reescribir el cono normal limitante de  $\mathcal{M}$  a través del subdiferencial de segundo orden de la función indicadora del cono  $\mathcal{K}$ .

**Proposición 3.5.1** *Sean  $\mathcal{K}, \mathcal{K}^* \subset \mathbb{E}$  conos propios y sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$ , entonces*

$$(u, u^*) \in N_{\mathcal{M}}(s, s^*) \iff u \in \partial^2\delta_{\mathcal{K}}(s, -s^*)(u^*).$$

DEMOSTRACIÓN. Directo de utilizar la definición de subdiferencial de segundo orden y notar que  $(s, s^*) \in \mathcal{M} \iff -s^* \in \partial\delta_{\mathcal{K}}(s)$ .  $\square$

Esta proposición, al igual que (3.2) la cual utiliza la coderivada de  $\Pi_{\mathcal{K}}$ , corresponde únicamente a un cambio de nombre para el conjunto, y no sirve para caracterizar sus elementos. Para compensar esto, a continuación se revisan algunas propiedades que permiten estimar el cono normal de  $\mathcal{M}$ .



**Proposición 3.5.2** Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio y sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$ . Entonces

$$(d, d^*) \in T_{\mathcal{M}}(s, s^*) \implies (-d^*, d) \in N_{\mathcal{M}}(s, s^*),$$

o equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} 0 & -\text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{bmatrix} T_{\mathcal{M}}(s, s^*) \subset N_{\mathcal{M}}(s, s^*).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $(d, d^*) \in T_{\mathcal{M}}(s, s^*)$ , lo cual es equivalente a que

$$(d, -d^*) \in \text{gph } D(\partial\delta_{\mathcal{K}})(s| - s^*). \quad (3.15)$$

El resultado de Rockafellar & Watts [39, Teo. 13.57] establece la inclusión

$$D(\partial\delta_{\mathcal{K}})(s| - s^*) \subset D^*(\partial\delta_{\mathcal{K}})(s| - s^*),$$

lo cual, junto con (3.15), implica que

$$(d, -d^*) \in \text{gph } D^*(\partial\delta_{\mathcal{K}})(s| - s^*) \iff (-d^*, -d) \in N_{\text{gph } \partial\delta_{\mathcal{K}}}(s, -s^*),$$

lo cual es equivalente a que  $(-d^*, d) \in N_{\mathcal{M}}(s, s^*)$  concluyendo el resultado.  $\square$

La proposición anterior entrega un primer estimador para el cono normal limitante de  $\mathcal{M}$ . Sin embargo, también revela una dificultad: Cuando se satisface alguno de los enunciados del Lema 3.3.9, el cono tangente de  $\mathcal{M}$  proviene del subdiferencial de la función convexa y propia  $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)$ . Debido a que el subdiferencial de una función con tales características es un operador maximal monótono, entonces el subdiferencial de segundo orden de  $\delta_{\mathcal{K}}$  (y por lo tanto el cono normal limitante de  $\mathcal{M}$ ) no puede ser encontrado como el subdiferencial de alguna función convexa. Esto significa que no es posible encontrar o definir otra función de curvatura sobre la cual se utilice su subdiferencial para caracterizar al cono normal limitante. A pesar de eso, gracias a la Proposición 1.2.7, se puede utilizar la caracterización del cono tangente para describir el cono normal regular de  $\mathcal{M}$ .

**Proposición 3.5.3** Sean  $\mathcal{K}, \mathcal{K}^* \subset \mathbb{E}$  conos propios tal que se cumple alguno de los enunciados del Lema 3.3.9, y sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$ , entonces

$$\hat{N}_{\mathcal{M}}(s, s^*) = \left\{ (\lambda^*, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \langle d, \lambda^* \rangle \leq \langle \lambda, d^* \rangle \quad \forall (d, d^*) \in \text{gph } \partial\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*) \right\}.$$

Para poder utilizar este resultado, previamente se necesita conocer la función de curvatura y su subdiferencial. En contraste, el siguiente resultado es más débil, ya que no requiere alguna de las hipótesis del Lema 3.3.9. En consecuencia, solo entrega aproximaciones para el cono normal de Fréchet de  $\mathcal{M}$ .

**Lema 3.5.4** Sean  $\mathcal{K}, \mathcal{K}^* \subset \mathbb{E}$  conos propios, y sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$ , entonces se tienen las siguientes cotas superior e inferior (en el sentido de la inclusión) para el cono normal de

Fréchet de  $\mathcal{M}$ :

$$\begin{aligned} (-\Phi(s)^D) \times (-\Phi(s^*)^\delta) &\subseteq \hat{N}_{\mathcal{M}}(s, s^*) \subseteq N_{\Phi(s^*)^\delta}(s) \times N_{\Phi(s)^D}(s^*) \\ &\subseteq N_{\Phi(s)}(s) \times N_{\Phi(s^*)}(s^*). \end{aligned}$$

donde  $\Phi$  denota la cara minimal (Def. 1.1.13).

DEMOSTRACIÓN. Por definición del cono tangente:

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{M}}(s, s^*) &\subseteq T_{\mathcal{K}}(s) \times T_{\mathcal{K}^*}(s^*) \\ &= (\Phi(s)^D)^* \times (\Phi(s^*)^\delta)^*. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \hat{N}_{\mathcal{M}}(s, s^*) &= (T_{\mathcal{M}}(s, s^*))^\circ \\ &\supseteq \left( (\Phi(s)^D)^* \times (\Phi(s^*)^\delta)^* \right)^\circ \\ &\supseteq -\Phi(s)^D \times -\Phi(s^*)^\delta. \end{aligned}$$

Lo que concluye la primera inclusión. La segunda inclusión viene dada por el Teorema 2.5.3 y la tercera es una consecuencia directa de la Prop. 2.6.3.  $\square$

El siguiente lema es una consecuencia de la Proposición 2.6.6, y muestra que el producto de conos normales de las caras minimales también acota el cono normal limitante de  $\mathcal{M}$ .

**Lema 3.5.5** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio facialmente expuesto, y sea  $(s, s^*) \in \mathcal{M}$ , entonces se tienen la siguiente cota superior (en el sentido de la inclusión) para el cono normal de Mordukhovich de  $\mathcal{M}$ :*

$$N_{\mathcal{M}}(s, s^*) \subseteq N_{\Phi(s)}(s) \times N_{\Phi(s^*)}(s^*),$$

donde  $\Phi$  denota la cara minimal (Def. 1.1.13).

## 3.6. Geometría variacional vía subdiferenciales

En este capítulo se han presentado algunos resultados que caracterizan elementos de la Geometría Variacional del cono de complementariedad. Los resultados a mencionar son aquellos que permiten caracterizar dichos elementos a partir de subdiferenciales de funciones convexas. La siguiente proposición resume estos resultados, y a la vez sirve de analogía con el resultado visto en la Sección 3.2 en términos de la proyección ortogonal.

**Proposición 3.6.1** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio y sea  $\mathcal{M}$  el cono de complementariedad asociado a  $\mathcal{K}$ . Entonces se cumple que*

$$(s, s^*) \in \mathcal{M} \iff -s^* \in \partial\delta_{\mathcal{K}}(s), \quad (3.16)$$

y que

$$(u, u^*) \in N_{\mathcal{M}}(s, s^*) \iff u \in \partial^2 \delta_{\mathcal{K}}(s, -s^*)(u^*). \quad (3.17)$$

Si  $\delta_{\mathcal{K}}$  es dos veces epi-diferenciable en  $s$  para  $-s^*$ , entonces

$$(d, d^*) \in T_{\mathcal{M}}(s, s^*) \iff -d^* \in \partial \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(d) \quad (3.18)$$

Si además  $\delta_{\mathcal{K}}$  es propiamente dos veces parabólicamente epi-diferenciable en  $(s, -s^*)$  para  $(d, -d^*)$ , entonces

$$(w, w^*) \in T_{\mathcal{M}}^2((s, s^*); (d, d^*)) \iff -w^* \in \partial \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^2(s, s^*; d, d^*)(w). \quad (3.19)$$

### 3.7. Condiciones de optimalidad bajo calificación facial

Se ha visto que para estudiar la condición B-estacionaria y el Teo. 3.1.1 (el cual actúa como una condición B-estacionaria de segundo orden), es necesaria alguna calificación de restricciones como por ejemplo la subregularidad métrica del mapeo multivaluado  $M(x) := \mathcal{G}(x) - \mathcal{M}$  en  $(\bar{x}, 0)$  en la dirección  $d$  con módulo  $\kappa$ , donde  $\mathcal{G}(x) := (G(x), H(x))$ . En efecto, esta calificación se puede asegurar mediante una calificación más fuerte, como lo es la condición suficiente de primer orden para la subregularidad métrica direccional (FOSCMS) [37, Prop. 4], [78, Teo. 1].

**Proposición 3.7.1** *La función multivaluada  $M(x) = \mathcal{G}(x) - \mathcal{M}$  es métricamente subregular en  $(\bar{x}, 0)$  en la dirección  $d$  la cual cumple que  $\nabla \mathcal{G}(\bar{x})d \in T_{\mathcal{M}}(\mathcal{G}(\bar{x}))$  si se cumple la condición suficiente de primer orden para la subregularidad métrica (FOSCMS) en dirección  $d$ :*

$$\nabla \mathcal{G}(\bar{x})^*(\lambda, \lambda^*) = 0, (\lambda, \lambda^*) \in N_{\mathcal{M}}(\mathcal{G}(\bar{x}); \nabla \mathcal{G}(\bar{x})d) \implies (\lambda, \lambda^*) = 0. \quad (\text{FOSCMS})$$

La condición (FOSCMS) sigue siendo difícil de evaluar en la medida que lo es conocer el cono normal limitante de  $\mathcal{M}$ . Por esto, a continuación se presenta una nueva condición suficiente para la subregularidad métrica basada en las propiedades geométricas que se han estudiado en los capítulos 2 y 3. El *trade-off* o la compensación de ser una calificación más fuerte (y que por lo tanto podría no satisfacerse con facilidad), es que es más fácil de estudiar.

**Teorema 3.7.2** (Condición facial de primer orden para la subregularidad métrica) *La función multivaluada  $M(x) = \mathcal{G}(x) - \mathcal{M}$  es métricamente subregular en  $(\bar{x}, 0)$  si  $\mathcal{K}$  es facialmente expuesto, y se cumple la condición facial de primer orden para la subregularidad métrica (FCMS):*

$$DG(\bar{x})^* \lambda + DH(\bar{x})^* \lambda^* = 0, \left. \begin{array}{l} \lambda \in N_{\Phi(G(\bar{x}))}(G(\bar{x})) \\ \lambda^* \in N_{\Phi(H(\bar{x}))}(H(\bar{x})) \end{array} \right\} \implies (\lambda, \lambda^*) = 0. \quad (\text{FCMS})$$

DEMOSTRACIÓN. Basta mostrar que lo anterior implica la condición suficiente establecida en la Prop. 3.7.1 tomando la dirección  $d$  igual a 0. Así la condición (FOSCMS) (la cual está

escrita para el problema (M-CMPCC)) se puede reescribir como:

$$\left. \begin{aligned} DG(\bar{x})^* \lambda + DH(\bar{x})^* \lambda^* = 0 \\ (\lambda, \lambda^*) \in N_{\mathcal{M}}(G(\bar{x}), H(\bar{x})) \end{aligned} \right\} \implies (\lambda, \lambda^*) = 0.$$

Como el Lema 3.5.5 entrega la inclusión

$$N_{\mathcal{M}}(G(\bar{x}), H(\bar{x})) \subseteq N_{\Phi(G(\bar{x}))}(G(\bar{x})) \times N_{\Phi(H(\bar{x}))}(H(\bar{x})),$$

es directa la implicancia entre las condiciones, y por lo tanto se concluye el Teorema.  $\square$

**Observación** La condición (FCMS) corresponde al criterio de Mordukhovich para la regularidad métrica en  $\bar{x}$  del problema con restricciones

$$(G(x), H(x)) \in \Phi(G(\bar{x})) \times \Phi(H(\bar{x})),$$

criterio que a su vez es equivalente a la calificación de restricciones de Robinson, pues el conjunto es convexo.

A partir de la condición (FCMS) se pueden reescribir las condiciones de optimalidad como ejemplifica la siguiente proposición.

**Proposición 3.7.3** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio y facialmente expuesto. Sea  $\bar{x}$  una solución factible del problema (CMPCC) asociado a  $\mathcal{K}$ , tal que  $\delta_{\mathcal{K}}$  es dos veces epi-diferenciable en  $G(\bar{x})$  para  $-H(\bar{x})$ , y que satisface la condición facial de primer orden para la subregularidad métrica (FCMS). Entonces*

$$\nabla f(\bar{x})^\top d \geq 0, \quad \forall d \in \left\{ d : -DH(\bar{x})d \in \partial \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(G(\bar{x}), H(\bar{x}))(DG(\bar{x})d) \right\}.$$

Además, para toda dirección  $d$  tal que  $DG(\bar{x})d \in T_{\mathcal{M}}(\mathcal{G}(\bar{x}))$  con  $\nabla f(\bar{x})^\top d = 0$ , y que cumple que  $\delta_{\mathcal{K}}$  es propiamente dos veces parabólicamente epi-diferenciable en  $(G(\bar{x}), -H(\bar{x}))$  para  $(DG(\bar{x})d, -DH(\bar{x})d)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x})^\top w + \nabla^2 f(\bar{x})(d, d) \geq 0, \quad \forall w \in \left\{ w : -DH(\bar{x})w - D^2 H(\bar{x})(d, d) \in \right. \\ \left. \partial \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^2(G(\bar{x}), H(\bar{x}); DG(\bar{x})d, DH(\bar{x})d)(DG(\bar{x})w + D^2 G(\bar{x})(d, d)) \right\}. \end{aligned}$$

## 3.8. Discusión y Comentarios

Este capítulo se centró en el estudio de los elementos de la geometría variacional referentes al cono de complementariedad. En esa línea, una de las principales y novedosas contribuciones de este capítulo fue la definición de la segunda subderivada parabólica (Def. 3.4.3). Sin embargo, su fin en este trabajo solo consistió en introducir la noción de función de curvatura de segundo orden, y así caracterizar el conjunto tangente de segundo orden (Teo. 3.4.16). Análogo al Capítulo 2, a continuación se discuten líneas de trabajo y preguntas abiertas no abordadas en este capítulo:

1. Al estudiar problemas de la forma  $\min_x f(x)$ ; s.a.  $x \in C$ , con  $f$  una función propia, convexa e inferiormente semicontinua, y  $C$  es un conjunto convexo, se han escrito condiciones de optimalidad de primer orden en términos de la (primera) subderivada [39, Teo. 8.15], de segundo orden en términos de la segunda subderivada [39, Teo. 13.24], y versiones parabólicas para condiciones de optimalidad de segundo orden escritas por la subderivada parabólica [39, Teo. 13.66]. Esto se resume en la siguiente proposición.

**Proposición.** *Considere el problema de minimización*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f_0(x); \quad x \in C \subset \mathbb{R}^n,$$

donde  $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es una función propia, convexa e inferiormente semicontinua, y  $C$  un conjunto convexo. Entonces:

- i) Si  $df_0(\bar{x})(d) \geq 0$  para todo  $d \in T_C(\bar{x})$ , entonces  $\bar{x}$  es una solución óptima.
- ii) Si  $f_0$  sólo es una función propia, y se cumple que  $0 \in \partial f(\bar{x})$  y  $d^2 f_0(\bar{x}|0)(d) > 0$  para todo  $d \neq 0$ , entonces  $\bar{x}$  es un óptimo local.
- iii) Si  $f_0$  sólo es una función propia, y  $\bar{x}$  es un óptimo local, entonces  $df_0(\bar{x})(d) \geq 0$  para todo  $d$ , y en el caso de que  $d \neq 0$  con  $df_0(\bar{x})(d) = 0$ , también se cumple que  $\inf_w d_p f_0(\bar{x})(d)(w) \geq 0$ .

En este marco, una línea de investigación sería estudiar la aplicación de la segunda subderivada parabólica en la escritura de nuevas condiciones de optimalidad para problemas generales.

2. Uno de los resultados clave para la caracterización del cono tangente fue el Lema 1.5.16, el cual fue presentado por Do en 1992. Este resultado está escrito en términos de una función  $f$  convexa, propia e inferiormente semicontinua. En la literatura se han presentado resultados más generales, e.g., Rockafellar & Wets presentan una versión más débil, donde la función  $f$  se asume prox-regular y subdiferencialmente continua [39, Teo. 13.40]. En este capítulo se ha presentado una extensión al resultado de Do utilizando la segunda subderivada parabólica, donde se ha asumido que la función  $f$  es convexa, propia e inferiormente semicontinua (Teo. 3.4.11). Una línea de trabajo es estudiar si el resultado generalizado es cierto para una familia de funciones más grande.
3. Como se puede desprender de los trabajos de Mohammadi (e.g., [45, 75, 79]), el dominio de la función de curvatura  $\text{dom } \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)$  coincide con el cono crítico de  $\mathcal{K}$  en  $(s, s^*)$ :  $C_{\mathcal{K}}(s, s^*)$ . En este capítulo se ha definido la curvatura de segundo orden con su dominio contenido en el denominado conjunto crítico de segundo orden de  $\mathcal{K}$ :  $C_{\mathcal{K}}^2(s, s^*; d, d^*)$ . Basado en las técnicas de demostración utilizadas por Mohammadi et al., parecen ser necesarias otras herramientas (entre ellas, definiciones adicionales de nuevas subderivadas) para determinar si el dominio  $\text{dom } \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^2(s, s^*; d, d^*)$  coincide con el conjunto crítico de segundo orden.

4. La función

$$\liminf_{\substack{\tau \downarrow 0, w' \rightarrow w \\ s + \tau d + \frac{1}{2} \tau^2 w' \in \mathcal{K}}} \Theta_{\tau}^{\mathcal{K}}(w')$$

aparece al acotar el dominio de la segunda subderivada parabólica (Prop. 3.4.5). Esta

función puede ser entendida como una “subderivada” intermedia. En este trabajo no se ha estudiado esta función, y solo ha sido introducida para definir el conjunto crítico de segundo orden. Además, bajo cierta regularidad, se puede probar que su valor es nulo, por ejemplo, si se considera la regularidad parabólica de segundo orden (Def. 3.4.6). En este caso el conjunto crítico de segundo orden se puede obtener por

$$C_{\mathcal{K}}^2(s, s^*; d, d^*) = \left\{ w \in T_{\mathcal{K}}^2(s, d) : \langle w, d^* \rangle = 0, \quad \langle w, s^* \rangle = 2\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(s, s^*)(d) \right\}.$$

5. El Lema 3.4.17 es análogo al Lema 3.3.9. Es inmediato notar que el primero está menos desarrollado en término de las distintas condiciones que implican el resultado final. Por un lado, la segunda regularidad parabólica de conjuntos presentada en el punto anterior puede corresponder a un enunciado que ayude a generalizar el punto (iii) del Lema 3.3.9. Por otro lado, la  $\mathcal{C}^2$ -cono reducibilidad de  $\mathcal{K}$  no es suficiente para asegurar que el conjunto  $\mathcal{M}$  sea parabólicamente derivable. Siguiendo la demostración de Shapiro [76, Prop. 2.1], parece ser necesario una especie de doble reducibilidad de clase  $\mathcal{C}^2$ , o bien que el cono  $\mathcal{K}$  sea  $\mathcal{C}^2$ -cono reducibilidad en  $s$  a cierto cono  $\mathbb{K}$ , y a su vez,  $\mathbb{K}$  también sea  $\mathcal{C}^2$ -cono reducibilidad en una vecindad del 0. Esta hipótesis no es descabellada, pues los grandes ejemplos en la programación cónica cumplen esta propiedad, e.g., los conos poliedrales, el cono de las matrices semidefinidas positivas y el cono de segundo orden. Estas propiedades deben ser estudiadas con mayor rigurosidad, y podrían entregar condiciones necesarias para los enunciados del Lema 3.4.17.
6. En la línea del punto anterior, se ha visto que para satisfacer las hipótesis del Teorema 3.4.11, basta con que la función  $f$  sea propiamente dos veces parabólicamente epi-diferenciable. Se espera encontrar condiciones, de ser necesarias, que aseguren que la segunda subderivada parabólica sea una función propia. En el caso contrario, se espera demostrar si esto se obtiene directamente de que  $f$  sea una función convexa, propia e inferiormente semicontinua.
7. Las caracterizaciones encontradas en este capítulo vienen a ser equivalente a las utilizadas en la literatura en término de la proyección ortogonal (Sec. 3.2). Como ambas caracterizaciones describen los mismos conjuntos, desde el punto de vista teóricos no existe una ventaja entre utilizar un método o el otro. Una importante línea de investigación puede indicar cuando conviene utilizar cada caracterización. También se puede estudiar cual caracterización es más fácil de utilizar desde el punto de vista numérico (por ejemplo para aproximar estos conjuntos computacionalmente).
8. En el Capítulo 2 se visualizó como muchos autores han generalizado ciertas calificaciones de restricciones clásicas de la optimización (MPEC Abadie CQ, MPEC Kuhn-Tucker CQ, entre otras). En trabajos más recientes, los autores han trabajado con calificaciones variacionales, como lo es la subregularidad métrica en problemas con restricciones de complementariedad (e.g. [80, 43, 81]). En la Sección 3.7 se presentó la Condición Facial de Primer Orden para la Subregularidad Métrica (FCMS), la cual fue utilizada para presentar las condiciones necesarias de primer y segundo orden en término de las funciones de curvaturas (Prop. 3.7.3). Una línea de trabajo futuro une los capítulos 2 y 3: basado en los resultados recientes, se espera demostrar que la subregularidad métrica, y (FCMS) indirectamente, sea una calificación de restricciones que asegure los distintos puntos estacionarios definidos en el Capítulo 2.

9. Recientemente Gfrerer et al. [37] presentaron una condición necesaria de segundo orden, la cual puede ser extrapolada al siguiente resultado.

**Condición necesaria de segundo orden.** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$  un cono propio. Sea  $\bar{x}$  una solución factible del problema (CMPCC) asociado a  $\mathcal{K}$ , tal que satisface la condición facial de primer orden para la subregularidad métrica (FCMS). Entonces existe un multiplicador  $(\mu, \mu^*)$  que cumple (2.14) (multiplicador de Mordukhovich) tal que*

$$\nabla_{x,x}^2 L(\bar{x}, (\mu, \mu^*)) (d, d) - \hat{\sigma}_{T_{\mathcal{M}(\mathcal{K})}^2(\mathcal{G}(\bar{x}); D\mathcal{G}(\bar{x})d)}((\mu, \mu^*)) \geq 0.$$

para toda dirección  $d \in C(\bar{x})$  tal que  $T_{\mathcal{M}(\mathcal{K})}^2(\mathcal{G}(\bar{x}); D\mathcal{G}(\bar{x})d) \neq \emptyset$ , donde

$$C(\bar{x}) := \{d : D\mathcal{G}(\bar{x})d \in T_{\mathcal{M}}(\mathcal{G}(\bar{x})), \nabla f(\bar{x})^\top d \leq 0\}$$

denota el cono crítico del problema de optimización, y

$$\hat{\sigma}_S(\lambda) := \liminf_{\tilde{\lambda} \rightarrow \lambda} \inf_u \left\{ \langle \tilde{\lambda}, u \rangle : \tilde{\lambda} \in \hat{N}_S(u) \right\}$$

define la función soporte inferior generalizada de  $S$ .

Uno de los elementos novedosos introducidos por los autores es la función soporte inferior generalizada, sobre la cual es posible escribir el resultado anterior. En función de lo realizado en la Sección 3.4.5, se busca a futuro caracterizar el valor  $\hat{\sigma}_{T_{\mathcal{M}(\mathcal{K})}^2(\mathcal{G}(\bar{x}); D\mathcal{G}(\bar{x})d)}((\mu, \mu^*))$ , así como utilizar las funciones de curvatura para reescribir condiciones de segundo orden para (CMPCC).

10. Todos los resultados en este capítulo fueron estudiados para espacios euclidianos. Las definiciones tienen sentido en contextos más generales, como lo pueden ser los espacios de Hilbert o incluso de Banach. En dimensión infinita el concepto de epi-convergencia difiere al de Mosco-convergencia [82, Def. 1]. Así, se pueden definir las subderivadas a partir de estas distintas nociones de convergencia. Esto abre distintas ramas para comprender estos elementos.

# Conclusiones

El estudio de los problemas CMPCC se ha incrementado desde los primeros trabajos acerca el problema MPCC en los noventa, hasta ciertos problemas particulares (SOCMPCC, SDCMPCC, etc) en los últimos años. El principal horizonte de este trabajo fue entender diferentes resultados para los distintos casos particulares, para así comprender los problemas CMPCC y sus propiedades de una forma general.

Debido a la dificultad para calificar el problema y garantizar las condiciones de KKT, los autores han presentado distintas condiciones de optimalidad duales a partir de otras nociones de puntos estacionarios. Para poder entender estas nociones, el Capítulo 2 inició entregando una recopilación de los resultados presentes en la literatura. En base a esto, en la Sección 2.5 se formalizaron estas definiciones para cualquier problema CMPCC. En la Sección 2.6 se presentaron por primera vez, a conocimiento del autor, dos puntos estacionarios basados en el concepto geométrico de la cara del cono (Puntos F-estacionario y FR-estacionario). Se estudió la relación entre todos los puntos estacionarios (Sec. 2.7) encontrando que los dos nuevos puntos presentados son los más débiles, pero que coinciden con la noción débil para el caso MPCC. Finalmente, a partir de certeras calificaciones de restricciones, se pueden escribir condiciones de optimalidad a partir de las definiciones de puntos estacionarios.

Para estudiar las condiciones de optimalidad primales (de primer y segundo orden), los autores han encontrado expresiones para el cono tangente, el conjunto tangente de segundo orden y los distintos conos normales al conjunto de complementariedad  $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ . Estas se basan casi en su totalidad en las propiedades de la proyección ortogonal (Sec. 3.2). En el Capítulo 3 se presentan nuevos aprontes para caracterizar estos objetos:

- En la Sección 3.3 se encontró la relación entre el subdiferencial de la función de curvatura de  $\mathcal{K}$  con los elementos del cono tangente de  $\mathcal{M}(\mathcal{K})$  (Teo. 3.3.7). Esto fue realizado al reunir los conceptos de segunda subderivada, derivada gráfica, y el teorema de Do (Lema 1.5.16).
- Con inspiración en lo realizado para el cono tangente, en la Sección 3.4 se definió por primera vez, a conocimiento del autor, la segunda subderivada parabólica (Def. 3.4.3). Se demostró una extensión del teorema de Do (Teo. 3.4.11) el cual reúne la segunda subderivada parabólica con el concepto de derivada gráfica de segundo orden. Se utilizó esta extensión para caracterizar el conjunto tangente de segundo orden de  $\mathcal{M}(\mathcal{K})$  a partir de la función de curvatura de segundo orden de  $\mathcal{K}$  (Teo. 3.4.16).
- En la Sección 3.5 se mostró que el cono normal limitante a  $\mathcal{M}(\mathcal{K})$  se puede escribir a partir de subdiferencial de segundo orden de  $\delta_{\mathcal{K}}$ . Además se presentaron cotas inferiores y superiores (en términos de la inclusión) para el mismo.



Estas caracterizaciones se pueden utilizar en las condiciones de optimalidad primales bajo la presencia de alguna calificación de restricción que permitan realizar la regla de la cadena en la descripción de los conjuntos. En la Sección 3.7 se discutió esto, donde además se presenta una nueva calificación de restricción basado en el problema facial (Teo. 3.7.2).

Las definiciones y resultados presentados en este trabajo proponen un sinnúmero de líneas de trabajo futuro. En las Secciones 2.8, y 3.8 se discutieron y comentaron las principales preguntas abiertas que tuvieron origen en lo entregado en esta tesis.

# Bibliografia

- [1] J. Ye, D. Zhu, and Q. J. Zhu, “Exact penalization and necessary optimality conditions for generalized bilevel programming problems,” *SIAM Journal on optimization*, vol. 7, no. 2, pp. 481–507, 1997.
- [2] H. Scheel and S. Scholtes, “Mathematical programs with complementarity constraints: Stationarity, optimality, and sensitivity,” *Mathematics of Operations Research*, vol. 25, no. 1, pp. 1–22, 2000.
- [3] Z.-Q. Luo, J.-S. Pang, and D. Ralph, *Mathematical programs with equilibrium constraints*. Cambridge University Press, 1996.
- [4] J. Ye, “Optimality conditions for optimization problems with complementarity constraints,” *SIAM Journal on Optimization*, vol. 9, no. 2, pp. 374–387, 1999.
- [5] J. Y. Jane, “Necessary and sufficient optimality conditions for mathematical programs with equilibrium constraints,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 307, no. 1, pp. 350–369, 2005.
- [6] T. Hoheisel, C. Kanzow, and A. Schwartz, “Theoretical and numerical comparison of relaxation methods for mathematical programs with complementarity constraints,” *Mathematical Programming*, vol. 137, no. 1, pp. 257–288, 2013.
- [7] F. Harder, “A new elementary proof for m-stationarity under mpcc-gcq for mathematical programs with complementarity constraints,” *Journal of Nonsmooth Analysis and Optimization*, vol. 2, 2021.
- [8] M. Anitescu, “On solving mathematical programs with complementarity constraints as nonlinear programs,” *Preprint ANL/MCS-P864-1200, Argonne National Laboratory, Argonne, IL*, vol. 3, 2000.
- [9] C. Ding, D. Sun, and J. Y. Jane, “First order optimality conditions for mathematical programs with semidefinite cone complementarity constraints,” *Mathematical Programming*, vol. 147, no. 1, pp. 539–579, 2014.
- [10] J. Wu, L. Zhang, and Y. Zhang, “Mathematical programs with semidefinite cone complementarity constraints: constraint qualifications and optimality conditions,” *Set-Valued and Variational Analysis*, vol. 22, no. 1, pp. 155–187, 2014.
- [11] Y. Liu and S. Pan, “Second-order optimality conditions for sdcmpcc and application to rank optimization problems,” *arXiv preprint arXiv:1911.10551*, 2019.
- [12] Y. Jiang, Y.-J. Liu, and L.-W. Zhang, “Variational geometry of the complementarity set for second order cone,” *Set-Valued and Variational Analysis*, vol. 23, no. 3, pp. 399–414,

2015.

- [13] J. Y. Jane and J. Zhou, “Verifiable sufficient conditions for the error bound property of second-order cone complementarity problems,” *Mathematical Programming*, vol. 171, no. 1, pp. 361–395, 2018.
- [14] J.-S. Chen, J. J. Ye, J. Zhang, and J. Zhou, “Exact formula for the second-order tangent set of the second-order cone complementarity set,” *SIAM Journal on Optimization*, vol. 29, no. 4, pp. 2986–3011, 2019.
- [15] J. Y. Jane and J. Zhou, “Exact formulas for the proximal/regular/limiting normal cone of the second-order cone complementarity set,” *Mathematical Programming*, vol. 162, no. 1-2, pp. 33–50, 2017.
- [16] J. Outrata, M. Kocvara, and J. Zowe, *Nonsmooth approach to optimization problems with equilibrium constraints: theory, applications and numerical results*, vol. 28. Springer Science & Business Media, 2013.
- [17] S. Hayashi, N. Yamashita, and M. Fukushima, “Robust nash equilibria and second-order cone complementarity problems,” *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, vol. 6, no. 2, p. 283, 2005.
- [18] F. Facchinei and J.-S. Pang, *Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems*. Springer, 2003.
- [19] S. Dempe, N. Dinh, and J. Dutta, “Optimality conditions for a simple convex bilevel programming problem,” in *Variational analysis and generalized differentiation in optimization and control*, pp. 149–161, Springer, 2010.
- [20] S. Dempe and J. Dutta, “Is bilevel programming a special case of a mathematical program with complementarity constraints?,” *Mathematical programming*, vol. 131, no. 1, pp. 37–48, 2012.
- [21] D. Aussel and A. Svensson, “Is pessimistic bilevel programming a special case of a mathematical program with complementarity constraints?,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 181, no. 2, pp. 504–520, 2019.
- [22] C. N. Do, “Generalized second-order derivatives of convex functions in reflexive banach spaces,” *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 334, no. 1, pp. 281–301, 1992.
- [23] G. P. Barker, “The lattice of faces of a finite dimensional cone,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 7, no. 1, pp. 71–82, 1973.
- [24] G. P. Barker, “Theory of cones,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 39, pp. 263–291, 1981.
- [25] C. D. Aliprantis and R. Tourky, *Cones and duality*, vol. 84. American Mathematical Soc., 2007.
- [26] G. Pataki, “On the connection of facially exposed and nice cones,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 400, no. 1, pp. 211–221, 2013.
- [27] V. Roshchina, “Facially exposed cones are not always nice,” *SIAM Journal on Optimization*, vol. 24, no. 1, pp. 257–268, 2014.

- [28] J. M. Borwein and H. Wolkowicz, “Facial reduction for a cone-convex programming problem,” *Journal of the Australian Mathematical Society*, vol. 30, no. 3, pp. 369–380, 1981.
- [29] G. Pataki, “Strong duality in conic linear programming: facial reduction and extended duals,” in *Computational and analytical mathematics*, pp. 613–634, Springer, 2013.
- [30] B. F. Lourenço, “Amenable cones: error bounds without constraint qualifications,” *Mathematical Programming*, vol. 186, no. 1, pp. 1–48, 2021.
- [31] S. B. Lindstrom, B. F. Lourenço, and T. K. Pong, “Error bounds, facial residual functions and applications to the exponential cone,” *Mathematical Programming*, pp. 1–50, 2022.
- [32] G. P. Barker, “Faces and duality in convex cones,” *Linear and Multilinear Algebra*, vol. 6, no. 3, pp. 161–169, 1978.
- [33] G. Pataki, “The geometry of semidefinite programming,” in *Handbook of semidefinite programming*, pp. 29–65, Springer, 2000.
- [34] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, *Fundamentals of convex analysis*. Springer Science & Business Media, 2004.
- [35] J. F. Bonnans and A. Shapiro, *Perturbation analysis of optimization problems*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [36] J. F. Bonnans and H. Ramírez, “Perturbation analysis of second-order cone programming problems,” *Mathematical Programming*, vol. 104, no. 2, pp. 205–227, 2005.
- [37] H. Gfrerer, J. J. Ye, and J. Zhou, “Second-order optimality conditions for nonconvex set-constrained optimization problems,” *Mathematics of Operations Research*, 2022.
- [38] B. S. Mordukhovich, *Variational analysis and applications*. Springer, 2018.
- [39] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets, *Variational analysis*, vol. 317. Springer Science & Business Media, 2009.
- [40] G. Giorgi, B. Jiménez, and V. Novo, “An overview of second order tangent sets and their application to vector optimization,” *SeMA Journal*, vol. 52, no. 1, pp. 73–96, 2010.
- [41] R. Cominetti, “Metric regularity, tangent sets, and second-order optimality conditions,” *Applied Mathematics and Optimization*, vol. 21, no. 1, pp. 265–287, 1990.
- [42] J. F. Bonnans, R. Cominetti, and A. Shapiro, “Second order optimality conditions based on parabolic second order tangent sets,” *SIAM Journal on Optimization*, vol. 9, no. 2, pp. 466–492, 1999.
- [43] H. Gfrerer, “On directional metric subregularity and second-order optimality conditions for a class of nonsmooth mathematical programs,” *SIAM Journal on Optimization*, vol. 23, no. 1, pp. 632–665, 2013.
- [44] K. Zarankiewicz, *Sur les points de division dans les ensembles connexes*, vol. 10. Uniwersytet, Seminarjum Matematyczne, 1927.
- [45] A. Mohammadi, B. Mordukhovich, and M. Sarabi, “Parabolic regularity in geometric variational analysis,” *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 374, no. 3, pp. 1711–1763, 2021.
- [46] A. Y. Kruger, “On fréchet subdifferentials,” *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 116,

- no. 3, pp. 3325–3358, 2003.
- [47] B. S. Mordukhovich, *Variational analysis and generalized differentiation II: Applications*, vol. 331. Springer, 2006.
- [48] F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*. SIAM, 1990.
- [49] H. Attouch, *Variational convergence for functions and operators*, vol. 1. Pitman Advanced Publishing Program, 1984.
- [50] X. Y. Zheng and Z. Wei, “Convergence of the associated sequence of normal cones of a mosco convergent sequence of sets,” *SIAM Journal on Optimization*, vol. 22, no. 3, pp. 758–771, 2012.
- [51] J.-P. Aubin and H. Frankowska, *Set-valued analysis*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [52] J. Jahn, A. Khan, and P. Zeilinger, “Second-order optimality conditions in set optimization,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 125, no. 2, pp. 331–347, 2005.
- [53] B. S. Mordukhovich and R. T. Rockafellar, “Second-order subdifferential calculus with applications to tilt stability in optimization,” *SIAM Journal on Optimization*, vol. 22, no. 3, pp. 953–986, 2012.
- [54] S. M. Robinson, “First order conditions for general nonlinear optimization,” *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 30, no. 4, pp. 597–607, 1976.
- [55] Y. Zhang, J. Wu, and L. Zhang, “First order necessary optimality conditions for mathematical programs with second-order cone complementarity constraints,” *Journal of Global Optimization*, vol. 63, no. 2, pp. 253–279, 2015.
- [56] P. Mehlitz, *Contributions to complementarity and bilevel programming in Banach spaces*. PhD thesis, Technische Universität Bergakademie Freiberg, 2017.
- [57] J.-P. Dussault, M. Haddou, A. Kadrani, and T. Migot, “How to Compute a M-stationary point of the MPCC.” working paper or preprint, Feb. 2017.
- [58] D. Hernández Escobar and J.-J. Rückmann, “Mppc: strongly stable c-stationary points when the number of active constraints is  $n+1$ ,” *Optimization*, vol. 69, no. 5, pp. 1039–1067, 2020.
- [59] F. Harder, “New stationarity conditions between strong and m-stationarity for mathematical programs with complementarity constraints,” *arXiv preprint arXiv:2109.01623*, 2021.
- [60] M. L. Flegel and C. Kanzow, “On the guignard constraint qualification for mathematical programs with equilibrium constraints,” *Optimization*, vol. 54, no. 6, pp. 517–534, 2005.
- [61] J. J. Ye and J. Zhou, “First-order optimality conditions for mathematical programs with second-order cone complementarity constraints,” *SIAM Journal on Optimization*, vol. 26, no. 4, pp. 2820–2846, 2016.
- [62] G. Wachsmuth, “Mathematical programs with complementarity constraints in banach spaces,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 166, no. 2, pp. 480–507, 2015.

- [63] G. Wachsmuth, “Strong stationarity for optimization problems with complementarity constraints in absence of polyhedricity,” *Set-Valued and Variational Analysis*, vol. 25, no. 1, pp. 133–175, 2017.
- [64] J. Zowe and S. Kurcyusz, “Regularity and stability for the mathematical programming problem in banach spaces,” *Applied mathematics and Optimization*, vol. 5, no. 1, pp. 49–62, 1979.
- [65] B. S. Mordukhovich, “Generalized differential calculus for nonsmooth and set-valued mappings,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 183, no. 1, pp. 250–288, 1994.
- [66] F. Meng, D. Sun, and G. Zhao, “Semismoothness of solutions to generalized equations and the moreau-yosida regularization,” *Mathematical programming*, vol. 104, no. 2, pp. 561–581, 2005.
- [67] Y. Zhang, L. Zhang, and J. Wu, “Convergence properties of a smoothing approach for mathematical programs with second-order cone complementarity constraints,” *Set-Valued and Variational Analysis*, vol. 19, no. 4, pp. 609–646, 2011.
- [68] J.-B. Hiriart-Urruty and J. Malick, “A fresh variational-analysis look at the positive semidefinite matrices world,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 153, no. 3, pp. 551–577, 2012.
- [69] A. Cabot and L. Thibault, “Sequential formulae for the normal cone to sublevel sets,” *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 366, no. 12, pp. 6591–6628, 2014.
- [70] J.-P. Penot, “Optimality conditions in mathematical programming and composite optimization,” *Mathematical Programming*, vol. 67, no. 1, pp. 225–245, 1994.
- [71] V. Thinh, T. Chuong, and N. Anh, “Optimality conditions for circular cone complementarity programs,” *Optimization*, vol. 71, no. 3, pp. 529–560, 2022.
- [72] V. V. Goncharov and F. F. Pereira, “Neighbourhood retractions of nonconvex sets in a hilbert space via sublinear functionals,” *Journal of Convex Analysis*, vol. 18, no. 1, pp. 001–036, 2011.
- [73] C. Christof and G. Wachsmuth, “No-gap second-order conditions via a directional curvature functional,” *SIAM Journal on Optimization*, vol. 28, no. 3, pp. 2097–2130, 2018.
- [74] M. Benko, H. Gfrerer, J. Ye, J. Zhang, and J. Zhou, “Second-order optimality conditions for general nonconvex optimization problems and variational analysis of disjunctive systems,” *arXiv preprint arXiv:2203.10015*, 2022.
- [75] A. Mohammadi and M. E. Sarabi, “Twice epi-differentiability of extended-real-valued functions with applications in composite optimization,” *SIAM Journal on Optimization*, vol. 30, no. 3, pp. 2379–2409, 2020.
- [76] A. Shapiro, “Differentiability properties of metric projections onto convex sets,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 169, no. 3, pp. 953–964, 2016.
- [77] B. S. Mordukhovich, J. V. Outrata, H. Ramírez C, *et al.*, “Graphical derivatives and stability analysis for parameterized equilibria with conic constraints,” *Set-Valued and Variational Analysis*, vol. 23, no. 4, pp. 687–704, 2015.

- [78] H. Gfrerer and D. Klatte, “Lipschitz and hölder stability of optimization problems and generalized equations,” *Mathematical Programming*, vol. 158, no. 1, pp. 35–75, 2016.
- [79] A. Mohammadi, B. S. Mordukhovich, and M. E. Sarabi, “Variational analysis of composite models with applications to continuous optimization,” *Mathematics of Operations Research*, vol. 47, no. 1, pp. 397–426, 2022.
- [80] H. Gfrerer and J. J. Ye, “New constraint qualifications for mathematical programs with equilibrium constraints via variational analysis,” *SIAM Journal on Optimization*, vol. 27, no. 2, pp. 842–865, 2017.
- [81] M. Benko, M. Červinka, and T. Hoheisel, “Sufficient conditions for metric subregularity of constraint systems with applications to disjunctive and ortho-disjunctive programs,” *Set-Valued and Variational Analysis*, vol. 30, no. 1, pp. 143–177, 2022.
- [82] U. Mosco, “Approximation of the solutions of some variational inequalities,” *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, vol. 21, no. 3, pp. 373–394, 1967.