

OC14-FC
DOC-P
D 982c
C.1

Construcción Sistemática de Estructuras Lagrangianas y Hamiltonianas para Ecuaciones No Lineales

Tesis
Entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en Física



Facultad de Ciencias

por

Miguel David Bustamante Gallardo

Enero, 2003

Director de Tesis: Dr. Sergio A. Hojman Guñerman

**INFORME DE APROBACION
TESIS DE DOCTORADO**

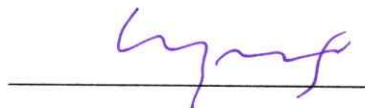
Se informa al Comité del Programa de Doctorado en Ciencias con mención en Física que la Tesis presentada por el candidato

Miguel David Bustamante Gallardo

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito para la obtención del grado de Doctor en Ciencias con mención en Física, el día 17 de Diciembre de 2002.

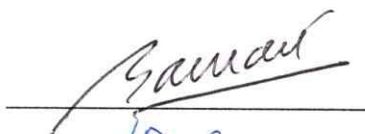
Director de Tesis

Dr. Sergio A. Hojman

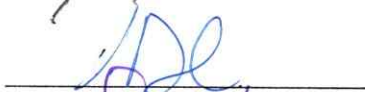


Comisión Informante de Tesis

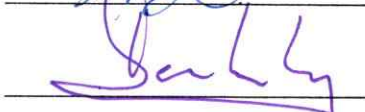
Dr. Rodrigo Bamón



Dr. Máximo Bañados



Dr. Romualdo Tabensky (Presidente)



Dr. Enrique Tirapegui



AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a mi director de tesis, Dr. Sergio Hojman, quien me ha apoyado incansablemente en este largo camino y cuya paciencia en la enseñanza y claridad de visión de los conceptos de la Física han sido siempre una inspiración en mi trabajo.

Agradezco enormemente a Ricardo Baeza, Alejandro Corvalán, Juan Crisóstomo, Andrés Gomberoff, David Gottlieb, Mauricio Herrera, Marcelo Loewe, Luis Moraga, Rodrigo Olea, Jaime Rössler, Lawrence C. Shepley, Romualdo Tabensky, Claudio Teitelboim, Ricardo Troncoso, Cristián Villavicencio y Jorge Zanelli, de quienes aprendí en el curso de los años a través de diversas lecciones, discusiones y consejos, y cuya sabiduría y generosa entrega han sido fundamentales en mi entera formación y en la creación y desarrollo de esta tesis.

A mis padres y a mi familia, por su apoyo incondicional.

A Pachy, quien me acompañó hasta el final y supo aguantar mis locuras.

A Javi, cuya mera existencia hace que mi esfuerzo tenga sentido.

A mis amigos.

Agradezco el apoyo económico durante todo el Plan de Doctorado sin el cual esta tesis no habría llegado a buen término. Especialmente, al Dr. Mario Luxoro, quien siendo director de la ESCUELA DE POSTGRADO creyó en mí el primer año de Doctorado; a CONICYT, cuya Beca para Estudiantes de Doctorado financió mis estudios durante el segundo y tercer años, y cuya *Beca Término de Tesis* ha financiado el último año; finalmente, a FUNDACIÓN ANDES, cuyo financiamiento a través de la *Beca de Doctorado Tipo B* fue verdaderamente fundamental para el desarrollo de mi tesis durante el cuarto y quinto años.

RESUMEN

En esta tesis, el punto de vista Lagrangiano para las ecuaciones de evolución (antiguamente conocido como el problema inverso del cálculo de variaciones) es usado para estudiar sistemas de ecuaciones diferenciales en primer orden en derivadas temporales, tanto en dimensión finita como en dimensión infinita.

En lo que concierne a sistemas de dimensión finita, consideramos el marco general para la construcción de Principios de Acción para ecuaciones autónomas tridimensionales de primer orden. Presentamos los resultados para algunos casos integrables y no integrables de la ecuación Lotka-Volterra, y mostramos descripciones Lagrangianas que son válidas para sistemas que satisfacen los criterios de Shil'nikov sobre la existencia de atractores extraños, aunque no se han verificado aún ni comportamiento caótico ni órbitas homoclinas. Las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas para estos sistemas usualmente presentan una simetría de "reparametrización temporal", aunque se pueden encontrar otros tipos de invariancia, de acuerdo al kernel de la 2-forma simpléctica asociada. La formulación de una estructura Hamiltoniana (corchetes de Poisson y Hamiltonianos) para estos sistemas desde el punto de vista Lagrangiano conduce a un método para encontrar otra constante de movimiento partiendo de una conocida, el que se aplica a algunos sistemas encontrados en la literatura de los cuales se conoce una constante de movimiento, para encontrar la otra y así mostrar su integrabilidad. En particular, mostramos que el así llamado sistema *ABC* es completamente integrable si posee una constante de movimiento.

Con respecto a sistemas de dimensión infinita, o ecuaciones diferenciales parciales, mejoramos el punto de vista Lagrangiano para considerar términos de borde, lo que se aplica para construir escaleras de Principios de Acción para sistemas Integrables que poseen operadores hereditarios o de Nijenhuis. A partir de suposiciones generales sobre el operador hereditario R , los Principios de Acción que se obtienen son aplicables a jerarquías completas de ecuaciones de evolución. Usando simetrías Noetherianas y no Noetherianas, también se construyen cantidades conservadas desde los Lagrangianos. Como un ejemplo, usando el operador de recurrencia usual R para la ecuación Korteweg-de Vries (KdV), se construye una jerarquía de ecuaciones de evolución (generada por la sucesiva aplicación de R sobre

el único vector en el kernel de R^{-1}) y tres jerarquías izquierdas de ecuaciones de evolución (generadas por la sucesiva aplicación de R^{-1} sobre los tres vectores generadores del kernel de R): la ecuación KdV es un miembro de la jerarquía derecha, mientras que la ecuación de Sinh-Gordon (ShG), la ecuación asociada Camassa-Holm, y la ecuación de Liouville son miembros de las jerarquías izquierdas. Para todas estas ecuaciones de evolución, se construyen recursivamente escaleras derecha e izquierda de Principios de Acción, usando la forma factorizada de los operadores R y R^{-1} , respectivamente; esto permite el cálculo explícito del kernel de las 2-formas simplécticas asociadas: encontramos que las ecuaciones de Euler-Lagrange a las que éstas dan lugar son vectores de evolución deformados o mezclados entre las jerarquías derecha e izquierdas. Consecuentemente, obtenemos Principios de Acción explícitos para los sistemas deformados, los que incluyen: KdV + Liouville, KdV + primer vector derecho (simetría de traslación), y ShG + primer vector derecho, entre otros. Algunos problemas abiertos acerca del rol de las simetrías Galileanas y de la construcción de estructuras Hamiltonianas para los vectores izquierdos se responden positivamente en nuestro esquema. Finalmente, construimos nuevas corrientes conservadas locales y no locales, y constantes de movimiento para algunas de las ecuaciones de evolución.

ABSTRACT

In this thesis, the Lagrangian approach to evolution equations (formerly known as the inverse problem of the calculus of variations) is used to study finite dimensional as well as infinite dimensional systems of differential equations which are first order in time derivatives.

Regarding finite dimensional systems, we consider the general setting for constructing Action Principles for three-dimensional first order autonomous equations. We present the results for some integrable and non-integrable cases of the Lotka-Volterra equation, and we show Lagrangian descriptions which are valid for systems satisfying Shil'nikov criteria on the existence of strange attractors, though chaotic behavior or homoclinic orbits have not been verified up to now. The Euler-Lagrange equations we get for these systems usually present "time reparameterization" symmetry, though other kinds of invariance may be found according to the kernel of the associated symplectic 2-form. The formulation of a Hamiltonian structure (Poisson brackets and Hamiltonians) for these systems from the Lagrangian viewpoint leads to a method of finding new constants of the motion starting from known ones, which is applied to some systems found in the literature known to possess one constant of the motion, to find the other and thus showing their integrability. In particular, we show that the so-called *ABC* system is completely integrable if it possesses one constant of the motion.

Concerning infinite dimensional systems, or partial differential equations, we improve the Lagrangian viewpoint so as to consider boundary terms, and this is used to construct ladders of Action Principles for Integrable systems that possess hereditary or Nijenhuis operators. From general assumptions on the hereditary operator R , the Action Principles obtained are applicable to whole hierarchies of evolution equations. Using Noetherian and non-Noetherian symmetries, conserved quantities are constructed from the Lagrangians as well. As an example, using the usual recursion operator R for the Korteweg-de Vries (KdV) equation, one right hierarchy (generated by successive application of R to the kernel vector of R^{-1}) and three left hierarchies (generated by successive application of R^{-1} to the kernel vectors of R) of evolution vectors are constructed: the KdV equation is a member of the right

hierarchy, while the Sinh-Gordon (ShG) equation, the associated Camassa-Holm equation, and the Liouville equation are members of the left hierarchies. For all these evolution equations, right and left ladders of Action Principles are constructed recursively using a factorized form of the operators R and R^{-1} , respectively; this allows for an explicit computation of the kernel of the associated symplectic 2-forms: we find that the Euler-Lagrange equations they give rise to are deformed or mixed evolution vectors among left and right hierarchies. Consequently, we get explicit Action Principles for the deformed systems, which include: KdV + Liouville, KdV + first right vector (translational symmetry), and ShG + first right vector, among others. Some open problems regarding the role of the Galilean symmetries and the construction of Hamiltonian structures for the left vectors are positively answered in our scheme. Finally, we construct new local and nonlocal conserved currents and constants of the motion for some of the evolution equations.

Contenido

Agradecimientos	ii
Resumen	iii
1 Introducción	1
2 Matemática Preliminar	5
2.1 Formalismo de Primer Orden y ecuaciones	
Autónomas	5
2.1.1 Ecuación de Movimiento	5
2.1.2 Ejemplos	6
2.2 Nociones de Geometría Diferencial	8
2.2.1 Derivada Funcional. Delta de Dirac	8
2.2.2 Ejemplos	8
2.2.3 Espacio Tangente (Vectores)	9
2.2.4 Espacio Cotangente (1-formas)	10
2.2.5 Notación	11
2.2.6 Contracción de vectores y 1-formas	11
2.2.7 Escalares (0-formas)	11
2.2.8 Tensores en general	12
2.2.9 Formas diferenciales	12
2.2.10 2-formas	13
2.2.11 Contracción de vectores con r -formas. Producto Interior . . .	13
2.2.12 Derivada Exterior	13
2.2.13 Propiedades de la Derivada Exterior. Formas exactas y cerradas	14

2.3	La Derivada de Lie	14
2.3.1	Sobre 0-formas	15
2.3.2	Sobre 1-formas	16
2.3.3	Sobre Vectores	16
2.3.4	Sobre 2-formas	16
2.3.5	Sobre tensores tipo (2,0)	16
2.3.6	Sobre tensores tipo (1,1)	17
2.3.7	Propiedades de la Derivada de Lie	17
3	Objetos de Interés en la Dinámica	18
3.1	Dimensión Infinita v/s dimensión finita:	
	Términos de Borde y Condiciones de Borde	18
3.2	Términos de Borde y los operadores Derivada y Anti-Derivada	19
3.3	Objetos Conocidos en la Dinámica en términos de Derivadas de Lie	23
3.3.1	Constantes de Movimiento	23
3.3.2	Ejemplos	23
3.3.3	Corrientes Conservadas	24
3.3.4	Ejemplo	24
3.3.5	Simetrías	25
3.3.6	Ejemplos	25
3.3.7	El Operador de Flujo	26
3.3.8	Propiedades del Operador de Flujo	27
3.4	Principios de Acción	27
3.4.1	Estructuras Lagrangianas en general: Paréntesis de Lagrange (ó 2-forma Simpléctica), par Lagrangiano estándar, y 1-forma Lagrangiana no-estándar	28
3.4.2	Principios de Acción de Weiss	30
3.4.3	Ecuaciones de Euler-Lagrange para los Principios de Acción en términos del Kernel de los Operadores Simplécticos asociados	31
3.4.4	Construcción de pares Lagrangianos estándar a partir de 2-formas Simplécticas	31

3.4.5	Proyección de Lagrangianos estándar en Lagrangianos no-estándar	32
3.4.6	Construcción de 1-formas Lagrangianas no-estándar a partir de 2-formas Simplécticas y Simetrías	34
3.4.7	Construcción de Cantidades Conservadas a partir de Lagrangianos no-estándar	35
3.5	Paréntesis de Poisson y estructuras Hamiltonianas	37
3.5.1	Relación entre el Paréntesis de Poisson y el Paréntesis de Lagrange	39
3.5.2	Ejemplo: Los operadores D y D^{-1}	40
3.6	Simetrías Fuertes	40
4	Construcción de Principios de Acción para Sistemas Integrables: las Jerarquías Korteweg-de Vries (KdV)	41
4.1	La ecuación Korteweg-de Vries (KdV) y sus Jerarquías asociadas . .	42
4.2	El Operador Hereditario o de Nijenhuis	44
4.2.1	Las Jerarquías derecha e izquierdas KdV definidas en términos del Operador Hereditario	45
4.2.2	Generalización y factorización del Operador Hereditario	46
4.2.3	Jerarquía derecha KdV	49
4.2.4	Jerarquías izquierdas KdV	49
4.3	Propiedades de conmutación de vectores en las Jerarquías derecha e izquierdas	50
4.3.1	Jerarquía derecha como una subálgebra Abeliana	50
4.3.2	Cada Jerarquía izquierda como una subálgebra Abeliana	50
4.3.3	Jerarquías izquierdas como el álgebra de Lazos sobre $SL(2, \mathbb{R})$	51
4.3.4	Vectores izquierdos como Simetrías de vectores derechos y viceversa	52
4.3.5	Integrabilidad de toda ecuación de evolución en las Jerarquías derecha e izquierdas	52
4.4	Identificación de algunos vectores izquierdos y derechos como Ecuaciones Integrables conocidas	53

4.4.1	Ecuación de Liouville	53
4.4.2	Ecuación Sinh–Gordon (ShG)	53
4.4.3	Ecuación Korteweg–de Vries (KdV) y ecuación Krichever– Novikov (KN)	54
4.5	Estructuras Lagrangianas para Sistemas Integrables: Escaleras dere- cha e izquierda de Principios de Acción para las Jerarquías derecha e izquierdas KdV	55
4.5.1	Escaleras Simpléticas	56
4.5.2	Forma factorizada y Kernel de las 2–formas Simpléticas en las Escaleras derecha e izquierda: Sistema de coordenadas– u .	58
4.5.3	Escaleras Lagrangianas estándar para toda ecuación de evolución en las Jerarquías	60
4.5.4	Lagrangianos no–estándar derechos e izquierdos para la Jerar- quía derecha KdV	62
4.5.5	Construcción explícita de Escaleras Lagrangianas para las Je- rarquías izquierdas	64
4.5.6	Constantes de Movimiento para vectores izquierdos: Integra- bilidad explícita de los vectores izquierdos	68
4.6	Forma explícita de los Principios de Acción para ecuaciones selec- cionadas en las Jerarquías derecha e izquierdas	69
4.6.1	Ecuación de Liouville pura: Matriz Simplética $\Sigma^{(0)}(\lambda)$	70
4.6.2	Ecuación ShG y algunas deformaciones	72
4.6.3	Ecuación KN y algunas deformaciones	74
5	Lagrangianos, integrabilidad y caos para ecuaciones dinámicas 3D	79
5.1	Repaso	80
5.1.1	Estructuras Lagrangianas para sistemas tridimensionales . . .	81
5.2	Aplicaciones	84
5.2.1	Método para construir una constante de movimiento partiendo de una conocida	84
5.2.2	Teorías Hamiltonianas	85
5.2.3	Más teorías Lagrangianas	85

5.2.4	Simetrías	86
5.3	Ejemplos: La ecuación Lotka–Volterra	86
5.3.1	Caso $b_{ii} = 0$, $i = 1, 2, 3$ (sin términos de Verhulst)	87
5.3.2	Sistema ABC	88
5.3.3	Lagrangianos y caos	90
	Conclusiones	94
	Bibliografía	96

Lista de Figuras

- 4.1 Jerarquías Derecha e Izquierdas KdV de vectores. Éstas comienzan con vectores en el kernel de los Operadores Hereditarios $R(\omega)$ y R^{-1} . Miembros sucesivos se generan en general por contracción con los respectivos operadores, o por derivación con respecto a ω (jerarquías izquierdas). Derivación de Lie a lo largo del vector izquierdo interno $V_{(-3,0)}$ sirve para moverse hacia abajo a través de diferentes jerarquías izquierdas. Derivación de Lie a lo largo del vector Galileano para R mueve de vector en vector hacia la derecha, y hacia la izquierda lo mismo sucede con el vector Galileano para R^{-1} . La ecuación de Sinh-Gordon y la ecuación asociada Camassa-Holm aparecen como ecuaciones de evolución usando los vectores izquierdos $V_{(-1,1)}(\omega)$ y $V_{(-2,1)}(\omega)$, respectivamente. 77
- 4.2 Escaleras izquierda y derecha de operadores simplécticos cerrados. Ellos se generan mediante contracciones sucesivas de $\Sigma^{(1)}$ con los operadores hereditarios. Los operadores simplécticos en la escalera izquierda pueden también generarse por derivación de $\Sigma^{(0)}(\lambda)$ con respecto a λ . Esencialmente, podemos movernos de operador en operador vía derivación de Lie a lo largo del vector Galileano para R hacia la derecha, y hacia la izquierda lo mismo sucede con el vector Galileano para R^{-1} 78

- 4.3 Escaleras izquierda y derecha de 1-formas Lagrangianas estándar. Sus derivadas exteriores son proporcionales a los operadores simplécticos en las escaleras, exceptuando a $L^{(0)}$, que es cerrada. En su lugar, la 1-forma $L^{(M)}$ se obtiene de integrar la correspondiente ecuación. Para las Jerarquías KdV, esta última 1-forma da principios de acción para la ecuación Krichever–Novikov (mapeable a KdV), Sinh–Gordon, Camassa–Holm, y Liouville, siendo posible en este último caso integrar el sistema explícitamente al proyectar la 1-forma Lagrangiana. 78

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo se construyen en forma sistemática teorías Lagrangianas (i.e., objetos geométricos que permiten escribir Principios Variacionales para una ecuación dada) para una amplia gama de sistemas, tanto en dimensión finita como en dimensión infinita. Se usará la formulación de primer orden en derivadas temporales, de ecuaciones autónomas de movimiento. A partir de allí, definimos un espacio vectorial y representamos las ecuaciones de movimiento en términos de un campo vectorial de evolución, el que define un flujo en la variedad respectiva. Por ejemplo, la ecuación Lotka-Volterra (de utilidad en física, [1] biología, [2, 3] y economía [4]):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V^x[x, y, z] = x(a_1 + b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z) \\ \dot{y} &= V^y[x, y, z] = y(a_2 + b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z) \\ \dot{z} &= V^z[x, y, z] = z(a_3 + b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z),\end{aligned}$$

representa un campo vectorial de evolución en tres dimensiones (dimensión finita) y la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) [5, 6]:

$$u_t(x, t) = -u_{xxx}(x, t) - 12u(x, t)u_x(x, t)$$

(subíndices denotan derivada parcial), representa un sistema en dimensión infinita (teoría de campos).

Esta tesis contribuirá a desarrollar, con mayor profundidad, métodos Lagrangianos para estudiar estas y otras ecuaciones de evolución, señalando la vía para futuras

generalizaciones a mayores dimensiones (tanto en dimensión finita como en teoría de campos). La importancia de continuar avanzando por este camino se hace evidente al constatar que:

- La literatura existente es escasa (ver, por ejemplo, las referencias [7, 8]), y usualmente se estudia el tema desde un punto de vista que obscurece el hecho que los vectores de evolución y los **Principios de Acción** o **Variacionales** se encuentran en un mismo esquema: en nuestro formalismo, interpretamos los Lagrangianos como 1-formas que cumplen una ecuación covariante en términos de **derivadas de Lie** a lo largo del flujo, y construimos los Principios Variacionales haciendo un **producto interior** entre la ecuación de evolución y la mencionada 1-forma (ver el capítulo 3, especialmente la sección 3.4).
- El punto de vista Lagrangiano es de gran utilidad a la hora de buscar **soluciones aproximadas** y **efectos radiativos**, [9, 10] y para la construcción de **corrientes conservadas**, **simetrías**, **estructuras Hamiltonianas** y otros objetos de interés para resolver ecuaciones de evolución. [11]
- Para sistemas en dimensión finita, el punto de vista Lagrangiano usado en el estudio de **órbitas cuasiperiódicas** ha probado ser útil y en cierto modo independiente de la **teoría KAM** (ver la referencia [12] para teoremas de existencia).
- La **cuantización** de sistemas se define naturalmente en términos de Lagrangianos. [13]

Luego de un breve repaso, en el capítulo 2, de los conceptos matemáticos necesarios, mostraré en el capítulo 3 que la construcción de teorías Lagrangianas para un sistema dado (también llamada “problema inverso del Cálculo de Variaciones” [14, 7, 15]), la que ha estado históricamente al nivel de la adivinación, es en realidad un elemento fundamental en la descripción de la evolución de cualquier sistema.

El desarrollo presentado en esta tesis de los métodos Lagrangianos, ha permitido realizar nuevos e inesperados avances, entre los cuales destaco:

Dimensión Infinita

Para el caso de dimensión infinita (en el capítulo 4), trabajar en **coordenadas no locales**, dándoles a los **términos de borde** una importancia fundamental, en lo que se conoce como el **Principio de Acción de Weiss**. [16] La construcción de Lagrangianos permitirá conocer nuevas ecuaciones asociadas, llamadas ecuaciones “deformadas” porque el vector de evolución se modifica sumándole una combinación lineal de vectores en el **kernel** de los **operadores simplécticos**. Se construirán corrientes conservadas locales y no locales a partir de los Lagrangianos, usando simetrías Noetherianas y no-Noetherianas. [11]

Para sistemas basados en un **operador de Nijenhuis** [6] (como es el caso de la ecuación KdV), este operador permite construir **jerarquías de vectores** (ver la sección 4.2), cada uno de los cuales representa una posible ecuación de evolución integrable. Existen dos tipos de jerarquías: izquierdas y derechas, y el número de jerarquías dependerá de las dimensiones del kernel del operador de Nijenhuis y de su inversa (formal). Cada jerarquía contiene un *número infinito numerable* de vectores (ver figura 4.1).

Para cada vector de evolución en las jerarquías, se construye en la sección 4.5 una **escalera** de Principios Variacionales (i.e., un número infinito numerable de posibles Principios Variacionales no equivalentes entre sí), cuyos respectivos operadores simplécticos también se ordenan en una escalera, y cada uno de ellos presenta un kernel (diferente) que se escribe explícitamente en términos de vectores en las jerarquías derechas e izquierdas. Así, se obtendrán Principios Variacionales cuyas **ecuaciones de Euler–Lagrange** mezclan diversos vectores en las distintas jerarquías.

En el caso que veremos en detalle (las Jerarquías KdV), se obtendrá, en términos de simples estructuras Lagrangianas y Principios Variacionales, una descripción unificada de: la ecuación KdV (y ecuación Krichever–Novikov) como miembro de la jerarquía derecha; ecuación Sinh–Gordon, ecuación de Liouville, ecuación asociada Camassa–Holm como miembros de las jerarquías izquierdas. Del mismo modo se obtendrán Principios Variacionales cuyas ecuaciones de Euler–Lagrange corresponden a una mezcla (deformación) de las mencionadas ecuaciones (ver la sección 4.6).

Dimensión Finita

Para el caso de sistemas en dimensión finita (en el capítulo 5), entender algunos aspectos de la **integrabilidad**. En particular, para sistemas tridimensionales, la existencia de principios de acción puede en ciertos casos determinar (vía la construcción explícita de constantes de movimiento) si un sistema "cuasi-integrable" [17] es realmente integrable, y llevar a la construcción de un **paréntesis de Poisson** aunque no se conozcan constantes de movimiento. En el caso de la ecuación Lotka-Volterra, la descripción Lagrangiana es útil para describir **sistemas cercanos al caos**: la existencia de Lagrangianos impone ciertas condiciones sobre los puntos fijos del campo vectorial, las que respetan los criterios de Shil'nikov para la existencia de caos espiral, [18] aunque no se han obtenido hasta el momento sistemas que posean al mismo tiempo una **curva homoclina** y una descripción Lagrangiana, dejando abierta la pregunta: ¿es posible esta coexistencia?

Capítulo 2

Matemática Preliminar

En esta sección presentaré un repaso de las nociones que serán útiles para entender la construcción de estructuras Lagrangianas para ecuaciones de evolución. Los elementos matemáticos necesarios están comprendidos esencialmente en la Geometría Diferencial, y presentados en forma especialmente clara en las referencias [15, 19]. Las definiciones y notación usadas aquí son similares a aquellas en las referencias recién citadas. Se mostrarán ejemplos para ilustrar mejor algunos puntos.

2.1 Formalismo de Primer Orden y ecuaciones Autónomas

2.1.1 Ecuación de Movimiento

Una ecuación de evolución arbitraria para cierta(s) función o funciones, que tenga como uno de sus argumentos a un parámetro continuo, que llamaremos tiempo (por ejemplo, la ecuación de ondas en teoría de campos o la ecuación del oscilador armónico en dimensión finita), puede siempre llevarse a la ecuación genérica de movimiento autónoma en primer orden, mediante la definición de nuevas variables, de modo que las nuevas ecuaciones sean autónomas y de primer orden en derivadas temporales: el tiempo no aparece explícitamente en las ecuaciones, y sólo aparecen primeras derivadas temporales en las ecuaciones.

Definición 1. Llamaremos **ecuación de movimiento** o de evolución, a este tipo genérico de ecuaciones. Usaremos la notación de dimensión finita para representar la ecuación de movimiento:

$$\frac{dq^a}{dt} = V^a[q^b], \quad a \in A, \quad (2.1)$$

donde A es denominado **conjunto de índices**: $a \in A$ es un multi-índice que en el caso de dimensión finita sólo recorre valores discretos, y en dimensión infinita (i.e., teoría de campos) toma valores en un producto cruz de conjuntos de índices: un conjunto discreto que rotula los campos definidos en la teoría, y un conjunto continuo que representa las variables independientes (aparte del tiempo) de las que dependen los campos. El conjunto $\{q^a, a \in A\}$ representa simplemente el **sistema de coordenadas** en el que se escriben las ecuaciones, y $\{V^a[q^b], a \in A\}$ define las componentes del **vector de evolución** o **vector velocidad** o **flujo**, que son en general funcionales de las coordenadas q^b para todo valor del índice b .

2.1.2 Ejemplos

Dimensión Finita: Oscilador Armónico

Para el oscilador armónico (OA) en dimensión 1:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0,$$

definimos $q^1(t) = x(t)$, $q^2(t) = \dot{x}(t)$, resultando la ecuación equivalente:

$$\begin{aligned} \frac{dq^1}{dt} &= V_{OA}^1[q^b] = q^2, \\ \frac{dq^2}{dt} &= V_{OA}^2[q^b] = -\omega^2 q^1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

e identificamos en este caso el conjunto de índices $A = \{1, 2\}$.

Dimensión Infinita: Ecuación de Ondas

En dimensión infinita el esquema es similar. Como ejemplo, la ecuación de ondas (EO) para un campo escalar real $u(y, t)$ ($y \in [y_-, y_+] \subset \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$) es:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(y, t) = 0. \quad (2.3)$$

Si definimos los campos

$$\begin{aligned} q^{u_1(y)}(t) &= u(y, t), \\ q^{u_2(y)}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} u(y, t), \end{aligned} \quad (2.4)$$

podemos escribir la ecuación de ondas en primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{dq^{u_1(y)}}{dt} &= V_{EO}^{u_1(y)}[q^b] = q^{u_2(y)}, \\ \frac{dq^{u_2(y)}}{dt} &= V_{EO}^{u_2(y)}[q^b] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} q^{u_1(y)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Aquí, el conjunto de índices $A = \{u_1, u_2\} \times [y_-, y_+]$ es un producto cruz entre el conjunto discreto $\{u_1, u_2\}$ y el conjunto continuo $[y_-, y_+]$, y usamos la notación $a = u_j(y) \in A$. Notemos que en general las componentes del vector de evolución dependen de varios valores de las coordenadas: en el ejemplo precedente, $V_{EO}^{u_2(y)}$ depende de tres valores distintos (infinitesimalmente cercanos) de la coordenada $q^{u_1(y')}$: por definición de derivada, tenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} q^{u_1(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} [q^{u_1(y+2\epsilon)} - 2q^{u_1(y+\epsilon)} + q^{u_1(y)}].$$

Ecuación Korteweg-de Vries

Como último ejemplo, consideremos la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) para el campo $u(x, t)$, $x \in [x_-, x_+] \subset \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$,

$$u_t(x, t) = -u_{xxx}(x, t) - 12u(x, t)u_x(x, t) \quad (2.6)$$

(subíndices denotan derivada parcial), que se escribe en la forma (2.1) bajo los reemplazos:

- del conjunto de índices $A = [x_-, x_+]$ (ahora $a = x \in A$ es un índice continuo),
- de coordenadas $q^a \rightarrow u^x = u(x, t)$, y
- del campo vectorial de evolución $V_{(1,2)}^x[u] \equiv -u_{xxx} - 12u u_x$ (se rotula (1,2) porque es el segundo vector de la jerarquía derecha KdV):

$$\begin{aligned} \dot{u}^x &= V_{(1,2)}^x[u], \quad \text{ó} \\ u_t &= -u_{xxx} - 12u u_x. \end{aligned}$$

2.2 Nociones de Geometría Diferencial

2.2.1 Derivada Funcional. Delta de Dirac

Definición 2. Sea $F[q^b]$ un funcional de las coordenadas. La **derivada funcional** $\frac{\delta}{\delta q^a}$ actuando sobre $F[q^b]$ se denota $\frac{\delta F[q^b]}{\delta q^a}$ y se define mediante la variación del funcional, $\delta F[q^b]$, ante variaciones arbitrarias δq^a de las coordenadas, hasta segundo orden en las variaciones δq^a :

$$\begin{aligned}\delta F[q^a] &\equiv F[q^a + \delta q^a] - F[q^a] \\ &= \frac{\delta F[q^b]}{\delta q^a} \delta q^a + O(\delta^2),\end{aligned}$$

donde se asume aquí y en el resto del trabajo, la **convención de Einstein** de suma y/o integral sobre los índices repetidos.

En dimensión infinita, usualmente aparecen términos de borde, y distribuciones con soporte en el borde, cuya definición se basa en la distribución Delta de Dirac.

Definición 3. Sea $x \in [x_-, x_+] \subset \mathbb{R}$. La Delta de Dirac $\delta(x - x_0)$ es una distribución cuya propiedad es:

$$\int_{x_-}^{x_+} dx \delta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in [x_-, x_+] \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

2.2.2 Ejemplos

Dimensión finita

En este caso la derivada funcional no es más que la derivada parcial, pues estamos hablando de una función. Por ejemplo, en dimensión $d = 2$, la variación de la función $f[x, y]$ es

$$df[x, y] = f[x + dx, y + dy] - f[x, y] = \frac{\partial f}{\partial x}[x, y]dx + \frac{\partial f}{\partial y}[x, y]dy + O(\delta^2).$$

Dimensión infinita

Aquí las cosas son un poco distintas, pues hay que integrar, y usualmente aparecen términos de borde al integrar por partes. Consideremos por ejemplo un campo

$u(x)$, $x \in [x_-, x_+] \subset \mathbb{R}$, y un funcional de u , $F[u; \alpha] = \int_{x_-}^{x_+} dx (u(x) + 2\alpha u(x) u_x(x))$. Entonces la derivada funcional de $F[u; \alpha]$ se calcula tomando la variación de $F[u; \alpha]$:

$$\begin{aligned} \delta F[u; \alpha] &= \int_{x_-}^{x_+} dx [\delta u(x) + 2\alpha \delta u(x) u_x(x) + 2\alpha u(x) \delta u_x(x)] \\ &= \int_{x_-}^{x_+} dx \delta u(x) [1 + \alpha u(x) \hat{\delta}(x)], \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde $\hat{\delta}(x) \equiv \delta(x - x_+) - \delta(x - x_-)$ es una distribución con soporte en el borde. Luego, la derivada funcional de $F[u; \alpha]$ es:

$$\frac{\delta F[u; \alpha]}{\delta u(x)} = 1 + \alpha u(x) \hat{\delta}(x),$$

y se denota también por

$$F_{,x}[u; \alpha] \equiv \frac{\delta F[u; \alpha]}{\delta u(x)}.$$

2.2.3 Espacio Tangente (Vectores)

La ecuación genérica de movimiento (2.1) define a V como vector, es decir un objeto cuyas componentes transforman contravariantemente ante cambios de sistemas de coordenadas. Una transformación arbitraria de coordenadas (puede ser no local) se representa por:

$$q^{\bar{a}} = q^{\bar{a}}[q^a], \quad \bar{a} \in \bar{A}, \quad a \in A$$

(asumimos por simplicidad que la transformación no involucra al tiempo explícitamente, y que la transformación es invertible).

En el nuevo sistema de coordenadas, la velocidad queda:

$$\frac{dq^{\bar{a}}}{dt} = \frac{d}{dt} (q^{\bar{a}}[q^a]) = \frac{\delta q^{\bar{a}}}{\delta q^a} \frac{dq^a}{dt},$$

donde la expresión $\frac{\delta q^{\bar{a}}}{\delta q^a}$ representa la derivada funcional. Como consecuencia de la ecuación anterior, por lo tanto, las componentes del vector de evolución realmente transforman contravariantemente:

$$V^{\bar{a}}[q^{\bar{b}}] = \frac{\delta q^{\bar{a}}}{\delta q^a} V^a[q^b].$$

Definición 4. Lo anterior define naturalmente, para un sistema de coordenadas $\{q^a, a \in A\}$ dado, el espacio vectorial conocido como **espacio tangente** con base local

$$\mathcal{V} = \left\{ \frac{\delta}{\delta q^a}, a \in A \right\}, \quad (2.8)$$

en el que el vector de evolución es invariante, y se escribe indistintamente

$$V = V^a \frac{\delta}{\delta q^a} = V^{\bar{a}} \frac{\delta}{\delta q^{\bar{a}}}.$$

Definición 5. El objeto perteneciente al espacio tangente, $\eta = \eta^a \frac{\delta}{\delta q^a}$, se llama **vector** o **campo vectorial**, donde las componentes $\eta^a = \eta^a[q^b, t]$ son funcionales de las coordenadas y del tiempo.

2.2.4 Espacio Cotangente (1-formas)

La razón principal para trabajar en primer orden radica en la simplicidad que tienen los Principios de Acción o Variacionales en este formalismo. Mostré en el capítulo anterior que una ecuación de movimiento lleva consigo la existencia de un campo vectorial, definido en el espacio tangente. Lo natural es definir para este espacio su espacio dual, o el **espacio cotangente**, o de 1-formas. Anticipo que en este espacio existen las 1-formas Lagrangianas, que darán lugar a principios variacionales para ecuaciones de movimiento.

Definición 6. Refiriéndonos a la base del espacio tangente (2.8), definimos la base del espacio cotangente como:

$$\mathcal{V}^* = \{\delta q^a, a \in A\}, \quad (2.9)$$

de modo que la operación de un elemento de \mathcal{V}^* sobre un elemento de \mathcal{V} se define:

$$\delta q^a \left(\frac{\delta}{\delta q^b} \right) = \delta^a_b, \quad (2.10)$$

donde δ^a_b representa el producto tensorial entre la delta de Kronecker en los índices discretos y la delta de Dirac en los índices continuos.

Definición 7. El objeto perteneciente al espacio cotangente, $U = U_a \delta q^a$, se llama 1-forma, donde las componentes $U_a[q^b, t]$ son funcionales de las coordenadas y del tiempo.

Lema 8. Sea U una 1-forma. Las componentes de U transforman covariantemente, i.e., ante la transformación $q^a = q^a[q^{\bar{a}}]$, se tiene:

$$U_{\bar{a}}[q^{\bar{b}}] = U_a[q^b] \frac{\delta q^a}{\delta q^{\bar{a}}}.$$

2.2.5 Notación

Asumimos desde aquí en adelante que las respectivas componentes U_a de las 1-formas, η^a de los vectores y las componentes de otros tensores que serán definidos, dependen de las coordenadas q^a como también de otros parámetros y del tiempo (excepto el vector de evolución genérico $V^a[q^b]$ que no depende explícitamente del tiempo). De esta manera se omitirá la escritura de la dependencia explícita de los campos en el tiempo y/o en las coordenadas, y se escribirá, por ejemplo, para un vector: $\eta^a = \eta^a[q^b, t]$, indistintamente cuando no haya ambigüedad.

2.2.6 Contracción de vectores y 1-formas

Sean $U = U_a \delta q^a$ una 1-forma y $\eta = \eta^a \frac{\delta}{\delta q^a}$ un vector.

Se extiende la operación (2.10) del espacio cotangente sobre el espacio tangente de manera lineal:

$$U(\eta) \equiv U_a \delta q^a \left(\frac{\delta}{\delta q^b} \right) \eta^b = U_a \delta^a_b \eta^b = U_a \eta^a. \quad (2.11)$$

Lo anterior se conoce como la *contracción de la 1-forma U con el vector η* , o como el *producto interior de η con U* , que se denota por $i_\eta U$ y es un invariante (ver definición 12 de producto interior).

2.2.7 Escalares (0-formas)

Al contraer una 1-forma con un vector, se obtiene una 0-forma, objeto conocido también como escalar debido a sus propiedades de transformación ante cambios de coordenadas.

Definición 9. Un objeto $C = C[q^a, t]$ se define como 0-forma si transforma de la siguiente manera ante transformaciones de coordenadas $q^a = q^{\bar{a}}[q^{\bar{a}}]$:

$$\bar{C}[q^{\bar{a}}, t] = C[q^a[q^{\bar{a}}], t].$$

2.2.8 Tensores en general

Una vez definidos estos objetos, la construcción de productos tensoriales de los espacios tangente y cotangente es directa, llevándonos a tensores con p índices contravariantes y q índices covariantes, o **tensores tipo (p, q)** , donde el caso $(1, 0)$ corresponde a vectores, el caso $(0, 1)$ a 1-formas, y el caso $(0, 0)$ a 0-formas. Formalmente, un tensor tipo (p, q) se escribe:

$$T = T^{a_1 a_2 \dots a_p}_{b_1 b_2 \dots b_q} \frac{\delta}{\delta q^{a_1}} \otimes \frac{\delta}{\delta q^{a_2}} \otimes \dots \otimes \frac{\delta}{\delta q^{a_p}} \otimes \delta q^{b_1} \otimes \delta q^{b_2} \otimes \dots \otimes \delta q^{b_q}. \quad (2.12)$$

Las definiciones desde aquí hasta el final de esta sección están basadas en la referencia [19].

2.2.9 Formas diferenciales

Deben señalarse aparte los espacios de **formas diferenciales** o r -formas que corresponden a tensores tipo $(0, r)$; para $r \geq 2$ éstos son completamente antisimétricos, es decir, cambian de signo ante una permutación de cualquier par de índices. Para construir un espacio de r -formas definimos su base en términos del **producto exterior** entre elementos de la base de 1-formas \mathcal{V}^* :

Definición 10. La base del espacio de r -formas se define por sus elementos obtenidos vía producto exterior:

$$\delta q^{a_1} \wedge \delta q^{a_2} \wedge \dots \wedge \delta q^{a_r} \equiv \sum_{P \in S_r} \text{sgn}(P) \delta q^{a_{P(1)}} \otimes \delta q^{a_{P(2)}} \otimes \dots \otimes \delta q^{a_{P(r)}}, \quad (2.13)$$

donde S_r corresponde al **grupo de permutaciones** o **grupo simétrico** de orden r .

Definición 11. Una r -forma $F^{(r)}$ es una combinación lineal de los elementos de la base, ecuación (2.13):

$$F^{(r)} = \frac{1}{r!} F^{(r)}_{a_1 a_2 \dots a_r} \delta q^{a_1} \wedge \delta q^{a_2} \wedge \dots \wedge \delta q^{a_r}, \quad (2.14)$$

donde los coeficientes $F^{(r)}_{a_1 a_2 \dots a_r}$ son funcionales de las coordenadas, y se toman completamente antisimétricos ante permutaciones de los subíndices, reflejando así la antisimetría de la base.

2.2.10 2-formas

De este modo, una 2-forma se escribe en general:

$$F = \frac{1}{2} F_{ab} \delta q^a \wedge \delta q^b, \quad F_{ab} = -F_{ba}. \quad (2.15)$$

2.2.11 Contracción de vectores con r -formas. Producto Interior

Se puede generalizar el producto interior entre un vector y una 1-forma a r -formas:

Definición 12. Sea $F^{(r+1)}$ una $(r+1)$ -forma y η un vector. Entonces el producto interior entre η y $F^{(r+1)}$ es la r -forma $i_\eta F^{(r+1)}$ con componentes:

$$(i_\eta F^{(r+1)})_{a_1 a_2 \dots a_r} \equiv \eta^b F^{(r+1)}_{b a_1 a_2 \dots a_r}.$$

2.2.12 Derivada Exterior

Seguidamente, uno de los conceptos clave para entender los Principios Variacionales es el de derivada exterior δ : corresponde a una operación que lleva r -formas en $(r+1)$ -formas, para $r \geq 0$, definida así:

Definición 13. Dada la r -forma $F^{(r)}$ definida en ecuación (2.14), su derivada exterior $\delta F^{(r)}$ es la siguiente $(r+1)$ -forma:

$$\delta F^{(r)} = \frac{1}{r!} F^{(r)}_{a_1 a_2 \dots a_r, b} \delta q^b \wedge \delta q^{a_1} \wedge \delta q^{a_2} \wedge \dots \wedge \delta q^{a_r},$$

donde $F_{,a}$ denota la derivada funcional.

Ejemplos

La derivada exterior de la 0-forma $F^{(0)}[q^a]$, es la 1-forma con componentes

$$\delta F^{(0)}_{,a}[q^a] = F^{(0)}_{,a}[q^a].$$

La derivada exterior de la 1-forma $F^{(1)}[q^a]$, es la 2-forma $F^{(2)}$ con componentes

$$F^{(2)}_{ab}[q^a] \equiv \delta F^{(1)}_{ab}[q^a] = F^{(1)}_{b,a}[q^a] - F^{(1)}_{a,b}[q^a].$$

2.2.13 Propiedades de la Derivada Exterior. Formas exactas y cerradas

De la definición se sigue que $\delta^2 = 0$, hecho conocido en tres dimensiones como "el rotor del gradiente es siempre cero". Una r -forma $F^{(r)}$ se denomina **exacta** si $F^{(r)} = \delta G^{(r-1)}$ para alguna $(r-1)$ -forma $G^{(r-1)}$, mientras que $F^{(r)}$ se denomina **cerrada** si $\delta F^{(r)} = 0$. De este modo, se tiene que una forma exacta es cerrada, y el converso es cierto localmente (lema de Poincaré [19]).

Ejemplos

Si vemos los ejemplos de la sección anterior 2.2.12, es claro que la derivada exterior de una 1-forma exacta es cero, es decir $\delta^2 F^{(0)} = 0$ para toda 0-forma $F^{(0)}$. En efecto, la 2-forma

$$\delta^2 F^{(0)}_{ab} = F^{(0)}_{,b,a} - F^{(0)}_{,a,b} \equiv 0$$

es idénticamente cero si $F^{(0)}$ es diferenciable (hecho cierto localmente).

2.3 La Derivada de Lie

En secciones subsecuentes veremos que los objetos de interés para la dinámica, que viene dada por la ecuación de movimiento (2.1), entre los que se cuentan: las constantes de movimiento, las simetrías y los Lagrangianos, son objetos tensoriales que cumplen ecuaciones covariantes en términos de derivadas de Lie a lo largo del vector de evolución V . Esto hace esencial un repaso de la derivada de Lie (ver la referencia [15] para un excelente repaso). Allí se encuentra la definición natural de derivada de Lie de un tensor a lo largo del campo vectorial η en términos de "fluir a lo largo de las líneas de campo".

Nosotros usaremos la siguiente definición:

Definición 14. Sea T un tensor del tipo (p, q) . Su derivada de Lie a lo largo del vector η es otro tensor, definido por:

$$\mathcal{L}_\eta T[q^a, t] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T_\epsilon[q^a + \epsilon \eta^a, t] - T[q^a, t]}{\epsilon}, \quad (2.16)$$

donde se asume que sólo las componentes del tensor T dependen de las coordenadas q^a , y el subíndice ϵ en T_ϵ se aplica a los elementos de la base de los espacios tangente y cotangente, de modo que, para el cambio de coordenadas infinitesimal $\bar{q}^a = q^a + \epsilon \eta^a$, se define

$$\delta q_\epsilon^a \equiv \frac{\delta \bar{q}^a}{\delta q^b} \delta q^b,$$

y de manera contravariante para la base del espacio tangente:

$$\left(\frac{\delta}{\delta q^a} \right)_\epsilon \equiv \frac{\delta q^b}{\delta \bar{q}^a} \frac{\delta}{\delta q^b}.$$

Algunas propiedades que vienen de la definición son:

Proposición 15. Sea η un vector arbitrario. Sean T, \tilde{T} dos tensores arbitrarios del mismo tipo, y Q un tensor cualquiera. La derivada de Lie satisface:

- *Linealidad:*

$$\mathcal{L}_\eta(T + \tilde{T}) = \mathcal{L}_\eta T + \mathcal{L}_\eta \tilde{T},$$

- *Regla de Leibnitz:*

$$\mathcal{L}_\eta(T \cdot Q) = (\mathcal{L}_\eta T) \cdot Q + T \cdot (\mathcal{L}_\eta Q),$$

donde el producto $T \cdot Q$ puede indicar tanto producto tensorial como contracción en un par de índices.

2.3.1* Sobre 0-formas

El caso más simple es la derivada de Lie de un escalar $C[q^a]$. Este tensor no involucra las bases del espacio tangente ni del espacio cotangente, luego su derivada de Lie queda

$$\mathcal{L}_\eta C[q^a] = \frac{dC[q^a + \epsilon \eta^a]}{d\epsilon} = C_{,a} \eta^a.$$

2.3.2 Sobre 1-formas

Para conocer la derivada de Lie de una 1-forma general $U = U_a \delta q^a$ a lo largo del vector η , necesitamos conocer la expresión δq_ϵ^a :

$$\delta q_\epsilon^a = \delta q^a + \epsilon \eta^a_{,b} \delta q^b.$$

Con esto resulta, en componentes:

$$\mathcal{L}_\eta U_a = U_{a,b} \eta^b + \eta^b_{,a} U_a.$$

2.3.3 Sobre Vectores

La derivada de Lie de un vector ζ a lo largo del vector η requiere el conocimiento de:

$$\left(\frac{\delta}{\delta q^a} \right)_\epsilon = \frac{\delta}{\delta q^a} - \epsilon \eta^b_{,a} \frac{\delta}{\delta q^b} + 0(\epsilon^2).$$

Resulta entonces, en componentes,

$$\mathcal{L}_\eta \zeta^a = \zeta^a_{,b} \eta^b - \eta^a_{,b} \zeta^b.$$

Notemos que la derivada de Lie entre vectores es equivalente al conmutador, o paréntesis de Lie,

$$[\eta, \zeta] \equiv \eta \zeta - \zeta \eta = \left[\eta^a \frac{\delta}{\delta q^a}, \zeta^b \frac{\delta}{\delta q^b} \right],$$

expresión que es un vector con componentes dadas por $\mathcal{L}_\eta \zeta$.

2.3.4 Sobre 2-formas

La derivada de Lie de una 2-forma Σ a lo largo de un vector η es la 2-forma

$$\mathcal{L}_\eta \Sigma_{ab} = \Sigma_{ab,c} \eta^c + \Sigma_{ac} \eta^c_{,b} + \Sigma_{cb} \eta^c_{,a}.$$

2.3.5 Sobre tensores tipo (2, 0)

La derivada de Lie de un (2, 0)-tensor J a lo largo de un vector η es el (2, 0)-tensor

$$\mathcal{L}_\eta J^{ab} = J^{ab,c} \eta^c - J^{ac} \eta^b_{,c} - J^{cb} \eta^a_{,c}.$$

2.3.6 Sobre tensores tipo (1, 1)

La derivada de Lie de un (1, 1)-tensor R a lo largo de un vector η es el (1, 1)-tensor

$$\mathcal{L}_\eta R^a{}_b = R^a{}_{b;c} \eta^c + R^a{}_c \eta^c{}_{,b} - R^c{}_b \eta^a{}_{,c}.$$

2.3.7 Propiedades de la Derivada de Lie

Aparte de las propiedades antes mencionadas (linealidad, regla de Leibnitz, y equivalencia al conmutador en el caso de vectores), es útil destacar otras:

Lema 16. Sean η, ζ vectores y F una forma diferencial. Entonces las siguientes propiedades se cumplen:

$$\left[\mathcal{L}_\eta, \mathcal{L}_\zeta \right] = \mathcal{L}_{[\eta, \zeta]},$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, \mathcal{L}_\zeta \right] = \mathcal{L}_{\frac{\partial \zeta}{\partial t}},$$

$$\mathcal{L}_\eta F = (\delta i_\eta + i_\eta \delta) F.$$

Las primeras dos identidades son fáciles de ver. Una demostración de la última puede verse en la referencia [19].

Corolario 17. De la última ecuación se desprende que

$$\left[\delta, \mathcal{L}_\eta \right] = 0,$$

para todo vector η .

Capítulo 3

Objetos de Interés en la Dinámica

En este capítulo veremos cómo los objetos más conocidos, que son de interés para conocer detalles de la dinámica de la ecuación genérica de movimiento (2.1):

$$\frac{dq^a}{dt} = V^a[q^b], \quad a \in A,$$

resuelven una ecuación covariante que se escribe en términos de derivadas de Lie a lo largo del vector de flujo V . Entre estos objetos están las constantes de movimiento y las simetrías, que son ampliamente conocidos. Luego aparecen los Lagrangianos y las 2-formas simplécticas (o Paréntesis de Lagrange), que permiten escribir Principios Variacionales; los Paréntesis de Poisson (u operadores cosimplécticos), que permiten escribir estructuras Hamiltonianas; finalmente, las simetrías fuertes, que están relacionadas con la integrabilidad del sistema.

Nota 18. Usaremos notación de dimensión finita excepto en los ejemplos de dimensión infinita. Veremos que las definiciones usuales requieren una modificación cuando se está en dimensión infinita (teoría de campos), donde consideramos términos de borde: esto no es un capricho, sino que es lo más natural para sistemas continuos.

3.1 Dimensión Infinita v/s dimensión finita:

Términos de Borde y Condiciones de Borde

En nuestro formalismo, los sistemas de dimensión finita y los de dimensión infinita se tratan en el mismo pie, salvo por la aparición de términos de borde en el caso de

dimensión infinita, los que obligan a asumir ciertas **condiciones de borde** (c.b.) sobre las coordenadas, y sobre los vectores y 1-formas permitidos.

Ya conocemos el conjunto de índices A . Por ejemplo, para una teoría en dimensión infinita, para el campo $u(x, t)$, donde $x \in [x_-, x_+]$ y t es el tiempo, se interpreta $A = [x_-, x_+]$. Interesarán los términos evaluados en el borde de A , es decir en los puntos extremos x_{\pm} .

Definición 19. El borde del conjunto de índices A se denota por ∂A .

Por ejemplo, para el conjunto $A = [x_-, x_+] \subset \mathbb{R}$, el borde es el conjunto ordenado de puntos extremos $\partial A = \{x_-, x_+\}$.

Definición 20. Sea una ecuación de movimiento en primer orden para un campo $u(x, t)$ que depende de las variables $t \in \mathbb{R}$ (tiempo), $x \in [x_-, x_+]$. Llamaremos $u_{\pm} \equiv u(x_{\pm}, t)$.

Los términos de borde “ n -forma en el borde” se definen como n -formas centradas en el borde, es decir con soporte en $\partial A = \{x_-, x_+\}$. En particular,

$$0\text{-forma en el borde} = F(u_-, u_+),$$

donde F depende sólo de los valores de u en los bordes, y

$$1\text{-forma en el borde} = F_-[u] \delta u_- + F_+[u] \delta u_+,$$

donde F_{\pm} son funcionales de u . La última ecuación se puede escribir también en componentes, usando la delta de Dirac:

$$(1\text{-forma en el borde})_x = F_-[u] \delta(x - x_-) + F_+[u] \delta(x - x_+).$$

Nota 21. Todas las definiciones y ecuaciones de este capítulo se aplican a sistemas de dimensión finita, haciendo “ n -forma en el borde $\rightarrow 0$ ”.

3.2 Términos de Borde y los operadores Derivada y Anti-Derivada

Como veremos en las próximas secciones, los operadores derivada y anti-derivada son los bloques de construcción de la mayoría de los operadores simplécticos para

las jerarquías KdV. Consecuentemente, la antisimetría, Identidad de Bianchi y las ecuaciones que definen a las estructuras simplécticas descansan en la antisimetría de los primeros operadores.

Sean $f(x), g(x)$ funciones complejas de $x \in [x_-, x_+]$.

Definición 22. El Operador Derivada D está definido por $Df(x) = \frac{Df}{Dx}(x)$.

Definición 23. El Operador Anti-Derivada D^{-1} se define por

$$D^{-1}f(x) = \int_{x_-}^{x_+} dx' \epsilon(x - x') f(x'),$$

donde $\epsilon(x) = \frac{1}{2}\text{sgn}(x)$ es la mitad de la función signo.

Vamos a trabajar con transpuestos de operadores: en particular, los paréntesis de Lagrange son tensores $(0, 2)$ antisimétricos, y los paréntesis de Poisson son tensores $(2, 0)$ antisimétricos, luego interesa comprobar explícitamente las propiedades de antisimetría. Consideremos el producto interior entre un vector $\eta^x = v(x)$ y una 1-forma $U_x = w(x)$: $\langle \eta, U \rangle \equiv \eta^x U_x = \int_{x_-}^{x_+} dx v(x) w(x)$.

Definamos, para cada 2-forma P considerada como operador, su transpuesta P^* así: $\langle \eta, P\zeta \rangle = \langle P^*\eta, \zeta \rangle$, donde η, ζ son vectores cualesquiera. Del mismo modo se define la transpuesta de tensores $(2, 0)$ antisimétricos, que en este caso actúan sobre 1-formas.

Es fácil mostrar que $(D^{-1})^* = -D^{-1}$, i.e., el operador anti-derivada es antisimétrico. Se verá más adelante que esto representa el primer principio de acción para la ecuación KdV, donde el operador anti-derivada se considera como una 2-forma simpléctica.

La antisimetría del operador anti-derivada es independiente de los valores en el borde de las funciones involucradas (en este caso de los vectores contravariantes). Pero consideremos ahora su inversa, es decir, el operador derivada entendido como tensor $(2, 0)$: por definición, tenemos

$$DD^{-1} = \mathbb{I},$$

actuando por la izquierda sobre cualquier función. Esto significaría a primera vista que el operador D es antisimétrico. Pero una inspección más profunda muestra que

se deben imponer algunas c.b. y así restringir el espacio de las 1-formas para que se respete la antisimetría. En efecto, se puede ver que

$$D^* = -D + \hat{\delta}(x),$$

donde se hace la siguiente

Definición 24. Los operadores multiplicativos con soporte en el borde, $\hat{\delta}(x)$ y $\bar{\delta}(x)$, se definen en términos de la distribución Delta de Dirac de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(x) &\equiv \delta(x - x_+) - \delta(x - x_-), \\ \bar{\delta}(x) &\equiv \delta(x - x_+) + \delta(x - x_-).\end{aligned}$$

Contrayendo $D + D^*$ con dos 1-formas arbitrarias $F_x = f(x)$ y $G_x = g(x)$, nos queda

$$F \cdot (D + D^*) \cdot G = \int_{x_-}^{x_+} dx f(x) \hat{\delta}(x) g(x) = f(x_+) g(x_+) - f(x_-) g(x_-),$$

lo que no es cero para c.b. arbitrarias en las 1-formas. Para que lo anterior sea cero, y por lo tanto el operador D sea un buen paréntesis de Poisson (i.e., antisimétrico en este caso), debe restringirse el espacio de 1-formas: en el ejemplo precedente, pueden pedirse c.b. periódicas o antiperiódicas sobre $f(x)$ y $g(x)$.

Esta y otras condiciones similares nos dirán cuáles c.b. imponer sobre los campos considerados en las siguientes secciones con relación a respetar antisimetría, Identidad de Bianchi e Identidad de Jacobi, propiedades fundamentales para describir principios de acción y teorías Hamiltonianas.

Al tratar con bordes en una dimensión continua, encontramos esencialmente dos tipos de términos de borde:

Definición 25. Sea $f(x)$ una función. Los términos de borde $\widehat{f(x)}$ y $\overline{f(x)}$ son independientes de x y se definen por

$$\widehat{f(x)} = f(x_+) - f(x_-) \equiv f_+ - f_- \quad , \quad \overline{f(x)} = f(x_+) + f(x_-) \equiv f_+ + f_- .$$

Mencionamos dos propiedades de factorización, de estos términos de borde:

Proposición 26. Sean $f(x)$, $g(x)$ funciones. Entonces

$$\begin{aligned} 2 \overbrace{f(x)g(x)} &= \overbrace{f(x)} \overbrace{g(x)} + \overbrace{f(x)} \overbrace{g(x)}, \\ 2 \overline{f(x)g(x)} &= \overline{\overbrace{f(x)} \overbrace{g(x)}} + \overline{\overbrace{f(x)} \overbrace{g(x)}}. \end{aligned}$$

Finalmente, por completitud, veremos unas propiedades útiles en el tratamiento de transpuestas de operadores, relacionadas con los operadores derivada y anti-derivada:

Proposición 27. Los operadores D y D^{-1} cumplen

$$\begin{aligned} D^{-1}D &= \mathbb{I} - \frac{1}{2}1 \otimes \bar{\delta}, \\ \hat{\delta}D^{-1} &= \frac{1}{2}\bar{\delta} \otimes 1, \\ \bar{\delta}D^{-1} &= \frac{1}{2}\hat{\delta} \otimes 1. \end{aligned}$$

De estas propiedades se deduce sin ambigüedad que $DD^{-1} = \mathbb{I}$ como operador, actuando tanto por la izquierda como por la derecha (en cuyo caso se toma la transpuesta).

Es importante recalcar que el operador anti-derivada tal como lo definimos aquí cumple de manera natural la antisimetría, relevante para la descripción de teorías Lagrangianas. Sin embargo, anteriormente en la literatura se le ha dado al operador anti-derivada un significado ambiguo, sumándole una constante de integración arbitraria. [20] Peor es el caso del operador derivada, que como vimos requiere de c.b. explícitas sobre los campos para ser antisimétrico. Puede verse en la referencia [7], p. 319, la definición $DD^{-1} = D^{-1}D = \mathbb{I}$, lo que equivale a asumir $D^* = -D$, es decir, se asume implícitamente que todos los campos cumplen c.b. usuales. Estas condiciones permiten estudiar las simetrías locales de KdV, pero no son suficientes para describir algunos objetos no locales (ejemplos de los cuales veremos en las próximas secciones).

3.3 Objetos Conocidos en la Dinámica en términos de Derivadas de Lie

3.3.1 Constantes de Movimiento

Dado el vector de evolución V y su ecuación de movimiento, interesa conocer los funcionales que se mantienen constantes, o se preservan en el tiempo. La utilidad de esto es evidente, pues nos permite reducir el número de grados de libertad del sistema, integrarlo en ciertos casos, y en términos de cálculo numérico nos sirve para comprobar los resultados computacionales.

Estos funcionales conservados, o constantes de movimiento, son 0-formas $C[q^a, t]$ cuya derivada total temporal a lo largo del flujo es cero, es decir:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{C[q^a + \epsilon V^a, t + \epsilon] - C[q^a, t]}{\epsilon} = 0,$$

lo que, por definición de derivada de Lie, ecuación (2.16), se escribe

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V \right) C[q^a, t] = 0,$$

o explícitamente, en términos de derivadas funcionales,

$$\frac{\partial}{\partial t} C[q^b, t] + C_{,a}[q^b, t] V^a[q^b, t] = 0.$$

3.3.2 Ejemplos

Dimensión Finita

El oscilador armónico, definido por el vector de evolución V_{OA} , ecuación (2.2), posee la siguiente constante de movimiento tiempo-independiente (conocida como la energía):

$H^{OA}[q^1, q^2] = (q^2)^2 + \omega^2 (q^1)^2$. La derivada funcional de H^{OA} es:

$$\frac{\partial H^{OA}}{\partial q^i}[q^a] = 2(\omega^2 q^1, q^2).$$

Contrayendo con el vector de evolución V_{OA} , queda la expresión

$$\mathcal{L}_{V_{OA}} H^{OA}[q^1, q^2] = (2\omega^2 q^1)(q^2) + (2q^2)(-\omega^2 q^1) = 0.$$

Dimensión Infinita

La ecuación KdV (2.6), bajo c.b. cíclicas para u y sus derivadas en $x = x_{\pm}$, posee una constante de movimiento explícitamente tiempo-dependiente: [21] $C^{(1)}[u, t] = \int_{x_-}^{x_+} dx (xu - 6tu^2)$. La derivada funcional de $C^{(1)}[u, t]$ es

$$C^{(1)}{}_{,x}[u, t] \equiv \frac{\delta}{\delta u^x} C^{(1)}[u, t] = x - 12tu(x, t),$$

mientras que la expresión $C^{(1)}{}_{,x}V_{(1,2)}{}^x[u, t]$ resulta ser

$$\int_{x_-}^{x_+} dx (x - 12tu)(-u_{xxx} - 12uu_x) = 6 \int_{x_-}^{x_+} dx u^2,$$

luego de algunas integraciones por partes. Por lo tanto, queda

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{V_{(1,2)}} \right) C^{(1)} = \frac{\partial}{\partial t} C^{(1)} + C^{(1)}{}_{,x}V_{(1,2)}{}^x = 0. \quad (3.1)$$

3.3.3 Corrientes Conservadas

Paralelamente a la definición de constante de movimiento, la cual es útil en sistemas de dimensión finita, para dimensión infinita tenemos que usar en la práctica la corriente conservada, que se define en términos de una 0-forma $C[q^a, t]$ que es "casi" una constante de movimiento, en el sentido que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V \right) C[q^a, t] = 0\text{-forma en el borde},$$

donde la "0-forma en el borde" es una 0-forma con soporte en el borde ∂A del conjunto de índices.

3.3.4 Ejemplo

Consideremos la ecuación KdV. Si asumimos c.b. arbitrarias sobre $u(x_{\pm}, t)$ y sus derivadas, la expresión (3.1) da lugar a términos de borde solamente:

$$C^{(1)}{}_{,x}V_{(1,2)}{}^x + \frac{\partial}{\partial t} C^{(1)} = 0\text{-forma en el borde} \equiv - \int_{x_-}^{x_+} dx \frac{D}{Dx} \mathcal{J}_{(1)}{}^x(x, t),$$

los que, al poner $C^{(1)}[u] = \int_{x_-}^{x_+} dx \mathcal{J}_{(1)}{}^t(x, t)$, definen una corriente conservada $\mathcal{J}_{(1)}(x, t) = (\mathcal{J}_{(1)}{}^t(x, t), \mathcal{J}_{(1)}{}^x(x, t))$ que cumple (on-shell)

$$\frac{D}{Dt} \mathcal{J}_{(1)}{}^t + \frac{D}{Dx} \mathcal{J}_{(1)}{}^x = 0.$$

En este caso, obtenemos la corriente conservada:

$$\mathcal{J}_{(1)}(x, t) = (xu - 6tu^2, u_x - 6xu^2 - xu_{xx} + 48tu^3 - 6tu_x^2 + 12tu_{xx}).$$

Luego, una corriente conservada es una generalización de una constante de movimiento cuando se toman c.b. arbitrarias sobre los campos en el borde (en este caso, en $x = x_{\pm}$). Es importante recalcar, sin embargo, que sólo necesitamos conocer la 0-forma "constante de movimiento" para calcular todas las componentes de la corriente conservada.

3.3.5 Simetrías

Dado el vector de evolución V , pueden existir otros vectores, denominados simetrías de V , que se definen así: al moverse en la variedad infinitesimalmente usando desplazamientos dados por un campo de simetría, se mapean curvas solución en curvas solución (una curva solución o línea de flujo se define por su condición inicial y los subsecuentes puntos que resultan de evolucionar con el flujo V esa condición inicial). En este caso, la definición sirve indistintamente para los sistemas de dimensión finita como para los de dimensión infinita.

Definición 28. El campo vectorial η es simetría de V si lleva soluciones de la ecuación (2.1) en soluciones de la misma, en el sentido que dada cualquier solución: $q^a(t)$ tal que $\dot{q}^a(t) = V^a[q^b(t)]$, entonces $\tilde{q}^a \equiv q^a + \epsilon \eta^a[q^b, t]$ también es solución hasta orden ϵ , i.e.:

$$\dot{\tilde{q}}^a(t) = V^a[\tilde{q}^b(t)] + O(\epsilon^2).$$

De la definición anterior se sigue que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V \right) \eta[q^a, t] = 0. \quad (3.2)$$

3.3.6 Ejemplos

Como ejemplo, para la ecuación de ondas (2.3) se presenta una simple simetría que consiste en multiplicar las coordenadas independientes (y, t) por el mismo factor, lo

que define a la **simetría de dilatación** (comparar con la definición del vector de evolución V_{EO} , ecuación (2.5)):

$$\begin{aligned}\eta^{u_1(y)}[q^b(t), t] &= y \frac{\partial}{\partial y} q^{u_1(y)} + t q^{u_2(y)}, \\ \eta^{u_2(y)}[q^b(t), t] &= y \frac{\partial}{\partial y} q^{u_2(y)} + q^{u_2(y)} + t \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} q^{u_1(y)}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Para este caso, se cumple la ecuación (3.2) que define a η como simetría para la ecuación de ondas. Notar que η depende explícitamente del tiempo, en efecto $\partial_t \eta = V_{\text{EO}}$.

Para la ecuación KdV (2.6), las simetrías Galileana y de dilatación se definen respectivamente por

$$\eta_{\text{gal}}[u, t]^x = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} t u_x, \quad (3.4)$$

$$\eta_{\text{dil}}[u, t]^x = u + \frac{1}{2} x u_x - t \left(\frac{3}{2} u_{xxx} + 18 u u_x \right). \quad (3.5)$$

Estas simetrías son muy importantes para la construcción de principios de acción y constantes de movimiento para la ecuación KdV y sus jerarquías relacionadas (ver ejemplos en el capítulo 4, y en teorema 70). Respondemos así en nuestro esquema un problema abierto que aparece en la literatura [22] concerniente al rol que juegan las simetrías Galileana y de dilatación en la descripción de estos sistemas, en particular en la construcción de constantes de movimiento.

3.3.7 El Operador de Flujo

Ya hemos visto la ecuación alternativa para constantes de movimiento y simetrías. Escrita en términos de derivadas de Lie, tiene la misma forma: un operador que al actuar sobre el objeto lo anula.

Definición 29. Sea V un vector cualquiera. El Operador de Flujo, que actúa sobre tensores y pseudo-tensores, se define por

$$\mathcal{M}_V \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_V \right),$$

donde $\frac{\partial}{\partial t}$ denota derivada temporal en la dependencia explícita del tiempo.

No veremos aquí en general cómo actúa el Operador de Flujo sobre pseudo-tensores. No obstante, en el capítulo 5 trabajaremos en forma consistente con el elemento de volumen, un pseudo-escalar. Ver la referencia [15] para mayores detalles sobre el elemento de volumen y otros pseudo-tensores.

3.3.8 Propiedades del Operador de Flujo

En primer lugar, este operador hereda todas las propiedades de la derivada de Lie: es lineal, cumple la regla de Leibnitz, y su acción sobre un tensor entrega un tensor del mismo tipo. Veremos a continuación que este operador es crucial en la definición de principios de acción para la ecuación de movimiento (2.1).

3.4 Principios de Acción

Es aquí donde las 1-formas hacen su aparición en la dinámica.

Consideremos la ecuación de evolución (2.1). Un Principio Variacional o Principio de Acción para esta ecuación está definido por las siguientes condiciones:

1. Las ecuaciones de Euler-Lagrange deben ser de primer orden en las derivadas temporales, por lo tanto la densidad Lagrangiana debe depender linealmente en las velocidades.
2. Las ecuaciones de Euler-Lagrange deben ser compatibles con las ecuaciones de evolución, es decir, deben cumplirse cuando se cumplen las ecuaciones de evolución.

El converso del último punto dependerá de las simetrías que posea el Principio Variacional, más específicamente del Kernel de la 2-forma simpléctica; las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al principio de acción pueden ser más generales que las ecuaciones de evolución, conteniendo a estas ecuaciones como un caso particular, como se verá en los ejemplos.

3.4.1 Estructuras Lagrangianas en general: Paréntesis de Lagrange (ó 2-forma Simpléctica), par Lagrangiano estándar, y 1-forma Lagrangiana no-estándar

Empezamos por definir los objetos clave para una descripción Lagrangiana: 2-forma simpléctica o Paréntesis de Lagrange, [11] par Lagrangiano estándar y 1-forma Lagrangiana no-estándar. Las definiciones son un poco más generales que las usuales en el sentido que incluyen posibles 1-formas y 2-formas con soporte en el borde continuo del conjunto de índices A , definido en ecuación (2.1); como hemos visto en el caso de corrientes conservadas, estas formas con soporte en el borde aparecen cuando se toman c.b. arbitrarias (o ninguna).

Definición 30. Una 2-forma simpléctica para el vector de evolución V es una 2-forma Σ que satisface

$$\begin{aligned}\delta\Sigma &= 0 && \text{(cerradura o Identidad de Bianchi)} \\ \mathcal{M}_V\Sigma &= \delta(1\text{-forma en el borde}).\end{aligned}\tag{3.6}$$

Nota 31. En general, la Identidad de Bianchi y/o la propiedad de antisimetría de la 2-forma simpléctica imponen algunas c.b. sobre los campos y el espacio vectorial permitido.

Ejemplo

La siguiente es una 2-forma simpléctica para la ecuación definida por el vector de evolución $V_{(1,1)}^x[u] \equiv -u_x(x, t)$ (rotulado (1, 1) por ser el primer vector de la jerarquía derecha KdV):

$$\Sigma^{(1)}_{xx'}[u] = \epsilon(x - x'),$$

donde la función $\epsilon(x)$ está definida en la sección 3.2. Notar que el comentario de arriba no se aplica en este caso: la Identidad de Bianchi y la antisimetría se satisfacen automáticamente. La única ecuación no trivial es la que involucra la derivada de Lie.

Resulta

$$\mathcal{L}_{V_{(1,1)}} \Sigma^{(1)}[u] = \frac{1}{2} (1 \otimes \bar{\delta} - \bar{\delta} \otimes 1),$$

lo que se puede escribir como la derivada exterior de la 1-forma centrada en el borde

$$U_{,x}^{\text{bor}}[u] = \frac{1}{2} \bar{\delta}(x) \int_{x_-}^{x_+} dx' u(x').$$

Nota 32. A veces escribimos una 2-forma Σ como un operador integro-diferencial cuando se consideran contracciones con vectores. Sea el vector $\eta^x = f(x)$ y contráigase con la 2-forma obteniendo $g(x) \equiv \Sigma_{xx'} \eta^{x'}$. La última expresión es escrita como el operador Σ actuando sobre la "función" $f(x)$ en la forma $g(x) = \Sigma f(x)$.

Entonces la expresión de operador para $\Sigma^{(1)}$ es

$$\Sigma^{(1)}[u] = D^{-1}.$$

Definición 33. Sea L una 1-forma y K una 0-forma. El par $(L; K)$ se llama par Lagrangiano estándar para V si y sólo si

$$\mathcal{M}_V L - \delta K = 1\text{-forma en el borde.} \quad (3.7)$$

Definición 34. En el caso especial de un par Lagrangiano estándar $(L; K = 0)$ para V con $K = 0$, L se llama 1-forma Lagrangiana no-estándar o simplemente Lagrangiano no-estándar para V y cumple

$$\mathcal{M}_V L = 1\text{-forma en el borde.} \quad (3.8)$$

La construcción de la densidad Lagrangiana usual, o específicamente del funcional de acción en términos del par Lagrangiano estándar, se verá en la sección 3.4.2 que viene a continuación.

Nota 35. Veremos luego que hay una característica muy importante que distingue a la 1-forma Lagrangiana no-estándar del par Lagrangiano estándar: la primera lleva naturalmente a la construcción de cantidades conservadas.

Nota 36. Los términos con soporte en el borde, en general dependen del sistema de coordenadas usado, pues el borde en un sistema de coordenadas puede ser "interior" en otro sistema si la transformación es no local, que es el caso general. Por ello, bajo una transformación de coordenadas, los términos de borde que resultan de las ecuaciones de arriba (3.7), (3.8) deben ser recalculados en cada caso.

3.4.2 Principios de Acción de Weiss

Definición 37. El funcional de acción, o simplemente la **Acción** para la ecuación de movimiento con vector de evolución V , acción que está asociada al par Lagrangiano estándar $(L; K)$ para V , se define por

$$S[q^a(t)] = \int_{t_-}^{t_+} dt \left\{ L_a[q^b, t] (\dot{q}^a - V^a[q^b]) + K[q^b, t] \right\}. \quad (3.9)$$

Definición 38. El principio de acción de Weiss consiste en exigir que la variación de la Acción (3.9), hasta segundo orden en las variaciones **arbitrarias** δq^a , sea igual a términos de borde solamente, es decir

$$\delta S[q^a(t)] = F_a[q^b, t] \delta q^a(t) \Big|_{t_-}^{t_+} + \int_{t_-}^{t_+} dt \sum_{b \in \partial A} G_b[q^a, t] \delta q^b(t) + O((\delta q)^2).$$

Definición 39. Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a la Acción (3.9) se definen como la derivada funcional de $S[q^a(t)]$ descartando términos de borde, o equivalentemente, como el término que queda multiplicando a las variaciones arbitrarias δq^a al hacer la variación de la Acción (3.9) bajo el principio de Weiss.

Con las definiciones de arriba, concluimos la construcción de Principios de Acción de Weiss [16] para la ecuación de movimiento (2.1) con vector de evolución V :

Teorema 40. *El Principio Variacional dado por la Acción (3.9),*

$$S[q^a(t)] = \int_{t_-}^{t_+} dt \left\{ L_a(\dot{q}^a - V^a) + K \right\},$$

donde $(L; K)$ es un par Lagrangiano estándar para V , da las siguientes ecuaciones de Euler-Lagrange bajo el Principio de Weiss:

$$\Sigma_{ab} (\dot{q}^b - V^b) = 0, \quad (3.10)$$

donde $\Sigma_{ab} \equiv L_{b,a} - L_{a,b}$ son componentes de la 2-forma simpléctica $\Sigma \equiv \delta L$.

Definición 41. Se definen las c.b. usuales sobre las variaciones δq^a , de la manera siguiente: $\delta q^a(t_{\pm}) = 0 \quad \forall a \in A$ y $\delta q^b(t) = 0 \quad \forall b \in \partial A$.

Se definen también las c.b. usuales sobre las coordenadas q^a de manera similar.

Lema 42. *Bajo c.b. usuales, los términos de borde del principio de Weiss se anulan, obteniéndose las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.10) a partir del principio usual $\delta S = 0$.*

3.4.3 Ecuaciones de Euler–Lagrange para los Principios de Acción en términos del Kernel de los Operadores Simpléticos asociados

Supongamos que los vectores $\{\eta_j\}_{j=1}^{N(\Sigma)}$ generan el kernel de la 2-forma simpléctica Σ (el espacio kernel depende de c.b. específicas para los campos y coordenadas). Entonces las ecuaciones de Euler–Lagrange son ecuaciones deformadas o modificadas para nuestro sistema, diferentes de $\dot{q}^b = V^b$, hasta vectores en el kernel de Σ :

$$\dot{q}^b = V^b + \sum_{j=1}^{N(\Sigma)} \alpha_j \eta_j^b,$$

donde α_j son 0-formas arbitrarias. Ejemplos se verán en detalle en los capítulos 4 y 5.

3.4.4 Construcción de pares Lagrangianos estándar a partir de 2-formas Simpléticas

A veces sólo disponemos de una 2-forma simpléctica Σ , desde la cual puede ser construido un par Lagrangiano estándar simplemente encontrando la “integral” de la 2-forma cerrada, i.e., cualquier 1-forma L tal que $\delta L = \Sigma$ (esto puede hacerse localmente). El par Lagrangiano estándar se completa con la integral K de $\delta K = \mathcal{M}_V L + 1$ -forma en el borde.

Ejemplo

Para la ecuación KdV, un par Lagrangiano estándar puede construirse fácilmente a partir de $\Sigma^{(1)}[u]$: claramente, la 1-forma

$$U^{(1)}[u]_x = -\frac{1}{2} D^{-1} u(x, t)$$

satisface $\delta U^{(1)}[u] = \Sigma^{(1)}[u]$, y queda encontrar el segundo miembro del par $(U^{(1)}[u]; K^{(1)}[u])$ resolviendo:

$$\delta K^{(1)}[u]_x + 1\text{-forma en el borde} = \mathcal{M}_{V(1,2)} U^{(1)}[u]_x = -3u(x, t)^2 - \frac{1}{4} (6u^2 + u_{xx}).$$

Es fácil ver que $K^{(1)}[u] = \int_{x_-}^{x_+} dx \left(-u^3 - \frac{1}{4} \left(\overline{6u^2 + u_{xx}} \right) u \right)$ resuelve la ecuación. Notar la aparición al variar, de términos de borde, los que aportan a la “1-forma en el borde”. Consecuentemente, el funcional de acción es

$$S[u(x, t)] = \int_{t_-}^{t_+} dt \int_{x_-}^{x_+} dx \left\{ -\frac{1}{2} (D^{-1}u) (u_t + u_{xxx} + 12u u_x) + \left(-u^3 - \frac{1}{4} \left(\overline{6u^2 + u_{xx}} \right) u \right) \right\}, \quad (3.11)$$

y el principio de acción de Weiss para este funcional se escribe

$$\begin{aligned} \delta S[u(x, t)] &= -\frac{1}{2} \int_{x_-}^{x_+} dx \delta u D^{-1}u \Big|_{t_-}^{t_+} \\ &+ \int_{t_-}^{t_+} dt \left\{ \overline{12u \delta u + \delta u_{xx}} \left(\int_{x_-}^{x_+} dx' u(x') \right) + \overbrace{u_x \delta u - u \delta u_x} \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Finalmente, las ecuaciones de Euler–Lagrange, que corresponden a reunir los términos de primer orden en la variación de la Acción (3.11) bajo la condición (3.12), son:

$$\begin{aligned} 0 &= D^{-1}u_t + (6u^2 + u_{xx}) - \frac{1}{2} \left(\overline{6u^2 + u_{xx}} \right) \\ &= D^{-1} (u_t + 12u u_x + u_{xxx}), \end{aligned}$$

y son claramente equivalentes a la ecuación KdV.

Nota 49. Este principio de acción no local es nuevo hasta donde sabemos; pero al mapear al sistema de coordenadas- ϕ , tal que $\phi_x(x, t) = u(x, t)$, éste se vuelve un principio de acción “local” (i.e., contiene sólo la coordenada- ϕ y sus derivadas) que está en la literatura [23] bajo c.b. usuales. Esto muestra dos ventajas de nuestro formalismo: como no hace diferencia entre expresiones locales y no locales, no hay necesidad de buscar un sistema coordinado “especial” en el cual toda estructura tensorial sea local; y al incorporar términos de borde, no exige asumir c.b. usuales para cada problema.

3.4.5 Proyección de Lagrangianos estándar en Lagrangianos no-estándar

Un Lagrangiano no-estándar se puede construir formalmente a partir de uno estándar por medio de una operación nueva (hasta donde sabemos, en este contexto) llamada “proyección”, que consiste en una serie infinita de potencias en el tiempo, que puede

o no ser fácil de manipular o incluso evaluar su radio de convergencia, pero que a veces funciona con sistemas Integrables.

Definición 44. Dado un vector de evolución autónomo V , se define el proyector \mathcal{P}_V como el operador

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_V(t) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \mathcal{M}_V^n \\ &= e^{-t \frac{\mathcal{L}}{V}} \mathcal{P}_{V=0}(t).\end{aligned}\tag{3.13}$$

La última expresión clarifica la operación: al actuar sobre un tensor R , el operador $\mathcal{P}_{V=0}(t)$ corresponde a poner $t = 0$ donde sea que t aparezca explícitamente en R , y el operador $e^{-t \frac{\mathcal{L}}{V}}$ le devuelve a R la dependencia temporal explícita, con nuevos coeficientes tales que

Lema 45. *Para cualquier vector de evolución V , el Operador de Flujo aniquila cualquier tensor proyectado.*

Este lema, en el caso de 1-formas Lagrangianas estándar, da una prescripción para construir 1-formas Lagrangianas no-estándar, las que usualmente contienen términos con soporte en el borde. En general este proceso cambia las 2-formas simplécticas, sumándoles la derivada exterior de una 1-forma con soporte en el borde. Por lo tanto se demuestra más simple, para estructuras Lagrangianas, definir una proyección que no tome en cuenta los términos de borde, de modo que la aplicación del Operador de Flujo sobre la 1-forma Lagrangiana no-estándar proyectada dé lugar a términos de borde, pero la 2-forma simpléctica asociada no cambie:

Corolario 46. *Sea $(L; K)$ un par Lagrangiano estándar para V :*

$$\mathcal{M}_V L = \delta K + 1\text{-forma en el borde.}$$

Entonces, la proyección de L a lo largo de V que no proyecta términos de borde, i.e., la 1-forma:

$$\tilde{L} = L - \delta \left(\partial_t^{-1} K - \partial_t^{-2} \frac{\mathcal{L}}{V} K + \partial_t^{-3} \frac{\mathcal{L}^2}{V} K - \dots \right), \tag{3.14}$$

donde ∂_t^{-n} denota la n -ésima integración en la dependencia temporal explícita solamente, es una 1-forma Lagrangiana no-estándar para V :

$$\mathcal{M}\tilde{L} = 1\text{-forma en el borde}$$

(el mismo borde que antes), y su principio variacional da las mismas ecuaciones de movimiento que el Lagrangiano estándar $(L; K)$, i.e., la 2-forma simpléctica $\delta\tilde{L} = \delta L$ no cambia.

Ejemplo

Ver ejemplo para la ecuación KdV en la próxima subsección.

3.4.6 Construcción de 1-formas Lagrangianas no-estándar a partir de 2-formas Simplécticas y Simetrías

El siguiente corolario entrega un método para construir una 1-forma Lagrangiana no-estándar para un vector de evolución V , partiendo sólo de una simetría y una 2-forma simpléctica:

Corolario 47. Sea Σ una 2-forma simpléctica y η una simetría para V . Entonces la 1-forma definida por $L = i_\eta \Sigma$ es una 1-forma Lagrangiana no-estándar para V , y su 2-forma simpléctica asociada es $\delta L = \mathcal{L}_\eta \Sigma$.

Para el caso especial de 1-formas cerradas, $\mathcal{L}_\eta \Sigma = 0$, este corolario corresponde al teorema de Noether sobre la construcción de constantes de movimiento; en el caso genérico $\mathcal{L}_\eta \Sigma \neq 0$ (simetrías no-Noetherianas [11]) el corolario es usado para construir principios de acción. Usualmente, c.b. explícitas para los campos y coordenadas deben usarse en cada caso.

Ejemplo

Usando $\Sigma[u] = \Sigma^{(1)}[u]$ como una 2-forma simpléctica y $\eta[u, t] = \eta_{\text{dil}}[u, t]$, la simetría de dilatación, construiremos una 1-forma Lagrangiana no-estándar para KdV. Se necesitan c.b. usuales para la coordenada u y los campos vectoriales.

La 1-forma Lagrangiana no-estándar $U^{(2)}[u, t] = \eta_{\text{ad}}[u, t] \cdot \Sigma^{(1)}[u]$ es, en componentes:

$$U^{(2)}[u, t]_x = -\frac{1}{2} D^{-1}u - \frac{1}{2} x u - \frac{3}{2} t \frac{\delta}{\delta u^x} H^{(2)}[u],$$

donde $H^{(2)}[u] = \int_{x_-}^{x_+} dx \left(\frac{1}{2} u_x^2 - 2u^3 \right)$ es una constante de movimiento. Notar que $U^{(2)}[u, t]$ es igual a la proyección de la 1-forma Lagrangiana estándar $U^{(2)}[u, t = 0]_x = -\frac{1}{2} D^{-1}u - \frac{1}{2} x u$.

Este Lagrangiano no-estándar define el siguiente principio de acción:

$$S[u(x, t)] = \int_{t_-}^{t_+} dt \int_{x_-}^{x_+} dx \left\{ -\frac{1}{2} D^{-1}u - \frac{1}{2} x u + t \left(9u^2 + \frac{3}{2} u_{xx} \right) \right\} (u_t + u_{xxx} + 12u u_x),$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange resultan ser

$$D^{-1}(u_t + u_{xxx} + 12u u_x) = 0,$$

al asumir c.b. usuales sobre la coordenada u en $x = x_{\pm}$.

3.4.7 Construcción de Cantidades Conservadas a partir de Lagrangianos no-estándar

Una constante de movimiento es el objeto más simple que podemos usar para entender una ecuación de evolución. Notablemente, [11] la existencia de Lagrangianos no-estándar lleva naturalmente a cantidades conservadas, como el siguiente teorema (una consecuencia de los lemas de arriba) muestra.

Teorema 48. *Sea L una 1-forma Lagrangiana no-estándar para V . Entonces una constante de movimiento se puede construir. Se distinguen dos casos:*

1. *La 1-forma Lagrangiana no-estándar es cerrada: $\delta L = 0$. Entonces, existe (localmente) una 0-forma H tal que $\delta H = L$, y (aparte de una función del tiempo aditiva, calculable) H es una constante de movimiento para V .*
2. *La 1-forma Lagrangiana no-estándar no es cerrada: $\delta L \neq 0$ y hay una simetría η para V . Entonces, la 0-forma $H = i_{\eta} L$ es una constante de movimiento (puede ser igual a cero o términos de borde triviales).*

Demostración para $\delta L = 0$. Por definición, el Lagrangiano no-estándar L resuelve la ecuación

$$\mathcal{M}_V L = 1\text{-forma en el borde.}$$

Tomando derivada exterior y usando la regla de Leibnitz, obtenemos

$$1\text{-forma en el borde} = \delta(0\text{-forma en el borde}),$$

localmente. Por otro lado, $L = \delta H$ localmente. Luego,

$$\mathcal{M}_V H = 0\text{-forma en el borde} + f(t),$$

donde $f(t)$ es alguna función del tiempo solamente, y finalmente $\tilde{H} = H - g(t)$, con $g'(t) = f(t)$, es una constante de movimiento (más precisamente, define una corriente conservada) para V . \square

Demostración para $\delta L \neq 0$. La primera ecuación de la primera demostración aún es válida. La simetría η resuelve $\mathcal{M}_V \eta = 0$, y así la contracción $H = i_\eta L$ cumple, asumiendo la regla de Leibnitz de nuevo, la ecuación para las cantidades conservadas

$$\mathcal{M}_V H = i_\eta(1\text{-forma en el borde}) = 0\text{-forma en el borde},$$

donde la última igualdad se cumple si el vector η se puede escribir, en el borde, de una manera local. \square

Nota 49. Las 1-formas Lagrangianas usualmente contienen términos de borde, pero en la práctica no necesitamos seguirles la pista cuando se calculan constantes de movimiento por el teorema de arriba. Esto es porque un término de borde define trivialmente corrientes conservadas (para ecuaciones de evolución locales).

Ejemplos

Se necesitan c.b. usuales. Las constantes de movimiento obtenidas en estos ejemplos son conocidas: [21]

1. $\delta L = 0$. La 1-forma Lagrangiana no-estándar $U^0[u, t] \equiv i_{\eta_{\text{gal}}} \Sigma^{(1)}[u]$ es cerrada en virtud de $\mathcal{L} \Sigma^{(1)}[u] = 0$ (ver comentario sobre el teorema de Noether en la subsección previa). Explícitamente,

$$U^0[u, t]_x = -\frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{2} \bar{x} \right) + \frac{3}{2} t u = \frac{1}{8} \frac{\delta}{\delta u^x} (C^{(1)} - \bar{x} C^{(0)}),$$

donde $C^{(1)}[u, t]$ es una constante de movimiento ya definida y $C^{(0)}[u] = \frac{1}{2} \int_{x_-}^{x_+} dx u$; de acuerdo al teorema, $C^{(0)}[u]$ es una constante de movimiento, como puede verificarse.

2. $\delta L \neq 0$. Tomamos el Lagrangiano no-estándar obtenido en la subsección anterior, $U^{(2)}[u, t]$, y lo contraemos con la simetría translacional para KdV, $\eta_{tr}[u]^x = u_x$. Obtenemos otra constante de movimiento para KdV:

$$H^{(1)}[u, t] = \eta_{tr}[u]^x U^{(2)}[u, t]_x = \frac{3}{4} \int_{x_-}^{x_+} dx u^2.$$

3.5 Paréntesis de Poisson y estructuras Hamiltonianas

Las estructuras Hamiltonianas se basan en la existencia de un paréntesis de Poisson u operador cosimpléctico, el que es un tensor $(2, 0)$ antisimétrico que no depende explícitamente del tiempo y que cumple la identidad de Jacobi. Repasemos las definiciones más conocidas:

Definición 50. Sea J un tensor $(2, 0)$ antisimétrico, con componentes J^{ab} . Definimos el corchete $[\cdot, \cdot]$ entre dos 0-formas, H e I , como la siguiente 0-forma:

$$[H, I] \equiv \delta H \cdot J \cdot \delta I = J^{ab} H_{,a} I_{,b}.$$

Definición 51. (Primera definición usual de corchete de Poisson o identidad de Jacobi.) El tensor J tipo $(2, 0)$ y antisimétrico, cumple la identidad de Jacobi si y sólo si [7, 15]

$$[H, [I, K]] + [I, [K, H]] + [K, [H, I]] = 0, \quad \forall \text{ 0-formas } H, I, K.$$

Definición 52. (Segunda definición usual de corchete de Poisson o identidad de Jacobi.) El tensor J tipo $(2, 0)$ y antisimétrico, con componentes J^{ab} , es un corchete de Poisson si y sólo si [15] ,

$$J^{ab}{}_{,d} J^{dc} + J^{bc}{}_{,d} J^{da} + J^{ca}{}_{,d} J^{db} = 0.$$

Ahora veamos la definición en nuestra notación:

Definición 53. El tensor J tipo $(2, 0)$ y antisimétrico, cumple la identidad de Jacobi si y sólo si

$$\mathcal{L}_U J = J \cdot \delta U \cdot J, \quad \forall 1\text{-forma } U. \quad (3.15)$$

Nota 54. Recalamos que esta última definición es nueva hasta donde sabemos, y que las tres definiciones de corchete de Poisson son equivalentes.

Dada una ecuación de evolución (2.1), su vector de evolución asociado V puede o no escribirse en la forma

$$V^a = J^{ab} H_{,b},$$

donde H es una 0-forma. Si lo anterior es cierto, entonces H se denomina Hamiltoniano, y la identidad de Jacobi (usando $U = \delta H$) implica:

$$\mathcal{L}_V J = 0,$$

es decir, si $\frac{\partial}{\partial t} J = 0$ entonces el Operador de Flujo a lo largo de V aniquila al tensor J . [11]

Ejemplo

Para la ecuación KdV con c.b. usuales, se tiene la siguiente estructura Hamiltoniana (conocida [7]):

$$u_t = J_{(1)}[u] \cdot \delta H^{(2)}[u],$$

donde $J_{(1)}[u] = D$ es el paréntesis de Poisson y $H^{(2)}[u] = \int_{x_-}^{x_+} dx \left(\frac{1}{2} u_x^2 - 2u^3 \right)$ es el Hamiltoniano.

3.5.1 Relación entre el Paréntesis de Poisson y el Paréntesis de Lagrange

Hay una relación directa entre el Paréntesis de Poisson y la 2-forma simpléctica, de modo que las descripciones de un sistema en términos de los primeros pueden trasladarse a descripciones en términos de los últimos y viceversa.

Proposición 55. *Supongamos que tenemos una 2-forma Σ y un tensor $(2, 0)$ antisimétrico J tales que uno sea el inverso del otro:*

$$J^{ab}\Sigma_{bc} = \delta^a_c,$$

o equivalentemente,

$$J \cdot \Sigma = \mathbb{I}, \quad (3.16)$$

donde $J \cdot \Sigma$ representa una contracción en el índice correspondiente. Entonces, la identidad de Bianchi (3.6) sobre Σ y la identidad de Jacobi (3.15) sobre J son equivalentes.

Demostración. Tomemos la derivada de Lie a lo largo de un vector arbitrario η , de la ecuación (3.16). Nos queda:

$$(\mathcal{L}_\eta J) \cdot \Sigma + J \cdot (\mathcal{L}_\eta \Sigma) = 0 \quad \forall \text{ vector } \eta. \quad (3.17)$$

Multiplicando por J por la derecha se obtiene:

$$\mathcal{L}_\eta J + J \cdot \delta(i_\eta \Sigma) \cdot J + J \cdot (i_\eta \delta \Sigma) \cdot J = 0 \quad \forall \text{ vector } \eta,$$

y definiendo $U = -i_\eta \Sigma$, que es una 1-forma arbitraria dado que η es un vector arbitrario, resulta:

$$\mathcal{L}_{JU} J - J \cdot \delta U \cdot J = J \cdot (i_{JU} \delta \Sigma) \cdot J \quad \forall \text{ 1-forma } U,$$

con lo que se demuestra la equivalencia de la identidad de Jacobi (lado izquierdo de la ecuación = 0) con la identidad de Bianchi (lado derecho = 0, equivalente a $\delta \Sigma = 0$). □

Nota 56. La suposición (formal) que se necesita aquí es la de invertibilidad, que como ya vimos en el caso de los operadores derivada y anti-derivada restringe usualmente los espacios vectoriales y duales permitidos, así que estamos, más que frente a una equivalencia, ante una complementariedad entre las descripciones en términos de Σ y de J .

3.5.2 Ejemplo: Los operadores D y D^{-1}

Definamos, respectivamente, los tensores tipo $(0, 2)$ y $(2, 0)$: $\Sigma^{(1)}[u] = D^{-1}$ y $J_{(1)}[u] = D$. Tenemos $J_{(1)}\Sigma^{(1)} = \mathbb{I}$, en general. La 2-forma $\Sigma^{(1)}$ es claramente cerrada (pues no depende de las coordenadas- u) y es antisimétrica. La inversa $J_{(1)}$, de manera similar, cumple la identidad de Jacobi trivialmente y su antisimetría impone c.b. sobre las 1-formas posibles.

Lo anterior es claramente independiente de cualquier vector de evolución. Pero estos operadores son además compatibles con la dinámica dada por la ecuación de evolución KdV (2.6): asumiendo c.b. usuales, la ecuación que define a $\Sigma^{(1)}[u]$ como paréntesis de Lagrange para el vector de evolución KdV, $\mathcal{L}_{V_{(1,2)}} \Sigma^{(1)}[u] = 0$, es complementaria a la ecuación que define a $J_{(1)}[u]$ como paréntesis de Poisson para este vector de evolución, $\mathcal{L}_{V_{(1,2)}} J_{(1)}[u] = 0$, debido a la identidad (3.17).

3.6 Simetrías Fuertes

Finalmente, una simetría fuerte para un vector de evolución V es un tensor $(1, 1)$ tal que el Operador de Flujo a lo largo de V aniquila al tensor. Por la regla de Leibnitz, estos tensores tienen la propiedad de mapear simetrías en simetrías y 1-formas Lagrangianas no-estándar en 1-formas Lagrangianas no-estándar, con lo que su rol en la integrabilidad es bastante notable. Veremos en el próximo capítulo que los operadores Hereditarios o de Nijenhuis, tensores $(1, 1)$ que definen ecuaciones de evolución integrables, son simetrías fuertes tiempo-independientes para los respectivos vectores de evolución.

Capítulo 4

Construcción de Principios de Acción para Sistemas Integrables: las Jerarquías Korteweg–de Vries (KdV)

Nos ocuparemos aquí de **sistemas integrables** en el sentido que existe un Operador Hereditario o de Nijenhuis. Esta definición no abarca necesariamente o no es esencial para describir todo el espectro conocido de los sistemas integrables, pero lo cubre casi por completo, en particular contiene a los sistemas integrables por teorema de Liouville (ver este teorema en la referencia [15]), y nosotros lo aplicaremos a sistemas de dimensión infinita, en particular a la ecuación KdV.

Una de las ventajas de la descripción de sistemas integrables por medio de operadores hereditarios es que, a diferencia del método de Liouville, no requiere de conocer un gran número de constantes de movimiento para la integrabilidad total del sistema, conocimiento previo que en dimensión infinita es imposible en general; además, y quizás más importante, el operador hereditario se define naturalmente en coordenadas no canónicas.

4.1 La ecuación Korteweg–de Vries (KdV) y sus Jerarquías asociadas

Muchas ecuaciones diferenciales parciales integrables se pueden entender en términos de operadores hereditarios [24, 25, 7] o de Nijenhuis, [5, 6] los que, aunque pueden entenderse como objetos en sí mismos, también se pueden derivar de las representaciones de pares de Lax [26, 27] de los respectivos sistemas integrables.

Aunque para estos sistemas mucho pueda decirse acerca de las constantes de movimiento, paréntesis de Lie–Poisson, y jerarquías de simetrías que conmutan entre sí, nada se ha dicho de las estructuras Lagrangianas o de los principios de acción hasta muy recientemente. [23, 8]

Es bien sabido [28, 6, 27] que la propiedad hereditaria para un operador de Nijenhuis conduce directamente a la construcción de jerarquías de ecuaciones de evolución que poseen un número infinito de simetrías que conmutan entre sí: todo vector en la jerarquía define una ecuación diferencial parcial (o simplemente ecuación) integrable, puesto que un número infinito de constantes de movimiento se construye para cada una de estas ecuaciones.

En este capítulo, se proponen dos construcciones distintas pero relacionadas a partir de suposiciones generales sobre el operador de Nijenhuis: primero, la construcción de **Jerarquías derechas e izquierdas** de vectores de evolución; segundo, la construcción de **Escaleras de Principios de Acción** (i.e., un conjunto de principios de acción ordenados en escalera) para todas las ecuaciones en las jerarquías: obtendremos que las ecuaciones de Euler–Lagrange asociadas son en realidad ecuaciones deformadas o mezcladas, y la forma explícita de la deformación resulta ser una combinación lineal de vectores en las jerarquías derechas e izquierdas.

Identificaremos los **Lagrangianos** como 1–formas que se definen en el dual del espacio vectorial en el cual se escriben las ecuaciones de evolución. En este formalismo, la 1–forma Lagrangiana para una ecuación de evolución dada resuelve una ecuación covariante [14] en términos de derivadas de Lie a lo largo del vector de evolución, y la derivada exterior de la 1–forma Lagrangiana da lugar a operadores simplécticos. Las estructuras Hamiltonianas están relacionadas directamente a operadores simplécticos

que no dependen explícitamente del tiempo. [11] (Ver sección 3.5.1.) De este modo, las escaleras de principios de acción que se obtendrán para las jerarquías son complementarias a las estructuras bi-Hamiltonianas y multi-Hamiltonianas estudiadas en la literatura, particularmente en la referencia [7].

Presentaremos como ejemplo, una completa descripción de la ecuación KdV y sus jerarquías relacionadas; construiremos escaleras de 1-formas Lagrangianas que dan lugar a ecuaciones de Euler-Lagrange que mezclan varios vectores de evolución entre las diferentes jerarquías. Por ejemplo, se construirán Lagrangianos para los sistemas deformados KdV + Liouville y Sinh-Gordon (ShG) + simetría translacional.

En la sección 4.2 presentaremos el rol que ocupa el operador hereditario en definir las **Jerarquías Integrables de KdV**. Primero daremos la definición de operador hereditario, luego mostraremos al operador hereditario R para la ecuación KdV, y cómo los miembros sucesivos de la jerarquía de ecuaciones de evolución se construyen por operación recurrente (un número positivo de veces) del operador hereditario sobre un vector inicial, que en este caso es el vector de translación, representando la ecuación de evolución $u_t = -u_x$ (que es claramente integrable). Terminamos con una jerarquía (la jerarquía **derecha**) de vectores con la propiedad que dos vectores cualesquiera en la jerarquía conmutan. La ecuación KdV es el segundo miembro en la jerarquía derecha (ver figura 4.1).

Más jerarquías aparecen al considerar la inversa R^{-1} del operador hereditario, el cual es también hereditario. Para obtener la inversa, factorizamos el operador R . Aparecen tres jerarquías **izquierdas** para KdV, partiendo de tres vectores no locales que generan el kernel de R , que son simetrías de los vectores derechos. Los siguientes miembros en las jerarquías izquierdas se generan a partir de contracciones de R^{-1} con los vectores del kernel (ver figura 4.1).

En la sección 4.3, luego de una transformación de coordenadas que se sugiere por la factorización del operador hereditario, se computa el álgebra entre vectores en las jerarquías derecha e izquierdas, mostrando la integrabilidad (en el sentido de existencia de un número infinito de simetrías que conmutan) de las ecuaciones definidas por estos vectores.

En la sección 4.4 identificaremos algunas ecuaciones familiares en las jerarquías izquierdas: por ejemplo, la ecuación de Liouville y la ecuación ShG. Vale la pena

mencionar aquí que la ecuación asociada Camassa–Holm también está presente entre los vectores de la jerarquía izquierda. [29]

En la sección 4.5 se enuncian teoremas sobre la construcción de escaleras de principios de acción para las ecuaciones; se obtendrá la forma explícita de las 1–formas Lagrangianas y de los operadores simplécticos asociados, los que se escribirán en forma factorizada en términos de los operadores D y D^{-1} , hecho que hará trivial al cálculo de sus espacios de kernel. De esta forma, las ecuaciones de Euler–Lagrange serán ecuaciones deformadas, cuya deformación se obtendrá explícitamente en términos de vectores en las jerarquías derecha e izquierdas. Por otro lado, se demostrará explícitamente la integrabilidad de las ecuaciones de evolución asociadas a los vectores izquierdos mediante la construcción de un número infinito de constantes de movimiento. Finalmente, en la sección 4.6, desarrollaremos ejemplos explícitos de principios de acción y constantes de movimiento para varios sistemas conocidos en las jerarquías (KdV, Krichever–Novikov (KN), ShG, Liouville), así como también para algunas de sus deformaciones relacionadas, y veremos cómo cada 1–forma Lagrangiana en la escalera sirve para escribir principios de acción estándar para cada una de las ecuaciones mencionadas.

4.2 El Operador Hereditario o de Nijenhuis

Recordamos la definición usual de operador de Nijenhuis, como puede verse en la referencia [27]:

Definición 57. Sea $R'(\eta)[q^b] \equiv R_{,a} \eta^a [q^b]$ la derivada de Gâteaux (o derivada direccional) de un tensor R a lo largo de cualquier vector η .

Un tensor $R[q^a]$ del tipo $(1, 1)$ se denomina operador de Nijenhuis (o hereditario) si y sólo si el vector

$$R'(R \cdot \eta) \cdot \zeta[q^a] - R \cdot R'(\eta) \cdot \zeta[q^a]$$

es simétrico con respecto a los vectores cualesquiera $\eta[q]$, $\zeta[q]$.

Esta expresión es equivalente a la siguiente, que es más simple y clarifica más el concepto (ver definición equivalente en la referencia [7]):

Definición 58. La propiedad hereditaria para un tensor R del tipo $(1, 1)$ es

$$\mathcal{L}_{R\eta} R = R \mathcal{L}_\eta R, \quad \forall \text{ vector } \eta.$$

Esta es una forma elegante de escribir una ecuación muy difícil de resolver, que es independiente de cualquier vector específico (en particular, no requiere el conocimiento de una dinámica), e involucra potencias cuadráticas de R y primeras derivadas funcionales (notar su parecido con la identidad de Jacobi, ecuación (3.15)). La última forma de escribir la propiedad hereditaria nos lleva directamente a las propiedades de cerradura de los operadores simplécticos, resultado crucial para construir principios de acción, como veremos luego.

Nota 59. Vale la pena mencionar que, así como la propiedad de antisimetría de las 2-formas, la propiedad hereditaria define condiciones de borde (c.b.) para los campos vectoriales y 1-formas, restringiendo así los espacios vectoriales y duales permitidos.

Ejemplo

En el sistema de coordenadas u en el cual hemos trabajado otros ejemplos, el operador hereditario usual para la jerarquía KdV es [28]

$$R[u]_{x'}^x = \delta''(x - x') + 8u(x) \delta(x - x') + 4u_x(x) \epsilon(x - x')$$

o, como operador,

$$R[u] = D^2 + 8u + 4u_x D^{-1}. \quad (4.1)$$

En este caso, la propiedad hereditaria impone c.b. sobre los posibles campos vectoriales y duales a usar. Se puede mostrar que, bajo c.b. cíclicas sobre los campos vectoriales y de 1-formas en el borde $\{x_-, x_+\}$, la propiedad hereditaria se cumple. En particular, para c.b. usuales sobre los campos, $R[u]$ es un operador hereditario. [7]

4.2.1 Las Jerarquías derecha e izquierdas KdV definidas en términos del Operador Hereditario

Jerarquías de vectores que conmutan se generan a partir del kernel vectorial de los operadores hereditarios. Recalamos que la noción de kernel depende de las coorde-

nadas si se admiten transformaciones no locales, y que el espacio kernel depende de c.b. específicas sobre los campos vectoriales y las coordenadas.

Sea N_{\pm} la dimensión del kernel vectorial de $R^{\mp 1}$, donde R es un operador hereditario y R^{-1} es su inversa, que es hereditario si R lo es. Entonces, N_+ jerarquías derechas y N_- jerarquías izquierdas se definen por colecciones ordenadas de vectores cuyos primeros miembros son vectores l.i. en el kernel de R^{-1} (jerarquías derechas) y R (jerarquías izquierdas). Miembros sucesivos dentro de una jerarquía se construyen por contracción con los respectivos operadores hereditarios.

Para el caso KdV, tenemos $N_+ = 1$ jerarquía derecha y $N_- = 3$ jerarquías izquierdas. Usamos la notación

$$\dot{u}^x = V_{(k,n)}[u]^x,$$

donde $k = 1$ para la jerarquía derecha, $k = -1, -2, -3$ para las jerarquías izquierdas y $n = 1, \dots, \infty$ denota el lugar de un vector dentro de una jerarquía. Los espacios de kernel vectorial de los operadores hereditarios $R^{-1}[u]$, $R[u]$ son, respectivamente, $\{V_{(k,1)}[u]\}_{k=1}$ y $\{V_{(k,1)}[u]\}_{k=-1,-2,-3}$. Miembros sucesivos en las jerarquías se definen por recurrencia:

$$V_{(k,n+1)}[u] = (R[u])^{\text{sgn}(k)} \cdot V_{(k,n)}[u], \quad n \geq 1, \forall k$$

(ver esquema en la figura 4.1).

En el caso KdV, la jerarquía derecha se construye fácilmente, [28, 6, 27] pero la construcción de las jerarquías izquierdas necesita la forma factorizada [30, 31] del operador hereditario. Más aún, una pequeña generalización del operador hereditario llevará a una nueva, hasta donde sabemos, metodología para escribir de una manera concisa las jerarquías izquierdas.

4.2.2 Generalización y factorización del Operador Hereditario

Antes de factorizar $R[u]$, es mejor trabajar con una generalización de este operador, la que se obtiene al sumarle un múltiplo del tensor identidad \mathbb{I} :

$$R(\omega)[u] \equiv R[u] + 4\omega \mathbb{I}.$$

Este es también un operador hereditario, para ω fijo, el que se toma como un número real arbitrario.

La generalización del operador hereditario a un tensor $R(\omega)[u]$ que es lineal en su argumento ω permite escribir en forma compacta las jerarquías izquierdas.

Lema 60. Sean $V_{(-1,1)}(\omega)[u]$, $V_{(-2,1)}(\omega)[u]$, $V_{(-3,1)}(\omega)[u]$ los generadores del kernel vectorial de $R(\omega)[u]$. Entonces, estos vectores contienen las tres jerarquías izquierdas en su expansión de Taylor alrededor de $\omega = 0$:

$$V_{(k,1)}(\omega)[u] = \sum_{n=0}^{\infty} (-4\omega)^n V_{(k,n)}[u], \quad k = -1, -2, -3.$$

El proceso de factorización [31] implica un número de cambios de coordenadas, igual al orden de un operador diferencial que se construye desde el operador $R(\omega)[u]$. En este caso tenemos que hacer tres cambios de coordenadas, los que están en relación directa con pre-potenciales no locales encontrados en la literatura. [30]

En términos de las nuevas coordenadas, se obtiene una descripción simple, casi local de los vectores en el kernel de $R(\omega)[u]$. Vamos a trabajar en el sistema de coordenadas- ψ , construido desde u en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 2u(x,t) + y &= \frac{1}{2} \mathcal{S}\psi(x,y,t), \\ \mathcal{S}\psi(x,y,t) &= \psi_x^{-1} \psi_{xxx} - \frac{3}{2} (\psi_x^{-1} \psi_{xx})^2, \\ \partial_y u(x,t) &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Notar que $\mathcal{S}\psi(x,y,t)$ es la derivada Schwarziana. La transformación de arriba puede ser tratada como una transformación de Bäcklund [32] entre la ecuación KdV y una ecuación Krichever-Novikov (KN) generalizada para $\psi(x,y,t)$ (ver esta ecuación en la sección 4.4). Toda estructura tensorial se puede mapear desde u a coordenadas- ψ y viceversa usando las matrices de transformación

$$\frac{\delta u}{\delta \psi}(x,y,t) = \frac{1}{4} \psi_x(y) D \frac{1}{\psi_x(y)} D \frac{1}{\psi_x(y)} D \quad (4.3)$$

$$\frac{\delta \psi}{\delta u}(x,y,t) = 4 D^{-1} \psi_x(y) D^{-1} \psi_x(y) D^{-1} \frac{1}{\psi_x(y)}$$

(de ahora en adelante, omitiremos algunos argumentos de las funciones cuando no haya ambigüedad).

Nota 61. El campo $\psi(x, y, t)$ parece tener un grado más de libertad que $u(x, t)$, pero además debe satisfacer la última ecuación en (4.2), con lo que el número de grados de libertad se conserva. Más aún, las ecuaciones de arriba pueden ser entendidas en términos de ψ solamente, luego de eliminar $u(x, t)$. Nos queda un sistema de coordenadas que debe cumplir una constricción:

$$\begin{aligned} 2 &= \partial_y (\mathcal{S}\psi(x, y, t)) \\ &= \psi_x D \frac{1}{\psi_x} D \frac{1}{\psi_x} D \psi_y(x, y, t), \quad \forall x, y, t. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Además, las variaciones (o los elementos de la base de las 1-formas) $\delta\psi(x, y, t)$ han de satisfacer la constricción

$$\frac{1}{4} \psi_x D \frac{1}{\psi_x} D \frac{1}{\psi_x} D \delta\psi(x, y, t) = \delta u(x, t) \quad \forall y$$

donde $\delta u(x, t)$ son las correspondientes variaciones en coordenadas- u , y como tales son independientes de y .

Esta última constricción también es una "constricción vectorial" en el sentido que afecta a las componentes de los vectores permitidos, al reemplazar $\delta\psi(x, y, t)$ por $\eta[\psi]^x$, donde $x = (x, y)$. Se puede mostrar que, por definición, todos los vectores en las jerarquías derecha e izquierdas satisfacen esta constricción, y en general todos los vectores en coordenadas- ψ que, ante las transformaciones 4.3 mapeen a vectores independientes de y en coordenadas- u , también la cumplen. Además, algo necesario para mapear entre un sistema de coordenadas y otro, de manera simple y directa, las estructuras Lagrangianas, Hamiltonianas, y todo otro objeto compatible con la dinámica, es que la derivada de Lie "conmute" con la constricción, o sea que el aplicar la constricción antes o después de tomar la derivada de Lie sea indiferente. Puede mostrarse que esto es una consecuencia de la constricción vectorial.

Es esta interpretación de las coordenadas la que conducirá a la desaparición de las no localidades, reemplazando el problema de la no localidad con el de tratar con la constricción, el que es extremadamente mucho más simple.

En coordenadas- u , la factorización de $R(\omega)[u]$ resulta ser

$$R(\omega)[u] = \psi_x(\omega) D \frac{1}{\psi_x(\omega)} D \frac{1}{\psi_x(\omega)} D \psi_x(\omega) D^{-1},$$

donde $\psi_x(\omega) \equiv \psi_x(x, \omega, t)$. Notar que este operador es *lineal* en ω , lo que es consecuencia de la restricción sobre ψ .

La inversa se encuentra fácilmente luego de invertir cada factor. Asumiendo c.b. apropiadas sobre el campo ψ , obtenemos:

$$R^{-1}(\omega)[u] = D \frac{1}{\psi_x(\omega)} D^{-1} \psi_x(\omega) D^{-1} \psi_x(\omega) D^{-1} \frac{1}{\psi_x(\omega)}.$$

4.2.3 Jerarquía derecha KdV

El kernel de $R^{-1}(\omega)[u]$, bajo c.b. adecuadas (p.ej., usuales sobre las derivadas ψ_{xx} y mayores), es independiente de ω y da el primer vector en la jerarquía derecha:

$$V_{(1,1)}[u]^x = -u_x.$$

Miembros sucesivos de la jerarquía derecha se definen por recurrencia:

$$V_{(1,n+1)}(\omega)[u]^x \equiv R(\omega)[u]_{x'}^x V_{(1,n)}[u]^{x'}, \quad n \geq 1.$$

El segundo miembro es la ecuación KdV: [30, 23, 7]

$$V_{(1,2)}[u]^x = -u_{xxx} - 12 u u_x$$

(se omite el argumento ω cuando es igual a cero). En la figura 4.1 se muestra un esquema de la jerarquía derecha KdV.

4.2.4 Jerarquías izquierdas KdV

El kernel del operador $R(\omega)[u]$, bajo c.b. sobre las coordenadas- ψ elegidas correctamente, está compuesto por tres vectores no locales:

$$\begin{aligned} V_{(-1,1)}(\omega)[u]^x &= (\psi_x(\omega)^{-1})_x, \\ V_{(-2,1)}(\omega)[u]^x &= (\psi_x(\omega)^{-1} \psi(\omega))_x, \\ V_{(-3,1)}(\omega)[u]^x &= (\psi_x(\omega)^{-1} \psi(\omega)^2)_x. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Estos vectores contienen todas las jerarquías izquierdas si ω se deja arbitrario, como se determinó en el lema 60. Otra forma de verlo es definiendo, equivalentemente, jerarquías izquierdas "generalizadas" para ω fijo:

$$V_{(k,n+1)}(\omega)[u] \equiv (R(\omega)[u])^{-1} \cdot V_{(k,n)}(\omega)[u], \quad k = -1, -2, -3, \quad n \geq 1.$$

Es fácil ver que todos los vectores en una jerarquía izquierda dada se construyen a partir del primero:

Lema 62. Para $k = -1, -2, -3$, los vectores $V_{(k,n+1)}(\omega)[u]$ satisfacen

$$V_{(k,n+1)}(\omega)[u] = \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{4} \frac{D}{D\omega} \right)^n V_{(k,1)}(\omega)[u], \quad n \geq 0.$$

Ver esquema de los vectores izquierdos KdV en la figura 4.1.

4.3 Propiedades de conmutación de vectores en las Jerarquías derecha e izquierdas

Cualquier vector en las jerarquías derecha o izquierdas define una ecuación de evolución, cuyas propiedades de integrabilidad descansan en las relaciones de conmutación de los distintos vectores.

4.3.1 Jerarquía derecha como una subálgebra Abeliana

Es bien sabido [33, 7, 6, 27] que la propiedad hereditaria más el hecho que $\mathcal{L} R[u] = 0$, i.e., $R[u]$ es una simetría fuerte para $V_{(1,1)}[u]$, implica que todos los vectores en la jerarquía derecha conmutan, y que $R[u]$ es una simetría fuerte para todo vector en la jerarquía.

4.3.2 Cada Jerarquía izquierda como una subálgebra Abeliana

También se puede mostrar que, dentro de una jerarquía izquierda dada, todos los vectores conmutan. Hacemos los cálculos en el sistema de coordenadas ψ , donde los vectores se traducen en expresiones cuasi-locales.

De las matrices de transformación, ecuaciones (4.3), obtenemos los vectores en el nuevo sistema:

$$V_{(k,1)}(\omega)[\psi]^x = -\psi_x(x, y, t) \Delta_\omega (\psi_x^{-1} \psi^{|k|-1})(x, y, t), \quad k = -1, -2, -3,$$

donde $\mathbf{x} \equiv (x, y)$ y se define el operador de diferencia $\Delta_\omega f(x, y, t) \equiv \frac{f(x, \omega, t) - f(x, y, t)}{\omega - y}$. Notar que estos tres vectores izquierdos son casi locales, en el sentido que la no localidad está representada por un término centrado en $y = \omega$.

Ahora es directo ver que dentro de una jerarquía izquierda dada todos los vectores conmutan; si recordamos que los vectores de arriba contienen a todos los vectores en las jerarquías izquierdas, es suficiente probar el siguiente lema:

Lema 63. *Los vectores izquierdos $V_{(k,1)}(\omega_1)[\psi]$ y $V_{(k,1)}(\omega_2)[\psi]$, para $k = -1, -2, -3$ conmutan para ω_1, ω_2 arbitrarios.*

La demostración es explícita.

4.3.3 Jerarquías izquierdas como el álgebra de Lazos sobre $SL(2, \mathbb{R})$

Para encontrar el álgebra entre vectores en las distintas jerarquías izquierdas, es necesario considerar el hecho que la transformación desde u a ψ , ecuación (4.3) tiene un kernel vectorial $\text{Ker}(\frac{\delta u}{\delta \psi})$, relacionado con el kernel del operador hereditario (pero no deben confundirse). Como consecuencia de la no localidad de la transformación, los vectores mapeados salen de este último kernel, pues se demuestra que la contracción de $R(\omega)[\psi]$ con los vectores $V_{(k,1)}(\omega)[\psi]$ para $k < 0$ lleva a tres vectores que son independientes de ω , y generan el espacio $\text{Ker}(\frac{\delta u}{\delta \psi})$: ellos tienen característica cero en coordenadas- u . [30] Siguiendo el trabajo citado, llamamos a estos vectores "vectores izquierdos internos":

$$\begin{aligned} R(\omega)[\psi] &= 4(\omega - y)\mathbb{I} + \psi_x D^{-1} \psi_x D \frac{1}{\psi_x} D \frac{1}{\psi_x} D, \\ V_{(k,0)}[\psi]^{\mathbf{x}} &\equiv R(\omega)[\psi]^{\mathbf{x}}_{\mathbf{x}'} V_{(k,1)}(\omega)[\psi]^{\mathbf{x}'} \\ &= 4\psi(x, y, t)^{|k|-1}, \quad k = -1, -2, -3. \end{aligned}$$

Ellos generan claramente un álgebra $SL(2, \mathbb{R})$. Por ejemplo, un conmutador se muestra explícitamente:

$$\mathcal{L}_{(1,0)} V_{(2,0)}[\psi]^{\mathbf{x}} = V_{(2,0)}^{\mathbf{x},y} V_{(1,0)}^y - V_{(1,0)}^{\mathbf{x},y} V_{(2,0)}^y = 4\dot{\psi}(x, y, t) \Big|_{\dot{\psi}(x,y,t)=4} = 16,$$

con lo que se obtiene

$$\mathcal{L}_{V_{(1,0)}} V_{(2,0)}[\psi] = 4 V_{(1,0)}[\psi],$$

y los otros conmutadores se calculan similarmente, resultando

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{V_{(2,0)}} V_{(3,0)}[\psi] &= 4 V_{(3,0)}[\psi], \\ \mathcal{L}_{V_{(3,0)}} V_{(1,0)}[\psi] &= -8 V_{(2,0)}[\psi]. \end{aligned}$$

Más aún, la aplicación sucesiva de $R(\omega)$ sobre estos vectores da lugar a un álgebra interna (característica cero en coordenadas u)

$$\begin{aligned} V_{(k,-n)}(\omega)[\psi]^x &\equiv R(\omega)[\psi]^x_{x'} V_{(k,-n+1)}(\omega)[\psi]^x \\ &= 4^{n+1}(\omega - y)^n V_{(k,0)}[\psi]^x, \quad k = -1, -2, -3, \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \end{aligned}$$

Puede mostrarse que los vectores $\{V_{(k,n)}(\omega)[\psi]\}_{k=-1,-2,-3}^{n=-\infty,\dots,\infty}$ generan un álgebra que es isomorfa al álgebra de lazos sobre el grupo $SL(2, \mathbb{R})$, y conforman una representación de esta álgebra que es alternativa a la que se encuentra en la referencia [30].

Destacamos la importancia del álgebra de lazos en la construcción de soluciones jerárquicas del tipo solitónico y transformaciones de Bäcklund. [22]

4.3.4 Vectores izquierdos como Simetrías de vectores derechos y viceversa

Finalmente, es directo verificar que todos los vectores en las jerarquías izquierdas conmutan con todos los vectores en la jerarquía derecha:

$$\mathcal{L}_{V_{(1,m)}} V_{(k,n)}(\omega)[\psi] = 0, \quad k = -1, -2, -3, \quad m, n = 1, \dots, \infty, \quad (4.6)$$

$$\mathcal{L}_{V_{(1,m)}} V_{(k,0)}[\psi] = 0, \quad k = -1, -2, -3, \quad m = 1, \dots, \infty, \quad (4.7)$$

las igualdades siendo satisfechas bajo la constricción, ecuación (4.4).

4.3.5 Integrabilidad de toda ecuación de evolución en las Jerarquías derecha e izquierdas

A partir de las propiedades de conmutación recién obtenidas, concluimos que:

1. Todo vector en una jerarquía izquierda posee dos conjuntos de simetrías con un número infinito de miembros: los vectores dentro de su propia jerarquía y los vectores dentro de la jerarquía derecha.
2. Todo vector en la jerarquía derecha posee cuatro conjuntos de simetrías con un número infinito de miembros: los vectores en su propia jerarquía y los vectores en las tres jerarquías izquierdas.

4.4 Identificación de algunos vectores izquierdos y derechos como Ecuaciones Integrables conocidas

4.4.1 Ecuación de Liouville

Con los primeros tres vectores izquierdos, definimos

$$V_{\text{Liou}}[\psi] = \frac{1}{4} V_{(-3,0)}[\psi] \quad (4.8)$$

y la ecuación de evolución

$$\psi_t(x, y, t) = V_{\text{Liou}}[\psi]^x + \frac{1}{4} (\alpha V_{(-1,0)}[\psi]^x + \beta V_{(-2,0)}[\psi]^x) = \psi(x, y, t)^2 + \alpha \psi(x, y, t) + \beta,$$

donde α y β son constantes arbitrarias. Bajo la transformación

$$z(x, y, t) = \ln(2\psi(x, y, t)), \quad (4.9)$$

la ecuación de evolución de arriba mapea en la ecuación de Liouville para $z(x, y, t)$:

$$z_{xt} = \exp z.$$

4.4.2 Ecuación Sinh–Gordon (ShG)

Similarmente, la ecuación Sinh–Gordon para z se obtiene con el vector

$$V_{\text{ShG}}(\omega)[\psi] = \frac{1}{8} (V_{(-3,0)}[\psi] - V_{(-1,1)}(\omega)[\psi]),$$

cuando consideramos la evolución en el punto $y = \omega$:

$$\begin{aligned}\psi_t(x, \omega, t) &= \left(V_{\text{ShG}}(\omega)[\psi]^x + \frac{1}{4}(\alpha V_{(-1,0)}[\psi]^x + \beta V_{(-2,0)}[\psi]^x) \right) \Big|_{y=\omega} \\ &= \frac{1}{2} \psi(x, \omega, t)^2 - \frac{1}{8} \frac{\psi_{x\omega}(x, \omega, t)}{\psi_x(x, \omega, t)} + \alpha \psi(x, \omega, t) + \beta.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Hasta aquí tenemos una ecuación local: la derivada- ω esconde la no localidad. Pero la constricción, ecuación (4.4) evaluada en $y = \omega$, toma la forma $\Theta_x = \frac{1}{2} \exp(-z)$, donde $\Theta = (\ln \psi_x)_{x\omega} / 8 \psi_x$, lo que transforma la ecuación de evolución ShG (4.10) en $z_t(x, \omega, t) = D^{-1} \sinh z(x, \omega, t) + \frac{1}{2}(\psi(x, \omega, t) - \Theta(x, \omega, t))$, y luego $z(x, \omega, t)$ resuelve la ecuación ShG:

$$z_{xt}(x, \omega, t) = \sinh z(x, \omega, t).$$

4.4.3 Ecuación Korteweg-de Vries (KdV) y ecuación Krichever-Novikov (KN)

El mapeo de la ecuación KdV (vector $V_{(1,2)}$):

$$V_{(1,2)}[u]^x = -u_{xxx} - 12 u u_x$$

a coordenadas- ψ , es una ecuación Krichever-Novikov generalizada para $\psi(x, y, t)$:

$$V_{(1,2)}[\psi]^x = \psi_t = 6 y \psi_x + \frac{3 \psi_{xx}^2}{2 \psi_x} - \psi_{xxx}$$

(la conocida ecuación KN [29] se obtiene tomando el límite $y \rightarrow 0$).

Estamos, al fin, en posición de discutir las estructuras Lagrangianas para ecuaciones en las jerarquías derecha e izquierdas. La discusión no está para nada restringida a las ecuaciones exhibidas en esta subsección: los otros vectores en las diversas jerarquías pueden definir interesantes ecuaciones de evolución, sobre las cuales la construcción de estructuras Lagrangianas y constantes de movimiento ciertamente se aplica. Esto es válido, por ejemplo, para la ecuación Camassa-Holm, que se puede construir de varias maneras usando los vectores del lado izquierdo, en particular usando $V_{(-2,1)}(\omega)$ como vector de evolución. [29]

4.5 Estructuras Lagrangianas para Sistemas Integrables: Escaleras derecha e izquierda de Principios de Acción para las Jerarquías derecha e izquierdas KdV

Los operadores hereditarios factorizados R, R^{-1} , conducen a la construcción explícita de una Escalera infinita de estructuras simplécticas, generadas por contracción de R^n con $\Sigma^{(1)}$, para $n \in \mathbb{Z}$. Estas estructuras simplécticas definen principios de acción para todo vector de evolución en todas las jerarquías derecha e izquierdas. La "escalera derecha" ($n \geq 0$) da pares Lagrangianos estándar cuasi-locales para la ecuación KdV y todo otro vector en las jerarquías; la "escalera izquierda" ($n < 0$) entrega nuevos pares Lagrangianos estándar no locales para estos vectores (ver esquema de las escaleras en las figuras 4.2 y 4.3). El kernel de las diferentes estructuras simplécticas se encuentra explícitamente: como resultado, las ecuaciones de Euler-Lagrange que resultan de nuestros principios de acción mezclarán distintos vectores en las jerarquías derecha e izquierdas. A grosso modo, dada una ecuación de evolución, por ejemplo la ecuación KdV, una 2-forma simpléctica en la escalera derecha da ecuaciones de Euler-Lagrange que mezclan el vector dado con vectores en las jerarquías izquierdas, mientras que una 2-forma simpléctica en la escalera izquierda mezcla el vector dado con vectores en la jerarquía derecha. Por ejemplo, hay sólo uno o dos principios de acción que dan exactamente la ecuación KdV como la ecuación de Euler-Lagrange, mientras que hay un número infinito de estructuras simplécticas con ecuaciones de Euler-Lagrange que mezclan la ecuación KdV con otros vectores, tanto en la jerarquía derecha como en las jerarquías izquierdas. En particular, hay una 2-forma simpléctica cuyo kernel contiene al vector KdV, lo que significa que su ecuación de Euler-Lagrange posee simetría de reparametrización temporal. [34]

La escalera de estructuras simplécticas para la jerarquía derecha se conoce parcialmente. [23, 8] Los resultados nuevos aquí son principalmente:

1. El hecho que la escalera también funciona para las jerarquías izquierdas: en par-

particular hay una 1-forma que define principios de acción estándar y no-estándar para la ecuación KN, la ecuación ShG, y la ecuación de Liouville, algunos conocidos y otros desconocidos (hasta ahora),

2. La extensión de la escalera hacia el lado izquierdo, junto con la factorización explícita de las 2-formas simplécticas y consecuentemente la expresión explícita de las ecuaciones de Euler-Lagrange en términos de vectores entre las jerarquías derecha e izquierdas,
3. La consideración de términos de borde en los principios de acción, lo que permite un buen tratamiento de las expresiones no locales, eliminando así la necesidad de un sistema de coordenadas en el que las expresiones sean locales, y
4. La construcción de Lagrangianos no-estándar y corrientes conservadas para la mayoría de los sistemas en las jerarquías derecha e izquierda, lo que revela su integrabilidad explícita y determina un punto de vista unificado para nuevos desarrollos sobre teorías Lagrangianas para otras jerarquías de ecuaciones (e.g., ecuación no lineal de Schrödinger, ecuación Harry-Dym, ecuación de Boussinesq).

Recalamos que según nuestra construcción, en los pares Lagrangianos estándar $(L; K)$ para un vector dentro de una jerarquía, la 1-forma Lagrangiana estándar L no cambia si cambiamos un vector por otro dentro de la jerarquía: sólo la correspondiente 0-forma K del par Lagrangiano estándar varía sensiblemente cuando consideramos distintos vectores. De esta manera, distintos vectores en las jerarquías poseerán distintos principios de acción pero sus ecuaciones de Euler-Lagrange vendrán definidas con el mismo operador simpléctico. La única manera en que las 1-formas cambien (y por lo tanto las 2-formas simplécticas también) es cuando nos movemos en las escaleras (ver figuras 4.2 y 4.3).

4.5.1 Escaleras Simplécticas

El siguiente teorema general resume la construcción de una escalera de teorías Lagrangianas para vectores de evolución en la jerarquía derecha KdV y, bajo suposi-

ciones extras, en las jerarquías izquierdas KdV (ver comentario más adelante). Este teorema es nuevo hasta donde sabemos.

Recalcamos que, como consecuencia de la correspondencia entre operadores simplécticos y operadores cosimplécticos mostrada en la sección 3.5.1, una escalera de teorías Lagrangianas es esencialmente equivalente a una escalera de operadores Hamiltonianos o paréntesis de Poisson (ver las referencias [29, 28, 27, 7] para desarrollos en el lado Hamiltoniano); luego, los resultados obtenidos aquí para operadores simplécticos se pueden traducir a paréntesis de Poisson con miras a construir nuevas teorías Hamiltonianas para los sistemas respectivos.

Teorema 64. *Supongamos que existe un operador hereditario Γ y una 2-forma inicial $\Sigma^{(1)}$, cerrada, tal que $\Sigma^{(2)} \equiv \Sigma^{(1)} \cdot \Gamma$ sea también una 2-forma cerrada.*

Entonces las escaleras simplécticas derecha e izquierda, definidas por

$$\Sigma^{(n)} = \Sigma^{(1)} \cdot \Gamma^{n-1}, \quad \begin{cases} n \geq 1 & \text{(escalera derecha)} \\ n \leq 0 & \text{(escalera izquierda)} \end{cases}$$

contienen sólo 2-formas cerradas:

$$\delta \Sigma^{(n)} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$$

(ver figura 4.2).

Más aún, sea una jerarquía de vectores (cuyos componentes V^a cumplen ciertas c.b. específicas en el borde del conjunto de índices ∂A) construída con la ayuda de Γ , de modo que el primer vector en la jerarquía, $V_{(1)}$, tenga a Γ como simetría fuerte y a $\Sigma^{(1)}$ como operador simpléctico.

Entonces, todo miembro en las escaleras derecha e izquierda es una 2-forma simpléctica para todo vector en la jerarquía.

Nota 65. Este teorema asume algunas c.b. sobre los valores de los campos vectoriales y las coordenadas en el borde, tales que las 2-formas en la escalera sean realmente antisimétricas y operadores simplécticos para todo vector en la jerarquía. Por lo tanto, para cada 2-forma y vector tenemos que verificar esas propiedades y así restringir el espacio vectorial. Esta es la razón por la que este teorema puede no ser aplicable a las jerarquías izquierdas KdV: el comportamiento de los vectores izquierdos en el borde debe ser chequeado en cada caso.

Ejemplo

Para la ecuación KdV, en coordenadas $-u$, tomamos $\Gamma[u] = R(\lambda)[u]$, así la segunda 2-forma simpléctica de la escalera derecha, como operador, es:

$$\Sigma^{(2)}(\lambda)[u] = \Sigma^{(1)} \cdot R(\lambda)[u] = D^{-1}D^2 + 8D^{-1}u + 4D^{-1}u_x D^{-1} + 4\lambda D^{-1}.$$

La antisimetría no es clara de la expresión de arriba, pero se demuestra que esta 2-forma es antisimétrica si imponemos c.b. usuales para la coordenada $-u$ y los campos vectoriales en x_{\pm} .

La cerradura ha de ser obtenida explícitamente. Nos queda, en componentes, la 3-forma:

$$\begin{aligned} \delta\Sigma^{(2)}(\lambda)[u]_{xx'x''} &\equiv \Sigma^{(2)}(\lambda)[u]_{xx',x''} + \Sigma^{(2)}(\lambda)[u]_{x'x'',x} + \Sigma^{(2)}(\lambda)[u]_{x''x,x'} \\ &= -\hat{\delta}(x) - \hat{\delta}(x') - \hat{\delta}(x''). \end{aligned}$$

Por lo tanto, bajo c.b. usuales obtenemos $\delta\Sigma^{(2)}(\lambda)[u] = 0$, y así las hipótesis del teorema se cumplen. Luego, miembros subsecuentes en las escaleras son 2-formas cerradas. Para que sean estructuras simplécticas para la ecuación KdV y todo otro vector en la jerarquía derecha, es suficiente que $\Sigma^{(1)}[u]$ sea un operador simpléctico y $R(\lambda)[u]$ sea una simetría fuerte para el primer vector, $V_{(1,1)}[u]$, lo que es fácil de probar bajo c.b. usuales sobre los campos y coordenadas.

4.5.2 Forma factorizada y Kernel de las 2-formas Simplécticas en las Escaleras derecha e izquierda: Sistema de coordenadas $-u$

Escribir los operadores simplécticos en las escaleras en forma factorizada simplifica el análisis de su antisimetría, y conduce al cálculo explícito de sus espacios de kernel, necesario para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange a las que dan lugar.

Nota 66. Sobre los espacios de kernel: Es importante notar que el espacio kernel de cualquier operador simpléctico depende sensiblemente de las c.b. y, por supuesto, del sistema de coordenadas. Por lo tanto, los resultados de esta subsección son aplicables sólo al sistema de coordenadas $-u$, con c.b. apropiadas: si cambiamos coordenadas

y/o c.b. algunos vectores pueden salir del kernel. En este sentido, los espacios de kernel listados abajo son los de dimensión más alta.

Escalera derecha

Si escribimos $R(\lambda)[u]$ en forma factorizada llegaremos a una expresión para $\Sigma^{(2)}(\lambda)[u]$ que es manifiestamente antisimétrica (al usar c.b. apropiadas):

$$\Sigma^{(2)}(\lambda)[u] = D^{-1} \psi_x(\lambda) D \frac{1}{\psi_x(\lambda)} D \frac{1}{\psi_x(\lambda)} D \psi_x(\lambda) D^{-1}.$$

Notar que esta estructura simpléctica es lineal en λ . Aunque incrementan su complejidad, miembros sucesivos en la escalera derecha se construyen directamente, por multiplicación con $R(\lambda)[u]$ por la derecha.

El espacio kernel de cada operador simpléctico en la escalera derecha está generado por vectores en las jerarquías izquierdas, y se construye a partir de $\text{Ker}(R(\lambda)[u]) = \{V_{(k,1)}(\lambda)[u]\}_{k=-1,-2,-3}$ (ver estos vectores en la ecuación (4.5)). Se concluye que el kernel de $\Sigma^{(1)}[u]$ es nulo, y:

$$\text{Ker}(\Sigma^{(n)}(\lambda)[u]) = \{V_{(k,m)}(\lambda)[u]\}_{k=-1,-2,-3}^{m=1,\dots,n-1}, \quad n \geq 2.$$

Escalera izquierda

El primer miembro de la escalera izquierda es

$$\Sigma^{(0)}(\lambda)[u] \equiv \Sigma^{(1)} \cdot R^{-1}(\lambda)[u] = \frac{1}{\psi_x(\lambda)} D^{-1} \psi_x(\lambda) D^{-1} \psi_x(\lambda) D^{-1} \frac{1}{\psi_x(\lambda)}.$$

Este operador es manifiestamente antisimétrico. La cerradura es difícil de probar explícitamente, pero la 1-forma que resuelve $\delta L^{(M)}(\lambda)[u] = \Sigma^{(0)}(\lambda)[u]$ resulta ser:

$$L^{(M)}(\lambda)[u]_x = -\frac{1}{8 \psi_x(\lambda)} D^{-1} (\psi_x(\lambda) \ln \psi_x(\lambda)), \quad (4.11)$$

si usamos las ecuaciones (4.3) para transformar las coordenadas y variaciones.

Los siguientes miembros de la escalera izquierda se obtienen fácilmente a partir de la 2-forma anterior por derivación (la demostración se sigue del hecho que $\Sigma^{(1)}[u] = \Sigma^{(0)}(\lambda)[u] \cdot R(\lambda)[u]$ es independiente de λ):

$$\begin{aligned} \Sigma^{(-n)}(\lambda)[u] &\equiv \Sigma^{(0)}(\lambda)[u] R^{-n}(\lambda)[u] \\ &= \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{4} \frac{D}{D\lambda} \right)^n \Sigma^{(0)}(\lambda)[u], \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \end{aligned}$$

Los espacios de kernel de los operadores simplécticos en la escalera izquierda están generados por vectores derechos, y se construyen desde el kernel de $R^{-1}(\lambda)[u]$, el cual es generado por el vector $V_{(1,1)}[u]$. Concluimos que el kernel de $\Sigma^{(0)}(\lambda)[u]$ es nulo, y:

$$\text{Ker}(\Sigma^{(n)}(\lambda)[u]) = \{V_{(k,m)}(\lambda)[u]\}_{k=1}^{m=1, \dots, |n|}, \quad n \leq -1.$$

4.5.3 Escaleras Lagrangianas estándar para toda ecuación de evolución en las Jerarquías

Construimos explícitamente las 1-formas Lagrangianas estándar para las 2-formas simplécticas asociadas por medio de un vector especial que se puede definir cuando existe un operador hereditario.

Definición 67. Sea Γ un operador hereditario. El vector Galileano η_{gal} asociado a Γ se define por la propiedad

$$\mathcal{L}_{\eta_{\text{gal}}} \Gamma = \mathbb{I}.$$

Ejemplo

El vector con componentes $\eta_{\text{gal}}[u]^x = \frac{1}{8}$, es un vector Galileano para el operador hereditario R , ecuación (4.1).

La razón para el nombre "Galileano" es que la proyección del vector en este último ejemplo a una simetría para la ecuación KdV nos da la simetría Galileana definida en la ecuación (3.4). Notar que este vector Galileano también es una simetría Maestra (Mastersymmetry; ver definición en las referencias [35, 7]) para todos los vectores en las jerarquías derecha e izquierdas KdV.

Cabe destacar que las sucesivas derivadas de Lie a lo largo del vector Galileano, nos mueven hacia la izquierda en las escaleras simplécticas, en las escaleras Lagrangianas y en las Jerarquías derecha e izquierdas KdV. Además, el vector $\eta_{\text{gal}(-1)} = -R^2 \eta_{\text{gal}}$ es también un vector Galileano, esta vez asociado al operador R^{-1} , con lo que las sucesivas derivadas de Lie a lo largo de este vector nos mueven hacia la derecha en las Jerarquías y en las respectivas escaleras. Este vector también es una

simetría Maestra, y es usado en la referencia [7] para generar la Jerarquía derecha KdV a partir del primer miembro. Más aún, este vector y sucesivos vectores generados por recurrencia definen ecuaciones de evolución no locales muy interesantes, cuyos principios de acción serán investigados en un trabajo posterior.

El siguiente teorema es complementario al teorema 64 de las escaleras simplécticas, y también es nuevo hasta donde sabemos.

Teorema 68. *Supongamos que las hipótesis del teorema 64 se cumplen y que el vector Galileano asociado a Γ resuelve $\mathcal{L} \Sigma^{(1)} = 0$, donde $\Sigma^{(1)}$ es la primera 2-forma simpléctica en la escalera.*

Entonces, las siguientes 1-formas:

$$L^{(n)} = i_{\eta_{\text{gal}}} \Sigma^{(n+1)} = (\Gamma^*)^n L^{(0)}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.12)$$

satisfacen

$$\delta L^{(n)} = n \Sigma^{(n)}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.13)$$

y así definen, al menos, 1-formas Lagrangianas estándar para las 2-formas simplécticas asociadas, con principios de acción válidos para todo vector en las jerarquías cuando $n \neq 0$; el caso $n = 0$ puede usarse para definir una constante de movimiento para las distintas ecuaciones de evolución en las jerarquías (ver figura 4.9).

Nota 69. En la práctica, deben imponerse c.b. sobre los campos y coordenadas para que las hipótesis, y por lo tanto las afirmaciones que se derivan del teorema, sean ciertas.

Ejemplos

Usando c.b. usuales para la coordenada- u . Ya hemos visto en ejemplos anteriores la primera 1-forma no cerrada ($n = 1$) para KdV: $L^{(1)}[u]_x = -\Sigma_{xy}^{(2)} \eta_{\text{gal}}[u]^y = -\frac{1}{2} D^{-1}u - \frac{1}{2} x u$. La próxima 1-forma Lagrangiana estándar se obtiene de contraer R^* con la 1-forma de arriba. El resultado es:

$$L^{(2)}[u]_x = -3 x u^2 - 2 u D^{-1}u - 3 D^{-1}u^2 - \frac{3}{2} u_x - \frac{1}{2} x u_{xx}.$$

El operador simpléctico asociado es igual a $2\Sigma^{(2)}[u]$: recordando que el kernel de esta 2-forma es generado por los primeros tres vectores izquierdos, obtenemos que, para una ecuación de evolución dada, digamos la ecuación KdV, las ecuaciones de Euler-Lagrange se deforman:

$$u_t = -u_{xxx} - 12u u_x - \sum_{j=1}^3 \alpha_j (\psi_x^{-1} \psi^{j-1})_x,$$

donde α_j son 0-formas arbitrarias, y $\psi = \psi(x, 0, t)$ en todas partes.

Los Lagrangianos estándar obtenidos de esta manera recursiva definen principios de acción para cualquier ecuación de evolución en las jerarquías derecha e izquierdas KdV.

4.5.4 Lagrangianos no-estándar derechos e izquierdos para la Jerarquía derecha KdV

Para obtener el Principio Variacional que los nuevos Lagrangianos estándar entregan, tendríamos que calcular a mano, en cada caso, el segundo miembro del par Lagrangiano estándar. Afortunadamente, para la jerarquía derecha KdV podemos proyectar todos estos Lagrangianos estándar porque el vector Galileano se proyecta fácilmente. Obtenemos:

Teorema 70. *Para cada $m = 2, 3, \dots, \infty$, las siguientes 1-formas son Lagrangianos no-estándar para el vector de evolución $V_{(1,m)}[u]$:*

$$L^{(m,n)}[u, t] = i_{\eta_{\text{gal},m}[u,t]} \Sigma^{(n+1)}[u] = (R^*[u])^n L^{(m,0)}[u, t], \quad n \in \mathbb{Z},$$

con 2-formas simplécticas asociadas dadas por

$$\delta L^{(n)} = n \Sigma^{(n)}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

donde $\eta_{\text{gal},m}[u, t] \equiv \mathcal{P}_{V_{(1,m)}}(t)\eta_{\text{gal}}[u]$ es una simetría tiempo-dependiente para el vector $V_{(1,m)}[u]$:

$$\eta_{\text{gal},m}[u, t] = \eta_{\text{gal}}[u] + \left(m - \frac{1}{2}\right) t V_{(1,m-1)}[u], \quad m = 2, 3, \dots, \infty.$$

Nota 71. Con estos Lagrangianos no-estándar, es directo escribir los principios de acción, de la ecuación (3.9) con $K = 0$. La nota 69 respecto a c.b. para el teorema precedente, se aplica a este teorema también.

Notar que, por regla de Leibnitz, la derivada temporal parcial de cualquiera de las anteriores 1-formas Lagrangianas no-estándar debe ser igual a la derivada exterior de una constante de movimiento para el respectivo vector de evolución. De este modo obtenemos el típico conjunto numerable de constantes de movimiento para la ecuación KdV. [21]

Ejemplos

1. Escalera derecha. El resultado proyectado para $L^{(2,2)}[u]$ (ecuación KdV, segundo Lagrangiano) es

$$L^{(2,2)}[u, t]_x = -3x u^2 - 2u D^{-1}u - 3D^{-1}u^2 - \frac{3}{2}u_x - \frac{1}{2}x u_{xx} + t \delta K^{(2,2)}[u],$$

donde $K^{(2,2)}[u] = \int_{x_-}^{x_+} dx (15u^4 - 15u u_x^2 + \frac{3}{4}u_{xx}^2)$ es una constante de movimiento para KdV.

2. Escalera izquierda. Para $n \leq -1$ obtenemos Lagrangianos no-estándar izquierdos para la ecuación KdV, los que se generan a partir de

$$L^{(2,-1)}(\lambda)[u, t]_x = (R^*(\lambda)^{-1}[u]) \cdot L^{(2,0)}[u, t]_x = -\frac{\psi_\lambda}{16\psi_x} + \frac{3}{2}t$$

(se ha usado la constricción); miembros sucesivos se encuentran por derivación (notar que ellos no dependen explícitamente del tiempo):

$$L^{(2,-n-1)}(\lambda)[u]_x = \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{4} \frac{D}{D\lambda} \right)^n (L^{(-1)}(\lambda)[u]_x), \quad n \geq 1,$$

donde $L^{(-1)}(\lambda)[u]_x \equiv (R^*(\lambda)^{-1}[u]) \cdot L^{(0)}[u]_x = -\frac{\psi_\lambda}{16\psi_x}$.

Es interesante ver que la 1-forma Lagrangiana estándar para $\Sigma^{(0)}(\lambda)[u]$ (que más adelante se mostrará que define principios de acción para todo vector en cualquier jerarquía) no se obtiene por los teoremas que hemos visto arriba: aunque se puede calcular explícitamente (ver la ecuación (4.11)), su proyección en un Lagrangiano

no-estándar no puede realizarse de manera concisa. Sin embargo, $\frac{D}{D\lambda} L^{(M)}(\lambda)$ debiera ser proporcional a $L^{(-1)}(\lambda)$ + una 1-forma cerrada, puesto que sus derivadas exteriores son proporcionales. De hecho, se demuestra que

$$\frac{D}{D\lambda} L^{(M)}(\lambda)[u] = 4 L^{(-1)}(\lambda)[u] + \delta \left(\frac{1}{32} \int_{x_-}^{x_+} dx \psi_x (\ln \psi_x) D^{-1} \frac{1}{\psi_x} \right),$$

donde $\psi = \psi(x, \lambda, t)$ en todas partes.

4.5.5 Construcción explícita de Escaleras Lagrangianas para las Jerarquías izquierdas

Motivación: los vectores izquierdos tienen a $\Sigma^{(1)}$ como operador simpléctico

Bajo la suposición no trivial de invertibilidad de las matrices de transformación, ecuaciones (4.3), los vectores izquierdos resuelven $\mathcal{L}_{V_{(k,1)}(\omega)} \Sigma^{(1)}[u] = 0$, $k = -1, -2, -3$. Luego, un principio Lagrangiano para las ecuaciones de movimiento no locales

$$u_t(x, t) = (\psi_x(x, \omega, t)^{-1} \psi(x, \omega, t)^{|k|-1})_x, \quad k = -1, -2, -3$$

queda definido. Mostramos esta afirmación para el vector izquierdo $V_{(-1,1)}(\omega)[u]$. Como la 2-forma involucrada aquí, en coordenadas $-u$, es un operador constante, su derivada de Lie es simplemente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{V_{(-1,1)}(\omega)} \Sigma^{(1)}[u] &= \Sigma^{(1)}[u] \cdot V'_{(-1,1)}(\omega)[u] - \text{transpuesta} \\ &= D^{-1} \left(-4 D \frac{1}{\psi_x} D^{-1} \psi_x D^{-1} \frac{1}{\psi_x} \right) - \text{transpuesta}, \end{aligned}$$

y bajo la suposición $D^{-1}D = \mathbb{I}$, la expresión de arriba se anula idénticamente. Para hacer válida la suposición, se restringe el espacio vectorial a aquellos vectores $\eta[u]^x = f(x)$ tales que $\int_{x_-}^{x_+} dx f(x) = 0$. Esta restricción sobre los campos vectoriales, cuando se aplica al vector izquierdo, implica la siguiente c.b.: $\widehat{\psi_x(\omega)^{-1}} = 0$. Esta c.b., a su vez, nos permite escribir una estructura Hamiltoniana para nuestra ecuación de evolución:

$$u_t = (\psi_x(x, \omega, t)^{-1})_x = J_{(1)} \cdot \delta H^{(-1)}[u], \quad (4.14)$$

donde $H^{(-1)}[u] = (2C^{1/2})^{-1} \overbrace{(\ln \psi_x(\omega))_x}$, $C = (\psi_x(\omega))_+ (\psi_x(\omega))_-$ es una constante y $J_{(1)}[u] = D$. Notar que las c.b. de arriba junto a la ecuación de la estructura Hamiltoniana implican que $(\psi_x(\omega))_+ = (\psi_x(\omega))_- = C^{1/2}$ son constantes independientes de las coordenadas.

Vale la pena mencionar que esta estructura Hamiltoniana es una respuesta positiva a una pregunta abierta [20] en la literatura. En la referencia citada, John M. Verosky se pregunta si se puede encontrar de manera simple una densidad conservada T (en nuestra notación, un Hamiltoniano) tal que en la ecuación $u_s = D \Psi^2$ (que se puede mapear a nuestra ecuación (4.14)) se pueda hacer $\Psi^2 = E(T)$, donde E es el operador de Euler, [7] es decir, la derivada funcional. La respuesta está en nuestro Hamiltoniano $H^{(-1)}[u]$ junto con las c.b. arriba mencionadas.

Argumentos similares muestran que todos los vectores izquierdos tienen a $\Sigma^{(1)}[u]$ como estructura simpléctica si se eligen las c.b. adecuadamente. Ahora, estos vectores también tienen a $R[u]$ como simetría fuerte (el cálculo explícito de esto puede hacerse en coordenadas- ψ). Por lo tanto las hipótesis del teorema 64 son satisfechas y la escalera de estructuras simplécticas funciona para los vectores izquierdos.

Cambio al sistema de coordenadas- ψ

Sin embargo, no mucho puede hacerse con estas expresiones no locales. Todo se ve mejor cuando vamos a coordenadas- ψ , donde como se ha mencionado hay aparentemente un grado de libertad extra: desde el punto de vista Lagrangiano, esto quiere decir que un número infinito de 1-formas en el sistema de coordenadas- ψ mapea a la misma 1-forma en coordenadas- u . Luego, por simplicidad y, por otro lado, para evitar la sobre-definición de una 1-forma Lagrangiana estándar, basta con trabajar con una 1-forma con soporte o centrada en *un punto* de la variable- y . Por ejemplo, los mapeos de $L^{(M)}(\lambda)$, $L^{(-1)}(\lambda)$ en el sistema de coordenadas- ψ se definen como las 1-formas cuyas componentes están centradas en $y = \lambda$:

$$L^{(M)}(\lambda)[\psi]_x = -\frac{1}{32} \delta(y - \lambda) D^2 \left(\frac{1}{\psi_x(\lambda)} \right), \quad (4.15)$$

$$L^{(-1)}(\lambda)[\psi]_x = \frac{1}{32} \delta(y - \lambda) \frac{1}{\psi_x(\lambda)}, \quad (4.16)$$

donde $\mathbf{x} = (x, y)$. Tomando derivada exterior, obtenemos 2-formas simplécticas centradas en $y = \lambda$ las que, como operadores, son respectivamente

$$\begin{aligned}\Sigma^{(0)}(\lambda)[\psi] &= -\frac{1}{16}D \frac{1}{\psi_x(\lambda)} D \frac{1}{\psi_x(\lambda)} D, \\ \Sigma^{(-1)}(\lambda)[\psi] &= \frac{1}{16} \frac{1}{\psi_x(\lambda)} D \frac{1}{\psi_x(\lambda)}.\end{aligned}$$

(El factor $\delta(y - \lambda) \delta(y' - \lambda)$ que centra las 2-formas se asume implícitamente.)

Recordemos que esta última 2-forma genera los otros miembros de la escalera izquierda por derivación con respecto a λ (o multiplicación por $R(\lambda)^{-1}$).

Los espacios de kernel de las 2-formas simplécticas son ahora:

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\Sigma^{(0)}(\lambda)[\psi]) &= \{V_{(k,0)}[\psi]\}_{k=-1,-2,-3}, \\ \text{Ker}(\Sigma^{(-1)}(\lambda)[\psi]) &= \{V_{(k,1)}[\psi]\}_{k=1}.\end{aligned}$$

Nota 72. Debe tenerse cuidado con los términos de borde que aparecen en los Principios Variacionales en este nuevo sistema de coordenadas, porque algunas 1-formas con soporte aparentemente en el borde tienen en realidad su soporte en el interior a causa de la restricción (4.4). Para ser precisos, si una 2-forma simpléctica Σ está centrada en $y = \lambda$, llamaremos 1-forma en el borde sólo a aquellos términos que involucren las variaciones $\delta\psi(x, \lambda, t)$ y sus derivadas con respecto a x evaluadas en x_{\pm} , entendiendo así que cualquier variación $\delta\psi(x_{\pm}, y, t)$ con $y \neq \lambda$ puede en principio ser "interior escondido en el borde". En particular esto ocurre con las derivadas $\delta\psi_{\lambda}(x_{\pm}, \lambda, t)$, que involucran dos valores infinitesimalmente cercanos pero distintos del índice y . La razón de esta distinción es que las únicas variaciones que aparecen en las ecuaciones de Euler-Lagrange, multiplicando a una 2-forma simpléctica centrada en $y = \lambda$, son precisamente de la forma $\delta\psi(x, \lambda, t)$, con λ fijo: por lo tanto la Acción es un extremo para valores arbitrarios sólo de aquellas variaciones, y se nos permite imponer c.b. en x_{\pm} (o alternativamente invocar el principio de Weiss [16]) sólo sobre aquellas variaciones.

Escaleras Lagrangianas izquierdas para los vectores izquierdos

Comenzamos el análisis con la 1-forma $L^{(M)}(\lambda)[\psi]$, ecuación (4.15), la cual se demuestra que es una 1-forma Lagrangiana estándar para todos los miembros en la

jerarquía izquierda: $V_{(k,1)}(\omega)[\psi]$, $V_{(k,0)}[\psi]$, $k = -1, -2, -3$. Sin embargo, la construcción explícita de los pares Lagrangianos estándar para los vectores $V_{(k,1)}(\omega)[\psi]$ no arroja muchas luces y se deja para un ejemplo explícito para la ecuación ShG en la sección 4.6.

Primero, es fácil probar que los vectores izquierdos internos deforman a $L^{(M)}(\lambda)[\psi]$ a cero o derivadas exteriores + borde:

$$\mathcal{L}_{V_{(-1,0)}[\psi]} L^{(M)}(\lambda)[\psi] = \mathcal{L}_{V_{(-2,0)}[\psi]} L^{(M)}(\lambda)[\psi] = 0,$$

$$\mathcal{L}_{V_{(-3,0)}[\psi]} L^{(M)}(\lambda)[\psi] = \delta K^{(M;-3,0)}(\lambda)[\psi] + 1\text{-forma en el borde},$$

donde $K^{(M;-3,0)}(\lambda)[\psi] = -\frac{1}{4} \int_{x_-}^{x_+} dx (2\psi_x - \psi_x \ln \psi_x)$.

Principios de Acción para la ecuación de Liouville y la ecuación ShG se construyen con los objetos de arriba, en la sección 4.6.

Ahora fijamos nuestra atención en la 1-forma $L^{(-1)}(\lambda)[\psi]$. Se obtienen Lagrangianos no-estándar para todos los vectores izquierdos internos:

$$\mathcal{L}_{V_{(-1,0)}[\psi]} L^{(-1)}(\lambda)[\psi] = \mathcal{L}_{V_{(-2,0)}[\psi]} L^{(-1)}(\lambda)[\psi] = \mathcal{L}_{V_{(-3,0)}[\psi]} L^{(-1)}(\lambda)[\psi] = 0,$$

mientras que pares Lagrangianos estándar aparecen para los sucesivos vectores izquierdos:

$$\mathcal{L}_{V_{(-j,1)}(\omega)[\psi]} L^{(-1)}(\lambda)[\psi] = \delta K^{(-1;-j)}(\lambda, \omega)[\psi] + \overbrace{U^{(-1;-j)}(\lambda, \omega)[\psi]},$$

donde el último término en el lado derecho de la última ecuación es una verdadera 1-forma en el borde (i.e., contiene sólo variaciones centradas en $y = \lambda$). Realizamos los cálculos explícitamente sólo para el vector $V_{(-1,1)}(\omega)[\psi]$: derivadas de Lie a lo largo del vector $V_{(-3,0)}[\psi]$ mapean los resultados a los vectores restantes $V_{(-2,1)}(\omega)[\psi]$ y $V_{(-3,1)}(\omega)[\psi]$ (esto se debe a la estructura de álgebra $SL(2, \mathbb{R})$ de los vectores). Obtenemos

$$\begin{aligned} K^{(-1;-1)}(\lambda, \omega)[\psi] &= \frac{1}{32(\lambda - \omega)} \overbrace{B^{(0)}(\omega, \omega)[\psi]} + \frac{1}{16(\lambda - \omega)^2} \overbrace{X(\omega)[\psi]}, \\ U^{(-1;-1)}(\lambda, \omega)[\psi] &= -\frac{1}{64} \left(\frac{\delta\psi_{xx}(\lambda)}{(\lambda - \omega)^2 \psi_x(\lambda) \psi_x(\omega)} \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{B^{(0)}(\lambda, \omega)[\psi] \delta\psi_x(\lambda)}{(\lambda - \omega) (\psi_x(\lambda) \psi_x(\omega))^{1/2}} + 2 B^{(0)}(\lambda, \omega)[\psi]^2 \delta\psi(\lambda) \right), \end{aligned}$$

donde $B^{(0)}(\lambda, \omega)[\psi] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\psi_x(\lambda)} \frac{1}{\psi_x(\omega)} \right)^{1/2} \Delta_\lambda \left(\ln \frac{1}{\psi_x(\omega)} \right)_x$, y

$$\delta \overbrace{X(\omega)[\psi]} \equiv \overbrace{\frac{1}{4\psi_x} D \frac{1}{\psi_x} D \delta\psi(\omega)} = \int_{x_-}^{x_+} dx \frac{\delta u}{\psi_x(\omega)}$$

es una 1-forma cerrada (usamos las matrices de transformación (4.3) para demostrarlo; ver la sección 4.5.5). La expresión explícita de $\overbrace{X(\omega)[\psi]}$, empero, depende de las c.b. para la coordenada- ψ .

Las ecuaciones de Euler-Lagrange que resultan de este Lagrangiano estándar son:

$$\Sigma^{(-1)}(\lambda)[\psi] \cdot (\psi_t - V_{(-1,1)}(\omega)[\psi]) = 0, \quad (4.17)$$

o, usando la forma explícita del kernel del operador de arriba,

$$\psi_t(x, \lambda, t) = -\psi_x(x, \lambda, t) \Delta_\omega \left(\frac{1}{\psi_x(x, \lambda, t)} \right) + \alpha(t) \psi_x(x, \lambda, t),$$

donde $\alpha(t)$ es una función arbitraria del tiempo. Ver en la sección 4.6 una construcción similar para la ecuación ShG deformada con el primer vector derecho, en coordenadas- z , donde las c.b. determinan el coeficiente $\alpha(t)$ de la deformación en términos de funcionales de los campos.

4.5.6 Constantes de Movimiento para vectores izquierdos: Integrabilidad explícita de los vectores izquierdos

El Lagrangiano $L^{(-1)}(\lambda)[\psi]$ conduce a la construcción de constantes de movimiento para las ecuaciones de evolución involucradas. Sólo necesitamos una simetría para el vector de evolución. Por ejemplo, tomando $V = V_{(-1,1)}(\omega)[\psi]$ como vector de evolución y $\eta[\psi] = V_{(-1,0)}[\psi]$ como una simetría para V , definamos la 0-forma:

$$H^{(-1;-1)}(\lambda)[\psi] \equiv i_{V_{(-1,0)}} L^{(-1)}(\lambda)[\psi] = \frac{1}{8} \int_{x_-}^{x_+} dx \frac{1}{\psi_x(\lambda)}. \quad (4.18)$$

De acuerdo a la regla de Leibnitz, esta 0-forma debiera definir una corriente conservada porque $L^{(-1)}(\lambda)[\psi]$ es un Lagrangiano estándar y

$$\mathcal{L}_{V_{(-1,0)}} K^{(-1;-1)}(\lambda, \omega)[\psi] = 0.$$

Un cálculo explícito da (bajo la constricción)

$$\mathcal{L}_{V_{(-1,1)}(\omega)} H^{(-1;-1)}(\lambda)[\psi] = - \overbrace{B^{(0)}(\lambda, \omega)[\psi]^2}.$$

Más aún, esta corriente conservada puede proyectarse en una verdadera constante de movimiento. El resultado es la constante:

$$G^{(-1;-1)}(\lambda, \omega)[\psi, t] = H^{(-1;-1)}(\lambda)[\psi] + t \frac{\overbrace{B^{(0)}(\lambda, \omega)[\psi]^2}}{1 - t \overbrace{B^{(0)}(\omega, \omega)[\psi]^2}}.$$

Finalmente, las ecuaciones de constricción llevan a otra constante de movimiento (la cual no depende explícitamente del tiempo):

$$I^{(-1;-1)}(\lambda, \omega)[\psi] = H^{(-1;-1)}(\lambda)[\psi] + \frac{\overbrace{B^{(0)}(\lambda, \omega)[\psi]}}{\tau(\lambda, \omega)[\psi]},$$

donde $\tau(\lambda, \omega)[\psi] = \left(\frac{\psi_x(\lambda)}{\psi_x(\omega)} \right)^{1/2}$.

Nuevamente, estos resultados se pueden mapear a los otros vectores izquierdos por derivación de Lie a lo largo de $V_{(-3,0)}[\psi]$. Recalcamos que estos representan un número infinito de cantidades conservadas para todo vector en las jerarquías izquierdas, porque λ y ω son arbitrarios, lo que demuestra explícitamente la integrabilidad de los vectores izquierdos.

Más adelante, en los ejemplos, se verá que las 0-formas aquí definidas, ecuación (4.18), representan también un número infinito de corrientes conservadas para vectores en la jerarquía derecha KdV (específicamente para la ecuación KN).

4.6 Forma explícita de los Principios de Acción para ecuaciones seleccionadas en las Jerarquías derecha e izquierdas

Los resultados de esta sección son nuevos hasta donde sabemos, excepto cuando lo contrario se mencione explícitamente.

4.6.1 Ecuación de Liouville pura: Matriz Simpléctica $\Sigma^{(0)}(\lambda)$

La forma usual de esta ecuación es en coordenadas $-z$, donde se lee $z_{xt} = e^z$. Sin embargo, trabajaremos en coordenadas $-\psi$, donde la ecuación es

$$\psi_t(x, y, t) = V_{\text{Liou}}[\psi]^x + \frac{1}{4}(\alpha V_{(-1,0)}[\psi]^x + \beta V_{(-2,0)}[\psi]^x) = \psi^2 + \alpha \psi + \beta \quad (4.19)$$

con α, β funciones arbitrarias del tiempo, lo que significa que un apropiado principio de acción tiene una matriz simpléctica con $V_{(-1,0)}$ y $V_{(-2,0)}$ como vectores en el kernel. Este es el caso de la 2-forma $\Sigma^{(0)}(\lambda)$, si usamos las siguientes c.b. sobre los vectores y las 1-formas (o variaciones):

$$(\psi_{xx}(x, \lambda))_{\pm} = 0, \quad (\delta\psi_x(x, \lambda))_{\pm} = 0. \quad (4.20)$$

Como hay una simple transformación que aniquila α y β en la ecuación (4.19), asumimos que $\alpha = \beta = 0$ y nos enfocamos en el término ψ^2 (que viene del vector V_{Liou}).

Lagrangiano estándar para la ecuación de Liouville

Se encuentra que

$$K^{(M; \text{Liou})}(\lambda)[\psi] = -\frac{1}{16} \int_{x_-}^{x_+} dx (2\psi_x - \psi_x \ln \psi_x)$$

es solución de

$$\mathcal{L}_{V_{\text{Liou}}} L^{(M)}(\lambda)[\psi] = \delta K^{(M; \text{Liou})}(\lambda)[\psi] + 1\text{-forma en el borde}[\psi],$$

completando así el par Lagrangiano estándar ($L^{(M)}(\lambda); K^{(M; \text{Liou})}(\lambda)$) para la ecuación (4.19) con $\alpha = \beta = 0$. El principio de acción estándar para la ecuación de Liouville es luego:

$$S[\psi(x, \lambda, t)] = -\frac{1}{32} \int_{t_-}^{t_+} dt \int_{x_-}^{x_+} dx [(\psi_x^{-1})_{xx}(\psi_t - \psi^2) + 4\psi_x - 2\psi_x \ln \psi_x].$$

No-estandarización del Lagrangiano

Aplicamos el proyector definido en la sección 3.4.5, sobre la 1-forma $L^{(M)}(\lambda)$, de modo que una 1-forma Lagrangiana no-estándar se obtiene para el vector de Liouville,

$V_{\text{Liou}}[\psi]$:

$$\begin{aligned} L^{(M;\text{Liou})}(\lambda)[\psi, t]_x &\equiv \mathcal{P}_{V_{\text{Liou}}}(t)L^{(M)}(\lambda)[\psi]_x \\ &= \delta(y - \lambda) \times \\ &\quad \left(-\frac{1}{32} \left(\frac{1}{\psi_x} \right)_{xx} - \frac{1}{16} \frac{t^2 \psi_x}{(1+t\psi)^2} + \frac{1}{16} \frac{t \psi_{xx}}{(1+t\psi) \psi_x} \right). \end{aligned}$$

Es fácil ver que

$$\mathcal{M}_{V_{\text{Liou}}} L^{(M;\text{Liou})}(\lambda) = 0,$$

sin términos de borde. La estructura simpléctica cambia bajo la proyección por un término de borde cerrado, el cual depende explícitamente del tiempo. Su kernel, bajo las c.b. de ecuaciones (4.20), está generado sólo por el vector $V_{(-1,0)}$. Ahora podemos aplicar los teoremas de las secciones anteriores para:

1. Escribir el principio de acción no-estándar para la ecuación de Liouville:

$$\begin{aligned} S[\psi(x, \lambda, t)] &= \int_{t_-}^{t_+} dt \int_{x_-}^{x_+} dx (\psi_t - \psi^2) \times \\ &\quad \left(-\frac{1}{32} \left(\frac{1}{\psi_x} \right)_{xx} - \frac{1}{16} \frac{t^2 \psi_x}{(1+t\psi)^2} + \frac{1}{16} \frac{t \psi_{xx}}{(1+t\psi) \psi_x} \right). \end{aligned}$$

2. Contraer esta 1-forma Lagrangiana no-estándar con una simetría y así obtener una constante de movimiento para nuestro sistema. Usando la simetría trivial $\eta = V_{\text{Liou}}$, obtenemos una constante de movimiento no trivial:

$$\begin{aligned} H^{(M;\text{Liou})}(\lambda)[\psi, t] &\equiv i_{V_{\text{Liou}}} L^{(M;\text{Liou})}(\lambda)[\psi, t] \\ &= \int_{x_-}^{x_+} dx \psi(x, \lambda)^2 \times \\ &\quad \left(-\frac{1}{32} \left(\frac{1}{\psi_x} \right)_{xx} - \frac{1}{16} \frac{t^2 \psi_x}{(1+t\psi)^2} + \frac{1}{16} \frac{t \psi_{xx}}{(1+t\psi) \psi_x} \right). \end{aligned}$$

Esta constante de movimiento satisface, sin términos de borde,

$$\frac{D}{Dt} H^{(M;\text{Liou})}(\lambda)[\psi, t] = 0$$

bajo el flujo de Liouville, como se espera por la regla de Leibnitz.

3. Construir una corriente conservada basados en la 0-forma $C^{(M;Liou)}(\lambda)[\psi, t]$, definida por:

$$\partial_t L^{(M;Liou)}(\lambda)[\psi, t] = \delta C^{(M;Liou)}(\lambda)[\psi, t] + 1\text{-forma en el borde,}$$

lo que es una consecuencia de la existencia del Lagrangiano estándar $(L^{(M)}(\lambda)[\psi]; K^{(M;Liou)}(\lambda)[\psi])$.

Esta construcción lleva a la corriente conservada

$$(\mathcal{J}^t, \mathcal{J}^x) = -\frac{1}{16} \left(\frac{\psi_x (\ln \psi_x - 1)}{(1 + t\psi)^2}, -\frac{2}{t^2} \left(\frac{1}{1 + t\psi} + \ln(1 + t\psi) \right) \right).$$

Los resultados arriba mencionados se pueden entender como nuevos teoremas de conservación no locales para la ecuación de Liouville en coordenadas- z .

4. Finalmente, más objetos no triviales se obtienen por contracción de nuestra 1-forma no-estándar con vectores derechos o izquierdos y/o por derivación de Lie a lo largo de estos vectores.

4.6.2 Ecuación ShG y algunas deformaciones

Para obtener la típica ecuación ShG desde el principio de acción, necesitamos que la matriz simpléctica $\Sigma(\omega)$ y el vector ShG $V_{\text{ShG}}(\omega)$ tengan el *mismo* argumento ω (el que está fijo en esta subsección). Trabajaremos en el sistema de coordenadas- z .

Ecuación ShG pura: matriz simpléctica $\Sigma^{(0)}(\omega)$

El par Lagrangiano estándar para la ecuación ShG será $(L^{(M)}(\omega)[z]; K^{(M;ShG)}(\omega)[z])$, donde la 1-forma Lagrangiana estándar mapea a coordenadas- z usando la matriz de transformación $\frac{\delta\psi}{\delta z} = D^{-1}\psi_x$:

$$L^{(M)}(\omega)[z]_x = -\frac{1}{32}\delta(y - \omega)z_x(x, y),$$

y así la 2-forma simpléctica $\Sigma^{(0)}(\omega)[z] = \frac{1}{16}D$ tiene sólo un vector en el kernel, a saber $V_{(-2,0)}[z]^x = 4$. Por otro lado, la 0-forma Lagrangiana estándar resuelve

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta z(x, \omega)} K^{(M;ShG)}(\omega)[z] + 1\text{-forma en el borde} &= \mathcal{L}_{V_{\text{ShG}}(\omega)} L^{(M)}[z](x, \omega) \\ &= -\frac{1}{32} [\sinh z - \cosh z D^{-1}z_x]. \end{aligned}$$

Obtenemos el principio de acción usual para la ecuación ShG: [21]

$$S[z(x, \omega, t)] = \frac{1}{32} \int_{t_-}^{t_+} dt dx (-z_x z_t - 2 \cosh z) .$$

Ecuación ShG deformada con el primer vector derecho (translacional): matriz simpléctica $\Sigma^{(-1)}(\omega)$

La próxima 1-forma Lagrangiana estándar izquierda para la ecuación ShG, $L^{(-1)}(\omega)$, se lee

$$L^{(-1)}(\omega)[z]_x = -\frac{1}{32} \delta(\omega - y) e^z (D^{-1} e^{-z}) .$$

La 2-forma simpléctica asociada es

$$\Sigma^{(-1)}(\omega)[z] = -\frac{1}{32} (e^z D^{-1} e^{-z} + e^{-z} D^{-1} e^z) ,$$

que hereda el kernel (generado por $V_{(1,1)}[z]^{x'} = -z_x$) de aquel en el sistema de coordenadas ψ sólo para c.b. muy especiales:

$$\Sigma^{(-1)}(\omega)[z]_{xx'} \cdot V_{(1,1)}[z]^{x'} = \frac{1}{64} \delta(\omega - y) (e^z \overline{e^{-z}} - e^{-z} \overline{e^z}) ,$$

la última expresión se anula sólo para c.b. $z_+ = z_- + i\pi(2n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Para otras c.b., empero, este paréntesis de Lagrange no posee kernel, lo que se muestra en el Principio Variacional para el vector ShG por el hecho que las ecuaciones de Euler-Lagrange se deforman por un factor del vector $V_{(1,1)}[z]$, factor que no es arbitrario: depende de las c.b. usadas para las coordenadas z .

En el caso genérico $\overline{e^z} \neq 0$ (y por lo tanto la 2-forma simpléctica $\Sigma^{(-1)}$ es invertible), el principio de acción es explícitamente

$$S[z(x, \omega, t)] = \int_{t_-}^{t_+} dt \left[-\frac{1}{32} \int_{x_-}^{x_+} dx e^z (D^{-1} e^{-z}) (z_t - D^{-1} \sinh z) + K^{(-1; \text{ShG})}[z] \right] ,$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$-\frac{1}{32} (e^z D^{-1} e^{-z} + e^{-z} D^{-1} e^z) (z_t - D^{-1} \sinh z + \alpha[A_+, A_-] z_x) = 0$$

o, equivalentemente,

$$z_t - D^{-1} \sinh z + \alpha[A_+, A_-] z_x = 0 ,$$

donde $K^{(-1; \text{ShG})}[z] = \int_{x_-}^{x_+} dx e^z (D^{-1} e^{-z})^2 / 128 + F[A_+, A_-]$, $A_{\pm} \equiv \int_{x_-}^{x_+} dx e^{\pm z}$, y α, F resuelven la ecuación:

$$\delta F[A_+, A_-] = -\alpha[A_+, A_-] (\overline{e^{-z}} \delta A_+ + \overline{e^z} \delta A_-) + \frac{1}{8} A_- (A_- - 2 A_+) \delta A_+. \quad (4.21)$$

Hay muchas soluciones de la ecuación anterior para un conjunto dado de c.b. sobre los valores límite de z_{\pm} , así que discutiremos, como ejemplos, sólo dos casos representativos de c.b. que no se intersectan:

1. $z_+ = -z_- + i\pi(2n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Es fácil ver que esta c.b. implica $\overline{e^z}, \overline{e^{-z}} \neq 0$, así en este caso nuestra 2-forma simpléctica es invertible.

Una solución de la ecuación (4.21) es

$$\alpha = -A_+ A_- / 4 \overline{e^z}, \quad F = A_+ A_-^2 / 512,$$

la que está bien definida en virtud de las c.b. usadas.

2. $z_+ = -z_- + i\pi(2n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$. Esta c.b. es compatible con la condición para la existencia de kernel para nuestra matriz simpléctica, pero seguiremos suponiendo que $\overline{e^z} \neq 0$.

En este caso, una solución de la ecuación (4.21) es

$$\alpha = -(A_+^2 - A_-^2) / 8 \overline{e^z}, \quad F = - \left(A_+^2 A_- - \frac{1}{3} (A_+^3 + A_-^3) \right) / 512.$$

La típica constante de movimiento para la ecuación ShG [29], $H[z] = \int_{x_-}^{x_+} dx \cosh z$, funciona en este caso también: bajo las c.b. implementadas, obtenemos

$$\dot{H}[z] = \int_{x_-}^{x_+} dx \sinh z (D^{-1} \sinh z - \alpha z_x) = \alpha \overline{\cosh z} = 0.$$

4.6.3 Ecuación KN y algunas deformaciones

Ecuación KN deformada con álgebra $SL(2, \mathbb{R})$: matriz simpléctica $\Sigma^{(0)}$

La siguiente 0-forma

$$K^{(M;1,2)}(\lambda)[\psi] = -\frac{3\lambda}{16} \overbrace{\left(\frac{\psi_{xx}}{\psi_x} \right)} + \frac{64}{3} \overbrace{\left(\frac{\psi_{xx}}{\psi_x} \right)^3} - \frac{1}{128} \int_{x_-}^{x_+} dx \left(\frac{\psi_{xx}}{\psi_x} \right)^4$$

completa el par Lagrangiano estándar $(L^{(M)}; K^{(M;1,2)})$ para la ecuación KN; los términos de borde permiten escribir un Principio Variacional con c.b. sobre la coordenada- u : $u_{\pm} = \lambda$, y con c.b. espaciales sobre las variaciones (más precisamente, sobre el espacio vectorial permitido) tales que la 2-forma simpléctica $\Sigma^{(0)}(\lambda)[\psi] = \delta L^{(M)}(\lambda)[\psi]$ sea antisimétrica; estas c.b. resultan ser menos restrictivas que las usuales.

Ecuación KN deformada con el primer vector derecho (translacional): matriz simpléctica $\Sigma^{(-1)}(\lambda)$

El primer vector derecho $V_{(1,1)}[\psi]$ genera el kernel de la matriz simpléctica: $V_{(1,1)}[\psi]^{x'} \Sigma^{(-1)}(\lambda)[\psi]_{x'x} = -\frac{1}{32} \overbrace{\left(\frac{\delta\psi(\lambda)}{\psi_x(\lambda)} \right)} = 0$, en particular para c.b. usuales; obtenemos un Lagrangiano no-estándar para la ecuación KN en este caso, luego de proyectar la 1-forma $L^{(-1)}(\lambda)[\psi]$:

$$\mathcal{M}_{V_{(1,2)}} L^{(-1;1,2)}(\lambda)[\psi, t] = 1\text{-forma en el borde,}$$

$$L^{(-1;1,2)}(\lambda)[\psi, t] = L^{(-1)}(\lambda)[\psi] - t \delta K^{(-1;1,2)}[\psi],$$

$$K^{(-1;1,2)}[\psi] = \frac{3}{64} \int_{x_-}^{x_+} dx \left(\frac{\psi_{xx}}{\psi_x} \right)^2.$$

Construcción de constantes de movimiento y corrientes conservadas para la ecuación KN

La primera constante de movimiento (conocida [21]) que podemos escribir es la contracción de la anterior 1-forma con el vector de flujo:

$$H^{(-1;1,2)}(\lambda)[\psi] = i_{V_{(1,2)}} L^{(-1;1,2)}(\lambda)[\psi, t] = \int_{x_-}^{x_+} dx (u(x, t) - \lambda),$$

donde $u(x, t)$ es la solución asociada de la ecuación KdV, y hemos asumido, por simplicidad, c.b. $u_{\pm} = \lambda$. Otras, nuevas constantes se obtienen al contraer nuestra 1-forma no-estándar con otras simetrías. Por ejemplo, la contracción de $L^{(-1;1,2)}(\lambda)[\psi, t]$ con las primeras tres simetrías izquierdas da esencialmente las 0-formas que, como ya

sabemos, definen corrientes conservadas para los vectores izquierdos (ver la ecuación (4.18)):

$$H^{(-1;-j)}(\lambda)[\psi] = \frac{1}{8} \int_{x_-}^{x_+} dx \frac{\psi(x, \lambda)^{j-1}}{\psi_x(x, \lambda)}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Cada una de estas tres 0-formas define un número infinito (continuo dado que λ es arbitrario) de corrientes conservadas para la ecuación KN. Por ejemplo, el caso $j = 1$ lleva a la ley de conservación:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{8 \psi_x(x, \lambda)} \right) - \frac{D}{Dx} \left(\frac{\lambda}{\psi_x(x, \lambda)} + \frac{u(x)}{2 \psi_x(x, \lambda)} + \frac{\psi_{xx}(x, \lambda)^2}{8 \psi_x(x, \lambda)^3} \right) = 0,$$

que es válida on-shell bajo el flujo KN, y donde λ es arbitrario: en particular, si tomamos la derivada con respecto a λ de la anterior ley de conservación, obtenemos una nueva corriente conservada:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\psi_{x\lambda}(x, \lambda)}{8 \psi_x(x, \lambda)^2} \right) + \frac{D}{Dx} \left(\frac{1}{\psi_x(x, \lambda)} - \frac{\lambda \psi_{x\lambda}(x, \lambda)}{\psi_x(x, \lambda)^2} - \frac{u(x) \psi_{x\lambda}(x, \lambda)}{2 \psi_x(x, \lambda)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\psi_{xx}(x, \lambda) \psi_{xx\lambda}(x, \lambda)}{4 \psi_x(x, \lambda)^3} - \frac{3 \psi_{xx}(x, \lambda)^2 \psi_{x\lambda}(x, \lambda)}{8 \psi_x(x, \lambda)^4} \right) = 0, \end{aligned}$$

la que es no local incluso en coordenadas- ψ : las derivadas con respecto a λ esconden la no localidad (ver la ecuación de constricción (4.4)).

Se puede mostrar que las constantes de movimiento obtenidas vía contracciones de $L^{(-1;1,2)}(\lambda)$ con y/o derivación de Lie a lo largo de los sucesivos vectores izquierdos ya están contenidas en las constantes arriba definidas.

Para terminar, hay otro grupo de constantes que son puros términos de borde: en este caso no se admiten "términos espaciales" en la corriente conservada \mathcal{J}^x , por lo que tenemos verdaderas constantes de movimiento. Ellas aparecen, sin embargo, para c.b. muy especiales:

1. Para $u_+ = u_- = -\lambda/2$, $(u_x)_\pm = (u_{xx})_\pm = 0$:

$$H_\pm^{\text{bor}(1)}(\lambda)[\psi, t] = \left(\frac{\psi_{xx}}{\psi_x + 3 \lambda t \psi_{xx}} \right)_\pm.$$

2. Para $u_+ = u_- = \lambda$, $(u_x)_\pm = (u_{xx})_\pm = 0$:

$$H_\pm^{\text{bor}(2)}(\lambda)[\psi] = \left(\frac{\psi_{xx}}{\psi_x} \right)_\pm.$$

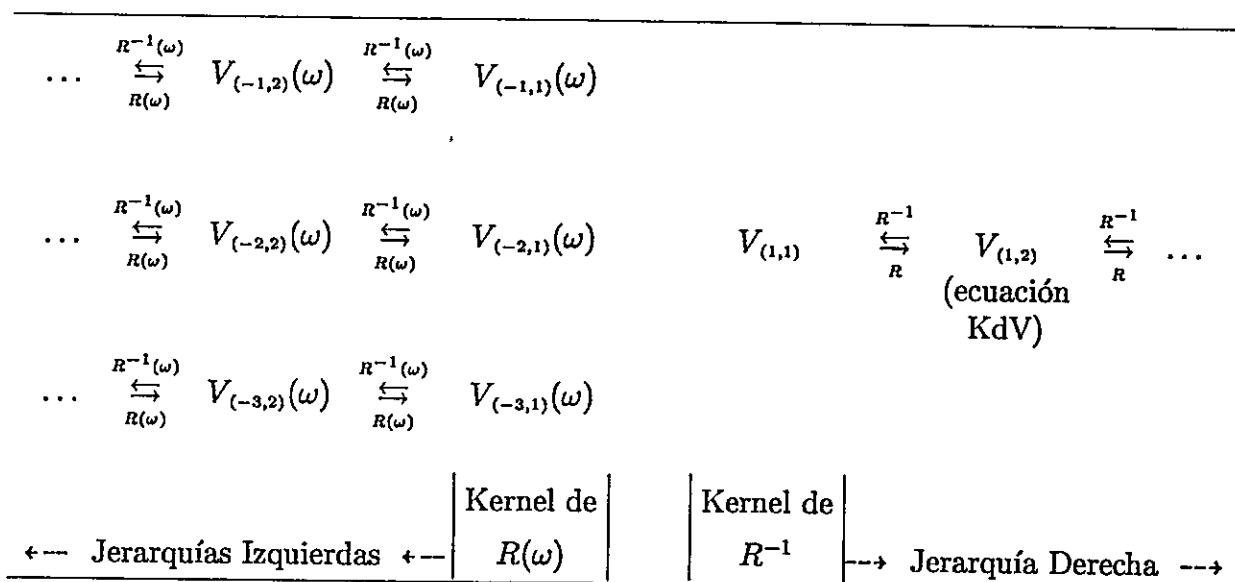


Figura 4.1: Jerarquías Derecha e Izquierdas KdV de vectores. Éstas comienzan con vectores en el kernel de los Operadores Hereditarios $R(\omega)$ y R^{-1} . Miembros sucesivos se generan en general por contracción con los respectivos operadores, o por derivación con respecto a ω (jerarquías izquierdas). Derivación de Lie a lo largo del vector izquierdo interno $V_{(-3,0)}$ sirve para moverse hacia abajo a través de diferentes jerarquías izquierdas. Derivación de Lie a lo largo del vector Galileano para R mueve de vector en vector hacia la derecha, y hacia la izquierda lo mismo sucede con el vector Galileano para R^{-1} . La ecuación de Sinh-Gordon y la ecuación asociada Camassa-Holm aparecen como ecuaciones de evolución usando los vectores izquierdos $V_{(-1,1)}(\omega)$ y $V_{(-2,1)}(\omega)$, respectivamente.

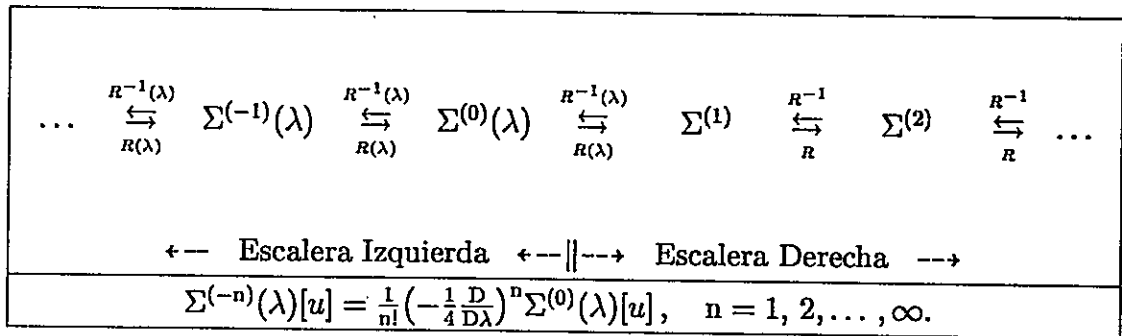


Figura 4.2: Escaleras izquierda y derecha de operadores simplécticos cerrados. Ellos se generan mediante contracciones sucesivas de $\Sigma^{(1)}$ con los operadores hereditarios. Los operadores simplécticos en la escalera izquierda pueden también generarse por derivación de $\Sigma^{(0)}(\lambda)$ con respecto a λ . Esencialmente, podemos movernos de operador en operador vía derivación de Lie a lo largo del vector Galileano para R hacia la derecha, y hacia la izquierda lo mismo sucede con el vector Galileano para R^{-1} .

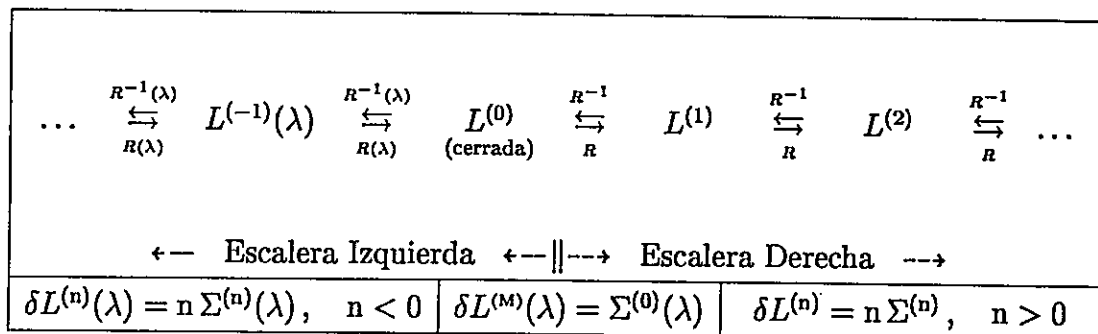


Figura 4.3: Escaleras izquierda y derecha de 1-formas Lagrangianas estándar. Sus derivadas exteriores son proporcionales a los operadores simplécticos en las escaleras, exceptuando a $L^{(0)}$, que es cerrada. En su lugar, la 1-forma $L^{(M)}$ se obtiene de integrar la correspondiente ecuación. Para las Jerarquías KdV, esta última 1-forma da principios de acción para la ecuación Krichever–Novikov (mapeable a KdV), Sinh–Gordon, Camassa–Holm, y Liouville, siendo posible en este último caso integrar el sistema explícitamente al proyectar la 1-forma Lagrangiana.

Capítulo 5

Lagrangianos, integrabilidad y caos para ecuaciones dinámicas 3D

Los sistemas no lineales tridimensionales autónomos de primer orden muestran un comportamiento muy rico, desde completa integrabilidad [17, 36, 37, 38] hasta caos y atractores extraños, [39, 18, 40, 41, 42] de acuerdo a los valores de los parámetros que aparecen en las ecuaciones de movimiento. Como éstos representan usualmente sistemas físicos y biológicos de interés (ecuación de Lorenz para el fluido hidrodinámico, ecuación de Rössler para sistemas químicos reactivos, ecuación de Lotka-Volterra para física de láser, plasma, [1] biología, [2, 3] economía, [4] etc.), es en cierto modo sorprendente la falta de Principios de Acción para tratar estas ecuaciones. Intentamos llenar este espacio usando el formalismo general para estructuras Lagrangianas, [14] el que aplicado a sistemas en dimensión tres se reduce a un problema más simple, a saber: para un campo vectorial tridimensional de evolución o flujo dado V^a , encontrar el determinante de una métrica (o elemento de volumen) tal que la divergencia covariante $\nabla_a V^a = 0$, que es un modo de escribir el teorema de Liouville y también una condición que se sabe que conduce a la construcción de constantes de movimiento partiendo de simetrías solamente. [43] Las ecuaciones de Euler-Lagrange que provienen de estos principios son usualmente equivalentes a $\frac{dx^a}{ds} = V^a$, donde s es un parámetro arbitrario (simetría de reparametrización temporal).

En la sección 5.1 se presenta un repaso de resultados conocidos y algunos resultados nuevos sobre el tratamiento Lagrangiano para sistemas tridimensionales. La

sección 5.2 trata con aplicaciones de la teoría: un método para construir nuevas constantes de movimiento a partir de constantes conocidas, construcción de estructuras Hamiltonianas, y varios tipos de Principios de Acción con invariancia relacionada a simetrías. En la sección 5.3 mostramos ejemplos para la ecuación Lotka–Volterra, incluyendo casos integrables así como casos no-integrables: mostramos que casos “cuasi-integrables” (i.e., sistemas que poseen una constante de movimiento) encontrados recientemente [37] de Lotka–Volterra son en realidad integrables; para los casos integrables, la construcción de Lagrangianos conduce a nuevas ecuaciones relacionadas, que involucran a simetrías (del vector de evolución V) las cuales generan el kernel de la 2-forma simpléctica. Las ecuaciones de Euler–Lagrange que resultan poseen varios tipos de invariancia, la más simple de ellas es la reparametrización temporal, que aparece cuando el kernel de la 2-forma simpléctica está generado por el vector de evolución V ; finalmente, dos ejemplos (relacionados con sistemas caóticos conocidos en la literatura [18, 39]) muestran que sí existen descripciones Lagrangianas para sistemas cercanos al comportamiento caótico y que éstas satisfacen las condiciones de Shil’nikov [40] sobre la existencia de atractores extraños alrededor de puntos fijos, aunque aún es incierto si una curva homoclina existe o no para tales sistemas.

5.1 Repaso

Consideremos las ecuaciones de movimiento autónomas:

$$\dot{x}^a(t) = V^a[x^b(t)] \quad , \quad a, b = 1, 2, 3, \quad (5.1)$$

donde V define un campo vectorial de flujo, velocidad o evolución en el espacio correspondiente, siendo una función (local en el tiempo) de las coordenadas $x^a(t)$. Como ejemplo, la ecuación de Lorenz se define por el vector

$$V[x, y, z] \equiv \{V^x, V^y, V^z\} = \{-\sigma x + \sigma y, r x - y - x z, x y - b z\},$$

donde (σ, r, b) son tres parámetros independientes.

5.1.1 Estructuras Lagrangianas para sistemas tridimensionales

En dimensiones arbitrarias, el problema de encontrar formulaciones Lagrangianas o Principios de Acción para las ecuaciones de movimiento (5.1) lleva a ecuaciones covariantes [14] (ver la sección 3.4) en términos de derivadas de Lie de estructuras tensoriales a lo largo del vector de flujo. En tres dimensiones, las ecuaciones están muy restringidas: como es un sistema de dimensión impar, las ecuaciones de Euler-Lagrange siempre presentan una invariancia. Por ejemplo, invariancia de reparametrización temporal aparece cuando el kernel de la 2-forma simpléctica está generado por el campo vectorial de evolución V .

Desde ahora, a menos que se diga explícitamente, estaremos tratando con objetos tiempo-independientes, en el sentido que sólo dependen del tiempo implícitamente, a través de su dependencia en las coordenadas $x^a(t)$.

Las ecuaciones de movimiento (5.1) están relacionadas con el **Principio Variacional con Acción**

$$S[x^a(t), t] = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(L_a (\dot{x}^a - V^a) + K \right), \quad (5.2)$$

donde la 1-forma $L[x^b]$ y la 0-forma $K[x^b]$ satisfacen la siguiente ecuación:

$$L_{a,b} V^b + L_b V^b_{,a} = K_{,a},$$

con $K_{,a} \equiv \frac{\partial K}{\partial x^a}$.

Reescribimos en términos de tensores:

$$\mathcal{L}_V L = dK,$$

donde \mathcal{L}_V es la derivada de Lie a lo largo del vector V , y d es la derivada exterior (ver definiciones en capítulo 2).

Llamamos al par $(L; K)$, 1-forma L y 0-forma K , un **par Lagrangiano estándar** para V si $K \neq 0$. En el caso especial $K = 0$ llamamos a L un **Lagrangiano no-estándar** para V : este caso permite la construcción de paréntesis de Poisson y constantes de movimiento (ver sección 5.2 y, para el caso general de construcción de constantes de movimiento, sección 3.4.7).

Las ecuaciones de Euler–Lagrange, que provienen de exigir que la variación de la acción (5.2) sea igual a términos de borde solamente (Principio de Weiss; [16] ver la sección 3.4.2) son:

$$\Sigma_{ab} (\dot{x}^b - V^b) = 0, \quad (5.3)$$

donde $\Sigma \equiv dL$ es la 2–forma simpléctica o paréntesis de Lagrange cuyas componentes son:

$$\Sigma_{ab} = L_{b,a} - L_{a,b}.$$

Notar que estas ecuaciones de Euler–Lagrange no implican a las ecuaciones de movimiento originales (5.1); en vez de eso, implican ecuaciones deformadas o mezcladas que involucran al kernel de la 2–forma simpléctica. En tres dimensiones, la 2–forma simpléctica siempre tiene kernel, y lo más simple es pedir que el kernel sea proporcional al mismo vector de evolución V (para otros tipos de kernel en estos sistemas ver la sección 5.2.3):

$$\Sigma_{ab} = \rho[x^d] \epsilon_{abc} V^c,$$

donde ϵ_{abc} es la 3–forma Levi–Civita, una densidad tensorial totalmente antisimétrica, con $\epsilon_{123} = 1$, y $\rho[x^a]$ es el **elemento de volumen**, una densidad escalar que resuelve [43]

$$(\rho V^a)_{,a} = 0, \quad (5.4)$$

lo que es necesario y suficiente para que Σ sea una 2–forma simpléctica cerrada para el vector de evolución V . En términos de una métrica g_{ab} , el elemento de volumen es $\rho = \sqrt{\det g_{ab}}$ y la ecuación de arriba es equivalente a $\nabla_a V^a = 0$, donde la derivada covariante se toma con respecto a la métrica g . Geométricamente, la existencia de tal métrica conduce a la construcción de un **invariante integral** [15] (teorema de Liouville) de la forma

$$I = \int_M \rho[x^a] d^3x,$$

donde M es una región del espacio de configuraciones, región que se supone evoluciona a lo largo del flujo V . El elemento de volumen no es único: en efecto, dados dos elementos de volumen ρ y ρ' , su cociente $C = \rho/\rho'$ es una constante de movimiento.

Como consecuencia del hecho que el kernel de la 2-forma simpléctica está generado por el vector de evolución, nuestros Principios de Acción para sistemas tridimensionales serán puramente geométricos: ellos nos darán sólo la curva del movimiento, dejando la manera en que corren los relojes locales sin determinar. Las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.3) son así $\Sigma_{ab}\dot{x}^b = 0$, que es equivalente a $\frac{dx^a}{ds} = V^a$, donde s es un parámetro arbitrario.

El par Lagrangiano estándar $(L; K)$ se construye (localmente) por una integral de línea:

$$\begin{aligned} K[x^b] &= L_a[x^b] V^a[x^b], \\ L_a[x^b] &= \int_0^1 \Sigma_{ab}[x^c(s)] \frac{dx^b(s)}{ds} s ds + R_{,a}[x^b], \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde R es una 0-forma arbitraria y el camino en la integral de línea está parametrizado por

$$x^a(s) = x_o^a + s(x^a - x_o^a), \quad s \in [0, 1],$$

y es tal que el integrando es igual a cero en $s = 0$ y es bien comportado a lo largo del camino. La Acción para el sistema muestra claramente la invariancia de reparametrización temporal:

$$S[x^a(t)] = \int_{t_o}^{t_1} L_a[x^b(t)] \dot{x}^a(t) dt. \quad (5.6)$$

Es importante mencionar aquí la cercanía de la ecuación para el elemento de volumen con aquella para el **polinomio de Darboux**. En la terminología usual, [36] dos polinomios en las coordenadas, $f(x^a)$ (el polinomio de Darboux) y $Q(x^a)$ (el cofactor) deben encontrarse de manera que

$$f_{,a} V^a = Q f,$$

por lo tanto podemos obtener una solución para el elemento de volumen, ecuación (5.4) a partir de un polinomio de Darboux cuando el cofactor es un múltiplo de $V^a_{,a}$. Hay usualmente otras soluciones para el elemento de volumen tales que la expresión resultante para f no es polinomial, como sucede con los así llamados factores exponenciales en la referencia [37].

De todos modos, esta cercanía puede usarse directamente para construir Principios de Acción para toda ecuación para la cual se conozca un polinomio de Darboux o una "función de Darboux", como es el caso de la ecuación de Lorenz, la ecuación de Rössler, la ecuación Lotka-Volterra y muchas otras.

5.2 Aplicaciones

En las siguientes aplicaciones, vamos a asumir que el vector de evolución V posee un Lagrangiano no-estándar L (esto fija a R en la ecuación (5.5)), como es el caso en los ejemplos que siguen en esta sección.

5.2.1 Método para construir una constante de movimiento partiendo de una conocida

Podemos usar una constante de movimiento conocida para construir la otra explícitamente. Describiremos el método, omitiendo los detalles por simplicidad.

Supongamos que el vector de evolución V posee: (a) Un Lagrangiano no-estándar L , junto a su elemento de volumen asociado ρ ; (b) una constante de movimiento tiempo-independiente $H[x^a]$. Consideremos el vector definido por las componentes

$$\eta^a = \frac{1}{\rho} \epsilon^{abc} H_{,b} L_{,c}.$$

Se sigue que η es una simetría para V , y que η es proporcional a V . Luego, obtenemos

$$\eta^a = I V^a,$$

donde I es una constante de movimiento para V , la que puede ser o no independiente de H . Mostraremos que el sistema es completamente **integrable** (i.e., posee dos constantes de movimiento tiempo-independientes, e independientes entre sí) en cualquier caso:

1. si $I = 0$, entonces $DH_{,a} = L_{,a}$ donde D es una constante de movimiento independiente de H , porque, de otro modo, dL se anularía,

2. si $I \neq 0$ es independiente de H , es directo y
3. si $I \neq 0$ es función de H , $I = I(H)$, definamos la 0-forma $P(H)$ tal que $\frac{dP}{dH} = \frac{1}{I(H)}$. Definamos luego la 1-forma $U = e^{-P} L$. Se sigue que $dU = 0$, por lo tanto la 0-forma C definida (localmente) por

$$dC = e^{-P} L$$

es una constante de movimiento independiente de H para V .

5.2.2 Teorías Hamiltonianas

Usando las constantes de movimiento obtenidas en la última subsección, es fácil construir todas las posible teorías Hamiltonianas para el vector de evolución V . Por ejemplo, para los casos 2. y 3. de arriba podemos escribir

$$V^a = J^{ab} H_{,b},$$

donde $J^{ab} = (I\rho)^{-1} \epsilon^{abc} L_c$ es el paréntesis de Poisson. El Casimir, aunque siempre computable, es fácil de adivinar sólo en el caso (iii): es la 0-forma C de arriba, y resuelve $J^{ab} C_{,b} = 0$. El Hamiltoniano es H módulo una función de C ; su selección final descansa en condiciones de estabilidad (ver la referencia [44]).

5.2.3 Más teorías Lagrangianas

Si tenemos dos constantes de movimiento independientes (tiempo-independientes) para el sistema (5.1), entonces otra constante de movimiento tiempo-dependiente se puede construir (en principio) por integración de cualquier componente del vector de evolución. Si $H^1[x, y, z]$, $H^2[x, y, z]$ son dos constantes, asumamos que podemos resolver para y y para z , obteniendo $y = y[x, H^1, H^2]$, $z = z[x, H^1, H^2]$. De esta manera, la componente x de las ecuaciones de movimiento $\dot{x} = V^1[x, y, z]$ se transforma en $\dot{x} = F[x, H^1, H^2]$, y así obtenemos una constante de movimiento tiempo-dependiente,

$$\tilde{H}^3[x, y, z, t] = H^3[x, y, z] - t,$$

donde $H^3[x, y, z] = \left(\int^x (F[x, H^1, H^2])^{-1} dx \right) \Big|_{H^j=H^j[x, y, z]}$.

Ahora que tenemos tres constantes de movimiento, afirmamos que la siguiente es la forma genérica para cualquier 1-forma Lagrangiana no-estándar (esta vez tiempo-dependiente): [14]

$$L = C^1 dC^2,$$

donde $C^j = C^j[H^1, H^2, H^3 - t]$, $j = 1, 2$.

En el caso que cualquiera de las C^j dependa de H^3 , el kernel asociado a la 2-forma simpléctica ya no será proporcional a V : de hecho, será proporcional a una simetría (que probablemente será tiempo-dependiente) η para V , la que puede ser calculada explícitamente. Obtenemos como resultado, nuevas ecuaciones de Euler-Lagrange que mezclan al vector V con η . Ejemplos con simetrías η tiempo-independientes se mostrarán en la sección 5.3.2.

5.2.4 Simetrías

Finalmente, asumiendo que las 0-formas H^1, H^2, H^3 de la última subsección se conocen, entonces un álgebra Abelianas de vectores $\mathcal{A} = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3 \equiv V\}$ se puede construir, tomando los vectores duales a las 1-formas dH^1, dH^2, dH^3 , i.e., resolviendo para los vectores:

$$\frac{\mathcal{L}H^k}{\eta_j} = \delta_j^k, \quad j, k = 1, 2, 3.$$

Estos vectores que conmutan son simetrías unos de otros por definición, y son usados para generar el kernel de la 2-forma simpléctica más general para el vector de evolución V (ver la sección 5.3.2).

5.3 Ejemplos: La ecuación Lotka-Volterra

Esta ecuación, restringida a tres dimensiones, se lee en su forma general,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V^x[x, y, z] = x(a_1 + b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z) \\ \dot{y} &= V^y[x, y, z] = y(a_2 + b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z) \\ \dot{z} &= V^z[x, y, z] = z(a_3 + b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z), \end{aligned}$$

donde a_i ; b_{ij} son parámetros constantes. Buscamos un elemento de volumen de la forma

$$\rho[x, y, z] = x^u y^v z^w, \quad (5.7)$$

donde u, v, w son constantes que dependen de los parámetros de arriba.

Para algunos valores de los parámetros, se pueden encontrar 1-formas Lagrangianas no-estándar: su existencia permite definir corchetes de Poisson, y mostrar la integrabilidad explícita de las ecuaciones. En otros casos, sólo se obtienen pares Lagrangianos estándar, aunque queda abierta la pregunta si esos Lagrangianos podrían hacerse no-estándar al sumárseles una 1-forma cerrada. Los ejemplos sugieren que, para sistemas caóticos o cercanos al caos, la respuesta a esta pregunta es negativa.

5.3.1 Caso $b_{ii} = 0$, $i = 1, 2, 3$ (sin términos de Verhulst)

El vector de evolución, luego de reescalar, es

$$V[x, y, z] = \{x(\lambda + C y + z), y(\mu + A z + x), z(\nu + B x + y)\}, \quad (5.8)$$

donde $A, B, C, \lambda, \mu, \nu$ son parámetros constantes. Constantes de movimiento para este sistema existen para un subconjunto del espacio de parámetros. [17, 36, 37, 38] Para valores arbitrarios de los parámetros, sin embargo, este sistema no es integrable, pero como veremos, una descripción Lagrangiana siempre existe. Consideremos el elemento de volumen

$$\rho[x^a] = (x y z)^{-1}. \quad (5.9)$$

Es fácil ver que $(\rho V^a)_{,a} = 0$, y la 1-forma Lagrangiana (que es estándar en general) se obtiene directamente:

$$L_a[x^b] = (x y z)^{-1} \epsilon_{abc} (x^b V^c[x^d] + \eta^b W^c[x^d]), \quad (5.10)$$

donde $\eta^a = M^a_b x^b$, $M^a_b = \text{diag}(\lambda, \mu, \nu)$, y $W^a = x^a \ln x^a$.

La acción asociada para este sistema requiere sólo del conocimiento de la anterior 1-forma (ver ecuación (5.6)). Notar que el elemento de volumen (5.9) es singular en los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, reflejando así el hecho que éstos son planos invariantes.

5.3.2 Sistema ABC

Cuando $\lambda = \mu = \nu = 0$, el sistema definido por el flujo (5.8) es conocido por "sistema ABC ". En este caso, el Lagrangiano (5.10) es no-estándar, y se reduce a

$$L_a[x^b] = (x y z)^{-1} \epsilon_{abc} x^b V^c[x^d].$$

El hecho que este Lagrangiano sea no-estándar lleva a la siguiente conclusión: si (para valores dados de los parámetros) existe una constante de movimiento, entonces otra se puede construir usando la teoría de la sección 5.2. Esto puede aplicarse, por ejemplo, a todos los sistemas ABC estudiados en la referencia [38] donde el autor encuentra una constante de movimiento polinomial. En los ejemplos que siguen, el método será aplicado a algunos casos nuevos encontrados en la referencia [37].

Como una aplicación final, el Lagrangiano puede ser usado para escribir corchetes de Poisson y teorías Hamiltonianas, y para encontrar nuevas ecuaciones de movimiento, relacionadas, a partir de la construcción de una amplia clase de teorías Lagrangianas, como se hará en el último ejemplo de esta subsección.

Caso $A = -1$, $B = 1/2$, $C = 0$

Este caso posee una constante de movimiento encontrada recientemente: [37] $H^1 = xy^{-1}z^2 \exp(-2(y+z)^2(xy)^{-1})$. Aplicamos nuestro Lagrangiano para construir otra constante de movimiento. En el presente caso, resulta que $U = (H^1)^{-1/2}L$ es una 1-forma cerrada, la que por lo tanto debe ser la derivada exterior de alguna constante de movimiento. Obtenemos, después de integrar,

$$H^2[x, y, z] = (H^1)^{-1/2} x - 2 \int_0^{(y+z)/\sqrt{xy}} \exp(q^2) dq,$$

y así este sistema es integrable.

Caso $A = -1/(C+1)$, $B = 2$

Este es un caso nuevo también encontrado en la referencia [37], con una constante de movimiento: $H^1[x, y, z] = x^2|y|^{2(C+1)}|z|^{-2C}|2A^2xz - (y - Az)^2|^{C-1}$. De acuerdo a nuestra teoría, obtenemos que la 1-forma $U = (H^1)^{-\frac{1}{2(C+1)}}L$ es cerrada. Integramos

y obtenemos la otra constante de movimiento:

$$H^2[x, y, z] = (y - Az) \left(1 - \Omega + xy \Omega^{AC} (1 - \Omega)^{\frac{1}{2} + A} \frac{\Gamma(A)}{\Gamma(-AC)} B_{\Omega} \left(-AC, \frac{1}{2} - A \right) \right),$$

donde $\Omega = \frac{2A^2xz}{(y-Az)^2}$ y $B_{\Omega}(a, b) \equiv \int_0^{\Omega} q^{a-1} (1-q)^{b-1} dq$ es la función Beta incompleta.

Caso $ABC - 1 = 0$, $B(A+1) + 1 = 0$

Aquí se conoce una constante de movimiento cuadrática: [17, 37]

$H^1[x, y, z] = A^2(Bx - z)^2 - 2A(Bx + z)y + y^2$. Obtenemos la otra constante:

$$H^2[x, y, z] = |x|^{-1} |yz|^{-1-C} \times \left| \pm \sqrt{H^1} + A(Bx - z) - y \right|^{1+2C} \\ \times \left| (y + Az)x - (y - Az)C(\pm \sqrt{H^1} + y - Az) \right|.$$

Los tres sistemas de arriba son, por lo tanto, integrables y la construcción de muchas teorías Hamiltonianas y Lagrangianas es posible. En el ejemplo que viene tomaremos un conocido caso integrable para mostrar la construcción de teorías Lagrangianas que dan lugar a nuevas ecuaciones de movimiento, en términos de las simetrías del campo vectorial de evolución.

Caso $ABC + 1 = 0$, $C = 1$

Aquí, la integrabilidad está garantizada por la primera condición. [37]

Usamos la restricción $C = 1$ aquí sólo por simplicidad. Constantes conocidas son $H^1[x, y, z] = -x + y - Az$, $H^2[x, y, z] = xy^B z^{-1}$. Ahora tomamos la componente y de la ecuación de movimiento (5.1), para obtener la tercera constante de movimiento (tiempo-dependiente):

$$\tilde{H}^3[x, y, z, t] = H^3[x, y, z] - t,$$

donde

$$H^3[x, y, z] = -\frac{\ln\left(\frac{y}{x+Az}\right)}{H^1}.$$

Los vectores η_1, η_2, η_3 duales a las 1-formas dH^1, dH^2, dH^3 son vectores que conmutan, y resultan ser, al escribirlos en términos de los H^j 's:

$$\begin{aligned} H^1 \eta_1[x, y, z] &= \{x, y, z\} + H^3 \eta_3[x, y, z] - B H^2 \eta_2[x, y, z], \\ \eta_2[x, y, z] &= (x + A z)^{-1} y^{-B} z^2 \{A, 0, -1\}, \\ \eta_3[x, y, z] &= V[x, y, z] = \{x(y + z), y(x + A z), z(B x + y)\}. \end{aligned}$$

Es claro por las definiciones que cualquiera de las tres ecuaciones de movimiento (rotuladas por j) que cada uno de estos vectores definen,

$$\dot{x}^a = \eta_j^a[x^b], \quad j = 1, 2, 3,$$

son completamente integrables, con tres constantes de movimiento dadas por $C_j^k = H^k - t \delta_j^k$, $k = 1, 2, 3$.

Ahora nos dedicamos a las descripciones Lagrangianas para el vector de evolución $\eta_3 = V$ (lo mismo puede hacerse para los otros vectores). Entre todos los ejemplos posibles, tres Principios de Acción especiales se obtienen con las 1-formas Lagrangianas dadas por $L^1 = H^2 dH^3$, $L^2 = -H^1 dH^3$ y $L^3 = H^1 dH^2$. Estos son todos Lagrangianos no-estándar para V , y se encuentra fácilmente que el kernel de la matriz simpléctica dL^j es proporcional al vector η_j . Por lo tanto, las ecuaciones de Euler-Lagrange provenientes del Lagrangiano L^j son

$$\dot{x}^a = V^a + \alpha \eta_j^a,$$

donde α es una 0-forma arbitraria. El caso $j = 3$ da la usual invariancia de reparametrización temporal, pero los casos $j = 1, 2$ son ejemplos de otro tipo de invariancia; sus Principios de Acción se computan fácilmente de ecuación (5.2).

5.3.3 Lagrangianos y caos

En los siguientes ejemplos construiremos Lagrangianos para sistemas Lotka-Volterra cercanos a sistemas caóticos conocidos. Los resultados generales aquí son: primero, que un elemento de volumen de la forma (5.7), implica $V^a{}_{,a} = 0$ en el punto fijo (o punto singular) finito de V que no está contenido en ningún plano coordenado. Esto es un hecho algo sorprendente, porque el elemento de volumen es singular en

los planos coordenados, pero su existencia implica condiciones para el flujo en un punto que está lejos de los planos.

Segundo, para un gran subconjunto del espacio de parámetros, estos sistemas permiten descripciones Lagrangianas junto con condiciones de Shil'nikov sobre la existencia de un atractor extraño del tipo espiral [40] en la vecindad del punto fijo relevante, aunque no se ha encontrado aún una curva homoclina.

Tercero, el elemento de volumen se indefine (i.e., las potencias u , v , w en ecuación (5.7) se hacen infinitas) cuando los valores de los parámetros son tales que algunos puntos fijos del campo vectorial de evolución degeneran en una "línea fija", i.e., una línea en el espacio de configuración para la cual la evolución se congela (ver más detalles sobre sistemas degenerados en la referencia [45]). En esta situación, el sistema adquiere una constante de movimiento, la que puede calcularse explícitamente. Vale la pena mencionar que nuestro método para encontrar otra constante de movimiento no puede aplicarse a esta última situación, ya que no tenemos un elemento de volumen a disposición. Luego, cabe preguntarse si para estos casos se puede o no hablar realmente de "sistema sólo cuasi-integrable" [17] en el sentido que únicamente existe una constante de movimiento.

Una ecuación del tipo replicador

Este ejemplo puede entenderse en el contexto de replicación y mutación catalítica:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V^x[x, y, z] = x \left(\frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1-y) + \frac{1}{10}(1-z) \right) \\ \dot{y} &= V^y[x, y, z] = y \left(-\frac{1}{2}(1-x) - \frac{1}{10}(1-y) + \frac{1}{10}(1-z) \right) \\ \dot{z} &= V^z[x, y, z] = z \left(\lambda x + \mu(1-x) + \frac{1}{10}(1-y) + \frac{1}{10}(1-z) \right),\end{aligned}\tag{5.11}$$

donde λ es un parámetro real, y $\mu = -\frac{1}{6} - \lambda$. El elemento de volumen toma la forma

$$\rho = x^{-\frac{1+6\lambda}{6\lambda}} y^{-\frac{1+6\lambda}{3\lambda}} z^{\frac{1-2\lambda}{2\lambda}}.$$

Se demuestra que $(\rho V^a)_{,a} = 0$. La 1-forma Lagrangiana (estándar) resulta ser

$$\begin{aligned}\{L_x, L_y, L_z\} = \rho \{ & (1 + 5x - 3y - 3z) yz + (-30 + 60x - 9y) yz\lambda, \\ & 0, 3xy(-11 + 5x + 5y + z) + 45xy^2\lambda\}.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Notamos que el caso $\lambda = 0$ y μ arbitrario aparece en la literatura, mostrando una familia uni-paramétrica de atractores extraños. [18] Un diagrama de bifurcación en términos de μ se puede encontrar en la referencia [42]. Mencionamos esto porque nuestro caso se intersecta con este último en el punto $\lambda = 0$, $\mu = -\frac{1}{6}$, donde el elemento de volumen asociado al Lagrangiano explota. Este punto en el espacio de parámetros también representa una degeneración de algunos puntos fijos del campo vectorial de evolución, en la línea fija $\{1 + \frac{3s}{10}, 1 - \frac{s}{2}, 1 + s\}$, $s \in \mathbb{R}$, y la siguiente resulta ser una constante de movimiento para el sistema (5.11):

$$C[x, y, z] = |x| |y|^2 |z|^{-3}.$$

Un sistema de dos presas-un predador

Consideramos uno de los modelos más importantes de depredación [39] usando la ecuación Lotka-Volterra, a saber, la ecuación

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V^x[x, y, z] = x\left(r - \frac{r}{K}x - \frac{r}{K}y - bz\right) \\ \dot{y} &= V^y[x, y, z] = y\left(r - \frac{r}{K}\alpha x - \frac{r}{K}y - (b - \epsilon)z\right) \\ \dot{z} &= V^z[x, y, z] = z(cbx + c(b - \epsilon)y - d).\end{aligned}$$

Los valores de los parámetros permiten describir la superioridad competitiva de la presa x sobre la presa y (caso $\alpha > 1$), y la ventaja de escape del predador de la presa y sobre la presa x (caso $0 \leq \epsilon \leq b$). Ahora, si mantenemos los parámetros arbitrarios, obtenemos la condición para la existencia del elemento de volumen:

$$d = \frac{cK\epsilon^2}{b(\alpha - 1)}, \quad (5.13)$$

y el elemento de volumen es

$$\rho[x, y, z] = \frac{1}{xyz} \left(x^{-\frac{\epsilon}{b}} y^{\frac{\epsilon}{b-\epsilon}} z^{\frac{r(\alpha-1)}{cK(b-\epsilon)}} \right)^{\frac{1}{\alpha-\alpha_0}},$$

donde $\alpha_0 \equiv \frac{b}{b-\epsilon} - \frac{\epsilon}{b}$.

En la referencia [39], el autor encuentra un conjunto de valores de los parámetros para los cuales el sistema desarrolla caos espiral. [40, 41] Los valores son $\alpha = 1.5$, $b = 0.01$, $c = 0.5$, $d = 1$, $r = 1$, $K = 1000$, y $\epsilon = 0.009$.

Es fácil ver que no hay elemento de volumen de la forma (5.7) para el conjunto de valores de arriba, porque la condición (5.13) no se cumple. Obtenemos que, para la existencia de un elemento de volumen, el único cambio es $d = 8.1$, mucho más grande que el anterior valor, $d = 1$. De acuerdo al modelo, esto significa que el predador (variable z) tiene una tasa de mortalidad más grande cuando hay un elemento de volumen de la forma (5.7) que en el caso caótico.

Por otro lado, un estudio de este sistema bajo la condición (5.13) muestra que, en el punto fijo $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+^2$, los criterios de Shil'nikov sobre la existencia de un atractor extraño del tipo espiral [40] se cumplen, para un gran subconjunto del espacio de parámetros. Sin embargo, no se han encontrado numéricamente aún una curva homoclina o un comportamiento caótico.

El elemento de volumen se indefine cuando $\alpha = \alpha_0$: nuevamente, algunos puntos fijos de V degeneran en una línea fija y el sistema presenta la siguiente constante de movimiento:

$$C[x, y, z] = |x|^{-\frac{d}{r\epsilon}(b-\epsilon)} |y|^{\frac{d}{r\epsilon}b} |z|.$$

Conclusiones

En esta tesis se desarrollaron métodos para estudiar, desde el punto de vista Lagrangiano, esencialmente dos tipos de sistemas: en dimensión finita, nos concentramos en ecuaciones de evolución tridimensionales, tanto integrables como no integrables; en dimensión infinita, estudiamos teorías de campo integrables (clásicamente), las que están ligadas a la existencia de un operador Hereditario. Pasamos a desglosar las principales conclusiones y desafíos que se presentan:

Dimensión finita

Los resultados obtenidos para sistemas de tres dimensiones, entre los que destacan la construcción de principios de acción para las ecuaciones de movimiento, la construcción de corchetes de Poisson desde el punto de vista Lagrangiano, y un método para integrar completamente, bajo ciertas condiciones, sistemas "cuasi-integrables", representan una nueva herramienta para el estudio numérico y teórico de los sistemas cercanos al caos, así como de los sistemas cercanos a la integrabilidad, y abren una puerta para futuras investigaciones en más dimensiones.

Dimensión infinita

Nuestro estudio de las Jerarquías de KdV muestra que las ecuaciones integrables basadas en operadores hereditarios, poseen escaleras de Principios de Acción, los que se presentan naturalmente en forma no local y dan lugar a ecuaciones de Euler-Lagrange deformadas; estos principios permiten construir corrientes conservadas locales y no locales para tales sistemas. El método permite realizar el mismo estudio para otras ecuaciones de evolución (e.g., ecuación de Schrödinger no lineal, ecuación

de Boussinesq), incluso en dimensiones mayores y en topologías no triviales, debido al hecho que se consideran explícitamente términos de borde en los Principios de Acción (formalismo de Weiss). En este contexto puede ser interesante buscar la conexión de nuestro punto de vista con los métodos de reducción que se conocen para espacio-tiempos de dimensión cuatro con curvatura auto-dual o anti-auto-dual, [46] métodos que dan lugar a ciertos miembros de las Jerarquías KdV y de otras jerarquías, usualmente bajo inspirados ansatz, lo que sugiere el carácter fundamental del punto de vista Lagrangiano, el que podría servir para estudiar directamente operadores hereditarios y sus ecuaciones de evolución integrables asociadas, en cuatro dimensiones espacio-temporales.

Bibliografía

- [1] G. Laval and R. Pellat. Plasma Physics. *Proceedings of Summer School of Theoretical Physics*, 1975. (New York: Gordon and Breach).
- [2] R. M. May and W. J. Leonard. Nonlinear aspects of competition between three species. *Siam J. Appl. Math.*, 29:243–253, 1975.
- [3] G. Abramson and D. H. Zanette. Statistics of extinction and survival in Lotka–Volterra systems, 1998. *Preprint* arXiv: adap-org/9805001 v2.
- [4] S. Solomon. Generalized Lotka–Volterra models, 1999. *Preprint* arXiv: cond-mat/9901250 v1.
- [5] F. Magri. *J. Math. Phys. (N. Y.)*, 18:1405, 1977.
- [6] I. Dorfman. *Dirac structures and integrability of nonlinear evolution equations*. Wiley & Sons, New York, 1993.
- [7] Peter J. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer–Verlag, New York, 1993 (second edition).
- [8] Y. Nutku and M. V. Pavlov. Multi–Lagrangians for integrable systems, 2001. *Preprint* arXiv: hep-th/0108214.
- [9] N. F. Smyth and W. L. Kath. Radiative losses due to pulse interactions in birefringent nonlinear optical fibers. *Phys. Rev.*, E 63(036614), 2001.
- [10] P. J. Morrison et al. Scattering of regularized-long-wave solitary waves. *Physica*, 11D:324–336, 1984.

- [11] S. A. Hojman. Non-Noetherian symmetries. *Latin-American School of Physics XXX ELAF, AIP Conference Proceedings*, **365**:117–136, 1996.
- [12] R. Mañé. On the minimizing measures of Lagrangian dynamical systems. *Non-linearity*, **5**:623–638, 1992.
- [13] P. Cartier and C. DeWitt-Morette. Functional integration. *J. Math. Phys.*, **41**(6):4154–4186, 2000.
- [14] S. A. Hojman and L. F. Urrutia. On the inverse problem of the calculus of variations. *J. Math. Phys.*, **22**:1896, 1981.
- [15] A. Gomberoff. *Métodos Hamiltonianos y Lagrangianos no canónicos*. PhD thesis, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias, Departamento de Física, 1996.
- [16] E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda. *Classical Dynamics: A Modern Perspective*. Wiley & Sons, New York, 1981.
- [17] J. M. Strelcyn and S. Wojciechowski. A method of finding first integrals for three-dimensional dynamical systems. *Phys. Lett.*, **A133**(4,5):207–212, 1988.
- [18] A. Arneodo, P. Couillet, and C. Tresser. Occurrence of strange attractors in three-dimensional volterra equations. *Phys. Lett.*, **A79**:259–263, 1980.
- [19] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. IOP Publishing Ltd., Bristol, 1995 (reprint).
- [20] J. M. Verosky. Negative powers of Olver recursion operators. *J. Math. Phys.*, **32**(7):1733–1736, 1991.
- [21] G. Eilenberger. *Solitons. Mathematical Methods for Physicists*. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [22] Jeremy Schiff. Symmetries of KdV and loop groups, 1996. *Preprint* arXiv: solv-int/9606004.

- [23] Y. Nutku. Lagrangian approach to integrable systems yield new symplectic structures for KdV, 2000. *Preprint* arXiv: hep-th/0011052.
- [24] B. Fuchssteiner. *Nonlinear Analysis TMA*, 3:849, 1979.
- [25] R.L. Anderson and A. S. Fokas. *J. Math. Phys. (N.Y.)*, 23:1066, 1982.
- [26] P. D. Lax. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Comm. Pure Appl. Math.*, 21:467-490, 1968.
- [27] M. Boiti, F. Pempinelli, and G. Z. Tu. Canonical structure of soliton equations via isospectral eigenvalue problems. *Nuovo Cimento*, 79B:231-265, 1984.
- [28] B. Fuchssteiner and A. S. Fokas. Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries. *Physica*, 4D:47-66, 1981.
- [29] M. Herrera. *Nuevas Estructuras Algebraicas para las Ecuaciones Integrables*. PhD thesis, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Física, 2001.
- [30] G. A. Guthrie and M. S. Hickman. Nonlocal symmetries of the KdV equation. *J. Math. Phys.*, 34:193-205, 1993.
- [31] C. Villavicencio. Private communication, 2001.
- [32] A. S. Fokas and B. Fuchssteiner. Bäcklund transformations for hereditary symmetries. *Nonlinear Analysis, TMA*, 5:849-862, 1979.
- [33] P. J. Olver. *J. Math. Phys.*, 18:1212, 1977.
- [34] M. D. Bustamante and S. A. Hojman. Lagrangian structures, integrability and chaos for 3D dynamical equations, 2002. *Preprint*: hep-th/0208189.
- [35] W. Oevel, B. Fuchssteiner, H. Zhang, and O. Ragnisco. Mastersymmetries, angle variables, and recursion operator of the relativistic Toda lattice. *J. Math. Phys.*, 30(11):2664-2670, 1989.

- [36] L. Cairó . Darboux first integral conditions and integrability of the 3D Lotka–Volterra system. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 7(4):511–531, 2000.
- [37] L. Cairó and J. Llibre. Darboux integrability for 3D Lotka–Volterra systems. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 33:2395–2406, 2000.
- [38] J. Moulin. Liouvillian integration of the Lotka–Volterra system. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 2(2):307–358, 2001.
- [39] R. R. Vance. Predation and resource partitioning in one–predator two–prey model communities. *Am. Nat.*, 112(987):797–813, 1978.
- [40] A. Arneodo, P. Couillet, and C. Tresser. Possible new strange attractors with spiral structure. *Commun. Math. Phys.*, 79:573–579, 1981.
- [41] O. Rössler. Different types of chaos in two simple differential equations. *Z. Naturforsch, Teil B, Anorg. Chem. Org. Chem. Biochem. Biophys. Biol.*, 31:1664–1670, 1976.
- [42] P. E. Phillipson and P. Schuster. Bifurcation dynamics of three–dimensional systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10(8):1787–1804, 2000.
- [43] S. A. Hojman. A new conservation law constructed without using either Lagrangians or Hamiltonians. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 25(7):L291, 1992.
- [44] P. J. Morrison. Hamiltonian description of the ideal fluid. *Reviews of Modern Physics*, 70(2):467–521, 1998.
- [45] J. Saavedra, R. Troncoso, and J. Zanelli. Degenerate dynamical systems. *J. Math. Phys.*, 42:4383–4390, 2001.
- [46] V. P. Nair and Jeremy Schiff. Kähler–Chern–Simons theory and symmetries of anti-self-dual gauge fields. *Nuclear Physics, B* 371:329–352, 1992.