

UCH-FC  
DOC-F  
A816  
C.1

# Nuevos Formalismos de Fluidos para Plasmas Relativistas y Plasmas Cuánticos Relativistas

Tesis  
entregada a la  
Universidad de Chile  
en cumplimiento parcial de los requisitos  
para optar al grado de  
Doctor en Ciencias con mención en Física  
Facultad de Ciencias



por

**Felipe Arnoldo Asenjo Zapata**

Enero, 2010

Directores de Tesis: **Dr. Juan Alejandro Valdivia**  
**Dr. Víctor Muñoz**

FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN  
TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato

**Felipe Arnoldo Asenjo Zapata**

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Física, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 25 de Enero de 2010.

**Directores de Tesis**

Dr. Juan Alejandro Valdivia

Dr. Víctor Muñoz

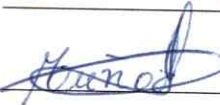
**Comisión de Evaluación de la Tesis**

Dr. Nelson Zamorano


Dr. Sergio A. Hojman

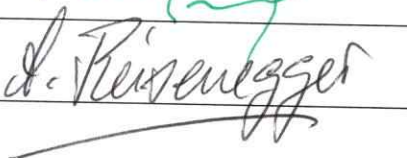
Dr. Andreas Reisenegger

  
\_\_\_\_\_

  
\_\_\_\_\_



  
\_\_\_\_\_

  
\_\_\_\_\_

  
\_\_\_\_\_



## BIOGRAFÍA



Felipe A. Asenjo Z. nació el 30 de diciembre de 1982 en Santiago. Ya desde su niñez se interesó por la naturaleza y sus fenómenos. Cursando su enseñanza media en el Instituto Nacional José Miguel Carrera, mostró su interés por estudiar ciencias. Al mismo tiempo, su afán por practicar deportes lo llevaron a practicar natación. El año 2000 ingresó a la Universidad de Chile a estudiar física, a la vez que competía en las competencias interfacultades de natación. El año 2005 fue aceptado como estudiante del Doctorado en Física, donde ha podido desarrollarse como investigador.



## AGRADECIMIENTOS

Antes de entrar en las profundidades de este trabajo quiero dejar testimonio de mi agradecimiento a todos aquellos quienes me permitieron lograr finalizar esta etapa de mi vida de la mejor manera que he podido. Me gustaría, si el lector me lo permite, nombrar a las personas importantes para mí durante mi estadía en el programa de postgrado.

Sin duda, sin el apoyo de Makarena Estrella, esta tesis hubiera sido imposible; gracias mi ángel por tu continuo amor, apoyo e inspiración (además de tu invaluable paciencia para conmigo y mis mañías).

Gracias a mis padres, Roberto Asenjo y Patricia Zapata, por todos los sacrificios que han hecho por mí, y por alentarme en el camino que he escogido seguir en mi vida. Soy muy afortunado de tener padres como ellos y espero algún día poder retribuirles todo su incondicional cariño. También quisiera agradecer a mi hermana, Natalia, y a toda mi familia que siempre se ha preocupado por mí.

Mi aprendizaje como científico se debe en gran parte a los maestros que he tenido durante este tiempo. Quiero agradecer a mis tutores, Juan Alejandro Valdivia y Víctor Muñoz, por toda su ayuda y por la experiencia que han compartido conmigo. La confianza que depositaron en mí y en mis ideas, me dieron la fuerza para culminar este trabajo. También muchos otros profesores han sido mis guías y por todo les estaré por siempre agradecido. Ellos son Swadesh M. Mahajan, Sergio Hojman, Miguel Lagos, José Rogan, Rodrigo Ferrer, Luis Gomberoff y Benjamín Toledo.

Gracias también a todos los amigos y compañeros que hice durante estos años. Gracias a Gabriela Román, Pamela Mena, Pablo Moya, Cristian Farías, Roberto Hauyón, Denisse Pastén, Max Ramírez, Víctor Pinto, Simón Poblete, Germán Varas, Jaime Arancibia, Joaquín Peralta, Claudia Loyola, Jaime Hoyos y Roberto Troncoso.

También a Susannah Hansen, Rualdo Soto y Nancy, y a Karin Sanchez de The University of Texas at Austin; a Andrés Gomez y Jorge Villalobos de la Universidad de los Andes de Colombia; y a Felix Parra del Massachusetts Institute of Technology. Por último, gracias a mis amigos de toda la vida, Alejandra Carvajal, Andrea Peralta, Andrea e Isaac Vallejo, Alejandro y Rodrigo Soto, Zarabi, Calvin y Hobbes.

Finalmente, quisiera agradecer la ayuda y amistad de mujeres cuya labor hizo más soportable la mía. Ellas son Vicky Alcaíno, secretaria del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile, Yasna Valenzuela y Magdalena Letelier de la Comisión Fulbright Chile, y Saralyn Stewart de The University of Texas at Austin.

...

Doy las gracias a la Beca de Doctorado Mecesus UCH0008, que fue la patrocinadora de mi permanencia en el plan de doctorado. Además agradezco a la Comisión Fulbright y a CONICYT por la beca de estadía predoctoral que me permitió hacer parte de este trabajo en The University of Texas at Austin bajo la tutela del profesor Swadesh M. Mahajan.

Por último, quisiera alentar a los lectores de estas páginas a que se atrevan a explorar nuevos caminos y nuevos paradigmas en las ciencias, sin tener temor a lo desconocido ni a la falta de conocimiento previo, tal como lo he intentado de hacer yo aquí. Aunque esta es una tarea ardua, grandes personas lo han hecho. Es bien sabido que Werner Heisenberg ni siquiera sabía lo que era una matriz al momento de formular la mecánica cuántica matricial [1].





# Índice

0.1. Prefacio . . . . .	1
<b>I Plasmas Relativistas</b>	<b>3</b>
1. Teoría de unificación de magnetofluidos para plasmas relativistas	4
1.1. Plasmas relativistas . . . . .	4
1.2. Descripción covariante de la teoría de unificación . . . . .	5
1.3. Descripción vectorial de la teoría de unificación . . . . .	10
2. Ondas electromagnéticas circularmente polarizadas en plasmas de electrones y positrones	13
2.1. Relación de dispersión para ondas circularmente polarizadas de amplitud finita . . . . .	15
2.2. Análisis de la relación de dispersión . . . . .	19
3. Decaimientos paramétricos de ondas electromagnéticas circularmente polarizadas en plasmas de electrones-positrones	27
3.1. Relación de dispersión del decaimiento . . . . .	27
3.2. Límite débilmente relativista . . . . .	33
3.3. Análisis de la dispersión . . . . .	34



<b>4. Masa relativista efectiva y carga relativista equivalente de un fotón</b>	<b>40</b>
4.1. Masa relativista efectiva del fotón . . . . .	41
4.2. Carga relativista equivalente del fotón . . . . .	50
4.3. Masa y carga en un sistema adiabático . . . . .	56
<b>II Plasmas Cuánticos Relativistas</b>	<b>59</b>
<b>5. Plasmas Cuánticos</b>	<b>60</b>
5.1. Plasmas cuánticos sin spin: descomposición de Madelung . . . . .	61
5.2. Plasmas cuánticos con spin: descomposición generalizada de Madelung	64
5.3. Descripción cinética para plasmas con spin: corrección al amortiguamien- to de Landau . . . . .	68
<b>6. Plasmas Cuánticos Relativistas</b>	<b>75</b>
6.1. La ecuación de Dirac . . . . .	76
6.2. Fluidización de la ecuación de Dirac para un solo estado partícula- antipartícula . . . . .	78
6.2.1. Covariantes bilineales . . . . .	79
6.2.2. Variables del fluido . . . . .	82
6.3. Primer conjunto de ecuaciones . . . . .	84
6.4. Lagrangiano y tensor de energía-momentum . . . . .	91
6.5. Conjunto final de ecuaciones . . . . .	92
6.6. Teoría de fluidos para $N$ cuerpos en estado partícula-antipartícula . .	94
6.7. Límite no relativista . . . . .	98
6.7.1. Límite no relativista de las variables de fluido . . . . .	99
6.7.2. Ecuación no relativista para la velocidad . . . . .	102





6.7.3. Ecuación no relativista para el spin . . . . .	103
<b>7. Descripción vectorial de las ecuaciones de fluido</b>	<b>104</b>
7.1. Variables vectoriales . . . . .	104
7.2. Límite no cuántico . . . . .	109
<b>8. Modos de propagación simples</b>	<b>111</b>
8.1. Solución simplificada para el spin . . . . .	112
8.2. Modos electromagnéticos . . . . .	113
8.2.1. Efecto cuántico relativista más simple . . . . .	113
8.2.2. Efecto de la temperatura . . . . .	117
8.2.3. Efecto del spin en la propagación electromagnética . . . . .	117
8.3. Modos hidromagnéticos en plasmas fríos . . . . .	126
<b>9. Magnetohidrodinámica cuántica relativista</b>	<b>130</b>
9.1. Ecuación covariante de momentum . . . . .	131
9.2. Ecuaciones magnetohidrodinámicas para plasmas de electrones-positrones- iones . . . . .	133
9.3. Modos magnetohidrodinámicos . . . . .	138
<b>10. Conclusiones</b>	<b>144</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>147</b>
<b>B. Apéndice</b>	<b>150</b>
B.1. Ecuación de continuidad para $k^\mu$ . . . . .	150
B.2. Separación del cuadri-momentum $k^\mu$ debido a la descomposición de Gordon para la velocidad . . . . .	151

## RESUMEN

En esta tesis se estudian modelos de fluidos para plasmas termales considerando efectos relativistas y cuánticos relativistas de sus constituyentes. Para plasmas relativistas con temperatura, estudiamos la propagación de ondas electromagnéticas circularmente polarizadas de amplitud finita y sus decaimientos paramétricos en plasmas de electrones-positrones. Además la segunda cuantización de los campos electromagnéticos lleva a un nuevo entendimiento de la interacción de los fotones en el plasma como si fueran partículas masivas y cargadas. Para incluir los efectos cuánticos del electrón, se ha desarrollado una teoría de fluidos completamente covariante para plasmas cuánticos relativistas a partir de una teoría anterior que permite una descripción de fluido para la ecuación de Dirac. Estudiamos las correcciones a resultados anteriores y sus correspondientes límites no relativistas y no cuánticos.

## ABSTRACT

In this thesis we study thermal fluid models for plasmas where we include the relativistic and quantum relativistic effects of its constituents. For relativistic electron-positron plasmas with temperature, a finite amplitude circularly polarized electromagnetic wave propagation and its parametric decays are studied. We also apply this formalism to the second quantization of electromagnetic fields and we show how this leads to a new understanding of the interaction of photons in a plasma, as if they were massive and charged particles. To include quantum effects of the electrons, we develop a covariant fluid theory for relativistic quantum plasmas. This is achieved using a previous theory which allows us to describe the Dirac equation as a fluid formalism. We study the corrections to previous results and its non-relativistic and non-quantum limits.

## 0.1. Prefacio

Es sabido que la física de plasmas es un rico campo de estudio, tanto teórico como experimental. Sin embargo, es también es un área de cálculos muy complejos, que a menudo sólo pueden resolverse mediante simulaciones computacionales. Mientras más complejo sea el escenario del plasma estudiado, más difícil se hace el desarrollo del problema. Ejemplos sencillos de esto aparecen cuando se consideran efectos térmicos o de altas energías.

Además de las características de cada plasma, también debemos ser conscientes de que los resultados que obtendremos dependerán de qué tipo de teoría usemos. Las teorías cinéticas y las teorías de fluidos que pueden ser desarrolladas para describir el plasma no son completamente equivalentes. La primera ofrece una descripción mucho más compleja de sus fenómenos. Pero por otro lado, la teoría de fluidos es más simple en muchos aspectos, y nos permite encontrar resultados importantes de manera más limpia, y a menudo más intuitiva, aunque sea un formalismo reducido.

Como vemos, sería de mucha utilidad disponer de nuevos formalismos donde nuevos efectos puedan ser incluidos y nuevas generalizaciones puedan ser realizadas, para así tener una dinámica aún más rica y completa de un plasma bajo condiciones nuevas y/o extremas.

En este trabajo estudiaremos y construiremos nuevas descripciones de fluidos para plasmas. Empezaremos con sistemas en los cuales consideramos efectos térmicos y relativistas, para luego incorporar efectos cuánticos de las partículas, como el spin. De esta manera, abarcaremos gradualmente los efectos producidos por la naturaleza cuántica relativista del electrón. Hemos escogido sólo estudiar estos formalismos en la descripción de fluidos ya que es la forma más simple de empezar a obtener resultados

interesantes que pueden ser comparados con los que obtendríamos con la teoría de fluido usual.

Esta tesis esta dividida en dos grandes partes. La primera está dedicada al estudio de un nuevo formalismo para plasmas relativistas. Básicamente, esta descripción permite construir una teoría relativista donde la temperatura es incluida a través de una redefinición del momentum relativista del fluido. Obtendremos nuevos resultados que son una generalización de otros ya conocidos para plasmas fríos. A la vez mostraremos cómo esta teoría es equivalente a las ya conocidas para plasmas relativistas.

En la segunda parte de esta tesis nos enfocaremos en construir una descripción de fluidos para plasmas cuánticos relativistas. Aquí, los efectos cuánticos y relativistas del electrón serán incluidos, lo que producirá nuevas correcciones y nuevos efectos. Como es de esperar, los límites no cuánticos coinciden con la descripción anterior para plasmas relativistas, así como también los limites no relativistas coinciden con teorías previas para plasmas cuánticos.

Parte I  
Plasmas Relativistas

# Capítulo 1

## Teoría de unificación de magnetofluidos para plasmas relativistas

### 1.1. Plasmas relativistas

En un plasma cuasi-neutral, la inercia de los electrones es mucho menor que la de los iones debido a la gran diferencia entre sus masas, y debido a esto, los electrones pueden adquirir una mayor velocidad que los iones. Si la velocidad de los electrones es comparable con la velocidad de la luz, entonces se dice que el plasma es relativista.

La nueva dinámica relativista de los electrones nos exige usar ecuaciones covariantes para describir el plasma, y así respetar las leyes de la física. De esta manera, es necesario introducir cuadri-vectores. El movimiento de las partículas ahora es asociado al cuadri-momentum  $p^\mu = m(\gamma c, \gamma \mathbf{v})$ , donde  $\gamma = (1 - |\mathbf{v}|^2/c^2)^{-1/2}$  es el factor relativista y  $c$  es la velocidad de la luz.

Mucho trabajo se ha realizado en torno a plasmas relativistas debido a la enorme variedad de escenarios físicos donde sus aplicaciones son posibles. En muchos objetos astrofísicos, los plasmas relativistas tienen un rol fundamental. Ejemplos de estos objetos son las estrellas de neutrones [2], las magnetósferas de pulsares [3] o los

agujeros negros [4]. También es posible encontrar estos plasmas en experimentos con láseres de alta energía [5–7]. Teóricamente se ha estudiado el límite ultrarrelativista [8, 9], donde se han propuesto modelos para estudiar pulsos altamente energéticos de corta duración a través de una descripción Hamiltoniana [10]. De igual manera, se han hecho simulaciones numéricas de ondas electromagnéticas [11, 12] en estos láseres.

Por todo lo anterior, es de interés tratar de encontrar teorías que permitan obtener una mayor variedad de resultados a través de formalismos nuevos que permitan un entendimiento más profundo de la complejidad de estos plasmas. Este capítulo consiste en la descripción de una de esas teorías, la cual nos permitirá generalizar resultados ya conocidos para plasmas relativistas en los capítulos siguientes.

## 1.2. Descripción covariante de la teoría de unificación

A continuación mostraremos la derivación de las ecuaciones covariantes para un plasma relativista con temperatura. Este formalismo fue desarrollado por Swadesh M. Mahajan en la Ref. [13] y es, bajo ciertas condiciones específicas, una teoría de unificación entre el campo electromagnético y un fluido relativista con carga eléctrica.

A lo largo de este capítulo, y sólo por simplicidad, escogeremos el sistema natural de unidades, es decir, la velocidad de la luz  $c = 1$ , la constante de Boltzmann  $k_B = 1$  y la constante de Planck  $h = 1$ . Todas estas constantes se harán presentes en la notación cuando sea necesario.

La dinámica de los campos electromagnéticos es descrita por las ecuaciones de Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu, \quad (1.1)$$

donde  $F^{\nu\mu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$  es el campo electromagnético, donde  $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$  es el cuadri-vector potencial,  $\phi$  es el potencial escalar y  $\mathbf{A}$  es el vector potencial. Como es sabido, ambos potenciales son definidos de tal manera que podemos obtener de ellos el campo eléctrico

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

y el campo magnético

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.3)$$

La cuadri-corriente total producida por un flujo de partículas cargadas viene dada por  $J^\mu = \sum_{(\alpha)} J_{(\alpha)}^\mu$  donde el subíndice  $(\alpha)$  es usado para representar a las distintas especies que puede tener el plasma (electrones, positrones, iones, etc.). Así, la cuadri-corriente para cada especie es  $J_{(\alpha)}^\mu = q_{(\alpha)} n_{(\alpha)} U_{(\alpha)}^\mu$ , donde  $q_{(\alpha)}$  es la carga de la respectiva especie de partícula,  $n_{(\alpha)}$  es su densidad medida en el sistema en reposo, y  $U^\mu = (\gamma, \mathbf{U}) = (\gamma, \gamma\mathbf{v})$  es la cuadri-velocidad del flujo con velocidad  $\mathbf{v}$  y factor relativista  $\gamma = (1 - |\mathbf{v}|^2)^{-1/2}$ .

De las ecuaciones (1.1), el fluido de partículas satisface la ecuación de conservación

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (1.4)$$

La ecuación de movimiento covariante para un cada fluido de partículas cargadas, de masa  $m_{(\alpha)}$  y carga  $q_{(\alpha)}$ , interactuando con un campo electromagnético es

$$\partial_\mu T_{(\alpha)}^{\nu\mu} = F^{\nu\mu} J_{\mu(\alpha)}, \quad (1.5)$$

donde  $T_{(\alpha)}^{\nu\mu}$  es el tensor de energía-momento de un fluido cargado relativista.

De esta manera, las ecuaciones que rigen la dinámica de este sistema son (1.1), (1.4) y (1.5). Junto a estas ecuaciones, debemos definir el tensor de energía-momento.



Para un fluido relativista, el tensor de energía-momento es

$$T_{(\alpha)}^{\nu\mu} = p_{(\alpha)}\eta^{\nu\mu} + hU_{(\alpha)}^{\nu}U_{(\alpha)}^{\mu}, \quad (1.6)$$

donde  $p_{(\alpha)}$  es la presión escalar del fluido, y  $\eta^{\nu\mu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  es la métrica de Minkowski [14]. La densidad de entalpía  $h_{(\alpha)}$  del fluido viene dada por  $h_{(\alpha)} = \epsilon_{(\alpha)} + p_{(\alpha)}$ , donde  $\epsilon_{(\alpha)}$  es la densidad de energía. Sin embargo, para un fluido relativista, cuya densidad no es alta y sus partículas son no interactuantes, la densidad de entalpía puede calcularse exactamente como

$$h_{(\alpha)} = m_{(\alpha)}n_{(\alpha)}f_{(\alpha)}(T_{(\alpha)}). \quad (1.7)$$

La función  $f_{(\alpha)} = f_{(\alpha)}(T_{(\alpha)})$  depende de la temperatura  $T$  del fluido, y viene dada por

$$f_{(\alpha)}(T_{(\alpha)}) = \frac{K_3\left(\frac{m_{(\alpha)}}{T_{(\alpha)}}\right)}{K_2\left(\frac{m_{(\alpha)}}{T_{(\alpha)}}\right)}, \quad (1.8)$$

donde  $K_3(x)$  y  $K_2(x)$  son funciones de Bessel modificadas de orden 3 y 2, respectivamente. La función (1.8) es graficada en la Fig. (1.1). Notemos que  $f \rightarrow 1$  cuando  $T \rightarrow 0$ . La derivación de la entalpía para un fluido relativista se encuentra en el Apéndice A. Cabe destacar que la forma (1.8) de la función  $f$  se debe a que el sistema es no degenerado, así como también que el sistema relativista no es capaz de generar pares partícula-antipartícula. En estos casos, la forma de la función  $f$  será muy diferente cuando  $m/T \rightarrow 0$  en la Fig. (1.1). Sin embargo, todos los resultados que obtendremos (salvo cuando se toman valores explícitos de la función en algunos límites) son independientes de la forma de  $f$  y de la estadística subyacente, y solo dependen de la entalpía (1.7) tal como debe ser para una teoría de fluidos.

A partir de ahora omitiremos el índice de especie, ya que la dinámica de cada grupo de partículas se rige por las mismas ecuaciones equivalentes.

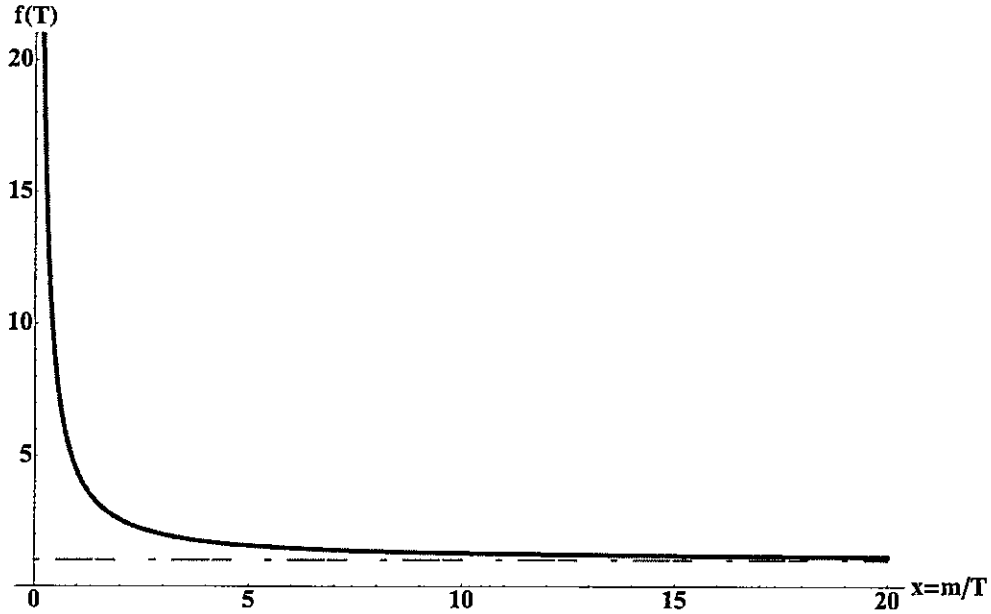


Figura 1.1: Función  $f(T)$  dada en (1.8). Cuando  $x \gg 1$  ( $T \ll m$ ), la función  $f$  tiende a 1.

La ecuación de movimiento para el flujo de electrones se obtiene reemplazando el tensor de energía-momento (1.6) en la Ec. (1.5). Haciendo esto, usando la ecuación de continuidad (1.4), y la normalización sobre la cuadri-velocidad<sup>1</sup>

$$U_\mu U^\mu = -1, \quad (1.9)$$

podremos reescribir la ecuación de movimiento (1.5) como

$$\frac{1}{n} \partial^\nu p - m \partial^\nu f = q U_\mu M^{\nu\mu}. \quad (1.10)$$

donde hemos definido el tensor antisimétrico de unificación  $M^{\nu\mu}$  como

$$M^{\nu\mu} = F^{\nu\mu} + \frac{m}{q} S^{\nu\mu}, \quad (1.11)$$

<sup>1</sup>La normalización depende de la métrica escogida. Si la elección de la métrica fuera  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , entonces tendríamos que  $U_\mu U^\mu = \eta^{\mu\nu} U_\mu U_\nu = 1$ .

usando un nuevo tensor antisimétrico  $S^{\mu\nu}$  que viene dado por

$$S^{\mu\nu} = \partial^\mu(fU^\nu) - \partial^\nu(fU^\mu). \quad (1.12)$$

Es interesante observar cómo el tensor  $M^{\mu\nu}$  representa la unificación del fluido termal y el campo electromagnético, donde ambos campos son tratados al mismo nivel. Esto es posible debido a que hemos escrito el campo de fluido como un campo "tipo" campo electromagnético.

Si definimos la cantidad  $\sigma$  como

$$\sigma = \ln \left[ \frac{p}{K_2(m/T)} \left( \frac{m}{T} \right)^2 \exp \left( -\frac{m}{T} f \right) \right], \quad (1.13)$$

la ecuación de movimiento (1.10) tomará la forma

$$T\partial^\nu\sigma = qU_\mu M^{\nu\mu}, \quad (1.14)$$

donde hemos usado la ecuación de estado para la presión y la temperatura  $p = nT$ .

La cantidad  $\sigma$ , definida en (1.13), está relacionada de manera lineal la densidad de entropía por partícula  $s = S/N$ , donde la entropía  $S$  del sistema está definida en la Ec. (A.11) en el Apéndice A. Esta relación es  $s + \sigma = \ln(4\pi m^4)$ .

Debido a la antisimetría del tensor  $M^{\mu\nu}$ , es fácil ver de (1.14) que

$$U_\nu\partial^\nu\sigma = 0. \quad (1.15)$$

Esta ecuación de conservación establece que la entropía por partícula es constante a lo largo de toda la trayectoria del fluido. Por otro lado, la condición (1.15) puede reescribirse para la presión y la entalpía como

$$U_\nu\partial^\nu p = mnU_\nu\partial^\nu f, \quad (1.16)$$

lo que establece la relación de adiabaticidad del sistema.

Nos concentraremos en el caso homentrópico para plasmas relativistas, donde  $\sigma$  es una constante global. En este caso, la Ec. (1.14) queda

$$U_\mu M^{\nu\mu} = 0. \quad (1.17)$$

De la Ec. (1.17) se desprende que, para un plasma homentrópico, la fuerza neta sobre el nuevo campo de unificación  $M^{\nu\mu}$  es cero. En otras palabras, la complicada naturaleza dinámica del sistema, debido a la interacción entre ambos campos, es tal que el sistema completo puede ser interpretado como un fluido libre.

Suficientemente interesante como para hacerlo notar, es el hecho de que en ausencia de campos electromagnéticos, el fluido obedecerá la ecuación

$$U_\mu S^{\nu\mu} = 0, \quad (1.18)$$

lo que implica que la manera para pasar de la Ec. (1.18) a la Ec. (1.17), es hacer la sustitución  $S^{\mu\nu} \rightarrow S^{\mu\nu} + (q/m)F^{\mu\nu}$ , de donde deducimos que la substitución minimal sería  $fU^\nu \rightarrow fU^\nu + (q/m)A^\nu$ . Así, esta teoría predice cómo debe ser el acoplamiento minimal para un fluido cuando la estadística es considerada<sup>2</sup>.

Con todo lo expuesto anteriormente, las ecuaciones que gobiernan la dinámica de un plasma relativista termal son la ecuación de movimiento (1.17) en el caso homentrópico, junto a las ecuaciones de Maxwell (1.1).

### 1.3. Descripción vectorial de la teoría de unificación

En esta sección mostraremos la formulación vectorial de la teoría de unificación. Esta derivación es para el caso general de un fluido cargado isentrópico, mientras el caso homentrópico puede ser obtenido como un caso particular.

---

<sup>2</sup>El acoplamiento minimal simple se obtiene en el caso frío cuando  $f = 1$ .

Para empezar, debemos considerar la parte espacial de la Ec. (1.14):

$$\partial^i p - mn\partial^i f = qn(U_0 M^{i0} + U_j M^{ij}), \quad (1.19)$$

que al ser escrita en forma vectorial queda

$$\nabla p - mn\nabla f = qn\gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - mn\gamma\left(\nabla(f\gamma) + \frac{\partial}{\partial t}(f\gamma\mathbf{v}) - \mathbf{v} \times \nabla \times (f\gamma\mathbf{v})\right). \quad (1.20)$$

Si expandimos los términos, llegaremos a la ecuación vectorial final de la teoría de unificación

$$mn\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right)(f\gamma\mathbf{v}) = qn\gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla p. \quad (1.21)$$

En la Ec. (1.21) los efectos térmicos (dados por  $f$ ) aparecen definiendo un nuevo momentum  $\mathbf{p} = mf\gamma\mathbf{v}$  en el término de la derivada total  $d/dt = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ . Esto puede ser entendido de la siguiente manera. Cuando la temperatura es nula  $f(0) = 1$ , la definición de momentum se vuelve la usual  $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$  y todo el tratamiento anterior se reduce solamente a un acoplamiento minimal. Éste es exactamente el caso de la dinámica de una sola partícula donde podemos pasar de casos no relativistas a casos relativistas simplemente haciendo el reemplazo  $m \rightarrow \gamma m$ .

Sin embargo, no es igual para un fluido. Cuando la temperatura es distinta de cero y se considera la naturaleza estadística del sistema, ya no existe un reemplazo tan simple como el anterior, ya que el promedio del momentum  $\langle \mathbf{p} \rangle$  no es equivalente a  $\langle \gamma \rangle \langle m\mathbf{v} \rangle$ . Por lo tanto, para un fluido, el momentum debe ser modificado para considerar los efectos estadísticos, al igual que el acoplamiento minimal. De esta manera, podemos considerar que un ansatz adecuado para pasar del caso frío al caso general es definir un momentum efectivo  $\mathbf{p} = mf\gamma\mathbf{v}$ , el cual puede ser interpretado en términos de un factor relativista efectivo  $f\gamma$ . Por lo tanto, el paso del caso no

relativista al relativista se hace cambiando la masa  $m$  a la masa efectiva relativista  $mf\gamma$ .

A continuación, mostraremos cómo esta nueva descripción para plasmas isentrópicos es equivalente a la descripción usual para plasmas relativistas térmicos. Recordemos que la definición para la densidad de entalpía viene dada por la Ec. (1.7). Entonces, escribiendo explícitamente la densidad de entalpía en la Ec. (1.21), llegamos a la siguiente ecuación:

$$\frac{h}{n} \frac{d}{dt}(\gamma \mathbf{v}) + \gamma \mathbf{v} \frac{d}{dt} \left( \frac{h}{n} \right) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{n\gamma} \nabla p. \quad (1.22)$$

Por otro lado, la condición (1.16) puede ser reescrita como

$$\frac{dp}{dt} = n \frac{d}{dt} \left( \frac{h}{n} \right). \quad (1.23)$$

Usando ambas ecuaciones, (1.22) y (1.23), llegamos finalmente a

$$h \frac{d}{dt}(\gamma \mathbf{v}) = qn(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\gamma} \nabla p - \gamma \mathbf{v} \frac{dp}{dt}, \quad (1.24)$$

que es precisamente la ecuación usada en el estudio de fluidos cargados con temperatura [15].

## Capítulo 2

# Ondas electromagnéticas circularmente polarizadas en plasmas de electrones y positrones

A partir de este capítulo, y en los tres siguientes, mostraremos aplicaciones de la teoría de unificación [13] a plasmas relativistas con temperatura. Los resultados obtenidos son completamente nuevos.

Uno de los casos donde es posible aplicar esta teoría de manera simple es en plasmas de electrones y positrones, debido a que ambas partículas tienen igual masa y cargas opuestas (que hacen que el plasma sea cuasi-neutral).

Los plasmas relativistas de electrones-positrones han sido objeto de numerosos estudios, ya que son relevantes en distintos ambientes, tanto astrofísicos como en plasmas de laboratorio. Este tipo de plasmas se puede encontrar en el universo primitivo [16,17], en láseres ultra intensos [18], en plasmas experimentales y tokamaks [19] o magnetosferas de pulsares [20, 21]. Existen distintos efectos en estos plasmas que están relacionados con la propagación de ondas, como modelos propuestos en procesos de emisión de radio en pulsares [22], aceleración del bulk en jets relativistas [23], jets relativistas en cuasares [24], procesos de aniquilación de electrones y positrones en

presencia de grandes campos magnéticos [25], y dinámica de solitones en propagación de ondas no lineales [26].

En todas las situaciones anteriormente descritas, la temperatura debería jugar un papel fundamental. Por esta razón, es sumamente importante el entendimiento de los modos de propagación en plasmas de electrones y positrones con temperatura.

Aquí nos enfocaremos en el caso particularmente simple de ondas electromagnéticas circularmente polarizadas que se propagan a lo largo de un campo magnético uniforme. Algunas propiedades interesantes que tienen estas ondas son interacciones no lineales, modos de Alfvén [27], amortiguamiento [28], o producción de pares [29].

Para plasmas fríos y no relativistas, este tipo de propagación de ondas electromagnéticas es una solución exacta de las ecuaciones del sistema. En otras palabras, la relación de dispersión puede ser obtenida sin hacer perturbaciones a las variables del sistema. Por ejemplo, ondas de Alfvén circularmente polarizadas propagándose de forma paralela a un campo magnético externo son obtenidas como una solución exacta, es decir, sin necesidad de hacer perturbaciones de las ecuaciones magneto-hidrodinámicas, incluso si la amplitud de la onda es grande [30]. También, una onda circularmente polarizada en un plasma de electrones y múltiples especies de iones con velocidades de deriva es una solución de amplitud finita para el caso de plasmas fríos [31] usando cuasi-neutralidad.

Ahora mostraremos que el formalismo de unificación [13] nos permite encontrar una solución exacta para una onda circularmente polarizada con amplitud arbitraria propagándose a lo largo de un campo magnético en un plasma relativista de electrones y positrones con una velocidad de deriva en la misma dirección y con una temperatura constante y arbitraria. Esto ha sido publicado en la Ref. [32].



## 2.1. Relación de dispersión para ondas circularmente polarizadas de amplitud finita

Trataremos este plasma de electrones-positrones como un sistema de dos fluidos, uno para cada especie, cada uno con su respectiva velocidad  $\mathbf{v}_j$ . El subíndice  $j = e, p$  será utilizado para identificar a cada especie.

Las ecuaciones que rigen la dinámica de este plasma son la ecuación de movimiento (1.21) para cada especie, y sus correspondientes ecuaciones de continuidad (1.4)

$$\frac{\partial (\gamma_j n_j^R)}{\partial t} + \nabla \cdot (\gamma_j n_j^R \mathbf{v}_j) = 0, \quad (2.1)$$

donde  $n_j^R$  son las densidades de cada fluido medidas en el sistema en reposo, y  $\gamma_j$  son los respectivos factores relativistas.

Los campos electromagnéticos obedecen a las ecuaciones de Maxwell (1.1), que reescribiremos en forma vectorial poniendo la velocidad de la luz  $c$  de forma explícita:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (2.3)$$

donde  $\mathbf{J} = \sum_j q_j \gamma_j n_j^R \mathbf{v}_j$  es la corriente del sistema.

Ahora consideremos una onda electromagnética circularmente polarizada que se propaga en la dirección  $\hat{z}$ . Supondremos la existencia de un campo magnético de fondo constante y uniforme en la misma dirección. De esta manera, los campos eléctrico y magnético son, respectivamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= E_x(z, t)\hat{x} + E_y(z, t)\hat{y} = \bar{E} [\sin(kz - \omega t)\hat{x} - \cos(kz - \omega t)\hat{y}], \\ \mathbf{B}(z, t) &= B_x(z, t)\hat{x} + B_y(z, t)\hat{y} + B_0\hat{z} = \bar{B} [\cos(kz - \omega t)\hat{x} + \sin(kz - \omega t)\hat{y}] + B_0\hat{z}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia y  $k$  es el número de onda. La ecuación de Maxwell (2.2) establece una condición para las amplitudes de los campos transversales:

$$\bar{E} = \frac{\omega}{ck} \bar{B}. \quad (2.5)$$

Supondremos que los electrones y los positrones tienen velocidades de deriva iguales y constantes de la forma  $\mathbf{v}_0 = v_0 \hat{z}$ . También ambas especies tendrán densidades constantes iguales  $n_p^R = n_e^R = n^R$ . Esto asegura la neutralidad del plasma. Denotaremos sus masas por  $m_p = m_e = m$ , y sus cargas como  $q_p = -q_e = e$ .

Supondremos que la temperatura es constante para este plasma. Esto es equivalente a exigir que la función  $f$  sea constante. Sin embargo, supondremos que ambas especies pueden tener distintas temperaturas, de modo que  $f_e \neq f_p$ . El hecho de no tener fluctuaciones en  $f$  (ni en la presión) nos permitirá encontrar la solución exacta a nuestras ecuaciones dinámicas.

La onda electromagnética circularmente polarizada inducirá en las partículas una velocidad puramente transversal circularmente polarizada

$$\mathbf{v}_j(z, t) = v_{xj}(z, t)\hat{x} + v_{yj}(z, t)\hat{y} = v_j [\cos(kz - \omega t)\hat{x} + \sin(kz - \omega t)\hat{y}]. \quad (2.6)$$

Es posible demostrar usando esta ecuación de movimiento (1.21), y las Ecs. (1.2) y (1.3), que la amplitud de la velocidad transversal es proporcional a la amplitud del vector potencial circularmente polarizado

$$f_j \gamma_j |\mathbf{v}_j(z, t)| = \frac{q}{m} |\mathbf{A}(z, t)|. \quad (2.7)$$

Como la amplitud del vector potencial es constante, entonces la amplitud de la velocidad también lo será. De esta manera, el factor relativista del fluido para cada especie

$$\gamma_j = \left( 1 - \frac{|\mathbf{v}_j|^2}{c^2} - \frac{|\mathbf{v}_0|^2}{c^2} \right)^{-1/2}, \quad (2.8)$$

será constante, ya que  $\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_0 = 0$ .

Con todas las consideraciones anteriores, y sin aproximaciones, la Ec. (1.21), quedará como

$$\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_j = \frac{q_j}{m_j \gamma_j} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_j + \mathbf{v}_0) \times \mathbf{B} \right). \quad (2.9)$$

Para representar la polarización circular de los campos, adoptaremos una notación que nos será útil tanto en este capítulo como en el siguiente, en el cual trataremos los decaimientos paramétricos de estas ondas. Si  $\mathbf{D} = D_x \hat{x} + D_y \hat{y} = D [\cos(kz - \omega t) \hat{x} + \sin(kz - \omega t) \hat{y}]$  representa un vector transversal circularmente polarizado, entonces definimos la representación de polarización de ese vector como

$$D_{\perp} = D_x + iD_y \equiv D e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.10)$$

donde esta representación tiene una dependencia exponencial en el espacio y el tiempo.

Bajo esta nueva representación, podemos escribir la velocidad como

$$v_{\perp} = v_x + i v_y = v_j e^{i(kz - \omega t)}. \quad (2.11)$$

De igual manera, escribimos los campos eléctrico y magnético en esta representación como

$$E_{\perp} = E_x + i E_y = E e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.12)$$

$$B_{\perp} = B_x + i B_y = B e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.13)$$

donde  $E = -i \bar{E}$  y  $B = \bar{B}$ . De esta manera, la condición (2.5) toma la forma

$$E = -i \frac{\omega}{ck} B. \quad (2.14)$$

Con esta notación, la ecuación (2.9) para la velocidad para cada especie puede ser resuelta, obteniendo

$$v_j = i \frac{q_j}{m} \left( \frac{E + iBv_0/c}{f_j \gamma_j \omega' - \Omega_{cj}} \right), \quad (2.15)$$

donde  $\omega' = \omega - kv_0$ , y  $\Omega_{cj} = q_j B_0 / mc$  es la frecuencia ciclotrónica para cada especie.

Usando la condición (2.14), podemos reescribir la velocidad (2.15) como

$$v_j = \left( \frac{\omega'}{f_j \gamma_j \omega' - \Omega_{cj}} \right) \frac{q_j B}{mck} = \left( \frac{i\omega'}{f_j \gamma_j \omega' - \Omega_{cj}} \right) \frac{q_j E}{m\omega}. \quad (2.16)$$

Por otra parte, de las ecuaciones de Maxwell (2.2) y (2.3), podemos construir la ecuación

$$\left( -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) E = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial J}{\partial t}, \quad (2.17)$$

donde  $J = J_x + iJ_y = \sum_j nq_j v_j$  es la corriente transversal, y  $n$  es la densidad medida en sistema del laboratorio.

Con esta definición de corriente transversal, y usando la velocidad (2.16), podemos calcular a partir de la Ec. (2.17), la relación de dispersión

$$\omega^2 - c^2 k^2 = \sum_{j=e,p} \omega_p^2 \left( \frac{\omega'}{f_j \gamma_j \omega' - \Omega_{cj}} \right), \quad (2.18)$$

donde definimos la frecuencia de plasma como  $\omega_p = \sqrt{4\pi n e^2 / m}$ . En esta relación de dispersión los factores  $\gamma_i$  no son variables independientes. Podemos ver de su definición (2.8) que  $\gamma$  depende de la velocidad de las especies, las cuales a su vez dependen de la amplitud de los campos y de la frecuencia a través de (2.16).

La relación de dispersión (2.18) es una solución exacta de las ecuaciones de plasma para una onda circularmente polarizada de amplitud finita que se propaga a lo largo de un campo magnético. Este resultado ha sido obtenido para un plasma relativista con temperatura, lo cual es nuevo hasta donde sabemos. La relación de dispersión difiere del caso de plasmas fríos [33] solamente en un factor  $f_j$ . Esto se debe al

argumento que dimos en la sección 1.3 sobre el cambio en la masa  $m_j \rightarrow f_j \gamma_j m_j$  cuando pasamos de un plasma clásico a uno relativista con temperatura.

Como un ejemplo, supongamos que la temperatura de ambas especies es la misma y no hay velocidades de deriva,  $v_0 = 0$ . Entonces  $f_p = f_e \equiv f$ , y la Ec. (2.18) quedará como

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega} \left( \frac{1}{f \gamma_p \omega - \Omega_c} + \frac{1}{f \gamma_e \omega + \Omega_c} \right), \quad (2.19)$$

donde  $\Omega_c = eB_0/mc$  es la girofrecuencia de los positrones.

Para  $f = 1$  ( $T = 0$ ), la relación de dispersión para un plasma frío es recobrada [15, 33]. El mismo resultado de la Ref. [33] puede ser obtenido desde un enfoque cinético [34], en el límite en que la distribución de velocidad es una delta de Dirac (ver por ejemplo, Ec. (23) en Ref. [34]).

El límite opuesto corresponde a temperaturas muy altas  $k_B T \gg mc^2$ , tal que  $f(T) \approx 4k_B T/mc^2 \gg 1$ . Así, la Ec. (2.19) nos entrega la relación de dispersión para un plasma relativista caliente y magnetizado de electrones y positrones

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega} \left( \frac{1}{\gamma_p \frac{4k_B T}{mc^2} \omega - \Omega_c} + \frac{1}{\gamma_e \frac{4k_B T}{mc^2} \omega + \Omega_c} \right). \quad (2.20)$$

En particular, podemos notar que cuando la temperatura es muy alta, los modos transversales se convierten en modos de luz (modos de propagación electromagnética)  $c^2 k^2 = \omega^2$ , lo cual es consistente con la disminución relativista de la frecuencia de plasma efectiva. De igual manera, los modos de luz son soluciones de la Ec. (2.20) en el límite ultrarrelativista  $1/\gamma_j \rightarrow 0$ .

## 2.2. Análisis de la relación de dispersión

Para estudiar la relación de dispersión (2.19), normalizaremos la frecuencia de la onda utilizando la girofrecuencia de los positrones. De igual forma, las velocidades

serán normalizadas a la velocidad de la luz  $c$ . Será conveniente definir dos parámetros adimensionales relacionados con la frecuencia de plasma y con la amplitud de onda, respectivamente:

$$a = \frac{\omega_p^2}{\Omega_c^2}, \quad \alpha = \frac{e|E|}{mc\omega} = \frac{e|B|}{mc^2k} = \frac{e|A|}{mc}, \quad (2.21)$$

que nos permitirán escribir la velocidad para cada especie (2.16) como

$$v_j = \alpha_j c \left( \frac{x'}{f_j \gamma_j x' \pm 1} \right), \quad (2.22)$$

donde  $x' = x - yv_0/c$ ,  $x = \omega/\Omega_c$ ,  $y = ck/\Omega_c$ , y  $\alpha_j = \pm\alpha$ . El signo  $+$  ( $-$ ) es para positrones (electrones). Además, la relación de dispersión (2.19) queda de forma normalizada

$$\frac{y^2}{x^2} = 1 - \frac{a}{x} \left( \frac{1}{f\gamma_p(\alpha, x)x - 1} + \frac{1}{f\gamma_e(\alpha, x)x + 1} \right), \quad (2.23)$$

notando que los factores  $\gamma_j(\alpha, x)$  dependen de  $\alpha$  y  $x$  debido a la definición (2.8). De esta manera, para encontrar las soluciones de la frecuencia, hay que resolver simultáneamente las ecuaciones (2.8), (2.22) y (2.23). En la Fig. 2.1, la relación de dispersión es graficada para varios valores de  $f$ , y para  $a = 1$  y  $\alpha = 0.1$ . Podemos ver la existencia de la rama electromagnética con una frecuencia de plasma efectiva de corte  $\omega_p^{\text{eff}}$  que es definida como la más baja frecuencia para la rama electromagnética. Esta frecuencia  $\omega_p^{\text{eff}}$  establece el rango de frecuencias prohibidas para la propagación, y podemos ver en la Fig. 2.1 que se vuelve menor al aumentar la temperatura. A la vez, existe una rama de Alfvén, la cual tiene un corte superior en el número de onda y un corte superior en la frecuencia.

La línea continua corresponde al caso de un plasma frío relativista,  $f = 1$ . Podemos ver que cuando la temperatura aumenta, la frecuencia de plasma efectiva disminuye y la onda electromagnética se vuelve una onda de luz. Este efecto puede ser

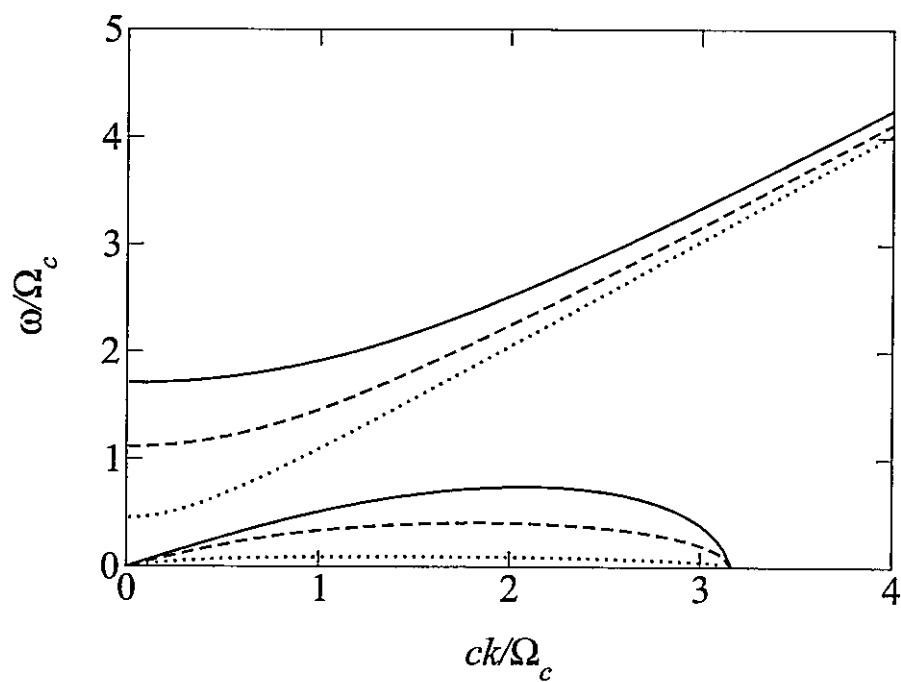


Figura 2.1: Ramas electromagnéticas y de Alfvén para la relación de dispersión (2.23), para  $a = 1$  y  $\alpha = 0.1$ . La línea sólida representa el caso frío ( $f = 1$ ); la línea a trazos es para  $f = 2$ ; y la línea punteada es para  $f = 10$ .

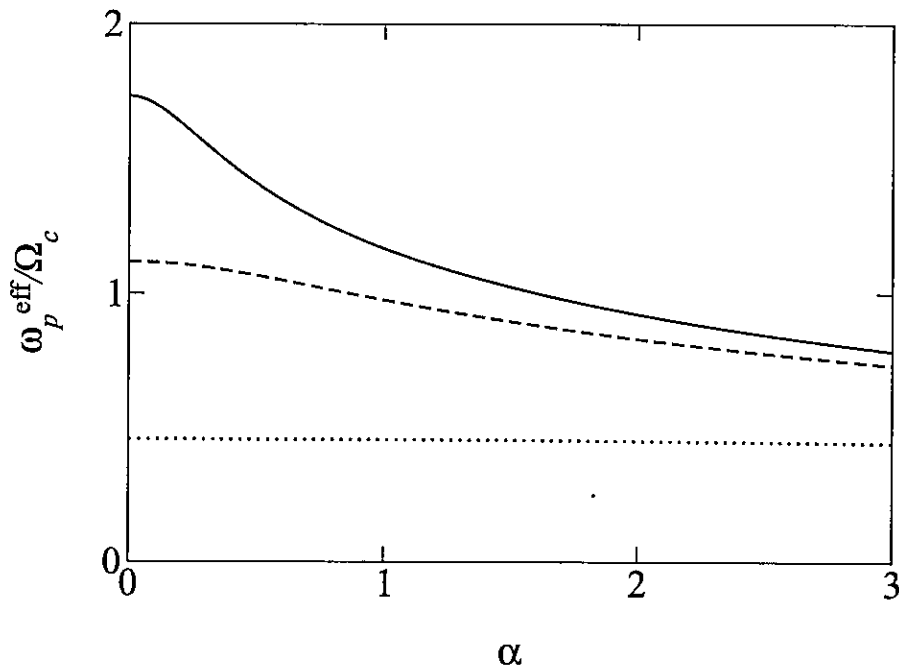


Figura 2.2: Frecuencia de plasma efectiva  $\omega_p^{\text{eff}}$  como función de la amplitud de onda  $\alpha$  para diferentes temperaturas. La línea sólida es para el caso frío ( $f = 1$ ), la línea a trazos es para  $f = 2$ , y la línea punteada es para  $f = 10$ .

apreciado en la Fig. 2.2, donde es graficada  $\omega_p^{\text{eff}}$  para los mismos valores de  $f$ . La frecuencia  $\omega_p^{\text{eff}}$  también decrece debido al efecto relativista de la masa, y por esta razón la graficamos en función de  $\alpha$ . Sin embargo, para temperaturas muy grandes, la variación de la frecuencia de plasma efectiva con respecto a la amplitud de la onda es despreciable.

En la figura 2.1 podemos ver que la rama de Alfvén comienza en el origen siguiendo la conocida relación de dispersión  $x = v_{Ay}/c$ . En esta región, la propagación es para bajas frecuencias y  $\gamma_p, \gamma_e \simeq 1$ . Entonces, la velocidad de Alfvén puede ser



obtenida de (2.19) reescribiéndola como

$$y^2 = x^2 - 2fa \frac{x^2}{(fx)^2 - 1} . \quad (2.24)$$

Si  $xf \ll 1$ , lo cual siempre se cumple para frecuencias suficientemente bajas, obtendremos que la relación de dispersión es

$$y^2 = x^2 (1 + 2fa) , \quad (2.25)$$

de donde podemos deducir que la velocidad de Alfvén es

$$v_A = \frac{c}{\sqrt{1 + 2fa}} . \quad (2.26)$$

Una característica interesante de la rama de Alfvén es la existencia de un valor máximo para el número de onda  $k_{\max}$ . Este corte superior en  $k$  se debe a que los positrones entran en resonancia con  $\Omega_c$  y se vuelven ultrarrelativistas, moviéndose a velocidades muy próximas a la de la luz en el campo de la onda y así  $\gamma_p = \infty$ . Los electrones no resuenan con la onda, de manera que  $\gamma_e$  es finito.

Para obtener una expresión analítica para  $k_{\max}$  para la rama de Alfvén, primero notemos que, de la ecuación (2.16) con  $v_0 = 0$ , tenemos que

$$\frac{\omega}{f\gamma_j\omega - \Omega_{ej}} = \pm \frac{v_j}{\alpha c} , \quad (2.27)$$

donde el signo positivo es para positrones ( $\Omega_{cp} = \Omega_c$ ) y el signo negativo es para electrones ( $\Omega_{ce} = -\Omega_c$ ). La relación de dispersión (2.19) puede ser escrita como

$$c^2 k^2 = \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{\alpha c} (v_p - v_e) . \quad (2.28)$$

El corte en el número de onda ocurre cuando  $\omega = 0$ , y en este límite  $v_p \simeq -c$ . Notemos que esto se debe a que el término del lado izquierdo en la Ec. (2.27) es negativo a lo largo de la rama de Alfvén para todos los valores de  $k$ . Además, en

este límite,  $v_e$  se vuelve despreciable. Así, de (2.28) podemos obtener que el valor máximo para un número de onda viene dado por

$$k_{\max} = \frac{\omega_p}{c\sqrt{\alpha}}. \quad (2.29)$$

Lo anterior es consistente con los resultados numéricos de la Fig. 2.1. El número de onda  $k_{\max}$  depende solamente de la amplitud de la onda y no de la temperatura.

Por otro lado, al aumentar el número de onda a lo largo de la rama de Alfvén, existirá una frecuencia superior de corte  $\omega_{\text{crit}}$ . Para encontrarla, primero reemplazaremos la velocidad  $v_j$ , dada en (2.27), en los factores relativistas  $\gamma_j = (1 - v_j^2/c^2)^{-1/2}$  de cada especie. Así obtendremos la relación

$$\left(\frac{1}{x} \mp f\gamma_j\right)^2 = \frac{\alpha^2\gamma_j^2}{\gamma_j^2 - 1}, \quad (2.30)$$

donde el signo negativo (positivo) es para positrones (electrones). Para los positrones, la Ec. (2.30) puede ser resuelta para  $x$  como

$$x = \left(f\gamma_p \pm \frac{\alpha\gamma_p}{\sqrt{\gamma_p^2 - 1}}\right)^{-1}, \quad (2.31)$$

y de manera similar para electrones. Cuando la rama de Alfvén tiene un extremo, se debe cumplir que  $dx/d\gamma_p = 0$ . Esto impone una condición sobre  $f$

$$f = \pm \frac{\alpha}{(\gamma_p^2 - 1)^{3/2}}, \quad (2.32)$$

la cual implica que la solución para  $\gamma_p$  es

$$\gamma_p = \left[1 + \left(\frac{\alpha}{f}\right)^{2/3}\right]^{1/2}. \quad (2.33)$$

Usando este valor en (2.31), tendremos que la frecuencia  $\omega_{\text{crit}}$  viene dada por

$$\frac{\omega_{\text{crit}}}{\Omega_c} = \frac{1}{f} \left[1 + \left(\frac{\alpha}{f}\right)^{2/3}\right]^{-3/2}. \quad (2.34)$$

De la Ec. (2.34) podemos deducir que, cuando la temperatura aumenta, las ondas de Alfvén estarán confinadas a un ancho de banda de frecuencias cada vez más pequeño. Esto también puede verse en la Fig. 2.1.

Finalmente, es interesante calcular la velocidad de grupo de la onda. Así se puede ver en la Fig. 2.3, donde la velocidad de grupo  $v_g$  es graficada para ambas ramas de la relación de dispersión tomando los mismos valores de  $f$  que en la Fig. 2.1.

La onda electromagnética, como es esperado, comienza en  $k = 0$  con una velocidad de grupo nula para números de onda pequeños y se aproxima a  $c$  a medida que  $k$  aumenta.

Por otro lado, la rama de Alfvén comienza en  $k = 0$  con una velocidad de grupo  $v_g$  igual a la velocidad de Alfvén (2.26), y a medida que el número de onda aumenta,  $\omega \rightarrow \omega_{\text{crit}}$  y la velocidad de grupo tiende a cero. Luego, se vuelve negativa, tendiendo a menos infinito cuando  $k \rightarrow k_{\text{max}}$ , donde los positrones entran en resonancia y su velocidad se aproxima a la velocidad de la luz.

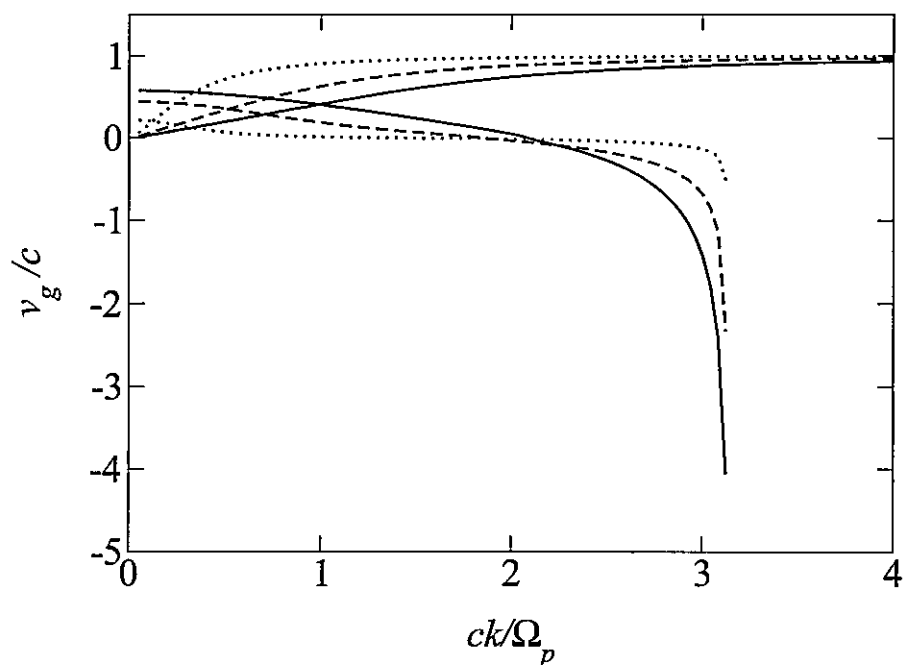


Figura 2.3: Velocidad de grupo  $v_g$  para ondas de la Fig. 2.1 versus el número de onda, para diferentes temperaturas, y para  $a = 1$  y  $\alpha = 0.1$ . Las líneas continuas representan el caso de plasma frío ( $f = 1$ ), las líneas a trazos son para  $f = 2$ , y las líneas punteadas son para  $f = 10$ . Las curvas que tienden asintóticamente a  $v_g/c = 1$  corresponden a la rama electromagnética en la Fig. 2.1, y las curvas que divergen a  $v_g/c = -\infty$  corresponden a la rama de Alfvén.

## Capítulo 3

# Decaimientos paramétricos de ondas electromagnéticas circularmente polarizadas en plasmas de electrones-positrones

En el presente capítulo nos proponemos el estudio completamente relativista de los decaimientos paramétricos de las ondas circularmente polarizadas de amplitud finita estudiadas en el capítulo previo. Estos decaimientos han sido estudiados anteriormente para el caso de un plasma de electrones y positrones débilmente relativista donde la polarización de la onda es lineal [35, 36], o circular cuando el plasma está magnetizado [37] y no magnetizado [38]. Además, decaimientos de ondas de Alfvén circularmente polarizadas han sido estudiados para plasmas relativistas [33].

### 3.1. Relación de dispersión del decaimiento

En el capítulo anterior vimos que una onda electromagnética circularmente polarizada tiene una solución exacta de propagación dada por (2.18). El objetivo de esta sección es mostrar que si el sistema descrito por esa onda (onda madre) es perturbado, se crean nuevas ondas (ondas hijas) a través de decaimientos paramétricos.

Para tener una mayor claridad en este capítulo adoptaremos una nueva convención. A las cantidades transversales que nos permiten encontrar esta solución exacta, les llamaremos cantidades a orden cero. Bajo la notación propuesta en la Ec. (2.10), las cantidades a orden cero son escritas en la representación de polarización como

$$D_{\perp} = D_x + iD_y \equiv De^{i(k_0z - \omega_0t)}, \quad (3.1)$$

donde ahora la frecuencia de la onda a orden cero es  $\omega_0$  y su número de onda es  $k_0$ . De la misma forma, los campos electromagnéticos a orden cero serán definidos como en (2.4), cuyas amplitudes cumplen la relación (2.5). Además, la velocidad de cada fluido en la representación de polarización viene dada por (2.16) (donde asumimos una velocidad de deriva nula):

$$v_j = \left( \frac{\omega_0}{f_j \gamma_j \omega_0 - \Omega_{cj}} \right) \frac{q_j B}{mck_0}. \quad (3.2)$$

Y de igual manera, la relación de dispersión de la onda electromagnética circularmente polarizada a orden cero vendrá dada por (2.18):

$$\omega_0^2 - c^2 k_0^2 = \sum_{j=e,p} \omega_p^2 \left( \frac{\omega_0}{f_j \gamma_j \omega_0 - \Omega_{cj}} \right). \quad (3.3)$$

Ahora, considerando que nuestro plasma consiste en electrones, positrones y en la onda electromagnética que satisface (3.3), introduciremos perturbaciones (denotadas por el simbolo  $\delta$ ) sobre todas las variables del plasma. De esta forma la ecuación dinámica (1.21) para cada una de las especies será

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \right) (f \gamma_0 \delta \mathbf{v} + f \delta \gamma \mathbf{v}_0) + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla) (f \gamma_0 \mathbf{v}_0) = \frac{q}{m} \left( \delta \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_0 \times \delta \mathbf{B} \right) + \frac{q}{mc} \delta \mathbf{v} \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}) - \frac{1}{mn_0} \nabla p, \quad (3.4)$$

donde  $\mathbf{v}_0$  es la velocidad a orden cero cuya representación de polarización viene dada por (3.2), y  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$ . El factor relativista a orden cero es  $\gamma_0 = (1 - \mathbf{v}_0^2/c^2)^{-1/2}$ , y a primer orden será  $\delta \gamma = \gamma_0^3 \mathbf{v}_0 \cdot \delta \mathbf{v}/c^2$ .

La presión viene dada por [39]

$$p = k_B T \frac{n^L}{\gamma_0 + \delta\gamma}, \quad (3.5)$$

donde  $n^L = (\gamma_0 + \delta\gamma)n^R$  es la densidad en el sistema del laboratorio, y la temperatura es constante. Podemos escribir esta densidad como  $n^L = n_0 + \delta n$ , donde  $n_0$  es la densidad a orden cero medida en el laboratorio. Así, obtenemos que

$$\nabla p = \frac{k_B T}{\gamma_0} \nabla \left( \delta n - \frac{n_0}{\gamma_0} \delta\gamma \right). \quad (3.6)$$

Las componentes transversales de las cantidades vectoriales perturbadas pueden ser escritas de manera similar a la representación de polarización transversal. Para un vector  $\delta D_x \hat{x} + \delta D_y \hat{y} + \delta D_z \hat{z}$ , definiremos la variable dinámica  $\delta D = \delta D_x + i\delta D_y$ . Por ejemplo, usando esto, es posible escribir  $\delta\gamma = \gamma_0^3(v\delta v^* + v^*\delta v)/(2c^2)$ , donde el superíndice \* indica el conjugado de las variables.

Usando la representación de polarización en ambos órdenes, y ya que  $v_z = 0$  a orden cero, la ecuación (3.4) puede reescribirse para la parte transversal

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( f\gamma_0\delta v + \frac{f\gamma_0^3}{2c^2} (v^2\delta v^* + vv^*\delta v) \right) + \delta v_z \frac{\partial}{\partial z} (f\gamma_0 v) = \frac{q}{m} \delta E + \frac{iq}{mc} (B\delta v_z - \delta v B_0), \quad (3.7)$$

y la parte longitudinal

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (f\gamma_0\delta v_z) &= \frac{iq}{2mc} (v\delta B^* - v^*\delta B + \delta v B^* - \delta v^* B) \\ &\quad - \frac{v_s^2}{\gamma_0 n_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \delta n - \frac{n_0 \gamma_0^2}{2c^2} (v\delta v^* + v^*\delta v) \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

respectivamente. La velocidad termal es definida como  $v_s = \sqrt{k_B T/m}$ .

Asumiremos que todas las perturbaciones longitudinales y transversales tienen la forma

$$\delta D_z = \text{Re} \left[ \tilde{D} e^{i(kz - \omega t)} \right] = \frac{1}{2} \left( \tilde{D} e^{i(kz - \omega t)} + \tilde{D}^* e^{-i(k^* z - \omega^* t)} \right), \quad (3.9)$$

y

$$\delta D = d_+ e^{i(k_+ z - \omega_+ t)} + d_- e^{i(k_- z - \omega_- t)}, \quad (3.10)$$

respectivamente, donde  $k_+ = k_0 + k$ ,  $k_- = k_0 - k^*$ ,  $\omega_+ = \omega_0 + \omega$  y  $\omega_- = \omega_0 - \omega^*$ .

Con estas definiciones, la ecuación de Maxwell (2.2) para las cantidades perturbadas transversales de los campos eléctrico y magnético, quedará como

$$\frac{\partial \delta E}{\partial z} = \frac{i}{c} \frac{\partial \delta B}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad i k_{\pm} e_{\pm} = \frac{\omega_{\pm}}{c} b_{\pm}. \quad (3.11)$$

Por otro lado, usando (3.2), podemos reescribir la velocidad transversal a orden cero inducida por la onda electromagnética para cada especie como

$$v_j = \alpha_j \eta_j c e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}, \quad (3.12)$$

donde  $\alpha_j$  es definida en (2.21), y

$$\eta_j = \frac{\omega_0}{f_j \gamma_{0j} \omega_0 - \Omega_{cj}}, \quad (3.13)$$

tal que  $\gamma_{0j} = (1 - \alpha_j^2 \eta_j^2)^{-1/2}$ .

Si siguiendo con el análisis, gracias a las definiciones (3.9), (3.10), (3.11) y (3.12), la ecuación para la parte transversal (3.7) puede reescribirse, hasta primer orden, como las dos siguientes ecuaciones

$$\left( \omega_+ \frac{(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta^2)}{(1 - \alpha^2 \eta^2)^{3/2}} - \frac{\Omega_c}{f} \right) v_{+} + \left( w_+ \frac{\alpha^2 \eta^2}{2(1 - \alpha^2 \eta^2)^{3/2}} \right) v_{-}^* - \left( \frac{k_0 \alpha c \Omega_c \eta}{2 \omega_0 f} \right) \tilde{v} = \left( \frac{q \omega_+}{m f k_+ c} \right) b_+, \quad (3.14)$$

$$\left( \omega_- \frac{(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta^2)}{(1 - \alpha^2 \eta^2)^{3/2}} - \frac{\Omega_c}{f} \right) v_{-} + \left( w_- \frac{\alpha^2 \eta^2}{2(1 - \alpha^2 \eta^2)^{3/2}} \right) v_{+}^* - \left( \frac{k_0 \alpha c \Omega_c \eta}{2 \omega_0 f} \right) \tilde{v}^* = \left( \frac{q \omega_-}{m f k_- c} \right) b_-. \quad (3.15)$$

Con un procedimiento similar, podemos escribir la ecuación para la parte longitudinal (3.8) como

$$\left( -\frac{\omega^2}{(1 - \alpha^2 \eta^2)^{1/2}} + \frac{v_s^2}{f} (1 - \alpha^2 \eta^2)^{1/2} k^2 \right) \tilde{v} = \frac{q \omega}{m f c} (\alpha \eta c (b_-^* - b_+) + B(v_+ - v_-^*))$$



$$+ \frac{v_s^2 \alpha \eta k \omega}{f c (1 - \alpha^2 \eta^2)^{1/2}} (v_-^* + v_+) . \quad (3.16)$$

De las ecuaciones de Maxwell (2.2) y (2.3), podemos obtener las siguientes relaciones para  $b_+$  y  $b_-$ :

$$(\omega_+^2 - c^2 k_+^2) b_+ = 4\pi e n_0 c k_+ \left( (v_{+p} - v_{+e}) + \frac{ck}{2\omega} (\alpha_p \eta_p \tilde{v}_p - \alpha_e \eta_e \tilde{v}_e) \right) , \quad (3.17)$$

$$(\omega_-^{*2} - c^2 k_-^{*2}) b_-^* = 4\pi e n_0 c k_-^* \left( (v_{-p}^* - v_{-e}^*) + \frac{ck^*}{2\omega^*} (\alpha_p \eta_p \tilde{v}_p - \alpha_e \eta_e \tilde{v}_e) \right) , \quad (3.18)$$

donde el subíndice  $p$  ( $e$ ) corresponde a la solución para positrones (electrones) de  $v_+$ ,  $v_-$  y  $\tilde{v}$  de las Ecs. (3.14), (3.15) y (3.16).

Entonces, la relación de dispersión puede ser encontrada, después de una larga álgebra, resolviendo las ecuaciones (3.14), (3.15) y (3.16), y luego usando las soluciones en las ecuaciones de Maxwell (3.17) y (3.18). De esta forma, la relación de dispersión es

$$F(k, \omega) = F_{1+} F_{2-} - F_{1-} F_{2+} = 0 , \quad (3.19)$$

donde los términos  $F_{1+}$ ,  $F_{1-}$ ,  $F_{2+}$  y  $F_{2-}$  vienen dados respectivamente por

$$F_{1+} = -A_e A_p (\omega_+^2 - c^2 k_+^2) + \frac{\omega_p^2 m}{e} c k_+ (A_e Q_{+p} - A_p Q_{+e}) + \frac{\omega_p^2 m}{2\omega e} c^2 k_+ k \alpha (A_e \eta_p Z_{+p} + A_p \eta_e Z_{+e}) , \quad (3.20)$$

$$F_{1-} = \frac{\omega_p^2 m}{e} c k_+ (A_e Q_{-p} - A_p Q_{-e}) + \frac{\omega_p^2 m}{2\omega e} c^2 k_+ k \alpha (A_e \eta_p Z_{-p} + A_p \eta_e Z_{-e}) , \quad (3.21)$$

$$F_{2+} = \frac{\omega_p^2 m}{e} c k_-^* (A_e W_{+p} - A_p W_{+e}) + \frac{\omega_p^2 m}{2\omega^* e} c^2 k_-^* k^* \alpha (A_e \eta_p Z_{+p} + A_p \eta_e Z_{+e}) , \quad (3.22)$$

$$F_{2-} = -A_e A_p (\omega_-^{*2} - c^2 k_-^{*2}) + \frac{\omega_p^2 m}{e} c k_-^* (A_e W_{-p} - A_p W_{-e}) + \frac{\omega_p^2 m}{2\omega^* e} c^2 k_-^* k^* \alpha (A_e \eta_p Z_{-p} + A_p \eta_e Z_{-e}) , \quad (3.23)$$

donde  $\omega_p$  es la frecuencia de plasma. Los subíndices  $e$  y  $p$  indican si el término corresponde a electrones o positrones. Así,  $\alpha_p = -\alpha_e \equiv \alpha$ .

A continuación detallaremos todos los nuevos términos usados en las definiciones anteriores. Para este fin, no usaremos los subíndices  $e$  o  $p$  ya que su correspondiente evaluación para cada especie es directa. Así, tenemos que

$$A = S(G_+G_- - M_+M_-) + N(T + \Theta)(M_+ - G_-) + N(T - \Theta)(M_- - G_+), \quad (3.24)$$

$$S = \frac{-\omega^2}{(1 - \alpha^2\eta^2)^{1/2}} + \frac{v_s^2}{f} (1 - \alpha^2\eta^2)^{1/2} k^2, \quad (3.25)$$

$$G_+ = \omega_+ \frac{(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\eta^2)}{(1 - \alpha^2\eta^2)^{3/2}} - \frac{\Omega_c}{f}, \quad (3.26)$$

$$G_- = \omega_-^* \frac{(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\eta^2)}{(1 - \alpha^2\eta^2)^{3/2}} - \frac{\Omega_c}{f}, \quad (3.27)$$

donde la frecuencia ciclotrónica es tal que  $\Omega_{cp} = -\Omega_{ce} \equiv \Omega_c$ . Además

$$M_+ = \frac{\omega_+}{2} \frac{\alpha^2\eta^2}{(1 - \alpha^2\eta^2)^{3/2}}, \quad (3.28)$$

$$M_- = \frac{\omega_-^*}{2} \frac{\alpha^2\eta^2}{(1 - \alpha^2\eta^2)^{3/2}}, \quad (3.29)$$

$$N = \frac{k_0\alpha c\Omega_c\eta}{2\omega_0 f}, \quad (3.30)$$

$$T = \frac{\omega\alpha ck_0}{f}, \quad (3.31)$$

$$\Theta = \frac{\omega v_s^2 \alpha \eta k}{f c (1 - \alpha^2\eta^2)^{1/2}}. \quad (3.32)$$

Los restantes términos vienen dados por

$$Q_+ = NR(M_+ - G_-) + P_+(SG_- - NT + N\Theta), \quad (3.33)$$

$$Q_- = NR(G_- - M_+) + P_-(NT - N\Theta - SM_+), \quad (3.34)$$

$$W_+ = -G_+NR + M_-(NR - P_+S) + NP_+(T + \Theta), \quad (3.35)$$

$$W_- = G_+(NR + P_-S) - NRM_- - NP_-(T + \Theta), \quad (3.36)$$

$$Z_+ = R(M_+M_- - G_+G_-) - P_+M_-(T - \Theta) + P_+G_-(T + \Theta), \quad (3.37)$$

$$Z_- = G_+G_-R + G_+P_-(T - \Theta) - M_+M_-R - M_+P_-(T + \Theta), \quad (3.38)$$

donde

$$P_+ = \frac{q\omega_+}{mfk_+c}, \quad (3.39)$$

$$P_- = \frac{q\omega_-^*}{mfk_-^*c}, \quad (3.40)$$

$$R = \frac{q\alpha\eta\omega}{mf}. \quad (3.41)$$

### 3.2. Límite débilmente relativista

En esta sección compararemos la relación de dispersión (3.19) con resultados anteriores para decaimientos paramétricos en plasmas de electrones-positrones débilmente relativistas [37], en los cual la onda madre se propaga en un plasma frío.

En el límite débilmente relativista  $\alpha\eta < 1$ , y  $\alpha^2\eta^2 \ll 1$ . De esta manera nuestro factor  $\eta$  se puede reescribir como

$$\eta = \frac{\omega_0}{f\gamma_0\omega_0 - \Omega_c} = \frac{\omega_0}{f\omega_0 - \Omega_c} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha^2\eta^2 f}{2} \right) \frac{\omega_0}{f\omega_0 - \Omega_c} \right]. \quad (3.42)$$

En un plasma débilmente relativista, el término  $\eta$  es definido como [37]

$$\eta_{dr} = \frac{\omega_0}{\omega_0 - \Omega_c}. \quad (3.43)$$

Tomaremos el límite frío ( $f = 1$ ). Debido a que  $\alpha^2\eta^2$  será muy pequeño en el límite débilmente relativista, reemplazaremos  $\eta$  por  $\eta_{dr}$  en el segundo término al lado derecho de (3.42). Así obtendremos

$$\eta = \eta_{dr} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} \eta_{dr}^3 \right), \quad (3.44)$$

que es la expansión usada en [37].

De esta manera, usando que  $\alpha^2\eta^2 \ll 1$ , y (3.44) en las ecuaciones (3.14), (3.15), (3.16), (3.17), y (3.18) obtendremos las mismas ecuaciones de movimiento que en la Ref. [37], y por lo tanto la misma relación de dispersión.

### 3.3. Análisis de la dispersión

Primero veremos el límite cuando  $\alpha = 0$ . En este caso no es difícil demostrar que la relación de dispersión (3.19) se reduce a

$$F_{SD}(k, \omega) = S_e S_p D_+ D_- = 0, \quad (3.45)$$

donde el término  $S$  definido en (3.25) se reduce a

$$S = -\omega^2 + \frac{v_s^2 k^2}{f}, \quad (3.46)$$

y los otros términos se combinan para formar

$$D_+ = \omega_+^2 - c^2 k_+^2 - \frac{\omega_p^2}{f} \left( \frac{\omega_+}{\omega_+ - \frac{\Omega_c}{f}} + \frac{\omega_+}{\omega_+ + \frac{\Omega_c}{f}} \right), \quad (3.47)$$

$$D_- = \omega_-^{*2} - c^2 k_-^{*2} - \frac{\omega_p^2}{f} \left( \frac{\omega_-^*}{\omega_-^* - \frac{\Omega_c}{f}} + \frac{\omega_-^*}{\omega_-^* + \frac{\Omega_c}{f}} \right). \quad (3.48)$$

De la relación de dispersión (3.45) encontramos las soluciones  $D_+ = D_- = 0$  las cuales representan los modos electromagnéticos. Por otro lado las soluciones  $S_e = S_p = 0$  representan los modos electroacústicos. Existen cuatro de estos modos electroacústicos, dos de ellos propagándose en la dirección de la onda electromagnética, mientras los otros dos se propagan en la dirección opuesta. Así, el caso  $\alpha = 0$  representa los modos normales del sistema. Estos modos son las soluciones reales de la Ec. (3.45).

En la Fig. 3.1 hemos graficado la relación de dispersión  $F(k, \omega) = 0$  de la Ec. (3.19) para  $\alpha = 0$ , usando los valores  $\omega_p/\Omega_c = 1$ ,  $v_s/c = 0.2$  ( $mc^2 \sim 25k_B T$ ) y  $f = 1.1$ .

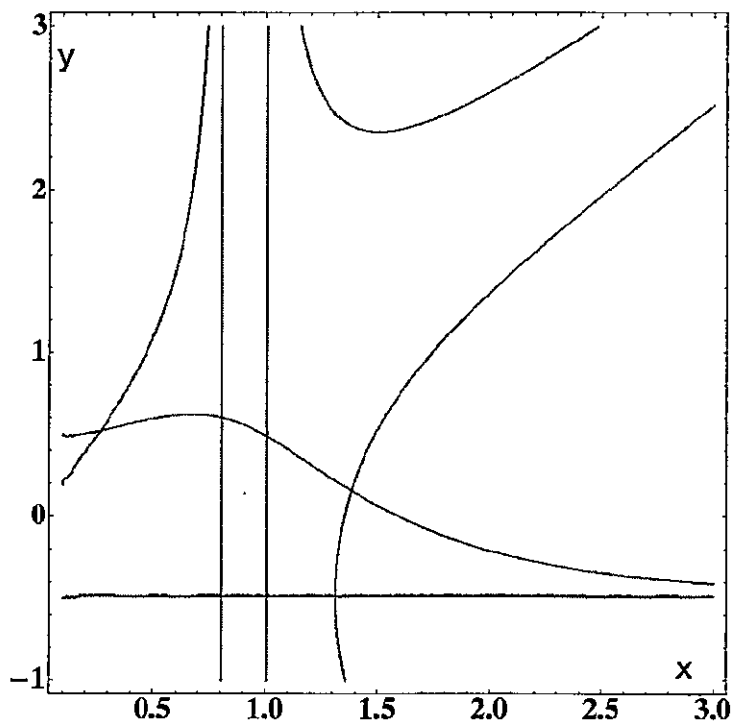


Figura 3.1: Gráfico de contorno de la relación de dispersión (3.19) con  $\omega_p/\Omega_c = 1$ ,  $v_s/c = 0.2$ ,  $f = 1.1$  y  $\alpha = 0$  ( $\gamma_{0e} = \gamma_{0p} = 1$ ).

Cuando  $\alpha \neq 0$ , todos los modos se acoplan en la relación de dispersión (3.19). En este caso, el acoplamiento entre dos o más ondas puede desencadenar una inestabilidad. Para ver la aparición de estas inestabilidades nos concentraremos solamente en el cruce central que se ve en la Fig. 3.1 y que se produce por el acoplamiento entre dos soluciones electromagnéticas. Esto ha sido graficado en las Figs. 3.3-3.5 para valores de  $\alpha$  entre 0.1 y 0.4, usando los valores  $\omega_p/\Omega_c = 1$ ,  $v_s/c = 0.2$ ,  $f = 1.1$  y  $\gamma_{0e} = \gamma_{0p} = 1.1$ . Nuevamente, sólo las raíces reales son graficadas. Cuando  $\alpha > 0$ ,

la amplitud de los campos electromagnéticos aumenta, lo que produce un cambio en la dinámica de interacción de las ondas y la aparición de inestabilidades. Estas inestabilidades se ven gráficamente como la aparición de unas separaciones de algunos cruces debido a que las soluciones se vuelven imaginarias. Sin embargo, para que exista una inestabilidad, en cada cruce se debe cumplir conservación de energía y momentum que se traduce en condiciones de resonancia. Cuando esto pasa, la onda original decae en otras dos, una que tiene una raíz imaginaria negativa que se amortigua rápidamente, y otra con raíz imaginaria positiva que crece. Esto es lo que vemos en los gráficos 3.2-3.5.

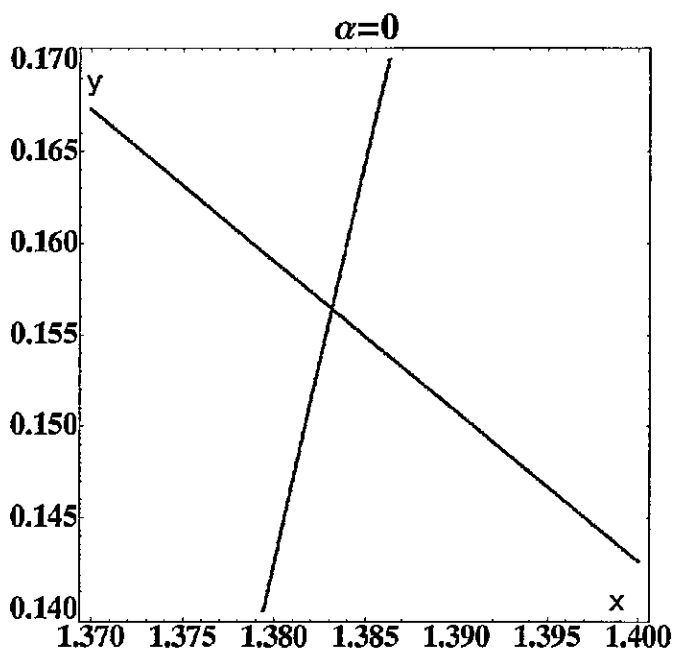


Figura 3.2: Ampliación de una sección de la Fig. 3.1. El cruce se debe al acoplamiento entre dos soluciones electromagnéticas

A medida que  $\alpha$  aumenta podemos ver la desaparición del cruce de la Fig. 3.2, y como la inestabilidad crece. Esta dependencia de la inestabilidad es graficada en la Fig. 3.6, a través del crecimiento de la separación, la cual llamaremos "gap".

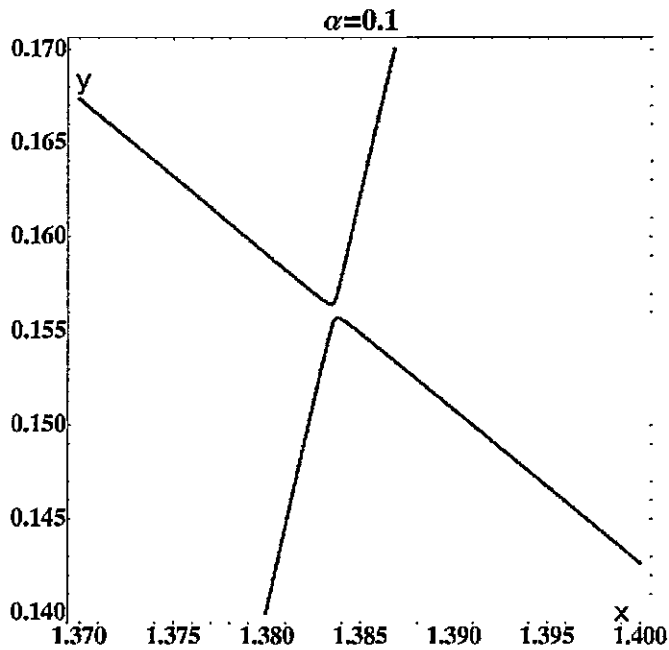


Figura 3.3: Cruce de la Fig. 3.2 para  $\alpha = 0.1$ . Aparece un separación debido a la aparición de una inestabilidad

La inestabilidad de las Figs. 3.3-3.5 crece de modo cuadrático con respecto a  $\alpha$  ( $\text{gap} \sim \alpha^2$ ).

Además de la inestabilidad mostrada en las Figs. 3.3-3.5, el sistema completo descrito por la relación de dispersión (3.19) presenta otras inestabilidades que dependen de la temperatura a través de la función  $f$ . El estudio completo de todas las soluciones del sistema, para otros valores de  $\gamma$  y de  $f$ , está bajo investigación. Valores más grandes de estos parámetros nos permitirían hacer un estudio de plasmas de altas energías e incluso ultrarrelativistas.

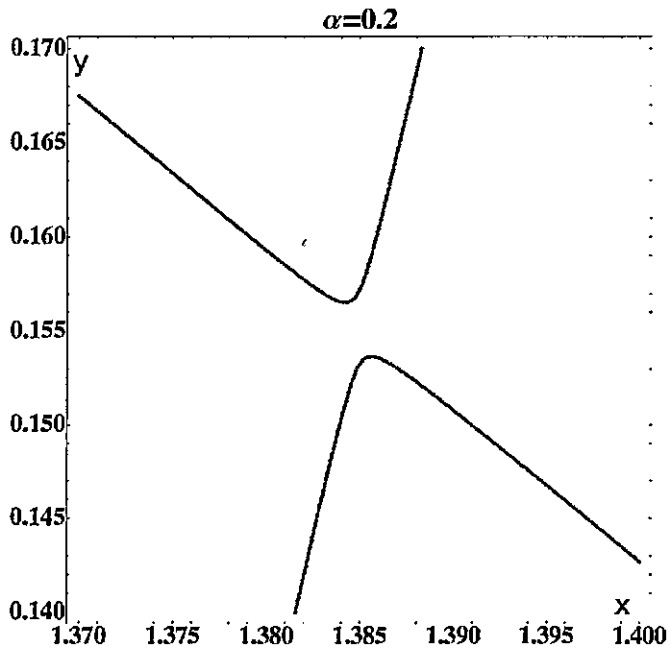


Figura 3.4: Igual que Fig. 3.3 con  $\alpha = 0.2$ . La inestabilidad crece.

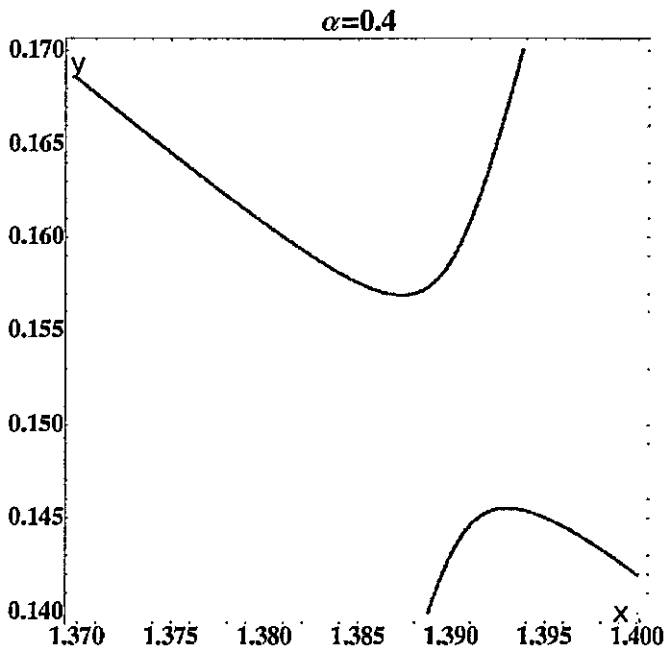


Figura 3.5: Igual que Fig. 3.3 con  $\alpha = 0.4$ . La inestabilidad aumenta.



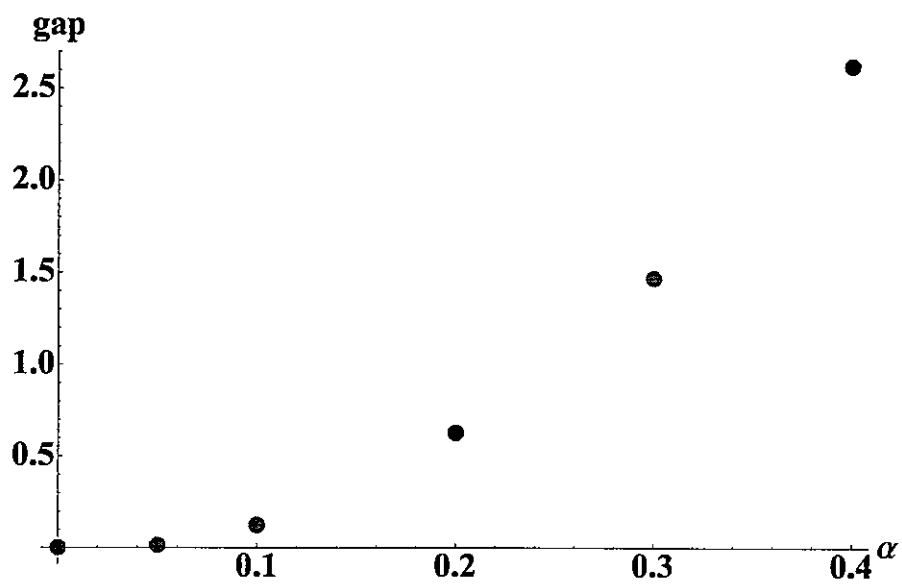


Figura 3.6: Crecimiento cuadrático de la inestabilidad de las Figs. 3.3-3.5 a través del aumento de la separación, o gap, con respecto a  $\alpha$ .

## Capítulo 4

# Masa relativista efectiva y carga relativista equivalente de un fotón

Nuestra próxima aplicación de la teoría de unificación para plasmas con temperatura, descrita en el capítulo 1, sienta una buena base para formar un puente con la segunda parte de esta tesis.

El objetivo de esta sección es estudiar cómo algunos efectos clásicos en plasmas relativistas pueden ser reinterpretados cuánticamente cuando se introduce la naturaleza cuántica de los campos. Específicamente, usaremos segunda cuantización sobre el campo electromagnético mostrando que, para un plasma relativista con temperatura, el fotón adquiere una masa efectiva y una carga equivalente. En nuestro análisis mostraremos que para fotones transversales y longitudinales existen distintas masas efectivas, así como también mostraremos que existe una carga equivalente para fotones transversales.

El concepto de masa del fotón no es nuevo. Para plasmas relativistas, la ecuación para la propagación de ondas es análoga a la ecuación para campos vectoriales masivos de Klein-Gordon, lo cual nos permite hacer un paralelo entre ambas teorías y así asociarle una masa efectiva al fotón. La masa efectiva que obtendremos será proporcional a la frecuencia de plasma, y por ende, es un efecto lineal. De modo similar,

una masa efectiva del fotón puede ser obtenida bajo un esquema cuántico considerando un mecanismo de rompimiento de simetría [40].

Además de la masa efectiva, en plasmas no relativistas es posible asociar una carga eléctrica equivalente a cada fotón. Esta carga es un efecto no lineal relacionado con la fuerza ponderomotriz en un plasma. El concepto de carga también ha sido extendido a neutrinos en un plasma [41].

Recientemente, se ha mostrado que es posible obtener una masa efectiva y una carga equivalente para el fotón cuando se aplica un formalismo de segunda cuantización a los campos electromagnéticos en un plasma frío y no relativista [42]. A continuación, mostraremos cómo estos conceptos pueden ser generalizados para plasmas relativistas donde los efectos térmicos son incluidos usando el formalismo de unificación de magnetofluidos [13]. A lo largo de este capítulo consideraremos  $c = 1$  y  $k_B = 1$  por simplicidad.

## 4.1. Masa relativista efectiva del fotón

Mostraremos que es posible hacer una equivalencia entre un campo vectorial masivo y el campo de fotones cuando se usa el formalismo de segunda cuantización para cuantizar el campo electromagnético. A diferencia del capítulo anterior, la masa efectiva del fotón aparece como un resultado de perturbaciones a primer orden de las ecuaciones de movimiento.

Primero, linealizaremos las ecuaciones de movimiento para los campos electromagnéticos y los campos del fluido cargado con respecto a un estado en equilibrio que consiste en un plasma moviéndose con una velocidad  $\mathbf{v}_0 = v_0 \hat{z}$  y sin campos magnéticos de fondo. En particular, asumiremos que el potencial escalar electrostático  $\phi$  es longitudinal, es decir,  $\phi = \phi(z, t)$ . Asimismo, la densidad tendrá la

forma  $n = n_0 + n_1$ , donde  $n_0$  es la densidad electrónica en reposo, y  $n_1$  es la perturbación a primer orden de la densidad. En este problema consideraremos los iones como un fondo fijo de partículas que asegurará la neutralidad del plasma. De esta manera, la densidad de los iones también será  $n_0$  y la ecuación de movimiento que consideraremos será sólo la de los electrones.

De la ecuación (1.1) se sigue a primer orden, en el gauge de Lorentz, la ecuación de onda

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 4\pi q n U^\nu, \quad (4.1)$$

para el cuadri-potencial  $A^\nu$ . Linealizando esta ecuación y las ecuaciones de fluido podremos encontrar los modos longitudinales (electrostáticos) y los modos transversales (electromagnéticos).

Primero concentrémonos en el caso para el vector potencial transversal. La velocidad será  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_\perp$ , donde  $\mathbf{v}_\perp$  es una perturbación transversal de la velocidad tal que  $\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{v}_0 = 0$ . De esta forma, el factor relativista es

$$\gamma_0 = \frac{1}{(1 - v_0^2)^{1/2}}, \quad (4.2)$$

el cual es constante.

La ecuación (4.1) correspondiente a la parte transversal  $\mathbf{A}_\perp$  del vector potencial es

$$\partial_\mu \partial^\mu \mathbf{A}_\perp = 4\pi q n_0 \mathbf{U}_\perp, \quad (4.3)$$

donde la carga del electrón es  $q = -e$ , y  $\mathbf{U}_\perp = \gamma_0 \mathbf{v}_\perp$ .

Por otro lado, la ecuación de movimiento para plasmas (1.21) puede ser escrita en términos de los potenciales como

$$m \frac{d}{dt} (f\mathbf{U}) = q \left( -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A} \right) - \frac{1}{\gamma n} \nabla p, \quad (4.4)$$

donde  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ . Expandiendo el doble producto cruz, podemos escribir la ecuación anterior como

$$\frac{d}{dt}(f\mathbf{U}) = -\frac{q}{m} \frac{d}{dt} \mathbf{A} + \frac{q}{m} (\nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \nabla \phi) - \frac{1}{\gamma n m} \nabla p. \quad (4.5)$$

En este caso, el potencial escalar depende de la variable longitudinal. Suponiendo también que la presión y la función  $f$  tienen dependencia longitudinal, las partes transversales y longitudinales de la ecuación de movimiento se separan naturalmente. Así, podemos escribir la ecuación para la parte transversal de los campos  $\mathbf{A}_\perp$  y  $\mathbf{U}_\perp$  como

$$\frac{d}{dt}(f\mathbf{U}_\perp) = -\frac{q}{m} \frac{d}{dt} \mathbf{A}_\perp, \quad (4.6)$$

y de esta forma encontramos

$$f\mathbf{U}_\perp = -\frac{q}{m} \mathbf{A}_\perp. \quad (4.7)$$

Usando (4.7) en la ecuación (4.3) podemos obtener la ecuación de onda

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{A}_\perp = -\frac{\omega_p^2}{f} \mathbf{A}_\perp, \quad (4.8)$$

donde  $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_0/m}$  es la frecuencia de plasma.

En la propagación de los modos longitudinales, la velocidad de los electrones en el plasma será  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$ , donde ahora  $\mathbf{v}_1 = v_1 \hat{z}$  es la perturbación longitudinal de la velocidad en respuesta al potencial  $\phi$ . El factor relativista es  $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$ , con  $\gamma_0$  dado en la Ec. (4.2), y donde  $\gamma_1 = \gamma_0^3 v_0 v_1$  es la perturbación a primer orden. La componente longitudinal de la Ec. (4.1) puede ser escrita para el potencial escalar  $\phi$  como

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 4\pi q n^L, \quad (4.9)$$

donde  $n^L = \gamma_0 n_1 + \gamma_1 n_0$  es la perturbación de la densidad en el sistema del laboratorio.

A primer orden en las perturbaciones, la ecuación de continuidad (1.4) es

$$\frac{\partial n^L}{\partial t} + \nabla \cdot (\gamma_0 n_0 \mathbf{v}_1 + n_L \mathbf{v}_0) = 0, \quad (4.10)$$

mientras que la parte longitudinal a primer orden de la ecuación de movimiento Ec. (1.21) es

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) (\gamma_0 \mathbf{v}_1 + \gamma_1 \mathbf{v}_0) &= \frac{q\mathbf{E}_1}{mf} - \frac{1}{mn_0\gamma_0 f} \nabla p - \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial t} (\gamma_1 \mathbf{v}_0 + \gamma_0 \mathbf{v}_1) \\ &\quad - \frac{v_0}{f} \frac{\partial f}{\partial z} (\gamma_1 \mathbf{v}_0 + \gamma_0 \mathbf{v}_1) - \frac{v_1}{f} \frac{\partial f}{\partial z} \gamma_0 \mathbf{v}_0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde  $\mathbf{E}_1$  es el campo eléctrico a primer orden producido por la perturbación longitudinal  $n^L$ .

La presión es  $p = nT = (n_0 + n_1)T = (n_0\gamma_0 + n^L)T/\gamma$  [ver [39] y Ec. (A.9) del apéndice]. Así, encontramos que

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial n_1} \nabla n_1 = m \frac{v_e^2}{\gamma_0} (\nabla n^L - n_0 \nabla \gamma_1), \quad (4.12)$$

donde

$$\left( \frac{\partial p}{\partial n_1} \right) \Big|_{n_0} = mv_e^2, \quad (4.13)$$

con  $v_e = \sqrt{T/m}$  la velocidad termal del electrón.

Derivando con respecto al tiempo la ecuación de continuidad (4.10) y usando la Ec. (4.11) llegamos a la expresión

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_0} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 n_L + \nabla \cdot \left( \frac{q\mathbf{E}_1}{mf} - \frac{v_e^2}{n_0\gamma_0^2 f} \nabla n^L + \frac{v_e^2}{f\gamma_0^2} \nabla \gamma_1 \right) - \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) v_0 \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\gamma_0 v_0 v_1}{f} (1 + \gamma_0^2) \frac{\partial f}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial t} (\gamma_0 v_1 + \gamma_1 v_0) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ahora, solamente consideraremos un plasma a temperatura constante, en el cual la función  $f$  no dependerá ni del espacio ni del tiempo. De esta forma, nos estamos

restringiendo a un sistema isothermal. Todas las perturbaciones a primer orden serán debidas a los campos electromagnéticos.

Resolviendo la ecuación (4.10) para  $v_1$ , para luego encontrar  $\gamma_1$ , podemos reescribir la ecuación (4.14) notando que  $\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = \partial_\mu \partial^\mu \phi$  en el gauge de Lorentz y usando Ec. (4.9). Así encontraremos una ecuación de onda para el potencial escalar longitudinal

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 - \frac{v_e^2}{f\gamma_0^4} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi = -\frac{\omega_p^2}{f\gamma_0^2} \phi + \frac{v_0 v_e^2}{f\gamma_0^2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi. \quad (4.15)$$

Ahora que tenemos las ecuaciones de onda (4.8) y (4.15) para los campos transversales  $\mathbf{A}_\perp$  y longitudinales  $\phi$ , respectivamente, usaremos el formalismo de segunda cuantización covariante para el campo electromagnético. Esta cuantización la haremos usando el formalismo de Gupta-Bleuler en el gauge de Lorentz desarrollado en la Ref. [43]. Bajo este formalismo, el potencial  $A^\mu$  puede ser expandido como una descomposición de Fourier de operadores de creación y aniquilación en términos de un número de onda  $k$  y su respectiva frecuencia  $\omega(k) \equiv \omega$ :

$$A^\mu(z, t) = A^{\mu+}(z, t) + A^{\mu-}(z, t), \quad (4.16)$$

donde los operadores son

$$A^{\mu+}(z, t) = \sum_{r=0}^3 \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_r}} \epsilon_r^\mu(k) a_r(k) e^{-i(kz - \omega_r t)}, \quad (4.17)$$

y

$$A^{\mu-}(z, t) = \sum_{r=0}^3 \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_r}} \epsilon_r^\mu(k) a_r^\dagger(k) e^{i(kz - \omega_r t)}, \quad (4.18)$$

con  $\hbar$  la constante de Planck reducida. En esta cuantización covariante, existen cuatro estados linealmente independientes de polarización para el cuadri-potencial  $A^\mu$ , y la suma sobre  $r$  es una suma ordinaria sobre estas polarizaciones del fotón ( $r = 1, 2$

para fotones transversales y  $r = 3$  para fotones longitudinales) [43]. Los cuadri-vectores unitarios ortogonales  $\epsilon_r^\mu(k)$ , con  $r = 0, 1, 2, 3$ , son escogidos para describir esas polarizaciones. Éstos son  $\epsilon_0^\mu(k) = (1, 0, 0, 0)$  y  $\epsilon_\lambda^\mu = (0, \hat{\epsilon}_\lambda(k))$  para  $\lambda = 1, 2, 3$ , donde  $\hat{\epsilon}_\lambda(k)$  son vectores unitarios. Los cuadri-vectores  $\epsilon_1^\mu(k)$  y  $\epsilon_2^\mu(k)$  representan las polarizaciones transversales del fotón, y el cuadri-vector  $\epsilon_3^\mu(k)$  representa la polarización longitudinal. El cuadri-vector  $\epsilon_0^\mu(k)$  representa la polarización escalar tipo tiempo del fotón. Los vectores cumplen  $\hat{z} \cdot \hat{\epsilon}_r(k) = 0$  para  $r = 1, 2$ , y  $\hat{\epsilon}_r(k) \cdot \hat{\epsilon}_s(k) = \delta_{rs}$  para  $r, s = 1, 2, 3$ . Finalmente, los operadores de creación y aniquilación satisfacen las relaciones de conmutación  $[a_r(k), a_s^\dagger(k')] = \xi_r \delta_{rs} \delta_{k, k'}$ , donde  $\xi_r = 1$  para  $r = 1, 2, 3$  y  $\xi_0 = -1$ . Cualquier otro conmutador es nulo.

Consideremos ahora que los campos electromagnéticos están cuantizados de acuerdo a la descomposición (4.16). Aplicando las expansiones (4.17) y (4.18) en la ecuación (4.8) podemos escribir la relación de dispersión para los fotones transversales como

$$\omega_r^2 = k^2 + \frac{\omega_p^2}{f}, \quad (4.19)$$

con  $r = 1, 2$ . Notemos que (4.19) es consistente con la relación de dispersión (2.18), ya que aquí hemos definido la frecuencia de plasma usando la densidad en reposo, y en (2.18) la definimos usando la densidad medida en el laboratorio.

De igual manera, si ocupamos la expansion (4.16) en (4.15) obtendremos la relación de dispersión para fotones longitudinales<sup>1</sup>, o plasmones, como

$$(\omega_3 - v_0 k)^2 - \frac{v_e^2}{f \gamma_0^4} k^2 = \frac{\omega_p^2}{f \gamma_0^2} - \frac{v_0 v_e^2}{f \gamma_0^2} k (\omega_3 - v_0 k). \quad (4.20)$$

Las ecuaciones (4.19) y (4.20) son equivalentes a la relación de dispersión de un campo vectorial relativista  $\psi^\nu$  con masa  $\varsigma$ , que satisface la versión cuantizada de la

<sup>1</sup>Los modos longitudinales son representados por el subíndice 3.



ecuación de Klein-Gordon [43]

$$\partial_\mu \partial^\mu \psi^\nu - \left(\frac{\zeta}{\hbar}\right)^2 \psi^\nu = 0. \quad (4.21)$$

Así, usaremos esta similitud con la ecuación de Klein-Gordon para definir la masa. La Ec. (4.21) produce una relación de dispersion de la forma  $\omega^2 - k^2 = \zeta^2/\hbar^2$ , de donde podemos encontrar la energía de una partícula relativista  $E(p) = \sqrt{p^2 + \zeta^2}$ , ya que la energía es  $E = \hbar\omega$  y el momentum es  $p = \hbar k$ . Es claro que la masa de la partícula se obtiene cuando el momentum es nulo,  $E(p = 0) = \zeta$ . Sin embargo, también es posible definir la masa como  $(d^2 E(p)/dp^2)|_{p=0} = 1/\zeta$ . Nosotros nos inclinaremos por la primera definición que parece más apropiada para tanto el caso de las ondas transversales como longitudinales.

Así, y siguiendo la analogía con la teoría de Klein-Gordon, definiremos la masa de la partícula como el valor que tomará la frecuencia cuando  $k = 0$ . Por lo tanto, podemos definir una masa efectiva para los fotones transversales como

$$M_r(T) = \frac{\hbar\omega_p}{\sqrt{f(T)}}. \quad (4.22)$$

Aquí, haremos una extensión natural de esta definición de masa para los fotones longitudinales, entendiendo que este tipo de fotones si pueden existir en medios no vacíos. Usando la Ec. (4.20), la masa efectiva para fotones longitudinales viene dada por

$$M_3(T) = \frac{\hbar\omega_p}{c_3^2 \gamma_0 \sqrt{f(T)}}, \quad (4.23)$$

donde la velocidad  $c_3$  es definida como la velocidad de fase cuando  $k$  es grande, es decir,  $c_3 = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_3/k$ . Entonces,

$$c_3 = v_0 + \frac{v_e}{2f\gamma_0^2} \left( \sqrt{v_0^2 v_e^2 + 4f} - v_0 v_e \right). \quad (4.24)$$

Esta definición para la velocidad de fase es consistente con la Ec. (4.19), en cuyo caso  $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_r/k = 1$ , como debe ser. Las definiciones (4.22) y (4.23) son consistentes con las de la Ref. [42] donde las masas son definidas usando las velocidades de fase.

Las masas efectivas encontradas para los modos transversales y longitudinales, son totalmente relativistas. A la vez, dependen de la temperatura a través de la función  $f(T)$  dada en (1.8), y a través de la velocidad termal  $v_e$ . Las masas efectivas se originan como respuesta a la interacción de las naturaleza colectiva del plasma y los campos electromagnéticos cuantizados.

Examinemos la dependencia de esta masa con respecto a la temperatura usando la definición (1.8) de la función  $f$ . Para bajas temperaturas  $f(T \ll m) \approx 1 + 5T/(2m)$ , y entonces la masa efectiva para fotones transversales será

$$M_{1,2}(T \ll m) = \hbar\omega_p \left( 1 - \frac{5T}{4m} \right), \quad (4.25)$$

mientras que la masa efectiva para los fotones longitudinales será

$$M_3(T \ll m) = \frac{\hbar\omega_p \left( 1 - \frac{5T}{4m} \right)}{\gamma_0 \left[ v_0 + \frac{v_e}{\gamma_0} \left( 1 - \frac{5T}{4m} + \frac{v_0^2 T}{8m} - \frac{v_0 v_e}{2} \right) \right]^2}. \quad (4.26)$$

En el régimen para plasmas fríos ( $T \rightarrow 0$ ) y no relativistas ( $\gamma_0 = 1$ ), la masa efectiva para fotones transversales será  $M_{1,2} = \hbar\omega_p$ , y para fotones longitudinales será  $M_3 = \hbar\omega_p/v_e^2$ , lo cual está en acuerdo con los resultados previamente encontrados en la Ref. [42].

Por otro lado, en el límite de altas temperaturas  $f(T \gg m) \approx 4T/m$ , y por lo tanto, la masa efectiva para los fotones transversales será

$$M_{1,2}(T \gg m) = \frac{\hbar\omega_p}{2} \sqrt{\frac{m}{T}}, \quad (4.27)$$

mientras que para los fotones longitudinales es

$$M_3(T \gg m) = \frac{\hbar\omega_p \sqrt{m/T}}{2\gamma_0 \left[ v_0 + \left( \sqrt{v_0^2 + 16} - v_0 \right) / (8\gamma_0^2) \right]^2}. \quad (4.28)$$

La figura 4.1 muestra la dependencia con la temperatura de la masa relativista efectiva para fotones transversales Ec. (4.22) (línea continua), y para fotones longitudinales Ec. (4.23) (líneas no continuas) en función de la variable  $m/T$ . Notemos que la masa para los fotones longitudinales decrece cuando el factor relativista aumenta.

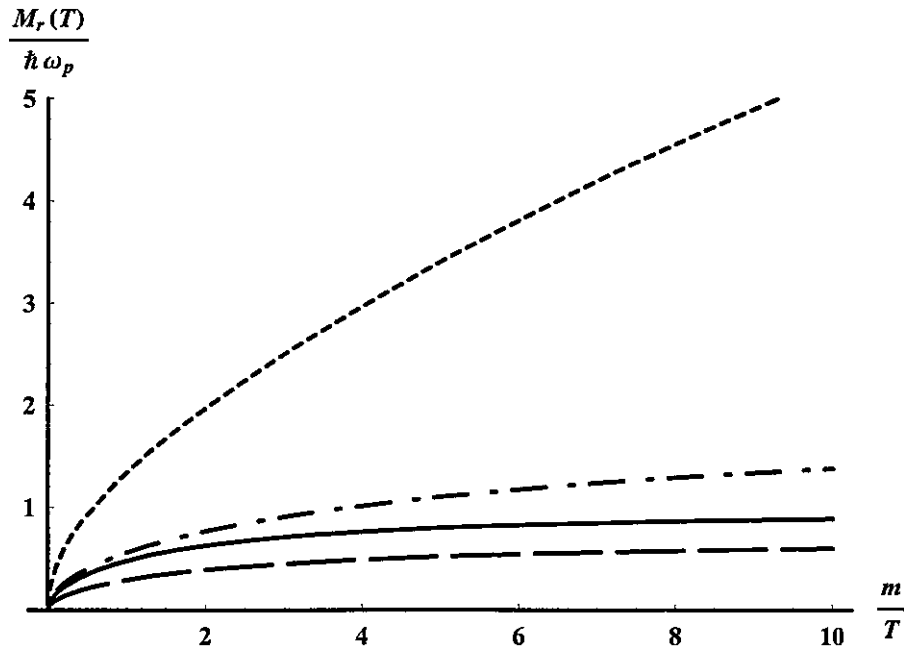


Figura 4.1: Mostramos la dependencia de la masa relativista efectiva del fotón  $M_r(T)/(\hbar\omega_p)$  ( $r = 1, 2, 3$ ), dada en (4.22) y (4.23), con respecto a  $m/T$  en un sistema isothermal. La línea continua representa la masa de fotones transversales ( $r = 1, 2$ ). Las otras líneas no continuas corresponden a la masa de los fotones longitudinales ( $r = 3$ ). La línea a trazos grandes es para  $\gamma_0 = 1.8$ , la línea de puntos y trazos es para  $\gamma_0 = 1.2$ , y la línea punteada es para  $\gamma_0 = 1.01$ .

## 4.2. Carga relativista equivalente del fotón

También podemos asociar una carga equivalente a cada fotón a través del formalismo de segunda cuantización. Esto ya ha sido realizado para plasmas fríos y no relativistas en la Ref. [42], y en esta parte nos propondremos generalizar estos resultados a plasmas relativistas con temperatura.

La carga equivalente del fotón aparece como resultado de un efecto de perturbaciones a segundo orden en las ecuaciones de movimiento. El efecto al que nos referimos es la fuerza ponderomotriz relativista inducida por el campo electromagnético transversal [44]. Esta fuerza es un efecto cuya no linealidad viene en parte del término  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  a segundo orden, y del campo eléctrico que es evaluado en cada posición de la partícula [45]. En el contexto de segunda cuantización, cuando son consideradas perturbaciones no lineales de la densidad, esta fuerza ponderomotriz puede ser reinterpretada como una fuerza de repulsión sobre los electrones debido a fotones cargados.

De esta manera, ahora estudiaremos un sistema físico distinto a la sección anterior, ya que ahora necesitamos introducir perturbaciones a segundo orden en las variables dinámicas para tener el efecto de la fuerza ponderomotriz. Con los mismos estados de equilibrio inicial y las mismas cantidades perturbadas que en la sección 4.1, introducimos una perturbación no lineal a segundo orden  $n_2$ , y una perturbación a segundo orden de la velocidad  $\mathbf{v}_2$ , tal que  $n = n_0 + n_1 + n_2$  y  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ , donde  $\mathbf{v}_0 = v_0 \hat{z}$  es una velocidad constante longitudinal,  $\mathbf{v}_1$  es una perturbación transversal (con  $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1 = 0$ ), y  $\mathbf{v}_2 = v_2 \hat{z}$  es la perturbación longitudinal a segundo orden. El factor relativista es  $\gamma = \gamma_0 + \gamma_2$ , donde  $\gamma_0 = (1 - v_0^2)^{-1/2}$ , y  $\gamma_2 = \gamma_0^3(v_0 v_2 + v_1^2/2)$  es la corrección a segundo orden, con  $v_1 = |\mathbf{v}_1|$ .

El campo eléctrico puede ser escrito como  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ , donde  $\mathbf{E}_1$  es el campo a primer orden, y el campo  $\mathbf{E}_2$  es la parte no lineal a segundo orden [41], con  $|\mathbf{E}_1| \gg |\mathbf{E}_2|$ . En esta sección haremos las mismas suposiciones en la temperatura que en la sección 4.1, es decir, supondremos que la función  $f$  no depende del tiempo ni de la posición.

A segundo orden en las cantidades perturbadas, de la ecuación de continuidad (1.4) se obtiene una ecuación para la densidad  $n_2$

$$\frac{\partial n_2^L}{\partial t} + \nabla \cdot (\gamma_0 n_0 \mathbf{v}_2 + n_2^L \mathbf{v}_0) = 0, \quad (4.29)$$

donde  $n_2^L = \gamma_0 n_2 + \gamma_2 n_0$  es la perturbación de la densidad a segundo orden en el sistema del laboratorio. La ecuación de continuidad (4.29) puede ser reescrita como

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) n_2^L + n_0 \nabla \cdot (\gamma_0 \mathbf{v}_2) = 0. \quad (4.30)$$

Ahora estudiaremos la ecuación de movimiento. A primer orden, la Ec. (1.21) nos dará

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) (f \gamma_0 \mathbf{v}_1) = \frac{q}{m} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_1), \quad (4.31)$$

ya que no hay campo magnético de fondo. Por otra parte, una expresión similar a la Ec. (4.7) puede ser derivada

$$f \gamma_0 \mathbf{v}_1 = -\frac{q}{m} \mathbf{A}_\perp. \quad (4.32)$$

De manera similar, debido a que  $\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_2$  no tiene componentes longitudinales, la ecuación de movimiento a segundo orden es

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) (\gamma_0 \mathbf{v}_2 + \gamma_2 \mathbf{v}_0) = \frac{q}{m f} (\mathbf{E}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_1). \quad (4.33)$$

En las ecuaciones (4.31) y (4.33) no hemos considerado las perturbaciones de la presión. Esto se debe a que sólo nos concentraremos en la fuerza ponderomotriz

debida a los campos electromagnéticos. De esta manera, en el caso isotermal, despreciamos los términos a primer y segundo orden de la presión  $v_e^2 \nabla n_1^L / (n_0 \gamma_0) - v_e^2 \nabla \gamma_1 / \gamma_0$  y  $v_e^2 n_1 \nabla n_1 / (\gamma_0 n_0^2) + v_e^2 \nabla \gamma_2 / \gamma_0^2 - v_e^2 \nabla n_2^L / (n_0 \gamma_0^2)$ , respectivamente. Esto nos permite obtener un resultado que puede ser comparado con los trabajos anteriores para carga de fotones [42] en el límite no relativista.

Con la ayuda de la Ec. (4.32), la ecuación (4.33) puede ser escrita como

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) (\gamma_0 \mathbf{v}_2 + \gamma_2 \mathbf{v}_0) = \frac{q}{mf} \mathbf{E}_2 - \frac{q^2}{2m^2 f^2 \gamma_0} \nabla |\mathbf{A}_\perp|^2. \quad (4.34)$$

Combinando las ecuaciones (4.30) y (4.34), y ya que  $\nabla \cdot \mathbf{E}_2 = 4\pi q n_2^L$ , tenemos

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 n_2^L + \frac{\omega_p^2}{f} n_2^L = \frac{n_0 q^2}{2m^2 f^2 \gamma_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} |\mathbf{A}_\perp|^2 + n_0 v_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \gamma_2. \quad (4.35)$$

Podemos resolver la Ec. (4.34) para  $\gamma_2$ , y así obtener una ecuación de evolución para la perturbación de la densidad  $n_2^L$  como respuesta a la fuerza ponderomotriz relativista [44]

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 n_2^L + \frac{\omega_p^2}{f \gamma_0^2} n_2^L = \frac{n_0 q^2}{2m^2 f^2 \gamma_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} |\mathbf{A}_\perp|^2 + \frac{n_0 v_0 q^2}{2m^2 f^2 \gamma_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} |\mathbf{A}_\perp|^2. \quad (4.36)$$

La dinámica de la perturbación no lineal  $n_2$  está principalmente dominada por el efecto de la fuerza ponderomotriz relativista del lado derecho de la Ec. (4.36). Ahora consideraremos un paquete de ondas transversales que se mueve sin mucha deformación a través del plasma [42]. Estas ondas satisfacen

$$\frac{\partial}{\partial z} |\mathbf{A}_\perp|^2 \simeq \frac{1}{v_r} \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{A}_\perp|^2, \quad (4.37)$$

donde la velocidad de grupo del paquete de ondas es

$$v_r = \frac{\partial \omega_r(k)}{\partial k}, \quad (4.38)$$

y  $\omega_r(k)$  es la frecuencia de las ondas electromagnéticas ( $r = 1, 2$ ) dada por la ecuación (4.19). En estos paquetes, el transporte de energía se asocia a una densidad de energía

con la amplitud de la onda, por lo tanto en estos casos, el transporte de energía ocurre con la velocidad de grupo [46].

De esta manera, la Ec. (4.36) quedará como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 n_2^L + \frac{\omega_p^2}{f\gamma_0^2} n_2^L = \frac{\omega_p^2 (1 + v_0 v_r)}{8\pi m v_r^2 f^2 \gamma_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} |\mathbf{A}_\perp|^2. \quad (4.39)$$

Usando el formalismo de segunda cuantización (4.16) para calcular la carga del fotón, tenemos

$$n_2^L = \frac{\omega_p^2}{8\pi m v_r^2 f^2 \gamma_0} (1 + v_0 v_r) \left[ \frac{\omega^2}{\omega'^2 - \omega_p^2/(f\gamma_0^2)} \right] |\mathbf{A}_\perp|^2, \quad (4.40)$$

donde  $\omega' = \omega - v_0 k$ . En la teoría de Gupta-Bleuler, los fotones transversales son los únicos grados de libertad involucrados en el campo de radiación. De esta manera, los fotones escalares y longitudinales no son observados como partículas libres [43]. Con la Ec. (4.40) y los campos electromagnéticos cuantizados (4.16), podemos calcular la carga total del fotón para los campos electromagnéticos asociada a  $n_2^L$  como

$$Q_\perp = -en_2^L.$$

Notemos que necesitamos reemplazar  $|\mathbf{A}_\perp|^2$  por  $A_\perp^{\mu+}(x)A_\perp^{\mu-}(x)$ , donde  $A_\perp^\mu(x)$  representa la parte transversal ( $r = 1, 2$ ) de los campos de fotones en la expansión (4.16). De esta manera, para un estado cuántico  $|\psi\rangle$ , el valor esperado de la carga total del fotón es  $Q_\perp = \langle\psi|Q_\perp|\psi\rangle = -e\langle\psi|n_2^L|\psi\rangle = -e\langle n_2^L\rangle$ . Ésta puede ser escrita como

$$Q_\perp = \sum_{r=1,2} \int \frac{-e\hbar\omega_p^2 (1 + v_0 v_r) \omega_r}{16\pi m v_r^2 f^2 \gamma_0 [\omega_r'^2 - \omega_p^2/(f\gamma_0^2)]} \langle a_r^\dagger(k) a_r(k) \rangle \frac{dk}{(2\pi)^3}. \quad (4.41)$$

Definiendo el número de ocupación de fotones  $n_r(k) = \langle a_r^\dagger(k) a_r(k) \rangle$  para  $r = 1, 2$ , la carga total podrá reescribirse como

$$Q_\perp = \sum_{r=1,2} \int q_r(k, T) n_r(k) \frac{dk}{(2\pi)^3}, \quad (4.42)$$

de donde se desprende que podemos asociar a cada fotón transversal en el plasma una carga relativista efectiva

$$q_r(k, T) = \frac{-e\hbar\omega_p^2\omega_r(1+v_0v_r)}{16\pi m v_r^2 f^2 \gamma_0 (\omega_r^2 - \omega_p^2/(f\gamma_0^2))}, \quad (4.43)$$

la cual puede escribirse, usando las definiciones (4.19) para  $\omega_r(k)$ , y (4.38) para  $v_r$ , como

$$q_r(k, T) = \frac{-e\hbar\omega_p^2(k^2 + \omega_p^2/f) \left( \sqrt{k^2 + \omega_p^2/f} + kv_0 \right)}{16\pi m k^2 f^2 \gamma_0 \left[ \left( \sqrt{k^2 + \omega_p^2/f} - kv_0 \right)^2 - \omega_p^2/(f\gamma_0^2) \right]}. \quad (4.44)$$

La carga relativista de los fotones transversales (4.43) tiene el mismo signo que la carga del electrón. De esta manera, los fotones repelerán a los electrones expulsándolos del espacio ocupado por el paquete de ondas electromagnéticas. El efecto no lineal de repulsión producida por esta carga equivalente es análogo a la presión de radiación de los campos electromagnéticos transversales debido a la fuerza ponderomotriz relativista [44].

Las figuras 4.2 y 4.3 muestran la dependencia de la temperatura  $T$  y del número de onda  $k$  de la carga equivalente relativista del fotón (4.43) en el régimen  $\omega \gg \omega_p/(\sqrt{f}\gamma_0)$ , para  $k/\omega_p > 1$ , y para factores relativistas  $\gamma_0 = 1.8$  y  $\gamma_0 = 2.5$ , respectivamente.

En el límite de plasma frío y no relativista, tenemos que  $T = 0$  ( $f = 1$ ),  $\gamma_0 = 1$  y  $v_0 = 0$ . Para este caso en particular, nos concentraremos sólo en escalas de tiempo más rápidas que las escalas de tiempo que toman las oscilaciones de los electrones,  $\omega \gg \omega_p$ . Hacemos esto para comparar nuestro resultado con trabajos previos. En general, debido a que  $\gamma_0 \geq 1$ , y  $f \geq 1$  para cualquier temperatura, tenemos que siempre se cumplirá  $\omega \gg \omega_p/(\sqrt{f}\gamma_0)$ . En este caso, podremos despreciar el término correspondiente a las oscilaciones de plasma  $\omega \gg \omega_p$  en (4.43). Así, para el límite



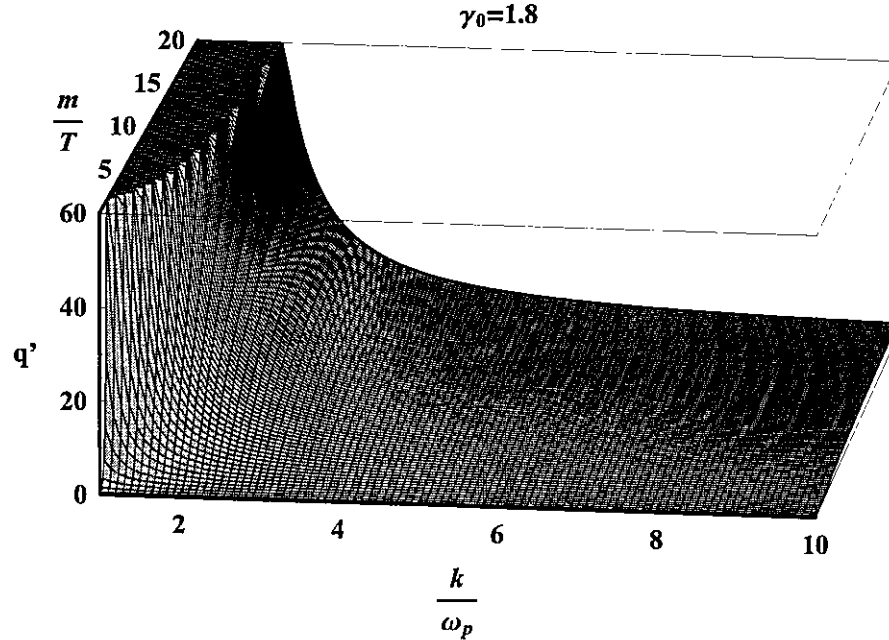


Figura 4.2: Carga del fotón (4.43) con respecto a  $m/T$  y  $k/\omega_p$  en un sistema isothermal. Aquí,  $q' \equiv 16\pi m q_r(|\mathbf{k}|, x)/(-e\hbar\omega_p)$ . Escogimos un factor relativista  $\gamma_0 = 1.8$ .

frío y no relativista, obtenemos que la carga equivalente del fotón es

$$q_r(k, 0) = -\frac{e\hbar\omega_p^2}{16\pi m v_r^2 \omega_r(k)}, \quad (4.45)$$

recobrando el resultado obtenido en la Ref. [42].

En el límite de altas temperaturas  $T \gg m$ ,  $f(T) \approx 4T/m$ , y la carga equivalente del fotón es

$$q_r(k, T \gg m) = \frac{-e\hbar m \omega_p^2 [k^2 + m \omega_p^2 / (4T)]}{256\pi k^2 T^2 \gamma_0} \frac{\left(\sqrt{k^2 + m \omega_p^2 / (4T)} + k v_0\right)}{\left(\sqrt{k^2 + m \omega_p^2 / (4T)} - k v_0\right)^2 - m \omega_p^2 / (4T \gamma_0^2)}. \quad (4.46)$$

En el límite  $1/\gamma_0 \rightarrow 0$ , la carga del fotón tiende a cero para cualquier temperatura.

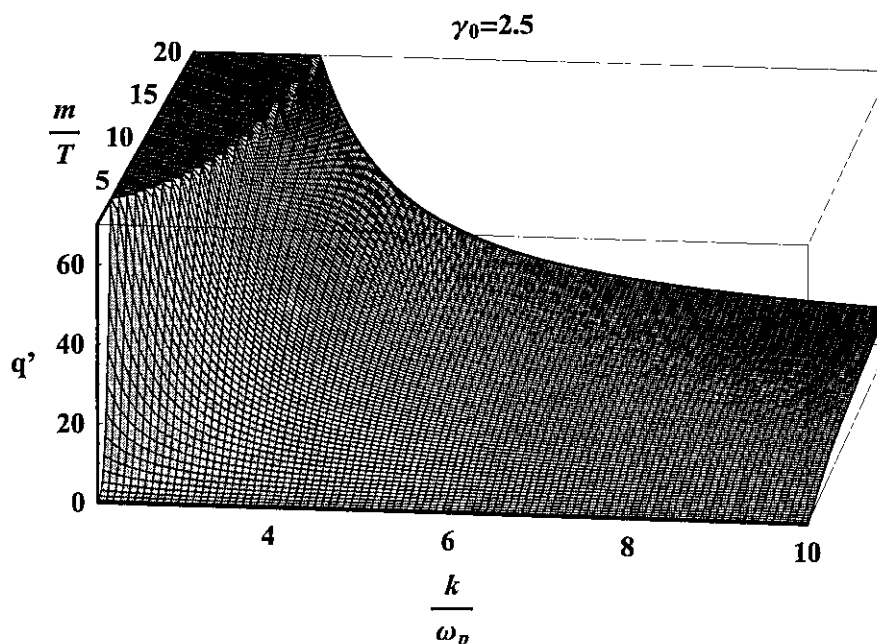


Figura 4.3: Igual que Fig. 4.2 con un factor relativista  $\gamma_0 = 2.5$ .

### 4.3. Masa y carga en un sistema adiabático

Para los cálculos de las secciones anteriores consideramos que no existían perturbaciones de la función  $f$  ni de la temperatura. Esto implica que los procesos del sistema son isotérmicos.

No obstante, es posible realizar los cálculos de la masa efectiva y la carga equivalente del fotón en el caso en que los procesos son adiabáticos. Entonces, es necesario incluir, dentro de las ecuaciones dinámicas del problema, además de la ecuación de estado para la presión y temperatura (A.9)

$$p = nT, \quad (4.47)$$

la ecuación (1.23) reescrita como

$$\frac{dp}{dt} = mn \frac{df}{dt}. \quad (4.48)$$

Ahora se requiere que existan perturbaciones tanto de la presión como de la temperatura. De esta manera hay que resolver las mismas ecuaciones que en las secciones 4.1 y 4.2, más la Ec. (4.47) y una ecuación extra que asegure la adiabaticidad del sistema. Esta condición se satisface incluyendo la Ec. (4.48) y resolviéndola perturbativamente para la función  $f$ .

Las cargas y masas obtenidas para el fotón en el caso adiabático, están siendo estudiadas por nosotros en la actualidad. Sin embargo, a modo de ejemplo, podemos decir que si se incluyen las perturbaciones de la función  $f$ , entonces la relación de dispersión no relativista ( $\gamma_0 \rightarrow 1$ ) para modos longitudinales tendrá la forma

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 v_e^2 \left( \frac{df}{dx} \right) \left( \frac{df}{dx} - 1 \right)^{-1}, \quad (4.49)$$

donde  $df/dx$  es la derivada de la función  $f$ , dada en (1.8), con respecto a  $x = m/T$ .

Cuando se consideran los procesos adiabáticos, la relación entre la presión y la densidad es

$$p = C n^\Gamma, \quad (4.50)$$

con  $C$  como una constante y  $\Gamma$  es la razón entre los calores específicos. En este caso, la relación de dispersión para modos longitudinales será

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 \Gamma v_e^2. \quad (4.51)$$

Las relaciones de dispersión (4.49) y (4.51) son idénticas si identificamos el factor de adiabaticidad con

$$\Gamma = \left( \frac{df}{dx} \right) \left( \frac{df}{dx} - 1 \right)^{-1}. \quad (4.52)$$

Esto es aún más claro si nos damos cuenta de que, a primer orden en  $x$

$$\Gamma = \left( \frac{df}{dx} \right) \left( \frac{df}{dx} - 1 \right)^{-1} \approx \frac{5}{3}, \quad (4.53)$$

el cual es el factor de adiabaticidad para un gas ideal monoatómico no relativista.

Por otro lado, veamos el límite ultrarrelativista. Las masas (4.27) y (4.28) han sido obtenidas para un sistema isotermal, en cuyo caso la presión  $p$  es proporcional a la densidad  $n$ , es decir,  $p \sim n$ . Si consideramos el caso adiabático, la presión se rige por la Ec. (4.50), y por lo tanto la Fig. 4.1 se comportara de manera muy diferente. En particular, en el límite ultrarrelativista, cuando  $T \gg m$ , tenemos que  $\Gamma = 4/3$  y  $n \sim T^3$ . De esta forma, las masas para fotones longitudinales y transversales se vuelven proporcionales a la temperatura, ya que  $M \sim \omega_p/\sqrt{T} \sim \sqrt{n/T} \sim T$ . Este resultado concuerda con cálculos previos para la masa de fotones en plasmas ultrarrelativistas [47, 48].

**Parte II**  
**Plasmas Cuánticos Relativistas**

# Capítulo 5

## Plasmas Cuánticos

En los últimos años, los estudios teóricos sobre plasmas cuánticos han sido retomados con gran entusiasmo luego de un prolongado olvido que siguió a varios estudios en este tema [49–54]. Ello, a pesar de la relevancia del tema, ya que cuando la longitud de onda de de Broglie de las partículas cargadas del plasma se vuelve comparable a las dimensiones características del sistema, tales como su esfera de Debye, la naturaleza cuántica de los constituyentes del plasma no puede ser ignorada y los efectos cuánticos pueden afectar, de una manera sustancial, a sus movimientos colectivos. En este contexto, un apropiado tratamiento cuántico de, por ejemplo, sistemas a nano escala [55], algunos sistemas astrofísicos [56] y sistemas de láseres de alta energía [57], puede ser crucial para el entendimiento de sus complejos fenómenos.

Este capítulo nos servirá de base para el desarrollo de la teoría para plasmas cuánticos relativistas. Aquí mostraremos cómo es posible construir un formalismo cuántico para plasmas, y cómo, a partir de él, se puede recuperar la teoría de fluidos usual. En este capítulo, consideraremos los casos más sencillos, ya sea considerando o no el spin de las partículas constituyentes. También mostraremos que se puede construir una teoría cinética para un plasma, considerando efectos cuánticos debido al spin. Explicaremos cuáles son las principales características de estas teorías, sus posi-

bles aplicaciones, y los nuevos resultados que se obtienen al considerar la naturaleza cuántica de las partículas.

## 5.1. Plasmas cuánticos sin spin: descomposición de Madelung

Se han desarrollado diversas teorías para considerar correlaciones cuánticas en plasmas [58]. Sin embargo, las primeras ideas para obtener la dinámica de un plasma cuántico fueron concebidas tan solo suponiendo que los electrones obedecen a la ecuación de Schrödinger. En este caso, el spin del electrón es completamente despreciado.

Empezaremos por construir una teoría de fluido para un plasma compuesto de partículas de una sola especie. Usando esto, la generalización a varias especies es directa. La evolución de un electrón con carga  $-e$ , descrito por la función de onda  $\psi_{(\alpha)} = \psi_{(\alpha)}(\mathbf{r}, t)$ , satisface la ecuación

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{(\alpha)}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \nabla + \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \psi_{(\alpha)} - e\phi \psi_{(\alpha)}. \quad (5.1)$$

Ahora hacemos la llamada descomposición de Madelung de la función de onda del electrón [59]

$$\psi_{(\alpha)} = \sqrt{n_{(\alpha)}} \exp \left( \frac{iS_{(\alpha)}}{\hbar} \right), \quad (5.2)$$

donde  $\sqrt{n_{(\alpha)}}$  es una amplitud y  $S_{(\alpha)}$  es una fase. Aplicando la descomposición de Madelung a la Ec. (5.1) es posible obtener una fluidización de la ecuación de Schrödinger. Esto significa construir una teoría "tipo-fluido" para una sola partícula. Cuando la descomposición (5.2) es usada en la ecuación de Schrödinger (5.1), el sistema quedará descrito por los observables  $n_{(\alpha)}$  y  $S_{(\alpha)}$ . De la Ec. (5.2), podemos ver que

$n_{(\alpha)}$  lo identificaremos con una densidad, ya que

$$n_{(\alpha)} = \psi_{(\alpha)}^\dagger \psi_{(\alpha)}. \quad (5.3)$$

De igual forma, a la fase  $S_{(\alpha)}$  la identificaremos con una velocidad. Los detalles de los cálculos pueden encontrarse en la literatura, por ejemplo en Ref. [60]. Aquí sólo nos limitaremos a presentar los resultados finales. Definiremos la velocidad como

$$\mathbf{v}_{(\alpha)} = \frac{1}{m} \nabla S_{(\alpha)} + \frac{e}{mc} \mathbf{A}. \quad (5.4)$$

Luego, contrayendo la Ec. (5.1) con  $\psi_{(\alpha)}^\dagger$ , y después tomando la parte real y la parte imaginaria, podremos reescribirla como una ecuación de continuidad

$$\frac{\partial n_{(\alpha)}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{(\alpha)} \mathbf{v}_{(\alpha)}) = 0, \quad (5.5)$$

y una ecuación de movimiento para el flujo

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{(\alpha)}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{(\alpha)} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{(\alpha)} = \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_{(\alpha)} \times \mathbf{B}) + \frac{\hbar^2}{2m^2} \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{n_{(\alpha)}}}{\sqrt{n_{(\alpha)}}} \right). \quad (5.6)$$

Podemos ver que toda la naturaleza cuántica del electrón ahora está explícitamente presente en las ecuaciones de fluido. Esta teoría es conocida como "fluido de Madelung" y es considerada otra versión de la mecánica cuántica ya que es una descripción equivalente a la ecuación de Schrödinger. Aquí, la parte cuántica en (5.6), que es proporcional a  $\hbar^2$ , es llamado potencial de Bohm.

Sin embargo, (5.5) y (5.6) siguen siendo ecuaciones para una partícula, y no representan un fluido. Suponemos ahora que hay  $N$  funciones de ondas para las partículas constituyentes, y que la función de onda total del sistema para los  $N$  estados es descrita por  $\psi = \psi_{(1)} \psi_{(2)} \dots \psi_{(N)}$ . Así, definimos la densidad total  $n$  y la velocidad total del fluido  $\mathbf{v}$  a través de lo que se conoce como un promedio de



ensembles

$$n = \sum_{\alpha=1}^N p_{(\alpha)} n_{(\alpha)}, \quad \mathbf{v} = \langle \mathbf{v}_{(\alpha)} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^N p_{(\alpha)} n_{(\alpha)} \mathbf{v}_{(\alpha)}. \quad (5.7)$$

donde  $p_{\alpha}$  es la probabilidad asociada a cada función de onda  $\psi_{(\alpha)}$ .

Al mismo tiempo, definimos

$$\mathbf{z}_{(\alpha)} = \mathbf{v}_{(\alpha)} - \mathbf{v}, \quad \langle \mathbf{z}_{(\alpha)} \rangle = 0. \quad (5.8)$$

Así, aplicando el promedio de ensembles a las ecuaciones (5.5) y (5.6), obtendremos finalmente las ecuaciones de fluido para un plasma cuántico:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0, \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{mn} \nabla \cdot \Pi + \frac{\hbar^2}{2m^2} \left\langle \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{n_{\alpha}}}{\sqrt{n_{\alpha}}} \right) \right\rangle, \quad (5.10)$$

donde  $\Pi^{ij} = mn \langle \mathbf{z}_{(\alpha)}^i \mathbf{z}_{(\alpha)}^j \rangle$  es el tensor de presión.

Aquí hemos presentado la versión de un fluido para cada especie, pero también es posible obtener una versión magnetohidrodinámica para plasmas cuánticos [61]. Este tipo de modelos de fluidos y multifluidos han sido estudiados extensivamente [62–65], y debido al potencial de Bohm, han sido derivadas correcciones cuánticas que llevan a una serie de complejos movimientos colectivos, incluyendo correcciones a diversos modos de propagación [66–72], interacción entre ondas [73], modos en dusty plasmas cuánticos [74, 75], inestabilidades [76–78], interacciones no lineales de ondas y modulación [79, 80], versiones cuánticas de ondas ion-acústicas [81–83], ondas de choques [84, 85], turbulencia [86], efectos del término de Jeans [87], inestabilidades de Rayleigh-Taylor [88] y nuevas magnetizaciones del plasma debido a la fuerza ponderomotriz que aparece debido a las correcciones cuánticas [89].

También se han hecho progresos en teorías cinéticas para plasma cuánticos. Por ejemplo, se han desarrollado modelos del tipo Wigner-Poisson en vez del clásico

sistema Vlasov-Poisson [90], y se ha estudiado la evolución de plasmones en plasmas degenerados [91, 92].

## 5.2. Plasmas cuánticos con spin: descomposición generalizada de Madelung

El siguiente gran paso consistía en incorporar el spin en una teoría de fluidos para plasmas cuánticos. Esto fue recientemente publicado por Marklund y Brodin durante el año 2007 [93, 94]. Ellos construyen una teoría para plasmas con spin partiendo del Hamiltoniano de Pauli y haciendo una generalización de la descomposición de Madelung para una función de onda con las dos componentes spinoriales (spinor).

Si despreciamos los entrelazamientos cuánticos de los electrones y nos concentramos solamente en la dinámica colectiva del plasma, la evolución de cada partícula con spin 1/2, descrita por el spinor de dos componentes  $\psi_{(\alpha)}$ , vendrá dada por la ecuación de Pauli

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{(\alpha)}}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \nabla + \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} - e\phi \right] \psi_{(\alpha)}, \quad (5.11)$$

donde el subíndice  $(\alpha)$  nuevamente son los estados cuánticos de la partícula y  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , donde  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  son las matrices de Pauli.

Para obtener la forma de fluidos de la ecuación de Pauli, debemos generalizar la descomposición de Madelung para spinores. Una acotación es necesaria en este punto. Cada componente  $\psi_{(\alpha)}^j$  ( $j = 1, 2$ ) del spinor  $\psi_{(\alpha)}$  puede descomponerse de la forma [95]

$$\psi_{(\alpha)}^j = \sqrt{n_{(\alpha)}^j} \exp\left(\frac{iS_{(\alpha)}^j}{\hbar}\right) = \sqrt{n_{(\alpha)}} \exp\left(\frac{iS_{(\alpha)}}{\hbar}\right) \varphi_{(\alpha)}^j, \quad j = 1, 2.$$

La primera descomposición corresponde a una de Madelung con  $n_{(\alpha)}^j$  y  $S_{(\alpha)}^j$  funciones reales. Sin embargo, es más útil la segunda descomposición donde  $S_{(\alpha)}$  es la

fase promedio de  $\psi_{(\alpha)}$  y toda la información del spin se encuentra en  $\varphi_{(\alpha)}$  [95]. Ambas descripciones son equivalentes, definiendo adecuadamente la velocidad y el spin.

De esta manera, esta última descomposición consiste en separar la parte spinorial en la función de onda [93, 94, 96–98]

$$\psi_{(\alpha)} = \sqrt{n_{(\alpha)}} \exp\left(\frac{iS_{(\alpha)}}{\hbar}\right) \varphi_{(\alpha)}, \quad (5.12)$$

donde  $\varphi_{(\alpha)}$  es un spinor normalizado de dos componentes que tiene todas las propiedades del spin de la partícula. Aplicando esta descomposición y definiendo la velocidad como

$$\mathbf{v}_{(\alpha)} = \frac{1}{m} \left( \nabla S_{(\alpha)} - i\hbar \varphi_{(\alpha)}^\dagger \nabla \varphi_{(\alpha)} \right) + \frac{e}{mc} \mathbf{A}, \quad (5.13)$$

y el vector de densidad de spin como

$$\mathbf{s}_{(\alpha)} = \frac{\hbar}{2} \varphi_{(\alpha)}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \varphi_{(\alpha)}, \quad (5.14)$$

es posible obtener tres ecuaciones dinámicas que representan la versión de fluidos de la ecuación (5.11). Contrayendo la Ec. (5.14) con  $\psi_{(\alpha)}^\dagger$ , y después tomando la parte real y la parte imaginaria, podemos encontrar la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial n_{(\alpha)}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{(\alpha)} \mathbf{v}_{(\alpha)}) = 0, \quad (5.15)$$

y luego, la ecuación de movimiento para el fluido:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \mathbf{v}_{(\alpha)}}{\partial t} + m (\mathbf{v}_{(\alpha)} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{(\alpha)} &= e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_{(\alpha)} \times \mathbf{B}) + e \mathbf{s}_{(\alpha)k} \nabla \mathbf{B}_k \\ &\quad - \frac{1}{n_{(\alpha)}} \partial_k \left( n_{(\alpha)} \nabla \mathbf{s}_{(\alpha)j} \partial_k \mathbf{s}_{(\alpha)j} \right) + \frac{\hbar^2}{2} \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{n_{(\alpha)}}}{\sqrt{n_{(\alpha)}}} \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Por último, contrayendo la Ec. (5.14) con  $\psi_{(\alpha)}^\dagger \boldsymbol{\sigma}$ , encontramos la ecuación para la densidad de spin:

$$\frac{\partial \mathbf{s}_{(\alpha)}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{(\alpha)} \cdot \nabla) \mathbf{s}_{(\alpha)} = \frac{e}{m} \mathbf{s}_{(\alpha)} \times \mathbf{B} + \frac{1}{mn_{(\alpha)}} \mathbf{s}_{(\alpha)} \times \partial_k (n_{(\alpha)} \partial_k \mathbf{s}_{(\alpha)}). \quad (5.17)$$

Nuevamente tenemos que estas ecuaciones son la descripción para una sola partícula. Para obtener la teoría de fluidos debemos hacer un promedio sobre ensembles igual al hecho en (5.7). Así, se define la densidad total, la velocidad total, y la densidad de spin total como

$$n = \sum_{\alpha} p_{(\alpha)} n_{(\alpha)}, \quad \mathbf{v} = \langle \mathbf{v}_{(\alpha)} \rangle, \quad \mathbf{s} = \langle \mathbf{s}_{(\alpha)} \rangle, \quad (5.18)$$

respectivamente, y sus correspondientes cantidades vectoriales medidas en el sistema en reposo

$$\mathbf{z}_{(\alpha)} = \mathbf{v}_{(\alpha)} - \mathbf{v}, \quad \mathbf{w}_{(\alpha)} = \mathbf{s}_{(\alpha)} - \mathbf{s}, \quad \langle \mathbf{z}_{(\alpha)} \rangle = 0 = \langle \mathbf{w}_{(\alpha)} \rangle. \quad (5.19)$$

De esta manera, tomando un promedio de ensembles en las ecuaciones (5.15), (5.16) y (5.17), obtenemos finalmente las ecuaciones para un plasma cuántico con spin. Éstas son la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0, \quad (5.20)$$

la ecuación para la velocidad total del fluido:

$$mn \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = ne (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \Pi + \mathbf{F}_Q, \quad (5.21)$$

donde  $\Pi^{ij} = mn \langle \mathbf{z}_{(\alpha)}^i \mathbf{z}_{(\alpha)}^j \rangle$  es el tensor de presión, y  $\mathbf{F}_Q$  es una "fuerza cuántica" que viene dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_Q = & \ens ns_k \nabla \mathbf{B}_k + \frac{n\hbar^2}{2} \left\langle \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{n_{(\alpha)}}}{\sqrt{n_{(\alpha)}}} \right) \right\rangle \\ & - \partial_k \left( n \nabla s_j \partial_k s_j + n \langle \nabla w_{(\alpha)j} \rangle \partial_k s_j + n \langle \nabla s_{(\alpha)j} \rangle \partial_k w_{(\alpha)j} \right), \end{aligned} \quad (5.22)$$

donde los subíndices repetidos siguen la regla de suma de Einstein.

Finalmente, tenemos la ecuación de evolución para la densidad de spin total del fluido:

$$n \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + n(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{s} = \frac{en}{m} \mathbf{s} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot \mathbf{K} + \Omega_Q, \quad (5.23)$$

donde  $K^{ij} = n \langle z_{(\alpha)}^i w_{(\alpha)}^j \rangle$  es el tensor de acoplamiento térmico de spin, y  $\Omega_Q$  es la corrección cuántica a la dinámica del spin:

$$\Omega_Q = \frac{1}{m} \mathbf{s} \times \partial_k (n \partial_k \mathbf{s}) + \frac{1}{m} \mathbf{s} \times \partial_k (n \langle \partial_k w_{(\alpha)} \rangle) + \frac{n}{m} \left\langle \frac{1}{n_{(\alpha)}} w_{(\alpha)} \times \partial_k (n_{(\alpha)} \partial_k \mathbf{s}_{(\alpha)}) \right\rangle. \quad (5.24)$$

Notemos que en este formalismo, las correcciones son mucho más complejas que en el caso anterior, ya que hemos considerado al spin como parte de la naturaleza cuántica de los constituyentes. Esto se pone de manifiesto en la fuerza cuántica  $F_Q$  (5.22), donde si despreciamos el spin, obtendremos únicamente el potencial de Bohm.

Los efectos cuánticos serán importantes a bajas temperaturas y en plasmas muy densos, tal que  $\hbar\omega_c > k_B T$  y/o  $\hbar^2\omega_p^2 > mc^2 k_B T$  [93,94]. No obstante, también ha se ha mostrado que incluso para plasmas muy calientes, las características cuánticas como el spin no pueden ser despreciadas y pueden llegar a jugar un rol muy importante en la dinámica del sistema [99].

Los nuevos alcances de esta teoría de fluidos para plasmas con spin han tenido un gran impacto en la naciente área de plasmas cuánticos [100]. Esto se debe a que esta teoría no relativista produce nuevos efectos y correcciones en, por ejemplo, modos de propagación [101,102], en soluciones de solitones magnetosónicos [103], inestabilidades [104], ondas de choques [105], dusty plasmas [106], y metamateriales [107].

### 5.3. Descripción cinética para plasmas con spin: corrección al amortiguamiento de Landau

El entendimiento de los posibles efectos del spin en plasmas puede verse potenciado si consideramos la descripción cinética. Esta descripción ha llevado a encontrar correcciones a la relación de dispersión de los modos transversales para plasmas completamente degenerados [108].

Recientemente se ha desarrollado un modelo semi-clásico de teoría cinética donde la interacción del spin con la dinámica de los campos es considerada en la ecuación de Vlasov usando su ecuación dinámica [109,110]. Al modelo se le llama semiclásico porque las otras correcciones cuánticas, como el potencial de Bohm y las fuerzas de las interacciones spin-spin, son despreciables respecto a otras fuerzas. De igual manera, las fuerzas de orden superior en la ecuación de evolución del spin, no son consideradas.

En la descripción del modelo semiclásico de la Ref. [109] se estudian modos transversales de propagación, y se demuestra la aparición de nuevos modos. En esta sección estudiaremos los modos longitudinales de propagación en este modelo cinético. Mostraremos que, debido al spin, en estos modos se producen nuevos efectos de amortiguamiento [111], que son independientes del amortiguamiento de Landau.

De acuerdo a la Ref. [109], la ecuación de Vlasov para una función de distribución  $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{s}, t)$ , para partículas con velocidad  $\mathbf{v}$  y con spin  $\mathbf{s}$ , es

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \left[ \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{2\mu_e}{m\hbar} \nabla (\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) \right] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f + \frac{2\mu_e}{\hbar} (\mathbf{s} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{s}} f = 0, \quad (5.25)$$

donde  $q = -e$  es la carga del electrón,  $m$  es la masa del electrón,  $\mu_e = -g\hbar/(4m)$

es el momento magnético, y  $g \approx 2.002319$ . Este formalismo para partículas con spin es diferente de otros [110] en los cuales se considera la fuerza de dipolos magnéticos, pero no hay correcciones cuánticas a la ecuación de momentum.

Usaremos el formalismo cinético (5.25) para calcular un amortiguamiento (o inestabilidad) producida por el spin de la partícula, el cual será una contribución que debe ser considerada junto al amortiguamiento de Landau. Primero, calcularemos la relación de dispersión para un plasma de electrones con un campo magnético capaz de interactuar con el spin.

Perturbaremos un sistema en equilibrio. Los campos eléctricos y magnéticos son  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ , respectivamente. Los términos con el subíndice 0 son las cantidades en equilibrio de orden cero, y los términos con un subíndice 1 son las cantidades perturbadas a primer orden. De igual manera, la función de distribución es perturbada como  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{s}, t) = f_0(\mathbf{v}, \mathbf{s}) + \tilde{f}_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{s}, t)$ , donde la distribución de equilibrio es [109]

$$f_0(\mathbf{v}, \mathbf{s}) = C_s \tilde{f}_0(\mathbf{v}) \exp\left(-\frac{2\mu_e \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}_0}{\hbar k_B T}\right), \quad (5.26)$$

con  $C_s = B_0 \mu_e / (4\pi k_B T \sinh(B_0 \mu_e / k_B T))$  como un factor de normalización,  $T$  es la temperatura,  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $B_0 = |\mathbf{B}_0|$ , y  $\tilde{f}_0$  es una distribución clásica (no cuántica) Maxwelliana

$$\tilde{f}_0(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right), \quad (5.27)$$

con  $v = |\mathbf{v}|$ . La función de distribución (5.26) es obtenida en equilibrio termodinámico y para grandes potenciales químicos. Está normalizada tal que  $\int f_0 d\mathbf{v} d\mathbf{s} = 1$ .

La corrección a la función de distribución (5.26) debido al spin, puede ser importante para plasmas astrofísicos, ya que si  $B_0 \simeq 10^6 \text{T}$  y  $T \simeq 10^{10} \text{K}$  entonces  $2\mu_e \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}_0 / (\hbar k_B T) \simeq 1$ . Además, notemos que la distribución  $f_0$  nos permite encontrar

el valor de la magnetización a orden cero del sistema  $M_0 = (2\mu_e n_0 / \hbar) \int \mathbf{s} f_0 d\mathbf{v} d\mathbf{s} = n_0 \mu_e \eta(\mu_e B_0 / k_B T)$  [93, 99], donde  $\eta(x) = \coth(x) - 1/x$  es la función de Langevin.

Linealizamos la Ec. (5.25), con la velocidad  $\mathbf{v}$  y el spin  $\mathbf{s}$  como variables independientes. Supondremos que la distribución perturbada  $\tilde{f}_1$  tiene la forma  $\tilde{f}_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{s}, t) = f_1(\mathbf{v}, \mathbf{s}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$ . Hacemos una suposición similar para las otras cantidades.

Debido a la existencia del campo magnético de fondo, es necesario linealizar correctamente la ecuación de Vlasov usando el método de integración sobre órbitas no perturbadas detallado en la Ref. [112]. Con este procedimiento, podemos encontrar  $f_1$  integrando la ecuación de Vlasov desde  $-\infty$  (donde  $f_1$  se anula) hasta  $t$  a lo largo de un camino en el espacio de fase  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{s})$  para la órbita de la partícula cargada en el campo de equilibrio  $\mathbf{B}_0$ .

Linealizando la Ec. (5.25) siguiendo el método mencionado antes [112], podemos encontrar la función de distribución perturbada como

$$f_1 = \frac{-i}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \left( \frac{q}{m} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_v f_0 + \frac{2\mu_e}{m\hbar} \nabla(\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}_1) \cdot \nabla_v f_0 + \frac{2\mu_e}{\hbar} (\mathbf{s} \times \mathbf{B}_1) \cdot \nabla_s f_0 \right), \quad (5.28)$$

ya que  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1 \cdot \nabla_v f_0 = 0$ . La distribución perturbada  $f_1$  se reduce a la clásica cuando despreciamos la contribución del spin.

Usando la ecuación de Maxwell  $\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1 = \omega \mathbf{B}_1$ , y definiendo  $k = |\mathbf{k}|$ , la función distribución perturbada toma la forma

$$f_1 = \frac{-i}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \left( \frac{q}{m} (\mathbf{E}_1 \cdot \nabla_v f_0) + i \frac{2\mu_e}{m\hbar\omega} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1) (\mathbf{k} \cdot \nabla_v f_0) + \frac{2\mu_e}{\hbar\omega} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}_1) (\mathbf{k} \cdot \nabla_s f_0) - \frac{2\mu_e}{\hbar\omega} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{E}_1 \cdot \nabla_s f_0) \right). \quad (5.29)$$

Las ondas electrostáticas son producidas por la densidad de carga  $\rho$  la cual es dada por  $\rho = qn_0 \int f_1 d\mathbf{v} d\mathbf{s}$ , donde  $n_0$  es la densidad en equilibrio. Esta carga debe ser



usada en la ecuación de Poisson  $ik \cdot \mathbf{E}_1 = 4\pi\rho$  para obtener la relación de dispersión para los modos electrostáticos. Sin embargo, la integración de  $f_1$  en el espacio de velocidades y spin puede ser simplificada introduciendo una función de distribución unidimensional definida como

$$F_0(u, \mathbf{s}) \equiv \int f_0 \delta\left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{k}\right) d\mathbf{v}. \quad (5.30)$$

Podemos hacer uso de la Ec. (5.30) en la ecuación de Poisson para obtener la relación de dispersión para modos electrostáticos. Por simplicidad, escogemos  $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{B}_0 = 0$ , tal que  $\mathbf{E}_1 \cdot \nabla_s f_0 = 0$ . Definiendo las cantidades  $\mathbf{E}_\perp = \mathbf{k} \times \mathbf{E}_1/k$  y  $E_\parallel = \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1/k$ , la ecuación de Poisson se vuelve

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \int d\mathbf{s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u - \omega/k} \left[ 1 + i \frac{2\mu_e k^2}{q\hbar\omega} \left( \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}_\perp}{E_\parallel} \right) \right] \frac{\partial F_0}{\partial u} + \frac{\omega_p^2}{k} \left( \frac{2\mu_e m}{q\hbar\omega} \right) \int d\mathbf{s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{uk - \omega} \left( \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}_1}{E_\parallel} \right) \mathbf{k} \cdot \nabla_s F_0, \quad (5.31)$$

donde  $\omega_p$  es la frecuencia de plasma. Reconocemos la relación de dispersión clásica cuando despreciamos las correcciones debida al spin ( $\mu_e = 0$ ).

Hay dos integrales en la Ec. (5.31). Éstas deben ser evaluadas como integrales de contorno considerando la singularidad en  $u_\phi \equiv \omega/k$ . Éste es el origen del amortiguamiento de Landau. Las integrales son hechas numéricamente en general. Sin embargo, aquí estamos interesados en mostrar la contribución más simple al amortiguamiento. Con esto en mente, podemos hacer la aproximación para el caso de grandes velocidades de fase  $u_\phi$  (lo cual implica un amortiguamiento débil), donde el polo yace cerca del eje real  $u$ . En este caso,  $F_0$  y  $\partial F_0/\partial u$  son pequeños. Si  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$ , podemos despreciar la segunda integral. Por otro lado, despreciando las correcciones térmicas en la parte real de la frecuencia, encontramos que la primera integral viene

dada por [45]

$$\int ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u - \omega/k} \frac{\partial F_0}{\partial u} \simeq \frac{k^2}{\omega^2} + i\pi \left. \frac{\partial \tilde{F}_0}{\partial u} \right|_{u=u_\phi}, \quad (5.32)$$

donde  $\tilde{F}_0$  viene de 5.30, y es definida como

$$\tilde{F}_0(u) \equiv \int \tilde{f}_0 \delta \left( u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{k} \right) d\mathbf{v}. \quad (5.33)$$

Podemos poner la relación de dispersión en su forma final usando el valor de la integral (5.32), y definiendo el vector de spin como  $\mathbf{s} = (\hbar/2)\hat{s} = (\hbar/2)\hat{z}$ . De esta manera, obtendremos una solución aproximada de la relación de dispersión

$$1 \simeq \left[ 1 + \frac{ik^2 g \hbar}{4m\omega} \left( \frac{\hat{s} \cdot \mathbf{E}_\perp}{E_\parallel} \right) \right] \left( \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + i\pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{\partial \tilde{F}_0}{\partial u} \right), \quad (5.34)$$

donde  $\partial \tilde{F}_0 / \partial u$  son evaluados en  $u_\phi$ .

De la relación de dispersión anterior debemos encontrar la parte real e imaginaria de la frecuencia  $\omega$ . Hacer esto no es una tarea fácil. Sin embargo, podemos simplificar el problema ya que la contribución de la función de distribución y su derivada es pequeña cuando la velocidad de fase  $u_\phi$  es grande [45]. Suponiendo esto, podemos despreciar el términos  $\hbar(\omega_p^2/k^2)(\partial \tilde{F}_0/\partial u)|_{u=u_\phi}$ .

Para encontrar una solución para  $\omega$  supondremos que la solución de la Ec. (5.34) tiene una parte imaginaria que tiene el amortiguamiento clásico de Landau más una pequeña corrección debido al spin que debe ser encontrada. Usando esta suposición en (5.34), la frecuencia toma la forma

$$\omega = \omega_p \left( 1 + \frac{i\pi\omega_p^2}{2k^2} \left. \frac{\partial \tilde{F}_0}{\partial u} \right|_{u=u_\phi} \right) + \frac{ik^2 g \hbar}{8m} \left( \frac{\hat{s} \cdot \mathbf{E}_\perp}{E_\parallel} \right), \quad (5.35)$$

donde hemos despreciado los términos de orden  $\hbar^2$ .

Esta nueva corrección a la parte imaginaria debida al spin tiene la interesante propiedad de que contiene una contribución electromagnética a través de  $\hat{s} \cdot \mathbf{E}_\perp =$

$\hat{s} \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{E}_1$ . La interacción del spin con el campo magnético perturbado es el responsable de este tipo de contribución. El término imaginario de spin ( $\hat{s} \cdot \mathbf{E}_\perp / E_\parallel$ ) puede producir un amortiguamiento cuando su valor es negativo. Esto dependerá de la dirección de los campos. Sin embargo, este amortiguamiento será pequeño comparado con el de Landau para una distribución Maxwelliana (5.27). Por el contrario, cuando el nuevo término es positivo, encontramos una inestabilidad que también es pequeña comparada con el amortiguamiento de Landau.

Para ilustrar este nuevo amortiguamiento, consideremos la parte imaginaria  $\text{Im}(\omega/\omega_p)$  de la relación de dispersión (5.35). Si la función de distribución de equilibrio es Maxwelliana, la parte imaginaria puede reescribirse como

$$\text{Im} \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{y^3} \exp \left( -\frac{1}{y^2} - \frac{3}{2} \right) + y^2 \xi \chi, \quad (5.36)$$

con  $y = kv_e/\omega_p$ , donde  $v_e = \sqrt{2k_B T/m}$  es la velocidad termal, y donde hemos definido los parámetros  $\xi = g\hbar\omega_p/(2k_B T)$  y  $\chi = \hat{s} \cdot \mathbf{E}_\perp / E_\parallel$ . Es esperable que el efecto del spin sea importante bajo condiciones de altas densidades y bajas temperaturas. Considerando un escenario con temperaturas de  $10^5 \text{K}$  y densidades de  $10^{17} \text{kg/m}^3$ . Entonces, en este caso  $\xi \approx 10^{-5}$ . Con estos valores, en la Fig. 5.1 graficamos el amortiguamiento (5.36). Para representar este amortiguamiento, supondremos que  $\chi = -1$  para la elección de algún campo eléctrico. La línea continua es el amortiguamiento de Landau clásico, mientras la línea a trazos es el amortiguamiento con la corrección del spin. Podemos ver que el amortiguamiento debido al spin se vuelve importante sólo para grandes valores de  $k$ .

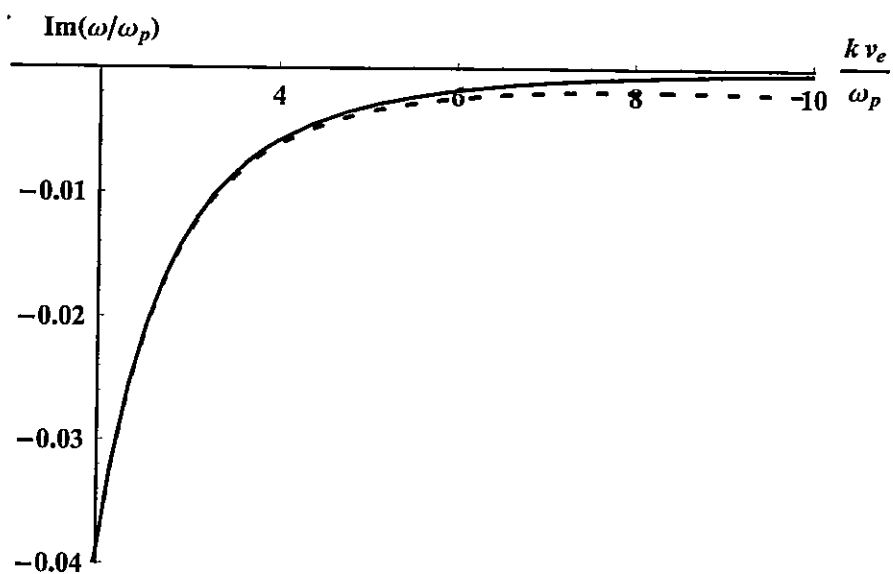


Figura 5.1: Amortiguamiento dado por la Ec. (5.36). La línea continua es el amortiguamiento clásico. El efecto del spin en el amortiguamiento es mostrado por la línea a trazos, el cual es importante para grandes valores de  $k$ .

## Capítulo 6

# Plasmas Cuánticos Relativistas

El desarrollo expuesto en el capítulo anterior es no relativista. No obstante, también fue posible introducir el spin, que es un efecto relativista, siguiendo la estrategia usual para estudiarlo en mecánica cuántica no relativista (Hamiltoniano de Pauli). Sin embargo, lo ideal sería tener un modelo completamente cuántico y completamente relativista, de modo que el spin no deba introducirse heurísticamente. Además, es de esperar que tal tratamiento permita estudiar nuevos fenómenos del mismo modo que sucede cuando reemplazamos la ecuación de Schrödinger por la ecuación de Dirac.

Existen enfoques que tratan este complejo problema usando teoría cinética, basados en la función de distribución covariante cuántica relativista de Wigner [113–116] para lograr una versión cuántica relativista de la ecuación de Vlasov. También se ha usado segunda cuantización en electrodinámica cuántica para construir modelos que describan un gas relativista degenerado de Fermi [117], o un plasma de partícula-antipartícula [118]. Además, se han obtenido resultados para plasmas cuánticos relativistas magnetizados y no magnetizados por medio de métodos cinéticos covariantes [119], donde se ha estudiado la relación entre la resonancia y la dispersión de las ondas [120]. Por otro lado, se han usado distribuciones isotrópicas relativistas para obtener la dispersión y disipación de ondas en este tipo de plasmas [121].

Todos los trabajos antes mencionados han estudiado plasmas cuánticos relativistas con herramientas de electrodinámica cuántica. Aquí, presentamos una nueva forma de estudiar este tipo de plasmas. El trabajo del presente capítulo tiene como finalidad construir una descripción de fluidos para plasmas cuánticos relativistas, lo que constituye una extensión natural de lo expuesto en las Secs. 5.1 y 5.2 para plasmas cuánticos con y sin spin. Nuestra estrategia será, siguiendo la discusión de las Secs. 5.1 y 5.2, construir una descripción de fluidos del plasma a partir de la ecuación de Dirac. Una consecuencia importante de esto es que, puesto que la ec. de Dirac describe tanto estados de partículas como de antipartícula, el fluido resultante será una mezcla de electrones y positrones, a diferencia de una descripción de fluido usual, en que un plasma de electrones y positrones es descrito por dos fluidos, uno para cada especie. Esa separación no es posible en mecánica cuántica relativista.

Lo primero consistirá en asociar unas variables relativistas tipo-fluido, que serán nuestros observables, a cada estado partícula-antipartícula, a través de los covariantes bilineales de la teoría de Dirac. Es posible hacer esto debido a que la ecuación de Dirac puede ser reescrita en una formulación de fluido. Este método fue desarrollado por T. Takabayasi [122–126]. A partir de esto, nosotros construiremos una teoría para  $N$ -cuerpos que dará un conjunto completo de ecuaciones covariantes. Así, obtendremos el grupo básico de ecuaciones de fluido para la dinámica de un plasma cuántico relativista formado por partículas con spin  $1/2$ . Para estudiar las implicancias de esta teoría, en este trabajo sólo pensaremos en plasmas de electrones y positrones.

## 6.1. La ecuación de Dirac

En esta sección construiremos una teoría de fluidos para plasmas que incorpore las naturalezas cuántica y relativista del electrón.

Para comenzar, consideremos la ecuación de Dirac [127-130] que describe un fermión de masa  $m$  y carga eléctrica  $e$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H\psi(\mathbf{r}, t), \quad (6.1)$$

donde el Hamiltoniano de Dirac es

$$H = -i\hbar c \hat{\alpha} \cdot \left( \nabla - \frac{ie}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) + \hat{\beta} m c^2 + V(\mathbf{r}). \quad (6.2)$$

Aquí,  $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  es un vector. En la representación standard,  $\alpha_i$  (con  $i = 1, 2, 3$ ) y  $\hat{\beta}$  son matrices  $4 \times 4$  constantes

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

donde  $\mathbf{0}$  y  $\mathbf{1}$  son la matriz cero y la matriz identidad respectivamente, ambas matrices  $2 \times 2$ . Además,  $\sigma_i$  representa las matrices de Pauli, dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Cada electrón (y en general cualquier fermión de spin 1/2) es representado por el bispinor  $\psi(\mathbf{r}, t)$  que puede ser escrito como

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

donde  $\varphi$  y  $\chi$  son cada uno spinores de dos componentes. Estos representan los dos posibles estados del spin para una partícula y una antipartícula. Es necesario subrayar que en  $\psi$  está implícito el acoplamiento partícula-antipartícula tan característico de los sistemas cuánticos relativistas.

Es posible reescribir la Ec. (6.1) de forma covariante, más adecuada para nuestros propósitos. De esta manera, la ecuación de Dirac es

$$\left( i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - \frac{e}{c} \gamma^\mu A_\mu - mc \right) \psi = 0, \quad (6.6)$$

donde  $\gamma^\mu$  son las llamadas matrices de Dirac y el campo electromagnético es representado por el cuadripotencial  $A_\mu$ . El índice  $\mu$  puede tomar los valores  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , donde por convención, el índice 0 indica la componente temporal del respectivo tensor, mientras los otros valores representan las componentes espaciales. A lo largo de este capítulo usaremos la convención de suma de Einstein, y los índices griegos (latinos) correrán siempre desde 0 a 3 (1 a 3). Además, usamos la métrica de Minkowski  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .

Las cuatro matrices  $4 \times 4$  de Dirac vienen dadas por [43]

$$\gamma^0 = \hat{\beta}, \quad \gamma^i = \hat{\beta}\hat{\alpha}_i. \quad (6.7)$$

Con las matrices de Dirac es posible construir una nueva matriz, independiente de las otras cuatro. Ésta es llamada comúnmente  $\gamma^5$ , y usualmente es definida como

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \gamma_5. \quad (6.8)$$

Las matrices de Dirac satisfacen la regla de anticonmutación

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

lo que implica que

$$(\gamma^i)^2 = - \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Por otro lado, la matriz  $\gamma^5$  es tal que  $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$ , y satisface

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0, \quad (\gamma^5)^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

## 6.2. Fluidización de la ecuación de Dirac para un solo estado partícula-antipartícula

A continuación construiremos una descripción de fluidos para la ecuación de Dirac. A este proceso le llamaremos "fluidización". Este método fue realizado por



vez primera por T. Takabayasi [122–126] en la década de los 50, antes de que fueran desarrollados los primeros trabajos sobre plasmas cuánticos. En pocas palabras, el proceso de fluidización de la ecuación de Dirac se basa en el uso de los covariantes bilineales para construir los observables de la teoría. A través de ellos es posible obtener un conjunto de ecuaciones cuya forma tiene la estructura de ecuaciones de fluido que describirán completamente el sistema. De manera similar, se han hecho fluidizaciones con el fin de obtener modelos hidrodinámicos de la ecuación de Weyl para neutrinos [131].

En las siguientes secciones haremos una revisión del procedimiento de fluidización utilizado por Takabayasi, para así desarrollar un mejor entendimiento del significado de las variables del fluido. Luego de esto, pasaremos a desarrollar por primera vez, el formalismo de fluido para  $N$  cuerpos de la ecuación de Dirac, para así construir nuestra teoría de plasmas cuánticos relativistas.

### 6.2.1. Covariantes bilineales

Partiremos de las ecuaciones de Dirac que obedecen los campos bispinoriales  $\psi$  y  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ . Por consiguiente, usaremos la ec. (6.6), pero reescritas de una manera que haga más fácil trabajar con ella. Para esto, haremos una redefinición de la carga y la masa (como el inverso de la longitud de onda de Compton), respectivamente, como

$$e \equiv \frac{e}{\hbar c}, \quad m \equiv \frac{mc}{\hbar}. \quad (6.12)$$

De esta manera, para los campos  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  interactuando con campos electromagnéticos, tenemos las ecuaciones de Dirac

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - e\gamma^\mu A_\mu \psi - m\psi = 0, \quad (6.13)$$

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + e\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu + m\bar{\psi} = 0. \quad (6.14)$$

Para construir la descripción de fluidos de la ecuación de Dirac, es necesario identificar los diferentes observables "tipo-fluido" de la teoría. Es esperable que estas variables sean tensores covariantes debido a la naturaleza de la teoría de Dirac. El camino más directo es tomar ventaja de la existencia de los 16 covariantes bilineales de la teoría.

Cualquier covariante bilineal es de la forma  $\bar{\psi}\Gamma^a\psi$ , donde  $\Gamma^a$  puede ser cualquiera de las matrices

$$\Gamma^S \equiv \hat{1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

$$\Gamma^P \equiv \gamma^5, \quad (6.16)$$

$$\Gamma^{V^\mu} \equiv \gamma^\mu, \quad (6.17)$$

$$\Gamma^{A^\mu} \equiv \gamma^\mu \gamma^5, \quad (6.18)$$

$$\Gamma^{T^{\mu\nu}} \equiv \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (6.19)$$

Los covariantes bilineales transforman bajo una transformación de Lorentz, respectivamente, como un escalar, un pseudoescalar, un cuadvectores, un pseudo cuadvectores, y un tensor de segundo rango. El conocimiento de las propiedades de transformación de estas cantidades es útil para construir formas invariantes de interacción de las partículas [129]. Las propiedades de los covariantes bilineales pueden ser encontrados en la literatura, en especial en la Ref. [128]. De esta manera, a partir los covariantes bilineales, todos los observables del fluido serán construidos como cantidades covariantes.

Es importante destacar que en esta teoría mostraremos que no existe una relación simple entre la velocidad del fluido y el momentum del fluido, lo que indica profundas diferencias entre esta teoría y otras solamente cuánticas o solamente relativistas. En la teoría de Dirac, la velocidad y el momentum no son equivalentes (y por lo tanto

tampoco lo serán en esta teoría de fluidos). Esto sucede porque la velocidad  $c\hat{x}$  de la teoría de Dirac no coincide con la velocidad de una partícula en el límite no relativista. Esta discrepancia se debe a lo que se conoce como *zitterbewegung* [127, 130, 132], el cual es el movimiento observado en el sistema de centro de masas de la partícula. Este efecto establece que el movimiento de la partícula se compone de un movimiento promedio (el cual coincide con su límite no relativista) más una oscilación muy rápida que asegura que si se pudiera hacer una medición instantánea de la velocidad del electrón, ésta sería la velocidad de la luz. De esta manera, en mecánica cuántica relativista, un electrón puede pensarse como una partícula puntual que existe dentro de una esfera con un volumen del orden del cubo de la longitud de onda de Compton, moviéndose con una velocidad instantánea igual a la velocidad de la luz, y con un momentum angular asociado al *zitterbewegung* al cual llamamos spin. Todas estas razones nos llevan a concluir que, en la teoría de Dirac, el momentum  $\mathbf{p}$  de una partícula no es paralelo, en general, a su velocidad  $\mathbf{v} \neq \mathbf{p}/m$ . Más aún, mientras  $\mathbf{p}$  es una cantidad conservada ( $[\mathbf{p}, H] = 0$ ), la velocidad no lo es ( $[\mathbf{v}, H] \neq 0$ ). Incluso hay indicios de que el spin (y su movimiento asociado, el *zitterbewegung*) es el responsable del comportamiento cuántico la naturaleza (ver Ref. [132] y sus citas), ya que es el *zitterbewegung* la causa de la estructura de la ecuación de Schrödinger.

Continuando con la fluidización de la ecuación de Dirac, multiplicamos la Ec. (6.13) por la izquierda por  $\bar{\psi}\Gamma^a$ , y a la vez multiplicamos la Ec. (6.14) por la derecha por  $\Gamma^a\psi$ . Sumando y restando ambas ecuaciones resultantes encontraremos las siguientes ecuaciones

$$i\bar{\psi}\Gamma^a\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\Gamma^a\psi - e\bar{\psi}\Gamma^a\gamma^\mu A_\mu\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\Gamma^a\psi = 0, \quad (6.20)$$

$$i\bar{\psi}\Gamma^a\gamma^\mu\partial_\mu\psi - i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\Gamma^a\psi - e\bar{\psi}\Gamma^a\gamma^\mu A_\mu\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\Gamma^a\psi - 2m\bar{\psi}\Gamma^a\psi = 0. \quad (6.21)$$

Las 32 ecuaciones (6.20) y (6.21) son nuestro punto de partida para lograr la fluidización. El objetivo es reescribir estas ecuaciones en términos de las variables de fluido. Estos observables, como ya dijimos, deben ser definidos como tensores covariantes de Lorentz. A continuación definiremos todas las variables necesarias para poner la ecuación de Dirac en una forma tipo fluido.

### 6.2.2. Variables del fluido

Empezaremos primero construyendo la densidad total de este "fluido". Usando el covariante bilineal de la identidad (6.15), definimos primero una densidad escalar

$$\Omega = \bar{\psi}\psi, \quad (6.22)$$

y de igual forma, usando el covariante lineal (6.16), definimos una densidad pseudoescalar

$$\bar{\Omega} = i\bar{\psi}\gamma_5\psi. \quad (6.23)$$

Ambas definiciones pueden parecer arbitrarias, pero la razón de su elección será clara más adelante. Con ambas densidades, es una elección lógica construir una cantidad escalar, que llamaremos densidad total del fluido  $\rho$ , como

$$\rho = \sqrt{\Omega^2 + \bar{\Omega}^2}. \quad (6.24)$$

De acuerdo a Takabayasi [122], es necesario definir un parámetro pseudoescalar  $\theta$  usando las densidades (6.22) y (6.23). Este parámetro se escoge de modo que

$$\tan \theta = \frac{\bar{\Omega}}{\Omega}. \quad (6.25)$$

Más adelante podrá apreciarse, a través de las ecuaciones de movimiento, que este parámetro del fluido representa en algún sentido la mezcla entre estados de

partícula-antipartícula inherente en la teoría de Dirac. En particular, cuando  $\theta = 0$  solamente existen partículas, y cuando  $\theta = \pi$  sólo podemos encontrar antipartículas. El hecho de que  $\theta$  sea distinto de cero en este modelo es lo que destruye la típica relación directa que existe entre la velocidad y el momentum de un fluido relativista [ver Ec. (6.62)].

Otros dos covariantes bilineales, (6.17) y (6.18), son usados para construir nuevas variables que usaremos en la fluidización. Definimos el vector

$$S_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi, \quad (6.26)$$

y el pseudovector

$$\bar{S}_\mu = \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi, \quad (6.27)$$

ambos relacionados con la cuadri-velocidad y la cuadri-densidad de spin del fluido respectivamente [ver Ecs. (6.47) y (6.48)]. La cantidad  $\bar{S}_\mu$  es conocida como corriente vectorial axial, y como veremos luego, no es una cantidad conservada. Además, es posible demostrar que  $S_\mu$  y  $\bar{S}_\mu$  son las corrientes de Noether bajo las transformaciones  $\psi \rightarrow e^{i\tau} \psi$  y  $\psi \rightarrow e^{i\tau \gamma^5} \psi$  respectivamente [128].

Por otro lado, usando el covariante bilineal (6.19), definimos el tensor

$$M^{\mu\alpha} = \bar{\psi} \sigma^{\mu\alpha} \psi, \quad (6.28)$$

y por otro lado, también podemos definir el pseudotensor

$$\bar{M}^{\mu\alpha} = i \bar{\psi} \gamma_5 \sigma^{\mu\alpha} \psi. \quad (6.29)$$

Por último, definiremos seis cantidades tensoriales. Éstas son un vector

$$J_\mu = \frac{1}{2m} \delta_\mu^* \Omega, \quad (6.30)$$

un pseudovector

$$\bar{J}_\mu = \frac{1}{2m} \delta_\mu^* \bar{\Omega}, \quad (6.31)$$

un tensor

$$T_\nu{}^\mu = \frac{1}{2m} \delta_\nu^* S^\mu, \quad (6.32)$$

un pseudotensor

$$\bar{T}_\nu{}^\mu = \frac{1}{2m} \delta_\nu^* \bar{S}^\mu, \quad (6.33)$$

un tensor de tercer rango

$$N_{\alpha, \mu\nu} = \frac{1}{2m} \delta_\alpha^* M^{\mu\nu}, \quad (6.34)$$

y finalmente, el correspondiente pseudotensor

$$\bar{N}_{\alpha, \mu\nu} = \frac{1}{2m} \delta_\alpha^* \bar{M}^{\mu\nu}. \quad (6.35)$$

Para las variables anteriores hemos definido los siguientes nuevos operadores de derivada

$$\begin{aligned} \delta_\mu (\bar{\psi} \Gamma^a \psi) &= i (\bar{\psi} \Gamma^a \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \Gamma^a \psi), \\ \delta_\mu^* (\bar{\psi} \Gamma^a \psi) &= \delta_\mu (\bar{\psi} \Gamma^a \psi) - 2e A_\mu \bar{\psi} \Gamma^a \psi. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Como puede verse, estos operadores corresponden a combinaciones de derivadas de covariantes bilineales.

### 6.3. Primer conjunto de ecuaciones

Con la ayuda de las definiciones anteriores y siguiendo la Ref. [122], seremos capaces de reescribir las Ecs. (6.20) y (6.21) como un conjunto de ecuaciones con una forma más parecida a una descripción de fluidos. En este conjunto, cada ecuación

es obtenida usando uno de los 16 covariantes bilineales combinadas para formar variables tipo-fluido.

Usando el covariante bilineal (6.15) en la Ec. (6.20) obtendremos

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = 0,$$

que luego de una sencilla álgebra, se puede reescribir en términos de la variable (6.26) como

$$\partial_\mu S^\mu = 0. \quad (6.37)$$

De igual manera, usando el covariante bilineal (6.16) en la Ec. (6.21) obtendremos la ecuación

$$i\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\psi - i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi - 2m\bar{\psi}\gamma^5\psi = 0,$$

que puede escribirse, usando las definiciones (6.23) y (6.27), como

$$\partial_\mu \bar{S}^\mu = -2m\bar{\Omega}. \quad (6.38)$$

Si ahora usamos el covariante bilineal (6.15) en la Ec. (6.21) y (6.16) en la Ec. (6.20) obtendremos, respectivamente,

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - 2eS^\mu A_\mu - 2m\Omega = 0,$$

$$i\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\psi - i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi - 2e\bar{S}^\mu A_\mu = 0,$$

que pueden reescribirse usando las definiciones (6.22), (6.32) y (6.33)

$$T_\mu^\mu = \Omega, \quad (6.39)$$

$$\bar{T}_\mu^\mu = 0. \quad (6.40)$$

Vemos ahora claramente la utilidad de las definiciones (6.22)-(6.35). Siguiendo con este procedimiento, podemos usar el covariante bilineal (6.17) en la Ec. (6.21) y el covariante bilineal (6.18) en la Ec. (6.20) para así obtener

$$-\bar{\psi}\sigma^{\alpha\mu}\partial_\alpha\psi + \partial_\alpha\bar{\psi}\sigma^{\mu\alpha}\psi + i\bar{\psi}\partial^\mu\psi - i\partial^\mu\bar{\psi}\psi - 2e\Omega A^\mu - 2mS^\mu = 0,$$

$$\partial_\alpha(\bar{\psi}\gamma^5\sigma^{\mu\alpha}\psi) + i(\bar{\psi}\gamma^5\partial^\mu\psi - \partial^\mu\bar{\psi}\gamma^5\psi) + 2ie\bar{\Omega}A^\mu = 0,$$

y en términos de las variables de tipo-fluido (6.26), (6.28), (6.29), (6.30) y (6.31), tendremos

$$\frac{1}{2m}\partial_\alpha M^{\mu\alpha} + J^\mu - S^\mu = 0, \quad (6.41)$$

$$\frac{1}{2m}\partial_\alpha \bar{M}^{\alpha\mu} - \bar{J}^\mu = 0, \quad (6.42)$$

respectivamente.

También podemos usar el covariante bilineal (6.17) en la Ec. (6.20) y (6.18) en la Ec. (6.21) para obtener respectivamente

$$i(\partial_\alpha\bar{\psi}\sigma^{\mu\alpha}\psi - \bar{\psi}\sigma^{\mu\alpha}\partial_\alpha\psi) + \partial^\mu\Omega + 2eM^{\mu\alpha}A_\alpha = 0,$$

$$\partial_\alpha\bar{\psi}\gamma^5\sigma^{\alpha\mu}\psi - \bar{\psi}\gamma^5\sigma^{\alpha\mu}\partial_\alpha\psi + \partial^\mu\bar{\Omega} + 2e\bar{M}^{\mu\alpha}A_\alpha - 2m\bar{S}^\mu = 0,$$

que pueden reescribirse de una forma más sencilla usando las definiciones (6.22), (6.23), (6.27), (6.34) y (6.35)

$$N_{\alpha,}{}^{\mu\alpha} - \frac{1}{2m}\partial^\mu\Omega = 0, \quad (6.43)$$

$$\bar{N}_{\alpha,}{}^{\mu\alpha} - \frac{1}{2m}\partial^\mu\bar{\Omega} + \bar{S}^\mu = 0, \quad (6.44)$$

respectivamente.

Y por último, si usamos el covariante bilineal (6.19) en la Ecs. (6.20) y (6.21), tendremos

$$-\frac{1}{2}\partial_\alpha(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\psi) - \frac{1}{2}\partial_\alpha(\bar{\psi}\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\psi) + i\delta^\nu S^\mu - i\delta^\mu S^\nu - 2ieS^\mu A^\nu + 2ieS^\nu A^\mu = 0,$$



$$i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\bar{\psi}\gamma_\beta\gamma_5\partial_\alpha\psi - \partial_\alpha\bar{\psi}\gamma_\beta\gamma_5\psi) + \partial^\mu S^\nu - \partial^\nu S^\mu - 2e\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\alpha\bar{S}_\beta - 2mM^{\mu\nu} = 0,$$

respectivamente. Estas últimas ecuaciones finalmente toman la forma

$$T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = \frac{1}{2m}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\bar{S}_\beta, \quad (6.45)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\bar{T}_{\alpha\beta} = M^{\mu\nu} - \frac{1}{2m}(\partial^\mu S^\nu - \partial^\nu S^\mu). \quad (6.46)$$

Las ecuaciones (6.37)-(6.46) forman la descripción de fluidización de la ecuación de Dirac. Sin embargo, no tienen la estructura familiar de ecuaciones de fluido. Por lo tanto, usaremos nuevas variables, en las cuales la estructura de las ecuaciones de fluido será más evidente.

Construiremos una densidad de cuadrivelocidad tipo-fluido usando la definición (6.26) para  $S_\mu$ . Esta cuadri-velocidad será

$$v_\mu = \frac{1}{\rho}S_\mu. \quad (6.47)$$

En una manera análoga, usando (6.27), definimos, la cuadridensidad de spin

$$w_\mu = \frac{1}{\rho}\bar{S}_\mu. \quad (6.48)$$

Puede demostrarse, después de un tedioso trabajo algebraico, que ambas cantidades definidas anteriormente satisfacen las siguientes tres constricciones [133]:

$$v_\mu v^\mu = 1, \quad w_\mu w^\mu = -1, \quad v_\mu w^\mu = 0. \quad (6.49)$$

Adicionalmente, definiremos una nueva variable dinámica para este fluido cuántico relativista

$$k^\mu = \frac{1}{\rho^2}(\Omega J^\mu + \bar{\Omega}\bar{J}^\mu). \quad (6.50)$$

La definición de este cuadvivector  $k^\mu$  no es arbitraria. Más adelante mostraremos que corresponde al cuadrivector del momento del fluido.

El objetivo de esta sección es reescribir las relaciones antes obtenidas usando las nuevas variables tipo-fluido. Por ejemplo, es posible demostrar que si usamos el álgebra de los covariantes bilineales en (6.30) y (6.31) para escribir  $J^\mu$  y  $\bar{J}^\mu$  en términos de las nuevas variables que hemos definido, entonces  $k^\mu$  obedecerá la siguiente relación [122]:

$$\partial_\mu k_\nu - \partial_\nu k_\mu = \frac{-i}{2m} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} v_\alpha w_\beta (\partial_\mu v_\gamma \partial_\nu v_\delta - \partial_\mu w_\gamma \partial_\nu w_\delta) - \frac{e}{m} F_{\mu\nu}, \quad (6.51)$$

con  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ .

De igual manera, usando las nuevas variables y relaciones entre los covariantes bilineales [122], podremos reescribir  $T_{\mu\nu}$  de la Ec. (6.32) y  $\bar{T}_{\mu\nu}$  de la Ec. (6.33) como

$$T_{\mu\nu} = \rho k_\mu v_\nu - \frac{\rho}{2m} (\partial_\mu \theta w_\nu - i \varepsilon_{\nu\alpha\beta\lambda} v^\alpha w^\beta \partial_\mu v^\lambda), \quad (6.52)$$

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \rho k_\mu w_\nu - \frac{\rho}{2m} (\partial_\mu \theta v_\nu - i \varepsilon_{\nu\alpha\beta\lambda} v^\alpha w^\beta \partial_\mu w^\lambda). \quad (6.53)$$

Con todas estas nuevas definiciones, el anterior conjunto de ecuaciones (6.37)-(6.46) puede ser reemplazado por un grupo de ecuaciones que representa de mucho mejor manera a un fluido cuántico relativista [122-125]:

$$\partial_\mu (\rho v^\mu) = 0 \quad (6.54)$$

$$\partial_\mu (\rho w^\mu) = -2m\rho \sin \theta \quad (6.55)$$

$$\partial_\mu \theta w^\mu - 2m k_\mu v^\mu - i \varepsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} v^\alpha w^\beta \partial^\mu v^\lambda = -2m \cos \theta \quad (6.56)$$

$$\partial_\mu \theta v^\mu - 2m k_\mu w^\mu - i \varepsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} v^\alpha w^\beta \partial^\mu w^\lambda = 0 \quad (6.57)$$

$$v_\nu \partial^\nu (\rho v_\mu) - w_\nu \partial^\nu (\rho w_\mu) = \partial_\mu \rho - \rho w^\alpha \partial_\nu v_\alpha (v^\nu w_\mu - v_\mu w^\nu) + 2im\rho \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} v^\nu w^\alpha k^\beta \quad (6.58)$$

$$v^\nu \partial_\nu w^\mu = w_\nu (\partial^\nu v^\mu - \partial^\mu v^\nu) + i g^{\mu\beta} \varepsilon_{\beta\nu\kappa\lambda} v^\nu w^\kappa \partial^\lambda \theta \quad (6.59)$$

Estas ecuaciones son obtenidas ocupando relaciones entre los covariantes bilineales que son detalladas en [122] y que no es nuestra intención reproducirlas aquí. Sin embargo, a continuación diremos cuales son las maneras iniciales en que son derivadas.

La Ec. (6.54) viene directamente de reescribir la Ec. (6.37) en términos de la cuadri-velocidad (6.47). De modo similar, la Ec. (6.55) se obtiene a partir de la Ec. (6.38) usando la cuadri-densidad de spin (6.48).

Las ecuaciones (6.56) y (6.57) se obtienen usando las nuevas expresiones para  $T_{\mu\nu}$  y  $\bar{T}_{\mu\nu}$ , (6.52) y (6.53) respectivamente, en las ecuaciones (6.39) y (6.40). Además, podemos obtener la Ec. (6.58) multiplicando la Ec. (6.45) por  $\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}w^\lambda$ .

Por último, la Ec. (6.59) se obtiene multiplicando la Ec. (6.41) por  $\bar{\Omega}$  y restándola a la Ec. (6.42) multiplicada por  $\bar{\Omega}$ . Reescribiendo el resultado en términos de las nuevas variables obtenemos la ecuación deseada.

Si usamos las ecuaciones (6.43) y (6.44), para hacer  $\Omega \times (6.43) + \bar{\Omega} \times (6.44)$ , entonces obtendremos la Ec. (6.58). Otras combinaciones sólo darán ecuaciones dinámicas incluidas en el conjunto anterior de ecuaciones. De igual forma, es posible demostrar que la Ec. (6.46) producirá las ecuaciones (6.56), (6.58) y (6.59), bajo operaciones con diferentes covariantes bilineales. Por lo tanto, (6.43), (6.44) y (6.46) son equivalentes a las otras ecuaciones de la primera descripción tipo-fluido. Una descripción muy detallada de todas estas equivalencias se encuentra en la Ref. [122].

Podemos afirmar que las ecuaciones (6.54)-(6.59) son los distintos momentos  $\Gamma^a$  de la ecuación de Dirac, que han sido manipulados en términos de lo que son las variables covariantes tipo-fluido más convenientes. Aunque complicadas, estas ecuaciones representan solamente a una única partícula de Dirac<sup>1</sup>. Para obtener las ecuaciones

<sup>1</sup>Llamaremos partícula de Dirac a una partícula con spin cuya ecuación dinámica es la de Dirac,

de fluido convencionales, debemos tomar un promedio apropiado de ensembles, al igual que lo hecho en el capítulo anterior, pero esta vez para las partículas de Dirac. Con esto en mente, y con la promesa de que esto será hecho prontamente en la sección 6.6, seguiremos llamando al conjunto anterior, sólo por conveniencia, como “ecuaciones de fluido”.

Como el fluido está cargado, debemos sumar al conjunto anterior las ecuaciones de Maxwell para cerrar el sistema

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = -e\rho v^\mu. \quad (6.60)$$

La colección de las veinte ecuaciones, formada por (6.49), (6.51), (6.54)–(6.60), será llamado conjunto (I). El número total de ecuaciones independientes es veinte, ya que las ecuaciones (6.58) y (6.59) tienen dos ecuaciones linealmente independientes cada una. De esta forma, estas ecuaciones deben ser resueltas para las veinte variables

$$\rho, \theta, v^\mu, w^\mu, k^\mu, F^{\mu\nu}, \quad (6.61)$$

que describen a este fluido para un estado partícula-antipartícula.

Estas ecuaciones son covariantes y describen completamente el “fluido cuántico relativista”. Notemos que este sistema tiene una mayor complejidad con respecto a las teorías de fluidos tradicionales debido a las nuevas variables y sus diferentes acoplamientos. Esto es simplemente un reflejo de las profundas diferencias entre la teoría de Dirac y las teorías clásicas. Una de estas diferencias es el hecho de que la ecuación de Dirac es de primer orden, obligándonos a definir la velocidad de manera muy diferente a la usual, la cual no tiene una correspondencia directa con la velocidad relativista como se verá en el sección 6.7.

y que por lo tanto, tiene estados entrelazados de partícula-antipartícula.

## 6.4. Lagrangiano y tensor de energía-momentum

No es difícil mostrar que las ecuaciones (6.56)–(6.58) pueden ser resueltas para encontrar una solución para  $k^\mu$  de la forma

$$k^\mu = v^\mu \cos \theta - \frac{1}{2m} \partial_\alpha \theta (v^\alpha w^\mu - v^\mu w^\alpha) - \frac{i}{2m\rho} \varepsilon^{\mu\alpha\kappa\lambda} \partial_\alpha (\rho v_\kappa w_\lambda), \quad (6.62)$$

y de esta manera, podemos usar la Ec. (6.62) para substituir las Ecs. (6.56)–(6.58).

Hasta este momento, todas las ecuaciones anteriores han sido obtenidas reescribiendo la ecuación de Dirac en términos de las variables covariantes de “fluido”. No obstante, podemos usar un enfoque alternativo. Usaremos las leyes de conservación de la teoría para encontrar nuevas ecuaciones de evolución para la cuadvirvelocidad y la cuadvir densidad de spin. Para hacer esto, necesitaremos encontrar el tensor de energía-momento del “fluido” a partir del Lagrangiano simétrico  $\mathcal{L}$  de la teoría de Dirac

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi - \frac{1}{2} (i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + e\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu + \bar{\psi} m)\psi, \quad (6.63)$$

del cual, haciendo las variaciones apropiadas en los campos, obtendremos las ecuaciones de Dirac (6.13) y (6.14).

Definiendo el tensor de energía-momento como

$$\Theta_\nu{}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} D_\nu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} D_\nu^* \bar{\psi} - \delta_\nu{}^\mu \mathcal{L}, \quad (6.64)$$

donde la derivada  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ , y usando el Lagrangiano (6.63) encontramos que para este fluido cuántico relativista, el tensor de energía-momento es

$$\Theta_{\mu\nu} = mT_{\mu\nu} - \delta_\nu{}^\mu \mathcal{L}, \quad (6.65)$$

el cual es proporcional al tensor  $T_{\mu\nu}$  dado en (6.52). Sin embargo, cuando usamos las ecuaciones de movimiento, el Lagrangiano de Dirac<sup>2</sup> es  $\mathcal{L} = 0$ , y entonces, el tensor

<sup>2</sup>En el límite no relativista  $\mathcal{L} \neq 0$ , y el Lagrangiano corresponderá al de Pauli.

de energía-momento será

$$\Theta_{\mu\nu} = mT_{\mu\nu}. \quad (6.66)$$

Con el tensor de energía-momento del fluido (6.66) podemos demostrar que  $k^\mu$  es un tipo de cuadri-momentum efectivo del fluido. De la definición de  $\Theta_{\mu\nu}$  en (6.66), podemos deducir que

$$\Theta_{\mu\nu}v^\nu = m\rho k_\mu, \quad (6.67)$$

donde hemos usado las relaciones (6.49). En el sistema en reposo  $v^\nu = (1, 0, 0, 0)$ , entonces la ecuación anterior quedará en este sistema como

$$\Theta_{\mu 0} = m\rho k_\mu. \quad (6.68)$$

De esta manera, podemos ver que la energía del "fluido",  $\Theta_{00}$ , es igual a  $m\rho k_0$ , y su momentum  $\Theta_{i0}$  corresponde a  $m\rho k_i$ . Así, identificamos a  $k_\mu$  como el cuadri-momentum del "fluido". De esta forma, podemos ver explícitamente que el momentum (6.62) no es paralelo a la velocidad  $v^\mu$ . En el Apéndice B mostramos una descripción de la desigualdad entre momentum y velocidad.

## 6.5. Conjunto final de ecuaciones

Con las definiciones de la sección anterior, podemos construir nuestro conjunto final de ecuaciones para un fluido cuántico relativista

$$\partial_\mu(\rho v^\mu) = 0 \quad (6.69)$$

$$\partial_\mu(\rho w^\mu) = -2m\rho \sin \theta \quad (6.70)$$

$$v^\nu \partial_\nu w^\mu = w_\nu (\partial^\nu v^\mu - \partial^\mu v^\nu) + ig^{\mu\beta} \varepsilon_{\beta\nu\kappa\lambda} v^\nu w^\kappa \partial^\lambda \theta \quad (6.71)$$

$$k^\mu = v^\mu \cos \theta - \frac{1}{2m} \partial_\alpha \theta (v^\alpha w^\mu - v^\mu w^\alpha) - \frac{i}{2m\rho} \varepsilon^{\mu\alpha\kappa\lambda} \partial_\alpha (\rho v_\kappa w_\lambda) \quad (6.72)$$

$$\rho v^\nu \partial_\nu k_\mu = -\frac{e}{m} \rho F_{\mu\nu} v^\nu + \frac{1}{2m} \partial^\nu (\rho \partial_\mu \theta w_\nu - i \rho \varepsilon_{\nu\alpha\beta\lambda} v^\alpha w^\beta \partial_\mu v^\lambda) \quad (6.73)$$

$$\partial_\mu (\rho k^\mu w^\nu) = -\frac{e}{m} \rho w_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m} \partial_\mu (\rho \partial^\mu \theta v^\nu) - \frac{i}{2m} g^{\nu\lambda} \varepsilon_{\lambda\alpha\beta\gamma} \partial_\mu (\rho v^\alpha w^\beta \partial^\mu w^\gamma) \quad (6.74)$$

$$\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} v^\kappa w^\lambda \partial^\mu k^\nu = \frac{-i}{4m} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} v^\kappa w^\lambda v_\alpha w_\beta (\partial^\mu v_\gamma \partial^\nu v_\delta - \partial^\mu w_\gamma \partial^\nu w_\delta) - \frac{e}{2m} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} v^\kappa w^\lambda F^{\mu\nu} \quad (6.75)$$

Llamaremos conjunto (II) a las ecuaciones (6.49), (6.60), (6.69)-(6.75). La ecuación (6.73) corresponde a la ecuación de conservación para la cuadri-velocidad

$$\partial^\nu \Theta_{\mu\nu} = -e \rho v^\nu F_{\mu\nu}. \quad (6.76)$$

En el caso relativista pero no cuántico, esta ecuación corresponde a la Ec. (1.5).

De la misma manera, la ecuación (6.74) es la ecuación de conservación para la cuadridensidad de spin  $w^\mu$

$$m \partial^\mu \bar{T}_{\mu\nu} = -e \rho w^\mu F_{\mu\nu}. \quad (6.77)$$

donde  $\bar{T}_{\mu\nu}$  viene dado por (6.53). Es posible demostrar que la Ec. (6.77) tiene su origen a través de manipulaciones de la Ec. (6.51) [122].

La ecuación (6.75) es simplemente una ecuación escalar que se obtiene directamente de la Ec. (6.51) aplicando el operador  $\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} v^\kappa w^\lambda$  sobre ella. Las Ecs. (6.73)-(6.75) son equivalentes a la Ec. (6.51) [122].

Este nuevo conjunto contiene también veinte ecuaciones independientes, para las veinte variables desconocidas (6.61), debido a que (6.71) y (6.72) tienen sólo seis ecuaciones independientes, y (6.73) y (6.74) tienen solamente cinco ecuaciones independientes.

## 6.6. Teoría de fluidos para $N$ cuerpos en estado partícula-antipartícula

Hasta ahora hemos deducido las ecuaciones para un "fluido" cuántico relativista de un solo cuerpo en estado partícula-antipartícula. Ahora, nos concentraremos en la construcción de una teoría para el plasma cuántico relativista a través de la descripción de fluido para  $N$ -cuerpos. Hasta donde sabemos, esta descripción no ha sido desarrollada anteriormente. Para obtener la descripción de un fluido (es decir, sobre muchos cuerpos), debemos empezar definiendo nuestra función de onda para el sistema total.

Nuestro plasma cuántico relativista será descrito por la función de onda bispinorial para  $N$  cuerpos  $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ , la cual tiene  $4^N$  componentes. El spinor para  $N$ -cuerpos es la forma más sencilla para definir una función de onda de muchos cuerpos que permita una descomposición en estados de 1-partícula [130].

Como las partículas de spin semi entero obedecen la estadística de Fermi-Dirac, este bispinor de  $N$  cuerpos puede ser escrito en término de determinantes de Slater

$$\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_{\alpha_1}(\mathbf{r}_1) & \psi_{\alpha_1}(\mathbf{r}_2) & \dots & \psi_{\alpha_1}(\mathbf{r}_N) \\ \psi_{\alpha_2}(\mathbf{r}_1) & \psi_{\alpha_2}(\mathbf{r}_2) & \dots & \psi_{\alpha_2}(\mathbf{r}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{\alpha_N}(\mathbf{r}_1) & \psi_{\alpha_N}(\mathbf{r}_2) & \dots & \psi_{\alpha_N}(\mathbf{r}_N) \end{vmatrix}, \quad (6.78)$$

donde cada función de onda  $\psi(\mathbf{r})$  satisface la ecuación de Dirac para una partícula, y los subíndices  $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  representan el estado cuántico de la partícula de Dirac. Así, la función de onda  $\Psi$  es un determinante de Slater de  $N \times N$  para  $N$  estados de Dirac que obedece el principio de exclusión de Pauli y que es antisimétrico al intercambio de partículas. La función de onda generalizada es sólo exacta en el límite de partículas no interactuantes. Los campos electromagnéticos son campos externos. Esto es una aproximación que introducimos en la descripción de nuestro



fluido.

El bispinor de  $N$  cuerpos satisface una ecuación de Dirac generalizada

$$\mathbf{H}\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (6.79)$$

donde  $\mathbf{H}$  es la generalización a  $N$  partículas del Hamiltoniano de Dirac (6.2), y donde las matrices  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$  (6.3) deben ser generalizadas a matrices de  $4^N \times 4^N$  [130].

El Hamiltoniano  $\mathbf{H}$  para muchos cuerpos es inmanejable debido las distintas interacciones entre partículas. Si despreciamos las interacciones entre las partículas, el Hamiltoniano  $\mathbf{H}$  podrá escribirse como

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^N H_i, \quad (6.80)$$

donde  $H_i$  es el Hamiltoniano para cada partícula (6.2), con sus respectivas matrices que actuarán sobre la partícula  $i$ .

De igual forma, la función de onda generalizada (6.78) puede escribirse como una combinación de determinantes de Slater. Esta combinación tendrá implícita la estadística de Fermi-Dirac. En una primera aproximación, cuando usamos esta combinación de determinantes junto a la suma (6.80), la ecuación de Dirac para  $N$  cuerpos (6.79) es descompuesta en  $N$  ecuaciones de Dirac  $H_j \psi_{\alpha_j} = i\hbar \partial_t \psi_{\alpha_j}$  para  $j = 1, \dots, N$  [ecuaciones (6.1) o (6.6)], donde cada partícula de Dirac es descrita por el spinor de cuatro componentes  $\psi_{\alpha}$ .

Sin embargo, al hacer esta descomposición hemos perdido la información de la estadística. Volveremos a introducir la estadística del sistema a través de probabilidades de estado que usaremos para hacer promedios sobre muchos cuerpos. Así podremos estudiar el complicado sistema de  $N$  partículas de Dirac de manera más sencilla, y obtendremos las cantidades macroscópicas del fluido a partir de las variables para una sola partícula de Dirac.

Construiremos las cantidades macroscópicas como promedios sobre cada cantidad microscópica de la partícula. Esto es llamado promedio de ensembles, y fue lo que hicimos en el capítulo anterior para obtener las descripciones de fluido de plasmas cuánticos con y sin spin. Definimos una probabilidad  $p_\alpha$  que está relacionada al spinor  $\psi_\alpha$  en el estado cuántico  $\alpha$ . Esta probabilidad dependerá de la naturaleza del ensemble usado (en este caso, Fermi-Dirac), pero ninguna expresión explícita para  $p_\alpha$  es necesaria para nuestros cálculos; todo lo que necesitamos es la existencia implícita de un ensemble adecuado.

Para empezar, definimos la densidad  $n$  del fluido como

$$n = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \rho_{\alpha}, \quad (6.81)$$

que siempre será medida en el sistema de referencia en reposo. Notemos que ahora, ésta es una cantidad macroscópica del fluido.

El promedio de ensembles para cualquier cantidad  $x_{\alpha}^{\mu}$  es definido como

$$X^{\mu} = \langle x_{\alpha}^{\mu} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{\alpha} p_{\alpha} \rho_{\alpha} x_{\alpha}^{\mu}. \quad (6.82)$$

Con esta notación, la cuadrivelocidad macroscópica del fluido es

$$U^{\mu} = \langle v_{\alpha}^{\mu} \rangle, \quad (6.83)$$

y la cuadridensidad total de spin será

$$W^{\mu} = \langle w_{\alpha}^{\mu} \rangle. \quad (6.84)$$

Junto a las definiciones anteriores, también definiremos la desviación de la cuadrivelocidad microscópica y la desviación de la cuadridensidad microscópica de spin como

$$z_{\alpha}^{\mu} = v_{\alpha}^{\mu} - U^{\mu}, \quad s_{\alpha}^{\mu} = w_{\alpha}^{\mu} - W^{\mu}. \quad (6.85)$$

Ambas cantidades cumplen que  $\langle z_\alpha^\mu \rangle = 0$  y  $\langle s_\alpha^\mu \rangle = 0$ .

Con todas estas nuevas definiciones macroscópicas, podemos hacer los promedios de ensemble a nuestro conjunto (II) de ecuaciones. Sustituyendo  $k^\mu$  de la Ec. (6.72) en las demás ecuaciones del conjunto, y tomando el promedio de ensemble, finalmente tendremos el siguiente conjunto de ecuaciones covariantes que ahora describen completamente al fluido ya que incluye la dinámica de muchos cuerpos. Éstas son

$$\partial_\mu(nU^\mu) = 0, \quad (6.86)$$

$$\partial_\mu(nW^\mu) = -2mn\langle \sin \theta \rangle, \quad (6.87)$$

$$\begin{aligned} U^\nu \partial_\nu W^\mu &= W_\nu (\partial^\nu U^\mu - \partial^\mu U^\nu) + ig^{\mu\beta} \varepsilon_{\beta\nu\kappa\lambda} U^\nu W^\kappa \langle \partial^\lambda \theta_\alpha \rangle - \langle v^\nu \partial_\nu s^\mu \rangle + \\ &+ \langle w_\nu (\partial^\nu z^\mu - \partial^\mu z^\nu) \rangle + ig^{\mu\beta} \varepsilon_{\beta\nu\kappa\lambda} (\langle v^\nu s^\kappa \partial^\lambda \theta \rangle + \langle z^\nu \partial^\lambda \theta \rangle W^\kappa), \end{aligned} \quad (6.88)$$

$$\begin{aligned} \langle \cos \theta \rangle U^\mu \partial_\mu W^\nu &= \frac{e}{m} W_\mu F^{\nu\mu} - \left\langle \frac{i}{2m\rho} g^{\nu\lambda} \varepsilon_{\lambda\alpha\beta\gamma} \partial_\mu (\rho v^\alpha w^\beta \partial^\mu w^\gamma) \right\rangle + \\ &+ \left\langle \frac{1}{2m\rho} \partial_\mu (\rho \partial^\mu \theta v^\nu + \rho w^\nu \partial_\alpha \theta (v^\alpha w^\mu - v^\mu w^\alpha) + i w^\nu \varepsilon^{\mu\alpha\kappa\lambda} \partial_\alpha (\rho v_\kappa w_\lambda)) \right\rangle \\ &- \langle \cos \theta z^\mu \partial_\mu w^\nu \rangle - U^\mu \langle \cos \theta \partial_\mu s^\nu \rangle + \langle \sin \theta w^\nu v^\mu \partial_\mu \theta \rangle, \end{aligned} \quad (6.89)$$

$$\begin{aligned} \langle \cos \theta \rangle U^\nu \partial_\nu U_\mu &= -\frac{e}{m} F_{\mu\nu} U^\nu + \frac{1}{2m} \langle v^\nu \partial_\nu (\partial_\alpha \theta (v^\alpha w_\mu - v_\mu w^\alpha)) \rangle + \langle \sin \theta v_\mu v^\nu \partial_\nu \theta \rangle + \\ &+ \frac{i}{2m} \left\langle v^\nu \partial_\nu \left( \frac{1}{\rho} g_{\mu\beta} \varepsilon^{\beta\alpha\kappa\lambda} \partial_\alpha (\rho v_\kappa w_\lambda) \right) \right\rangle - \langle \cos \theta z^\nu \partial_\nu v_\mu \rangle - \\ &- U^\nu \langle \cos \theta \partial_\nu z_\mu \rangle + \left\langle \frac{1}{2m\rho} \partial^\nu (\rho \partial_\mu \theta w_\nu - i \rho \varepsilon_{\nu\alpha\beta\lambda} v^\alpha w^\beta \partial_\mu v^\lambda) \right\rangle, \end{aligned} \quad (6.90)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} \langle v^\kappa w^\lambda \partial^\mu k^\nu \rangle &= \frac{-i}{4m} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \langle v^\kappa w^\lambda v_\alpha w_\beta (\partial^\mu v_\gamma \partial^\nu v_\delta - \partial^\mu w_\gamma \partial^\nu w_\delta) \rangle - \\ &- \frac{e}{2m} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} \langle v^\kappa w^\lambda \rangle F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (6.91)$$

donde los subíndices  $\alpha$  de los promedios de ensembles han sido omitidos por simplicidad. Notemos que existen muchos términos que tienen una suma implícita sobre todos los estados cuánticos del ensemble. Además de esta dinámica interna, el plasma está acoplado a los campos electromagnéticos macroscópicos a través de las ecuaciones de Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -enU^\nu. \quad (6.92)$$

El grupo de ecuaciones (6.86)–(6.92) da una descripción completa (sobre un promedio de muchos cuerpos) para un plasma cuántico relativista covariante. Aquí, la velocidad y la densidad de spin aparecen muy mezcladas en las ecuaciones. Esto nos muestra cuán fuertemente acoplados están la velocidad y el spin en un fluido como éste.

Las ecuaciones (6.86)–(6.92) son las que usaremos para encontrar correcciones a distintos modos de propagación debido a los efectos cuánticos relativistas de los constituyentes del plasma. Además, la teoría aquí desarrollada puede ser aplicada a plasmas bajo condiciones extremas. Pensamos que es posible aplicarla a modelos de estrellas de neutrones [2, 21, 134], a agujeros negros [135, 136] o modelos cosmológicos donde el universo es modelado como si se compusiera de fluidos con spin [137].

## 6.7. Límite no relativista

Ya que el límite no relativista de la ecuación de Dirac es la ecuación de Pauli, deberíamos esperar que la teoría expuesta en la sección 6.6 tenga el límite no relativista correcto para una descripción de fluido de la teoría de Pauli. Esta descripción, para plasmas cuánticos con spin, ha sido estudiada por Marklund y Brodin [93, 94], y fue detallada en el capítulo 5. En estos plasmas, el spin de las partículas (no hay antipartículas) tiene un efecto en la evolución de la velocidad del fluido, y además

tiene su propia evolución.

Tomar el límite en las ecuaciones finales (6.86)–(6.91) para el plasma cuántico relativista sería muy complejo. Es más sensato tomar el límite en las ecuaciones de fluidización de la ecuación de Dirac (para una sola partícula de Dirac) y comparar ese resultado con las ecuaciones de fluidización de la ecuación de Pauli [93]. Si las ecuaciones microscópicas son iguales, entonces también lo serán las ecuaciones macroscópicas de fluido, ya que la forma de hacer promedios de ensembles es estándar.

No obstante, tomar el correspondiente límite no es un asunto trivial debido a que, en la mecánica cuántica relativista, la velocidad no es paralela al momentum. Esto quiere decir que la velocidad de una partícula definida en (6.47) no da la velocidad no relativista en el límite correspondiente. Básicamente, esto se debe al efecto *zitterbewegung* [127, 130, 132] del cual ya nos hemos referido anteriormente. Por lo tanto, la variable dinámica a considerar en el límite no relativista es el momentum.

Más adelante, estudiaremos el límite no cuántico usando una descripción vectorial de las ecuaciones de movimiento.

### 6.7.1. Límite no relativista de las variables de fluido

El límite no relativista de esta teoría ha sido estudiado en la Ref. [97], y en estas últimas secciones sólo daremos una guía de como obtenerlo. Es bien conocido que en la teoría de Dirac el límite no relativista de una partícula, representada por el bispinor

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (6.93)$$

se obtiene cuando se impone la condición sobre el spinor [127].

$$\chi = \frac{\sigma \cdot \pi}{2mc} \phi \ll \phi, \quad (6.94)$$

donde  $\pi = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$  es el momentum invariante de gauge. Esto significa que, en este límite, la componente para antipartículas es despreciable.

Usaremos esta condición en las definiciones de las variables de fluido. Usando la representación (6.93) para el bispinor y la definición (6.8) para  $\gamma_5$ , entonces la cantidad escalar  $\bar{\Omega} = i\bar{\psi}\gamma^5\psi$ , definida en (6.23), quedará como  $\bar{\Omega} = i\phi^\dagger\chi - i\chi^\dagger\phi$ . Considerando la condición no relativista (6.94) sobre  $\chi$ , tendremos que

$$\bar{\Omega} \approx 0.$$

De igual manera, la cantidad escalar  $\Omega = \bar{\psi}\psi$ , definida en (6.22), puede escribirse como  $\Omega = \phi^\dagger\phi - \chi^\dagger\chi$ . Usando la condición (6.94) obtendremos

$$\Omega \approx \phi^\dagger\phi,$$

y por lo tanto, el límite no relativista de la densidad total del fluido  $\rho$ , definida en (6.24), será

$$\rho = \sqrt{\Omega^2 + \bar{\Omega}^2} \approx \phi^\dagger\phi, \quad (6.95)$$

la cual coincide con la densidad del fluido definida en la fluidización de la ecuación de Pauli [93, 97].

Por otro lado, de los resultados anteriores podemos ver que en límite no relativista, el parámetro  $\theta$ , definido en (6.25), se vuelve nulo

$$\tan \theta = 0, \quad \theta = 0.$$

Así, de la ecuación (6.70), el spin satisfecerá una ecuación de conservación  $\partial_\mu(\rho w^\mu) = 0$ . Ahora calcularemos el límite no relativista para la cuadrivelocidad  $v^\mu$  definida en (6.47). Usando (6.93) y las matrices  $\gamma^\mu$ , dadas en (6.7), las expresiones no relativistas para las componentes temporal y espaciales de la velocidad son

$$v_0 = \frac{1}{\rho} (\phi^\dagger\phi + \chi^\dagger\chi) \approx 1,$$

$$v_k = \frac{1}{\rho} (\phi^\dagger \sigma^k \chi + \chi^\dagger \sigma^k \phi) \approx \frac{1}{mc\rho} (\sigma \cdot \pi) \phi^\dagger \sigma^k \phi \ll 1.$$

Podemos hacer lo mismo para la cuadridensidad de spin  $w^\mu$  definida en (6.48). Así obtendremos que, en el límite no relativista, las componentes temporal y espaciales son, respectivamente,

$$w_0 = \frac{1}{\rho} (\phi^\dagger \chi + \chi^\dagger \phi) \approx \frac{1}{mc} (\sigma \cdot \pi) \ll 1,$$

$$w_k = \frac{-1}{\rho} (\phi^\dagger \sigma^k \phi + \chi^\dagger \sigma^k \chi) \approx \frac{-1}{\rho} \phi^\dagger \sigma^k \phi = -\Sigma_k,$$

donde  $-\Sigma_k$  es la distribución clásica de spin para la versión de fluidos de la ecuación de Pauli [93,97]. Es decir, de la definición de spin (5.14),

$$\mathbf{s}_k = \frac{\hbar}{2} \Sigma_k = -\frac{\hbar}{2} w_k. \quad (6.96)$$

Ahora fijémos nuestra atención en la definición (6.50) para el momentum  $k^\mu$ . Debido a que en este límite  $\bar{\Omega} = 0$  y  $\rho = \Omega$ , entonces

$$k^\mu = \frac{1}{\Omega} J^\mu. \quad (6.97)$$

Usando la definición de  $\bar{J}_\mu$  dada en (6.30), y el bispinor (6.93), tendremos

$$k_\mu = \frac{i}{2m\Omega} (\bar{\psi} \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \psi) - eA_\mu \approx \frac{i}{2m\Omega} (\phi^\dagger \partial_\mu \phi - \partial_\mu \phi^\dagger \phi) - eA_\mu, \quad (6.98)$$

que es exactamente la velocidad no relativista del fluido definida en [93, 94, 97, 98]. De esta manera, vemos que en este límite, son las componentes espaciales del cuadrimomentum  $k_\mu$ , y no de la cuadrivelocidad, las que se convierten en la velocidad no relativista. Esto se debe al *zitterbewegung*. Es por esto que al pasar a este límite debemos tener mucho cuidado en las variables que usamos en las ecuaciones. En este caso, debemos poner las ecuaciones en términos del momentum  $k^\mu$  en vez de

$v^\mu$ . Además, en el límite no relativista, la constricción (6.51) que satisface  $k^\mu$  se convierte automáticamente en la constricción para la velocidad no relativista dada en la Ref. [97].

Resumiendo, el límite no relativista se puede obtener en las ecuaciones haciendo  $v_0 = 1$ ,  $v_k \ll 1$ ,  $\theta = 0$ ,  $w_0 \ll 1$ , mientras que a  $w_k$  se le relaciona con el spin y se identifica a  $\rho$  y a  $k^\mu$  con la densidad no relativista y con la velocidad no relativista del fluido respectivamente.

### 6.7.2. Ecuación no relativista para la velocidad

Empezaremos por mostrar el límite no relativista para la ecuación de evolución de la velocidad. Antes es bueno recordar que, de acuerdo a nuestra definición (6.12), la carga es  $e \equiv e/\hbar$  y la masa es  $m \equiv m/\hbar$  ( $c = 1$ ).

Tomando el límite en la ecuación (6.72) para  $k^\mu$ , tenemos que las componentes espaciales  $j$  son

$$v_j = k_j - \frac{\hbar}{2m\rho} \varepsilon_{j\alpha\lambda} \partial_\alpha (\rho S^\lambda), \quad (6.99)$$

donde ahora hemos definido  $S^k = -iw^k$ , de modo tal que coincida con la definición no relativista de la densidad de spin dada en [97,98]. Podemos ver que la relación (6.99) permite reescribir la ecuación de conservación para  $v^\mu$  (6.69) como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_j (\rho k_j) = 0, \quad (6.100)$$

la cual es la ecuación de continuidad para un fluido clásico. Notemos que la Ec. (6.100) es equivalente a la ecuación de conservación para el cuádrimomentum  $k^\mu$  (B.3), desarrollada en el Apéndice B, cuando sólo existen partículas ( $\theta = 0$ ).

Por otro lado, la ecuación para la evolución de la velocidad (6.73) viene de la ecuación de conservación (6.76). Usando (6.99) en el lado derecho de esta ecuación,



el término  $-e\rho F_{i\nu}v^\nu$  producirá la fuerza de Lorentz no relativista  $e\rho F_{i\nu}k^\nu$ , y la fuerza debido al spin  $-(e\rho\hbar/2m)S^k\partial_i B_k$ .

Ahora tomaremos el límite no relativista del tensor de energía momento (6.66).

En este límite tendremos que

$$\Theta_{\mu\nu} = m\rho k_\mu v_\nu - \frac{\hbar}{2}\varepsilon_{\nu\lambda\beta}\partial_\mu(\rho S^\beta)v^\lambda. \quad (6.101)$$

Usando (6.99), el último término del lado derecho de (6.101) producirá el término  $\hbar^2/(4m\rho)\partial_\mu\rho\partial_\nu\rho$  el cual representa una de dos contribuciones al potencial de Bohm [97] [la otra contribución viene del Lagrangiano de Pauli  $\mathcal{L}_P$ , el cual tiene una contribución no nula en (6.65)]. Además obtendremos el término  $-\hbar^2/(4m)\rho\partial_\mu S^\beta\partial_\nu S^\beta$  que representa la interacción spin-spin.

Usando estos términos no relativistas para la fuerza de Lorentz y el tensor de energía-momentum (6.101), la ecuación de conservación (6.76) quedará como

$$\partial_j \left( m\rho k_i k_j + \frac{\hbar^2}{4m\rho}\partial_i\rho\partial_j\rho - \frac{\hbar^2}{4m}\rho\partial_i S^\beta\partial_j S^\beta - \delta_{ij}\mathcal{L}_P \right) = -e\rho F_{i\nu}k^\nu - \frac{e\rho\hbar}{2m}S^k\partial_i B_k. \quad (6.102)$$

De la Ec. (6.102) podemos seguir la Ref. [97] para encontrar que la ecuación de movimiento (6.102), y por lo tanto la ecuación microscópica (6.73), se convierte en la ecuación no relativista para una partícula encontrada en las Refs. [93, 94, 97].

### 6.7.3. Ecuación no relativista para el spin

Ahora, estudiaremos la ecuación de evolución para la densidad de spin. El límite no relativista de la Ec. (6.74) es

$$\frac{d}{dt}S^k = \frac{e}{m}S_i F^{ki} + \frac{\hbar}{2m\rho}\varepsilon_{k\beta\gamma}\partial_j(\rho S^\beta\partial_j S^\gamma),$$

que es la misma ecuación dinámica no relativista para el spin que es obtenida en [93, 94, 97], donde  $d/dt$  es la derivada total no relativista.

# Capítulo 7

## Descripción vectorial de las ecuaciones de fluido

En el capítulo anterior encontramos la descripción covariante para un plasma cuántico relativista dado por las ecuaciones (6.86)–(6.91). En este capítulo, reescribiremos este sistema en notación vectorial estándar. Esto nos servirá para poder comparar esta teoría con los límites no cuántico y no relativista, así como tener una mejor noción de las contribuciones cuánticas relativistas a las ecuaciones de fluido.

### 7.1. Variables vectoriales

Es natural definir la cuadrivelocidad macroscópica  $U^\mu$  como fue hecho en la Ec. (6.83). De esta manera, podemos reescribirla como

$$U^\mu = [\gamma_f, \gamma_f \mathbf{V}], \quad (7.1)$$

donde  $\gamma_f = \langle v^0 \rangle$  es el factor relativista que aparece debido a los promedios de ensembles y el vector de velocidad de fluido  $\mathbf{V}$  se define como

$$\mathbf{V}^j = \frac{\langle v^j \rangle}{\gamma_f}. \quad (7.2)$$

Usando la restricción  $v_\mu v^\mu = 1$  para la cuadrivelocidad (6.49), y la definición

(6.85) para  $z^\mu$ , es posible demostrar que la cuadrivelocidad macroscópica satisface

$$U_\mu U^\mu = \langle v_\mu \rangle \langle v^\mu \rangle = 1 - \langle z_\mu z^\mu \rangle, \quad (7.3)$$

la cual, combinada con la ecuación (7.1), produce la siguiente expresión para  $\gamma_f$ ,

$$\gamma_f = (1 - \mathbf{V}^2)^{-1/2} (1 - \langle z_\mu z^\mu \rangle)^{1/2}. \quad (7.4)$$

El factor  $\gamma_f$  es, por definición, el promedio de los factores relativistas de cada partícula. Resulta muy interesante que el factor  $\gamma_f$  no sólo tenga la dependencia usual en la velocidad  $\mathbf{V}$ , sino que también muestre un comportamiento colectivo a través del término tipo-presión  $\langle z_\mu z^\mu \rangle$ . Notemos que en las teorías de fluidos relativistas con temperatura, el factor relativista es corregido por la densidad de entalpía [13], lo cual se parece al término  $\langle z_\mu z^\mu \rangle$ . De esta manera, nuestra corrección al factor  $\gamma_f$  puede ser relacionada con la entalpía del sistema (y por lo tanto, con la temperatura).

Por otro lado, podemos definir una cuatricorrente macroscópica  $J^\mu = qnU^\mu$  de forma que  $J^\mu = \langle j^\mu \rangle$ , donde la cuatricorrente microscópica es  $j^\mu = qnv^\mu$  y la densidad  $n$  es siempre medida en el sistema en reposo.

Podemos reescribir la cuatri-densidad de spin macroscópica  $W^\mu$ , dada en (6.84), usando el mismo procedimiento anterior. Sea

$$W^\mu = \left( W^0, \frac{2}{\hbar} \mathbf{S} \right), \quad (7.5)$$

donde  $W^0 = \langle w^0 \rangle$ , y el spin del fluido es definido como

$$\mathbf{S}^k = \frac{\hbar}{2} \langle w^k \rangle. \quad (7.6)$$

Usando las mismas constricciones (6.49), es posible demostrar que la nueva cuatri-densidad de spin satisface

$$W_\mu W^\mu = -1 - \langle s_\mu s^\mu \rangle, \quad (7.7)$$

y, de igual manera, la constricción entre la cuadrivelocidad macroscópica y la cuadridentidad de spin macroscópica será

$$U_\mu W^\mu = -\langle z_\mu s^\mu \rangle. \quad (7.8)$$

Con las definiciones anteriores, estableceremos que  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{S}$  representan las cantidades macroscópicas del vector velocidad del fluido y su respectivo vector spin (ambos vectores son las componentes espaciales de los cuadvectores).

Ahora, estamos en condiciones de escribir nuestras ecuaciones para un plasma cuántico relativista en una forma vectorial. Por simplicidad, sólo mostraremos las ecuaciones dinámicas de la evolución de la velocidad y el spin, aunque podríamos escribir todas las ecuaciones macroscópicas de fluido de esta manera.

Como un ejemplo, la ecuación de continuidad (6.86) en notación vectorial quedará escrita como

$$\frac{\partial(n\gamma_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (n\gamma_f \mathbf{V}) = 0. \quad (7.9)$$

Por otro lado, podemos escribir la parte espacial de la ecuación para la cuadrivelocidad (6.90) como

$$mn \frac{d}{dt} (\gamma_f \mathbf{V}) = -\frac{en}{\langle \cos \theta \rangle} \gamma_f (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\langle \cos \theta \rangle} \nabla \cdot \Pi + \frac{1}{\langle \cos \theta \rangle} \mathbf{F}_Q, \quad (7.10)$$

donde hemos definido el operador de derivada total como

$$\frac{d}{dt} = \gamma_f \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_f \mathbf{V} \cdot \nabla. \quad (7.11)$$

Al término  $\Pi$  lo llamaremos tensor de presión cuántica relativista:

$$\Pi^{ij} = mn \langle \cos \theta z^i z^j \rangle. \quad (7.12)$$

En el límite no relativista ( $\theta = 0$ ), este tensor se reduce al tensor de presión definido en [93], y como es de esperarse, se reduce al conocido tensor de presión en el límite clásico.

El término  $F_Q/(n\langle\cos\theta\rangle)$  es la fuerza cuántica relativista que experimenta el plasma. Esta fuerza corresponde a todas las correcciones cuánticas relativistas de nuestra teoría. La componente  $k$ -ésima de  $F_Q$  viene dada por

$$\begin{aligned} F_Q^k = & -m\partial_0 \langle n\langle\cos\theta z^0 z^k\rangle \rangle + mn \left\langle \frac{1}{\rho} \partial_\nu (\rho \cos\theta z^\nu) z^k \right\rangle - mn \langle \cos\theta z^\nu \rangle \partial_\nu (\gamma_f \mathbf{V}^k) \\ & - mn U^\nu \langle \cos\theta \partial_\nu z^k \rangle + \frac{n}{2} \langle v^\nu \partial_\nu (\partial_\alpha \theta (v^\alpha w^k - v^k w^\alpha)) \rangle \\ & + \frac{in}{2} \left\langle v^\nu \partial_\nu \left( \frac{1}{\rho} \varepsilon^{k\alpha\beta\lambda} \partial_\alpha (\rho v_\beta w_\lambda) \right) \right\rangle + n \left\langle \frac{1}{2\rho} \partial^\nu (\rho \partial^k \theta w_\nu - i\rho \varepsilon_{\nu\alpha\beta\lambda} v^\alpha w^\beta \partial^k v^\lambda) \right\rangle \\ & + mn \langle \sin\theta v^k v^\nu \partial_\nu \theta \rangle, \end{aligned} \quad (7.13)$$

donde hemos omitido, por simplicidad, los subíndices ( $\alpha$ ) de los estados cuánticos de las partículas en los promedios de ensembles.

Podemos ver que la nueva fuerza cuántica relativista depende tanto de la velocidad, el spin y  $\theta$ , como de las interacciones entre ellas. Al escribir la ecuación (6.90) de la forma vectorial (7.10), hemos intentado aislar explícitamente las nuevas contribuciones cuánticas a la dinámica del momentum.

Igualmente, podemos escribir la parte espacial de la ecuación (6.89) de forma vectorial como

$$n \frac{d}{dt} \mathbf{S} = \frac{en}{m\langle\cos\theta\rangle} \left( \frac{\hbar}{2} W^0 \mathbf{E} + \mathbf{S} \times \mathbf{B} \right) - \frac{\hbar}{2m\langle\cos\theta\rangle} \nabla \cdot K + \frac{\hbar}{2\langle\cos\theta\rangle} \Xi_Q. \quad (7.14)$$

Al tensor  $K$  lo llamaremos acoplamiento spin térmico cuántico relativista, y viene dado por

$$K^{ij} = mn \langle \cos\theta z^i s^j \rangle, \quad (7.15)$$

el cual se reduce, en el límite no relativista, al resultado equivalente obtenido en [93].

El término  $\hbar \Xi_Q / (2 \langle \cos \theta \rangle)$  es la corrección no lineal cuántica relativista a la evolución del spin, donde la componente  $k$ -ésima de  $\Xi_Q$  viene dada por

$$\begin{aligned} \Xi_Q^k = & -\partial_0 (n \langle \cos \theta z^0 s^k \rangle) + n \left\langle \frac{1}{\rho} \partial_\nu (\rho \cos \theta z^\nu) s^k \right\rangle - \frac{2n}{\hbar} \langle \cos \theta z^\nu \rangle \partial_\nu \mathbf{S}^k \\ & - n U^\nu \langle \cos \theta \partial_\nu s^k \rangle + n \langle \sin \theta w^k v^\nu \partial_\nu \theta \rangle + \frac{n}{2m} \left\langle \frac{1}{\rho} \partial_\nu (\rho \partial^\nu \theta v^k) \right\rangle \\ & + \frac{in}{2m} \left\langle \frac{1}{\rho} \partial_\nu (w^k \varepsilon^{\nu\alpha\gamma\lambda} \partial_\alpha (\rho v_\gamma w_\lambda)) \right\rangle - \frac{in}{2m} \left\langle \frac{1}{\rho} g^{k\lambda} \varepsilon_{\lambda\alpha\beta\gamma} \partial_\nu (\rho v^\alpha w^\beta \partial^\nu v^\gamma) \right\rangle \\ & + \frac{n}{2m} \left\langle \frac{1}{\rho} \partial_\nu (\rho w^k \partial_\alpha \theta (v^\alpha w^\nu - v^\nu w^\alpha)) \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.16)$$

De la ecuación (7.14), podemos ver que en esta teoría, el spin puede acoplarse al campo eléctrico a través de la componente cero de la cuadridensidad de spin. No obstante, este acoplamiento desaparece en un formalismo no relativista donde  $W^0 = 0$ .

Nuestro modelo es diferente de cualquier otro para fluidos cuánticos. Como en los otros modelos, existe una fuerza cuántica en la ecuación de momentum y una corrección cuántica en la ecuación de evolución para el spin. Sin embargo, la principal diferencia aparece debido a que la ecuación de Dirac es una ecuación para estados de partícula-antipartícula. Lo anterior se ve reflejado como una renormalización de la masa y la presión debido a  $\theta$ . Este es un efecto puramente cuántico relativista y no tiene ningún análogo clásico.

Finalmente, cabe destacar que en este formalismo, el plasma consistente de partículas en estados partícula-antipartícula, es formulado como una teoría de un solo fluido, a diferencia de los formalismos clásicos (no cuánticos) donde los plasmas de electrones y positrones son formulados como teorías de dos fluidos independientes y no interactuantes entre ellos.

## 7.2. Límite no cuántico

El límite no cuántico de la teoría se puede obtener de la ecuación vectorial para la evolución de la velocidad (7.10). En este límite, el spin de las partículas no es considerado, y además,  $\hbar \rightarrow 0$  y  $\theta = 0$ . Esto nos lleva a despreciar la fuerza cuántica relativista (7.13) y la ecuación (7.10) queda como

$$mn\gamma_f \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) (\gamma_f \mathbf{V}) = -en\gamma_f (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot (mn \langle z^i z^j \rangle), \quad (7.17)$$

donde  $\gamma_f = \gamma_0 (1 - \langle z_\mu z^\mu \rangle)^{1/2}$  con  $\gamma_0 = (1 - \mathbf{V}^2)^{-1/2}$ .

Definiremos la función  $\kappa$  como

$$\kappa = (1 - \langle z_\mu z^\mu \rangle)^{1/2} = (1 - \langle z^0 z^0 \rangle + \langle z^i z^i \rangle)^{1/2}. \quad (7.18)$$

Si consideramos un medio isotrópico, entonces la ecuación (7.17) puede ser escrita como

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) (\gamma_0 \kappa \mathbf{V}) = -\frac{e}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{n\gamma_0} \frac{\nabla (n \langle z^i z^i \rangle)}{\kappa}. \quad (7.19)$$

Notemos que si identificamos a  $\kappa$  con la función  $f(T)$ , definida en (1.8) y relacionada con el concepto de densidad de entalpía, la Ec. (7.19) será muy similar a la ecuación (1.21). La única diferencia radica en el término de presión en (7.19). Esto se debe a que ambos formalismos no son completamente equivalentes. En la teoría relativista del Cap. 1, los términos de presión son introducidos a través del tensor de energía-momentum del fluido. En cambio, en esta teoría cuántica relativista, y en particular en este límite no cuántico, la presión aparece debido al promedio sobre muchas partículas.

En la definición (7.18) podemos notar que  $\kappa^2 \propto \langle z^i z^i \rangle$ . Entonces, cuando la densidad  $n$  es constante, podemos definir la presión  $p$  del fluido de tal modo que

$$\nabla p \propto mn \nabla \kappa. \quad (7.20)$$

La ecuación anterior es equivalente a la condición para un fluido relativista homogéneo (la entropía es una constante global) desde donde puede desprenderse de las ecuaciones (1.10) y (1.17) que

$$\nabla p = mn \nabla f. \quad (7.21)$$



## Capítulo 8

# Modos de propagación simples

Ya hemos encontrado la teoría necesaria para describir un plasma cuántico relativista en los capítulos anteriores. El plasma es descrito por veinte ecuaciones escritas en forma covariante. Asimismo, como fue señalado antes, el formalismo de fluido es muy distinto a cualquier otro clásico o relativista, debido a la naturaleza de la ecuación de Dirac, en la cual se basa.

Para tener una noción un poco más clara de cuáles son los nuevos efectos y correcciones a efectos conocidos que aparecen en esta teoría, será útil encontrar algunas soluciones de los modos de propagación de ondas en este plasma. No obstante, el sistema de ecuaciones covariantes descrito por el conjunto (6.86)–(6.92) es extremadamente complicado de resolver. Además de este hecho, el problema debe resolverse para las cuatro componentes de cada variable y deben también considerarse los promedios con un ensemble apropiado.

Es por esto que decidimos hacer algunas simplificaciones del sistema. Los modos que estudiaremos en este capítulo estarán restringidos a un espacio-tiempo plano. Por esto, resolveremos las ecuaciones vectoriales derivadas en el Cap. 7. Es decir, junto a la ecuación de continuidad, nuestra ecuación de movimiento para la velocidad será (7.10) y la ecuación para el spin es (7.14). De esta manera, mostraremos de una

forma más sencilla cuáles son los efectos más simples de este nuevo tipo de plasmas.

## 8.1. Solución simplificada para el spin

Lo primero será encontrar una solución de la Ec. (7.14) para el vector de spin.

Esta solución será encontrada haciendo las mismas simplificaciones que en la Ref. [94] para plasmas cuánticos. Nos enfocaremos en escalas de longitud del orden de o mayores al radio de Larmor de las partículas, lo cual implica que podemos despreciar los términos cuadráticos en  $w^{\mu}$ . Esto representa despreciar los términos de acoplamiento de la temperatura con el spin así como también el término cuántico (7.16). Buscaremos una solución estacionaria, tal que  $d\mathbf{S}/dt = 0$ , lo cual es equivalente a despreciar la inercia del spin para frecuencias menores a la frecuencia ciclotrónica. Creemos que estas suposiciones pueden ser aplicadas tanto a los plasmas cuánticos relativistas como a los solamente cuánticos en una primera aproximación.

Con estas suposiciones, la Ec. (7.14) quedará como

$$W^0 \mathbf{E} + \frac{2}{\hbar} \mathbf{S} \times \mathbf{B} = 0, \quad (8.1)$$

cuya solución para campos del tipo  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$  es

$$\mathbf{S} = -\frac{\hbar}{2} \left( \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} - W^0 \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2} \right), \quad (8.2)$$

donde hemos escogido el spin antiparalelo al campo magnético para minimizar la energía del momento magnético.

Es importante destacar que la solución (8.2) difiere de la solución "clásica" en el término de deriva del spin proporcional a  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . Su aparición se debe a la existencia de la componente temporal  $W^0$  del spin, que en el límite no relativista se anula, lo cual fue sugerido en la sección 6.7.

La solución (8.2) es la que utilizaremos a lo largo de este capítulo para encontrar distintos modos de propagación.

## 8.2. Modos electromagnéticos

En esta sección estudiaremos la propagación de una onda electromagnética. Empezaremos mostrando los efectos más básicos de la teoría para luego ir incorporando los efectos de la fuerza cuántica con más detalle.

### 8.2.1. Efecto cuántico relativista más simple

Para empezar, calcularemos el efecto más simple debido a esta teoría en la propagación de estas ondas. Para esto estudiaremos un plasma frío de electrones y positrones con  $\langle z^i z^j \rangle = 0$ , donde despreciaremos totalmente la fuerza cuántica relativista así como también la evolución del spin.

Recordando las definiciones (6.12),  $m \equiv m/\hbar$  y  $e \equiv e/\hbar$  ( $c = 1$ ), la ecuación (7.10) puede ser escrita como

$$mn \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) (\gamma \mathbf{V}) = - \frac{en}{\langle \cos \theta \rangle} \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (8.3)$$

donde  $\gamma = (1 - \mathbf{V}^2)^{-1/2}$ . El término  $1/\langle \cos \theta \rangle$  representa el acoplamiento entre partículas y antipartículas. Para una onda electromagnética,  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ , esta ecuación puede ser escrita para la parte transversal como

$$\frac{d}{dt} (\gamma \mathbf{V}_\perp) = \frac{e}{m \langle \cos \theta \rangle} \frac{d}{dt} \mathbf{A}_\perp. \quad (8.4)$$

Ahora supondremos que  $\theta$  es constante, es decir, sólo consideraremos cantidades constantes de partículas de Dirac, es decir, una concentración fija de partículas y antipartículas. Bajo esta suposición, la Ec. (8.4) quedará como

$$\gamma \mathbf{V}_\perp = \frac{e}{m \langle \cos \theta \rangle} \mathbf{A}_\perp. \quad (8.5)$$

Por otro lado, en el gauge de Lorentz, la ecuación de Maxwell para la parte transversal es

$$\partial_\mu \partial^\mu \mathbf{A}_\perp = -4\pi e n \gamma \mathbf{V}_\perp, \quad (8.6)$$

y usando la Ec. (8.5) obtendremos la ecuación de onda para  $\mathbf{A}_\perp$ :

$$\partial_\mu \partial^\mu \mathbf{A}_\perp = -\frac{4\pi e^2 n}{m \langle \cos \theta \rangle} \mathbf{A}_\perp. \quad (8.7)$$

Ahora definiremos la frecuencia de plasma  $\omega_p$  como

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2}{m} n \left\langle \frac{\Omega}{\rho} \right\rangle, \quad (8.8)$$

donde

$$n \left\langle \frac{\Omega}{\rho} \right\rangle \equiv \sum_\alpha p_\alpha \Omega_\alpha = \sum_\alpha p_\alpha \rho_\alpha \cos \theta_\alpha = n \langle \cos \theta \rangle, \quad (8.9)$$

debido a que  $\rho = (\Omega^2 + \bar{\Omega}^2)^{1/2} = \Omega(1 + \tan^2 \theta)^{1/2}$ . La definición para  $\omega_p$  no es arbitraria. Ésta se debe a que  $\sum_\alpha p_\alpha \Omega_\alpha$  es el promedio de la densidad escalar, el cual, en el límite no relativista, se convierte en la densidad usual de partículas. Pensamos que ésta es la mejor manera de definir la frecuencia de plasma. Otra forma de entender el argumento anterior es decir que la densidad de partículas  $n_e$  viene dada por

$$n_e = n \langle \cos \theta \rangle, \quad (8.10)$$

tal que la frecuencia de plasma se escriba como  $\omega_p^2 = (4\pi e^2 n_e)/m$ .

Finalmente, asumiendo que la onda electromagnética tiene una propagación de la forma  $\exp(ikz - i\omega t)$ , entonces la relación de dispersión, dada por la Ec. (8.7), es

$$\omega^2 = k^2 + \frac{\omega_p^2}{\langle \cos \theta \rangle^2}. \quad (8.11)$$

Aunque este resultado es muy simple, es particularmente útil para mostrar el alcance de esta teoría. Supongamos un plasma formado sólo por partículas (es decir, no hay antipartículas). En este caso  $\theta = 0$ , y la relación de dispersión (8.11)

quedará como la relación de dispersión clásica para una onda electromagnética en un plasma de electrones.

Consideremos un plasma de electrones-positrones. Como ya hemos mencionado otras veces anteriormente, el parámetro  $\theta$  nos permite establecer un tipo de concentración entre partículas y antipartículas. Cuando existen tantas partículas como antipartículas, entonces la densidad escalar  $\Omega$  y la densidad pseudoescalar  $\bar{\Omega}$  deben ser del mismo orden,  $\Omega \simeq \bar{\Omega}$ , y en este caso  $\tan \theta = 1$ . Entonces, cuando  $\theta = \pi/4$ , la relación de dispersión (8.11) será

$$\omega^2 = k^2 + 2\omega_p^2, \quad (8.12)$$

que es exactamente la relación de dispersión de una onda electromagnética en un plasma de electrones y positrones.

De esta manera, hemos recobrado resultados que a menudo se obtienen haciendo tratamientos "clásicos" de teorías con uno o dos fluidos, como en el caso de plasmas de  $e^-e^+$ . En nuestro tratamiento, en cambio, ambas componentes son descritas por un sólo fluido, de modo que un plasma de electrones, o un plasma con iguales densidades de electrones y positrones se obtienen como casos particulares. Pero nuestro modelo permite tratar, como un solo fluido, concentraciones relativas arbitrarias de electrones y positrones. Esto es esperable, ya que en la ec. de Dirac los estados de partícula y antipartícula están indisolublemente ligados.

Finalmente, trataremos un punto más sobre la relación de dispersión (8.11). El término  $\langle \cos \theta \rangle$  es siempre menor que 1, y por lo tanto, hara que el plasma sea menos transparente a la onda electromagnética. El origen de este efecto se debe solamente a la existencia de interacciones entre partículas y antipartículas a través del término  $1/\langle \cos \theta \rangle$ , y por lo tanto, es un fenómeno netamente cuántico relativista, sin una

contraparte clásica.

En la figura 8.1, podemos ver el efecto de menor transparencia que produce las interacciones entre partículas y antipartículas. Hemos graficado la frecuencia dada por la relación de dispersión (8.11), normalizada a  $\omega_p$ . La línea continua es para  $\theta = 0$ , que representa un plasma de electrones, la línea punteada es para  $\theta = \pi/4$  para un plasma de electrones-positrones en iguales concentraciones cuya dispersión viene dada por (8.12), y la línea a trazos es para una caso intermedio, escogido arbitrariamente como  $\theta = 3\pi/20$ .

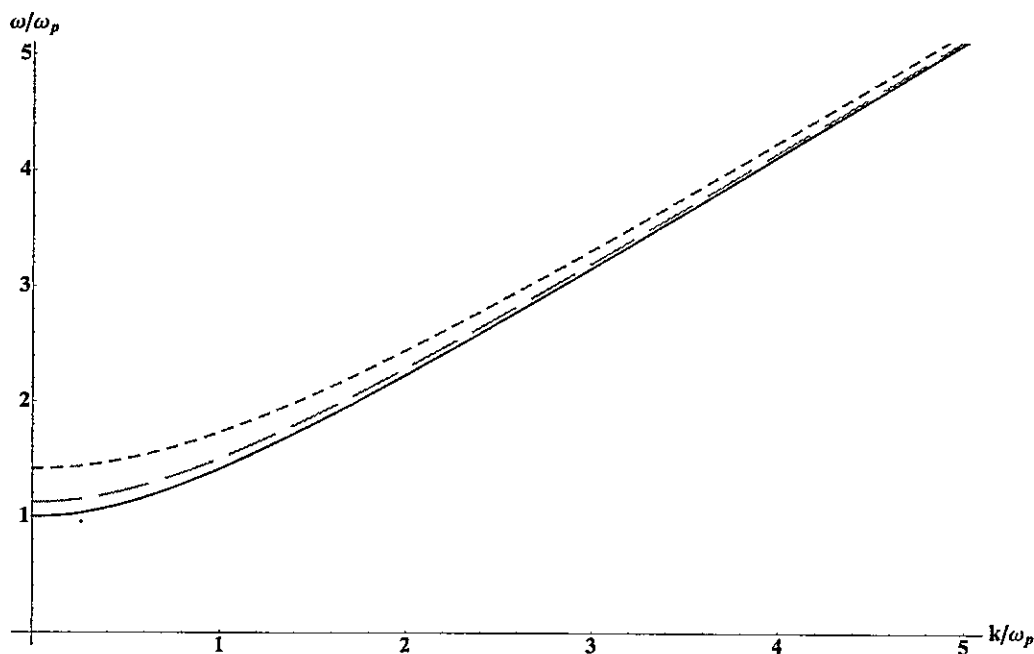


Figura 8.1: Disminución de la transparencia de la onda electromagnética cuya relación de dispersión viene dada por la Ec. (8.11). La línea continua es para  $\theta = 0$ , la línea a trazos es para  $\theta = 3\pi/20$  y la línea punteada es para  $\theta = \pi/4$ .

El efecto de la disminución progresiva de la transparencia podría ser medido experimentalmente con láseres de alta energía. Esto se podría estudiar midiendo la frecuencia de corte, llamada frecuencia de plasma efectiva, cuando la onda electromagnética

ya no es capaz de propagarse. A medida que el laser se volviera más intenso, esta frecuencia de plasma efectiva debería ir variando a medida que el sistema se vuelve menos transparente.

Este efecto podría ser relevante en modelos de primeros instantes del universo, cuando estaba compuesto de leptones en procesos de creación y aniquilación, en equilibrio con la radiación electromagnética. De acuerdo a nuestro resultado, los efectos cuánticos descritos por el factor  $\langle \cos \theta \rangle$  en (8.11) producirían una menor transparencia del plasma del universo temprano. Al disminuir la temperatura, el universo se volvió transparente a la radiación electromagnética, lo que tuvo consecuencia en la formación de la estructura a gran escala del universo actual.

### 8.2.2. Efecto de la temperatura

También podemos obtener una relación equivalente a (8.11) para plasmas con temperatura, bajo las mismas aproximaciones de la sección anterior. Para una onda electromagnética transversal en un plasma con temperatura, la relación de dispersion resulta ser

$$\omega^2 = k^2 + \frac{\omega_p^2}{(1 - \langle z_\mu z^\mu \rangle)^{1/2} \langle \cos \theta \rangle^2}, \quad (8.13)$$

donde el término  $(1 - \langle z_\mu z^\mu \rangle)^{1/2}$  viene del factor  $\gamma_f$  en (7.4) usado en la descripción vectorial. Este término puede ser relacionado con el factor  $f$  de la densidad de entalpía [13] en la sección 7.2.

### 8.2.3. Efecto del spin en la propagación electromagnética

Ahora incluiremos el efecto del spin (a través de la fuerza cuántica) en los modos de propagación electromagnética en un plasma cuántico relativista en el caso frío. Este plasma estará compuesto de electrones y positrones con masa  $m$ , sin incluir

el efecto de posibles iones. Esta onda se propaga en un medio donde no existe un campo magnético de fondo, es decir,  $\mathbf{B}_0 = 0$  (el caso  $\mathbf{B}_0 \neq 0$  se verá más adelante). Supondremos que las ondas se propagan con la forma  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$ , y el campo eléctrico y magnético satisfacen  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$  y  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$ , respectivamente.

Para encontrar las soluciones de propagación usaremos un tratamiento perturbativo a primer orden de las cantidades escalares y vectoriales definidas en el Cap. 7. De esta manera, la velocidad y la densidad del fluido son  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$  y  $n = n_0 + n_1$ , donde las cantidades constantes  $\mathbf{u}_0$  y  $n_0$  son la velocidad y la densidad a orden cero, y  $\mathbf{u}_1$  y  $n_1$  son las respectivas cantidades a primer orden. Estamos interesados en buscar soluciones que satisfagan  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 = 0$ ,  $\mathbf{u}_0 \times \mathbf{B} = 0$  y  $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_1 = 0$ . Esto nos permite tener un factor relativista  $\gamma_0 = (1 - \mathbf{u}_0^2)^{-1/2}$  constante<sup>1</sup>. Finalmente escogemos los campos electromagnéticos y las velocidades del fluido como

$$\mathbf{E} = E\hat{z}, \quad \mathbf{B} = B\hat{x}, \quad \mathbf{u}_0 = u_0\hat{x}, \quad \mathbf{u}_1 = u_y\hat{y} + u_z\hat{z}, \quad (8.14)$$

respectivamente. Esto nos dice que la propagación debe ser en la dirección  $\mathbf{k} = k\hat{y}$ .

Bajo estas suposiciones, la ecuación vectorial de movimiento para la velocidad (7.10), escrita a primer orden, queda como

$$\gamma_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\frac{e}{m\langle \cos \theta \rangle} \mathbf{E} + \frac{\hbar}{mn_0\gamma_0\langle \cos \theta \rangle} \mathbf{F}_Q \quad (8.15)$$

Podemos ver de la ecuación (8.15) que, además de los efectos cuánticos relativistas presentes a través del término  $\langle \cos \theta \rangle$ , efectos de spin aparecen a través de la fuerza  $\mathbf{F}_Q$  dada en (7.13).

Debido a la forma extremadamente complicada de la fuerza cuántica  $\mathbf{F}_Q$ , haremos algunas suposiciones que nos permitirán simplificarla. Primero, aunque sabemos que

<sup>1</sup>Al considerar el caso frío, el factor relativista  $\gamma_f$ , definido en (7.4), se vuelve el factor relativista usual.



$\theta$  es una variable dinámica del sistema, asumiremos que será constante, vale decir, que las variaciones de  $\theta$  no serán significativas en las escalas espaciales ni temporales que consideramos en este problema. Sabemos que ésta es una aproximación un tanto "burda", y que se hace impracticable para plasmas ultrarrelativistas, pero nos permite observar los aspectos más básicos de los efectos cuánticos relativistas independientes de la evolución de la mezcla de partículas-antipartículas. Bajo la suposición anterior, y despreciando además todos los efectos térmicos, consideraremos la componente espacial  $j$  de la fuerza cuántica como

$$\mathbf{F}_{Q^j} = \frac{in}{2} \left\langle v^\nu \partial_\nu \left( \frac{1}{\rho} \varepsilon^{j\alpha\beta\lambda} \partial_\alpha (\rho v_\beta w_\lambda) \right) \right\rangle - \frac{in}{2} \left\langle \frac{1}{\rho} \partial^\nu (\rho \varepsilon_{\nu\alpha\beta\lambda} v^\alpha w^\beta \partial^j v^\lambda) \right\rangle, \quad (8.16)$$

siendo ésta la principal contribución de los efectos cuánticos relativistas del spin. Reescribiendo los promedios de ensembles en términos de variables macroscópicas, esta fuerza queda como

$$\mathbf{F}_{Q^j} = \mathbf{F}_{Q_1^j} - \mathbf{F}_{Q_2^j}, \quad (8.17)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{Q_1^j} = & \frac{i}{2} U^\nu \partial_\nu \partial_\alpha (\varepsilon^{j\alpha\beta\lambda} n U_\beta W_\lambda) + \frac{i}{2} U^\nu \partial_\nu \partial_\alpha (\varepsilon^{j\alpha\beta\lambda} n \langle z_\beta w_\lambda \rangle) + \\ & + \frac{in}{2} \left\langle \frac{1}{\rho} z^\nu \partial_\nu \partial_\alpha (\varepsilon^{j\alpha\beta\lambda} \rho v_\beta w_\lambda) \right\rangle + \frac{in}{2} \left\langle v^\nu \partial_\nu \left( \frac{1}{\rho} \right) \partial_\alpha (\varepsilon^{j\alpha\beta\lambda} \rho v_\beta w_\lambda) \right\rangle, \end{aligned} \quad (8.18)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{Q_2^j} = & \frac{i}{2} \partial^\nu (\varepsilon_{\nu\alpha\beta\lambda} n U^\alpha W^\beta \partial^j U^\lambda) + \frac{i}{2} \partial^\nu (\varepsilon_{\nu\alpha\beta\lambda} n U^\alpha \langle w^\beta \partial^j z^\lambda \rangle) + \\ & + \frac{i}{2} \partial^\nu (\varepsilon_{\nu\alpha\beta\lambda} n \langle z^\alpha w^\beta \partial^j v^\lambda \rangle), \end{aligned} \quad (8.19)$$

donde hemos omitido todos los subíndices de los promedios por simplicidad.

La onda electromagnética previamente descrita se mueve en un plasma con  $\gamma_0$  constante y una densidad  $n_0$  constante, en cuyo caso la densidad microscópica  $\rho$  a orden cero también será constante. De esta manera, si despreciamos nuevamente todos los efectos térmicos que aparecen debido al promedio de ensembles, suponiendo que las partículas se desacoplan térmicamente ( $z_\alpha = 0$ ), y usando las direcciones para los campos electromagnéticos y de fluido (8.14), la componente espacial  $j$  de la fuerza cuántica (8.17) puede ser simplificada a

$$\begin{aligned} \frac{\hbar \mathbf{F}_Q^j}{mn_0\gamma_0\langle\cos\theta\rangle} &= \frac{i\gamma_0}{m\langle\cos\theta\rangle}\partial_0\left(\partial_0(\mathbf{S}\times\mathbf{u}_1)^j+(\nabla\times\mathbf{S})^j-\frac{\hbar}{2}(\nabla\times W^0\mathbf{u}_1)^j\right)+ \\ &+ \frac{i\gamma_0}{m\langle\cos\theta\rangle}(\partial_0(\mathbf{u}_1\cdot(\mathbf{S}\times\partial_j\mathbf{u}_1))-\nabla\cdot(\mathbf{S}\times\partial_j\mathbf{u}_1))+ \\ &+ \frac{i\gamma_0\hbar}{2m\langle\cos\theta\rangle}\nabla\cdot(W^0\mathbf{u}_1\times\partial_j\mathbf{u}_1), \end{aligned} \quad (8.20)$$

donde  $\mathbf{S}$  es la densidad de spin macroscópica definida en (7.6), y para el cual usaremos la solución (8.2) para su evolución. Con las elecciones de los campos (8.14), el spin macroscópico es

$$\mathbf{S} = -\frac{\hbar}{2}(\hat{x} - W^0\hat{y}). \quad (8.21)$$

Usando esta solución para el spin en la fuerza cuántica (8.20), podemos escribir la Ec. (8.15) linealizada usando la dependencia  $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t)$ . Así obtendremos las contribuciones de la fuerza cuántica a la ecuación de velocidad

$$\begin{aligned} -i\omega\gamma_0\mathbf{u}_1 &= -\frac{e}{m\langle\cos\theta\rangle}\mathbf{E} + \frac{i\hbar\gamma_0}{2m\langle\cos\theta\rangle}(\omega^2\hat{x}\times\mathbf{u}_1 - \omega(\omega+k)W^0(\hat{y}\times\mathbf{u}_1)) + \\ &+ \frac{i\hbar\gamma_0}{2m\langle\cos\theta\rangle}k^2[(\mathbf{u}_1\times\hat{x})\cdot\hat{y}]\hat{y}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

La Ec. (8.22) puede escribirse por componentes como

$$-i\omega\gamma_0u_y = -\frac{i\hbar\gamma_0}{2m\langle\cos\theta\rangle}(\omega^2 - k^2)u_z, \quad (8.23)$$

$$-i\omega\gamma_0 u_z = -\frac{e}{m\langle\cos\theta\rangle} E + \frac{i\hbar\gamma_0}{2m\langle\cos\theta\rangle} \omega^2 u_y, \quad (8.24)$$

las cuales pueden ser resueltas para  $u_z$  como

$$u_z = \frac{-ie}{m\omega\gamma_0\langle\cos\theta\rangle} E \left[ 1 + (\omega^2 - k^2) \left( \frac{\hbar}{2m\langle\cos\theta\rangle} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (8.25)$$

con una ecuación similar para  $u_y$ .

Por otro lado, de las ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (8.26)$$

donde  $\mathbf{J} = 4\pi en\gamma_0 \mathbf{u}_1$ . Linealizando (8.26) obtendremos

$$(\omega^2 - k^2)E = i\omega 4\pi en_0 \gamma_0 u_z, \quad (8.27)$$

y usando (8.25) encontramos la relación de dispersión para la onda electromagnética en un plasma cuántico relativista

$$\omega^2 - k^2 = \omega_p^2 \left( \langle\cos\theta\rangle^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2} (\omega^2 - k^2) \right)^{-1}, \quad (8.28)$$

donde  $\omega_p$  es la frecuencia de plasma definida en (8.8).

No es difícil darse cuenta de que la relación de dispersión (8.28) no tiene nuevos modos de propagación aparte de los electromagnéticos. Uno puede notar este hecho calculando sus soluciones, lo cual será hecho más adelante en este capítulo. Sin embargo, lo interesante de esta relación de dispersión es que existen dos efectos cuánticos relativistas en ella.

Si despreciamos  $\hbar$ , y por lo tanto el spin, recobramos la relación (8.11) para una onda electromagnética simple. Recalamos nuevamente que el término  $\langle\cos\theta\rangle$  es siempre menor que 1, y por lo tanto, produce una menor transparencia del plasma a la propagación de la onda electromagnética. Este efecto se debe a la existencia de

los estados partícula-antipartícula, y es un efecto netamente cuántico-relativista, sin una contraparte clásica.

Además, la interacción con el spin de cada partícula de Dirac introduce un nuevo término del orden de  $\hbar^2$ . Para entender cuál es el efecto producido por este término introduzcamos la longitud de onda de Compton  $\lambda_c = 2\pi\hbar/m$  y la longitud de onda  $\lambda = 2\pi/\omega$ . Ya que  $\lambda_c/\lambda = \hbar\omega/m$ , el efecto producido por el spin puede ser grande en algunos regímenes cuánticos especiales donde se cumpla que  $\lambda_c > \lambda$ . En estos casos,  $\hbar\omega/m > 1$ , y por lo tanto este efecto hará que la frecuencia de plasma efectiva sea menor, lo que se manifestará como una mayor transparencia en la propagación de la onda electromagnética. De esta manera, tenemos dos efectos opuestos, menor o mayor transparencia, que competirán entre ellos.

Concentrándonos en el estudio de las soluciones, podemos normalizar la frecuencia y el número de onda usando la frecuencia de plasma. Definiendo  $x = \omega/\omega_p$  e  $y = k/\omega_p$ , la relación de dispersión (8.28) quedará

$$x^2 - y^2 = \left( \langle \cos \theta \rangle^2 + \frac{x^2 - y^2}{\zeta} \right)^{-1}, \quad (8.29)$$

donde hemos definido la constante adimensional

$$\zeta = \frac{4m^2}{\hbar^2\omega_p^2}. \quad (8.30)$$

La solución de (8.29) para la frecuencia  $x$  puede ser calculada fácilmente. Encontramos las dos soluciones

$$x_{(\pm)}^2 = y^2 + \frac{\zeta \langle \cos \theta \rangle^2}{2} \left( \pm \sqrt{1 + \frac{4}{\zeta \langle \cos \theta \rangle^4}} - 1 \right). \quad (8.31)$$

La solución  $x_{(+)}$  representa la rama electromagnética usual con correcciones cuántico-relativas. La frecuencia  $x_{(-)}$  representa una nueva rama electromagnética.

Esta onda solo puede propagarse cuando la condición  $2y^2 > \zeta \langle \cos \theta \rangle^2 + \sqrt{\zeta^2 \langle \cos \theta \rangle^4 + 4\zeta}$

se cumple. Como es de esperarse, la rama asociada a  $x_{(-)}$  desaparece en el límite  $\zeta \rightarrow 0$ .

Podemos ver que para plasmas espaciales, cuyas densidades de partículas son bajas, la constante  $\zeta$  será muy grande, y en particular, en el límite  $\zeta \rightarrow \infty$  (cuando los efectos del spin son despreciables,  $\hbar \rightarrow 0$ ) la solución (8.31) se vuelve la relación de dispersión (8.11). Por otro lado, si los efectos cuánticos son relevantes, en plasmas con altas densidades,  $\zeta$  puede ser pequeño y los efectos del spin pueden dominar.

En la figura 8.2 podemos ver el efecto del spin en las ramas electromagnéticas  $x_{(+)}$  y  $x_{(-)}$  de la relación de dispersión (8.29) para distintos valores de  $\zeta$ . La línea punteada representa la relación de dispersión electromagnética clásica  $x^2 = y^2 + 1$ ; la línea a trazos es la relación de dispersión (8.11), donde los únicos efectos cuánticos relativistas son producidos por  $\theta$ . Y por último, las líneas continuas representan ambas ramas,  $x_{(+)}$  y  $x_{(-)}$ , de la relación de dispersión (8.31). En todos los gráficos  $\theta = 7\pi/40 < \pi/4$ . Nos damos cuenta de que a medida que  $\zeta$  disminuye, los efectos del spin empiezan a ser apreciables. Es claro de la Fig. 8.2 que el efecto del spin en la rama  $x_{(+)}$  es disminuir la frecuencia de plasma efectiva aumentando la transparencia del medio a la onda electromagnética. De hecho, cuando  $\zeta \rightarrow 0$  el medio se vuelve tan transparente, que la onda se propaga como una onda de luz. Por otro lado, podemos ver que el spin afecta la rama asociada a  $x_{(-)}$  aumentando el rango de números de onda en los cuales la onda no puede propagarse. Esto se debe a que la onda se puede empezar a propagar cuando se cumpla la condición  $x_{(-)} = 0$  o  $2y^2 = \zeta \langle \cos \theta \rangle^2 + \sqrt{\zeta^2 \langle \cos \theta \rangle^4 + 4\zeta}$ . Cuando  $\zeta \rightarrow 0$ , esta rama desaparece, ya que se convierte en un modo de luz.

Para tener un mejor entendimiento de los efectos de menor o mayor transparencia auto-inducidas por los efectos cuánticos relativistas estudiaremos la rama asociada

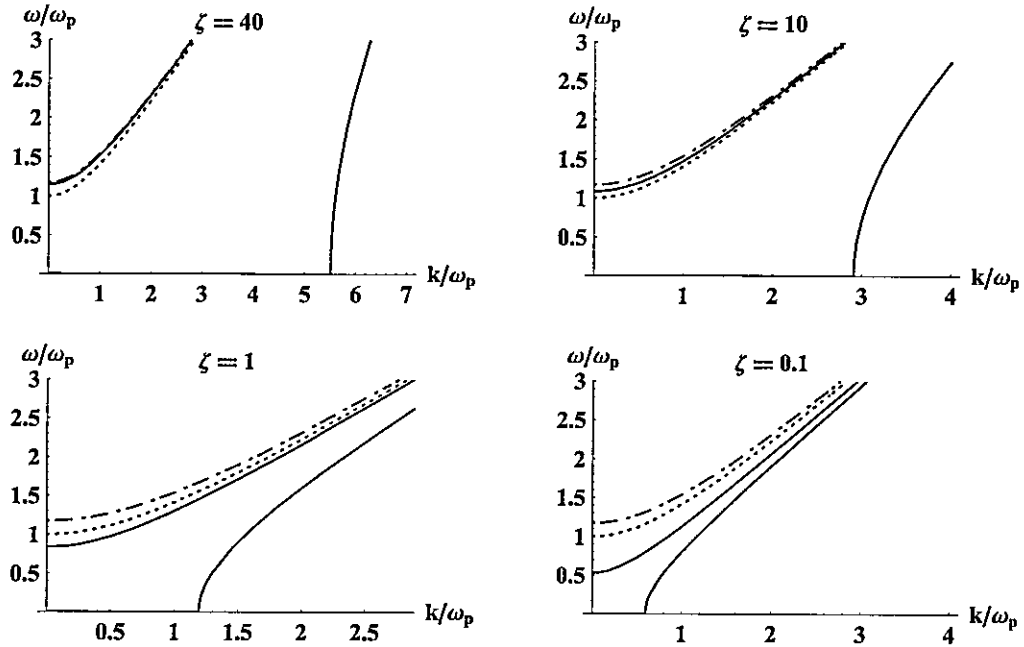


Figura 8.2: Efecto del spin en la rama electromagnética de la relación de dispersión (8.31) para  $\theta = 7\pi/40$  y distintos valores de  $\zeta$ . La línea punteada es la dispersión electromagnética clásica, la línea a trazos es la relación de dispersión (8.11), y las líneas continuas son las ramas  $x_{(+)}$  y  $x_{(-)}$  de la relación de dispersión (8.31). La rama  $x_{(+)}$  puede propagarse desde  $y = 0$ . La rama  $x_{(-)}$  puede propagarse desde un  $y$  finito.

a  $x_{(+)}$ . Notemos que para esta rama la onda dejará de propagarse en el corte  $y = 0$ . Esto determina la frecuencia de plasma efectiva  $x_p^{\text{eff}}$ . Así, la onda se propagará para  $x_{(+)} > x_p^{\text{eff}}$ . De (8.29) podemos encontrar que la frecuencia de plasma efectiva cumple la relación

$$\left(x_p^{\text{eff}}\right)^2 = \frac{1}{\langle \cos \theta \rangle^2 + \left(\left(x_p^{\text{eff}}\right)^2 / \zeta\right)}, \quad (8.32)$$

que claramente muestra que el primer término siempre disminuye la transparencia del plasma (su valor clásico es igual a 1), mientras que el segundo induce una mayor

transparencia. La Ec. (8.32) puede ser resuelta para  $x_p^{\text{eff}}$

$$x_p^{\text{eff}} = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}\zeta^2\langle\cos\theta\rangle^4 + \zeta} - \frac{1}{2}\zeta\langle\cos\theta\rangle^2}. \quad (8.33)$$

En la Fig. 8.3, se muestra la frecuencia de plasma efectiva  $x_p^{\text{eff}}$  (8.33) como función del parámetro  $\zeta$  y  $\theta$ . Para la dispersión electromagnética clásica  $x^2 = y^2 + 1$ , la frecuencia  $x_p^{\text{eff}} = 1$ . Podemos ver que cuando el parámetro  $\zeta \gg 1$ , entonces siempre se cumple que  $x_p^{\text{eff}} \geq 1$ . En este régimen, los efectos del spin son despreciables, y el efecto dominante es una menor transparencia de la onda electromagnética debido al efecto del término  $\langle\cos\theta\rangle$ . En el caso particular  $\theta = 0$ , la onda tenderá a una onda electromagnética en un plasma clásico. Por otro lado, cuando  $\zeta \rightarrow 0$ , la frecuencia de plasma efectiva será  $x_p^{\text{eff}} \ll 1$ . Aquí, los efectos del spin serán más grandes que los producidos por  $\theta$ . El efecto neto es una mayor transparencia de la onda electromagnética.

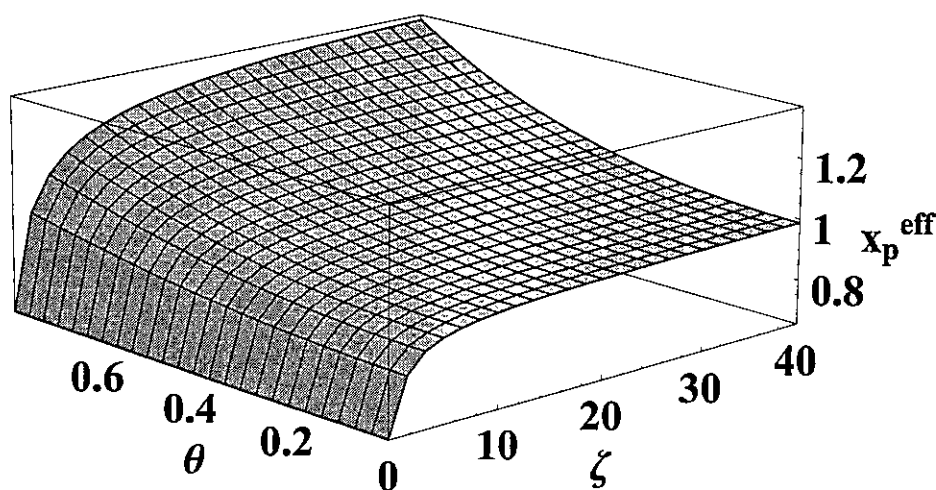


Figura 8.3: Frecuencia de plasma efectiva  $x_c$ , en función de  $\zeta$  y  $\theta$ . Cuando  $\zeta$  es grande, el efecto dominante es una menor transparencia. Cuando  $\zeta$  es pequeño, domina una mayor transparencia a la onda.

### 8.3. Modos hidromagnéticos en plasmas fríos

Para este modo de propagación en nuestro plasma cuántico relativista frío escogeremos el campo eléctrico  $\mathbf{E} = E\hat{x}$ , el campo magnético  $\mathbf{B} = B\hat{y}$ , la propagación en dirección  $\mathbf{k} = k\hat{z}$  y la velocidad  $\mathbf{v}_0 = v_0\hat{y}$  tal que  $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1 = 0$ . También, existe un campo magnético de fondo  $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{z}$  paralelo a  $\mathbf{k}$ .

De esta manera podemos resolver las mismas ecuaciones dinámicas que en la sección 8.2.3. Así encontraremos que la relación de dispersión es

$$\omega^2 - k^2 = \omega_p^2 \left( \langle \cos \theta \rangle^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2}(\omega^2 - k^2) - \frac{\Omega_c^2}{\gamma_0^2 \omega^2} \right)^{-1}, \quad (8.34)$$

donde  $\Omega_c = eB_0/m$  es la girofrecuencia electrónica, y  $\gamma_0 = (1 - v_0^2)^{-1/2}$ .

Si usamos la definición (8.30) para  $\zeta$ , entonces la relación de dispersión anterior puede reescribirse como

$$\frac{\omega^2}{\omega_p^2 \zeta} (\omega^2 - k^2)^2 + \langle \cos \theta \rangle^2 \omega^4 - \left( \langle \cos \theta \rangle^2 k^2 + \frac{\Omega_c^2}{\gamma_0^2} + \omega_p^2 \right) \omega^2 + \frac{\Omega_c^2}{\gamma_0^2} k^2 = 0. \quad (8.35)$$

La relación de dispersión (8.35) es interesante. Consideremos el límite no cuántico de un plasma de electrones y positrones, donde  $1/\zeta \rightarrow 0$  y  $\theta \simeq \pi/4$ . En este límite obtendremos

$$\omega^4 - \left( k^2 + \frac{2\Omega_c^2}{\gamma_0^2} + 2\omega_p^2 \right) \omega^2 + \frac{2\Omega_c^2}{\gamma_0^2} k^2 = 0, \quad (8.36)$$

que es la relación de dispersión para un plasma relativista de electrones y positrones encontrada en las Refs. [27, 138, 139], salvo por un factor 2 que acompaña a la frecuencia ciclotrónica.

Para encontrar los modos lineales de propagación en nuestra relación de dispersión (8.35), consideremos el límite de bajas frecuencias  $\omega^4 \ll k^4$  en el primer término de



(8.35). Así tenemos

$$\omega^4 \left( 1 - \frac{2k^2}{\zeta \omega_p^2 \langle \cos \theta \rangle^2} \right) - \left( \frac{-k^4}{\zeta \omega_p^2 \langle \cos \theta \rangle^2} + k^2 + \frac{\Omega_c^2 / \gamma_0^2 + \omega_p^2}{\langle \cos \theta \rangle^2} \right) \omega^2 + \frac{\Omega_c^2}{\gamma_0^2 \langle \cos \theta \rangle^2} k^2 = 0, \quad (8.37)$$

la cual tiene como solución para la frecuencia de la rama de Alfvén

$$\begin{aligned} \omega^2 = & \left( 2 - \frac{4k^2}{\zeta \omega_p^2 \langle \cos \theta \rangle^2} \right)^{-1} \left[ \frac{k^4}{\zeta \omega_p^2 \langle \cos \theta \rangle^2} + k^2 + \frac{\Omega_c^2 / \gamma_0^2 + \omega_p^2}{\langle \cos \theta \rangle^2} \right] \\ & - \left( 2 - \frac{4k^2}{\zeta \omega_p^2 \langle \cos \theta \rangle^2} \right)^{-1} \left[ \left( \frac{k^4}{\zeta \omega_p^2 \langle \cos \theta \rangle^2} + k^2 + \frac{\Omega_c^2 / \gamma_0^2 + \omega_p^2}{\langle \cos \theta \rangle^2} \right)^2 - \frac{4\Omega_c^2 k^2}{\gamma_0^2 \langle \cos \theta \rangle^2} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Ahora calcularemos las correcciones a la propagación lineal de estas ondas. Expandiendo la raíz cuadrada, podemos obtener una relación para  $\omega/k$  hasta segundo orden en  $k$

$$\frac{\omega}{k} \simeq V_A + \left[ \frac{\langle \cos \theta \rangle^2 V_A^5 \gamma_0^6}{4\Omega_c^6} \left( \omega_p^2 - \frac{\Omega_c^2}{\gamma_0^2} \right)^2 + \frac{V_A}{\zeta \omega_p^2 \langle \cos \theta \rangle^2} \right] k^2, \quad (8.39)$$

donde la velocidad de Alfvén es definida como

$$V_A^2 = \frac{\Omega_c^2}{\gamma_0^2 \omega_p^2 + \Omega_c^2}. \quad (8.40)$$

Esta velocidad ha sido definida como en la Ref. [27]. Cuando  $\Omega_c \ll \omega_p$  y  $\gamma_0 \rightarrow 1$ , entonces la velocidad de Alfvén se reduce a su expresión familiar  $V_A^2 \simeq \Omega_c^2 / \omega_p^2 = B_0^2 / (4\pi n m)$ .

Debido a que nos concentraremos en frecuencias pequeñas, despreciaremos las potencias a la cuarta de la frecuencia ciclotrónica y de la frecuencia de plasma en el término  $(\omega_p^2 - \Omega_c^2 / \gamma_0^2)^2$  al lado derecho de la ecuación (8.39). Así, la relación de dispersión será finalmente

$$\frac{\omega}{k} \simeq V_A - \left[ \frac{\langle \cos \theta \rangle^2 V_A^5 \gamma_0^4 \omega_p^2}{2\Omega_c^4} - \frac{V_A}{\zeta \omega_p^2 \langle \cos \theta \rangle^2} \right] k^2, \quad (8.41)$$

Cuando despreciamos el efecto del spin  $1/\zeta \rightarrow 0$  ( $\hbar \rightarrow 0$ ) y tomamos  $\theta \simeq \pi/4$ , la relación de dispersión (8.41) se vuelve

$$\frac{\omega}{k} = V_A - \left( \frac{V_A^5 \gamma_0^4 \omega_p^2}{4\Omega_c^4} \right) k^2. \quad (8.42)$$

Este resultado coincide con la relación de dispersión encontrada para un plasma de electrones-positrones en la Ref. [27].

Por otro lado, cuando los efectos de spin se vuelven dominantes en plasmas con densidades muy grandes ( $\zeta \rightarrow 0$ ), podemos ver en la relación (8.35) que desaparecen los modos de Alfvén, ya que sólo sobrevive es una onda de luz  $\omega = k$ .

En la figura 8.4 hemos graficado la relación de dispersión (8.41) representada por una línea continua. Para ver cómo influye el efecto del spin en la propagación, graficamos la dispersión para  $\theta = \pi/4$  desde cuando los efectos del spin son dominantes ( $\zeta = 5$ ) hasta cuando el spin ya no son importante ( $\zeta = 200$ ), comparándola en cada caso con la relación de dispersión de los modos lineales de Alfvén  $\omega = V_A k$  (en línea punteada) y con la relación de dispersión (8.42) para el caso relativista (línea a trazos). Notemos que a bajas frecuencias todas las relaciones de dispersión coinciden mejor cuando no existen efectos cuánticos. Cuando  $\zeta$  tiene un valor pequeño las aproximaciones que hicimos antes no se cumplen y el modo de Alfvén no es correctamente interpretado por la relación de dispersión (8.41). En este caso, los modos de Alfvén desaparecen.

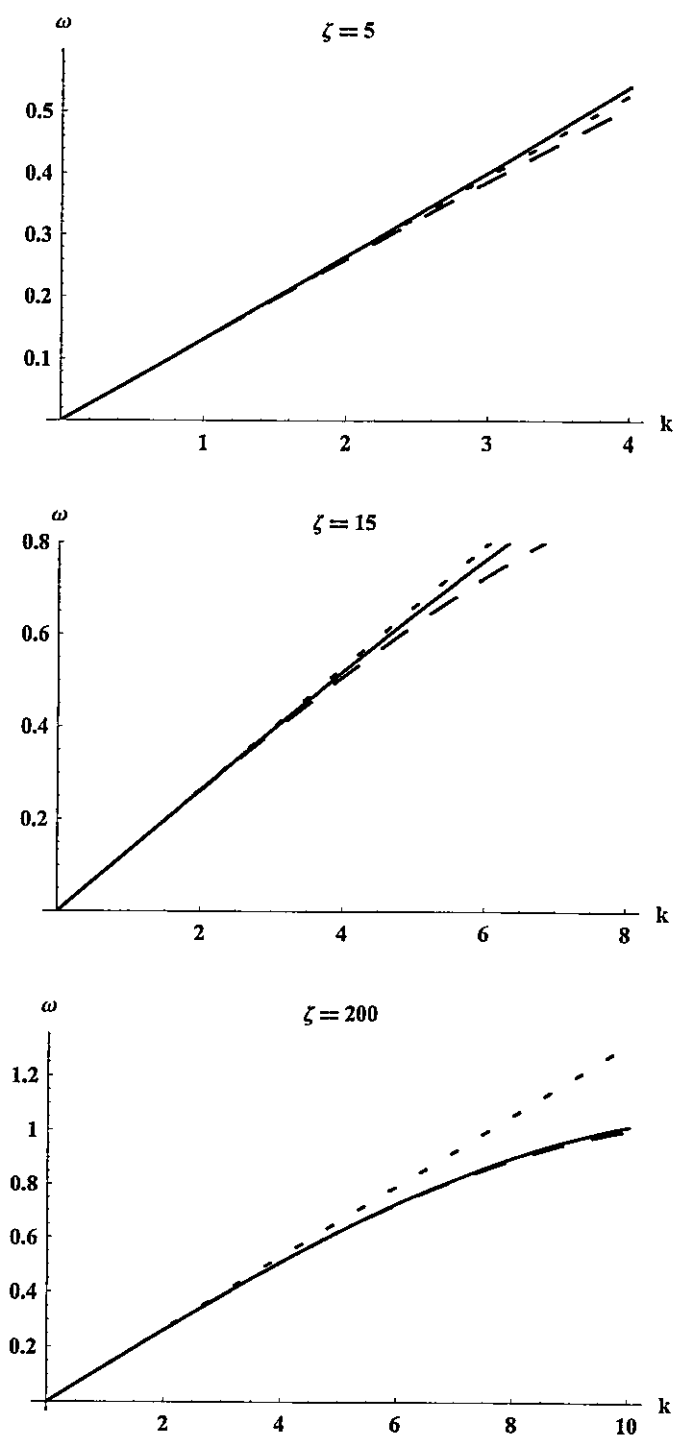


Figura 8.4: Efecto del spin en la relación de dispersión (8.41) para modos de baja frecuencia (en línea continua) para  $\theta = \pi/4$ , y  $\zeta = 5$ ,  $\zeta = 15$ , y  $\zeta = 200$ , junto con los modos de Alfvén  $\omega = V_A k$  (en línea punteada) y los modos solamente relativistas de la dispersión (8.42) (línea a trazos). Hemos usado  $\omega_p = 10$ ,  $\Omega_c = 2$  y  $\gamma_0 = 1.5$ .

## Capítulo 9

# Magnetohidrodinámica cuántica relativista

En escenarios y procesos astrofísicos es posible encontrar campos magnéticos más grandes a los encontrados usualmente en la Tierra. Estos se producen, por ejemplo, en estrellas de neutrones o en discos de acreción que giran alrededor de agujeros negros. Es por esta razón, que es necesario tener teorías para plasmas magnetizados que permitan una adecuada descripción de los efectos en estos lugares astrofísicos. Sin embargo, en algunos de estos escenarios, la teoría completa de plasma es difícil de manejar, y es mejor usar una teoría magnetohidrodinámica (MHD) como primera aproximación, la cual es muy precisa y nos puede entregar aspectos reveladores del escenario estudiado. Al interior del Sol, una teoría clásica de MHD es suficiente. Asimismo, magnetósferas e interiores de estrellas de neutrones pueden ser estudiados con MHD en relatividad especial. Pero cuando queremos estudiar plasmas altamente energéticos, como en discos de acreción o en el universo primitivo, la fuerte gravedad nos exige que usemos una teoría de MHD en relatividad general. En estos casos, es necesario una formulación covariante para MHD.

Como ya hemos mencionado antes, en algunos escenarios astrofísicos, los efectos cuánticos relativistas podrían ser relevantes. Es por esto, que en este capítulo final

propondremos la construcción de una teoría magnetohidrodinámica covariante para plasmas cuánticos relativistas. El objetivo es incluir los efectos cuánticos relativistas aprovechando el formalismo desarrollado en el Cap. 6.

Algunas teorías de MHD relativista obtienen ecuaciones asumiendo un fluido cargado con un tensor de energía-momento en el cual se incluye la presión magnética  $B^2/2$  [140, 141]. Aquí seguiremos un camino estándar, y derivaremos las ecuaciones de MHD a partir de las ecuaciones para dos fluidos. Consideraremos que el fluido de las partículas positivas, los iones, será puramente relativista covariante, es decir, asumiremos que este fluido no tiene ningún efecto cuántico ni de spin, y su dinámica se enmarca en la teoría desarrollada en la primera parte de esta tesis. Esto es porque asumimos que efectos tipo pares partículas-antipartícula son menos probables para los iones debido a su mayor masa. Por otro lado, el otro fluido estará compuesto por el plasma cuántico relativista formado por estados de electrones-positrones. Para asegurar la cuasi-neutralidad del plasma, es necesario suponer que este fluido tiene un exceso de electrones que cancelan la carga de los iones. Supondremos que este exceso se rige por la misma dinámica que el resto de este fluido.

## 9.1. Ecuación covariante de momentum

Antes de construir el modelo de MHD cuántica relativista, debemos reescribir la ecuación de momentum covariante. La ecuación dinámica para el momentum (6.90) puede ser reordenada para escribirla como

$$\langle \cos \theta \rangle \partial_\nu (n U^\nu U^\mu) = \frac{-en}{m} \eta^{\mu\sigma} U^\nu F_{\sigma\nu} - \frac{1}{m} \partial_\nu \mathbf{p}^{\nu\mu} + \frac{1}{m} Q^\mu, \quad (9.1)$$

donde  $\eta^{\mu\sigma}$  es la métrica de Minkowski. El tensor de presión viene dado por

$$\mathbf{p}^\nu{}_\mu = mn \langle z^\nu z_\mu \cos \theta \rangle, \quad (9.2)$$

y la fuerza covariante cuántica relativista es

$$Q^\mu = \langle \hat{Q}^\mu \rangle - nU^\mu U^\nu \partial_\nu (\langle \cos \theta \rangle) - m \partial_\nu (nU^\mu \langle z^\nu \cos \theta \rangle + nU^\nu \langle z^\mu \cos \theta \rangle), \quad (9.3)$$

con

$$\begin{aligned} \hat{Q}^\mu = & \frac{1}{2} \partial^\nu (\rho \partial^\mu \theta w_\nu - i \rho \varepsilon_{\nu\alpha\beta\lambda} v^\alpha w^\beta \partial^\mu v^\lambda + \rho v_\nu \partial_\alpha \theta (v^\alpha w^\mu - v^\mu w^\alpha)) \\ & + \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\alpha\delta\lambda} \partial_\nu (v^\nu \partial_\alpha (\rho v_\delta w_\lambda)). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Recordemos que  $U^\mu$  es definido en la Ec. (7.1). No obstante, debido a la definición de  $\gamma_f$  en (7.4), podemos redefinir  $U^\mu$  como

$$U^\mu = \kappa \mathcal{U}^\mu, \quad (9.5)$$

donde  $\kappa$  fue definido en (7.18), y  $\mathcal{U}^\mu = (\gamma, \gamma \mathbf{V})$ , donde  $\mathbf{V}$  es la velocidad del fluido y  $\gamma = (1 - \mathbf{V}^2)^{-1/2}$ .

Usando nuestra nueva definición (9.5), la ecuación (9.1) quedará como

$$\langle \cos \theta \rangle \partial_\nu (mn\kappa^2 \mathcal{U}^\nu \mathcal{U}^\mu) = -en\kappa \eta^{\mu\sigma} \mathcal{U}^\nu F_{\sigma\nu} - \partial_\nu \mathbf{p}^{\nu\mu} + Q^\mu. \quad (9.6)$$

Es necesario retomar, para los cálculos que siguen, nuestras definiciones de carga efectiva  $e \equiv e/\hbar$  y de masa efectiva  $m \equiv m/\hbar$  que hicimos en la Ec. (6.12) (con  $c = 1$ ). Podemos simplificar el problema si asumimos que  $\kappa$  es constante en las escalas dinámicas del sistema. De esta manera, la Ec. (9.6) se reduce a

$$\partial_\nu (\bar{\kappa} \mathcal{U}^\nu \mathcal{U}^\mu) = -\frac{en}{\langle \cos \theta \rangle} \eta^{\mu\sigma} \mathcal{U}^\nu F_{\sigma\nu} - \frac{1}{\langle \cos \theta \rangle} \partial_\nu \mathbf{p}^{\nu\mu} + \frac{\hbar}{\kappa \langle \cos \theta \rangle} Q^\mu, \quad (9.7)$$

donde  $\bar{\kappa} = mn\kappa$  es la densidad de entalpía del sistema y el tensor de presión es redefinido como

$$p^\nu{}_\mu = mn \frac{\langle z^\nu z_\mu \cos \theta \rangle}{\kappa}. \quad (9.8)$$

## 9.2. Ecuaciones magnetohidrodinámicas para plasmas de electrones-positrones-iones

Ahora estamos listos para empezar la construcción del formalismo de MHD cuántica relativista. El siguiente análisis está basado en la Ref. [142, 143] en donde se construye una teoría MHD covariante relativista.

Como mencionamos antes, construiremos una teoría de un fluido a partir de ecuaciones de dos fluidos. Las ecuaciones de la dinámica relativista para iones (representados por el subíndice  $i$ ) son la ecuación de continuidad

$$\partial_\mu (n_i U_i^\mu) = 0, \quad (9.9)$$

y la ecuación para el momentum

$$\partial_\nu (h_i U_i^\nu U_i^\mu) = e n_i \eta^{\mu\sigma} U_i^\nu F_{\sigma\nu} - \partial^\mu p_i + R^\mu, \quad (9.10)$$

donde  $n_i$ ,  $h_i$  y  $p_i$  son la densidad, la densidad de entalpía y la presión para el fluido de iones, respectivamente. Suponemos que los iones son relativistas, y no existe ningún efecto cuántico en su dinámica. El tensor  $R^\mu$  es la cuadrifuerza de fricción entre los dos fluidos [ver Ec. (9.35)]. Esta fuerza se debe a las colisiones entre los constituyentes cargados. Una derivación de  $R^\mu$  se puede encontrar en la Ref. [142]. Cabe destacar que la ecuación (9.10) para iones con masa  $m_i$ , es completamente equivalente a la Ec. (1.14) de la teoría unificada de magnetofluidos.

Las ecuaciones que describen al fluido cuántico relativista (representado por el subíndice  $d$  para indicar partículas de Dirac) son la ecuación de continuidad

$$\partial_\mu (n_d \mathcal{U}_d^\mu) = 0, \quad (9.11)$$

y la ecuación de momentum (9.7)

$$\partial_\nu (\bar{\kappa} \mathcal{U}_d^\nu \mathcal{U}_d^\mu) = -\frac{e n_d}{\langle \cos \theta \rangle} \eta^{\mu\sigma} \mathcal{U}_d^\nu F_{\sigma\nu} - \frac{1}{\langle \cos \theta \rangle} \partial^\mu p_d + \frac{\hbar}{\kappa \langle \cos \theta \rangle} Q^\mu - R^\mu, \quad (9.12)$$

con  $\bar{\kappa}$  la densidad de entalpía para este fluido cuántico relativista, y donde la presión isotrópica  $p_d$  es

$$p_d = m_d n_d \frac{\langle z^i z_j \cos \theta \rangle}{\kappa} \delta_i^j, \quad (9.13)$$

con  $m_d$  como la masa de las partículas de Dirac.

Además de las dos ecuaciones (9.11) y (9.12), debemos incluir las otras ecuaciones para el fluido cuántico-relativista. Este fluido está acoplado con el spin, que tiene su propia evolución [ecuaciones (6.87) y (6.89)], y con los efectos netamente cuánticos de acoplamiento partícula-antipartícula y velocidad-spin [ecuaciones (6.88) y (6.91)].

Finalmente, debemos usar las ecuaciones de Maxwell, las cuales reescribiremos nuevamente

$$\partial_\nu {}^*F^{\mu\nu} = 0, \quad (9.14)$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu, \quad (9.15)$$

donde  $F^{\mu\nu}$  es el tensor del campo electromagnético,  ${}^*F^{\mu\nu}$  es el tensor dual a  $F^{\mu\nu}$ , y  $J^\mu$  es la cuadricorriente.

Para derivar ecuaciones de un fluido definiremos nuevas variables promedio. La densidad de masa del fluido será

$$\rho = m_i n_i + m_d \frac{n_d}{\langle \cos \theta \rangle}, \quad (9.16)$$

mientras la densidad total del fluido es

$$n = \frac{\rho}{m}, \quad (9.17)$$

donde  $m = m_i + m_d$ . Ahora definiremos la cuadvirvelocidad total como

$$v^\mu = \frac{1}{\rho} \left( m_i n_i U_i^\mu + m_d \frac{n_d}{\langle \cos \theta \rangle} \mathcal{U}_d^\mu \right), \quad (9.18)$$



y la cuatricorrente

$$J^\mu = e \left( n_i U_i^\mu - \frac{n_d}{\langle \cos \theta \rangle} \mathcal{U}_d^\mu \right). \quad (9.19)$$

De las ecuaciones (9.18) y (9.19) es bastante simple demostrar las relaciones para las cuatriveLOCIDADES de iones y de partículas de Dirac

$$n_i U_i = \frac{\rho}{m} \mathcal{V}^\mu + \frac{m_d}{em} J^\mu, \quad (9.20)$$

$$\frac{n_d}{\langle \cos \theta \rangle} \mathcal{U}_d = \frac{\rho}{m} \mathcal{V}^\mu - \frac{m_i}{em} J^\mu. \quad (9.21)$$

Con estas definiciones, podemos sumar las ecuaciones de continuidad de iones y partículas de Dirac (9.9) y (9.11), respectivamente. Así obtendremos la ecuación de continuidad para el fluido

$$\partial_\mu (\rho \mathcal{V}^\mu) = 0. \quad (9.22)$$

Al igual que el cálculo anterior, podemos sumar las ecuaciones de momentum (9.10) y (9.12) para obtener

$$\partial_\nu (h_i U_i^\mu U_i^\nu + \bar{\kappa} \mathcal{U}_d^\mu \mathcal{U}_d^\nu) = -\partial^\mu p + J^\nu \eta^{\mu\sigma} F_{\sigma\nu} + \frac{\hbar}{\kappa \langle \cos \theta \rangle} Q^\mu, \quad (9.23)$$

donde la presión total  $p$  del fluido es definida a través de la relación

$$\partial^\mu p = \partial^\mu p_i + \frac{1}{\langle \cos \theta \rangle} \partial^\mu p_d. \quad (9.24)$$

Usando las relaciones (9.20) y (9.21), y definiendo las cantidades

$$h^\dagger = n^2 \left( \frac{h_i}{n_i^2} + \frac{\bar{\kappa} \langle \cos \theta \rangle^2}{n_d^2} \right), \quad (9.25)$$

$$h^\ddagger = \frac{2n^2}{m} \left( \frac{h_i m_d}{n_i^2} - \frac{\bar{\kappa} m_i \langle \cos \theta \rangle^2}{n_d^2} \right), \quad (9.26)$$

$$h^\ddagger = \frac{4n^2}{m^2} \left( \frac{h_i m_d^2}{n_i^2} + \frac{\bar{\kappa} m_i^2 \langle \cos \theta \rangle^2}{n_d^2} \right), \quad (9.27)$$

la ecuación (9.23) puede reescribirse como

$$\partial_\nu \left( \hbar^\dagger \gamma^\mu \gamma^\nu + \frac{\hbar^\dagger}{(2en)^2} J^\mu J^\nu + \frac{\hbar^\dagger}{2en} (\gamma^\mu J^\nu + J^\mu \gamma^\nu) \right) = -\partial^\mu p + J^\nu \eta^{\mu\sigma} F_{\sigma\nu} + \frac{\hbar}{\kappa \langle \cos \theta \rangle} Q^\mu. \quad (9.28)$$

La ecuación (9.28) corresponde a la ecuación de momentum para la descripción de un fluido. Al lado derecho aparecen el término de evolución de la velocidad, un término relacionado con la inercia de la corriente [142], y términos de acoplamiento entre la velocidad y la corriente. En el lado izquierdo tenemos la fuerza de Lorentz, el gradiente de presión, y la fuerza cuántica. La contribución de esta última fuerza a la dinámica total sólo es debido a las partículas de Dirac. Por lo tanto las variables de la fuerza deben ser reescritas en términos de las variables magnetohidrodinámicas.

De forma muy parecida podemos encontrar la ley de Ohm para este modelo de MHD. Si multiplicamos la ecuación (9.10) por  $2m_d/m$ , y la ecuación (9.12) por  $2m_i/m$ , y luego las restamos, encontraremos

$$\begin{aligned} \partial_\nu \left( \frac{2m_d}{m} h_i U_i^\mu U_i^\nu - \frac{2m_i}{m} \bar{\kappa} \mathcal{U}_d^\mu \mathcal{U}_d^\nu \right) &= -\frac{2m_d}{m} \partial^\mu p_i + \frac{2m_i}{m \langle \cos \theta \rangle} \partial^\mu p_d \\ &+ \frac{e}{m} \left( 2m_d n_i U_i^\nu + 2m_i \frac{n_d}{\langle \cos \theta \rangle} \mathcal{U}_d^\nu \right) \eta^{\mu\sigma} F_{\sigma\nu} \\ &+ 2R^\mu - \frac{2m_i \hbar}{m \kappa \langle \cos \theta \rangle} Q^\mu. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Nuevamente usando las relaciones (9.20) y (9.21), y definiendo las nuevas cantidades

$$h^s = \frac{8n^2}{m^3} \left( \frac{h_i m_d^3}{n_i^2} - \frac{\bar{\kappa} m_i^3 \langle \cos \theta \rangle^2}{n_d^2} \right), \quad (9.30)$$

$$\partial^\mu \Delta p = \partial^\mu p_i - \frac{1}{\langle \cos \theta \rangle} \partial^\mu p_d, \quad (9.31)$$

$$\Delta \mu = \frac{m_i - m_d}{m}, \quad (9.32)$$

$$\mu = \frac{m_i m_d}{m^2}, \quad (9.33)$$

la ley de Ohm quedará escrita como

$$\begin{aligned} \partial_\nu \left( h^\sharp \mathcal{V}^\mu \mathcal{V}^\nu + \frac{h^\dagger}{2en} (\mathcal{V}^\mu J^\nu + J^\mu \mathcal{V}^\nu) + \frac{h^\S}{(2en)^2} J^\mu J^\nu \right) \\ = (\partial^\mu p \Delta \mu - \partial^\mu \Delta p) + 2en \left( \mathcal{V}^\nu - \frac{\Delta \mu}{ne} J^\nu \right) \eta^{\mu\sigma} F_{\sigma\nu} + 2R^\mu - \frac{2m_i \hbar}{m\kappa \langle \cos \theta \rangle} Q^\mu, \end{aligned} \quad (9.34)$$

donde la cuadrifuerza friccional viene dada por

$$R^\mu = -\eta ne (J^\mu + \mathcal{V}^\nu J_\nu (1 + \Theta) \mathcal{V}^\mu), \quad (9.35)$$

donde  $\eta$  es la resistividad, y  $\Theta$  es la tasa de intercambio de energía térmica desde el fluido con carga negativa al fluido cargado positivamente.

La ley de Ohm encontrada presenta términos que no son considerados en teorías de MHD usuales. En este formalismo están presente los términos de inercia de la cuadrifuerza (más los acoplamientos velocidad-corriente), una fuerza térmica electromotiva (debido a la presión), el efecto de Hall<sup>1</sup>, la resistividad del medio y por supuesto, efectos cuánticos que han sido incluidos debido a nuestro formalismo a través de  $\langle \cos \theta \rangle$  y  $Q^\mu$  en (9.34).

Junto a las ecuaciones de Maxwell, las ecuaciones ya antes derivadas (9.22), (9.28) y (9.34), más las ecuaciones (6.87), (6.88), (6.89) y (6.91), corresponden a las ecuaciones que gobiernan la dinámica de este modelo magnetohidrodinámico cuántico-relativista.

Ahora consideraremos que la masa de los iones es mucho mayor que la de las partículas de Dirac,  $m_i \gg m_d$  ( $\mu \simeq 0$ ,  $\Delta \mu \simeq 1$ ). Siguiendo la Ref. [142], despreciaremos  $h^\sharp$ . Entonces, cuando  $h^\sharp = 0$  tendremos

$$h^\dagger = \frac{n^2 m}{n_i^2 m_i} h_i \simeq \frac{n^2}{n_i^2} h_i, \quad (9.36)$$

<sup>1</sup>El efecto Hall a menudo es despreciado debido a que usualmente es más pequeño que los otros términos de la ley de Ohm.

y también

$$h^\dagger = 4\mu h^\dagger \simeq 0, \quad h^{\ddagger} = -\frac{8\mu}{m^2}(m_i^2 - m_d^2)h^\dagger \simeq 0. \quad (9.37)$$

Con estas simplificaciones, la ecuación de momentum (9.28) quedará como

$$\partial_\nu (h^\dagger \mathcal{V}^\mu \mathcal{V}^\nu) = -\partial^\mu p + J^\nu \eta^{\mu\sigma} F_{\sigma\nu} + \frac{\hbar}{\kappa \langle \cos \theta \rangle} Q^\mu, \quad (9.38)$$

de donde podemos identificar a  $h^\dagger$  con la densidad de entalpía del fluido.

Usualmente se asume que en los plasmas compuestos por electrones e iones, el intercambio de energía debido a la fricción entre los dos fluidos es insignificante,  $\Theta = 0$  [142]. Así, la ley de Ohm (9.34) será

$$0 = \frac{1}{\cos \theta} \partial^\mu p_d + (en\mathcal{V}^\nu - J^\nu) \eta^{\mu\sigma} F_{\sigma\nu} - \eta ne (J^\mu + \mathcal{V}^\nu J_\nu \mathcal{V}^\mu) - \frac{\hbar}{\kappa \langle \cos \theta \rangle} Q^\mu. \quad (9.39)$$

Por lo tanto, en el caso de iones masivos en el límite magnetohidrodinámico, nuestras ecuaciones dinámicas serán (9.38) y (9.39). Notemos que ambas tienen correcciones cuánticas que dependen totalmente de las partículas de Dirac.

### 9.3. Modos magnetohidrodinámicos

Como ilustración del modelo desarrollado, estudiaremos la propagación de las ondas magnetohidrodinámicas bajo este modelo. Usaremos las ecuaciones (9.22), (9.38), (9.39) y (7.14) escritas de forma vectorial. También supondremos que  $\theta$  es constante al igual que en el análisis de los distintos modos de propagación en los capítulos anteriores. Así la ecuación de continuidad será

$$\frac{\partial(\gamma n)}{\partial t} + \nabla \cdot (\gamma n \mathbf{v}) = 0. \quad (9.40)$$

La ecuación dinámica para la velocidad (9.38) será

$$m\gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) (nf\gamma \mathbf{v}) = \gamma \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p + \frac{\hbar}{\kappa \langle \cos \theta \rangle} \mathbf{Q}, \quad (9.41)$$

donde la densidad de entalpía será  $h^\dagger = mnf$ , con  $f = f(T)$  definida en (1.8).

En la ley de Ohm (9.39), al igual que en un plasma cuántico [94], asumiremos que la resistividad es nula. Además asumiremos que el efecto Hall puede ser despreciado, al igual que la fuerza térmica debida a la presión y los efectos cuánticos. Así re obtendremos la ley de Ohm standard para MHD

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0. \quad (9.42)$$

Para cerrar el sistema, imponemos la ecuación de estado (4.50) para la presión

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{n^\Gamma} \right) = 0, \quad (9.43)$$

donde  $\Gamma$  es la razón entre los calores específicos para las diferentes especies.

Debemos acoplar las ecuaciones anteriores a las ecuaciones de Maxwell

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (9.44)$$

y

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M}, \quad (9.45)$$

donde hemos despreciado la corriente de desplazamiento  $\partial_t \mathbf{E}$ , y  $\mathbf{M}$  es la densidad de magnetización [94].

Todas las cantidades dinámicas pueden ser separadas en la parte en equilibrio (denotada por el subíndice 0) más una perturbación. De esta manera la densidad será  $n = n_0 + n_1$ , la presión es  $p = p_0 + p_1$ , la velocidad es  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$ , el factor relativista será  $\gamma = \gamma_0 + \gamma_0^3 \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1$ , los campos electromagnéticos son  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$  ( $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{b}_0$  es un campo magnético de fondo), la magnetización será  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1$ , y la corriente es  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1$ , ya que la corriente en el estado en equilibrio es nula debido a que  $\mathbf{J}_0 = \nabla \times \mathbf{B}_0 = 0$ . Las cantidades  $n_0, p_0, \mathbf{v}_0, \gamma_0, \mathbf{B}_0$

y  $\mathbf{M}_0$  son constantes, así como también escogeremos temperatura constante, es decir  $f$  será constante. Además, todas las cantidades perturbadas tienen una dependencia espacial y temporal de la forma  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$ , donde  $\mathbf{k}$  y  $\omega$  son el número de onda y la frecuencia de la onda respectivamente.

Linealizando la Ec. (9.40) encontraremos que

$$n_1 = \frac{n_0}{\omega'} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 - n_0 \gamma_0^2 \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1, \quad (9.46)$$

donde  $\omega' = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0$ . De igual forma, la ecuación (9.41) quedará como

$$-imn_0 f \gamma_0^2 \omega' \left( \mathbf{v}_1 + \gamma_0^2 (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 + \frac{n_1}{n_0} \mathbf{v}_0 \right) = \gamma_0 \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0 - \nabla p_1 + \frac{\hbar}{\kappa \langle \cos \theta \rangle} \mathbf{Q}_1. \quad (9.47)$$

Si suponemos que  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ , podemos usar las versiones linealizadas de las ecuaciones (9.42), (9.44) y (9.45) para encontrar una ecuación para la corriente

$$\mathbf{J}_1 = \frac{-i}{\omega'} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0)) - \frac{i\gamma_0^2 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1)}{\omega'} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0)) - i\mathbf{k} \times \mathbf{M}_1. \quad (9.48)$$

Por último, podemos encontrar  $p_1$  linealizando (9.43), y usando (9.46)

$$p_1 = \frac{\Gamma p_0}{\omega'} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 - \Gamma p_0 \gamma_0^2 \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1. \quad (9.49)$$

La fuerza cuántica  $\mathbf{Q}_1$  viene dada por (8.17) en la cual despreciaremos los efectos térmicos. Ahora necesitamos definir el spin dado por la Ec. (7.14). Para esto, haremos las mismas suposiciones que en la Sec. 8.1 para encontrar una solución a la Ec. (8.1). A diferencia de lo que hicimos en el capítulo anterior, y siguiendo el análisis hecho en la Ref. [94] para plasmas cuánticos, buscaremos una solución que establezca una configuración de spin en equilibrio termodinámico. Esto nos permitirá comparar nuestra teoría con resultados publicados anteriormente para plasmas cuánticos con spin [94]. Si suponemos que  $W^0 = 0$ , una solución de la Ec. (8.1) para

el spin tendrá la forma  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_1$ , donde

$$\mathbf{S}_0 = -\frac{\hbar}{2}\xi\left(\frac{\mu_B B_0}{T}\right)\hat{b}_0, \quad \mathbf{S}_1 = -\frac{\hbar}{2}\xi\left(\frac{\mu_B B_1}{T}\right)\hat{B}_1, \quad (9.50)$$

donde  $\mu_B = e\hbar/(2m) = -\mu_e$  es el momento magnético del electrón, y  $T$  es la temperatura ( $k_B = 1$ ). La función  $\xi(x) = \tanh(x)$  es la función de Brillouin, la cual es el resultado de la magnetización debido a una distribución de spin en equilibrio termodinámico [94]. La solución (9.50) es más general que las usadas en capítulos anteriores. Sin embargo, los resultados obtenidos anteriormente pueden ser generalizados fácilmente usando esta solución para la configuraciones de spin.

Además, las variables de velocidad de la fuerza  $\mathbf{Q}_1$  son las de las partículas de Dirac. Para esta fuerza asumiremos que la velocidad de equilibrio las partículas de Dirac es igual a la velocidad de equilibrio del fluido  $\mathbf{v}_{0d} = \mathbf{v}_0$ . También, usando (9.21), diremos que la velocidad de las partículas de Dirac será  $\mathbf{v}_{1d} = \langle \cos \theta \rangle n_0 \mathbf{v} / n_d$ , donde hemos despreciado la contribución de la corriente  $\mathbf{J}_1$  al evaluar la velocidad en la fuerza cuántica relativista.

Por otro lado, la magnetización  $\mathbf{M}_1$  vendrá dada por

$$\mathbf{M}_1 = \mu_B n_d \xi\left(\frac{\mu_B B_1}{T}\right)\hat{B}_1, \quad (9.51)$$

la cual es antiparalela al spin.

Si suponemos que  $\mu_B B \ll T$ , entonces  $\xi(\mu_B B/T) \approx \mu_B B/T$  [94]. Usando esto, junto a (9.50) en la fuerza  $\mathbf{Q}_1$ , y las ecuaciones (9.48), (9.49) y (9.51), encontramos que la ecuación de momentum (9.47) puede ser reescrita como una ecuación para la velocidad  $\mathbf{v}_1$

$$\begin{aligned} \omega^2 \mathbf{v}_1 + \gamma_0^2 \omega'^2 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_0 &= \frac{\tilde{V}_A^2}{f \gamma_0} \left[ \mathbf{k} \times \left( \mathbf{k} \times \left( \mathbf{v}_1 \times \hat{b}_0 \right) \right) \right] \times \hat{b}_0 \\ &\quad - \frac{V_A^2}{f} \gamma_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1) \left( \frac{\hbar^2 \omega_{pe}^2}{4mT \langle \cos \theta \rangle} \right) \left[ \mathbf{k} \times \left( \mathbf{k} \times \left( \mathbf{v}_0 \times \hat{b}_0 \right) \right) \right] \times \hat{b}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{v_s^2}{f\gamma_0^2} \mathbf{k} - \omega' \mathbf{v}_0 \right] (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 - \gamma_0^2 \omega' (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1)) - \\
& - \frac{\omega' \hbar^2 \kappa n_0 \omega_{ce}}{4mTf n_d} \left[ \omega' \omega \hat{\mathbf{b}}_0 \times \mathbf{v}_1 - \mathbf{k} \cdot (\hat{\mathbf{b}}_0 \times \mathbf{v}_1) \mathbf{k} + \omega \mathbf{v}_0 \cdot (\hat{\mathbf{b}}_0 \times \mathbf{v}_1) \mathbf{k} \right] \\
& - \frac{\omega' \omega \hbar^2 \kappa \omega_{ce}}{4mfT \langle \cos \theta \rangle} \mathbf{v}_0 \times \left[ \mathbf{k} \times (\mathbf{v}_1 \times \hat{\mathbf{b}}_0) + \gamma_0^2 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{k} \times (\mathbf{v}_0 \times \hat{\mathbf{b}}_0) \right] \\
& + \frac{\omega' \hbar^2 \kappa \omega_{ce}}{4mfT \langle \cos \theta \rangle} \mathbf{k} \times \left[ \mathbf{k} \times (\mathbf{v}_1 \times \hat{\mathbf{b}}_0) + \gamma_0^2 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{k} \times (\mathbf{v}_0 \times \hat{\mathbf{b}}_0) \right], \quad (9.52)
\end{aligned}$$

donde  $\omega_{ce} = eB_0/m$  es la frecuencia ciclotrónica del electrón. Hemos definido una velocidad de Alfvén modificada por el spin

$$\tilde{V}_A = V_A \left( 1 - \frac{\hbar^2 \omega_{pe}^2}{4mT \langle \cos \theta \rangle} \right)^{1/2}, \quad (9.53)$$

con  $V_A^2 = B_0^2/(mn_0)$  la velocidad de Alfvén usual, y  $\omega_{pe}$  la frecuencia de plasma electrónica tal como fue definida en (8.8). También hemos definido la velocidad acústica

$$v_s = \left( \frac{\Gamma p_0}{mn_0} \right)^{1/2}. \quad (9.54)$$

La ecuación (9.52) corresponde a la ecuación de estabilidad para MHD cuántica relativista. En el límite no cuántico ( $\hbar \rightarrow 0$ ) y no relativista ( $\mathbf{v}_0 = 0$ ) se obtenemos el resultado clásico para MHD [144].

Escogiendo  $\hat{\mathbf{b}}_0 = \hat{\mathbf{z}}$  y  $\mathbf{v}_0 = v_0 \hat{\mathbf{z}}$ , entonces  $\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0 = 0$ . Sin pérdida de generalidad escogemos  $\mathbf{k} = k_{\perp} \hat{\mathbf{y}} + k_{\parallel} \hat{\mathbf{z}}$ . Entonces, la ecuación (9.52) puede ser escrita como

$$\begin{pmatrix} \chi_{\perp\perp} & \chi_{\perp\top} & 0 \\ \chi_{\top\perp} & \chi_{\top\top} & \chi_{\top z} \\ \chi_{\perp z} & \chi_{z\top} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = 0, \quad (9.55)$$

donde los coeficientes son

$$\chi_{\perp\perp} = \omega'^2 - \frac{\tilde{V}_A^2}{f\gamma_0} k_{\parallel}^2, \quad (9.56)$$

$$\chi_{\perp\top} = -\frac{\omega' \hbar^2 \kappa \omega_{ce}}{4mTf \langle \cos \theta \rangle} \left[ \frac{\langle \cos \theta \rangle n_0}{n_d} \omega' \omega + v_0 \omega k_{\parallel} - k^2 \right], \quad (9.57)$$



$$\chi_{T\perp} = \frac{\omega' \hbar^2 \kappa \omega_{ce}}{4mT f \langle \cos \theta \rangle} \left[ \frac{\langle \cos \theta \rangle n_0}{n_d} (\omega' \omega - k_{\perp}^2) + v_0 \omega k_{\parallel} - k_{\parallel}^2 \right], \quad (9.58)$$

$$\chi_{T\top} = \omega'^2 - \frac{\tilde{V}_A^2}{f \gamma_0} k^2 - \frac{v_s^2}{f \gamma_0^2} k_{\perp}^2, \quad (9.59)$$

$$\chi_{Tz} = \frac{v_s^2}{f \gamma_0^2} (\omega' v_0 \gamma_0^2 k_{\perp} - k_{\perp} k_{\parallel}), \quad (9.60)$$

$$\chi_{\perp z} = \frac{\omega' \hbar^2 \kappa \omega_{ce}}{4mT f \langle \cos \theta \rangle} \left[ -\frac{\langle \cos \theta \rangle n_0}{n_d} + 1 \right] k_{\perp} k_{\parallel}, \quad (9.61)$$

$$\chi_{z\top} = \left( -\frac{v_s^2}{f \gamma_0^2} k_{\parallel} + \omega' v_0 \right) k_{\perp}, \quad (9.62)$$

$$\chi_{zz} = \omega'^2 + \omega' v_0 k_{\parallel} - \frac{v_s^2}{f \gamma_0^2} (k_{\parallel}^2 - \gamma_0^2 \omega' v_0 k_{\parallel}). \quad (9.63)$$

con  $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ .

La relación de dispersión para los modos magnetohidrodinámicos será

$$\chi_{\perp\perp} (\chi_{T\top} \chi_{zz} - \chi_{Tz} \chi_{z\top}) = \chi_{\perp\top} (\chi_{T\perp} \chi_{zz} - \chi_{\perp z} \chi_{Tz}). \quad (9.64)$$

Esta relación de dispersión es mucho más complicada que la dispersión clásica de MHD, lo cual es debido totalmente a los efectos cuántico-relativistas.

Cuando hacemos  $\hbar \rightarrow 0$ , recobramos los modos clásicos de Alfvén  $\chi_{\perp\perp} = 0$ , y los modos magnetosónicos rápidos y lentos  $\chi_{T\top} \chi_{zz} = \chi_{Tz} \chi_{z\top}$  [144].

Es importante destacar que la velocidad de Alfvén (9.53) corresponde a la corrección cuántico-relativista a la velocidad de Alfvén para MHD de plasmas cuánticos [94], en donde la corrección se debe sólo al spin del electrón.

# Capítulo 10

## Conclusiones

A lo largo de este trabajo, hemos estudiado dos nuevos formalismos para plasmas relativistas y plasmas cuánticos relativistas. Cada uno de estos dos grandes temas, tuvo un incentivo distinto para ser desarrollado.

Para plasmas relativistas, lo que se pretendía era estudiar los alcances del formalismo de la Ref. [13], y sus posibles correcciones a resultados ya conocidos. Es por esta razón que empezamos nuestra investigación con la propagación circularmente polarizada de ondas electromagnéticas para un plasma de electrones y positrones en el Cap. 2. Encontramos la generalización relativista a temperatura finita de resultados anteriores para la propagación circularmente polarizada de una onda electromagnética. A la vez hicimos un análisis exhaustivo del sistema, encontrando nuevas interesantes características, como una nueva velocidad de Alfvén que depende de la temperatura. Esto se debe a que el formalismo de unificación [13] introduce una nueva dinámica debido a la entalpía del sistema. Esto enriquece los procesos en plasmas relativistas, a la vez que nos permite abarcar un conjunto más amplio de escenarios relativistas donde la temperatura tiene un papel fundamental. Aprovechando este formalismo, también estudiamos el decaimiento paramétrico de estas ondas, encontrando que la temperatura introduce nuevas inestabilidades, que hacen que la

interacción entre las ondas sea más compleja que lo que se ha estudiado hasta ahora. En ambos casos, las implicancias de la teoría completamente relativista están siendo estudiadas para funciones  $f$  como las dadas por (1.8) u otras que corresponden a estados de equilibrio para sistemas con estadísticas no extensivas [145].

Además de calcular modos de propagación, usamos el formalismo de segunda cuantización para calcular una masa efectiva y una carga equivalente del fotón en plasmas relativistas. Estas características del fotón son redefiniciones cuánticas de interacciones clásicas del plasma con ondas electromagnéticas, como la fuerza ponderomotriz relativista. Encontramos que la carga y la masa del fotón dependen de la temperatura del sistema relativista.

Por otro lado, hemos querido explorar un formalismo para plasmas que incluya los efectos cuánticos y relativistas del electrón. Aprovechando el formalismo hidrodinámico de la ecuación de Dirac desarrollado en la Ref. [122], hemos construido las ecuaciones de fluido para un plasma de este tipo en el Cap. 6. Encontramos que podemos describir un plasma cuántico relativista a través de un solo fluido cuyos constituyentes se componen de estados de partícula-antipartícula.

Usando este nuevo formalismo, hemos calculado cuáles son las principales correcciones de este modelo a distintos modos simples de propagación. Además, presentamos algunas de las características más interesantes que aparecen debido al spin y a la naturaleza partícula-antipartícula de los cuerpos. Una de las cualidades encontrada para estos plasmas fue que los estados partícula-antipartícula producen fluctuaciones que aumentan el valor de la frecuencia de plasma efectiva y hacen del plasma un medio menos transparente a la propagación de una onda electromagnética. Por otra parte, encontramos que el spin de los constituyentes afecta la propagación de la onda electromagnética produciendo una mayor transparencia del medio. Ambos efectos,

menor o mayor transparencia, compiten entre ellos.

Otro objetivo de este trabajo fue la construcción de una teoría magnetohidrodinámica covariante usando la teoría de fluido desarrollada para plasmas cuánticos relativistas. Gracias a este formalismo fuimos capaces de generalizar algunos resultados previos para plasmas cuánticos con spin. El próximo objetivo es estudiar las soluciones de esta teoría de MHD para plasmas en espacio-tiempo curvos, tales como discos de acreción. Además, es posible hacer generalizaciones del formalismo anterior con presiones anisotrópicas [141].

Es importante destacar, que para encontrar los modos de propagación en los plasmas cuánticos relativistas se hicieron grandes aproximaciones. Tan sólo consideramos algunas ecuaciones que componían el sistema, las cuales mostraban la dinámica de las variables de fluido. Por otro lado, estas aproximaciones consistieron en suponer algunas variables dinámicas como constantes, y también en no considerar explícitamente la estadística del sistema. La razón de estas aproximaciones es la gran complejidad de las ecuaciones, lo que no nos permite obtener una solución analítica a nuestro problema. Por lo tanto, decidimos concentrarnos más en la búsqueda de los nuevos fenómenos de este plasma, que en encontrar alguna solución completa o exacta del sistema. La resolución general del sistema, ya sea por vía analítica o numérica, es un trabajo que planeamos realizar próximamente.

## Apéndice A

### Densidad de entalpía de un gas ideal relativista

En este apéndice derivaremos la forma de la entalpía que hemos dado en la ecuación (1.8), basado en la Ref. [146]. El Hamiltoniano de un gas ideal de  $N$  partículas idénticas no interactuantes y no degeneradas, todas con masa  $m$  y cada una con momentum  $p_i$ , es

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p_i}{mc}\right)^2}, \quad (\text{A.1})$$

con  $c$  la velocidad de la luz.

Este Hamiltoniano incluye la energía en reposo de las partículas. La función partición del sistema no degenerado es

$$Z_N(T, V) = \frac{1}{N!} (Z_1(T, V))^N, \quad (\text{A.2})$$

donde  $Z_1(T, V)$  es la función partición para una partícula

$$Z_1(T, V) = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty dp p^2 \exp\left(-\beta mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2}\right), \quad (\text{A.3})$$

con  $\beta = (k_B T)^{-1}$ , y donde  $V$  es el volumen,  $T$  es la temperatura,  $k_B$  es la constante de Boltzmann, y  $\hbar$  es la constante de Planck reducida.

Ahora hacemos el cambio de variable  $p = mc \sinh x$  y  $u = \beta mc^2$ . De esta manera,  $Z_1(T, V)$  queda como

$$Z_1(T, V) = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} (mc)^3 \int_0^\infty dx \cosh x \sinh^2 x \exp(-u \cosh x). \quad (\text{A.4})$$

En la ecuación (A.4), es posible reconocer una expresión integral para las funciones modificadas de Bessel  $K_\gamma(u)$

$$\frac{\gamma}{u} K_\gamma(u) = \int_0^\infty dx \sinh x \sinh(\gamma x) \exp(-u \cosh x). \quad (\text{A.5})$$

Haciendo  $\gamma = 2$  es posible reescribir (A.4) como

$$Z_1(T, V) = 4\pi V \left( \frac{mc}{2\pi\hbar} \right)^3 \frac{K_2(u)}{u}. \quad (\text{A.6})$$

Es posible calcular ahora la función partición total (A.2). Ésta será

$$Z_N(T, V) = \frac{1}{N!} \left( 4\pi V \left( \frac{mc}{2\pi\hbar} \right)^3 \frac{K_2(u)}{u} \right)^N. \quad (\text{A.7})$$

Podemos calcular la energía libre  $F = F(T, V, N)$  de este gas relativista usando (A.7). Con la aproximación  $\ln N! \approx N \ln N - N$  cuando  $N \gg 1$ , tenemos

$$F(T, V, N) = -k_B T \ln Z_N(T, V) = -N k_B T \left[ \ln \left( \frac{4\pi V}{N} \left( \frac{mc}{2\pi\hbar} \right)^3 \frac{K_2(u)}{u} \right) + 1 \right], \quad (\text{A.8})$$

y usando esta energía libre, podemos obtener la presión del gas

$$p = - \left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_{T, N} = \frac{N k_B T}{V}. \quad (\text{A.9})$$

De igual manera, usando (A.8), y la relación de recurrencia

$$\frac{dK_n(u)}{du} = -K_{n-1}(u) - \frac{n}{u} K_n(u), \quad (\text{A.10})$$

para  $n = 2$ , podemos encontrar la entropía para este gas de partículas relativistas no interactuantes

$$S = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_{V, N} = N k_B \ln \left( \frac{4\pi V}{N} \left( \frac{mc}{2\pi\hbar} \right)^3 \frac{K_2(u)}{u} \right) + 4N k_B + \frac{N m c^2}{T} \frac{K_1(u)}{K_2(u)}. \quad (\text{A.11})$$

La energía interna del gas es fácilmente calculada usando las ecuaciones (A.8) y (A.11), y la relación de recurrencia

$$K_{n-1}(u) = K_{n+1}(u) - \frac{2n}{u} K_n(u), \quad (\text{A.12})$$

para  $n = 2$ . Así, la energía interna es

$$U = F + TS = Nmc^2 \frac{K_3(u)}{K_2(u)} - Nk_B T. \quad (\text{A.13})$$

En el límite no relativista  $mc^2 \gg k_B T$  ( $u \rightarrow \infty$ ), esta energía interna es vuelve  $U = Nmc^2 + 3/2 Nk_B T$  debido a que  $K_3(u)/K_2(u) \rightarrow 1 + 5k_B T/(2mc^2)$  en este límite.

Finalmente, usando las ecuaciones (A.9) y (A.13), podemos encontrar la entalpía del gas relativista

$$H = U + pV = Nmc^2 \frac{K_3(u)}{K_2(u)}, \quad (\text{A.14})$$

y entonces, si  $n = N/V$ , la densidad de entalpía  $h = H/V$  será  $h = mc^2 n f(T)$  con

$$f(T) = \frac{K_3\left(\frac{mc^2}{k_B T}\right)}{K_2\left(\frac{mc^2}{k_B T}\right)}. \quad (\text{A.15})$$

## Apéndice B

# Relaciones para el cuádrimomentum del fluido cuántico relativista

Aquí mostraremos algunas relaciones útiles para el cuádrimomentum  $k^\mu$ , definido en (6.50). Algunas relaciones son usadas en cálculos y otras sirven para tener un mejor entendimiento de las variables del fluido.

### B.1. Ecuación de continuidad para $k^\mu$

Así como la cuádrivelocidad  $v^\mu$  y la cuádridensidad de spin  $w^\mu$  satisfacen ecuaciones de continuidad [ecuaciones (6.69) y (6.70) respectivamente], también podemos encontrar una ecuación de continuidad para el cuádrimomentum  $k^\mu$ .

Multiplicando la Ec. (6.72) por  $\rho$ , y luego derivándola, obtendremos

$$\partial_\mu(\rho k^\mu) = \partial_\mu(\rho v^\mu \cos \theta) - \frac{1}{2m} \partial_\mu(\rho \partial_\alpha \theta (v^\alpha w^\mu - v^\mu w^\alpha)) - \frac{i}{2m} \varepsilon^{\mu\alpha\kappa\lambda} \partial_\mu \partial_\alpha (\rho v_\kappa w_\lambda). \quad (\text{B.1})$$

Usando las ecuaciones (6.69) y (6.70), y argumentos de antisimetría en los índices, es posible obtener

$$\partial_\mu(\rho k^\mu) = \frac{\rho}{2m} \partial_\alpha \theta (v^\mu \partial_\mu w^\alpha - \partial_\mu v^\alpha w^\mu). \quad (\text{B.2})$$



Finalmente, haciendo uso de la Ec. (6.71), y nuevamente apelando a la anti-simetría de los índices, encontramos finalmente

$$\partial_\mu(\rho k^\mu) = \frac{\rho}{2m} v^\mu \partial_\alpha \theta \partial^\alpha w_\mu. \quad (\text{B.3})$$

La ecuación (B.3) representa una ecuación de continuidad para el cuadrimomentum. Notemos que existe una fuente que depende tanto de las partículas como de las antipartículas a través del parámetro  $\theta$ .

## B.2. Separación del cuadri-momentum $k^\mu$ debido a la descomposición de Gordon para la velocidad

La descomposición de Gordon [130] consiste en separar, de las variables de una partícula, la parte cuántica relativista que coincide con el límite no relativista, de la parte que contenga los grados de libertad internos de esa partícula.

Usando las ecuaciones de Dirac (6.13) y (6.14), la descomposición de Gordon para la cuadrivelocidad  $v^\mu$  dada en (6.47) es

$$v^\mu = \frac{1}{2m\rho} (i\bar{\psi}\partial^\mu\psi - i\partial^\mu\bar{\psi}\psi - 2eA^\mu\bar{\psi}\psi) + \frac{i}{2m\rho}\partial_\nu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi). \quad (\text{B.4})$$

El primer término al lado derecho de la ecuación (B.4) se convierte en la velocidad de la partícula en el límite no relativista. El segundo término representa la parte de la velocidad que aparecen debido a los grados internos de la partícula. Esto está estrechamente relacionado con el efecto *zitterbewegung*.

Ahora, usando la definición (6.72) para  $k^\mu$ , y la Ec. (B.4), podemos escribir el cuadrimomentum como

$$k^\mu = k_0^\mu + k_Q^\mu, \quad (\text{B.5})$$

donde

$$k_0^\mu = \frac{i\Omega}{2m\rho^2} (\bar{\psi}\partial^\mu\psi - \partial^\mu\bar{\psi}\psi) - \frac{e}{m}A^\mu, \quad (\text{B.6})$$

y

$$k_Q^\mu = \frac{e\bar{\Omega}^2}{m\rho^2}A^\mu - \frac{i\Omega}{2m\rho^2}\partial_\nu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi) - \frac{1}{2m}\partial_\alpha(v^\alpha w^\mu - v^\mu w^\alpha) - \frac{i}{2m\rho}\varepsilon^{\mu\alpha\gamma\lambda}\partial_\alpha(\rho v_\gamma w_\lambda). \quad (\text{B.7})$$

Podemos ver que, en el límite no relativista,  $k_0^\mu$  se reducirá a la velocidad de la partícula. Por otro lado,  $k_Q^\mu$  es una parte netamente cuántico-relativista que se debe al spin y a la mezcla de estados de energía positiva y negativa. Esta separación sólo puede hacerse en términos de los bispinores  $\psi$ , y no en el marco de las variables de fluido. Lo anterior nos muestra que la cuadrivelocidad y el cuádrimomentum no tienen una relación simple en la mecánica cuántica relativista.

De las ecuaciones (B.4) y (B.5), podemos ver que, en el formalismo de fluido desarrollado en este trabajo, algunas variables no tienen una correspondencia directa con las variables usadas en teorías no relativistas

## Referencias

- [1] E. E. Vogel, *Aspectos históricos, filosóficos y anecdóticos de los orígenes de la mecánica cuántica* (Publicaciones científicas de la Sociedad Chilena de Física, No. 5, 1984).
- [2] J. Hoyos, A. Reisenegger y J. A. Valdivia, *Astron. Astrophys.* **487**, 789 (2008).
- [3] R. N. Henriksen y D. R. Rayburn, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **166**, 409 (1974).
- [4] V. Buzzi, K. C. Hines y R. A. Treumann, *Phys. Rev. D* **51**, 6663 (1995).
- [5] R. A. Cairns, B. Rau y M. Airila, *Phys. Plasmas* **7**, 3736 (2000).
- [6] D. Umstadter, *J. Phys. D* **36**, R151 (2003).
- [7] G. A. Mourou, T. Tajima y S. V. Bulanov, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 309 (2006).
- [8] D. B. Melrose, *Phys. Scripta* **T84**, 7 (2000).
- [9] C. Thompson y O. Blaes, *Phys. Rev. D* **57**, 3219 (1998).
- [10] B. A. Shadwick, G. M. Tarkenton y E. H. Esarey, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 175002 (2004).
- [11] O. Skjæraasen, A. Melatos y A. Spitkovsky, *Astrophys. J.* **634**, 542 (2005).
- [12] O. Skjæraasen y A. Melatos, *Adv. Space Res.* **40**, 1505 (2007).

- [13] S. M. Mahajan, Phys. Rev. Lett. **90**, 035001 (2003).
- [14] C. W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Co., 1973).
- [15] L. Gomberoff y R. M. O. Galvão, Phys. Rev. E **56**, 4574 (1997).
- [16] G. W. Gibbons, S. W. Hawking y S. Siklos, *The Very Early Universe* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [17] T. Tajima y T. Taniuti, Phys. Rev. A **42**, 3587 (1990).
- [18] D. B. Blaschke et al., Phys. Rev. Lett. **96**, 140402 (2006).
- [19] G. P. Zank y R. G. Greaves, Phys. Rev. E **51**, 6079 (1995).
- [20] M. Gedalin, D. B. Melrose y E. Gruman, Phys. Rev. E **57**, 3399 (1998).
- [21] M. F. Curtis, *The Theory of Neutron Stars Magnetospheres* (University of Chicago Press, Chicago, 1991).
- [22] Q. Luo, D. B. Melrose y D. Fussell, Phys. Rev. E **66**, 026405 (2002).
- [23] S. Iwamoto y F. Takahara, Astrophys. J. **565**, 163 (2002).
- [24] J. F. C. Wardle, D. C. Homan, R. Ojha y D. H. Roberts, Nature **395**, 457 (1998).
- [25] A. K. Harding, Astrophys. J. **300**, 167 (1986).
- [26] T. Tatsuno, V. I. Berezhiani y S. M. Mahajan, Phys. Rev. E **63**, 046403 (2001).
- [27] F. Verheest, Phys. Lett. A **213**, 177 (1996).

- [28] S. S. Bulanov, A. M. Fedotov y F. Pegoraro, *Phys. Rev. E* **71**, 016404 (2005).
- [29] S. S. Bulanov, *Phys. Rev. E* **69**, 036408 (2004).
- [30] A. Barnes y J. V. Hollweg, *J. Geophys. Res.* **79**, 2302 (1974).
- [31] L. Gomberoff, F. Gratton y G. Gnavi, *J. Geophys. Res.* **99**, 14717 (1994).
- [32] F. A. Asenjo, V. Muñoz, J. A. Valdivia y T. Hada, *Phys. Plasmas* **16**, 122108 (2009).
- [33] S. Matsukiyo y T. Hada, *Phys. Rev. E* **67**, 046406 (2003).
- [34] V. Muñoz, T. Hada y S. Matsukiyo, *Earth, Planets and Space* **58**, 1213 (2006).
- [35] V. Muñoz, L. Gomberoff y R. M. Galvão, *Phys. Rev. E* **56**, 4581 (1997).
- [36] V. Muñoz y L. Gomberoff, *Phys. Plasmas* **7**, 4916 (2000).
- [37] V. Muñoz y L. Gomberoff, *Phys. Rev. E* **57**, 994 (1998).
- [38] V. Muñoz y L. Gomberoff, *Phys. Plasmas* **5**, 3171 (1998).
- [39] V. I. Berezhiani y S. M. Mahajan, *Phys. Rev. E* **52**, 1968 (1995).
- [40] J. T. Mendonça y P. Castelo Ferreira, *Europhys. Lett.* **75**, 189 (2006).
- [41] J. T. Mendonça et al., *Phys. Lett. A* **239**, 373 (1998).
- [42] J. T. Mendonça, A. M. Martins y A. Guerreiro, *Phys. Rev. E* **62**, 2989 (2000).
- [43] F. Mandl y G. Shaw, *Quantum Field Theory* (John Wiley & Sons, 1984).
- [44] L. O. Silva, R. Bingham, J. M. Dawson y W. B. Mori, *Phys. Rev. E* **59**, 2273 (1999).

- [45] F. C. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion* (Plenum Press, Nueva York and London, 1984), segunda edición.
- [46] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, Inc., 1975), segunda edición.
- [47] M. H. Thoma, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 959 (2009).
- [48] M. V. Medvedev, *Phys. Rev. E* **59**, 4766 (1999).
- [49] D. Pines, *J. Nucl. Energy* **2**, 5 (1961).
- [50] E. G. Harris, *Adv. Plasma. Phys.* **3**, 157 (1969).
- [51] D. F. DuBois, *Lectures. Theor. Phys.* **9C**, 469 (1967).
- [52] R. Balescu, *Phys. Fluids* **4**, 94 (1961).
- [53] L. Gomberoff, *J. Plasma Phys.* **18**, 145 (1977).
- [54] M. E. Rensink, *Phys. Rev.* **164**, 175 (1967).
- [55] L. Wei y Y.-N. Wang, *Phys. Rev. B* **75**, 193407 (2007).
- [56] M. G. Baring y A. K. Harding, *Astrophys. J.* **547**, 929 (2001).
- [57] D. Kremp et al., *Phys. Rev. E* **60**, 4725 (1999).
- [58] F. Cornu, *Phys. Rev. E* **58**, 5268 (1998).
- [59] E. Madelung, *Z. Phys.* **40**, 332 (1926).
- [60] G. Salesi et al., arXiv **hep-th/9802106** (1998).
- [61] F. Haas, *Phys. Plasmas* **12**, 062117 (2005).

- [62] F. Haas, G. Manfredi y M. Feix, *Phys. Rev. E* **62**, 2763 (2000).
- [63] D. Anderson et al., *Phys. Rev. E* **65**, 046417 (2002).
- [64] G. Manfredi y F. Haas, *Phys. Rev. B* **64**, 075316 (2001).
- [65] G. Manfredi, *Fields Institute Communications* **46**, 263 (2005).
- [66] F. Haas, *Europhys. Lett.* **77**, 45004 (2007).
- [67] S. Ali et al., *Phys. Lett. A* **366**, 606 (2007).
- [68] P. K. Shukla y L. Stenflo, *Phys. Lett. A* **357**, 229 (2006).
- [69] H. Ren, Z. Wu y P. K. Chu, *Phys. Plasmas* **14**, 062102 (2007).
- [70] J. Lundin et al., *Phys. Plasmas* **14**, 062112 (2007).
- [71] H. Saleem, A. Ahmad y S. A. Khan, *Phys. Plasmas* **15**, 014503 (2008).
- [72] P. K. Shukla y L. Stenflo, *N. Jour. Phys.* **8**, 111 (2006).
- [73] P. K. Shukla y B. Eliasson, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 096401 (2007).
- [74] P. K. Shukla, *Phys. Lett. A* **352**, 242 (2006).
- [75] P. K. Shukla y L. Stenflo, *Phys. Lett. A* **355**, 378 (2006).
- [76] P. K. Shukla y L. Stenflo, *Phys. Plasmas* **13**, 044505 (2006).
- [77] A. Bret, *Phys. Plasmas* **14**, 084503 (2007).
- [78] H. Ren, Z. Wu, J. Cao y P. K. Chu, *Phys. Lett. A* **372**, 2676 (2008).
- [79] P. K. Shukla et al., *Phys. Plasmas* **13**, 112111 (2006).

- [80] A. P. Misra y C. Bhowmik, *Phys. Plasmas* **14**, 012309 (2007).
- [81] F. Haas et al., *Phys. Plasmas* **10**, 3858 (2003).
- [82] A. P. Misra, P. K. Shukla y C. Bhowmik, *Phys. Plasmas* **14**, 082309 (2007).
- [83] A. P. Misra y C. Bhowmik, *Phys. Lett. A* **369**, 90 (2007).
- [84] K. Roy, A. P. Misra y P. Chatterjee, *Phys. Plasmas* **15**, 032310 (2008).
- [85] V. Bychkov, M. Modestov y M. Marklund, *Phys. Plasmas* **15**, 032309 (2008).
- [86] D. Shaikh y P. K. Shukla, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 125002 (2007).
- [87] W. Masood, M. Salimullah y H. A. Shah, *Phys. Lett. A* **372**, 6757 (2008).
- [88] S. Ali et al., *Phys. Lett. A* **373**, 2940 (2009).
- [89] Y.-D. Jung y I. Murakami, *Phys. Lett. A* **373**, 969 (2009).
- [90] F. Haas, G. Manfredi y J. Goedert, *Phys. Rev. E* **64**, 026413 (2001).
- [91] M. Bonitz, D. C. Scott, R. Binder y S. W. Koch, *Phys. Rev. B* **50**, 15095 (1994).
- [92] M. Bonitz et al., *Phys. Rev. E* **49**, 5535 (1994).
- [93] M. Marklund y G. Brodin, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 025001 (2007).
- [94] G. Brodin y M. Marklund, *N. Jour. Phys.* **9**, 277 (2007).
- [95] P. R. Holland, *The Quantum Theory of Motion* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1993).
- [96] C. Dewdney et al., *Nature* **336**, 536 (1988).



- [97] T. Takabayasi, Prog. Theor. Phys. **14**, 283 (1955).
- [98] T. Takabayasi, Prog. Theor. Phys. **12**, 810 (1954).
- [99] G. Brodin, M. Marklund y G. Manfredi, Phys. Rev. Lett. **100**, 175001 (2008).
- [100] P. K. Shukla, Nature **5**, 92 (2009).
- [101] A. P. Misra, Phys. Plasmas **14**, 064501 (2007).
- [102] P. K. Shukla, Phys. Lett. A **369**, 312 (2007).
- [103] M. Marklund, B. Eliasson y P. K. Shukla, Phys. Rev. E **76**, 067401 (2007).
- [104] A. P. Misra y P. K. Shukla, Phys. Plasmas **15**, 052105 (2008).
- [105] A. P. Misra y N. K. Ghosh, Phys. Lett. A **372**, 6412 (2008).
- [106] J. Zamanian, G. Brodin y M. Marklund, N. Jour. Phys. **11**, 073017 (2009).
- [107] G. Brodin y M. Marklund, N. Jour. Phys. **10**, 115031 (2008).
- [108] P. Burt y H. D. Wahlquist, Phys. Rev. **125**, 1785 (1962).
- [109] G. Brodin et al., Phys. Rev. Lett. **101**, 245002 (2009).
- [110] S. C. Cowley, R. M. Kulsrud y E. Valeo, Phys. Fluids **29**, 430 (1986).
- [111] F. A. Asenjo, Phys. Lett. A **373**, 4460 (2009).
- [112] N. A. Krall y A. W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics* (San Francisco Press, Inc., San Francisco, 1986).
- [113] R. Hakim y J. Heyvaerts, Phys. Rev. A **18**, 1250 (1978).

- [114] E. Calzetta, S. Habib y B. L. Hu, *Phys. Rev. D* **37**, 2901 (1988).
- [115] G. R. Shin y J. Rafelski, *Phys. Rev. A* **48**, 1869 (1993).
- [116] H. D. Sivak, *Ann. Phys.* **159**, 351 (1985).
- [117] B. Jancovici, *Nuovo Cimento* **25**, 428 (1962).
- [118] V. Kowalenko, N. E. Frankel y K. C. Hines, *Phys. Rep.* **126**, 109 (1985).
- [119] D. B. Melrose, *Quantum Plasmadynamics: Unmagnetized plasmas, Lectures Notes in Physics*, Vol. 735 (Springer, 2008).
- [120] D. B. Melrose, *Phys. Lett. A* **347**, 103 (2005).
- [121] D. B. Melrose, J. I. Weise y J. McOrist, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 8727 (2006).
- [122] T. Takabayasi, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **4**, 2 (1957).
- [123] T. Takabayasi, *Phys. Rev.* **102**, 297 (1956).
- [124] T. Takabayasi, *Prog. Theor. Phys.* **13**, 222 (1955).
- [125] T. Takabayasi, *Nuovo Cimento* **3**, 233 (1956).
- [126] T. Takabayasi, *Séminaire L. de Broglie. Théories physiques* **26 exp.3**, 1 (1956-1957).
- [127] J. D. Bjorken y S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, Inc., 1964).
- [128] M. E. Peskin y D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, 1995).

- [129] S. S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory* (Dover Publications, Inc., Nueva York, 2005).
- [130] P. Strange, *Relativistic Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, 1998).
- [131] I. Bialynicki-Birula, *Acta Phys. Pol. B* **26**, 1201 (1995).
- [132] E. Recami y G. Salesi, *Phys. Rev. A* **57**, 98 (1998).
- [133] P. Holland, *Ann. Phys. (Leipzig)* **12**, 446 (2003).
- [134] A. K. Harding y D. Lai, *Rep. Prog. Phys.* **69**, 2631 (2006).
- [135] M. Sharif y U. Sheikh, *Gen. Relativ. Gravit.* **39**, 1437 (2007).
- [136] M. Takahashi et al., *Astrophys. J.* **572**, 950 (2002).
- [137] M. Szydlowski y A. Krawiec, *Phys. Rev. D* **70**, 043510 (2004).
- [138] J. Sakai y T. Kawata, *J. Phys. Soc. Jpn.* **49**, 747 (1980).
- [139] J. Sakai y T. Kawata, *J. Phys. Soc. Jpn.* **49**, 753 (1980).
- [140] S. S. Komissarov, *Phys. Lett. A* **232**, 435 (1997).
- [141] M. Gedalin, *Phys. Rev. E* **47**, 4354 (1993).
- [142] S. Koide, *Astrophys. J.* **696**, 2220 (2009).
- [143] S. Koide, *Astrophys. J.* **701**, 2033 (2009).
- [144] J. Freidberg, *Plasma Physics and Fusion Energy* (Cambridge University Press, Nueva York, 2007).

- [145] R. L. Mace y M. A. Hellberg, *Phys. Plasmas* **10**, 21 (2003).
- [146] W. Greiner, L. Neise y H. Stocker, *Thermodynamics and Statistical Mechanics* (Springer, 2000).