REPRESENTACION DEL GRUPO SIMETRICO POR OPERADORES DE FOURIER GRASSMANN

Tesis entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en
Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS

por

JESUS NELSON JUYUMAYA ROJAS

Junio, 1991

Director de Tesis: Jorge Soto Andrade

Facultad de Ciencias

Universidad de Chile

INFORME DE APROBACION

TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el Candidato

Jesús Nelson Juyumaya Rojas

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas.

Patrocinante de Tesis
Dr. Jorge Soto A.

Comisión Informante de Tesis
Dr. Ricardo Baeza R. — Ricardo Baeza
Dr. Manuel Elgueta D.
Dr. José Pantoja M.
Dr. Jorge Vargas

A mis padres e hijo,
a aquellos de mi generación que se rebelaron contra la tiranía,
a los marginales.

... Y les digo que tengo la certeza que la semilla que entregáramos a la consciencia digna de miles y miles de chilenos no podrá ser segada definitivamente. Tienen la fuerza, podrán avasallarnos, pero no se detienen los procesos sociales ni con el crimen, ni con la fuerza. La historia es nuestra y la hacen los pueblos ...

(Del último discurso del Presidente S. Allende G.)

AGRADECIMIENTOS

Mi reconocimiento y agradecimiento a Don Jorge Soto, por su incansable apoyo y motivación.
Mis agradecimientos a los profesores K. Shinoda y J. Vargas por el interes y sugerencias para el desarrollo de esta tesis.
Mi agradecimiento a FUNDACION ANDES y a FONDECYT (Proy. 89-1073) por el apoyo económico.

RESUMEN

Nosotros introducimos los operadores de Fourier-Grassmann, y mediante ellos construimos una nueva representación $(\underline{V}, \tau)$ del grupo simétrico. En seguida se calcula el espectro de $\underline{V}$ según los grupos $Gl_n(\mathsf{F}_q)$ y $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathsf{F}_q^\times)^n$, $n \in \mathsf{N}$. Además se demuestra que la dualidad entre las multiplicidades de estos espectros se explica por una dualidad entre sus álgebras conmutantes.

Por otra parte se estudia el álgebra de Hecke de $Gl_n(\mathsf{F}_q)$ respecto a su subgrupo unipotente maximal superior. En particular se demuestra que esta álgebra es engendrada por las homotecias y los operadores de Fourier-Grassmann. Por último a traves de éstos operadores no standard se recupera los teoremas clásicos de estructuras para las álgebras de Hecke de $Gl_n(\mathsf{F}_q)$ respecto a su subgrupo de Borel relativa a sus carácteres unidimensionales.

ABSTRACT

Here we introduce the Fourier-Grassmann operators and with the help of those operators we construct a new representation $(\underline{V}, \tau)$ of the symmetric group. Then we calculate the spectra of $\underline{V}$ with respect to the groups $Gl_n(\mathsf{F}_q)$ and $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathsf{F}_q^\times)^n$, $n \in \mathsf{N}$. Furthermore we prove that the duality between the multiplicities of these spectra is explained by a duality between their commuting algebra.

On the other hand, we study the Hecke algebra of $Gl_n(\mathsf{F}_q)$ with respect to its maximal upper unipotent subgroup. In particular we prove that this algebra is generated by the homothecies and Fourier-Grassmann operators. Finally, with the help of these non standard operators we recover the classic structure theorems for the Hecke algebra of $Gl_n(\mathsf{F}_q)$ with respect to its Borel subgroup, and a 1-dimensional character.

Contenido

Introducción

Motivación.

En teoría de representaciones de grupos los elementos (representaciones irreducibles) del conjunto de tipos de isomorfía $\hat{G}$ de un grupo finito clásico G se clasifican en la *serie principal*, *series intermedias* y *serie cuspidal* (o *discreta*) de representaciones de G. Con la convención que las representaciones unidimensionales pertenecen a la serie cuspidal de G, se tiene que los elementos de las series intermedias se obtienen como componentes de la inducida $Ind_P^G \pi$, donde P es un subgrupo parabólico de G, cuya descomposición de Levi se escribe $P = MU$ con M reductivo y U unipotente, y π es representación de la serie discreta de M levantada a P. Así, el estudio de $\hat{G}$ se reduce esencialmente a describir la serie principal y serie discreta de representaciones de G.

Por otra parte pese a ser conocidos los carácteres (lo cual en principio basta para describir $\hat{G}$) de las representaciones irreducibles de G, interesa construir modelos, en lo posible geométricos, de los elementos de $\hat{G}$.

Detengamonos en el caso que G es el grupo lineal $GL_n(k)$, donde k denota al cuerpo finito $\mathbb{F}_q$ con q elementos . En este caso se conoce una construcción geométrica elemental de la serie principal debida a R. Steinberg ([12]) lo que aún no se obtiene para la serie cuspidal.

De una observación de P.Cartier es posible realizar de manera relativamente geométrica y uniforme todos los elementos de $\hat{G}$ para el grupo $G = GL_2(k)$. Más precisamente , a partir de una representación natural (V, ρ) de G (la cual suministra por descomposición modelos geométricos de todos los elementos de la serie principal) es posible construir una representación $(V, \hat{\rho})$ de G (representación de Weil de G, ver [10]) que suministra por descomposición modelos "meta-geométricos" de la serie cuspidal de G. Para ejemplificar el fenómeno anterior desarrollemos brevemente el caso $SL_2(k)$, puesto que este no difiere en esencia del caso $Gl_2(k)$ y es de más comoda escritura:

Consideremos la representación natural $(L^2(k^2), \rho)$ de $G = SL_2(k)$ *asociada a la acción usual de* G *sobre el plano* k^2; *nótese que* ρ *suministra por descomposición modelos geométricos de la serie principal.*

Sea ψ *un carácter aditivo, no trivial, de* k, *y definamos una transformada de Fourier parcial* $\mathcal{F}$ *de* $L^2(k^2)$ *en sí mismo, por*

$$(\mathcal{F}f)(x_1, x_2) = q^{-1/2} \sum_{y_2 \in k} \psi(-x_2 y_2) f(x_1, y_2),$$

donde $f \in L^2(k^2), (x_1, x_2) \in k^2$.

A partir de $\mathcal{F}$ *definimos la representación* $(L^2(k^2), \tilde{\rho})$ *de* G, *donde* $\tilde{\rho}_g = \mathcal{F} \circ \rho_g \circ \mathcal{F}^{-1}$, $g \in G$. *Al explicitar los operadores* $\tilde{\rho}_g$ *sobre los generadores de Chevalley de* G, *se ve que ellos dependen de hecho de la forma cuadrática hiperbolica* $\mathrm{H} : x \mapsto x_1 x_2$ $(x = (x_1, x_2) \in k^2)$ *de tal modo que sugiere reemplazar* H *por la otra forma cuadrática de rango dos sobre* k, *i.e., por la norma* $\mathrm{N} : z \mapsto z\overline{z}$ $(z \in k_2, k_2$ *la extensión cuadrática* de k); *reinterpretando se construye la representación* $(L^2(k^2), \hat{\rho})$ *de* G *que nos da por descomposición modelos "meta-geométricos" de la serie cuspidal de* G.

En la situación anterior obsérvese el hecho notable que el operador de entrelazamiento involutivo natural F (dado por $(Ff)(x_1, x_2) = f(x_2, x_1), f \in L^2(k^2), (x_1, x_2) \in k^2$) de $\tilde{\rho}$ pasa por medio de $\mathcal{F}$ a un operador involutivo más sofisticado J de ρ, a saber una "Transformada de Fourier- Grassmann" dada por

$$(Jf)(x) = q^{-1} \sum_{y \in k^2} \psi(x \wedge y) f(y),$$

donde $f \in L^2(k^2)$, $x \in k^2$.

Notar que el operador J representa al grupo de Weyl de $SL_2(k)$ (grupo simétrico de orden 2) de $SL_2(k)$. Destaquemos ahora que todo lo anterior aún no ha sido establecido para $GL_n(k), n > 2$. Es así, que el propósito de este trabajo es contribuir a esclarecer la situación, descrita anteriormente para $GL_n(k), n \in \mathbb{N}$. Más precisamente, nuestro trabajo se desarrolla en torno a la construcción y estudio de Transformadas de Fourier-Grassmann, que representen al grupo de Weyl de $GL_n(k)$, i.e., que representen al grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$.

Esquema de Trabajo.

En el capítulo 1 se construye una representación $(\underline{V}, \tau)$ del grupo simétrico $\mathfrak{S}_n (n \in \mathbb{N})$, mediante operadores de Fourier-Grassmann $J_1, \ldots, J_{n-1}$ (i.e. operadores que generalizan al operador J) que representan los generadores de Coxeter $(1,2), \ldots, (n-1, n)$ de $\mathfrak{S}_n$.

Para esto se considera primero el conjunto Ω_n de las "banderas de Grassmann" de largo n, más precisamente los elementos de Ω_n son n-tuplos $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, donde ω_i $(1 \leq i \leq n)$ es un i-vector descomponible no nulo sobre k y $[\omega_1] \subseteq \ldots \subseteq [\omega_n]$ (la notación $[\omega_j]$ denota al k-subespacio de k^n desplegado por el j-vector ω_j); y para $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ en Ω_n se denota por $\Omega_i(\omega)$ $(0 < i < n)$ al conjunto formado por los $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ de Ω_n tales que $\zeta_j = \omega_j$ para todo $j \neq i$. Consideremos ahora el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^{\Omega_n}$ y tomemos un carácter ψ, no trivial, del grupo aditivo k^+ de k. Se define los operadores de Fourier-Grassmann $J_1, \ldots, J_n$ como

$$(J_1 f)(\omega) = \frac{1}{q} \sum_{\zeta \in \Omega_1(\omega)} \psi\left(\frac{\omega_1 \wedge \zeta_1}{\omega_2}\right) f(\zeta),$$

y para $1 < i < n$

$$(J_i f)(\omega) = \frac{1}{q} \sum_{\zeta \in \Omega_i(\omega)} \psi\left(\frac{\omega_i \vee \zeta_i}{\omega_{i-1}}\right) f(\zeta),$$

donde $f \in \mathbb{C}^{\Omega_n}$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ y el producto regresivo $\omega_i \vee \zeta_i$ se realiza en el k-espacio vectorial $[\omega_{i+1}]$ respecto al elemento de volumen ω_{i+1}.

Nótese que J_1 es totalmente análogo al operador J, lo que aparentemente no es así para el resto de los operadores; esta aparente diferencia en la naturaleza de los operadores es abordada en la observación 1.2.

Es claro que J_i conmuta con J_j, si el valor absoluto $|i-j|$ de $i-j$ es mayor que 1; luego $(J_iJ_j)^2$ es igual a la identidad Id de $\mathbb{C}^{\Omega_n}$, si $|i-j|>1$. Ahora, para todo i se tiene $J_i^2 = Id - q^{-2}P_i$, ver proposición 1.3, donde el operador P_i $(0<i<n)$ está dado por

$$(P_if)(\omega) = \sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} f(\zeta). \qquad (f\in\mathbb{C}^{\Omega_n}, \omega\in\Omega_n)$$

Luego J_i es involución (i.e. $J_i^2 = Id$) sobre el núcleo V_i de P_i; por consiguiente los operadores de Fourier-Grassmann son involuciones sobre $\bigcap_{i=1}^{n-1} V_i$.

Por otra parte, en la proposición 1.11 se demuestra que el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\underline{V}$ ($f\in\underline{V}$ si y sólo si $f\in\bigcap_{i=1}^{n-1} V_i$ y $J_{i-1}\cdots J_{i-j}f\in V_i$, para todo $1<i<n$, $0<j<i$) es estable por los operadores de Fourier-Grassmann. Ahora, de la relación $J_iJ_{i+1}J_i = J_{i+1}J_iJ_{i+1}$ $(0<i<n-1)$ que es valida sobre todo $\mathbb{C}^{\Omega_n}$(ver proposición 1.6) no es difícil ver que $(J_iJ_{i+1})^3$, a nivel de $\underline{V}$, es igual a la identidad Id.

Así, sobre el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\underline{V}$, que es estable por los operadores de Fourier-Grassmann, se cumple las relaciones de Coxeter: $J_i^2 = Id\,(0<i<n)$, $(J_iJ_{i+1})^3 = Id$ $(0<i<n-1)$, $(J_iJ_j)^2 = Id$, si $|i-j|>1$,$(0<i,j<n)$. Luego la función $(i,i+1)\mapsto J_i$ de $\mathfrak{S}_n$ en Aut$(\underline{V})$ determina una representación $(\underline{V},\tau)$ de $\mathfrak{S}_n$, ver teorema 1.12.

En el capítulo 2 se considera la representación natural $(L^2(\Omega_n),\rho)$ de $G = GL_n(k)$ asociada a la acción obvia de G sobre Ω_n; nótese que ρ suministra por descomposición toda la serie principal de G, ver observación 2.5. Como los operadores $J_1,\ldots,J_{n-1},P_1,\ldots,P_{n-1}$ son operadores de entrelazamiento para ρ (proposición 2.9.) resulta claro de la definición misma de $\underline{V}$ que $(\underline{V},\rho)$ es una subrepresentación de ρ. Al estudiar el espectro de $(\underline{V},\rho)$ resulta que el nos da, por descomposición, todos los elementos de la serie principal de G de dimensíon de Gel'fand-Kirillov maxima, a saber $n(n-1)/2$ (la dimensión de cada representacion irreducible de G es un polinomio en q, cuyo grado es la dimensión de Gel'fand-Kirillov de la representación en cuestión). Cabe destacar que en el teorema 2.12 se dan modelos Geométrico- Grassmannianos de estas representaciones.

En orden a *explicar las multiplicidades que aparecen en el espectro de* $(\underline{V}, \rho)$ se observa primero que para cada $r = (r_1, \ldots, r_n)$ en $A := (k^\times)^n$ hay un operador de entrelazamiento H_r definido por

$$(H_r f)(\omega) = f(r \cdot \omega),$$

para $f \in L^2(\Omega_n), \omega \in \Omega_n$, donde $r \cdot \omega$ es la bandera de Grassmann que tiene en su i-ésima coordenada a $r_1 \cdots r_i \omega_i$ $(0 < i < n+1)$, si $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Luego se construye una representación $(\underline{V}, \sigma)$ del producto semi-directo $\Gamma := A \rtimes \mathfrak{S}_n$, donde A actúa vía los operadores de homotecia, y $\mathfrak{S}_n$ vía los operadores J's. Nótese que como σ conmuta con ρ (i.e. $\sigma_\gamma \circ \rho_g = \rho_g \circ \sigma_\gamma, g \in G, \gamma \in \Gamma$) se tiene que las componentes ρ-isotípicas son Γ-estables, y viceversa (ver 2.1.1.3), por consiguiente una primera descomposición de σ es aquella en componente ρ-isotípicas; en el teorema 2.17 se da el espectro de $(\underline{V}, \sigma)$. Como se dijo anteriormente σ conmuta con ρ, luego es posible considerar la representación $(\underline{V}, \rho \circ \sigma)$ de $G \times \Gamma$ (donde la acción está dada por $(\rho \circ \sigma)_{(g,\gamma)} = \rho_g \circ \sigma_\gamma$, $g \in G, \gamma \in \Gamma$), en el teorema 2.19 se ve que $\rho \circ \sigma$ es libre de multiplicidades.

Teniendo presente los espectros anteriores, hacemos notar en la observación 2.20 que si $N \subset \hat{G}$ parametriza los tipos de isomorfía de $(\underline{V}, \rho)$, entonces existe función inyectiva $u : N \to \hat{\Gamma}$ tal que

$$\underline{V} \cong_G \oplus_{\pi \in N} [dim_{\mathbf{C}}\, u(\pi)] \pi,$$

$$\underline{V} \cong_\Gamma \oplus_{\pi \in N} [dim_{\mathbf{C}}\, \pi] u(\pi), \tag{.1}$$

$$\underline{V} \cong_{G \times \Gamma} \oplus_{\pi \in N} [\pi \otimes u(\pi)].$$

Así, este fenómeno de descomposición permite explicar las multiplicidades del espectro de $(\underline{V}, \rho)$ como dimensión de ciertas representaciones de el grupo Γ que actúa sobre $\underline{V}$. Idem con el espectro de σ.

En la proposición 2.21 se prueba en base al teorema de Burnside (ver teorema 11, §6., de [8]) que si G y Γ son grupos cualesquiera con representaciones (V, ρ) y (V, σ) respectivamente, tales que ρ conmuta con σ y con espectro como los de (1), entonces el homomorfismo $\sigma : \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma \gamma \mapsto \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma \sigma_\gamma$ del álgebra de grupo $\mathbb{C}[\Gamma]$ de Γ en el álgebra conmutante $End_\rho V$ es epiyectivo, i.e., $\sigma(\mathbb{C}[\Gamma]) = End_\rho V$. Claro que tambien vale $\rho(\mathbb{C}[G]) = End_\sigma V$. Así, la dualidad entre las multiplicidades de los espectros de σ y ρ se refleja entre la dualidad de sus álgebras conmutantes.

Cabe destacar que el resultado anterior puede ser interpretado como una generalización del teorema de Burnside, ver observación 2.24.

En el capítulo 3 se aborda el estudio geométrico del álgebra conmutante $\mathcal{H}$ asociada a la representación natural $(L^2(\Omega_n), \rho)$ de G; notar que $(L^2(\Omega_n), \rho)$ es la representación inducida $Ind_U^G 1$, U es el subgrupo unipotente superior maximal de G; luego $\mathcal{H}$ es el álgebra de Hecke de G respecto U.

En una primera etapa se clasifica las G-órbitas en Ω_n^2; en el lema 3.3 se demuestra que ellas están parametrizadas por el subgrupo de matrices monomiales M de G (notar que M se identifica naturalmente con Γ), y luego en la proposición 3.6 se da una invariante geométrica de las G-órbitas de Ω_n^2. Así, se realiza de modo geométrico la base standard $\mathcal{B}$ de $\mathcal{H}$, i.e. la base de $\mathcal{H}$ asociada a las dobles clases de G respecto a U, ver (11.34) de [4].

Nótese que el elemento de $\mathcal{B}$ asociado a $r \in A$ es el operador de homotecia H_r. Denotemos por H_λ^i $(\lambda \in k^\times)$ al operador H_r, donde r es el n-tuplo que tiene a λ en su i-ésima componente y 1 en el resto. Si S_i $(0 < i < n)$ denota al elemento de $\mathcal{B}$ asociado a la transposición $\theta_i = (i, i+1)$, entonces en la proposición 3.10 se prueba que $\{H_r, S_i : \ r \in A, \ 0 < i < n\}$ genera, como álgebra, a $\mathcal{H}$ y se tiene

$$
\begin{array}{lll}
 & H_r H_s = H_{rs}, & (r, s \in A) \\
 & H_r S_i = S_i H_{\theta_i r \theta_i}, & (r \in A, \ 0 < i < n) \\
(.2) & S_i^2 = qId + S_i \sum_{\lambda \in k^\times} H_\lambda^i H_{-\lambda^{-1}}^{i+1}, & (0 < i < n) \\
 & S_i S_{i+1} S_i = S_{i+1} S_i S_{i+1}, & (0 < i < n-1) \\
 & (S_i S_j)^2 = Id, & (0 < i, j < n)
\end{array}
$$

donde $|i - j| > 1$.

En el teorema 3.12 se recupera el teorema de T.Yokonuma (ver [13]), a saber los generadores H_r $(r \in A)$, S_i $(0 < i < n)$ con las relaciones dadas en (2) define una presentación de $\mathcal{H}$.

Retomando los operadores de Fourier-Grassmann, se logra establecer en la proposición 3.13 que los operadores H_r $(r \in A)$ y J_i $(0 < i < n)$ generan, como álgebra, a $\mathcal{H}$ y se tiene las relaciones

$$
\begin{array}{ll}
H_r H_s = H_{rs}, & (r, s \in A) \\
H_r J_i = H_{\theta_i r \theta_i} J_i, & (0 < i < n) \\
J_i^2 = Id - q^{-2} P_i, & (0 < i < n) \\
J_i J_{i+1} J_i = J_{i+1} J_i J_{i+1}, & (0 < i < n-1) \\
J_i J_j = J_j J_i, & (0 < i, j < n)
\end{array}
$$

donde $|i - j| > 1$.

Mas aún en la proposición 3.15 se establece que los generadores H_r $(r \in A)$ y J_i $(0 < i < n)$ con las relaciones anteriores define una presentación para $\mathcal{H}$.

Finalmente en la sección 6 se aborda el estudio de las álgebras de Hecke $\mathcal{H}_\alpha$ de $Ind_B^G \alpha$, $\alpha \in \hat{A}$, donde B es el subgrupo de Borel de G. Para esto hacemos notar primero que $\mathcal{H}_\alpha$ se identifica naturalmente a la subálgebra de $\mathcal{H}$ formada por los operadores ϕ de $\mathcal{H}$ tales que $P_\alpha \phi P_\alpha = \phi$, donde P_α es el proyector de V sobre $Ind_B^G \alpha$. Luego en (3.30) se establece : *J_θ puede ser mirado como elemento de $\mathcal{H}_\alpha$ si y sólo si θ pertenece al estabilizador de la acción (por permutación) de $\mathfrak{S}_n$ sobre $\hat{A}$.*

Luego si K_α denota el estabilizador de α en $\mathfrak{S}_n$, se demuestra en la proposición 3.18: *La familia* $\{J_\theta \mid \theta \in K_\alpha\}$ *es una* $\mathbb{C}$*-base de* $\mathcal{H}_\alpha$.

Por otra parte si $m = (m_1, \ldots, m_s)$ es una partición de n, se entiende por suma parcial de m al $(s+1)$-tuplo $(\kappa_0, \ldots \kappa_s)$, donde $\kappa_0 = 0$ y $\kappa_j = \kappa_{j-1} + m_j$, $0 < j \leq s$. Y se dice que $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ en $\hat{A}$ es un carácter standard de tipo m si $|\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}| = s$ y además $\alpha_{\kappa_r+1} = \alpha_j$ para todo $\kappa_r < j \leq \kappa_{r+1}$, $0 \leq r \leq s$.

Ahora si α es un carácter standard de tipo m, en (3.31) se considera el sistema de generadores $\Sigma(\alpha, m)$ de K_α, el cual está contenido en el sistema de Coxeter de $\mathfrak{S}_n$.

Así, en las proposiciones (3.19 y (3,20) respectivamente se establece :

- La familia $\{Id,\ J_i \mid (i, i+1) \in \Sigma(\alpha, m)\}$ genera $\mathcal{H}_\alpha$, y se tiene las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} &J_i^2 = Id - q^{-2}P_i && \\ &J_iJ_jJ_i = J_jJ_iJ_j && si\ |i-j| = 1 \\ &J_iJ_j = J_jJ_i, && si\ |i-j| > 1, \end{aligned}$$

  donde $(i, i+1)$, $(j, j+1) \in \Sigma(\alpha, m)$.

- La familia $\{Id,\ B_i \mid (i, i+1) \in \Sigma(\alpha, m)\}$ genera $\mathcal{H}_\alpha$ y se tiene las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} &B_i^2 = qId + (q-1)B_i && \\ &B_iB_jB_i = B_jB_iB_j && si\ |i-j| = 1 \\ &B_iB_j = B_jB_i, && si\ |i-j| > 1, \end{aligned}$$

  donde $(i, i+1)$, $(j, j+1) \in \Sigma(\alpha, m)$.

Para terminar obsérvese que para el caso $\alpha = 1$ los operadores $B_1, \ldots B_{n-1}$ corresponden a los elementos de la base standard de $\mathcal{H}_1$ asociados a las transposiciones $(1,2), \ldots (n-1, n)$ de $\mathfrak{S}_n$. Así, se recupera el teorema de N.Iwahori, ver [5].

Capítulo 1

Representación del grupo Simétrico

En este capítulo introducimos los operadores de Fourier-Grassmann, y luego en el teorema 1.12 construimos, vía estos operadores, una nueva representación del grupo simétrico.

1.1 Preliminares

1.1.1 Notaciones

k denota al cuerpo finito con q elementos $\mathbb{F}_q$. Y $k^\times$ denota a $k - \{0\}$.

E denota al k-espacio vectorial k^n, $n \in \mathbb{N}$.

Como es usual $\bigwedge^m E$ ($m \in \mathbb{N}$) denota la m-ésima potencia exterior de E. Los elementos de $\bigwedge^m E$ se llaman m-vectores.

Recuerdese que $\bigwedge^0 E := k$, $\bigwedge^m E = \underline{0}$ si $m > n$ y $dim_k \bigwedge^m E = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ para $0 < m < n+1$.

Un elemento ω_m de $\bigwedge^m E$ se dice descomponible si él se escribe $\omega_m = v_1 \wedge \cdots \wedge v_m$, con $v_i \in E$. Una tal escritura se llama una presentación para ω_m.

El conjunto de todos los elementos descomponibles de $\bigwedge^m E$ lo denotaremos por Δ_m. Y anotaremos por $\Delta_m^\times$ a $\Delta_m - \{0\}$.

Los elementos de Δ_m se denotarán por ω_m , ζ_m , ξ_n, μ_n,...

Sea $\omega_m = v_1 \wedge \cdots \wedge v_m \in \Delta_m$, anotaremos por $[\ \omega_m\ ]$ al k-espacio vectorial $Vect_k(v_1, \ldots, v_m)$ engendrado por $v_1, \ldots, v_m$ donde $v_i \in E$.

Sean ω_m , $\zeta_m \in \Delta_m$, si $[\ \omega_m\ ] = [\ \zeta_m\ ]$ se dice que ω_m es equivalente a ζ_m y escribiremos $\omega_m \equiv \zeta_m$. En caso contrario, i.e., $[\ \omega_m\ ] \neq [\ \zeta_m\ ]$, diremos que ω_m no es equivalente a ζ_m y se escribirá $\omega_m \not\equiv \zeta_m$.

En el caso que $\omega_m \equiv \zeta_m(\omega_m, \zeta_m \in \Delta_m^\times)$ se define la división $\frac{\omega_m}{\zeta_m}$ de ω_m por ζ_m como el único escalar $t \in k$ que satisface $\omega_m = t\ \zeta_m$.

Sean ω, ζ dos vectores descomponibles sobre E. Si ocurre $[\ \omega\ ] \subseteq [\ \zeta\ ]$ se dice que ω está en bandera con ζ, o que ζ domina a ω y se anotará $\omega \prec \zeta$, o equivalentemente en caso contrario escribiremos $\omega \not\prec \zeta$.

1.1.2 Producto progresivo y producto regresivo.

Definición. *Sean $\omega_r \in \Delta_r$, $\zeta \in \Delta_s$. Llamaremos producto progresivo, o producto cuña, de ω_r con ζ_s al elemento $\omega_r \wedge \zeta_s$ de Δ_{r+s}.*

El siguiente resultado es bien conocido y su demostración puede ser consultada, por ejemplo, en [1].

Proposición. *Sean $\omega_r \in \Delta_r$, $\zeta_s \in \Delta_s$, tenemos*

(a) $\omega_r \wedge \zeta_s = 0$ *si y sólo si* $[\ \omega_r\ ] \cap [\ \zeta_s\ ] \neq 0$

(b) $[\ \omega_r\ ] \cap [\ \zeta_s\ ] = \{\ 0\ \}$, *entonces* $[\ \omega_r \wedge \zeta_s\ ] = [\ \omega_r\ ] + [\ \zeta_s\ ]$.

■

En este trabajo no se usará la definición clásica de producto regresivo dada por Bourbaki , sino la definición (más calculatoria si se quiere) dada en [1], puesto que esta se acomoda más a los cálculos que será necesario realizar.

Sea $\omega_r \in \Delta_r$ y sea $m = (m_1, \dots, m_s)$ una partición de r (i.e., m es un s-tuplo ordenado de números enteros no negativos tales que $m_1 + \cdots + m_s = r$), entenderemos por partición de clase m de $\omega_r = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$ a un s-tuplo $(A_1, \dots, A_s)$ tal que:

- $A_j = 1$ si $m_j = 0$,
- $A_j = v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_{m_j}}$, con $j_1 < \cdots < j_{m_j}$ si $m_j \neq 0$,
- $A_i \wedge A_j \neq 0$, si $i \neq j$,
- $A_1 \wedge \cdots \wedge A_s = \pm\omega_r$.

El conjunto de todas las particiones de clase $(m_1, \dots, m_s)$ de $\omega_r = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$ lo denotaremos por $S(v_1, \dots, v_r; m_1, \dots, m_s)$.

Sea $(A_1, \dots, A_s) \in S(v_1, \dots, v_r, m_1, \dots, m_s)$ se define

$$sgn(A_1, \dots, A_s) = \begin{cases} 1 & \text{si } A_1 \wedge \cdots \wedge A_s = \omega_r \\ -1 & \text{si } A_1 \wedge \cdots \wedge A_s = -\omega_r \end{cases}$$

Definición. *Sean $\omega_r \in \Delta_r$, $\zeta_s = u_1 \wedge \cdots \wedge u_s \in \Delta_s$ tales que $r, s > 0$. Definimos el producto regresivo $\vee$ relativo al elemento de volumen $e_E \in \Lambda^n E$, por*

(a) $\omega_r \vee \zeta_s = 0$, *si* $r + s < n$

(b) $\omega_r \vee \zeta_s = \sum_{(A_1,A_2) \in S(u_1,\dots,u_s; r+s-n, n-r)} sgn(A_1, A_2) \frac{\omega_r \wedge A_2}{e_E} A_1$, *si* $r + s \geq n$.

En el caso $r = 0$, i.e., ω_r es un escalar $\lambda \in k$, se conviene que el producto regresivo $\lambda \vee \zeta_s$ sea igual a 0 si $s < n$, e igual a $\lambda \frac{\zeta_s}{e_E}$, si $s = n$. De manera análoga se define $\omega_r \vee \zeta_s$ igual a 0 si $r < n$, e igual a $\lambda \frac{\omega_r}{e_E}$, si $r = n$.

Un hecho básico es que la definición $\omega_r \vee \zeta_s$ no depende de la presentación elegida para ζ_s y por consiguiente la notación $S(u_1, \dots, u_s; r + s - n, n - r)$ puede ser reemplazada por $S(\zeta_s; r + s - n, n - r)$.

La demostración, del lema y proposición que a continuación enunciaremos, pueden ser consultados en p.131-132 de [1].

Lema. *Sean $\omega_r \in \Delta_r$ y $\zeta_s \in \Delta_s$, entonces* *(a)* $\omega_r \vee \zeta_s = \sum_{(A_1,A_2)\in S(\omega_r;n-s,r+s-n)} sgn(A_1,A_2)\frac{A_1\wedge\zeta_s}{e_E}A_2,$

(b) $\omega_r \vee \zeta_s = (-1)^{(n-r)(n-s)}\zeta_s \vee \omega_r.$

■

Proposición. *Si* $\omega_r \in \Delta_r$, $\zeta_s \in \Delta_s$ *son tales que* $[\,\omega_r\,] + [\,\zeta_s\,] = E$, *entonces*

$$[\,\omega_r \vee \zeta_s\,] = [\,\omega_r\,] \cap [\,\zeta_s\,].$$

■

Observación. *(a) Sea* $\mathcal{U}$ *un subespacio, no nulo, de* E *de dimensión* m. *Tomemos* $\{u_1,\ldots,u_m\}$ *y* $\{v_1,\ldots,v_m\}$ *dos bases de* $\mathcal{U}$, *entonces* $u_1\wedge\cdots\wedge u_m = \lambda v_1\wedge\cdots\wedge v_m$, *con* λ *cierto escalar en* k.

Así, todo subespacio, no nulo, de dimensión m *tiene asociado un elemento de* $\Delta_m^\times$, *y viceversa. Se conviene en que el subespacio nulo está representado por escalares no nulos.*

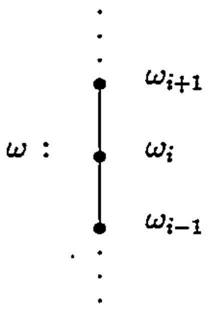
Por consiguiente las proposiciones anteriores permiten decir que el producto progresivo (resp. regresivo) representan , bajo ciertas condiciones, la operación suma (resp. intersección) de subespacios de E.

(b) Es bien sabido que la operación $\wedge$ *(resp.* $\vee$*) se extiende al* k*-espacio vectorial* $\Lambda E := \bigoplus_{m\geq 0}\Lambda^m E$. *Luego* ΛE *es una* k*-álgebra con el producto* $\wedge$ (resp. $\vee$).

Un resultado bien conocido es que la k*-álgebra exterior* $(\Lambda E,+,\wedge)$ *es isomorfa, vía el operador* $\star$ *de Hodge, a la* k*-álgebra* $(\Lambda E,+,\vee)$. *Más aún, el operador* $\star$ *envía* Δ_m *en* Δ_{n-m}.

1.2 Operadores de Fourier-Grassmann

Se entiende por "bandera de Grassmann" de largo n a un n-tuplo $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n)$, donde $\omega_i \in \Delta_i^\times$ y $\omega_1 \prec \cdots \prec \omega_n$. En un grafo ω se representa como



El conjunto de todas las banderas de Grassmann de largo n se denota por Ω_n.

En todo este trabajo el elemento ω de Ω_n se escribe $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Idem para los elementos $\zeta,\ \xi,\ \mu, \ldots$ de Ω_n. Sea $\omega \in \Omega_n$; el conjunto formado por los elementos de Ω_n que difieren de ω a lo más en la i-ésima componente se denota por $\Omega_i(\omega)$, $0 < i < n$, i.e.

$$\Omega_i(\omega) = \{\zeta \in \Omega_n \mid \zeta_j = \omega_j,\ \ j \neq i\}$$

Claro que los elementos de $\Omega_i(\omega)$ poseen i-ésima componente igual a $\omega_{i-1} \wedge u$, con $0 \neq \overline{u} \in [\ \omega_{i+1}\ ]\ /\ [\ \omega_{i-1}\ ]$. Luego el cardinal de $\Omega_i(\omega)$ es $q^2 - 1$.

Sean $\omega \in \Omega_n$, $\zeta \in \Omega_i(\omega)$ $(0 < i < n)$ se escribirá por $\omega + \zeta$ (resp. $\omega - \zeta$) al n-tuplo que difiere de ω sólo en la i-ésima componente, en donde va el elemento $\omega_i + \zeta_i$ (resp. $\omega_i - \zeta_i$) de Δ_i.

Sean $\omega \in \Omega_n$, $r \in k^{\times}$. Se denota por $h_r^i(\omega)$, al elemento de $\Omega_i(\omega)$ que tiene a $r\omega_i$ en su i-ésima componente, $0 < i < n$. Luego hay biyección h_r^i de Ω_n en Ω_n tal que $h_r^i(\Omega_i(\omega)) = \Omega_i(\omega)$. Y además

$$\Omega_i(\omega) = \Omega_i(h_r^i(\omega)).$$

Nota: En todo lo que sigue $\omega_0 = 1$.

Definición. *Sean* ω, ζ *dos banderas de Grassmann tales que* $\zeta \in \Omega_i(\omega)$, *se define el producto* $\vee_i$ *entre* ω *y* ζ, *como*

$$\omega \vee_i \zeta := \frac{\omega_i \vee \zeta_i}{\omega_{i-1}}, \qquad (0 < i < n)$$

donde el producto regresivo $\omega_i \vee \zeta_i$ es respecto al elemento de volumen ω_{i+1} en el k-espacio vectorial $[\,\omega_{i+1}\,]$.

Se tiene

$$\omega_i \vee \zeta_i = \sum_{(A_1,A_2)\in S(\zeta_i\,;i-1,1)} sg(A_1,A_2)\frac{\omega_i \wedge A_2}{\omega_{i+1}}A_1.$$

Pero ζ_i se escribe $\zeta_i = \omega_{i-1} \wedge u$, para $1 < i < n$ y $u \in [\omega_{i+1}]$. Luego

$$\omega_i \vee \zeta_i = \frac{\omega_i \wedge u}{\omega_{i+1}}\omega_{i-1}.$$

Observación. *Nótese que $\omega_1 \vee \zeta_1$ es el escalar $\frac{\omega_1 \wedge \zeta_1}{\omega_2}$ de k, y $\omega_i \vee \zeta_i$ es siempre un multiplo escalar de ω_{i-1}, para todo $1 < i < n$. Por consiguiente $\omega \vee_i \zeta$ está en k, para todo $0 < i < n$.*

La siguiente proposición resulta clara de las propiedades elementales del producto regresivo.

Proposición 1.1 *Sean $\omega \in \Omega_n$, $\zeta, \eta \in \Omega_i(\omega)\,(0 < i < n)\, r \in k^\times$, se tiene*

(a) $\omega \vee_i \zeta = -\zeta \vee_i \omega$,

(b) $(\omega \pm \zeta) \vee_i \eta = \omega \vee_i \eta \pm \zeta \vee_i \eta$,

(c) $h_r^i(\omega) \vee_i \zeta = \omega \vee_i h_r^i(\zeta) = r\omega \vee_i \zeta$,

(d) $h_r^j(\omega) \vee_i h_r^j(\zeta) = r^{-1}\omega \vee_i \zeta$,

donde $j \in \{i+1, i-1\}$.

∎

Se denota por $\Omega_i^\times(\omega)$, $\omega \in \Omega_n$, al subconjunto de Ω_n formado por los elementos ζ de $\Omega_i(\omega)$ tales que $\zeta_i \not\equiv \omega_i$. En otros terminos

$$\Omega_i^\times(\omega) = \{\zeta \in \Omega_i(\omega) \mid \omega \vee_i \zeta \neq 0\,\}.$$

En orden a definir los operadores de Fourier-Grassmann $J_1, \ldots, J_{n-1}$, convengamos en denotar por ψ un carácter aditivo, no trivial, del grupo aditivo k^+ de k.

Y formemos el $\mathbb{C}$-espacio vectorial V de las funciones sobre Ω_n a valores en $\mathbb{C}$, i.e. $V = \mathbb{C}^{\Omega_n}$.

Definamos sobre V los operadores de Fourier-Grassmann J_i, $0 < i < n$, por

$$(J_i f)(\omega) = \frac{1}{q} \sum_{\zeta \in \Omega_i(\omega)} \psi(\omega \vee_i \zeta) f(\zeta). \qquad (f \in V,\ \omega \in \Omega_n)$$

Nótese que el operador J_1 se escribe

$$(J_1 f)(\omega) = \frac{1}{q} \sum_{\zeta_1 \prec \omega_2} \psi\left(\frac{\omega_1 \wedge \zeta_1}{\omega_2}\right) f(\zeta_1, \omega_2, \ldots, \omega_n), \tag{1.1}$$

donde $f \in V$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \zeta_n) \in \Omega_n$.

Es decir J_1 es el análogo perfecto del operador J descrito en la introducción, o sea, en el argumento de ψ para J_1 (al igual que para J) fabricamos, con el producto progresivo (cuña) a partir de dos 1-vectores un 2-vector, i.e., subimos de grado. Sin embargo, aparentemente, para los operadores $J_2, \ldots, J_{n-1}$ en el argumento de ψ por intermedio del producto regresivo bajamos de grado.

Observación 1.2 *Ahora si* $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n$ *y* $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \Omega_i(\omega)$, *se tiene*

$$\omega \vee_i \zeta = \frac{\mathrm{B}(\omega_i, \zeta_i : \omega_{i-1})}{\omega_{i+1}} \quad (0 < i < n), \tag{1.2}$$

donde $\mathrm{B}(\omega_i, \zeta_i : \omega_{i-1})$ *es el* $(i+1)$*-vector que se obtiene al omitir el factor* ω_{i-1} *de* $\zeta_i = \omega_{i-1} \wedge v$ *antes de formar* $\omega_i \wedge \zeta_i$. *Es decir*

$$\mathrm{B}(\omega_i, \zeta_i : \omega_{i-1}) = \omega_i \wedge v,$$

cuando ζ_i *se escribe* $\zeta_i = \omega_{i-1} \wedge v$, $v \in [\omega_{i+1}]$.

Así, de (1.2) se puede decir que $J_2, \ldots, J_{n-1}$ *son del mismo tipo de* J_1.

Lo anterior aunque parezca una innecesaria interpretación toma su valor en los cálculos que se realizarán mas adelante.

Por último conservando las notaciones anteriores se tiene

(1.3) $$\mathrm{B}(r\omega_i, s\zeta_i : t\omega_{i-1}) = rst^{-1}\mathrm{B}(\omega_i, \zeta_i : \omega_{i-1}), \quad (0 < i < n)$$

donde $r, s, t \in k^{\times}$.

(1.4) $$\sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} \psi(\omega \vee_i \zeta) = -1 \;\; (0 < i < n, \omega \in \Omega_n)$$

La afirmación de (1.3) es inmediata.

Claro (1.4) para $i = 1$; en el caso $1 < i < n$ se tiene

$$\sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} \psi(\omega \vee_i \zeta) = \sum_{\omega_{i-1}\prec\zeta_i\prec\omega_{i+1}} \psi\left(\frac{\mathrm{B}(\omega_i, \zeta_i : \omega_{i-1})}{\omega_{i+1}}\right),$$

pero como $\zeta_i = \omega_{i-1} \wedge v$, con $0 \neq \overline{v} \in [\omega_{i+1}]/[\omega_{i-1}]$, se sigue

$$\sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} \psi(\omega \vee_i \zeta) = \sum_{0\neq\overline{v}\in[\omega_{i+1}]/[\omega_{i-1}]} \psi\left(\frac{\omega_i \wedge v}{\omega_{i+1}}\right),$$

ahora $\psi\left(\frac{\omega_i\wedge\cdot}{\omega_{i+1}}\right)$ es un carácter, no trivial, del espacio cuociente $[\omega_{i+1}]/[\omega_{i-1}]$, por lo tanto

$$\sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} \psi(\ \omega \vee_i \zeta\ ) = -1.$$

Observación. *Otra manera de escribir los operadores $J_2, \dots, J_{n-1}$ en forma análoga a la escritura mostrada en (1.1) para J_1, es decir en terminos de $\wedge$, es traspasando la escritura de $\vee$ en terminos de $\wedge$ mediante el operador de Hodge.*

En [2], [1] y [15] se pueden encontrar tres puntos de vista, distintos, de la geométria Grassmanniana.

1.3 Relaciones de Coxeter

Como es usual $\mathfrak{S}_n$ denota el grupo de permutaciones de n- elementos.

($\mathfrak{S}_n$, S) es un sistema de Coxeter, donde $\mathrm{S} = \{\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}\}$ y θ_i denota la transposición $(i, i+1)$, $0 < i < n$. Más precisamente $\mathfrak{S}_n$ está generado por S, y los elementos de S verifican las relaciones de Coxeter: $\theta_i^2 = 1$ $(0 < i < n)$, $(\theta_i\theta_{i+1})^3 = 1$ $(0 < i < n-1)$ y $(\theta_i\theta_j)^2 = 1$, para $0 < i, j < n$ y $j \notin \{i-1, i+1\}$.

En virtud de la presentación descrita anteriormente para $\mathfrak{S}_n$, resulta que para hallar una representación de $\mathfrak{S}_n$ mediante los operadores de Fourier-Grassmann, es necesario y suficiente hallar un subespacio $\underline{V}$ de V que sea estable por $J_1, \ldots, J_{n-1}$ y tal que en $Aut_{\mathbb{C}}(\underline{V})$ se verifiquen las relaciones de Coxeter que determina la función $w_i \mapsto J_i$, $0 < i < n$.

En orden a describir $\underline{V}$ consideremos primero el subespacio V_i $(0 < i < n)$ de V, definido por

(1.5) $$V_i \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in V | \sum_{\zeta \in \Omega_i(\omega)} f(\zeta) = 0, \quad \omega \in \Omega_n\}$$

Claro que V_i es el nucleo del endomorfismo P_i de V definido por

(1.6) $$(P_i f)(\omega) = \sum_{\zeta \in \Omega_i(\omega)} f(\zeta),$$

donde $f \in V$, $\omega \in \Omega_n$.

Se tiene

Proposición 1.3 *Para todo* $0 < i, j < n$, *se tiene*

(a) $J_j V_i \subseteq V_i$, *para* $j \notin \{i+1, i-1\}$,

(b) J_j *conmuta con* J_i, *si* $j \notin \{i+1, i-1\}$,

(c) J_i *es una involución sobre* V_i. *Más aún, se tiene*

$$J_i^2 = Id - \frac{1}{q^2} P_i.$$

Demostración. Veamos el caso $j = i$ en (a). Sea $f \in V_i$ y $\omega \in \Omega_n$; se tiene

$$\sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} (J_i f)(\zeta) = \frac{1}{q} \sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} \sum_{\eta\in\Omega_i(\zeta)} \psi(\zeta \vee_i \eta) f(\eta),$$

pero $\Omega_i(\omega) = \Omega_i(\zeta)$. Luego al intercambiar el orden de sumación resulta

$$\sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} (J_i f)(\zeta) = \frac{1}{q} \sum_{\eta\in\Omega_i(\omega)} \{ \sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} \psi(\zeta \vee_i \eta)\} f(\eta),$$

de donde se obtiene

$$\sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} (J_i f)(\zeta) = 0,$$

al tener presente (1.4) y el hecho que $f \in V_i$. Así, $J_i V_i \subseteq V_i$.

Ahora si $j \notin \{i-1, i, i+1\}$, se tiene para todo $f \in V_i$ y $\omega \in \Omega_n$ que

$$\sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} (J_j f)(\zeta) = \frac{1}{q} \sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} \sum_{\eta\in\Omega_j(\zeta)} \psi(\ \zeta \vee_j \eta\ ) f(\eta),$$

pero como justamente $j \notin \{i-1, i, i+1\}$ se sigue que $\zeta \vee_j \eta \ = \ \omega \vee_j \eta$.

Luego podemos escribir, al intercambiar el orden de sumación, que

$$\sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} (J_j f)(\zeta) = \frac{1}{q} \sum_{\eta\in\Omega_j(\omega)} \psi(\ \omega \vee_j \eta\ ) \sum_{\mu\in\Omega_i(\eta)} f(\mu),$$

pero $f \in V_i$, por lo tanto

$$\sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} (J_j f)(\zeta) = 0,$$

es decir $J_j f \in V_i$, para $j \in \{i-1, i, i+1\}$. Esto último termina de demostrar (a).

La demostración de (b), es una verificación rutinaria y la dejamos al lector.

Demostremos ahora (c). Sean $f \in V_i$, y $\omega \in \Omega_n$, entonces

$$(J_i^2 f)(\omega) = \frac{1}{q^2} \sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} \psi(\ \omega \vee_i \zeta\ ) \sum_{\eta\in\Omega_i(\zeta)} \psi(\ \zeta \vee_i \eta\ ) f(\eta),$$

pero $\Omega_i(\omega) = \Omega_i(\zeta)$. Por lo tanto

$$(J_i^2 f)(\omega) = \frac{1}{q^2} \sum_{\eta\in\Omega_i(\omega)} \sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} \psi(\ (\omega - \eta) \vee_i \zeta\ ) f(\eta);$$

separando los casos $\eta = \omega$ y $\eta \neq \omega$ resulta de (1.4)

$$(J_i^2 f)(\omega) = \frac{1}{q^2}\{ \sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} f(\omega) - \sum_{\substack{\eta\in\Omega_i(\omega)\\ \eta\neq\omega}} f(\eta)\},$$

es decir

$$(J_i^2 f)(\omega) = \frac{1}{q^2}\{(q^2 - 1) f(\omega) - \sum_{\substack{\eta\in\Omega_i(\omega)\\ \eta\neq\omega}} f(\eta)\}.$$

Luego

$$J_i^2 = Id - \frac{1}{q^2} P_i,$$

de donde resulta que J_i es una involución sobre V_i.

■

El propósito inmediato es establecer un lema que es vital en la demostración de la relación $J_i J_{i+1} J_i = J_{i+1} J_i J_{i+1}$, $0 < i < n-1$.

Definición. *Sea $\omega \in \Omega_n$, y consideremos el conjunto $\Lambda_i(\omega)$ (resp. $\tilde{\Lambda}_{i+1}(\omega)$) definido por: $\zeta \in \Lambda_i(\omega)$ (resp. $\tilde{\Lambda}_{i+1}(\omega)$) si $\zeta_{i+1} \not\equiv \omega_{i+1}$ (resp. $\zeta_i \not\equiv \omega_i$) y si existe un par de banderas de Grassmann*

$$\xi := (\xi^1, \xi^2) \ \ (resp.\ \eta := (\eta^1, \eta^2)),$$

con $\xi^1 \in \Omega_i^\times(\omega)$, $\xi^2 \in \Omega_i^\times(\zeta)$ (resp. $\eta^1 \in \Omega_{i+1}^\times(\omega)$, $\eta^2 \in \Omega_{i+1}^\times(\zeta)$), y tal que $\xi_i^1 = \xi_i^2$ (resp. $\eta_{i+1}^1 = \eta_{i+1}^2$).

Se conviene en denotar por ξ_i (resp. η_{i+1}) a $\xi_i^1 = \xi_i^2$ (resp. $\eta_{i+1}^1 = \eta_{i+1}^2$).

Denotaremos por $L_i(\zeta,\omega)$ (resp. $\tilde{L}_{i+1}(\zeta,\omega)$) al conjunto formado por los elementos ξ (resp. η de la definición previa).

Proposición 1.4 *Para todo $\omega \in \Omega_n$ se tiene.*

(a) $\omega_i \not\prec \zeta_{i+1}$ *y* $\zeta_i \not\prec \omega_{i+1}$, *si* $\zeta \in \Lambda_i(\omega)$,

(b) $\omega_i \not\prec \zeta_{i+1}$ *y* $\zeta_i \not\prec \omega_{i+1}$, *si* $\zeta \in \tilde{\Lambda}_{i+1}(\omega)$.

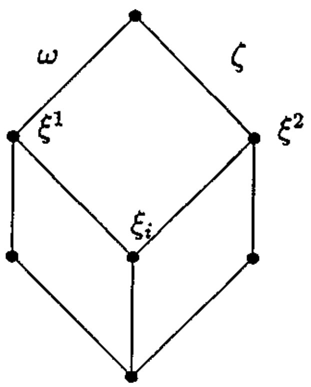
Demostración. Demostremos (a). Supongamos $\omega_i \prec \zeta_{i+1}$; dado que existe $\xi \in L_i(\omega, \zeta)$, se sigue que $\mathrm{B}(\omega_i, \xi_i : \omega_{i-1})$ es congruente a ω_{i+1} y ζ_{i+1}; luego $\omega_{i+1} \equiv \zeta_{i+1}$, lo que es una contradicción con el hecho que $\zeta \in \Lambda_i(\omega)$. Análogamente se demuestra $\zeta_i \not\prec \omega_{i+1}$.

Para ver (b), supongamos $\omega_i \prec \zeta_{i+1}$. Ahora como $\zeta \in \tilde{\Lambda}_{i+1}(\omega)$, se tiene que hay $\eta \in \tilde{L}_{i+1}(\omega, \zeta)$. Consideremos $\zeta_{i+1} \vee \eta_{i+1}$, luego ω_i y ζ_i son congruentes con $\zeta_{i+1} \vee \eta_{i+1}$, de donde $\omega_i \equiv \zeta_i$, lo cual es un absurdo. De manera análoga se demuestra $\zeta_i \not\prec \omega_{i+1}$.

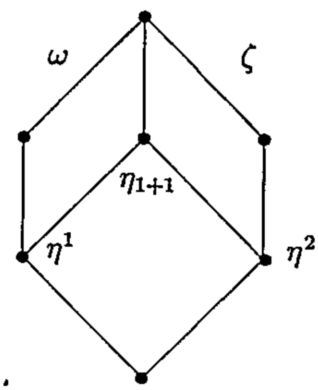
■

Sea $\omega \in \Omega_n$, los elementos de $\Lambda_i(\omega)$ (resp. $\tilde{\Lambda}_{i+1}(\omega)$) se pueden representar en un grafo como

$\Lambda_i(\omega)$:



$\tilde{\Lambda}_{i+1}(\omega)$:



Ahora si $\zeta \in \Lambda_i(\omega)$, $\omega \in \Omega_n$, se sigue de la proposición anterior que $\zeta_i \not\equiv \omega_i$, y tomando $\eta_{i+1} = \mathrm{B}(\omega_i, \zeta_i : \omega_{i-1})$ se concluye que ζ está en $\tilde{\Lambda}_{i+1}(\omega)$. Reciprocamente, si $\zeta \in \tilde{\Lambda}_{i+1}(\omega)$ se deduce de la proposición anterior que $\zeta_{i+1} \not\equiv \omega_{i+1}$, y poniendo $\xi_i = \omega_{i+1} \vee \zeta_{i+1}$ se deduce que ζ está en $\Lambda_i(\omega)$. Así, para todo $\omega \in \Omega_n$

$$\Lambda_i(\omega) = \tilde{\Lambda}_{i+1}(\omega).$$

Claro que los elementos ξ (resp. η) de $L_i(\omega,\zeta)$ (resp. $\tilde{L}_{i+1}(\omega,\zeta)$) son tales que $\xi_i \equiv \omega_{i+1} \vee \zeta_{i+1}$ (resp. $\eta_{i+1} \equiv \mathrm{B}(\omega_i, \zeta_i : \omega_{i-1})$ por consiguiente el cardinal de $L_i(\omega,\zeta)$ (resp. $\tilde{L}_{i+1}(\omega,\zeta)$) es $q-1$.

Conservando las notaciones se tiene

Lema 1.5 *Sea $\omega \in \Omega_n$ y $\zeta \in \Lambda_i(\omega)$, $0 < i < n-1$, entonces*

$$\sum_{(\xi^1,\xi^2)\in L_i(\omega,\zeta)} \psi(\omega \vee_i \xi^1 + \xi^1 \vee_{i+1} \xi^2 + \xi^2 \vee_i \zeta) =$$

$$\sum_{(\xi^1,\xi^2)\in \tilde{L}_{i+1}(\omega,\zeta)} \psi(\omega \vee_{i+1} \eta^1 + \eta^1 \vee_i \eta^2 + \eta^2 \vee_{i+1} \zeta)$$

Demostración. Sea $0 < i < n-1$. Escribamos $\omega_i = \omega_{i-1} \wedge u$, con $0 \neq u \in E$ (recordar que por covención $\omega_0 = 1$). Sea $\xi = (\xi^1, \xi^2) \in L_i(\omega,\zeta)$ y anotemos por ξ_i a $\xi_i^1 = \xi_i^2$, entonces $\mathrm{B}(\omega_i, \xi_i : \omega_{i-1}) = -\mathrm{B}(\xi_i, \omega_i : \omega_{i-1}) = -\xi_i \wedge u$. Pero $\xi_i \not\equiv \omega_i$ y como ξ_i, $\omega_i \prec \omega_{i+1}$, se deduce que

$$\omega_{i+1} = r\xi_i \wedge u, \tag{1}$$

para algún $r \in k^\times$. Razonando de manera análoga se concluye

$$\zeta_{i+1} = s\xi_i \wedge v, \tag{2}$$

para algún $s \in k^\times$, $0 \neq v \in E$ tal que $\zeta_i = \omega_{i-1} \wedge v$, $\mathrm{B}(\xi_i, \zeta_i : \omega_{i-1}) = \xi_i \wedge v$.

Ahora como

$$\mathrm{B}(\omega_{i+1}, \zeta_{i+1} : \xi_i) = \omega_{i+1} \wedge sv$$

y

$$\mathrm{B}(\zeta_{i+1}, \omega_{i+1} : \xi_i) = \zeta_{i+1} \wedge ru \tag{3}$$

concluimos

$$s^{-1} = -r^{-1} \frac{\omega_{i+1} \wedge v}{\zeta_{i+1} \wedge u} \tag{4}$$

Notar que $\zeta_{i+1} \wedge u$ no es nulo, pues $\omega_i \not\prec \zeta_{i+1}$ (ver proposición 1.4). Luego para $\omega \in \Omega_n$, $\zeta \in \Lambda_i(\omega)$. Definimos la función inyectiva de $L_i(\omega, \zeta)$ en $\tilde{L}_{i+1}(\omega, \zeta)$ que asigna a $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ de $L_i(\omega, \zeta)$ el elemento $\eta = (\eta^1, \eta^2)$ de $\tilde{L}_{i+1}(\omega, \zeta)$, tal que $\eta_{i+1} := \eta_{i+1}^1 := \eta_{i+1}^2$ está definido por

$$\eta_{i+1} = -r^{-1} \frac{\omega_{i+2}}{\zeta_{i+1} \wedge u} \mathrm{B}(\omega_i, \zeta_i : \omega_{i-1})$$

Esta aplicación resulta ser biyectiva puesto que el cardinal de $L_i(\omega, \zeta)$ es igual al cardinal de $\tilde{L}_{i+1}(\omega, \zeta)$, a saber $q-1$. Así, para demostrar el lema basta ver que cada sumando de la izquierda es igual a un sumando de la derecha

Ahora como $\mathrm{B}(\omega_i, \zeta_i : \omega_{i-1}) = \omega_i \wedge v$, se obtiene

$$\frac{\mathrm{B}(\omega_{i+1}, \eta_{i+1} : \omega_i)}{\omega_{i+2}} = -r^{-1} \frac{\omega_{i+1} \wedge v}{\zeta_{i+1} \wedge u}, \tag{5}$$

y

$$\frac{\mathrm{B}(\omega_i, \zeta_i : \omega_{i-1})}{\eta_{i+1}} = -r \frac{\zeta_{i+1} \wedge u}{\omega_{i+2}}; \tag{6}$$

por último

$$\frac{\mathrm{B}(\zeta_{i+1}, \eta_{i+1} : \zeta_i)}{\omega_{i+2}} = r^{-1}, \tag{7}$$

puesto que $\mathrm{B}(\omega_i, \zeta_i : \omega_{i-1}) = -\mathrm{B}(\zeta_i, \omega_i : \omega_{i-1}) = -\zeta_i \wedge u$, y por consiguiente

$$\eta_{i+1} = r^{-1} \frac{\omega_{i+2}}{\zeta_{i+1} \wedge u} \zeta_i \wedge u.$$

Por lo tanto de (1),(2) y (3) se obtiene

$$\omega \vee_i \xi^1 + \xi^1 \vee_{i+1} \xi^2 + \xi^2 \vee_i \zeta = -r^{-1} - r\frac{\zeta_{i+1} \wedge u}{\omega_{i+2}} + s^{-1},$$

y por (4)

$$= -r^{-1} - r\frac{\zeta_{i+1} \wedge u}{\omega_{i+2}} - r^{-1}\frac{\omega_{i+1} \wedge v}{\zeta_{i+1} \wedge u},$$

pero de (7), (6) y (5)

$$= \eta^2 \vee_{i+1} \zeta + \eta^1 \vee_i \eta^2 + \omega \vee_{i+1} \eta^1.$$

Luego

$$\psi(\omega \vee_i \xi^1 + \xi^1 \vee_{i+1} \xi^2 + \xi^2 \vee_i \zeta) = \psi(\omega \vee_{i+1} \eta^1 + \eta^1 \vee_i \eta^2 + \eta^2 \vee_{i+1} \zeta)$$

∎

Ocupando primordialmente el lema 1.9 se demostrara la relación de Coxeter más delicada en nuestro contexto, a saber

Proposición 1.6 *Para todo* $0 < i < n-1$ *se tiene*

$$J_i J_{i+1} J_i = J_{i+1} J_i J_{i+1}.$$

Demostración. En lo que sigue $f \in V$ y $\omega \in \Omega_n$. Se tiene

$$\begin{aligned}(J_i J_{i+1} J_i f)(\omega) &= q^{-1} \sum_{\xi \in \Omega_i^\times(\omega)} \psi(\omega \vee_i \xi)(J_{i+1} J_i f)(\xi) + \\ &\quad q^{-1} \sum_{r \in k^\times} (J_{i+1} J_i f)(h_r^i(\omega)),\end{aligned}$$

desarrollando J_{i+1}

$$\begin{aligned}(J_iJ_{i+1}J_if)(\omega) &= q^{-2}\sum_{\xi\in\Omega_i^\times(\omega)}\psi(\ \omega\vee_i\xi\ )\{\sum_{\eta\in\Omega_{i+1}^\times(\xi)}\\ &\quad\psi(\ \xi\vee_{i+1}\eta\ )(J_if)(\eta)+\sum_{s\in k^\times}(J_if)(h_s^{i+1}(\xi))\}\\ &\quad+q^{-2}\sum_{r\in k^\times}\{\sum_{\eta\in\Omega_{i+1}^\times(h_r^i(\omega))}\psi(\ h_r^i(\omega)\vee_{i+1}\eta\ )\\ &\quad(J_if)(\eta)+\sum_{s\in k^\times}(J_if)(h_s^{i+1}(h_r^i(\omega)))\},\end{aligned}$$

reordenando

$$\begin{aligned}(J_iJ_{i+1}J_if)(\omega) &= q^{-2}\sum_{\xi\in\Omega_i^\times(\omega)}\psi(\ \omega\vee_i\xi\ )\sum_{\eta\in\Omega_{i+1}^\times(\xi)}\\ &\quad\psi(\ \xi\vee_{i+1}\eta\ )(J_if)(\eta)+q^{-2}\sum_{r\in k^\times}\\ &\quad\sum_{\eta\in\Omega_{i+1}^\times(h_r^i(\omega))}\psi(h_r^i(\omega)\vee_{i+1}\eta)(J_if)(\eta)+\Sigma_5,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\Sigma_5 &= q^{-2}\sum_{\xi\in\Omega_i^\times(\omega)}\psi(\omega\vee_i\xi)\sum_{s\in k^\times}(J_if)(h_s^{i+1}(\xi))+\\ &\quad q^{-2}\sum_{r\in k^\times}\sum_{s\in k^\times}(J_if)(h_s^{i+1}(h_r^i(\omega))).\end{aligned}$$

Aplicando la definición de J_i , podemos escribir

$$(J_iJ_{i+1}J_if)(\omega)=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4+\Sigma_5;$$

donde

$$
\begin{aligned}
\Sigma_1 &= q^{-3} \sum_{\xi\in\Omega_i^\times(\omega)} \sum_{\eta\in\Omega_{i+1}^\times(\xi)} \sum_{\zeta\in\Omega_i^\times(\eta)} \psi(\omega \vee_i \xi + \xi \vee_{i+1} \eta + \eta \vee_i \zeta) f(\zeta),\\
\Sigma_2 &= q^{-3} \sum_{\xi\in\Omega_i^\times(\omega)} \psi(\omega \vee_i \xi) \sum_{\eta\in\Omega_{i+1}^\times(\xi)} \psi(\xi \vee_{i+1} \eta) \sum_{r\in k^\times} f(h_r^i(\eta)),\\
\Sigma_3 &= q^{-3} \sum_{r\in k^\times} \sum_{\eta\in\Omega_{i+1}^\times(h_r^i(\omega))} \psi(h_r^i(\omega) \vee_{i+1} \eta) \sum_{\zeta\in\Omega_i^\times(\eta)} \psi(\eta \vee_i \zeta) f(\zeta),\\
\Sigma_4 &= q^{-3} \sum_{r\in k^\times} \sum_{\eta\in\Omega_{i+1}^\times(h_r^i(\omega))} \psi(h_r^i(\omega) \vee_{i+1} \eta) \sum_{s\in k^\times} f(h_s^i(\eta)).
\end{aligned}
$$

Procediendo de manera análoga a lo hecho anteriormente, se obtiene

$$(J_{i+1} J_i J_{i+1} f)(\omega) = \Sigma_1' + \Sigma_2' + \Sigma_3' + \Sigma_4' + \Sigma_5',$$

donde

$$
\begin{aligned}
\Sigma_1' &= q^{-3} \sum_{\xi\in\Omega_{i+1}^\times(\omega)} \sum_{\eta\in\Omega_i^\times(\xi)} \sum_{\zeta\in\Omega_{i+1}^\times(\eta)} \psi(\ \omega \vee_{i+1} \xi\ +\\
&\qquad \xi \vee_i \eta\ +\ \eta \vee_{i+1} \zeta\ ) f(\zeta),\\
\Sigma_2' &= q^{-3} \sum_{r\in k^\times} \sum_{\eta\in\Omega_i^\times(h_r^{i+1}(\omega))} \psi(h_r^{i+1}(\omega) \vee_i \eta) \sum_{\zeta\in\Omega_{i+1}^\times(\eta)} \psi(\ \eta \vee_{i+1} \zeta\ ) f(\zeta)\\
\Sigma_3' &= q^{-3} \sum_{\xi\in\Omega_{i+1}^\times(\omega)} \psi(\ \omega \vee_{i+1} \xi\ ) \sum_{\eta\in\Omega_i^\times(\xi)} \psi(\ \xi \vee_i \eta\ ) \sum_{r\in k^\times} f(h_r^{i+1}(\eta))\\
\Sigma_4' &= q^{-3} \sum_{r\in k^\times} \sum_{\eta\in\Omega_i^\times(h_r^{i+1}(\omega))} \psi(h_r^{i+1}(\omega) \vee_i \eta) \sum_{s\in k^\times} f(h_s^{i+1}(\eta))\\
\Sigma_5' &= q^{-2} \sum_{\xi\in\Omega_{i+1}^\times(\omega)} \psi(\ \omega \vee_{i+1} \xi\ ) \sum_{s\in k^\times} (J_{i+1} f)(h_s^i(\xi)) +\\
&\qquad q^{-2} \sum_{r\in k^\times} \sum_{s\in k^\times} (J_{i+1} f)(h_s^i(h_r^{i+1}(\omega))).
\end{aligned}
$$

Así, para demostrar la afirmación se verá que $\Sigma_j = \Sigma_j'$, $0 < j < 4$ y $\Sigma_4 + \Sigma_5 = \Sigma_4' + \Sigma_5'$.

1. Se tiene

$$\Sigma_1 = \sum_{\zeta\in\Lambda_i(\omega)} \mathrm{C}_i(\zeta) f(\zeta),$$

$$\Sigma_1' = \sum_{\zeta\in\Lambda_{i+1}(\omega)} \mathrm{C}_{i+1}(\zeta) f(\zeta),$$

donde

$$\mathrm{C}_i(\zeta) = \sum_{(\xi^1,\xi^2)\in L_i(\omega,\zeta)} \psi(\ \omega \vee_i \xi^1\ +\ \xi^1 \vee_{i+1} \xi^2\ +\ \xi^2 \vee_i \zeta\ ),$$

$$\mathrm{C}_{i+1}(\zeta) = \sum_{(\xi^1,\xi^2)\in L_{i+1}(\omega,\zeta)} \psi(\ \omega \vee_{i+1} \xi^1\ +\ \xi^1 \vee_i \xi^2\ +\ \xi^2 \vee_{i+1} \zeta\ )$$

Recordemos que $\Lambda_i(\omega) = \Lambda_{i+1}(\omega)$; ahora por el lema anterior $\mathrm{C}_i(\zeta) = \mathrm{C}_{i+1}(\zeta)$, para $\zeta \in \Lambda_i(\omega)$. Luego $\Sigma_1 = \Sigma_1'$.

2. Hagamos en Σ_2 el cambio de variables $h_r^i(\eta) = \mu$. Luego

$$\Sigma_2 = q^{-3} \sum_{r\in k^\times} \sum_{\xi\in\Omega_i^\times(\omega)} \psi(\ \omega \vee_i \xi\ ) \sum_{h_{r^{-1}}^i(\mu)\in\Omega_{i+1}^\times(\xi)} \psi(\xi \vee_{i+1} h_{r^{-1}}^i(\mu)) f(\mu),$$

de donde

$$\Sigma_2 = q^{-3} \sum_{r\in k^\times} \sum_{\xi\in\Omega_i^\times(\omega)} \psi(\ \omega \vee_i \xi\ ) \sum_{\mu\in\Omega_{i+1}^\times(h_r^i(\xi))} \psi(h_{r^{-1}}^i(h_r^i(\xi)) \vee_{i+1} h_{r^{-1}}^i(\mu)) f(\mu),$$

haciendo el cambio $h_r^i(\xi) = \eta$, y teniendo presente (d) de la proposición 1.1 se sigue

$$\Sigma_2 = q^{-3} \sum_{r\in k^\times} \sum_{h_{r^{-1}}^i(\eta)\in\Omega_i^\times(\omega)} \psi(\omega \vee_i h_{r^{-1}}^i(\eta)) \sum_{\mu\in\Omega_{i+1}^\times(\eta)} \psi(\ r\eta \vee_{i+1} \mu\ ) f(\mu),$$

ahora $h_{r^{-1}}^i(\eta) \in \Omega_i^\times(\omega)$ equivale a $\eta \in \Omega_i^\times(h_r^i(\omega)) = \Omega_i^\times(\omega)$. Luego

$$\Sigma_2 = q^{-3} \sum_{r\in k^\times} \sum_{\eta\in\Omega_i^\times(\omega)} \psi(\ r^{-1}\omega \vee_i \eta\ ) \sum_{\mu\in\Omega_{i+1}^\times(\eta)} \psi(\ r\eta \vee_{i+1} \mu\ ) f(\eta).$$

Por otro lado haciendo $h_r^{i+1}(\mu)=\eta$ en Σ_2' , se obtiene

$$\Sigma_2' = q^{-3}\sum_{r\in k^\times}\sum_{\mu\in\Omega_i^\times(\omega)}\psi(\ r^{-1}\omega\vee_i\mu\ )\sum_{\zeta\in\Omega_{i+1}^\times(h_r^{i+1}(\mu))}\psi(h_r^{i+1}(\mu)\vee_{i+1}\zeta)f(\zeta),$$

luego

$$\Sigma_2' = q^{-3}\sum_{r\in k^\times}\sum_{\mu\in\Omega_i^\times(\omega)}\psi(\ r^{-1}\omega\vee_i\mu\ )\sum_{\zeta\in\Omega_{i+1}^\times(\mu)}\psi(\ r\mu\vee_{i+1}\zeta\ )f(\zeta).$$

Es decir $\Sigma_2=\Sigma_2'$.

3. Procediendo como en 2. se demuestra que $\Sigma_3=\Sigma_3'$.

4. Hagamos $\eta=h_r^i(\zeta)$ en Σ_4, luego

$$\Sigma_4 = q^{-3}\sum_{r\in k^\times}\sum_{\zeta\in\Omega_{i+1}^\times(\omega)}\psi(\ r^{-1}\omega\vee_{i+1}\zeta\ )\sum_{s\in k^\times}f(h_{rs}^i(\zeta)),$$

haciendo $rs=t$, podemos escribir

$$\Sigma_4 = q^{-3}\sum_{t\in k^\times}\sum_{\zeta\in\Omega_{i+1}^\times(\omega)}\{\sum_{s\in k^\times}\psi(\ st^{-1}\omega\vee_{i+1}\zeta\ )\}f(h_t^i(\zeta));$$

dado que $t^{-1}\omega\vee_{i+1}\zeta$ no es nulo, se sigue

$$\Sigma_4 = -q^{-3}\sum_{t\in k^\times}\sum_{\zeta\in\Omega_{i+1}^\times(\omega)}f(h_t^i(\zeta)).$$

Luego

$$\Sigma_4 = -q^{-3}\sum_{t\in k^\times}\{(P_{i+1}f)(h_t^i(\omega))-\sum_{r\in k^\times}f(h_r^{i+1}(h_t^i(\omega)))\}. \tag{1}$$

Procediendo de manera totalmente análoga, se obtiene

$$\Sigma_4' = -q^{-3}\sum_{t\in k^\times}\{(P_if)(h_t^{i+1}(\omega))-\sum_{r\in k^\times}f(h_r^{i}(h_t^{i+1}(\omega)))\}. \tag{2}$$

Por otro lado Σ_5 se puede escribir

$$\Sigma_5 = q^{-2}\sum_{\xi\in\Omega_i(\omega)}\psi(\ \omega\vee_i\xi\ )\sum_{s\in k^\times}(J_if)(h_s^{i+1}(\xi));$$

desarrollando J_i

$$\Sigma_5 = q^{-3} \sum_{\xi\in\Omega_i(\omega)} \psi(\,\omega \vee_i \xi\,) \sum_{s\in k^\times} \sum_{\zeta\in\Omega_i(h_s^{i+1}(\xi))} \psi(h_s^{i+1}(\xi) \vee_i \zeta) f(\zeta),$$

hagamos el cambio de variables $\eta = h_s^{i+1}(\xi)$, luego

$$\Sigma_5 = q^{-3} \sum_{s\in k^\times} \sum_{h_{s^{-1}}^{i+1}(\eta)\in\Omega_i(\omega)} \psi(\omega \vee_i h_{s^{-1}}^{i+1}(\eta)) \sum_{\zeta\in\Omega_i(\eta)} \psi(\,\eta \vee_i \zeta\,) f(\zeta),$$

de donde

$$\Sigma_5 = q^{-3} \sum_{s\in k^\times} \sum_{\eta\in\Omega_i(h_s^{i+1}(\omega))} \psi(s h_s^{i+1}(\omega) \vee_i \eta) \sum_{\zeta\in\Omega_i(\eta)} \psi(\,\eta \vee_i \zeta\,) f(\zeta).$$

Ahora $s h_s^{i+1}(\omega) \vee_i \eta = h_s^i(h_s^{i+1}(\omega)) \vee_i \eta$, y como $\Omega_i(\eta) = \Omega_i(h_s^{i+1}(\omega))$, se obtiene al reordenar

$$\Sigma_5 = q^{-3} \sum_{s\in k^\times} \sum_{\zeta\in\Omega_i(h_s^{i+1}(\omega))} \{ \sum_{\eta\in\Omega_i(h_s^{i+1}(\omega))} \psi((h_s^i(h_s^{i+1}(\omega)) - \zeta) \vee_i \eta)\} f(\zeta),$$

teniendo presente que $\psi((h_s^i(h_s^{i+1}(\omega)) - \zeta) \vee_i \cdot)$ es un carácter no trivial de $[\,\omega_{i+1}] / [\omega_{i-1}]$ si y sólo si $\zeta = h_s^i(h_s^{i+1}(\omega))$, se concluye

$$\Sigma_5 = q^{-3} \sum_{s\in k^\times} \{(q^2-1) f(h_s^i(h_s^{i+1}(\omega))) - \sum_{\substack{\zeta\,\in\,\Omega_i(h_s^{i+1}(\omega))\\ \zeta\,\neq\, h_s^i(h_s^{i+1}(\omega))}} f(\zeta)\},$$

luego

$$\Sigma_5 = q^{-3} \sum_{s\in k^\times} \{q^2 f(h_s^i(h_s^{i+1}(\omega))) - (P_i f)(h_s^{i+1}(\omega))\}. \tag{3}$$

Procediendo del mismo modo, a lo realizado con Σ_5, se obtiene

$$\Sigma_5' = q^{-3} \sum_{s\in k^\times} \{q^2 f(h_s^i(h_s^{i+1}(\omega))) - (P_{i+1} f)(h_s^i(\omega))\}. \tag{4}$$

De (1) a (4) se deduce que $\Sigma_4 + \Sigma_5 = \Sigma'_4 + \Sigma'_5$.

Así, de 1. a 4. se concluye la demostración de la proposición.

■

De la proposición 1.3 y 1.6 se tiene

Lema 1.7 *Para todo* $0 < i, j < n$ *se tiene las relaciones*

(a) $J_i^2 = Id - q^{-2}P_i$,

(b) $J_iJ_{i+1}J_i = J_{i+1}J_iJ_{i+1}$, *si* $i \neq n-1$

(c) $J_iJ_j = J_jJ_i$,

donde el valor absoluto de $i-j$ *es mayor que 1. Y además a nivel de* V_i $(0 < i < n)$ *se tiene*

$$J_i^2 = Id.$$

■

1.4 El subespacio $\underline{V}$ de V.

El objetivo de esta sección es mostrar un subespacio $\underline{V}$ estable por los operadores de Fourier-Grassmann. Para esto se verá primero el lema 1.8 que se usará en la demostración del lema 1.9, el cual a su vez es vital en la demostración del objetivo anunciado.

Lema 1.8 *Para toda bandera de Grassmann* $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, *se tiene*

(a) Si $0 < i < n-1$, *entonces*

$$\frac{(\omega_{i+1} \vee \zeta_{i+1}) \wedge u}{\zeta_{i+1}} = \frac{(\omega_{i+1} \vee \zeta'_{i+1}) \wedge u}{\zeta'_{i+1}},$$

donde u, $\omega_i \prec \zeta_{i+1}, \zeta'_{i+1} \prec \omega_{i+2}$, *y el producto regresivo se realiza en el* k*-espacio* $[\omega_{i+2}]$ *respecto al elemento de volumen* ω_{i+2}.

(b) Si $0 < i < n$, *y* $\omega_i = \omega_{i-1} \wedge u$ $(u \in E)$, *entonces*

$$\mathrm{B}(\mathrm{B}(\omega_i, \zeta_i : \omega_{i-1}), \zeta_{i+1} : \zeta_i) = \mathrm{B}(-\zeta_i \wedge u, \zeta_{i+1} : \zeta_i) = \zeta_{i+1} \wedge u,$$

donde $\omega_{i-1} \prec \zeta_i \prec \zeta_{i+1}$.

Demostración. Sólo se demostrara (a) pues (b) es trivial.

Si $\zeta_{i+1} \equiv \zeta'_{i+1}$, i.e. $\zeta'_{i+1} = s\zeta_{i+1}$ $(s \in k^\times)$ la afirmación es clara.

Supongamos $\zeta_{i+1} \not\equiv \zeta'_{i+1}$. Recordemos que por covención $\omega_0 = 1$, luego para todo $0 < i < n-1$ podemos escribir $\zeta_{i+1} = \xi_i \wedge u$, y $\zeta'_{i+1} = \xi'_i \wedge u$, donde $\xi_i = \omega_{i-1} \wedge x$ y $\xi'_i = \omega_{i-1} \wedge y$ $(x, y \in E)$. Y además $\omega_{i+1} = r\omega_{i-1} \wedge x \wedge y$, $r \in k^\times$.

Ahora se tiene $\omega_{i+1} \vee \zeta_{i+1} = \lambda\omega_{i-1} \wedge x$, y también $\omega_{i+1} \vee \zeta'_{i+1} = \lambda\omega_{i-1} \wedge y$, donde

$$\lambda = \frac{ry \wedge \omega_{i-1} \wedge x \wedge u}{\omega_{i+2}}.$$

Luego se deduce sin mayor dificultad (a).

■

Lema 1.9 *Para todo* $0 < i < n$, *se tiene*

(a) $J_i J_{i+1} V_i \subseteq V_{i+1}$,

(b) $J_{i+1} J_i V_{i+1} \subseteq V_{i+1}$.

Demostración. Demostremos (a). Sea $f \in V_i$ y $\omega \in \Omega_n$, se debe ver que $\Sigma = 0$, donde

$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\xi \in \Omega_{i+1}(\omega)} (J_i J_{i+1} f)(\xi)$$

Al desarrollar J_i y J_{i+1}, se obtiene

$$\Sigma = q^{-2} \sum_{\xi \in \Omega_{i+1}(\omega)} \sum_{\zeta \in \Omega_i(\xi)} \psi(\ \xi \vee_i \zeta\ ) \sum_{\eta \in \Omega_{i+1}(\zeta)} \psi(\ \zeta \vee_{i+1} \eta\ ) f(\eta),$$

esta igualdad se puede escribir como $q^2\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$, donde en Σ_1 sólo aparecen los terminos de Σ para los cuales ζ_i es congruente ξ_i, y en Σ_2 aparecen los ζ en $\Omega_i^\times(\xi)$. Luego

$$\Sigma_1 = \sum_{\xi\in\Omega_{i+1}(\omega)} \sum_{r\in k^\times} \sum_{\eta\in\Omega_{i+1}(h_r^i(\xi))} \psi(h_r^i(\xi) \vee_{i+1} \eta) f(\eta),$$

haciendo $h_r^i(\mu) = \eta$, se obtiene

$$\Sigma_1 = \sum_{\xi\in\Omega_{i+1}(\omega)} \sum_{r\in k^\times} \sum_{\mu\in\Omega_{i+1}(\xi)} \psi(h_r^i(\xi) \vee_{i+1} h_r^i(\mu)) f(h_r^i(\mu)),$$

ahora como $\Omega_{i+1}(\omega) = \Omega_{i+1}(\xi)$, se sigue

$$\Sigma_1 = \sum_{r\in k^\times} \sum_{\mu\in\Omega_{i+1}(\omega)} \{ \sum_{\xi\in\Omega_{i+1}(\omega)} \psi(\ r^{-1}\xi \vee_{i+1} \mu\ )\} f(h_r^i(\mu)),$$

y al tener presente (1.4) se concluye

$$\Sigma_1 = -\sum_{r\in k^\times} \sum_{\mu\in\Omega_{i+1}(\omega)} f(h_r^i(\mu)).$$

Por otra parte la suma Σ_2 es

$$\Sigma_2 = \sum_{\xi\in\Omega_{i+1}(\omega)} \sum_{\zeta\in\Omega_i^\times(\xi)} \psi(\ \xi \vee_i \zeta\ ) \sum_{\eta\in\Omega_{i+1}(\zeta)} \psi(\ \zeta \vee_{i+1} \eta\ ) f(\eta),$$

ahora Σ_2 se puede organizar como

$$\Sigma_2 \ = \sum_{\substack{\omega_{i-1} \prec \zeta_i \prec \omega_{i+2} \\ \zeta_i \not\equiv \omega_i}} \ \sum_{\zeta_i,\omega_i \prec \xi_{i+1} \prec \omega_{i+2}} \psi\left(\frac{\mathrm{B}(\omega_i, \zeta_i : \omega_{i-1})}{\xi_{i+1}}\right)$$
$$\sum_{\zeta_i \prec \eta_{i+1} \prec \omega_{i+2}} \psi\left(\frac{\mathrm{B}(\xi_{i+1}, \eta_{i+1} : \zeta_i)}{\omega_{i+2}}\right) f(\omega_1, \ldots, \zeta_i, \eta_{i+1}, \ldots, \omega_n);$$

pero como $\xi_{i+1} \succ \zeta_i, \omega_i$ y $\omega_i \not\equiv \zeta_i$, se sigue que ξ_{i+1} está únicamente determinado (módulo escalar). Más precisamente $\xi_{i+1} \equiv \mathrm{B}(\omega_i, \zeta_i : \omega_{i-1})$, por lo tanto

$$\Sigma_2 = \sum_{\substack{\omega_{i-1} \prec \zeta_i \prec \omega_{i+2} \\ \zeta_i \not\equiv \omega_i}} \sum_{r\in k^\times} \psi(r) \sum_{\zeta_i \prec \eta_{i+1} \prec \omega_{i+2}} \psi\left(\frac{\mathrm{B}(r^{-1}\mathrm{B}(\omega_i, \zeta_i : \omega_{i-1}), \eta_{i+1} : \zeta_i)}{\omega_{i+2}}\right) f(\omega_1, \ldots, \zeta_i, \eta_{i+1}, \ldots, \omega_n).$$

Si escribimos $\omega_i = \omega_{i-1} \wedge u$, $u \in E$, se sigue del lema anterior

$$\Sigma_2 = \sum_{\substack{\omega_{i-1} \prec \zeta_i \prec \omega_{i+2} \\ \zeta_i \not\equiv \omega_i}} \sum_{r\in k^\times} \psi(r) \sum_{\zeta_i \prec \eta_{i+1} \prec \omega_{i+2}} \psi\left(r^{-1}\frac{\eta_{i+1} \wedge u}{\omega_{i+2}}\right) f(\omega_1, \ldots, \zeta_i, \eta_{i+1}, \ldots, \omega_n),$$

luego

$$\Sigma_2 = \sum_{r\in k^\times} \psi(r) \sum_{\omega_{i-1} \prec \eta_{i+1} \prec \omega_{i+2}} \psi\left(\frac{r^{-1}\eta_{i+1} \wedge u}{\omega_{i+2}}\right) \sum_{\substack{\omega_{i-1} \prec \zeta_i \prec \eta_{i+1} \\ \zeta_i \not\equiv \omega_i}} f(\omega_1, \ldots, \zeta_i, \eta_{i+1}, \ldots, \omega_n).$$

Ahora $\Sigma_2 = \Sigma_{2,1} + \Sigma_{2,2}$, donde en $\Sigma_{2,1}$ sólo se considera los η_{i+1} que dominan a ω_i. Luego

$$\Sigma_{2,1} = -\sum_{\eta\in\Omega_{i+1}(\omega)} \sum_{\zeta\in\Omega_i^\times(\eta)} f(\zeta),$$

pero como $f \in V_i$, se deduce $\Sigma_{2,1} = -\Sigma_1$.

Como en $\Sigma_{2,2}$ sólo aparecen los η_{i+1} que no dominan a ω_i, se tiene que la condición $\zeta_i \not\equiv \omega_i$ es superflua en $\Sigma_{2,2}$. Luego como $f \in V_i$, se sigue $\Sigma_{2,2} = 0$. Por lo tanto $\Sigma = 0$.

Para demostrar (b) se procede del mismo modo a lo expuesto anteriormente. Nótese que esta vez el hecho clave será (a) del lema anterior.

■

Proposición 1.10 *Para toda $f \in V_i \bigcap V_{i+1}$, $0 < i < n-1$, se tiene*

$$J_i f \in V_{i+1} \Leftrightarrow J_{i+1} f \in V_i.$$

Demostración. Ocupar el lema anterior y el hecho que J_i es una involución sobre V_i.

■

Consideremos el subespacio $\underline{V}$ de V, definido por

$$\underline{V} = \{f \in \bigcap_{i=1}^{n-1} V_i \mid J_{i-1} \cdots J_{i-j} f \in V_i \quad 1 < i < n,\, 0 < j < i\}. \tag{1.7}$$

Claro que para ver que $\underline{V}$ es $\mathfrak{S}_n$-estable, basta ver que $\underline{V}$ es estable por los operadores de Fourier-Grassmann.

Proposición 1.11 *El espacio $\underline{V}$ es estable por los operadores de Fourier-Grassmann.*

Demostración. Se debe probar que si $f \in \underline{V}$, entonces

$$J_m f \in \textstyle\bigcap_{i=1}^{n-1} V_i \quad (0 < m < n) \tag{1}$$

y

$$J_{i-1} \cdots J_{i-j} J_m f \in V_i, (1 < i < n,\, 0 < j < i) \tag{2}$$

para todo $0 < m < n$.

Es fácil ver (1) si se tiene presente (a) de la proposición 1.3 y la proposición anterior.

Para demostrar (2) distingamos los casos $m = 1$, $1 < m < n-1$ y $m = n-1$.

Caso 1.: Si $m = 1$, la verificación de (2) no ofrece mayor resistencia. Analizar primero el caso $i - j \neq 1, 2$.

Caso 2.: Si $1 < m < n-1$. Supongamos que $j \neq 1, i-1$; bajo estas condiciones es fácil ver (2) para $m \notin \{i+1, i, i-1, \ldots, i-j, i-(j+1)\}$.

Como $j \neq i-1$, se sigue que (2) se cumple trivialmente si $m = i-(j+1)$; en el caso $m = i-j$ la expresión (2) se reduce a ver que $J_{i-1} \cdots J_{i-(j-1)} f \in V_i$, lo cual es inmediato. Notar que J_{i-j} es una involución sobre V_{i-j}, y en particular $f \in V_{i-j}$.

(a) En el caso $m = i-(j-1)$, se tiene que (2) se escribe

$$J_{i-1} \cdots J_{i-(j-1)} J_{i-j} J_{i-(j-1)} f \in V_i. \qquad (f \in \underline{V})$$

Pero teniendo presente la relación de conmutación de la proposición 1.6 se sigue que la expresión anterior equivale a

$$J_{i-1} \cdots J_{i-(j-2)} J_{i-j} J_{i-(j-1)} J_{i-j} f \in V_i; \qquad (f \in \underline{V})$$

pero J_{i-j} conmuta con los operadores que aparecen a su izquierda, luego la expresión anterior equivale a

$$J_{i-j} J_{i-1} \cdots J_{i-(j-1)} J_{i-j} f \in V_i, \qquad (f \in \underline{V})$$

y esto último es cierto, pues por hipótesis $J_{i-1} \cdots J_{i-j} f \in V_i$, y además V_i es estable por J_{i-j}.

(b) El procedimiento anterior se puede realizar para todo $m \in \{i-1, \ldots, i-(j-1)\}$. Luego sólo resta analizar los casos $m = i$ y $m = i+1$ para obtener (2) en el caso $1 < m < n-1$ y $j \neq 1, i-1$. Para $m = i$, notar que por hipótesis $J_{i-2} \cdots J_{i-j} f \in V_{i-1}$, si $f \in \underline{V}$; luego teniendo presente el lema 1.9 se deduce que $J_{i-1} J_i J_{i-2} \cdots J_{i-j} f \in V_i$, lo que es equivalente a (2). Para $m = i+1$, se tiene por hipótesis que $J_iJ_{i-1}\cdots J_{i-j}f \in V_{i+1}$, si $f \in \underline{V}$; luego nuevamente del lema 1.9 se sigue que $J_{i+1}J_iJ_iJ_{i-1}\cdots J_{i-j}f \in V_i$, para $f \in \underline{V}$; pero como $J_{i-1}\cdots J_{i-j}f \in V_i$, y J_i es involución sobre V_i, se deduce que $J_{i+1}J_{i-1}\cdots J_{i-j}f \in V_i$, para $f \in \underline{V}$, i.e. se verifica (2) en el caso $m = i+1$.

Recordemos que estamos en el caso $1 < m < n-1$ y que se supuso que $j \neq 1, i-1$.

Estudiemos ahora el caso $j = 1$. Se debe probar que $J_{i-1}J_mf \in V_i$, si $f \in \underline{V}$. Esto es claro si $m \notin \{i+1, i-2\}$. Para $m = i+1$, nótese que $J_iJ_{i-1}f \in V_{i+1}$, si $f \in \underline{V}$, luego $J_{i+1}J_iJ_iJ_{i-1}f \in V_i$ si $f \in \underline{V}$; pero como J_i es involución sobre V_i y $J_{i-1}f \in V_i$ ($f \in \underline{V}$), se deduce luego que $J_{i+1}J_{i-1}f \in V_i$, para $f \in \underline{V}$. Para $m = i-2$ es claro que $J_{i-1}J_{i-2}f \in V_i$, pues $f \in \underline{V}$.

Si $j = i-1$, se debe probar que $J_{i-1}\cdots J_1J_mf \in V_i$, si $f \in \underline{V}$. Para $m \in \{i+1, i, i-1, \ldots, 2\}$ es evidente, y para el resto de los m's se procede como en (a) del Caso 2.

Caso 3.: Si $m = n-1$. Distingamos los casos $j = 1$, $j = n-2$ y $1 < j < n-2$.

(a) Si $j = 1$, se debe probar $J_{i-1}J_{n-1}f \in V_i$, para $f \in \underline{V}$. Lo cual es inmediato para $i \notin \{n-2, n-1\}$; si $i = n-1$ es claro que $J_{n-2}J_{n-1}f \in V_{n-1}$, si $f \in \underline{V}$ (ocupar el lema 1.9 y el hecho que $f \in V_{n-2}$). Para el caso $i = n-2$, observese que si $f \in \underline{V}$, entonces $J_{n-2}J_{n-3}f \in V_{n-1}$; luego $J_{n-1}J_{n-2}J_{n-2}J_{n-3}f \in V_{n-2}$, de donde es claro que $J_{n-1}J_{n-3} \in V_{n-2}$.

(b) Si $j = n-2$. Sea $f \in \underline{V}$, entonces $J_{n-3}\cdots J_1f \in V_{n-2}$. Luego

$$J_{n-2}J_{n-1}J_{n-3}\cdots J_1f \in V_{n-1}, \text{si } f \in \underline{V}.$$

Es decir para toda $f \in \underline{V}$ se tiene

$$J_{n-2}J_{n-3}\cdots J_1J_{n-1}f \in V_{n-1}.$$

(c) Si $1 < j < n-2$. En el caso $1 < i < n-2$, tenemos que si $f \in \underline{V}$, entonces $J_{i-1}\cdots J_{i-j}f \in V_i$, de donde se sigue que $J_{n-1}J_{i-1}\cdots J_{i-j}f \in V_i$, para $f \in \underline{V}$; es decir $J_{i-1}\cdots J_{i-j}J_{n-1}f \in V_i$, si $f \in \underline{V}$. En el caso $i = n-2$ considerese el hecho que $J_i J_{i-1} \cdots J_{i-j} f \in V_{i+1}$, si $f \in \underline{V}$; en consecuencia $J_{i+1} J_i J_i J_{i-1} \cdots J_{i-j} f \in V_i$, de donde se deduce que para toda $f \in \underline{V}$, se tiene

$$J_{i-1} \cdots J_{i-j} J_{i+1} f \in V_i.$$

En el caso $i = n-1$, basta observar que si $f \in \underline{V}$, entonces $J_{i-2} \cdots J_{i-j} f \in V_{i-1}$, y por lo tanto $J_{i-1} J_i J_{i-2} \cdots J_{i-j} f \in V_i$, es decir para toda $f \in \underline{V}$ se tiene

$$J_{i-1} \cdots J_{i-j} J_i f \in V_i.$$

Resumiendo los Casos 1., 2. y 3. demuestran (2), y luego $\underline{V}$ es invariante por los operadores de Fourier-Grassmann.

∎

Para $0 < i < n-1$, se tiene

$$(J_i J_{i+1})^3 = (J_i J_{i+1} J_i)(J_{i+1} J_i J_{i+1}),$$

luego de la proposición 1.6 $(J_i J_{i+1})^3 = J_i J_{i+1} J_i J_i J_{i+1} J_i$.

Pero si $f \in V_{i+1}$, se sigue del lema 1.9 que $J_{i+1} J_i f \in V_i$. Luego a nivel de V_{i+1}

$$(J_i J_{i+1})^3 = J_i J_{i+1} J_{i+1} J_i.$$

Ahora para $f \in \underline{V}$, se tiene $J_i f \in V_{i+1}$. Por lo tanto a nivel de $\underline{V}$

$$(J_i J_{i+1})^3 = J_i J_i,$$

de donde resulta claro que $(J_i J_{i+1})^3 = Id$ sobre $\underline{V}$.

Enfin, de la proposición anterior y proposición 1.3 se obtiene

Teorema 1.12 *La correspondencia* $(i, i+1) \mapsto J_i$, $0 < i < n$, *define un homomorfismo* τ *del grupo simétrico* $\mathfrak{S}_n$ *en el grupo* $Aut_{\mathbb{C}}(\underline{V})$ *de los* $\mathbb{C}$*-automorfismos de* $\underline{V}$, *i.e.,* $(\underline{V}, \tau)$ *es una representación de* $\mathfrak{S}_n$.

∎

Capítulo 2

Principio de Dualidad

En el presente capítulo se describe el espectro, de la representación del grupo simétrico construida en el capítulo 1, respecto a los grupos $Gl_n(k)$ y $\mathfrak{S}_n \ltimes (k^\times)^n$, ver teoremas 2.14 y 2.17. Además se obtiene que la dualidad entre las multiplicidades, de estos espectros se refleja en una dualidad entre sus álgebras conmutantes. De modo más preciso en el teorema 2.21 se prueba ésta dualidad. Cabe destacar que este último teorema puede ser interpretado como una generalización del teorema de Burnside; ver observación 2.24.

2.1 Preliminares.

2.1.1 Nociones básicas.

2.1.1.1. Sea G un grupo finito. Una representación de G es un par (V, π), donde V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, y π es un morfismo del grupo G en el grupo $Aut_{\mathbb{C}}(V)$ de los $\mathbb{C}$-automorfismos lineales de V. Si no hay peligro de confusión (V, π) se denota simplemente por π.

Un morfismo (operador de entrelazamiento) entre dos representaciones (V, π) y (V', π') de G, es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal ϕ de V en V' tal que $\phi \circ \pi_g = \pi'_g \circ \phi$, para todo $g \in G$. Así, se tiene los conceptos evidentes de monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo de representaciones.

Se denota por $\hat{G}$ el conjunto de los distintos tipos de isomorfía de G. Si G es conmutativo $\hat{G}$ es el grupo de carácteres de G.

Al $\mathbb{C}$-espacio vectorial formado por los operadores de entrelazamiento de π con π' se denota por $Hom_G((V,\pi),(V',\pi))$, o simplemente $Hom_G(\pi,\pi')$. La dimensión de este $\mathbb{C}$-espacio vectorial se suele llamar el número de entrelazamiento de π con π', y se denota por $[V,V']_G$, o bien $[\pi,\pi']_G$.

En el caso $\pi = \pi'$, se denota $Hom_G(\pi,\pi')$ simplemente por $End_G(V,\pi)$, o bien $End_G\pi$.

Si (V',π') es irreducible, i.e. los únicos subespacios G-estables son V y $\underline{0}$, el número $[\pi',\pi]$ se llama la multiplicidad de π' con π, y si este número es no nulo se dice que π' se entrelaza con π.

Si π sólo se entrelaza con $\pi_1,\ldots,\pi_r$ $(\pi_i \in G)$ con multiplicidades $m_1,\ldots,m_r$ respectivamente, entonces es sabido que

$$End_G\pi \cong M_{m_1}(\mathbb{C}) \bigoplus \cdots \bigoplus M_{m_r}(\mathbb{C}).$$

Luego la dimensión del centro $Z(\pi)$ de $End_G\pi$ es r. Notar que r es el número de tipos de isomorfía de π. Si $m_i = 1$ $(0 \leq i \leq r)$ es claro que

$$End_G\pi = Z(\pi),$$

y en este caso se dice que π es libre de multiplicidades.

Como es usual χ_π denota el carácter de la representación (V,π) de G. Y es bien sabido que

$$< \chi_{\pi'}, \chi_\pi >_G = [\pi',\pi]_G,$$

donde

$$< \chi_{\pi'}, \chi_\pi >_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \chi_{\pi'}(g)\overline{\chi_\pi(g)}.$$

2.1.1.2. Supongamos ahora que $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ es una descomposición de V en suma directa de representaciones irreducibles de G. Sea $N \subset \hat{G}$ el conjunto de representaciones de G que se entrelazan con π. Se llama componente G-isotípica de tipo σ en π ($\sigma \in N$), a la subrepresentación I_σ de V que es suma directa de aquellas representaciones entre las $U_1, \ldots, U_n$ que son isomorfas a σ. Luego se tiene la descomposición canónica

$$V = \bigoplus_{\sigma\in N} I_\sigma.$$

En otras palabras, se ha descompuesto V en suma directa de representaciones irreducibles y luego se han reagrupado aquellas isomorfas entre sí.

Ahora es bien sabido que

$$I_\sigma = P_\sigma(V),$$

donde P_σ es el proyector sobre V dado por

$$P_\sigma := \frac{\chi_\sigma(1)}{|G|} \sum_{g\in G} \overline{\chi_\sigma(g)}\pi_g.$$

2.1.1.3. Sean (V, ρ) y (V, σ) sendas representaciones de dos grupos (finitos) G y H respectivamente, tales que ρ conmuta con σ, i.e., $\rho_g \circ \sigma_h = \sigma_h \circ \rho_g$, $g \in G$, $h \in H$.

Sean I_π ($\pi \in \hat{G}$) la componente G-isotípica de tipo π en ρ; dado que ρ conmuta con σ, se deduce que $I_\pi = P_\pi(V)$ es H-estable. Luego una primera descomposición de σ es aquella en las componentes ρ-isotípicas de G.

Por otra parte dado que ρ conmuta con σ se tiene una representación $(V, \rho\circ\sigma)$ de $G \times H$, donde

$$(\rho\circ\sigma)_{(g,h)} := \rho_g \circ \sigma_h. \qquad (g \in G,\ h \in H)$$

Claro que I_π es $G \times H$-estable.

Sea U_π subrepresentación irreducible de I_π isomorfa a π; se tiene la representación $(Hom_G(U_\pi, V), \tilde{\sigma})$ de H, donde

$$\tilde{\sigma}_h \phi := \sigma_h \circ \phi, \qquad (h \in H)$$

para $\phi \in Hom_G(U_\pi, V)$

El siguiente lema describe I_π como representación de $G \times H$.

Lema 2.1 *Bajo las mismas notaciones y condiciones anteriores se tiene el isomorfismo de representaciones*

$$U_\pi \bigotimes Hom_G(U_\pi, V) \cong I_\pi.$$

Demostración. Sea $\mathcal{A} = Hom_G(U_\pi, V)$. La aplicación bilineal $\phi : (u, \varphi) \mapsto \varphi(u)$ de $U_\pi \times \mathcal{A}$ en I_π, determina una única aplicación lineal $\tilde{\varphi}$ de $U_\pi \bigotimes \mathcal{A}$ en I_π, más precisamente $\tilde{\varphi}$ a nivel de los generadores está dada por $\tilde{\varphi} : u \otimes \varphi \mapsto \varphi(u)$. Claramente $\hat{\varphi}$ entrelaza $\rho \otimes \tilde{\sigma}$ con $\rho \circ \sigma$.

Escribamos $I_\pi = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$, con $U_1 = U_\pi$. Sea $v \in I_\pi$, entonces $v = u_1 + \cdots + u_s$. Pero $U_1 \cong_G U_i$, $i > 1$. Por lo tanto existen $u'_2, \ldots, u'_s$ en U_1 y $\varphi_i \in Hom_G(U_\pi, U_i)$, tales que $\varphi_i(u'_i) = u_i$, $i > 1$. De donde se sigue que existe $x := u_1 \otimes Id + \sum_{i>1} u'_i \otimes \varphi$ en $U_\pi \otimes \mathcal{A}$, tal que $\tilde{\phi}(x) = v$. Es decir $\tilde{\phi}$ es epiyectiva, luego un isomorfismo.

■

2.1.1.4. Representaciones inducidas: Sea $(V; \pi)$ una representación del subgrupo H de G, se denota por $(Ind_H^G, \underline{\pi})$ a la representación inducida por π de H a G. Esta representación inducida se puede realizar por el modelo de Mackey (derecho) como

$$Ind_H^G \pi = \{f : G \to V \mid f(hg) = \pi_h(f(g)) \quad g \in G, \ h \in H\}$$

y la acción está dada por

$$(\underline{\pi}_g f)(g') = f(g'g) \qquad (g, g' \in G)$$

A veces se usará el módelo de Mackey (izquierdo) de $(Ind_H^G \pi, \underline{\pi})$, donde ahora $Ind_H^G \pi$ consta de las funciones $f : G \to V$, con la condición de homogeneidad $f(gh) = \pi_{h^{-1}}(f(g))$, $g \in G$, $h \in H$, y con acción

$$(\underline{\pi}_g f)(g') = f(g^{-1}g'). \qquad (g, g' \in G)$$

Si ahora (W, ρ) es una representación de G, se denota por $Res_G^H \rho$ a la representación (W, σ) del subgrupo H de G, donde σ es simplemente la restricción de ρ a H.

La *Reciprocidad de Frobenius* dice que el número de entrelazamiento entre las representaciones ρ y $Ind_H^G \pi$ es igual al número de entrelazamiento entre las representaciones $Res_G^H \rho$ y π de H.

Enfin, si K es un subgrupo de G es bien sabido que

$$Res_G^H Ind_H^G \pi \cong \bigoplus_{\bar{s} \in K \backslash G / H} Ind_{H^s}^K \pi^s, \tag{2.1}$$

donde $H^s = sHs^{-1} \bigcap K$ y $\pi^s(h) := s^{-1}hs$, $h \in H^s$.

2.1.1.5. Representaciones naturales. Sea X un conjunto finito sobre el cual actúa G. Se llama representación natural de G a la representación $(L^2(X), \rho)$, donde $L^2(X)$ es el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^X$ provisto del producto escalar $< , >_{L^2}$ usual, i.e.

$$< f, f' > := \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x) \overline{f'(x)},$$

para $f, f' \in \mathbb{C}^X$. Y la acción está dada por

$$(\rho_g f)(x) = f(g^{-1} \cdot x),$$

donde $g \in G$, $x \in X$, $f \in \mathbb{C}^X$.

Si la acción de G sobre X no es transitiva, entonces X es la unión disjunta de sus G-órbitas $O_1, \ldots, O_r$. Y es claro que

$$L^2(X) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} L^2(O_i);$$

luego basta reducir el estudio de las representaciones naturales al caso en que G actúa transitivamente sobre X; consecuentemente, en lo que sigue la acción será transitiva.

Si H es el estabilizador de $x_0 \in X$, se tiene $X \simeq H \setminus G$ y

$$(L^2(X), \rho) \cong (Ind_H^G 1, \underline{1}).$$

Por otra parte para la $\mathbb{C}$-álgebra $End_G\rho$ hay una base natural (base standard) asociada a la clasificación de las G-órbitas en X^2, más precisamente la familia $\{\phi_O \mid O$ es G-órbita de $X^2\}$ es una base para $End_G\rho$, donde

$$(\phi_O f)(x) = \sum_{(x,y)\in O} f(y). \qquad (f \in L^2(X),\ x \in X)$$

En otros terminos la base anterior es la base dada por las dobles clases de G respecto al estabilizador de un punto x_0 de X.

2.1.1.6. Recordemos que una partición $m = (m_1, \ldots, m_s)$ de n en $\mathbb{N}$ es un s-tuplo de números enteros positivos tales que $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_s$ y $m_1 + \cdots + m_s = n$. El número s se llama el largo de la partición.

A cada partición $m = (m_1, \ldots, m_s)$ de n se tiene asociado el $(s+1)$-tuplo κ de las sumas parciales de m, i.e. $\kappa = (\kappa_0, \ldots, \kappa_s)$, donde $\kappa_0 = 0$ y

$$\kappa_i = \sum_{j=1}^{i} m_j \qquad (1 \leq i \leq s)$$

Sea X un conjunto no vacio, y $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$; se define el orden $|x|$ de x como el cardinal de conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Sea $m = (m_1, \ldots, m_s)$ una partición de n; se dirá que $x = (x_1, \ldots, x_s) \in X^n$, es un elemento standard de tipo m si $|x| = s$ y además

$$x_i = x_{\kappa_j+1}, \qquad (\kappa_j < i \leq \kappa_{j+1},\ 0 \leq j \leq s)$$

donde $(\kappa_0, \ldots, \kappa_s)$ es el $(s+1)$-tuplo de las sumas parciales de la partición m.

Si no hay peligro de confusión se dirá simplemente elemento standard.

Si X es finito, entonces el grupo de permutaciones $\mathfrak{S}_n$ actúa naturalmente (acción por permutación) sobre X^n por

$$\theta \cdot x = (x_{\theta(1)}, \ldots, x_{\theta(n)}),$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$, $\theta \in \mathfrak{S}_n$.

Ahora es fácil ver que el conjunto formado por los elementos standard es un sistema de representantes de la acción de $\mathfrak{S}_n$ sobre X^n.

Y además se demuestra sin mayor dificultad la siguiente proposición

Proposición 2.2 *Sea X un conjunto finito y x un elemento standard de X^n de tipo $m = (m_1, \ldots, m_s)$, entonces el subgrupo estabilizador de x en $\mathfrak{S}_n$ es isomorfo al grupo*

$$\mathfrak{S}_{m_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{m_s}.$$

■

2.1.2 Notaciones.

G_n denota al grupo lineal $GL_n(k)$, i.e., G_n es el grupo formado por las matrices invertibles de orden n a coeficientes en k, $n \in \mathbb{N}$.

B_n denota el subgrupo de G_n formado por las matrices triangulares superiores.

T_n denota el subgrupo de G_n formado por las matrices diagonales.

U_n denota el subgrupo unipotente superior maximal de G_n.

A denota al grupo $(k^\times)^n$.

2.1.3 La serie principal de G_n.

Teniendo presente la descomposición $B_n = T_n U_n$, se sigue que todo carácter $\alpha \in \hat{T}_n = \hat{A}$ se levanta a un carácter $\tilde{\alpha}$ de B_n, más precisamente $\tilde{\alpha}(b) := \alpha(t)$, donde $b = tu$, $t \in T_n$, $u \in U_n$. Si no hay peligro de confusión se anotará α en vez de $\tilde{\alpha}$.

Se entiende por serie principal de G_n a toda componente irreducible que aparece en la inducida $\underline{\alpha}$ de B_n a G_n, $\alpha \in \hat{T}_n$.

Nótese que toda representación π de G_n es de dimensión igual a un polinomio $p_\pi(q)$ de $\mathbb{Z}[q]$ (recordar que q es el cardinal del cuerpo k). Se define la dimensión de Gel'fand- Kirillov de π como el grado del polinomio $p_\pi(q)$.

Recuerdese que para todo $\alpha \in \hat{T}_n$, $\theta \in \mathfrak{S}_n$, se tiene

- $Ind_{B_n}^{G_n}\alpha \cong Ind_{B_n}^{G_n}\theta \cdot \alpha$
- $Ind_{B_n}^{G_n}\alpha$ es irreducible si y sólo si $|\alpha| = n$
- En el caso $|\alpha| < n$, $\alpha \in \hat{T}_n$, la representación $Ind_{B_n}^{G_n}\alpha$ posee una sola componente irreducible de dimensión de Gel'fand-Kirillov máxima, a saber $n(n-1)/2$, Ver p. 316 de [6].
- En el caso $|\alpha| = 1$, la componente irreducible de dimensión de Gel'fand-Kirillov $n(n-1)/2$ de $Ind_{B_n}^{G_n}\alpha$ es de dimensión $q^{n(n-1)/2}$; y son las clásicamente llamadas representaciones de Steinberg, que anotaremos en lo sucesivo por $St_{\alpha_1}^{(n)}$, si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_1) \in \hat{T}_n$.

2.2 La representación natural (V, ρ) de G_n.

G_n actúa naturalmente sobre el conjunto de banderas de Grassmann Ω_n, más precisamente

$$g \cdot \omega = (g(\omega_1), \ldots, g(\omega_n)),$$

para $g \in G$ $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n$.

Claro que esta acción es transitiva.

Llamaremos (V, ρ) a la representación natural asociada a esta acción, i.e. $V := L^2(\Omega_n)$ y

$$(\rho_g f)(\omega) = f(g^{-1} \cdot \omega),$$

para $g \in G$, $f \in V$, $\omega \in \Omega_n$.

En lo que sigue $\tilde{e}_n$ será la bandera de Grassmann asociada a la base canónica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E, es decir, $\tilde{e}_n := (e_1, e_{12}, \ldots, e_{1 \cdots n})$, donde

$$e_{1 \cdots i} = e_1 \wedge \cdots \wedge e_i. \qquad (0 \leq i \leq n)$$

Es fácil ver que el estabilizador de $\tilde{e}_n$ en G_n es el subgrupo U_n, luego Ω_n es G_n-isomorfo a G_n/U_n, y además

$$\rho \cong Ind_{U_n}^{G_n} 1.$$

Para $r = (r_1, \ldots, r_n) \in A$ y $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n$ se define

$$r \cdot \omega := (r_1\omega_1, r_1 r_2 \omega_2, \ldots, r_1 \cdots r_n \omega_n)$$

Y se define el operador de homotecia H_r sobre V, como

$$(H_r f)(\omega) = f(r \cdot \omega), \tag{2.2}$$

para $f \in V$, $r \in A$, $\omega \in \Omega_n$.

Ahora como $\{H_r \mid r \in A\}$ es un grupo conmutativo de operadores diagonalizables, se sigue que ellos pueden ser diagonalizados simultáneamente. Luego, V es suma directa de los subespacios V_α, $\alpha \in \hat{A}$, asociados a la diagonalización simultanea de los operadores H_r, $r \in A$. Pero como además los V_α son subrepresentaciones de (V,ρ), se sigue la descomposición

$$V = \bigoplus_{\alpha\in\hat{A}} V_\alpha, \tag{2.3}$$

donde

$$V_\alpha = \{f \in V \mid H_r f(\omega) = \alpha^{-1}(r) f(\omega) \quad r \in A, \omega \in \Omega_n\}. \tag{2.4}$$

Proposición 2.3 *Para todo $\alpha \in \hat{A}$, se tiene*

$$Ind_{B_n}^{G_n}\alpha \cong_{G_n} V_\alpha.$$

Demostración. Mediante el G_n-isomorfismo entre Ω_n y G_n/U_n que define la correspondencia $\tilde{e}_n \mapsto U_n$, se puede mirar a V_α como el espacio formado de las funciones sobre G_n/U_n a valores en $\mathbb{C}$, con la condición de homogeneidad $f(\overline{gt}) = \alpha^{-1}(t)f(\overline{g})$, para $g \in G_n$, $t \in T_n$.

Sea p la proyección canónica de G_n sobre G_n/U_n. Sea ϕ la aplicación de V_α en la inducida $\underline{\alpha}$ de B_n a G_n, definida por $\phi : f \mapsto f \circ p$. Es fácil ver que ϕ es un G_n-isomorfismo; y además $\phi^{-1}(f)(gU_n) := f(g)$, $g \in G_n$, $f \in Ind_{B_n}^{G_n}\alpha$.

∎

Corolario 2.4 *Para todo $\theta \in \mathfrak{S}_n$, $\alpha \in \hat{A}$, se tiene*

$$V_\alpha \cong_{G_n} V_{\theta\cdot\alpha}$$

∎

Observación 2.5 *Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es que en ρ se realiza toda la serie principal de G_n.*

La siguiente proposición muestra las relaciones de conmutación entre los operadores H_r ($r \in A$), y los operadores de Fourier-Grassmann.

Proposición 2.6 *Para todo $r \in A$, y $0 < i < n$ se tiene*

$$H_r J_i = J_i H_{(i,i+1)\cdot r}.$$

Demostración. Sea $f \in V$ y $\omega \in \Omega_n$, entonces para todo $r \in A$ y $0 < i < n$ se tiene

$$(H_r J_i f)(\omega) = q^{-1} \sum_{\zeta \in \Omega_i(r\cdot\omega)} \psi(\, r\cdot\omega \vee_i \zeta\,) f(\zeta),$$

luego

$$(H_r J_i f)(\omega) = q^{-1} \sum_{r^{-1}\cdot\zeta \in \Omega_i(\omega)} \psi(\, r\cdot\omega \vee_i \zeta\,) f(\zeta)$$

haciendo $r^{-1}\cdot\zeta = \eta$, se obtiene

$$(H_r J_i f)(\omega) = q^{-1} \sum_{\eta \in \Omega_i(\omega)} \psi(\, r\cdot\omega \vee_i r\cdot\eta\,) f(r\cdot\eta),$$

pero de la proposición 1.1, se sigue $r\cdot\omega \vee_i r\cdot\eta \ = \omega \vee_i h_s^i(\eta)$, con $s = r_i r_{i+1}^{-1}$ si $r = (r_1, \ldots, r_n)$, luego si hacemos $h_s^i(\eta) = \mu$ se obtiene

$$(H_r J_i f)(\omega) = q^{-1} \sum_{\mu \in \Omega_i(\omega)} \psi(\, \omega \vee_i \mu\,) f(r\cdot h_{s^{-1}}^i(\mu)),$$

ahora como $r\cdot h_{s^{-1}}^i(\mu) = ((i,i+1)\cdot r)\cdot\mu$, se sigue

$$(H_r J_i f)(\omega) = (J_i H_{(i,i+1)\cdot r} f)(\omega).$$

■

Corolario 2.7 *Para todo* $0 < i < n$, $\alpha \in \hat{A}$, *se tiene*

$$J_i V_\alpha \subset V_{(i,i+1)\cdot\alpha}.$$

Demostración. Sea $f \in V_\alpha$; de la proposición anterior

$$H_r J_i f = J_i H_{(i,i+1)\cdot r} f. \qquad (r \in A)$$

Luego ocupando la homogeneidad de f resulta

$$H_r J_i f = \alpha^{-1}((i, i+1) \cdot r) J_i f, \qquad (r \in A)$$

ahora como $\alpha^{-1}((i, i+1) \cdot r) = ((i, i+1) \cdot \alpha^{-1})(r)$, se obtiene

$$H_r J_i f = ((i, i+1) \cdot \alpha)^{-1}(r) J_i f, \qquad (r \in A)$$

es decir $J_i f \in V_{(i,i+1)\cdot\alpha}$, para todo $0 < i < n$, $\alpha \in \hat{A}$ y $f \in V_\alpha$.

∎

En orden a establecer que los operadores de Fourier-Grassmann son operadores de entrelazamiento para ρ, veamos primero que $\vee_i$ es invariante por la acción de G_n, más precisamente

Lema 2.8 *Sean* $\omega \in \Omega_n$, $\zeta \in \Omega_i(\omega)$ $(o < i < n)$ *y* $g \in G_n$, *entonces*

$$\omega \vee_i \zeta = g \cdot \omega \vee_i g \cdot \zeta$$

Demostración. Con la convención $g(\omega_0) = 1$, escribamos $g(\zeta_i) = g(\omega_{i-1}) \wedge u$, con $u \in [g(\omega_{i+1})]$; entonces

$$g \cdot \omega \vee_i g \cdot \zeta = \frac{g(\omega_i) \wedge u}{g(\omega_{i+1})}.$$

Luego hay $s \in k$ tal que $g(\omega_i) \wedge u = s g(\omega_{i+1})$; de esta última igualdad se obtiene $\omega_i \wedge g^{-1}(u) = s\omega_{i+1}$, i.e.

$$\omega \vee_i \zeta \;=\; g \cdot \omega \vee_i g \cdot \zeta\,. \qquad (0 < i < n)$$

■

Teniendo presente el lema anterior se demuestra

Proposición 2.9 *Los operadores de Fourier-Grassmann son operadores de entrelazamiento para ρ.*

■

Dado que V_α es irreducible si $|\alpha| = n$, se sigue de la proposición anterior que en el corolario 2.7 hay igualdad, i.e.

$$J_i V_\alpha = V_{(i,i+1)\cdot\alpha}, \tag{2.5}$$

para todo $0 < i < n$, $\alpha \in \hat{A}$ tal que $|\alpha| = n$.

En (3.28) del capitulo 3 se verá que (2.5) es valida para todo $\alpha \in \hat{A}$.

2.3 La serie principal genérica de G_n.

Sea $m = (m_1, \ldots, m_s)$ una partición de n; se denota por P_m el subgrupo de G_n formado por matrices del tipo

$$\begin{pmatrix} g_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & g_s \end{pmatrix},$$

donde $g_i \in G_{m_i}$, $1 \le i \le s$.

Se tiene $P_m = T_m U_m$, donde

$$T_m = \{ \begin{pmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_s \end{pmatrix} \in G_n \mid g_i \in G_{m_i},\ 1 \leq i \leq s\}$$

$$U_m = \{ \begin{pmatrix} I_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & I_s \end{pmatrix} \in G_n \mid\ I_i = I_{m_i},\ 1 \leq i \leq s\}$$

(I_n es la matriz identidad de G_n, $n \in \mathbf{N}$).

Así, en particular para la partición $m = (m_1, m_2)$ se tiene la descomposición

$$\begin{pmatrix} g_1 & x \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{m_1} & g_1^{-1}x \\ 0 & I_{m_2} \end{pmatrix} \in P_m,$$

además

$$\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{m_1} & x \\ 0 & I_{m_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{m_1} & g_1 x g_2^{-1} \\ 0 & I_{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

para todo $g_i \in G_{m_i}$ $(1 \leq i \leq 2)$ y x cualquier matriz de orden $m_1 \times m_2$.

2.3.1 Modelo à la Steinberg

Sea $m = (m_1, \ldots, m_s)$ una partición de n; si σ es representación de T_m ella se extiende a una representación $\hat{\sigma}$ de P_m definida por $\hat{\sigma}(tu) = \sigma(t)$, $t \in T_m$, $u \in U_m$; si no hay peligro de confusión se escribe σ en vez de $\hat{\sigma}$. Enfin, toda representación irreducible de T_m se obtiene tensorizando las representaciones irreducibles de G_{m_i} $(1 \leq i \leq s)$.

El siguiente resultado es debido a R.Steinberg y su demostración puede ser consultada en [12].

Teorema 2.10 (Steinberg) *Las representaciones irreducibles de la serie principal de $G_n$de dimensión de Gel'fand-Kirillov máxima son la familia de representaciones de Steinberg, o bien la familia*

$$Ind_{P_{(\kappa_{s-1},m_s)}}^{G_n}(\cdots(Ind_{P_{(\kappa_2,m_3)}}^{G_{\kappa_3}}(Ind_{P_{(\kappa_1,m_2)}}^{G_{\kappa_2}}(St_{\alpha_1}^{(m_1)}\otimes St_{\alpha_2}^{(m_2)})\otimes St_{\alpha_3}^{(m_3)})\otimes\cdots\otimes St_{\alpha_s}^{(m_s)});$$

donde $\alpha_i \in \hat{k^\times}$, $1 \leq i \leq s$, $|\{\alpha_1,\ldots,\alpha_s\}| = s$, $s \geq 2$, $m = (m_1,\ldots,m_s)$ es una partición de n y $(\kappa_0 \ldots \kappa_s)$ son las sumas parciales de m.

∎

Nota. Se conviene en que $St_\alpha^{(1)}$ es el carácter α de $k^\times$.

Conservando las notaciones anteriores se tiene

Proposición 2.11 *La segunda familia de representaciones del teorema anterior puede ser descrita como*

$$Ind_{P_m}^{G_n}(St_{\alpha_1}^{(m_1)}\otimes\cdots\otimes St_{\alpha_s}^{(m_s)}).$$

Demostración. Convengamos en usar el modelo de Mackey derecho para las representaciones inducidas.

Para la partición $m = (n-1,1)$ la afirmación es trivial. Para el resto de las particiones se demostrará la afirmación por inducción sobre n.

Para $n = 3$, se tiene $m = (1,1,1)$. Como ambas representaciones tiene igual dimensión y una de ellas es irreducible, basta ver, por reciprocidad de Frobenius, que

$$[Ind_{P_{(1,1)}}^{G_2}(St_{\alpha_1}^{(1)}\otimes St_{\alpha_2}^{(1)})\otimes St_{\alpha_3}^{(1)},\ Res_{G_3}^{P_{(2,1)}} Ind_{P_{(1,1,1)}}^{G_3}(St_{\alpha_1}^{(1)}\otimes St_{\alpha_2}^{(1)}\otimes St_{\alpha_3}^{(1)})]_{P_{(2,1)}} > 0,$$

lo cual se verifica sin mayor dificultad al considerar el operador de entrelazamiento, no nulo, ϕ de $Ind_{P_{(1,1,1)}}^{G_3}(St_{\alpha_1}^{(1)}\otimes St_{\alpha_2}^{(1)}\otimes St_{\alpha_3}^{(1)})$ en $Ind_{P_{(1,1)}}^{G_2}(St_{\alpha_1}^{(1)}\otimes St_{\alpha_2}^{(1)})\otimes St_{\alpha_3}^{(1)}$, definido por

$$(\phi f)(g) = f(\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}). \qquad (g \in G_2)$$

Siguiendo con la inducción, supongamos válido para $n-1$ y demostremos para n.

Dado que las representaciones del teorema 2.10 son irreducibles y de igual dimensión a las correspondientes representaciones de la proposición 2.11, basta ver que el número de entrelazamiento entre ellas es no nulo. Pero, ocupando la hipótesis de inducción y reciprocidad de Frobenius después, se sigue que el problema se reduce a ver que

$$[\rho, Res_{G_n}^{P_{(\kappa_{s-1},m_s)}}\sigma]_{P_{(\kappa_{s-1},m_s)}} \neq 0,$$

donde

$$\sigma = Ind_{P_m}^{G_n}(St_{\alpha_1}^{(m_1)} \otimes \cdots \otimes St_{\alpha_s}^{(m_s)}),$$

y

$$\rho = \tau \otimes St_{\alpha_s}^{(m_s)},$$

con

$$\tau = Ind_{P_\mu}^{G_{\kappa_{s-1}}} St_{\alpha_1}^{(m_1)} \otimes \cdots \otimes St_{\alpha_{s-1}}^{(m_{s-1})},$$

donde $\mu = (m_1, \cdots, m_{s-1})$.

Sea ϕ de σ en ρ definido por

$$(\phi f)(g_1, g_2) := f(\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}),$$

para $f \in V_\sigma$, $g_1 \in G_{\kappa_{s-1}}$, $g_2 \in G_{m_s}$.

ϕ es un operador de entrelazamiento no nulo, en efecto

$$(\rho_p \circ \phi f)(g_1, g_2) = (\tau_{p_1} \otimes St_{\alpha_s}^{(m_s)}(p_2))\phi f(g_1, g_2),$$

donde $p = \begin{pmatrix} p_1 & x \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \in P_{(\kappa_{s-1}, m_s)}$, y x es matriz de orden $\kappa_{s-1} \times m_s$. De la definición de τ resulta

$$(\rho_p \circ \phi f)(g_1, g_2) = St_{\alpha_s}^{(m_s)}(p_2)\phi f(g_1 p_1, g_2)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}(\phi \circ \sigma_p f)(g_1, g_2) &= (\sigma_p f)(\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}) \\ &= f(\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 & x \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}) \\ &= f(\begin{pmatrix} g_1 p_1 & g_1 x \\ 0 & p_2 \end{pmatrix})\end{aligned}$$

pero de (2.6) se obtiene

$$(\phi \circ \sigma_p f)(g_1, g_2) = f(\begin{pmatrix} I_{m_{s-1}} & g_1 x \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 p_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}),$$

de la homogeneidad de f, se deduce

$$(\phi \circ \sigma_p f)(g_1, g_2) = St_{\alpha_s}^{m_s}(p_2) f(\begin{pmatrix} p_1 p_2 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}).$$

Luego para todo $p \in P_{(\kappa_{s-1}, m_s)}$

$$\phi \circ \sigma_p = \rho_p \circ \phi.$$

■

2.3.2 Modelo à la Grassmann

En lo que sigue $m = (m_1, \ldots, m_s)$ es una partición de n y $\kappa = (\kappa_0, \ldots, \kappa_s)$ denota las sumas parciales de m. Y se considera en lo sucesivo que $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es un carácter standard de tipo m.

Sea U_α el G_n-subespacio de la representación (V_α, ρ) formado por las funciones f de V_α tales que para cada $\omega \in \Omega_n$ y $i \neq \kappa_j$ $(0 < i < n,\ \ 0 < j < s)$ satisface la ecuación

$$\sum_{\zeta \in \Omega_i(\omega)} f(\zeta) = 0. \tag{2.7}$$

Distingamos ahora los casos en que m es una partición trivial (i.e. $m = (n),\ (1, \ldots, 1)$) o no.

Caso 1. En el caso $m = (n)$, se tiene que $U_\alpha := U_{\alpha_1}^{(n)}$ es la representación de Steinberg $St_{\alpha_1}^{(n)}$ de G_n. Esto resulta al tener presente la proposición 2.3, y el hecho que

$$dim_{\mathbb{C}} U_{\alpha_1}^{(n)} = dim_{\mathbb{C}} St_{\alpha_1}^{(n)} = q^{n(n-1)/2}.$$

Ver [9].

Caso 2. Si $m = (1, \ldots, 1)$, la representación U_α es igual a V_α. Pero de la proposición 2.3 V_α es G_n-isomorfa a $Ind_{B_n}^{G_n}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n)$. De donde se obtiene gracias a la proposición 2.11, que U_α es isomorfa a la representación

$$Ind_{P_{(n-1,1)}}^{G_n} \cdots (Ind_{P_{(2,1)}}^{G_3}(Ind_{P_{(1,1)}}^{G_2}(\alpha_1 \otimes \alpha_2) \otimes \alpha_3) \otimes \cdots) \otimes \alpha_n,$$

puesto que $P_{(1,\ldots,1)} = B_n$.

Caso 3. En el caso que $m = (m_1, \ldots, m_s)$ no es partición trivial de n, se verá que U_α es isomorfa a la representación

$$Ind_{P_{(m)}}^{G_n}(St_{\alpha_1}^{(m_1)} \otimes \cdots \otimes St_{\alpha_s}^{(m_s)}) \tag{2.8}$$

Dado que $St_{\alpha_i}^{(m_i)}$ $(1 \leq i \leq s)$ es isomorfa a la representación $U_{\alpha_i}^{(m_i)}$, se sigue, al usar el modelo de Mackey izquierdo, que la representación de (2.8) puede ser mirada como la representación $(V_{\underline{\alpha}}, \underline{\alpha})$, donde $V_{\underline{\alpha}}$ es el espacio formado de las funciones $f : G_n \to U_1^{(m_1)} \otimes \cdots \otimes U_s^{(m_s)}$, sujeta a la condición de homogeneidad

$$f(gp^{-1}) = (\rho_{p_1} \otimes \cdots \otimes \rho_{p_s})(f(g)),$$

para $g \in G_n$, y

$$p = \begin{pmatrix} p_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & p_s \end{pmatrix} \in P_m,$$

donde $p_i \in G_{m_i}$ $1 \leq i \leq s$. Y la acción $\underline{\alpha}$ está dada por

$$(\underline{\alpha}_g f)(h) = f(g^{-1}h) \qquad (g, h \in G_n)$$

Sea ϕ de $(V_{\underline{\alpha}}, \underline{\alpha})$ en $(L^2(\Omega_n), \rho)$ definida por

$$(\phi f)(\omega) = f(g)(\tilde{e}_{m_1}, \ldots, \tilde{e}_{m_s}),$$

para $f \in V_{\underline{\alpha}}$, $\omega \in \Omega_n$ y g cualquier elemento de G_n tal que $g \cdot \tilde{e}_n = \omega$. Recordar que Ω_n es G_n transitivo.

ϕ está bien definida gracias a la homogeneidad de f.

A continuación se verá que la imagen de $V_{\underline{\alpha}}$ por ϕ está contenida en U_α.

Sean $f \in V_{\underline{\alpha}}$, $\omega \in \Omega_n$, $t = (t_1, \ldots, t_n) \in A$ y $g \in G_n$ tales que $g \cdot \tilde{e}_n = \omega$; se tiene

$$(\phi f)(t \cdot \omega) = (\phi f)(t \cdot g \cdot \tilde{e}_n),$$

ahora $t \cdot g \cdot \tilde{e}_n$ se puede mirar como $t \cdot g \cdot \tilde{e}_n = g[r] \cdot \tilde{e}_n$, donde $[t]$ es la matriz de T_n que tiene t_i en el lugar (i, i), $1 \leq i \leq n$. Luego

$$(\phi f)(t \cdot \omega) = f(g[t])(\tilde{e}_{m_1}, \ldots, \tilde{e}_{m_s}),$$

pero de la homogeneidad de f se sigue

$$(\phi f)(t \cdot \omega) = (\rho_{[t]_1} \otimes \cdots \otimes \rho_{[t]_s}) f(g)(\tilde{e}_{m_1}, \ldots, \tilde{e}_{m_s}),$$

donde $[t]_i$ es la matriz de T_{m_i} que tiene en el lugar j el elemento $t_{\kappa_{i-1}+j}$. Luego

$$(\phi f)(t \cdot \omega) = f(g)([t]_1^{-1} \tilde{e}_{m_1}, \ldots, [t]_s^{-1} \tilde{e}_{m_s}),$$

de donde se deduce

$$(\phi f)(t \cdot \omega) = \alpha_1^{-1}(t_1) \cdots \alpha_n^{-1}(t_n)(\phi f)(\omega).$$

Es decir, para todo $f \in V_{\underline{\alpha}}$

$$(\phi f) \in V_\alpha.$$

Así, para ver que $\phi(V_{\underline{\alpha}}) \subseteq U_\alpha$ sólo resta demostrar que para todo $i \neq \kappa_j$ $(0 < i < n,\ 0 < j < s)$ se tiene

$$\sum_{\zeta \in \Omega_i(\omega)} (\phi f)(\zeta) = 0. \qquad (f \in V_{\underline{\alpha}},\ \omega \in \Omega_n)$$

Sean $f \in V_{\underline{\alpha}}$, $\omega \in \Omega_n$ y $g_0 \in G_n$ tales que $g_0 \cdot \tilde{e}_n = \omega$, entonces

$$\sum_{\zeta \in \Omega_i(\omega)} (\phi f)(\zeta) = \sum_{\zeta \in \Omega_i(g_0 \cdot \tilde{e}_n)} (\phi f)(\zeta),$$

o bien

$$\sum_{\zeta \in \Omega_i(\omega)} (\phi f)(\zeta) = \sum_{g_0^{-1} \cdot \zeta \in \Omega_i(\tilde{e}_n)} (\phi f)(\zeta),$$

haciendo $g_0^{-1} \cdot \zeta = \eta$, se sigue

$$\sum_{\zeta \in \Omega_i(\omega)} (\phi f)(\zeta) = \sum_{\eta \in \Omega_i(\tilde{e}_n)} (\phi f)(g_0 \cdot \eta).$$

Denotemos por $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in G_n,$$

donde a está en la posición (i,i).

Así, se tiene que $\Omega_i(\tilde{e}_n)$ está constituido por los elementos $u \cdot \tilde{e}_n$, con $u \in R$, donde

$$R = \{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ x & r^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & r \\ r^{-1} & 0 \end{pmatrix} \mid r \in k^{\times},\ x \in k\} \subset G_n.$$

Luego

$$\begin{aligned} \sum_{\zeta \in \Omega_i(\omega)} (\phi f)(\zeta) &= \sum_{u \in R} (\phi f)(g_0 u \cdot \tilde{e}_n), \\ &= \sum_{u \in R} f(g_0 u)(\tilde{e}_{m_1}, \ldots, \tilde{e}_{m_s}). \end{aligned}$$

Dado que $i \neq \kappa_j$ $(0 < i < n,\ 0 < j < s)$, los elementos u de R son de la forma

$$u = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & v & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

con $v \in R'$, donde

$$R' = \{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ x & r^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & r \\ r^{-1} & 0 \end{pmatrix} \mid r \in k^{\times},\ x \in k\} \subset G_{m_{j_0}},$$

para algún $0 < j_0 < s$.

Así, de la homogeneidad de f, se deduce

$$\sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} (\phi f)(\zeta) = \sum_{v\in R'} f(g_0)(\tilde{e}_{m_1},\ldots,v\tilde{e}_{m_{j_0}},\ldots,\tilde{e}_{m_s}),$$

pero claramente $\Omega_i(\tilde{e}_{m_{j_0}})$ está constituido por los elementos $v\cdot\tilde{e}_{m_{j_0}}$, $v \in R'$. Luego si se escribe

$$f(g_0) = \sum_{i=1}^{l} f_{i,1}\otimes\cdots\otimes f_{i,s} \qquad (f_{i,j}\in U_{\alpha_j}^{(m_j)},\ 0<j\le s,\ 1\le i\le l)$$

se obtiene

$$\sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} (\phi f)(\zeta) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{\eta\in\Omega_i(\tilde{e}_{m_{j_0}})} f_{i,j_0}(\eta),$$

y como $f_{j_0} \in U_{\alpha_{j_0}}^{(m_{j_0})}$, se obtiene para todo $i \neq \kappa_j$ $(0 < i < n,\ 0 < j < s)$

$$\sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} (\phi f)(\zeta) = 0,$$

donde $f \in V_{\underline{\alpha}}$, $\omega \in \Omega_n$.

Por otra parte no es difícil ver que ϕ entrelaza $(V_{\underline{\alpha}}, \underline{\alpha})$ con (U_α, ρ), y posee inversa ϕ^{-1} dada por

$$(\phi^{-1}f)(g)(h_1\tilde{e}_{m_1},\ldots,h_s\tilde{e}_{m_s}) := f(gh\tilde{e}_n),$$

donde $f \in U_\alpha$, $g \in G_n$; $h_i \in G_{m_i}$ $(1 \le i \le s)$ y

$$h' = \begin{pmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_s \end{pmatrix} \in G_n.$$

Por consiguiente ϕ es un isomorfismo de representaciones. Al pasar ahora por la proposición 2.11 se tiene modelo geométrico-Grassmanniano para las representaciones de la serie principal de dimensión de Gel'fand- Kirillov máxima. Más precisamente

Teorema 2.12 *Las representaciones irreducibles de la serie principal de dimensión de Gel'fand-Kirillov $n(n-1)/2$, están parametrizadas por el subconjunto de elementos standard N de $\hat{A}$. Y ellas pueden ser descritas como subrepresentaciones (U_α,ρ), $(\alpha \in N)$ de la representación natural $(L^2(\Omega_n),\rho)$, más precisamente si $\alpha \in N$ es él carácter asociado a la partición $m=(m_1,\dots,m_s)$, entonces*

$$U_\alpha = \{f \in V_\alpha \mid \sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} f(\zeta)=0,\ \omega\in\Omega_n,\ i\neq\kappa_j,\ (0<j<s,\ 0<i<n)\},$$

donde $(\kappa_0,\dots,\kappa_s)$ es el $(s+1)$-tuplo de las sumas parciales de m.

■

2.4 El espectro de $(\underline{V},\rho)$.

Del hecho que los espacios V_i $(0<i<n)$, definidos en (1.5), son G_n-estables; y como los operadores de Fourier-Grassmann conmutan con ρ, resulta que el espacio $\underline{V}$ es G_n-estable. Luego tiene sentido estudiar la descomposición de $(\underline{V},\rho)$ en representaciones irreducibles de G_n.

En orden a describir el espectro de $(\underline{V},\rho)$, nótese que del corolario 2.7 es claro que

$$J_{i-1}\cdots J_{i-j}V_\alpha \subset V_{\theta\cdot\alpha}, \tag{2.9}$$

donde $\theta=((i-j),i,(i-1),\dots,i-(j-1))\in\mathfrak{S}_n$, $1<i\leq n$, $0<j<i$.

Se tiene

Lema 2.13 *Sea* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *carácter de* A, *y* m *partición de* n *con suma parcial* $\kappa = (\kappa_0, \ldots, \alpha_s)$ *; se tiene*

(a) Si α *es carácter standard de tipo* m *y* $0 < j < s$, *entonces*

$$J_i f = f, \quad si \quad i \neq \kappa_j \qquad\qquad (f \in U_\alpha)$$

(b) Para todo $0 < i < n$ *se tiene* $V_\alpha \subset V_i$, *si* $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$. *En particular si* α *es carácter standard de tipo* m *esta última contención vale para todo* $i = \kappa_j$ $(0 < j \leq s)$.

(c) Si α *es carácter standard de tipo* m, *entonces*

$$U_\alpha \subset \underline{V}.$$

Demostración. Demostremos (a). Claro que (a) tiene sentido sólo si $m \neq (n)$. Sean $f \in U_\alpha$, $\omega \in \Omega_n$, y $i \neq \kappa_j$ para algún $0 < j < s$; entonces

$$(J_i f)(\omega) = \frac{1}{q} \sum_{\zeta \in \Omega_i(\omega)} \psi(\omega \vee_i \zeta) f(\zeta).$$

Elijiendo un subconjunto L_i de $\Omega_i(\omega)$, tal que $\omega \in L_i$ y de modo que sus elementos (banderas de Grassmann) sean tales que sus i-ésimas coordenadas sean i-vectores linealmente independiente dos a dos, se sigue

$$(J_i f)(\omega) = \frac{1}{q}\{ \sum_{\substack{\zeta \in L_i \\ \zeta \neq \omega}} \sum_{r \in k^\times} \psi(\omega \vee_i h^i_r(\zeta)) f(h^i_r(\zeta)) + \sum_{r \in k^\times} f(h^i_r(\omega)\},$$

de la homogeneidad de f, resulta

$$(J_i f)(\omega) = \frac{1}{q}\{ \sum_{\zeta \in L_i, \zeta \neq \omega} \{ \sum_{r \in k^\times} \psi(\omega \vee_i h^i_r(\zeta))\} f(\zeta) + (q-1) f(\omega)\},$$

pero $\omega \vee_i h^i_r(\zeta) = r\ \omega \vee_i \zeta$, y como $\psi(\ \cdot \omega \vee_i \zeta\ )$ es un carácter, no trivial, de k^+, se obtiene

$$(J_i f)(\omega) = \frac{1}{q}\{-\sum_{\zeta\in L_i,\zeta\neq\omega} f(\zeta) + (q-1)f(\omega)\},$$

pero como $f \in U_\alpha$ y $i \neq \kappa_j$, se deduce

$$(J_i f)(\omega) = f(\omega). \qquad (f \in U_\alpha,\ \omega \in \Omega_n)$$

Demostremos ahora (b).

Sea $f \in V_\alpha$, $\omega \in \Omega_n$ y $i = \kappa_j$, para algún $0 < j < s$; conservando las notaciones anteriores se tiene

$$\sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} f(\zeta) = \sum_{\zeta\in L_i}\sum_{r\in k^\times} f(h_r^i(\zeta)),$$

de la homogeneidad de f resulta

$$\sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} f(\zeta) = \sum_{\zeta\in Li}\{\sum_{r\in k^\times}(\alpha_i^{-1}\alpha_{i+1})(r)\}f(\zeta),$$

pero $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$,por lo tanto

$$\sum_{\zeta\in\Omega_i(\omega)} f(\zeta) = 0,$$

i.e. $f \in V_i$.

Demostremos ahora (c)

1. Claro de (a) que $U_\alpha \subset V_i$, si $i \neq \kappa_j$. Y si $i = \kappa_j$, se sigue de (b) que $U_\alpha \subset V_i$. Luego

$$U_\alpha \subset \bigcap_{i=1}^{n-1} V_i.$$

2. Para ver que $J_{i-1}\cdots J_{i-j}f \in V_i$, para $1 < i < n$, $0 < j < i$ y $f \in U_\alpha$; nótese que por (a) basta ver los casos en que $i - j = \kappa_r$, con $0 < r < s$.

Ahora bien por (2.9) $J_{i-1}\cdots J_{\kappa_r}f \in V_{\theta\cdot\alpha}$, donde $\theta = (\kappa_r, i, (i-1), \ldots, \kappa_r + 1)$.

Ahora como en la posición i de $\theta \cdot \alpha$ está el carácter α_{κ_r}, el cual es distinto de α_{i+1}, se sigue de (b) que

$$J_{i-1} \cdots J_{\kappa_r} f \in V_i.$$

■

El siguiente teorema describe el espectro de $(\underline{V}, \rho)$.

Teorema 2.14 *La descomposición de la representación* $(\underline{V}, \rho)$ *en representaciones irreducibles de* G_n*, está dada por*

$$\underline{V} \cong \bigoplus_{\alpha \in N} m_\alpha U_\alpha,$$

donde N *denota el subconjunto de* $\hat{A}$ *formado por los elementos standard. Y para* α *carácter standard de tipo* $m = (m_1, \ldots, m_s)$ *se tiene*

$$m_\alpha = \frac{n!}{m_1! \cdots m_s!}$$

Demostración. Claro que $\underline{V}$ sólo se entrelaza con representaciones de la serie principal de G_n.

Sea $\{0\} \neq U$ una representación de la serie principal de G_n que se entrelaza con $\underline{V}$. De (2.3) y proposición 2.3 se sigue que podemos decir $U \subset \underline{V}$. Más aún, U puede ser mirado como una subrepresentación de V_α, con α carácter standard de A.

Si α es de tipo $(1, \ldots, 1)$, U es la representación irreducible V_α. De (2.5) y (b) de la proposición anterior se deduce que $U = V_\alpha \subset \underline{V}$.

Si α no es de tipo $(1, \ldots, 1)$; se debe tener $U \subset V_i$, para $0 < i < n$. Lo cual es inmediato si $i = \kappa_j$, puesto que en este caso $V_\alpha \subset V_i$, ver (b) de la proposición anterior. Por lo tanto las $f \in U$ deben satisfacer las ecuaciones

$$\sum_{\zeta \in \Omega_i(\omega)} f(\zeta) = 0,$$

para todo $\omega \in \Omega_n$, $i \neq \kappa_j$ $(0 < i < n,\ 0 < j < s)$.

Luego $\underline{0} \neq U \subset U_\alpha$, de donde $U = U_\alpha$, ya que ambas representaciones son irreducibles.

Nótese que la multiplicidad m_α de U_α en (V,ρ) es, en virtud del corolario 2.4, el cardinal de la órbita O_α de la acción, por permutación, de $\mathfrak{S}_n$ sobre $\hat{A}$. Por lo tanto de la proposición 2.2 se sigue que $m_\alpha = n!/m_1! \cdots m_s!$.

Ahora si $\theta \cdot \alpha \in O_\alpha$, $\theta \in \mathfrak{S}_n$, se sigue de la estabilidad de $\underline{V}$ por los operadores de Fourier-Grassmann que $\tau_\theta U_\alpha \subset \underline{V}$, donde τ es la representación del teorema 1.12.

Luego para tener que la multiplicidad de U_α en $\underline{V}$ sea m_α, basta tener que $\tau_\theta U_\alpha$ sea la componente de dimensión de Gel'fand-Kirillov máxima en $V_{\theta\cdot\alpha}$.

Escribamos $V_\alpha = U_\alpha \bigoplus U'_\alpha$ (con U'_α suplementario de U_α en V_α) y $\theta = \theta_{i_1} \cdots \theta_{i_l}$ entonces por (3.28) del capítulo 3 se deduce que $J_{i_1} \cdots J_{i_l}(U_\alpha \bigoplus U'_\alpha) = V_{\theta\cdot\alpha}$, y como los operadores de Fourier-Grassmann son operadores de entrelazamiento se sigue que $J_{i_1} \cdots J_{i_l} U_\alpha$ es la componente de $V_{\theta\cdot\alpha}$ isomorfa a U_α, i.e., $\tau_\theta U_\alpha$ es la componente de dimensión de Gel'fand-Kirillov máxima en $V_{\theta\cdot\alpha}$.

■

Observación 2.15 *Si $U_{\theta\cdot\alpha}$ denota la componente de dimensión de Gel'fand-Kirillov $n(n-1)/2$ en $V_{\theta\cdot\alpha}$, $\alpha \in \hat{A}$, se deduce de la demostración del teorema anterior que las componentes G_n-isotípicas de ρ están parametrizadas por el subconjunto N de $\hat{A}$ de los elementos standard. Luego, si I_α es la componente G_n-isotípica de tipo α en ρ, se tiene*

$$I_\alpha = \bigoplus_{\overline{\theta} \in \mathfrak{S}_n / K_\alpha} U_{\theta\cdot\alpha}, \tag{2.10}$$

donde K_α es el estabilizador de α, por la acción por permutación, de $\mathfrak{S}_n$ sobre $\hat{A}$. Enfin, la descomposición en componentes G_n-isotípicas de $(\underline{V},\rho)$ es

$$\underline{V} = \bigoplus_{\alpha \in N} I_\alpha. \tag{2.11}$$

A pesar que el espectro de $(\underline{V}, \rho)$ no es libre de multiplicidades (i.e. aparecen multiplicidades mayores que 1), ellas pueden ser interpretadas como dimensiones de ciertas representaciones de un grupo Γ que actúa en $\underline{V}$. En este sentido es que se desarrolla la proxima sección.

2.5 El espectro de la representación $(\underline{V},\sigma)$ de Γ.

Sea F el homomorfismo natural de $\mathfrak{S}_n$ al grupo $Aut(A)$ de los automorfismos de A, más precisamente $\mathrm{F}(\theta)(r) := \theta \cdot r$, $\theta \in \mathfrak{S}_n$, $r \in A$.

A traves de F se define una estructura de grupo sobre el conjunto $A\times \mathfrak{S}_n$, del siguiente modo

$$(r,\theta)(r',\theta') := (r\mathrm{F}(\theta)(r'), \theta\theta')$$

donde $r, r' \in A$, $\theta, \theta' \in \mathfrak{S}_n$.

Con esta operación se tiene una estructura de producto semi-directo en $A\times\mathfrak{S}_n$, en la cual A es distinguido. Anotaremos a $A\times\mathfrak{S}_n$ con ésta estructura por Γ.

Dado que Γ es el producto semi-directo de A con $\mathfrak{S}_n$, y como A es conmutativo, se sigue de la Máquina de Mackey (ver [8]) que las representaciones irreducibles de Γ son de la forma $Ind^{\Gamma}_{A\rtimes K_\alpha} \alpha \otimes \pi$, donde $\alpha \in \hat{A}$ y π es representación irreducible del estabilizador K_α de α, por la acción por permutación de $\mathfrak{S}_n$ sobre $\hat{A}$.

Observación. *En realidad la Máquina de Mackey dice que K_α es el estabilizador de α en $\mathfrak{S}_n$ por la acción que asigna al par (θ, α) el carácter $\alpha^\theta : r \mapsto \alpha(\theta r \theta^{-1})$, $\alpha \in \hat{A}$, $\theta \in \mathfrak{S}_n$. Pero del hecho que $\theta r \theta^{-1} = \theta \cdot r$ y como $(\theta \cdot \lambda)(\,?\,) = \lambda(\theta \cdot ?)$, se sigue que $\alpha^\theta = \theta \cdot \alpha$.*

A partir de la representación $(\underline{V},\tau)$ de $\mathfrak{S}_n$, ver teorema 1.12, se define la representación $(\underline{V},\sigma)$ de Γ por

$$\sigma_{r\theta} := H_r \circ \tau_\theta, \tag{2.12}$$

donde $\theta \in \mathfrak{S}_n$, y H_r $(r \in A)$ es el operador de homotecia definido en (2.2).

Dado que H_r y τ_θ son operadores de entrelazamiento para ρ, es claro que σ conmuta con ρ. Por lo tanto, como se vio en 2.1.1.3 las componentes G_n-isotípicas de ρ son Γ-invariantes. Luego de la observación 2.15, se sigue que una primera descomposición de $\underline{V}$ es

$$\underline{V} =_\Gamma \bigoplus_{\alpha \in N} I_\alpha, \tag{2.13}$$

donde N es el conjunto de elementos standard de $\hat{A}$.

Sea $\alpha \in N$ asociado a la partición $m = (m_1, \ldots, m_s)$ y f un elemento, no nulo, de U_α. Llamemos $\mathcal{V}_\alpha(f)$ al $\mathbb{C}$-espacio vectorial engendrado por $\{\tau_\theta f \mid \theta \in \mathfrak{S}_n\}$. Claro que $\mathcal{V}_\alpha(f)$ es Γ-estable.

Si K_α denota al estabilizador de α en $\mathfrak{S}_n$, se sigue que $\mathcal{V}_\alpha(f)$ está engendrado por $\{\tau_\theta f \mid \overline{\theta} \in \mathfrak{S}_n/K_\alpha\}$, por lo tanto

$$dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_\alpha(f) \leq \frac{n!}{m_1! \cdots m_s!}.$$

En lo que sigue $(L_\alpha, \underline{\alpha})$, $\alpha \in \hat{A}$, denota la inducida de la representación $\alpha^{-1} \otimes 1$ de $A \rtimes K_\alpha$ al grupo Γ, donde K_α es el estabilizador de α en $\mathfrak{S}_n$. Más precisamente

$$L_\alpha := Ind_{A \rtimes K_\alpha}^{\Gamma} [\alpha^{-1} \otimes 1]. \tag{2.14}$$

Se tiene

Lema 2.16 *Para α carácter standard de $\hat{A}$ de tipo $m = (m_1, \ldots, m_s)$, vale*
(a) $L_\alpha \cong \mathcal{V}_\alpha(f)$.

(b) Las componentes G_n-isotípicas I_α de tipo α en ρ se descompone en representaciones irreducibles de Γ, como

$$I_\alpha = \bigoplus_{f\in\mathcal{B}} \mathcal{V}_\alpha(f),$$

donde $0 \neq f \in U_\alpha$, y $\mathcal{B}$ denota cualquier base de U_α.

Demostración. Demostremos (a). Sea α carácter standard de A y $0 \neq f \in U_\alpha$. Para ver que $\mathcal{V}_\alpha(f)$ es Γ-isomorfo a L_α, basta tener $[L_\alpha, \mathcal{V}_\alpha(f)]_\Gamma > 0$, puesto que L_α es irreducible de dimensión $n!/m_1!\cdots m_s!$.

Pero, por reciprocidad de Frobenius

$$[L_\alpha, \mathcal{V}_\alpha(f)]_\Gamma = [\alpha^{-1}\otimes 1,\ Res_\Gamma^{A\rtimes K_\alpha}\mathcal{V}_\alpha(f)]_{A\rtimes K_\alpha}.$$

De ésta igualdad se deduce que L_α es Γ-isomorfa a $\mathcal{V}_\alpha(f)$, puesto que hay operador de entrelazamiento ϕ de $(\mathbb{C}, \alpha^{-1}\otimes 1)$ en $(\mathcal{V}_\alpha(f), \sigma)$ dada por $\phi : 1 \mapsto f$. Nótese que $\tau_\theta f = f$, para $\theta \in K_\alpha$.

Para demostra (b), basta notar que $\mathcal{V}_\alpha(f) \cong_\Gamma \mathcal{V}_\alpha(f')$, para todo par de funciones, no nulas, f, f' de U_α.

■

Una consecuencia inmediata del lema anterior es

Teorema 2.17 *El espectro de la representación $(\underline{V}, \sigma)$ de Γ es*

$$\underline{V} \cong_\Gamma \bigoplus_{\alpha\in N} [dim_{\mathbb{C}} U_\alpha] L_\alpha,$$

donde N es el conjunto de elementos standard de $\hat{A}$.

Demostración. Tener presente el lema anterior y (2.13).

■

Observación. *Nótese que la descomposición mostrada en (2.13) es efectivamente la descomposición de* σ *en componentes* Γ*-isotípicas. Así, la descomposición en componentes* Γ*-isotípicas de* $(\underline{V}, \sigma)$ *coincide con la descomposición en componentes* G_n*-isotípicas.*

Por último nótese que la multiplicidad m_α *de* U_α *en* $(\underline{V}, \rho)$ *es la dimensión de* L_α*. Luego*

$$\underline{V} \cong_{G_n} \bigoplus_{\alpha \in N} [dim_{\mathbb{C}} L_\alpha] U_\alpha, \tag{2.15}$$

donde N *es el conjunto de elementos standard de* $\hat{A}$*.*

2.6 El espectro de la representación $\rho \circ \sigma$.

Dado que ρ comuta con σ se tiene la representación $(\underline{V}, \rho \circ \sigma)$ de $G_n \times \Gamma$, donde

$$(\rho \circ \sigma)_{(g,\gamma)} := \rho_g \circ \sigma_\gamma,$$

para $g \in G_n$, $\gamma \in \Gamma$.

En orden a descomponer $\rho \circ \sigma$, nótese que la representación $(L_\alpha, \underline{\alpha})$, $\alpha \in \hat{A}$, puede ser descrita, vía el modelo de Mackey izquierdo, como

$$L_\alpha = \{f : \Gamma \to \mathbb{C} \mid f(\gamma r h) = \alpha(r) f(\gamma) \quad r \in A,\ h \in K_\alpha,\ \gamma \in \Gamma\},$$

donde K_α es el estabilizador de α en $\mathfrak{S}_n$, y la acción $\underline{\alpha}$ está dada por

$$(\underline{\alpha}_\gamma f)(\gamma') = f(\gamma^{-1}\gamma'),$$

para $f \in L_\alpha$, $\gamma, \gamma' \in \Gamma$.

Sea $\alpha \in \hat{A}$ y R un sistema de representantes de $\mathfrak{S}_n / K_\alpha$.

Definamos la Γ-base $\{\delta_\theta \mid \theta \in R\}$ de L_α por

$$\delta_\theta(\gamma) = \begin{cases} \alpha(r) & \text{si } \gamma = \theta h r \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases} \tag{2.16}$$

donde $\gamma \in \Gamma$, $r \in A$, $h \in K_\alpha$.

Para $\gamma \in \Gamma$, y δ_θ $(\theta \in R)$, calculemos $\underline{\alpha}_\gamma \delta_\theta$.

Sea $\gamma_1 \in \Gamma$ tal que $\gamma^{-1}\gamma_1 = \theta h_1 s$, con $s \in A$, $h_1 \in K_\alpha$; entonces

$$(\underline{\alpha}_\gamma \delta_\theta)(\gamma_1) = \alpha(s).$$

Por otra parte $\gamma_1 = \gamma\theta h_1 s$, luego si $\gamma = \nu h r$, con $r \in A$, $h \in K_\alpha$ y $\nu \in R$, se obtiene $\gamma_1 = \nu h r \theta h_1 s$. De donde se sigue

$$\gamma_1 = \nu h \theta h_1((\theta h_1)^{-1} \cdot r)s.$$

Luego se deduce

$$\underline{\alpha}_\gamma \delta_\theta(\gamma_1) = \alpha^{-1}((\theta h_1)^{-1} \cdot r)\delta_\mu(\gamma_1),$$

donde $\mu \in R$ es tal que $\overline{\nu}\overline{\theta} = \overline{\mu}$.

Ahora al tener presente que $\theta \cdot \alpha(\,?\,) = \alpha(\theta \cdot ?\,)$ $(\theta \in \mathfrak{S}_n)$, y como $h_1 \in K_\alpha$, se obtiene finalmente

$$\underline{\alpha}_\gamma \delta_\theta = \alpha^{-1}(\theta^{-1} \cdot r)\delta_\mu, \tag{2.17}$$

donde $\gamma = \nu r \in \Gamma$, $\nu \in \mathfrak{S}_n$, $r \in A$ y $\theta, \mu, \in R$, tales que $\overline{\mu} = \overline{\nu}\overline{\theta}$.

Claramente la componente G_n-isotípica I_α de (2.10) es $G_n \times \Gamma$-estable. Y además

Proposición 2.18 *Para todo elemento standard α de $\hat{A}$ de tipo $m = (m_1, \ldots, m_s)$, la componente G_n-isotípica I_α de ρ es $G_n \times \Gamma$-isomorfa a $U_\alpha \otimes L_\alpha$, y en particular I_α es irreducible.*

Demostración. Claro de (2.10) que $I_\alpha = \bigoplus_{\theta \in R} U_{\theta \cdot \alpha}$. Sea $\mathcal{B}$ la Γ-base de (2.16), entonces $v \in U_\alpha \otimes L_\alpha$ se escribe

$$v = \sum_{\theta \in R} f_\theta \otimes \delta_\theta,$$

donde $f_\theta \in U_\alpha$, $\delta_\theta \in \mathcal{B}$.

Sea ϕ la aplicación C-lineal de $U_\alpha \otimes L_\alpha$ en I_α, definida por $\phi : \sum_{\theta \in R} f_\theta \otimes \delta_\theta \mapsto \sum_{\theta \in R} \tau_\theta f_\theta$, donde τ es la representación de $\mathfrak{S}_n$ definida en el teorema 1.12.

En adelante $\tau_\theta f$ se denota simplemente por θf, $f \in \underline{V}$, $\theta \in \mathfrak{S}_n$.

Es fácil ver que ϕ es epiyectiva, puesto que cualquier elemento w de I_α se deja escribir como $w = \sum_{\theta \in R} \theta f_\theta$, donde $f_\theta \in U_\alpha$ para todo $\theta \in R$. Luego claramente

$$\phi(\sum_{\theta \in R} f_\theta \otimes \delta_\theta) = w.$$

Como

$$\begin{aligned} dim_{\mathbf{C}}[U_\alpha \otimes L_\alpha] &= dim_{\mathbf{C}} I_\alpha \\ &= (n!/m_1! \cdots m_s!) dim_{\mathbf{C}} U_\alpha, \end{aligned}$$

se sigue que ϕ es un C-isomorfismo. Así, para terminar de demostrar la proposición basta ver que ϕ entrelaza $\rho \otimes \underline{\alpha}$ con $\rho \circ \sigma$.

Sea $(g, \gamma) \in G_n \times \Gamma$, entonces

$$((\rho \circ \sigma)_{(g,\gamma)} \circ \phi)(\sum_{\theta \in R} f_\theta \otimes \delta_\theta) = (\rho_g \circ \sigma_\gamma)(\sum_{\theta \in R} \theta f_\theta),$$

haciendo $\gamma = \nu h r$, con $r \in A$, $h \in K_\alpha$, $\nu \in R$, resulta

$$((\rho \circ \sigma)_{(g,\gamma)} \circ \phi)(\sum_{\theta \in R} f_\theta \otimes \delta_\theta) = \sum_{\theta \in R} (\rho_g \circ \nu \circ h \circ H_r \circ \theta) f_\theta,$$

pero ρ_g conmuta con H_r, h, ν y θ, luego

$$((\rho \circ \sigma)_{(g,\gamma)} \circ \phi)(\sum_{\theta \in R} f_\theta \otimes \delta_\theta) = \sum_{\theta \in R} (\nu \circ h \circ H_r \circ \theta) \rho_g f_\theta,$$

pero ocupando la proposición 2.6, resulta

$$((\rho \circ \sigma)_{(g,\gamma)} \circ \phi)(\sum_{\theta \in R} f_\theta \otimes \delta_\theta) = \sum_{\theta \in R} (\nu \circ h \circ \theta \circ H_{\theta^{-1} \cdot r}) \rho_g f_\theta,$$

Ahora como $\rho_g f_\theta \in U_\alpha \subset V_\alpha$, se sigue de la homogeneidad de $\rho_g f_\theta$ que

$$((\rho \circ \sigma)_{(g,\gamma)} \circ \phi)(\sum_{\theta \in R} f_\theta \otimes \delta_\theta) = \sum_{\theta \in R} \alpha^{-1}(\theta^{-1} \cdot r)(\nu \circ h \circ \theta) \rho_g f_\theta,$$

pero $\nu \circ h \circ \theta$ es el operador $\tau_\nu \circ \tau_h \circ \tau_\theta = \tau_{\nu h \theta}$.Y como para cada $\nu h \theta$ hay un único $\mu \in R$ tal que $\overline{\nu} \overline{\theta} = \overline{\mu}$, se sigue de (2.17) que

$$((\rho \circ \sigma)_{(g,\gamma)} \circ \phi)(\sum_{\theta \in R} f_\theta \otimes \delta_\theta) = \phi(\sum_{\theta \in R} \rho_g f_\theta \otimes \underline{\alpha}_\gamma \delta_\theta).$$

Luego se concluye que ϕ es un operador de entrelazamiento.

■

El siguiente teorema describe el espectro de $\rho \circ \sigma$.

Teorema 2.19 *La representación* $(\underline{V}, \rho \circ \sigma)$ *de* $G_n \times \Gamma$ *es libre de multiplicidades, más precisamente*

$$\underline{V} = \bigoplus_{\alpha \in N} I_\alpha,$$

donde N *es el conjunto de los elementos standard de* $\hat{A}$.

Demostración. Resulta de la proposición anterior y de la descomposición dada en (2.11).

■

De la proposición 2.18 y lema 2.1, se deduce

$$U_\alpha \otimes L_\alpha \cong_{G_n \times \Gamma} U_\alpha \otimes Hom_{G_n}(U_\alpha, \underline{V}),$$

donde en $Hom_{G_n}(U_\alpha, \underline{V})$ actúa Γ por $\tilde{\sigma}$, más precisamente $\tilde{\sigma_\gamma}\phi =: \sigma_\gamma \circ \phi$, $\phi \in Hom_{G_n}(U_\alpha, \underline{V})$, $\gamma \in \Gamma$. Pero, como I_α es irreducible como $G_n \times \Gamma$- representación, se sigue

Corolario. *Para todo cáracter standard α de A, se tiene*

$$L_\alpha \cong_\Gamma Hom_{G_n}(U_\alpha, \underline{V}).$$

∎

Observación 2.20 *Resumiendo de (2.15), teoremas 2.17 y 2.19 se tiene que hay función inyectiva $u : N \to \hat{\Gamma}$, $N \subset \hat{G}$, tal que*

$$\underline{V} \cong_{G_n} \oplus_{\pi \in N}[dim_{\mathbf{C}} u(\pi)]\pi,$$

$$\underline{V} \cong_\Gamma \oplus_{\pi \in N}[dim_{\mathbf{C}} \pi]u(\pi),$$

$$\underline{V} \cong_{G_n \times \Gamma} \oplus_{\pi \in N}[\pi \otimes u(\pi)].$$

Este fenómeno de descomposición motiva la proxima sección.

2.7 Una generalización del teorema de Burnside.

En esta sección G y H son dos grupos finitos arbitrarios.

Sea (V, π) una representación de G; entonces la representación π define un homomorfismo, que también se llamará π, del álgebra de grupo $\mathbf{C}[G]$ de G en $End_{\mathbf{C}}\pi$ dada por

$$\pi : \sum_{g \in G} a_g g \mapsto \sum_{g \in G} a_g \pi_g.$$

Se tiene

Teorema (Burnside). *Sean $(U_1, \pi_1), \ldots, (U_m, \pi_m)$ representaciones irreducibles de G no isomorfas dos a dos. Entonces el homomorfismo $\pi = \oplus_{i=1}^m \pi_i$ de $\mathbf{C}[G]$*

en $\bigoplus_{i=1}^{m} End_{\mathbb{C}} U_i$ *es epiyectivo. Más aún, si las* π_i *agotan* $\hat{G}$*, entonces* π *es un isomorfismo.*

Demostración. Ver p.49 de [8].

■

En lo que sigue (V, ρ) es representación de G y (V, σ) es representación de H, tales que ρ conmuta con σ. Y luego $(V, \rho \circ \sigma)$ es representación de $G \times H$, dada por

$$(\rho \circ \sigma)_{(g,h)} := \rho_g \circ \sigma_h. \qquad ((g, h) \in G \times H)$$

Supongamos que se tiene la siguiente descomposición en representaciones irreducibles

$$\begin{aligned} \rho \quad &\cong_G \quad \oplus_{\pi \in N} [dim_{\mathbb{C}} u(\pi)]\pi, \\ \sigma \quad &\cong_H \quad \oplus_{\pi \in N} [dim_{\mathbb{C}} \pi] u(\pi), \\ \rho \circ \sigma \quad &\cong_{G \times H} \quad \oplus_{\pi \in N} [\pi \otimes u(\pi)], \end{aligned} \tag{2.18}$$

donde $N \subset \hat{G}$ y $u : N \to \hat{H}$ es función inyectiva.

Claro que la descomposición anterior dice, en particular, que $\rho \circ \sigma$ es libre de multiplicidades, y por consiguiente $End_{G \times H} \rho \circ \sigma$ es conmutativa.

Con las hipótesis anteriores se tiene

Teorema 2.21 *El homomorfismo* $\sigma : \sum_{h \in H} a_h h \mapsto \sum_{h \in H} a_h \sigma_h$ *de* $\mathbb{C}[H]$ *en* $End_G \rho$ *es epiyectivo. Es decir* $\sigma(\mathbb{C}[H]) = End_G \rho$.

Demostración. 1. La aplicación

$$\tau : \bigoplus_{i \in N} T_i \mapsto \bigoplus_{i \in N} (1 \otimes T_i)$$

de $\bigoplus_{\pi\in N} End_{\mathbf{C}} u(\pi)$ en $End_{G\times\{e\}} \bigoplus_{\pi\in N}(\pi \otimes u(\pi))$ es un $\mathbf{C}$-isomorfismo. En efecto, basta observar que τ es inyectiva y que ambos espacios tienen dimensión

$$\sum_{\pi\in N} [dim_{\mathbf{C}} u(\pi)]^2.$$

Nótese que $\pi \otimes u(\pi) \cong_{G\times\{e\}} [dim_{\mathbf{C}} u(\pi)]\pi \otimes 1,\ \pi \in N$.

2. Sea φ un $G \times H$-ismorfismo de $\rho \circ \sigma$ en $\bigoplus_{\pi\in N}[\pi \otimes u(\pi)]$. Y consideremos el $\mathbf{C}$- isomorfismo $\phi : T \mapsto \varphi^{-1} \circ T \circ \varphi$ de $End_{G\times\{e\}} \bigoplus_{\pi\in N}[\pi \otimes u(\pi)]$ en $End_G \rho$.

3. No es difícil ver que $\sigma = \phi \circ \tau \circ \Pi$, donde Π es el epimorfismo de $\mathbf{C}[H]$ en $\bigoplus_{\pi\in N} End\, u(\pi)$, que definen las representaciones irreducibles $u(\pi)$ de H, $\pi \in N$. Ver teorema de Burnside.

Por lo tanto σ es epiyectiva, i.e., $\sigma(\mathbf{C}[H]) = End_G \rho$.

■

Observación. *Por supuesto que en la proposición anterior vale* $\rho(\mathbf{C}[G]) = End_H \sigma$.

Corolario 2.22 *La descomposición (2.18) implica*

$$Z(\rho) = Z(\sigma) = Z(\rho \circ \sigma) = End_{G\times H}(\rho \circ \sigma).$$

Demostración. Claro de (2.18) que las dimensiones de $Z(\rho)$, $Z(\sigma)$, y $Z(\rho \circ \sigma)$ coinciden. Y como $\rho \circ \sigma$ es libre de multiplicidades, se tiene $Z(\rho \circ \sigma) = End_{G\times H}(\rho \circ \sigma)$.

De la proposición anterior se sigue que todo elemento x de $End_G \rho$ se escribe $x = \sum_{h\in H} a_h \sigma_h$. De donde resulta que todo elemento de $Z(\rho \circ \sigma)$ conmuta con x, i.e., $Z(\rho \circ \sigma)$ está contenido en el centro $Z(\rho)$ de $End_G \rho$. Por lo tanto $Z(\rho) = Z(\rho \circ \sigma)$.

De igual modo se obtiene $Z(\sigma) = Z(\rho \circ \sigma)$.

■

La siguiente proposición debilita las hipótesis de la proposición anterior.

Proposición 2.23 *Si el álgebra conmutante de la representación $\rho \circ \sigma$ de $G \times H$ es conmutativa, y si las dimensiones de los centros $Z(\rho)$, $Z(\sigma)$ y $Z(\rho \circ \sigma)$ son iguales, entonces hay una función inyectiva $u : N \to \hat{H}$, $N \subset \hat{G}$, tal que*

$$\rho \cong_G \oplus_{\pi \in N} [dim_{\mathbb{C}} u(\pi)] \pi,$$

$$\sigma \cong_H \oplus_{\pi \in N} [dim_{\mathbb{C}} \pi] u(\pi),$$

$$\rho \circ \sigma \cong_{G \times H} \oplus_{\pi \in N} [\pi \otimes u(\pi)].$$

Demostración. Sea $\rho =_G \oplus_{\pi \in N} I_\pi$ la descomposición en componentes G-isotípicas, $N \subset \hat{G}$. Como I_π es H-estable (ver 2.1.1.3) y dado que en particular el número de tipos de isomorfía de ρ y σ es el mismo, se sigue que la descomposición en componentes isotípicas de H y G coinciden. Así, hay función $u : N \to \hat{H}$, tal que $I_\pi = I_{u(\pi)}$ es la componente H-isotípicasde tipo $u(\pi)$ en σ.

Del mismo modo la descomposición en componentes isotípicas de G y $G \times H$ coinciden. Pero como en éste caso $End_{G \times H} \rho \circ \sigma$ es conmutativo, se sigue que I_π es irreducible y el espectro de $\rho \circ \sigma$ es

$$\rho \circ \sigma = \bigoplus_{\pi \in N} I_\pi.$$

Del lema 2.1 y del hecho que I_π es $G \times H$-irreducible se deduce que $Hom_G(\pi, \rho)$ (resp. $Hom_H(u(\pi), \sigma)$) es H-irreducible (resp. G-irreducible). Y como

$$\pi \otimes Hom_G(\pi, \rho) \cong I_\pi \cong I_{u(\pi)} \cong Hom_H(u(\pi), \sigma) \otimes u(\pi),$$

se sigue que

$$\pi \cong Hom_H(u(\pi), \sigma),$$

y

$$u(\pi) \cong Hom_G(\pi, \rho).$$

Luego

$$I_\pi \cong_G \bigoplus_{\pi\in N} [dim_{\mathbb{C}} u(\pi)]\pi,$$

$$I_\pi \cong_H \bigoplus_{\pi\in N} [dim_{\mathbb{C}} \pi] u(\pi),$$

$$I_\pi \cong_{G\times H} \bigoplus_{\pi\in N} [\pi \otimes u(\pi)].$$

Estos isomorfismos de representaciones demuestran la proposición.

∎

Observación 2.24 *1. Sean $(U_1,\pi^1),\ldots,(U_m,\pi^m)$ representaciones irreducibles de G, no isomorfas dos a dos. Sea (V,π) la suma directa de estas representaciones. Claro que $dim_{\mathbb{C}} Z(\pi) = m$.*

Sea H un grupo con m representaciones unidimensionales

$$(\mathbb{C},\chi_1),\ldots,(\mathbb{C},\chi_m),$$

no isomorfas dos a dos. Sea (V,χ) la representación de H definida por

$$\chi_h(u) = \chi_1(h)u_1 + \cdots + \chi_m(h)u_m,$$

donde $h \in H$ $u := u_1 + \cdots + u_m \in V := \oplus_{i=1}^m U_i$.

Ahora $dim_{\mathbb{C}} Z(\chi) = m$. En efecto, basta notar que

$$(U_i,\chi) \cong_H [dim_{\mathbb{C}} U_i](\mathbb{C},\chi_i). \qquad (1 \le i \le m)$$

Por otro lado π conmuta con χ. Y luego si se considera la representación $(V,\pi\circ\chi)$ de $G\times H$, se tiene que ella es libre de multiplicidades y $dim_{\mathbb{C}} Z(\pi\circ\chi) = m$. En efecto, basta notar que las componentes H-isotípicas U_i se descomponen como representaciones de $G \times H$ como $U_i \cong_{G\times H} U_i \otimes Hom_G(U_i,V)$ y $Hom_G(U_i,V) \cong (\mathbb{C};\chi_i)$, $1 \le i \le m$.

Así, se esta bajo las hipótesis de la proposición 2.30, y luego se obtiene descomposiciones como las de (2.18), de donde se sigue, por el teorema 2.20, que $\pi(\mathbb{C}[G]) = End_H\chi$. *Pero como* $End_H\chi = \bigoplus_{i=1}^{m} End_{\mathbb{C}}\chi_i$, *se sigue*

$$\pi(\mathbb{C}[G]) = \bigoplus_{i=1}^{m} End_{\mathbb{C}}U_i.$$

Esta última igualdad permite decir que el teorema 2.20 se puede pensar como una generalización del teorema de Burnside.

2. Una primera aplicación del teorema 2.20 es tomar $G = H$, ρ *la representación regular derecha, y* σ *la representación regular izquierda. Es claro que* ρ *conmuta con* σ, *y que* $\rho \cong \sigma \cong \oplus_{\pi\in\hat{G}}[dim_{\mathbb{C}}\pi]\pi$; *además es sabido que* $\rho \circ \sigma \cong \oplus_{\pi\in\hat{G}}\pi \otimes \tilde{\pi}$, *donde* $\tilde{\pi}$ *es la contragradiente de* π. *Luego se tiene*

$$\sigma(\mathbb{C}[G]) = End_G\rho$$

Nótese además que $\sigma : \mathbb{C}[G] \to End_G\rho$ *es un isomorfismo, pues* $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[G] = |G| = dim_{\mathbb{C}}End_G\rho$.

3. Para las representaciones $(\underline{V}, \rho)$ *de* G_n, $(\underline{V}, \rho)$ *de* Γ *y* $(\underline{V}, \rho\circ\sigma)$ *de* $G_n \times \Gamma$, *vimos que sus espectros son como en (2.18). Luego, del teorema 2.20 y su corolario se deduce*

$$\begin{aligned}
&\sigma(\mathbb{C}[\Gamma]) = End_{G_n}\underline{V},\\
&\rho(\mathbb{C}[G_n]) = End_{\Gamma}\underline{V},\\
&Z(\rho) = Z(\sigma) = Z(\rho\circ\sigma) = End_{G_n\times\Gamma}(\rho\circ\sigma).
\end{aligned}$$

2.7.1. En éste punto mostraremos una base para el centro $Z(\rho)$ del álgebra conmutante de la representación $(\underline{V}, \rho)$ de G_n.

Por el teorema de independencia de caracteres resulta que una base para la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathbb{C}^{\hat{A}}$ es $(\hat{A})\check{}$. Ahora A se identifica con $(\hat{A})\check{}$ del siguiente modo: cada $r \in A$ se corresponde biunivocamente con $\underline{r} \in (\hat{A})\check{}$, donde $\underline{r} : \alpha \mapsto \alpha(r)$, $\alpha \in \hat{A}$.

En lo que sigue la acción de $\mathfrak{S}_n$ sobre A (resp.$\hat{A}$) es la acción por permutación.

Para $\underline{r} \in (\hat{A})\check{}$ se tiene la descomposición

$$\underline{r} = r^+ + \frac{1}{n!} \sum_{\theta \in \mathfrak{S}_n} r_\theta, \tag{2.19}$$

donde

$$r^+(\alpha) = \frac{1}{n!} \sum_{\theta \in \mathfrak{S}_n} \alpha(\theta \cdot r), \qquad (\alpha \in \hat{A})$$

y

$$r_\theta(\alpha) = \alpha(r) - \alpha(\theta \cdot r). \qquad (\alpha \in \hat{A}\ \theta \in \mathfrak{S}_n)$$

Nótese que

$$r \sim_{\mathfrak{S}_n} s \Rightarrow r^+ = s^+, \tag{2.20}$$

$$r_\theta = r_\nu \Leftrightarrow \theta \sim_{K_r} \nu, \tag{2.21}$$

donde $r, s \in A$ $\theta, \nu \in \mathfrak{S}_n$ y K_r es el estabilizador de r en $\mathfrak{S}_n$.

Sean $r, s \in A$ tal que $s = \theta \cdot r$, $\theta \in \mathfrak{S}_n$, entonces

$$s_\mu = -r_\nu + r_\omega, \tag{2.22}$$

donde μ, ν, ω $\in \mathfrak{S}_n$, $\theta = \nu h$, $\mu\theta = \omega h'$, y h, h' pertenecen al subgrupo estabilizador K_r de r en $\mathfrak{S}_n$.

Resumiendo (2.19) a (2.22) dicen que si S es un sistema de representantes de las distintas órbitas de la acción de $\mathfrak{S}_n$ sobre A, entonces

$$\mathrm{B} := \{r^+, r_\theta \,|\, r \in S,\ 1 \neq \overline{\theta} \in \mathfrak{S}_n/K_r\},$$

genera a $\mathbb{C}^{\hat{A}}$.

Ahora

$$|\mathrm{B}| \leq |S| + \sum_{r \in S}(|\mathrm{B}/K_r| - 1),$$

luego $|\mathrm{B}| \leq |A| = |\hat{A}|$, por lo tanto B es base de $\mathbb{C}^{\hat{A}}$ y su cardinal $|\mathrm{B}|$ es igual a $|A|$. En particular se deduce que $\mathrm{C} := \{r^+ \,|\, r \in S\}$ es libre en $\mathbb{C}^{\hat{A}}$ y su cardinal $|C|$ es $|S|$, luego en virtud de (2.20) se obtiene

$$r \sim s \Leftrightarrow r^+ = s^+. \tag{2.23}$$

Sea S' un sistema de representantes de las distintas órbitas de la acción de $\mathfrak{S}_n$ sobre $\hat{A}$.

La $\mathbb{C}$-álgebra $\mathbb{C}^{\hat{A}}$ se proyecta (por restricción) sobre la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathbb{C}^{S'}$. Como $|S| = |S'|$, y $r^+(\alpha) = r^+(\beta)$, si $\alpha \sim \beta$; se obtiene

Proposición 2.25 *La familia $\{r^+ \,|\, r \in S\}$, es una base para la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathbb{C}^{S'}$, donde S' (resp. S) es un sistema de representantes de las órbitas de la acción de $\mathfrak{S}_n$ sobre $\hat{A}$ (resp. A).*

■

Para $r \in A$, definamos el operador $\mathbf{H}_r$ de $End_{G_n}\rho$, por

$$\mathbf{H}_r := \frac{1}{n!} \sum_{\theta \in \mathfrak{S}_n} H_{\theta \cdot r},$$

donde H_r son los operadores de homotecia definidos en (2.2).

Proposición 2.26 *La familia $C_0 := \{\mathbf{H}_r \,|\, r \in A\}$ es una base para el centro $Z(\rho)$ del álgebra conmutante de ρ.*

Demostración. Dado que $End_{G_n}\rho = \sigma(\mathbb{C}[\Gamma])$, para tener $\mathbf{H}_r \in Z(\rho)$ basta ver que $\mathbf{H}_r$ conmuta con σ_γ, $r \in A$, $\gamma \in \Gamma$. Pero $\gamma = s\nu$, con $s \in A$, $\nu \in \mathfrak{S}_n$; luego de la definición de σ, ver (2.12), se sigue $\sigma_\gamma \mathbf{H}_r = H_s \tau_\nu \mathbf{H}_r$, de donde

$$\sigma_\gamma \mathbf{H}_r = \frac{1}{n!} \sum_{\theta \in \mathfrak{S}_n} H_s \tau_\nu H_{\theta \cdot r},$$

ocupando la proposición 2.6, se deduce

$$\sigma_\gamma \mathbf{H}_r = \sum_{\theta \in \mathfrak{S}_n} H_s H_{\nu \cdot \theta \cdot r} \tau_\nu,$$

luego

$$\sigma_\gamma \mathbf{H}_r = (\sum_{\theta \in \mathfrak{S}_n} H_{\nu \cdot \theta \cdot r}) H_s \tau_\nu$$

haciendo cambio de variable en la sumatoria, se obtiene finalmente

$$\sigma_\gamma \mathbf{H}_r = \mathbf{H}_r \sigma_\gamma,$$

para todo $r \in A$, $\gamma \in \Gamma$. Es decir $C_0 \subset Z(\rho)$.

Sean $r, s \in A$ tales que $\mathbf{H}_r = \mathbf{H}_s$. Ahora para todo $\alpha \in \hat{A}$, hay función α-homogenea f_α, no nula, en $\underline{V}$; luego de $\mathbf{H}_r f_\alpha = \mathbf{H}_s f_\alpha$, para todo $\alpha \in \hat{A}$; de donde se deduce $r^+ = s^+$, luego resulta $r \sim s$ al tener presente (2.23).

Por otro lado es claro que $r \sim s$ implica $\mathbf{H}_r = \mathbf{H}_s$. Así,

$$r \sim s \Leftrightarrow \mathbf{H}_r = \mathbf{H}_s,$$

para $r, s \in A$.

La equivalencia anterior dice que el cardinal de C_0 es el número de órbitas de la acción de $\mathfrak{S}_n$ sobre A, luego se tiene

$$dim_{\mathbf{C}} Z(\rho) = |C_0|.$$

Por lo tanto sólo resta ver que C_0 es libre para demostrar que C_0 es base de $Z(\rho)$.

Sea R un sistema de representantes de las órbitas de la acción de $\mathfrak{S}_n$ sobre A. Luego $C_0 = \{\mathbf{H}_r \mid r \in R\}$. Formemos la ecuación

$$\sum_{r \in R} a_r \mathbf{H}_r = 0.$$

Al evaluar la igualdad anterior en funciones α-homogeneas f_α, no nulas, de $\underline{V}$, se deduce

$$\sum_{r \in R} a_r r^+ = 0,$$

de donde resulta claro que $a_r = 0$, $r \in R$. Y por lo tanto C_0 es libre.

■

Capítulo 3

Álgebras de Hecke

El resultado principal de éste capítulo (teorema 3.15) es demostrar que los operadores de Fourier-Grassmann y las homotecias engendran el álgebra de Hecke de $G = Gl_n(k)$ respecto a su subgrupo unipotente maximal superior. Además al mirar estos operadores como elementos del álgebra de Hecke de G respecto a su subgrupo de Borel relativo a sus caracteres, se recupera sin mayor dificultad el teorema clásico de estructura de éstas álgebras, ver teorema 3.19.

3.1 Generalidades

3.1.1 Notaciones

En todo lo que sigue se denota a G_n (respec. B_n, T_n, U_n, $\mathfrak{S}_n$, Ω_n) simplemente por G (respec. B, U, $\mathfrak{S}$, Ω).

La bandera de Grassmann $\tilde{e}_n$, asociada a la base canónica de E, se denotará en lo sucesivo simplemente por e.

M denota al subgrupo de matrices monomiales de G, i.e., un elemento g de G está en M si y sólo si g tiene coeficientes no nulos en las posiciones $(1,\theta(1)),\ldots,(n,\theta(n))$, para algún θ en $\mathfrak{S}$.

$\mathcal{H}$ denota al álgebra de Hecke de G respecto a U, i.e.,

$$\mathcal{H} = End_G(V,\rho).$$

3.1.2 Hechos básicos

1.2.1. Sea W un grupo generado por $S = \{s_1,\ldots,s_m\}$, tal que cada s_i es involución, i.e., $s_i^2 = 1$. Sea $w \in W$; se define el largo $l(w)$ de w respecto a S como el número minimo de elementos de S que se necesita para escribir w. Se conviene que $l(1) = 0$.

Se dice que el conjunto de generadores S satisface *condiciones de cambio* si:

$$l(s_{i_1}\cdots s_{i_l}) = \ell \ \text{ y } l(s_i s_{i_1}\cdots s_{i_l}) < \ell + 1, \text{ implican que existe } 0 \leq j \leq m-1$$

tal que

$$s_{i_1}\cdots s_{i_j} = s_i s_{i_1}\cdots s_{i_{j-1}}.$$

Definición. *Un grupo de Coxeter W es un grupo finito que tiene presentación*

$$W = < s_1,\ldots,s_m \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \quad 1 \leq i,j \leq m >,$$

donde los m_{ij} son enteros positivos tales que

$$m_{ii} = 1,\ m_{ij} > 1 \text{ si } i \neq j \text{ y } m_{ij} = m_{ji} \qquad (1 \leq i,j \leq m).$$

El par (W,S) se llama un *sistema de Coxeter finito.*

En todo sistema de Coxeter finito (W,S) se tiene

- Ley de simplificación: si $l(s_{i_1}\cdots s_{i_\ell}) < \ell$ entonces hay $j \leq p$ tal que

  $$s_{i_1}\cdots s_{i_\ell} = s_{i_1}\cdots \hat{s}_{i_j}\cdots \hat{s}_{i_{p+1}}\cdots s_{i_\ell},$$

  donde la notación $\hat{s}$ significa que s se omite, $s \in S$.

- Condiciones de cambio

- Para todo $s \in S$ y $w \in W$ se cumple

$$l(sw) = l(w) + 1 \quad \text{ó} \quad l(sw) = l(w) - 1.$$

- Si $l(w) = \ell$ y $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell} = s_{j_1} \cdots s_{j_\ell}$, entonces

$$\{i_1, \ldots, i_\ell\} = \{j_1, \ldots, j_\ell\}.$$

1.2.2. Es bien sabido que (G, B, M) es un BN-par con grupo de Weyl $W := M/B \cap M$, ver [4]. Claro que W se puede realizar como las matrices de permutación de G. Luego $M = TW = WT$ y $W \cong \mathfrak{S}$. Además se tiene la descomposición de Bruhat

$$G = \dot{\bigcup_{w \in W}} BwB.$$

En adelante w_i denota la matriz de permutación asociada a la trasposición $\theta_i = (i, i+1)$ de $\mathfrak{S}$, $0 < i < n$. Así, (W, S) es un sistema de Coxeter, donde $S = \{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$.

Por último recordemos que si π es el homomorfismo natural de M en M/T, se tiene

$$BmB = Bm'B \Leftrightarrow \pi(m) = \pi(m'), \tag{3.1}$$

para todo $m, m' \in M$. Ver proposición 15 de [3].

3.2 Las G-órbitas en Ω^2

El propósito inmediato es establecer dos lemas que son vitales en la clasificación de las G-órbitas en Ω^2. Cabe mencionar que tanto el enunciado como la demostración de estos lemas son simples adaptaciones de resultados bien conocidos, derivados del hecho que G es un BN-par. Es así, que se ha usado la exposición dada por R.Carter en [3].

Definamos primero los siguientes subgrupos de G.

$$U_i = \{(a_{ij}) \in U \mid a_{i,i+1} = 0\}$$

$$X_{ij} = \{I + tE_{ij} \mid t \in k^\times\},$$

donde I es la matriz identidad de G y E_{ij} es la matriz que tiene en el lugar (i,j) a 1 y ceros en el resto.

Se escribirá $X_{i,i+1}$ (resp. $X_{i+1,i}$) simplemente por X_i (resp. X_{-i}).

No es difícil ver que: $U = X_iU_i = U_iX_i$, $w_iX_iw_i = X_{-i}$, $w_iU_iw_i = U_i$ y si θ es la permutación asociada a la matriz de permutación m de M, entonces

$$m^{-1}X_{ij}m = X_{\theta(i)\theta(j)}. \tag{3.2}$$

T_i denota al subgrupo de G formado por los elementos que difieren de la identidad sólo en las posiciones (i,i) y $(i+1,i+1)$, donde van λ y $-\lambda^{-1}$ ($\lambda \in k^\times$) respectivamente.

De la descomposición

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se deduce

$$X_{-i} \subseteq U \cup Uw_iT_iU \tag{3.3}$$

Lema 3.1 *Para todo $m \in M$ y $w_i \in S$, se tiene*

(a) $mUw_i \subset Umw_iU \cup UmT_iU$.

(b) $w_iUm \subset Uw_imU \cup UT_imU$.

Demostración. Sea $m \in M$ y $w_i \in S$, entonces $mUw_i = mX_iU_iw_i = mX_iw_iU_i$. Luego

$$mUw_i = mX_iw_iU_i. \tag{1}$$

Por otro lado $mX_iw_iU_i = mX_im^{-1}mw_iU_i$, luego si θ es la permutación asociada a m^{-1} se sigue de (3.2)

$$mUw_i = X_{\theta(i)\theta(i+1)}mw_iU_i.$$

Ahora se tiene dos posibilidades

1. Si $\theta(i) < \theta(i+1)$, entonces $X_{\theta(i)\theta(i+1)} \subseteq U$, y luego

$$mUw_i \subset Umw_iU_i.$$

2. Si $\theta(i) > \theta(i+1)$. En éste caso escribamos $m = m'w_i$, donde $m' = mw_i$. Se tiene que si θ' es la permutación asociada a m', entonces $\theta'(i) < \theta'(i+1)$.

Ahora de (3.3) se sigue $m'X_{-i} \subseteq m'U \cup m'Uw_iT_iU$, pero como $\theta'(i) < \theta'(i+1)$ se concluye de 1. que $m'X_{-i} \subseteq m'U \cup Um'w_iT_iU$. Luego $mX_iw_i \subset mw_iU \cup UmT_iU \subset Umw_iU \cup UmT_iU$, de donde se obtiene finalmente

$$mUw_i \subset Umw_iU \cup UmT_iU,$$

al tener presente además (1). Esta última contención termina de demostrar (a).

En realidad (a) es equivalente a (b). En efecto, basta tomar los inversos respectivos

■

Lema 3.2 *Para todo $w \in W$ y $w_i \in S$ tales que $l(w_iw) \geq l(w)$ se tiene*

$$w_iUw \subseteq Uw_iwU.$$

Demostración. Se demostrará la afirmación realizando inducción sobre el largo de w.

Claramente $w_iUw \subseteq Uw_iwU$, si $l(w) = 0$.

Sea $w \in W$ tal que $l(w) > 0$. Escribamos $w = w'w_j$ donde $l(w') = l(w) - 1$.

Del lema anterior $w_iUw \subseteq Uw_iwU \cup UT_iwU$.

Supongamos que w_iUw no está contenido en Uw_iwU, luego

$$w_iUw \cap UT_iwU \neq \emptyset,$$

y por consiguiente

$$w_iUw' \cap UT_iwUw_j \neq \emptyset. \tag{1}$$

Por hipótesis $l(w_iw) \geq l(w)$ y como $l(w') = l(w) - 1$, se sigue que $l(w_iw) - 1 \geq l(w')$; pero como $l(w_iw') = l(w_iww_j) \geq l(w_iw) - 1$ se concluye $l(w_iw') \geq l(w')$. Así, podemos usar la hipótesis de inducción, i.e., tenemos $w_iUw' \subseteq Uw_iw'U$. Luego de (1) se sigue

$$Uw_iw'U \cap UT_iwUw_j \neq \emptyset. \tag{2}$$

Nuevamente del lema anterior se tiene $wUw_j \subseteq Uww_jU \cup UwT_jU$, de donde se obtiene $UT_iwUw_j \subseteq UT_iww_jU \cup UT_iUwT_jU$. Luego, al tener presente (2), se obtiene

$$Uw_iw'U \cap (UT_iUww_jU \cup UT_iUwT_jU) \neq \emptyset.$$

De esta última igualdad se deduce

$$Bw_iw'B \cap Bww_jB \neq \emptyset \quad \text{ó} \quad Bw_iw'B \cap BwB \neq \emptyset.$$

Pero recordando ahora la descomposición de Bruhat se sigue $Bw_iw'B = Bww_jB$ ó $Bw_iw'B = BwB$, luego de (3.1) se obtiene $w_iw' = ww_j$ ó $w_iw' = w$.

Si $w_iw' = ww_j$, entonces $w_iw' = w'$, de donde $w_i = 1$. En consecuencia debe tenerse $w_iw' = w$, o lo que es equivalente $w_iw = w'$. Pero entonces $l(w) \leq l(w_iw) = l(w') = l(w) - 1$, o sea $l(w) \leq l(w) - 1$ lo cual es un absurdo. Así, debe tenerse $w_iUw \subset Uw_iwU$.

■

En orden a clasificar las G-órbitas en $\Omega \times \Omega$, recuérdese que $\Omega \sim_G G/U$. Y que clasificar las G-órbitas en $\Omega \times \Omega$ (o bien en $G/U \times G/U$) es equivalente a describir las dobles clases de G según U. Nótese que la doble clase UgU se corresponde con la G-órbita de (U, gU) en $G/U \times G/U$, $g \in G$.

Teniendo presente la descomposición de Bruhat para G y el hecho que $B = TU = UT$, se obtiene $G = \bigcup_{m \in M} UmU$.

Por otro lado si $O(m)$ denota la G-órbita asociada a $(e, m \cdot e) \in \Omega \times \Omega$, se tiene

Lema 3.3 *Sean $m, m' \in M$, entonces*

$$O(m) = O(m') \textit{ si y sólo si } m = m'.$$

Demostración. Sea $m = wt$, $m' = w't'$ con $t, t' \in T$, $w, w\prime \in W$. Si $O(m) = O(m')$, entonces $(e, m \cdot e) \sim (e, m' \cdot e)$ o sea $(U, mU) \sim (U, m'U)$. Luego $(B, mB) \sim (B, m'B)$, de donde $BmB = Bm'B$, o equivalentemente $\pi(m) = \pi(m')$. Por lo tanto $wT = w'T$, en consecuencia $w = w'$.

También se tiene que hay $u \in U$ tal que $umU = m'U$, es decir $uwtU = wt'U$, de donde $w^{-1}uw = t'u't^{-1}$, para algún $u' \in U$; pero esta última igualdad dice que u es conjugado a $t'u't^{-1}$, por lo tanto $t = t'$. Luego $m = m'$.

El reciproco es inmediato

■

Este último lema dice que las G-órbitas en $\Omega \times \Omega$ están parametrizadas por M, o equivalentemente que M es un sistema de representantes para las dobles clases de G según U. Por consiguiente

$$G = \dot{\bigcup_{m \in M}} UmU.$$

Dado que W es naturalmente isomorfo al grupo simétrico $\mathfrak{S}$ es que si no hay peligro de confusión los elementos de W serán mirados, cuando proceda, como elementos de $\mathfrak{S}$.

Al igual que antes, se dará por hecho que la bandera ω de Ω se escribe $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Idem para ζ, η, ξ,...

Del mismo modo un elemento $t \in A$ tendrá coordenadas $(t_1, \ldots, t_n)$, $t_i \in k^\times, 1 \leq i \leq n$.

Se denotará por h_t $(t \in A)$ al elemento de T que tiene en la posición (i,i) a t_i, $1 \leq i \leq n$. Y $\mathbf{h}^i_\lambda$ $(\lambda \in k^\times)$ denota al elemento

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in T,$$

donde λ está en la posición (i,i), $1 \leq i \leq n$.

Definición. *Sean $\omega, \zeta \in \Omega, i \in \{1, \ldots, n\}$ y supongamos que para todo $j \neq i$, $0 < j < n$, se tiene $\omega_j \equiv \zeta_j$. Se define la i-base de ζ respecto a ω como el elemento $\underline{\zeta}$ de $\Omega_i(\omega)$ tal que $\underline{\zeta}_i = \zeta_i$.*

Sea $m = h_t w_i \in M$, $t \in A$, $w_i \in$ S. Si $\omega = e$ y $\zeta = m \cdot e$, entonces es claro que $\zeta_i \not\equiv \omega_i$ y $\zeta_j \equiv \omega_j$, para todo $j \neq i$. Más precisamente

$$\frac{\zeta_j}{\omega_j} = \begin{cases} t_1 \cdots t_j, & j < i \\ -t_1 \cdots t_j, & j > i. \end{cases}$$

Y además

$$\zeta_i = t_1 \cdots t_{i-1} t_{i+1} e_{1 \cdots (i-1)} \wedge e_{i+1}.$$

Así, no es difícil ver que la i-base $\underline{\zeta}$ de ζ respecto a ω es

$$\underline{\zeta} = \mathbf{h}^i_{-\lambda^{-1}} \mathbf{h}^{i+1}_\lambda w_i e, \tag{3.4}$$

donde $\lambda = t_1 \cdots t_{i-1} t_{i+1}$.

Ahora si $(\omega, \zeta) \in O(m)$, $m = h_t w_i$, entonces hay $g \in G$ tal que $g \cdot e = \omega$ y $g \cdot m \cdot e = \zeta$. Teniendo presente la G-invariancia de la división de j-vectores descomponibles congruentes, se tiene

$$\frac{\zeta_j}{\omega_j} = \begin{cases} t_1 \cdots t_j, & j < i \\ -t_1 \cdots t_j, & j > i. \end{cases}$$

Y además la i-base $\underline{\zeta}$ de $\zeta = g \cdot m \cdot e$ respecto a $\omega = g \cdot e$ es $g \cdot \underline{m \cdot e}$, i.e.

$$\underline{g \cdot m \cdot e} = g \cdot \underline{m \cdot e}. \tag{3.5}$$

En efecto, dado que la j-ésima componente $(\underline{m \cdot e})_j$ de $\underline{m \cdot e}$ es $e_{1 \cdots j}$, se sigue que

$$g \cdot (\underline{m \cdot e})_j = \omega_j. \qquad (j \neq i)$$

Y como la i-ésima componente $(\underline{m \cdot e})_i$ de $\underline{m \cdot e}$ es $m(e_{1 \cdots i})$, se sigue $g(\underline{m \cdot e})_i = g(m(e_{1 \cdots i}))$, i.e., $g(\underline{m \cdot e})_i = \zeta_i$.

Por último notar que

$$t_1 \cdots t_{i-1} t_{i+1} = e \vee_i \underline{m \cdot e},$$

luego de la G-invariancia de $\vee_i$ se obtiene

$$g \cdot e \vee_i g \cdot \underline{m \cdot e} = t_1 \cdots t_{i-1} t_{i+1},$$

y de (3.5) se concluye

$$\omega \vee_i \underline{\zeta} = t_1 \cdots t_{i-1} t_{i+1},$$

donde $\underline{\zeta}$ es la i-base de ζ respecto a ω.

Se tiene

Lema 3.4 *Sea $m = h_t w_i$, $t \in A$, $w_i \in S$. El par de banderas de Grassmann $(\omega, \zeta) \in O(m)$ si y sólo si se cumple*

(a) $\frac{\zeta_j}{\omega_j} = \begin{cases} t_1 \cdots t_j, & j < i \\ -t_1 \cdots t_j, & j > i. \end{cases}$

(b) $\omega \vee_i \underline{\zeta} = t_1 \cdots t_{i-1} t_{i+1}$,

donde $\underline{\zeta}$ es la i-base de ζ respecto a ω.

Demostración. La discusión previa demuestra la necesidad. Veamos el reciproco.

Dado que (ω, ζ) satisface (b) se puede escribir $\omega_i = \omega_{i-1} \wedge x$ y $\zeta_i = \omega_{i-1} \wedge y$, con $x, y \in [\omega_{i+1}]$ y $\{x, y\}$ libre.

Sea $\lambda = t_1 \cdots t_{i-1} t_{i+1}$. Dado que G actúa transitivamente sobre Ω, se puede tomar $g \in G$ tal que $g(e_i) = x$, $g(e_{i+1}) = \lambda^{-1} y$ y $g(e_{1\cdots j}) = \omega_j$, para $1 \leq j \leq n$ y $j \neq i, i+1$.

Claro que $gm(e_{1\cdots j}) = \zeta_j$, para $j \neq i, i+1$. Así, para ver que $g \cdot e = \omega$ y $g \cdot m \cdot e = \zeta$ (i.e. $(\omega, \zeta) \in O(m)$) basta tener

1. $ge_{1\cdots i} = \omega_i$, $gme_{1\cdots i} = \zeta_i$,

2. $ge_{1\cdots(i+1)} = \omega_{i+1}$, $gme_{1\cdots(i+1)} = \zeta_{i+1}$.

Veamos 1., se tiene $ge_{1\cdots i} = g(e_{1\cdots(i-1)} \wedge e_i) = \omega_{i-1} \wedge x$, i.e., $ge_{1\cdots i} = \omega_i$. Por otro lado $gme_{1\cdots i} = gh_t e_{1\cdots(i-1)} \wedge e_{i+1}$, luego $gme_{1\cdots i} = \lambda g(e_{1\cdots(i-1)} \wedge e_{i+1})$, o sea $gme_{1\cdots i} = \lambda\omega_{i-1} \wedge \lambda^{-1} y$, por lo tanto $gme_{1\cdots i} = \zeta_i$.

Para ver 2., notar que $\omega_{i+1} = \lambda_0 \omega_{i-1} \wedge x \wedge y$, para cierto $\lambda_0 \in k^\times$; y $e_{1\cdots(i+1)} = e_{1\cdots(i-1)} \wedge e_i \wedge e_{i+1}$. Luego $ge_{i\cdots(i+1)} = \omega_{i-1} \wedge x \wedge \lambda^{-1} y$, por lo tanto

$$ge_{1\cdots(i+1)} = \lambda^{-1}\lambda_0^{-1}\omega_{i+1}. \tag{1}$$

Pero de (3.4) $\underline{m \cdot e} = \mathbf{h}^i_{-\lambda^{-1}} \mathbf{h}^{i+1}_\lambda w_i \cdot e$, luego al tener presente la G-invariancia de $\vee_i$, se obtiene $e \vee_i \underline{me} = ge \vee_i g\mathbf{h}^i_{-\lambda^{-1}} \mathbf{h}^{i+1}_\lambda w_i \cdot e$, luego

$$e \vee_i \underline{me} = \frac{\omega_i \wedge y}{\lambda^{-1}\lambda_0^{-1}\omega_{i+1}},$$

por otro lado $\omega \vee_i \underline{\zeta} = (\omega_i \wedge y)/\omega_{i+1}$, y como por hipótesis $\omega \vee_i \underline{\zeta} = \lambda = e \vee_i \underline{me}$, se concluye que $\lambda^{-1}\lambda_0^{-1} = 1$. Luego de (1)

$$ge_{1\cdots(i+1)} = \omega_{i+1}. \tag{2}$$

Por último $gme_{1\cdots(i+1)} = g\lambda t_i e_{1\cdots(i-1)} \wedge e_{i+1} \wedge e_i$, pero al considerar 2. se sigue

$gme_{1\cdots(i+1)} = -\lambda t_i \omega_{i+1}$, i.e. $gme_{1\cdots(i+1)} = \zeta_{i+1}$.

$\blacksquare$

Claro que si $\omega = e$, $\zeta = h_t \cdot e$ ($t \in A$), entonces la i-base $\underline{\zeta}$ de ζ respecto a ω es

$$\mathbf{h}^i_\lambda \mathbf{h}^{i+1}_{\lambda^{-1}} \cdot e,$$

con $\lambda = t_1 \cdots t_i$.

Además no es difícil ver que la i-base de $\underline{g \cdot \zeta}$ ($g \in G$) de $g \cdot \zeta$ respecto a $g \cdot \omega$ es $g\underline{\zeta}$, i.e.

$$\underline{g \cdot \zeta} = g \cdot \underline{\zeta}, \tag{3.6}$$

para $\zeta = h_t \cdot e$, $\omega = e$, $t \in A$.

Definición 3.5 *Sea $m = h_t w$ en M, con $w \in W$, $t \in A$. Supongamos $l(w) = \ell > 0$, luego w se escribe en terminos de S como $w = w_{i_1} \cdots w_{i_\ell}$. Se dirá que un par de banderas de Grassmann (ω, ζ) tiene configuración $h_t w_{i_1} \cdots w_{i_\ell}$ si y sólo si existe (ℓ+1)-tuplo de banderas de Grassmann $(\zeta^0, \ldots, \zeta^\ell)$ con $\zeta^0 = \omega$, $\zeta^\ell = \zeta$ y tal que*

1. *Para todo $0 < p < \ell$, se tiene*

$$\frac{\zeta^p_j}{\zeta^{p-1}_j} = \begin{cases} 1 & j < i_p \\ -1 & j > i_p, \end{cases}$$

y

$$\zeta^{p-1} \vee_{i_p} \underline{\zeta^p} = 1,$$

donde $\underline{\zeta^p}$ es la i_p-base de ζ^p respecto a ζ^{p-1}.

2.

$$\frac{\zeta_j}{\zeta^{\ell-1}_j} = \begin{cases} t_{w^{-1}(1)} \cdots t_{w^{-1}(j)} & j < i_p \\ -t_{w^{-1}(1)} \cdots t_{w^{-1}(j)} & j > i_p, \end{cases}$$

y

$$\zeta^{\ell-1} \vee_{i_\ell} \underline{\zeta} = t_{w^{-1}(1)} \cdots t_{w^{-1}(i_\ell)},$$

donde $\underline{\zeta}$ es la i_ℓ-base de ζ respecto a $\zeta^{\ell-1}$.

En el caso $l(w) = 0$, se tiene $m = h_t \in T$, $t \in A$. Y se dice que (ω, ζ) tiene configuración h_t, si $\zeta = t \cdot \omega$, i.e. $\zeta_j = t_1 \cdots t_j \omega_j$, para todo $1 \leq j \leq n$.

Observación. *En la definición anterior nótese que $(\zeta^0, \ldots, \zeta^\ell)$ depende de la escritura de w en terminos de S. Sin embargo, si no hay peligro de confusión no aludiremos explicitamente a la escritura de w en terminos de S.*

En adelante el $(\ell+1)$-tuplo $(\zeta^0, \ldots, \zeta^\ell)$ se llama una presentación de la configuración $h_t w_{i_1} \cdots w_{i_\ell}$ de m respecto a (ω, ζ).

Ahora el lema (3.4) se escribe en terminos de la definición (3.5) como

Corolario. *El par de banderas de Grassmann (ω, ζ) pertenece a la órbita $O(h_t w_i)$ si y sólo si tienen configuración $h_t w_i$, $t \in A$, $w_i \in$ S.*

■

Sea $m = h_t w$ en M, con $w = w_{i_1} \cdots w_{i_\ell} \in W$, $t \in A$. El par de banderas de Grassmann $(e, m \cdot e)$ tiene configuración $h_t w_{i_1} \cdots w_{i_\ell}$. En efecto, supongamos $l(w) = \ell > 0$ (en el caso $l(w) = 0$ la afirmación es trivial), luego w se escribe en terminos de S como $w = w_{i_1} \cdots w_{i_\ell}$. Sea $\zeta^0 = e$, $\zeta^\ell = m \cdot e$ y $\zeta^p = w_{i_1} \cdots w_{i_p} \cdot e$, para $0 < p < \ell$.

Claro que

$$\frac{\zeta_j^p}{\zeta_j^{p-1}} = \frac{w_{i_p} \cdot e_{1\ldots j}}{e_{1\ldots j}}, \qquad (0 < p < \ell)$$

luego para $0 < p < \ell$ se tiene

$$\frac{\zeta_j^p}{\zeta_j^{p-1}} = \begin{cases} 1 & \text{si } j < i_p \\ -1 & \text{si } j > i_p. \end{cases} \tag{3.7}$$

Ahora de (3.5) y la G-invariancia de $\vee_i$ se deduce

$$\zeta^{p-1} \vee_{i_p} \underline{\zeta^p} = e \vee_{i_p} w_{i_p} \cdot e, \qquad (0 < p < \ell)$$

luego

$$\zeta^{p-1} \vee_{i_p} \underline{\zeta^p} = 1. \quad (0 < p < \ell) \tag{3.8}$$

Con el abuso de notación evidente notar que

$$wh_t w^{-1} = h_{w\cdot t}, \tag{3.9}$$

donde $t \in A$, $w \in W$.

Luego de

$$\frac{\zeta_j^{\ell}}{\zeta_j^{\ell-1}} = \frac{h_t w e_{1\cdots j}}{w_{i_1} \cdots w_{i_{\ell-1}} e_{1\cdots j}},$$

se obtiene

$$\frac{\zeta_j^{\ell}}{\zeta_j^{\ell-1}} = \frac{w h_{w^{-1}\cdot t} e_{1\cdots j}}{w_{i_1} \cdots w_{i_{\ell-1}} e_{1\cdots j}},$$

o bien

$$\frac{\zeta_j^{\ell}}{\zeta_j^{\ell-1}} = \frac{w_{i_\ell} h_{w^{-1}\cdot t} e_{1\cdots j}}{e_{1\cdots j}},$$

de donde se deduce

$$\frac{\zeta_j^{\ell}}{\zeta_j^{\ell-1}} = \begin{cases} t_{w^{-1}(1)} \cdots t_{w^{-1}(j)} & j < i_\ell \\ -t_{w^{-1}(1)} \cdots t_{w^{-1}(j)} & j > i_\ell. \end{cases} \tag{3.10}$$

Por otra parte de (3.9) se sigue

$$\zeta^{\ell-1} \vee_{i_\ell} \underline{\zeta^{\ell}} = w_{i_1} \cdots w_{i_{\ell-1}} \cdot e \vee_{i_\ell} \underline{w h_{w^{-1}\cdot t} \cdot e},$$

ahora de (3.5) y la G-invariancia de $\vee_{i_\ell}$ se obtiene

$$\zeta^{\ell-1} \vee_{i_\ell} \underline{\zeta^{\ell}} = e \vee_{i_\ell} w_{i_\ell} \underline{h_{w^{-1}\cdot t} \cdot e},$$

pero la i_ℓ-base de $h_{w^{-1}\cdot t} \cdot e$ respecto a e es $\mathbf{h}_{\lambda}^{i_\ell} \mathbf{h}_{\lambda^{-1}}^{i_\ell+1} \cdot e$, donde $\lambda = t_{w^{-1}(1)} \cdots t_{w^{-1}(i_\ell)}$, luego se concluye

$$\zeta^{\ell-1} \vee_{i_\ell} \underline{\zeta^{\ell}} = t_{w^{-1}(1)} \cdots t_{w^{-1}(i_\ell)}. \tag{3.11}$$

Así, de (3.7), (3.8), (3.10) y (3.11) se sigue que $(e, m \cdot e)$ tiene configuración m; y una presentación para m respecto a $(e, m \cdot e)$ es

$$(\zeta^0, \ldots, \zeta^{\ell}). \tag{3.12}$$

Proposición 3.6 *El par de banderas de Grassmann (ω, ζ) pertenece a la órbita $O(m)$ $(m \in M)$ si y sólo si están en configuración m.*

Demostración. Si $(\omega, \zeta) \in O(m)$, entonces hay $g \in G$ tal que $g \cdot e = \omega$, y $g \cdot me = \zeta$. Por la discusión previa se tiene que $(e, m \cdot e)$ tiene configuración m.

Sea $(\zeta^0, \dots, \zeta^\ell)$ la presentación (3.12) de m respecto a $(e, m \cdot e)$. De (3.6), de la G-invariancia de $\vee_i$, y de la G- invariancia de división de i-vectores descomponibles, no es difícil ver que $(g\zeta^0, \dots, g\zeta^\ell)$ es una presentación de la configuración m respecto a (ω, ζ), i.e., (ω, ζ) están en configuración m.

Para demostrar el reciproco, se usará inducción sobre el largo de w, donde $m = h_t w$, $w \in W$, $t \in A$.

Si $l(w) = 0$, entonces $m = h_t$. Dado que Ω es G-transitivo, entonces hay $g \in G$ tal que $g \cdot e = \omega$ y también $gh_t e = \zeta$, pues en este caso $\zeta = t \cdot \omega$.

Si $l(w) = 1$, la proposición es el lema (3.4).

Supongamos valido para los $w \in W$ tal que $l(w) < \ell$.

Escribamos

$$w = w_{i_1} \cdots w_{i_\ell}.$$

Luego si (ω, ζ) estan en configuración $m = h_t w_{i_1} \cdots w_{i_\ell}$ $(t \in A)$, se tiene que hay una presentación $(\zeta^0, \dots, \zeta^\ell)$, con $\zeta^0 = \omega$ y $\zeta^\ell = \zeta$, de la configuración m respecto a (ω, ζ).

Evidentemente (ω, ζ^1) está en configuración w_{i_1}, luego por hipótesis de inducción hay $g \in G$ tal que $g \cdot e = \omega$ y $gw_{i_1} \cdot e = \zeta^\ell$.

Por otra parte no es difícil ver que $(\zeta^1, \dots, \zeta^\ell)$ es una presentación para la configuración de $m' = h_{w_{i_1} \cdot t} w_{i_2} \cdots w_{i_\ell}$ respecto a (ζ^1, ζ). Luego, por hipótesis de inducción hay $h \in G$ tal que $h \cdot e = \zeta^1$ y $hh_{w_{i_1} \cdot t} w_{i_2} \cdots w_{i_\ell} \cdot e = \zeta$.

Así, hay $g, h \in G$ tales que $h^{-1} g w_{i_1} \in U$ y $g_0 := hh_{w_{i_1} \cdot t} w_{i_2} \cdots w_{i_\ell} g^{-1}$ que envía ω en ζ.

Ahora para tener $(\omega, \zeta) \in O(m)$, basta demostrar

$$Ug^{-1} g_0 g U = UmU.$$

Pero

$$Ug^{-1}g_0gU = Ug^{-1}hh_{w_{i_1}\cdot t}w_{i_2}\cdots w_{i_\ell}U.$$

Ahora como $h^{-1}gw_{i_1} \in U$, se sigue que hay $u \in U$ tal que $g^{-1}h = w_{i_1}u$, luego

$$Ug^{-1}g_0gU = Uw_{i_1}uh_{w_{i_1}\cdot t}w_{i_2}\cdots w_{i_\ell}U,$$

pero $TU = UT$, luego hay $u' \in U$ tal que

$$Ug^{-1}g_0gU = Uw_{i_1}h_{w_{i_1}\cdot t}u'w_{i_2}\cdots w_{i_\ell}U,$$

y de (3.9) se sigue

$$Ug^{-1}g_0gU = Uh_tw_{i_1}u'w_{i_2}\cdots w_{i_\ell}U,$$

pero $l(w) \geq l(w_{i_2}\cdots w_{i_l})$, luego del lema 3.2 se sigue

$$Ug^{-1}g_0gU = Uh_tw_{i_1}\cdots w_{i_\ell}U,$$

es decir

$$Ug^{-1}g_0gU = UmU.$$

■

3.3 La base standard de $\mathcal{H}$.

Denotemos por $\mathcal{H}$ el álgebra conmutante $End_G\rho$, y por $\mathcal{B}$ la base standard de $\mathcal{H}$ (i.e. la base asociada a las G-órbitas de $\Omega \times \Omega$).

La proposición 3.6 dice que los elementos de $\mathcal{B}$ están parametrizados por M, más precisamente para $m \in M$, el elemento S_m de $\mathcal{B}$ está dado por

$$(S_mf)(\omega) = \sum_{(\omega,\zeta)\in O(m)} f(\zeta),$$

para $f \in V$, $\omega \in \Omega$.

Notar que el elemento S_{h_t} $(t \in A)$ es el operador de homotecia H_t definido en 2.2.

En lo sucesivo S_{w_i} $(w_i \in S)$ se denotará simplemente por S_i.

Sea $w = w_{i_1} \cdots w_{i_\ell} \in W$, tal que $l(w) = \ell > 0$. Si $(\omega, \zeta) \in O(w)$, entonces hay presentación $(\eta^1, \ldots, \eta^\ell)$ de w respecto a (ω, ζ). Así, se tiene

$$(\omega, \zeta) \in O(w) \Leftrightarrow (\eta^{p-1}, \eta^p) \in O(w_{i_p}). \qquad (1 \leq p \leq \ell)$$

Luego se obtiene

$$S_w = S_{i_1} \cdots S_{i_\ell}, \tag{3.13}$$

donde $w = w_{i_1} \cdots w_{i_\ell} \in S$ y $l(w) = \ell$.

Por otra parte si $w \in W$, $t \in A$, es rutinario ver que

$$(\omega, \zeta) \in O(h_t w) \Leftrightarrow (\omega, (w^{-1} \cdot t^{-1}) \cdot \zeta) \in O(w),$$

donde por supuesto t^{-1} es $(t_1^{-1}, \ldots, t_n^{-1}) \in A$.

Calculemos ahora $S_w H_{w^{-1} \cdot t}$, para $w \in W$, $t \in A$.

Sean $f \in V$, $\omega \in \Omega$

$$(S_w H_{w^{-1} \cdot t} f)(w) = \sum_{(\omega, \zeta) \in O(w)} f((w^{-1} \cdot t) \cdot \zeta),$$

haciendo $\eta = (w^{-1} \cdot t) \cdot \zeta$, se obtiene

$$(S_w H_{w^{-1} \cdot t} f)(w) = \sum_{(\omega, (w^{-1} \cdot t^{-1}) \cdot \eta) \in O(w)} f(\eta),$$

luego

$$(S_w H_{w^{-1} \cdot t} f)(w) = \sum_{(\omega, \eta) \in O(h_t w)} f(\eta),$$

es decir

$$(S_w H_{w^{-1} \cdot t} f)(w) = (S_{h_t w} f)(\omega).$$

Por lo tanto

$$S_{h_t w} = S_w H_{w^{-1} \cdot t}, \tag{3.14}$$

para todo $w \in W$, $t \in A$.

Luego

Corolario 3.7 *El álgebra $\mathcal{H}$ está generada, como álgebra, por los operadores H_t, ($t \in A$), S_i, $0 < i < n$.*

Demostración. Basta expresar S_m, $m \in M$, en función de S_i y H_t.

Más precisamente, si $m = h_t w$ y $l(w) = \ell > 0$, entonces $w = w_{i_1} \cdots w_{i_\ell}$, y de (3.13) y (3.14) se sigue

$$S_m = S_{i_1} \cdots S_{i_\ell} H_{w^{-1} \cdot t}.$$

■

Para todo $\lambda \in k^\times$ y $0 < i \leq n$ se denota por H^i_λ al operador $H_{\underline{\lambda}}$, donde $\underline{\lambda}$ es el elemento de A que tiene a λ en el lugar i y 1 en el resto.

Para todo $0 < i < n$ y $r \in A$ se tiene

$$\begin{cases} S_i = B_i H^{i+1}_{-1} \\ H_r B_i = B_i H_{(i.i+1) \cdot r}, \end{cases} \tag{3.15}$$

donde el operador B_i $(0 < i < n)$ está definido por

$$(B_i f)(\omega) = \sum_{\substack{\zeta \in \Omega_i(\omega) \\ \omega \vee_i \zeta \ = 1}} f(\zeta),$$

para $f \in V$, $\omega \in \Omega$.

En orden a conocer las relaciones de conmutación de los generadores S_i, calculemos B_i^2.

Sean $f \in V$, $\omega \in \Omega$, entonces

$$(B_i^2 f)(\omega) = \sum_{\substack{\zeta \in \Omega_i(\omega) \\ \omega \vee_i \zeta \; = 1}} \; \sum_{\substack{\eta \in \Omega_i(\zeta) \\ \zeta \vee_i \eta \; = 1}} f(\eta).$$

Sea $\zeta \in \Omega_i(\omega)$ tal que $\omega \vee_i \zeta \; = 1$. Si $\eta \in \Omega_i(\zeta) = \Omega_i(\omega)$ satisface $\zeta \vee_i \eta \; = 1$, se tiene que $(\omega + \eta) \vee_i \zeta \; = 0$. Luego $\eta \in \Omega_i(\omega)$ y su i-ésima componenete η_i se escribe $\eta_i = -\omega_i + r\zeta_i \, (r \in k)$ por lo tanto

$$(B_i^2 f)(\omega) = \sum_{\substack{\zeta \in \Omega_i(\omega) \\ \omega \vee_i \zeta \; = 1}} \; \sum_{\substack{r \in k \\ \eta \in \Omega_i(\omega) \\ \eta_i = -\omega_i + r\zeta_i}} f(\eta),$$

intercambiando el orden de sumación se obtiene

$$(B_i^2 f)(\omega) = \sum_{r \in k} \; \sum_{\substack{\zeta \in \Omega_i(\omega) \\ \omega \vee_i \zeta \; = 1 \\ \eta \in \Omega_i(\omega) \\ \eta_i = -\omega i + r\zeta_i}} f(\eta),$$

como la ecuación $\omega \vee_i \zeta \; = 1$ tiene q soluciones para ω dado, y como $\omega \vee_i \eta \; = r$, se obtiene

$$(B_i^2 f)(\omega) = q(H_{-1}^i H_{-1}^{i+1} f)(\omega) + \sum_{r \in k^\times} \; \sum_{\substack{\eta \in \Omega_i(\omega) \\ \omega \vee_i \eta \; = r}} f(\eta),$$

haciendo $\eta_i = r\xi_i$, resulta

$$(B_i^2 f)(\omega) = q(H_{-1}^i H_{-1}^{i+1} f)(\omega) + \sum_{r \in k^\times} \; \sum_{\substack{\xi \in \Omega_i(\omega) \\ \omega \vee_i \xi \; = r}} (H_r^i H_{r^{-1}}^{i+1} f)(\xi).$$

Por lo tanto

$$B_i^2 = qH^i_{-1}H^{i+1}_{-1} + B_i \sum_{r\in k^\times} H^i_r H^{i+1}_{r^{-1}} \quad (0 < i < n) \tag{3.16}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} S_i^2 &= (B_i H^{i+1}_{-1})(B_i H^{i+1}_{-1}) \\ &= B_i^2 H^i_{-1} H^{i+1}_{-1}, \end{aligned}$$

ocupando (3.16) se obtiene

$$S_i^2 = (qH^i_{-1}H^{i+1}_{-1} + B_i \sum_{r\in k^\times} H^i_r H^{i+1}_{r^{-1}})H^i_{-1}H^{i+1}_{-1}, \qquad (0 < i < n)$$

luego se deduce

$$S_i^2 = qId + S_i \sum_{r\in k^\times} H^i_r H^{i+1}_{-r^{-1}} \quad (0 < i < n) \tag{3.17}$$

Proposición 3.8 *Sea $w \in W$, $w_i \in S$, entonces*

$$\begin{aligned} S_i S_w &= S_{w_i w}, && \text{si } l(w_i w) > l(w) \\ S_i S_w &= qS_{w_i w} + S_w \textstyle\sum_{r\in k^\times} H^i_r H^{i+1}_{-r^{-1}}, && si\ l(w_i w) < l(w). \end{aligned}$$

Demostración. Sea $w = w_{i_1}\cdots w_{i_\ell}$, con $l(w) = \ell$.

1. Si $l(w_i w) > l(w)$, quiere decir que $l(w_i w) = \ell + 1$, luego de (3.13) se obtiene

$$S_{w_i w} = S_i S_{i_1} \cdots S_{i_\ell},$$

de donde

$$S_{w_i w} = S_i S_w.$$

2. En el caso $l(w_i w) < l(w)$, se tiene $l(w_i w) = \ell - 1$. Luego si $w' = w_i w$, entonces $l(w_i w') > l(w')$, así por la primera parte de la demostración

$$S_w = S_i S_{w'},$$

luego

$$S_iS_w = S_i^2 S_{w'},$$

pero ocupando (3.17) se sigue

$$S_iS_w = (qId + S_i \sum_{r\in k^\times} H_r^i H_{-r^{-1}}^{i+1})S_{w'},$$

ahora no es difícil ver que $S_{w'}$ conmuta con la sumatoria, luego

$$S_iS_w = qS_{w'} + S_iS_{w'} \sum_{r\in k'} H_r^i H_{-r^{-1}}^{i+1},$$

ocupando nuevamente la primera parte de la demostración, se obtiene

$$S_iS_w = qS_{w_iw} + S_w \sum_{r\in k'} H_r^i H_{-r^{-1}}^{i+1}.$$

■

Calculemos ahora $S_iS_{i+1}S_i$ $(0 < i < n-1)$ en terminos de B_i y B_{i+1}. Se tiene

$$S_iS_{i+1}S_i = B_iH_{-1}^{i+1}B_{i+1}H_{-1}^{i+2}B_iH_{-1}^{i+1},$$

ocupando (3.15) se obtiene

$$S_iS_{i+1}S_i = B_iB_{i+1}H_{-1}^{i+2}H_{-1}^{i+2}B_iH_{-1}^{i+1},$$

luego

$$S_iS_{i+1}S_i = B_iB_{i+1}B_iH_{-1}^{i+1}.$$

Procediendo del mismo modo con $S_{i+1}S_iS_{i+1}$, se obtiene

$$S_{i+1}S_iS_{i+1} = B_{i+1}B_iB_{i+1}H_{-1}^{i+1}.$$

Teniendo presente estas dos últimas igualdades se demuestra el lema 3.9.

Lema 3.9 *Para todo* $0 < i < n-1$ *vale la relación*

$$S_iS_{i+1}S_i = S_{i+1}S_iS_{i+1}$$

Demostración. De la discusión previa es evidente que basta demostrar

$$B_iB_{i+1}B_i = B_{i+1}B_iB_{i+1} \qquad (0 < i < n-1)$$

Sea $\omega \in \Omega$ y consideremos el conjunto $L_i(\omega)$ (resp. $\tilde{L}_{i+1}(\omega)$) definido por: $\zeta \in L_i(\omega)$ (resp. $\tilde{L}_{i+1}(\omega)$) si hay $\xi \in \Omega_i(\omega)$ (resp. $\xi \in \Omega_{i+1}(\omega)$) tal que

1.

$$\xi_i \prec \zeta_{i+1} \;\; (\text{resp.}\zeta_i \prec \xi_{i+1})$$

2.

$$\omega \vee_i \xi \;=\; \frac{\mathrm{B}(\omega_{i+1}, \zeta_{i+1} : \xi_i)}{\omega_{i+2}} = \frac{\mathrm{B}(\xi_i, \zeta_i : \omega_{i-1})}{\zeta_{i+1}} = 1$$

$$(\text{resp. } \omega \vee_{i+1} \xi \;=\; \frac{\mathrm{B}(\omega_i, \zeta_i : \omega_{i-1})}{\xi_{i+1}} = \frac{\mathrm{B}(\xi_{i+1}, \zeta_{i+1} : \zeta_i)}{\omega_{i+2}} = 1)$$

Nótese que ξ está completamente determinado por 2.

Desarrollando $B_iB_{i+1}B_i$ y $B_{i+1}B_iB_{i+1}$ $(0 < i < n-1)$, se tiene

$$(B_iB_{i+1}B_if)(\omega) = \sum_{\zeta \in L_i(\omega)} f(\zeta)$$

$$(B_{i+1}B_iB_{i+1}f)(\omega) = \sum_{\zeta \in \tilde{L}_{i+1}(\omega)} f(\zeta),$$

donde $f \in V$, $\omega \in \Omega$.

Por lo tanto para demostrar el lema basta ver $L_i(\omega) = \tilde{L}_{i+1}(\omega)$.

Sea $\zeta \in L_i(\omega)$, $\omega \in \Omega$, luego hay $\xi \in L_i(\omega)$ con $\xi_i \prec \zeta_{i=1}$, tal que

$$\omega \vee_i \xi \;= 1 \qquad (1)$$

$$\mathrm{B}(\omega_{i+1}, \zeta_{i+1} : \xi_i) = \omega_{i+2} \qquad (2)$$

$$\mathrm{B}(\xi_i, \zeta_i : \omega_{i-1}) = \zeta_{i+1} \qquad (3)$$

Si ζ_i se escribe $\zeta_i = \omega_{i-1} \wedge z$, entonces por (3) $\zeta_{i+1} = \xi_i \wedge z$, $z \in E$.

Sea $\eta \in \Omega_{i+1}(\omega)$, con $\eta_{i+1} = \mathrm{B}(\omega_i, \zeta_i : \omega_{i-1})$. Claro que $\zeta_i \prec \eta_{i+1}$.

Ahora como $\omega \vee_{i+1} \eta = (\omega_{i+1} \wedge z)/\omega_{i+2}$, se sigue de (2) $\omega \vee_{i+1} \eta = 1$.

Si $\omega_i = \omega_{i-1} \wedge v$, $v \in E$, entonces de (1) se deduce $\xi_i \wedge v = -\omega_{i+1}$. Luego como

$$\mathrm{B}(\eta_{i+1}, \zeta_{i+1} : \zeta_i) = \mathrm{B}(\mathrm{B}(\omega_i, \zeta_i : \omega_{i-1}), \zeta_{i+1} : \zeta_i),$$

se sigue del lema 1.8

$$\mathrm{B}(\eta_{i+1}, \zeta_{i+1} : \zeta_i) = \zeta_{i+1} \wedge v,$$

pero por (2) $\zeta_{i+1} \wedge v = \omega_{i+2}$, luego

$$\mathrm{B}(\eta_{i+1}, \zeta_{i+1} : \zeta_i) = \omega_{i+2}.$$

Esta última igualdad termina de demostrar que η satisface 2., luego $\zeta \in \tilde{L}_{i+1}(\omega)$, i.e.

$$L_i(\omega) \subset \tilde{L}_{i+1}(\omega). \qquad (\omega \in \Omega)$$

Veamos la otra inclusión. Sea $\zeta \in \tilde{L}_{i+1}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, luego hay $\xi \in \Omega_{i+1}(\omega)$ con $\zeta_i \prec \xi_{i+1}$ y tal que

$$\omega \vee_{i+1} \xi = 1 \tag{4}$$

$$\mathrm{B}(\omega_i, \zeta_i : \omega_{i-1}) = \xi_{i+1} \tag{5}$$

$$\mathrm{B}(\xi_{i+1}, \zeta_{i+1} : \zeta_i) = \omega_{i+2} \tag{6}$$

Pongamos $\omega_i = \omega_{i-1} \wedge v$, $\zeta_i = \omega_{i-1} \wedge z$, $v, z \in E$. Luego de (5) se obtiene

$$\left.\begin{array}{l} \xi_{i+1} = \omega_i \wedge z \\ \xi_{i+1} = \zeta_i \wedge -v \end{array}\right\} \tag{7}$$

De esto último y teniendo presente (4) y (6) se tiene

$$\left.\begin{array}{l} \omega_{i+2} = \omega_{i+1} \wedge z \\ \omega_{i+2} = \zeta_{i+1} \wedge v \end{array}\right\} \tag{8}$$

Sea $\eta \in \Omega_i(\omega)$, con $\eta_i = \omega_{i+1} \vee \zeta_{i+1}$ (donde porsupuesto el producto regresivo se realiza en $[\omega_{i+2}]$ respecto al elemento de volumen ω_{i+2}). Claro que $\eta_i \prec \zeta_{i+1}$.

Sean $r, s \in k^{\times}$ tales que $\omega_{i+1} = r\eta_i \wedge v$ y $\zeta_{i+1} = s\eta_i \wedge z$. De la relación $\mathrm{B}(\omega_{i+1}, \zeta_{i+1} : \eta_i) = -\mathrm{B}(\zeta_{i+1}, \omega_{i+1} : \eta_i)$, se deduce que $s^{-1}\omega_{i+1} \wedge z = -r^{-1}\zeta_{i+1} \wedge v$. De donde se obtiene $s = -r$ al considerar (8). Por lo tanto

$$\omega_{i+1} = r\eta_i \wedge v$$

$$\omega_{i+1} = -r\eta_i \wedge z$$

De esta última igualdad se sigue

$$\omega \vee_i \eta \ = -r^{-1}$$

y

$$\mathrm{B}(\eta_i, \zeta_i : \omega_{i-1}) = -r^{-1}\zeta_{i+1}.$$

Por lo tanto para tener $\zeta \in L_i(\omega)$, $\omega \in \Omega$, debe tenerse $r = -1$.

Pero $\zeta_{i+1} = s\eta_i \wedge z$, luego

$$-r^{-1} = \frac{\eta_i \wedge z}{\zeta_{i+1}}$$

o sea

$$-r^{-1} = \frac{(\omega_{i+1} \vee \zeta_{i+1}) \wedge z}{\zeta_{i+1}}$$

pero del lema 1.8, se sigue

$$-r^{-1} = \frac{(\omega_{i+1} \vee \xi_{i+1}) \wedge z}{\xi_{i+1}},$$

como $\xi_{i+1} = \omega_i \wedge z$, se obtiene al desarrollar $\vee$

$$-r^{-1} = \frac{\omega_{i+1} \wedge z}{\omega_{i+2}} \frac{\omega_i \wedge z}{\xi_{i+1}},$$

luego de (7) y (8)

$$-r^{-1} = 1,$$

es decir

$$r = -1.$$

■

La siguiente proposición describe el álgebra conmutante $\mathcal{H}$ de la representación natural (V, ρ).

Proposición 3.10 *El álgebra $\mathcal{H}$ está generada, como álgebra, por los operadores $H_r (r \in A)$ y $S_i, 0 < i < n$ y ellos satisfacen las relaciones:*

$$
(3.18) \qquad \begin{cases} H_r H_s = H_{rs} & (r, s \in A) \\ H_r S_i = S_i H_{\theta_i r \theta_i} & (0 < i < n) \\ S_i^2 = qId + S_i \sum_{r \in k^\times} H_r^i H_{-r^{-1}}^{i+1} & (0 < i < n) \\ S_i S_{i+1} S_i = S_{i+1} S_i S_{i+1} & (0 < i < n-1) \\ S_i S_j = S_j S_i, & (0 < i < n) \end{cases}
$$

donde $0 < j < n-1$, $|i-j| > 1$ y $\theta_i = (i, i+1)$.

Demostración. Si $0 < i, j < n-1$ y $|i-j| > 1$, entonces B_i conmuta con B_j. Luego de (3.15) se deduce $S_i S_j = S_j S_i$.

El resto de las afirmaciones son consecuencia inmediata de (3.15), (3.17), corolario 3.7 y lema 3.9.

■

Observación. *La proposición anterior se puede poner en terminos de los operadores B_i. Para esto basta intercambiar S_i por B_i, $0 < i < n$. Y la relación*

$$S_i^2 = qId + S_i \sum_{r \in k^\times} H_r^i H_{-r^{-1}}^{i+1}$$

cambiarla por

$$B_i^2 = qH_{-1}^i H_{-1}^{i+1} + B_i \sum_{r \in k^\times} H_r^i H_{-r^{-1}}^{i+1},$$

donde $0 < i < n$. Ver (3.16).

3.4 Presentación standard de $\mathcal{H}$

En orden a demostrar que los generadores y relaciones dadas en la proposición anterior forman una presentación del álgebra $\mathcal{H}$ recordemos el siguiente resultado debido a Matsumoto.

Teorema (Matsumoto). *Sea G un grupo finito generado por un conjunto de involuciones $\mathrm{S} = \{s_1, \dots, s_n\}$ tal que S satisface la condiciones de cambio. Sea $\mathcal{M}$ un monoide con identidad e, y supongamos que hay $m_1, \dots, m_n$ en $\mathcal{M}$ tales que para todo (i,j) con $i \neq j$ se tiene*

$$\begin{aligned} (m_i m_j)^{l_{ij}} &= (m_j m_i)^{l_{ij}}, & \text{si } m_{ij} &= 2l_{ij} \\ (m_i m_j)^{l_{ij}} m_i &= (m_j m_i)^{l_{ij}} m_j, & \text{si } m_{ij} &= 2l_{ij} + 1 \end{aligned}$$

donde m_{ij} es el orden de $s_i s_j$. Entonces hay función f de G en $\mathcal{M}$ tal que $f(1) = e$, $f(s_i) = m_i$ $(i \leq i \leq n)$ y si $l(g) = \ell$, se tiene

$$f(g) = m_{i_1} \cdots m_{i_\ell},$$

cuando g se escribe $g = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$.

Demostración. Ver teorema 64.20 de [4].

■

Corolario 3.11 *Conservemos las notaciones e hipótesis de teorema de Matsumoto. Sea A un grupo abeliano finito y supongamos que en $\mathcal{M}$ hay elementos m_a $(a \in A)$ tales que*

$$m_a m_{a'} = m_{aa'}, \qquad (a, a' \in A)$$

entonces la función f del teorema de Matsumoto puede ser extendida a una función $\overline{f}$ de $G \ltimes A$ en $\mathcal{M}$ tal que $\overline{f}(a) = m_a$ y $\overline{f}(g'a'ga) = \overline{f}(g'g)\overline{f}(g^{-1}a'ga)$ para todo $a, a' \in A$, $g, g' \in G$.

Demostración. Basta definir $\overline{f}(ga) = f(g)m_a$, $a \in A$, $a \in G$.

■

Imitando la demostración dada en el teorema 67.6 de [4], del hecho que la base standard (con relaciones ánalogas a las de (3.18)) de G respecto a B define una presentación del álgebra de Hecke $\mathrm{H}(G, B, 1)$ se obtiene

Teorema 3.12 *Los generadores S_i $(0 < i < n), H_r$ $(r \in A)$ con las relaciones de (3.18) constituyen una presentación del álgebra $\mathcal{H}$.*

Demostración. Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra con generadores s_i $(0 < i < n)$, h_r $(r \in A)$ tales que satisfacen las relaciones de (3.18). Se debe probar que existe un homomorfismo de álgebras φ de $\mathcal{H}$ en A tal que

$$\varphi(S_i) = s_i, \qquad (o < i < n)$$

y

$$f(H_r) = h_r. \qquad (r \in A)$$

Dado que el grupo de matrices monomiales M puede ser mirado naturalmente como $\Gamma := \mathfrak{S} \ltimes A$, se sigue del corolario 3.11 que hay función f de Γ en A tal que $f(r) = h_r$, $f(rr') = f(r)f(r')$ $(r, r' \in A)$, $f(\theta_i) = s_i$ $(0 < i < n)$ y

$$f(\theta_{i_1} \cdots \theta_{i_\ell} r) = s_{i_1} \cdots s_{i_r} h_r,$$

si $l(\theta_{i_1} \cdots \theta_{i_\ell}) = \ell$.

Ahora como $\{S_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ es una $\mathbb{C}$-base de $\mathcal{H}$, se tiene la función φ de $\mathcal{H}$ en A definida por

$$\varphi : \sum_{\gamma \in \Gamma} \lambda_\gamma S_\gamma \mapsto \sum_{\gamma \in \Gamma} \lambda_\gamma f(\gamma).$$

En orden a demostrar que φ es morfismo de álgebras, veamos primero

$$\varphi(S_i S_\theta) = \varphi(S_i)\varphi(S_\theta) \tag{1}$$

para todo $0 < i < n$, $\theta \in S$.

Escribamos $\theta = \theta_{i_1} \cdots \theta_{i_\ell}$, con $l(\theta) = \ell$. Se tiene dos posibilidades:

1. Si $l(\theta_i\theta) = \ell + 1$. Claramente se tiene (1).

2. Si $l(\theta_i\theta) = \ell - 1$. Sea $\theta' = \theta_i\theta$, luego $l(\theta_i\theta') = l(\theta) = \ell > l(\theta_i\theta)$. Ahora como $\theta = \theta_i\theta'$ se sigue de 1. que

$$\varphi(S_\theta) = \varphi(S_i)\varphi(S_{\theta'}),$$

luego

$$\varphi(S_i)\varphi(S_\theta) = \varphi(S_i)^2\varphi(S_{\theta'}),$$

de donde

$$\varphi(S_i)\varphi(S_\theta) = \{qId + \varphi(S_i)\sum_{r\in k'}\varphi(H_r^i)\varphi(H_{-r^{-1}}^{i+1})\}\varphi(S_{\theta'}).$$

Pero como $\varphi(S_i) = s_i$ conmuta con la sumatoria se sigue que

$$\varphi(S_i)\varphi(S_\theta) = q\varphi(S_{\theta'}) + \sum_{r\in k^\times}\varphi(H_r^i)\varphi(H_{-r^{-1}}^{i+1})\varphi(S_i)\varphi(S_{\theta'}),$$

como $l(\theta') < l(\theta_i\theta')$ se sigue de 1.

$$\varphi(S_i)\varphi(S_\theta) = q\varphi(S_{\theta_i\theta}) + \sum_{r\in k^\times}\varphi(H_r^i)\varphi(H_{-r^{-1}}^{i+1})\varphi(S_\theta).$$

Por otra parte de la proposición (3.8) se deduce

$$\varphi(S_iS_\theta) = \varphi(qS_{\theta_i\theta} + S_\theta\sum_{r\in k^\times}H_r^iH_{-r^{-1}}^{i+1}),$$

luego

$$\varphi(S_iS_\theta) = \varphi(S_i)\varphi(S_\theta),$$

para todo $0 < i < n$, $\theta \in \mathfrak{S}$.

Así, de 1. y 2. se obtiene (1).

Sean $\gamma = \theta r$, $\gamma' = \theta' r'$ con $\theta, \theta' \in \mathfrak{S}$ y $r, r' \in A$; entonces de (3.14) se tiene

$$S_{\gamma'}S_\gamma = S_{\theta'}H_{r'}S_\theta H_r,$$

luego

$$S_{\gamma'}S_\gamma = S_{\theta'}S_\theta H_{\theta^{-1}r'\theta}H_r,$$

por lo tanto

$$\varphi(S_{\gamma'}S_\gamma) = \varphi(S_{\theta'}S_\theta)\varphi(H_{\theta^{-1}r'\theta})\varphi(H_r),$$

ocupando (1)

$$\varphi(S_{\gamma'}S_\gamma) = \varphi(S_{\theta'})\varphi(S_\theta)\varphi(H_{\theta^{-1}r'\theta})\varphi(H_r),$$

pero teniendo presente la segunda igualdad de (3.18) para s_i $(0 < i < n)$, se deduce

$$\varphi(S_{\gamma'}S_\gamma) = \varphi(S_{\theta'})\varphi(H_{r'})\varphi(S_\theta)\varphi(H_r),$$

luego

$$\varphi(S_{\gamma'}S_\gamma) = \varphi(S_{\gamma'})\varphi(S_\gamma), \qquad (\gamma, \gamma \in \Gamma)$$

y por consiguiente φ es morfismo de álgebras.

■

3.5 Presentación de Fourier-Grassmann de $\mathcal{H}$.

El proximo objetivo es obtener un resultado ánalogo al teorema anterior en termino de los operadores de Fourier-Grassmann y las homotecias H_r, $r \in A$.

Para todo carácter aditivo χ de k se define los elementos $G(H^i, \chi)$, $\overline{G}(H^i, \chi)$ de $\mathcal{H}$ como

$$G(H^i, \chi) = \sum_{r \in k^\times} \chi(r) H^i_r H^{i+1}_{r^{-1}}$$

y

$$\overline{G}(H^i, \chi) = \sum_{r \in k^\times} \chi(-r) H^i_{r^{-1}} H^{i+1}_r.$$

Ahora

$$G(H^i, \chi)\overline{G}(H^i, \chi) = \sum_{r,s \in k^\times} \chi(r - s) H^i_{rs^{-1}} H^{i+1}_{r^{-1}s},$$

haciendo $rs^{-1} = t$, se tiene

$$G(H^i, \chi)\overline{G}(H^i, \chi) = \sum_{s,t \in k^\times} \chi(s(t-1)) H^i_t H^{i+1}_{t^{-1}},$$

luego

$$G(H^i, \chi)\overline{G}(H^i, \chi) = \begin{cases} qId - G(H^i, 1), & \text{si } \chi \neq 1 \\ (q-1)G(H^i, 1), & \text{si } \chi = 1. \end{cases} \tag{3.19}$$

Recuerdese ahora que el elemento P_i $(0 < i < n)$ de $\mathcal{H}$ está dado por

$$(P_i f)(\omega) = \sum_{\zeta \in \Omega_i(\omega)} f(\zeta),$$

donde $f \in V$, $\omega \in \Omega$. Luego

$$P_i = G(H^i, 1) + B_i G(H^i, 1).$$

Por otra parte de la proposición 1.3, se tiene

$$J_i^2 = Id - \frac{1}{q^2} P_i,$$

luego

$$B_i G(H^i, 1) = q^2(Id - J_i^2) - G(H^i, 1). \quad (0 < i < n) \tag{3.20}$$

Nótese ahora que el operador J_i $(0 < i < n)$ se escribe

$$J_i = \frac{1}{q}\{G(H^i, 1) + B_i G(H^i, \psi)\}, \tag{3.21}$$

luego de (3.19) se sigue

$$J_i \overline{G}(H^i, \psi) = \frac{1}{q}\{G(H^i, 1)\overline{G}(H^i, \psi) + B_i(qId - G(H^i, 1))\},$$

ocupando (3.20) y despejando B_i se obtiene

$$B_i = \frac{1}{q}\{-q^2 J_i^2 + qJ_i\overline{G}(H^i, \psi) + q^2 Id - G(H^i, 1)(Id + \overline{G}(H^i, \psi)\}. \tag{3.22}$$

Se tiene

Proposición 3.13 *Los operadores J_i $(0 < i < n)$, H_r $(r \in A)$ generan, como álgebra, a $\mathcal{H}$ y se tiene las relaciones*

$$\begin{cases} H_r H_s = H_{rs} & (r, s \in A) \\ H_r J_i = J_i H_{\theta_i r \theta_i} & (0 < i < n) \\ J_i^2 = Id - q^{-2} P_i & (0 < i < n) \\ J_i J_{i+1} J_i = J_{i+1} J_i J_{i+1} & (0 < i < n-1) \\ J_i J_j = J_j J_i, & (0 < i, j < n) \end{cases} \tag{3.23}$$

donde $|i - j| > 1$.

Demostración. De la discusión previa se sigue que $\{J_i, H_r \mid 0 < i < n,\, r \in A\}$ genera $\mathcal{H}$. Del lema 1.7 y proposición 2.6 se obtiene las relaciones de (3.23).

■

De las dos últimas relaciones de (3.23) y teorema de Matsumoto se sigue que hay función f de $\mathfrak{S}$ en $\mathcal{H}$ tal que $f(1) = Id$, $f(\theta_i) = J_i$ $(0 < i < n)$ y si $\theta = \theta_{i_1} \cdots \theta_{i_\ell}$, con $l(\theta) = \ell$, entonces

$$f(\theta) = J_{i_1} \cdots J_{i_\ell}.$$

Luego si se define

$$J_\theta := f(\theta), \qquad (\theta \in \mathfrak{S})$$

se obtiene que el cardinal del conjunto $\{J_\theta \mid \theta \in \mathfrak{S}\}$ es menor o igual al orden de $\mathfrak{S}$. Ahora de (3.22) se deduce que cada $B_\theta(\theta \in \mathfrak{S})$ se deja escribir como una combinación lineal de los elementos del conjunto $\{J_\theta H_r \mid \theta \in \mathfrak{S},\, r \in A\}$, y como la familia $\{B_\theta H_r \mid \theta \in \mathfrak{S},\, r \in A\}$ es una $\mathbb{C}$-base para $\mathcal{H}$, se concluye

Proposición 3.14 *La familia* $\{J_\theta H_r \mid \theta \in \mathfrak{S},\, r \in A\}$ *es una* $\mathbb{C}$*-base para* $\mathcal{H}$.

■

Procediendo de manera totalmente análoga a la demostración del teorema 3.12 se demuestra

Teorema 3.15 *Los generadores* J_i $(0 < i < n)$, H_r $(r \in A)$ *con las relaciones de (3.23) define una presentación de* $\mathcal{H}$

■

Observación 3.16 *Sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ en $\hat{A}$ y consideremos la representación V_α definida en (2.4), entonces de (3.16) se obtiene*

$$B^2_{i_{|V_\alpha}} = \begin{cases} q\alpha_i(-1)\alpha_{i+1}(-1)Id, & si\ \alpha_i \neq \alpha_{i+1} \\ qId + (q-1)B_i, & si\ \alpha_i = \alpha_{i+1}. \end{cases} \tag{3.24}$$

Ahora de la segunda igualdad de (3.18) se tiene

$$B_iV_\alpha \subset V_{(i,i+1)\cdot\alpha},$$

luego $B_{i_{|V_\alpha}}$ tiene inversa dada por

$$B^{-1}_{i_{|V_\alpha}} = \begin{cases} q^{-1}\alpha_i(-1)\alpha_{i+1}(-1)B_i, & si\ \alpha_i \neq \alpha_{i+1} \\ q^{-1}(B_i - (q-1)Id), & si\ \alpha_i = \alpha_{i+1}. \end{cases} \tag{3.25}$$

Denotemos ahora por $G(\beta, \chi)$ la suma de Gauss

$$\sum_{r\in k^\times} \chi(r)\beta(r),$$

donde χ es un carácter del grupo aditivo k y β es un carácter del grupo multiplicativo $k^\times$.

Teniendo presente (3.21) se obtiene

$$J_{i_{|V_\alpha}} = \begin{cases} q^{-1}G(\psi, \alpha_i\alpha^{-1}_{i+1})B_i, & \text{si } \alpha_i \neq \alpha_{i+1} \\ q^{-1}((q-1)Id - B_i) = -B_i^{-1}, & \text{si } \alpha_i = \alpha_{i+1}. \end{cases} \tag{3.26}$$

Ahora como $J_iV_\alpha \subset V_{(i,i+1)\cdot\alpha}$, se sigue en virtud de (3.25) que $J_{i_{|V_\alpha}}$ tiene inversa dada por

$$J^{-1}_{i_{|V_\alpha}} = \begin{cases} G(\psi^{-1}, \alpha_i^{-1}\alpha_{i+1})B_i^{-1}, & \text{si } \alpha_i \neq \alpha_{i+1} \\ -B_i, & \text{si } \alpha_i = \alpha_{i+1}, \end{cases} \tag{3.27}$$

donde $\psi^{-1} : r \mapsto \psi(-r)$, $r \in k$.

En particular se tiene

$$J_iV_\alpha = V_{(i,i+1)\cdot\alpha}.\ (\alpha \in \hat{A},\ 0 < i < n) \tag{3.28}$$

3.6 El álgebra de Hecke de la representación (V_α, ρ) de G.

Sea $\mathcal{H}_\alpha$ $(\alpha \in \hat{A})$ el álgebra de Hecke de G respecto a B de α, i.e. $\mathcal{H}_\alpha$ es el álgebra conmutante de (V_α, ρ), puesto que $V_\alpha = Ind_B^G\alpha$, ver proposición 2.3. Si se denota por K_α al estabilizador de α por la acción (por permutación) de $\mathfrak{S}$ sobre $\hat{A}$, se tiene

$$dim_{\mathbf{C}}\mathcal{H}_\alpha = |K_\alpha|. \tag{3.29}$$

En efecto, $dim_{\mathbf{C}}\mathcal{H}_\alpha = [Ind_B^G\alpha, Ind_B^G\alpha]_G$, luego por Reciprocidad de Frobenius

$$dim_{\mathbf{C}}\mathcal{H}_\alpha = [\alpha, \bigoplus_{\overline{s}\in B\backslash G/B} Ind_{B_s}^B \alpha_s]_B,$$

donde $B_s = sBs^{-1} \cap B$ y $\alpha_s : x \mapsto \alpha(s^{-1}xs)$, $x \in B_s$. Nuevamente ocupando Reciprocidad de Frobenius, se sigue

$$dim_{\mathbf{C}}\mathcal{H}_\alpha = \bigoplus_{\overline{s}\in B\backslash G/B} [Res_B^{B_s}\alpha, \alpha_s]_{B_s};$$

ahora para todo $\overline{s} \in B \setminus G/B$ se tiene $T \leq B_s \leq B$, y como α está determinado por sus valores sobre T, se sigue que

$$[Res_B^{B_s}\alpha, \alpha_s]_{B_s} = [\alpha, \alpha_s]_T.$$

Luego

$$[\alpha, \alpha_s]_T \neq 0 \Leftrightarrow s \in K_\alpha,$$

por lo tanto se sigue (3.29).

Sea $\mathcal{I}_\alpha$ $(\alpha \in \hat{A})$ la subálgebra de $\mathcal{H}$ formada por los operadores ϕ de $\mathcal{H}$ tales que

$$P_\alpha \phi P_\alpha = \phi,$$

donde P_α es el proyector de V sobre V_α, dado por

$$(P_\alpha f)(\omega) = \frac{1}{(q-1)^n} \sum_{t\in A} \alpha(t) f(t\cdot\omega)$$

donde $f \in V$, $\omega \in \Omega$.

Claro que $\mathcal{I}_\alpha$ se identifica naturalmente con $\mathcal{H}_\alpha$.

Ahora, en orden a describir $\mathcal{H}_\alpha$ en termino de los operadores de Fourier-Grassmann, demostremos lo siguiente

Proposición 3.17 *Sea $\alpha \in \hat{A}$, entonces*

$$P_\alpha J_\theta = J_\theta P_{\theta\cdot\alpha}. \qquad (\theta \in \mathfrak{S})$$

Demostración. Claro que para tener $P_\alpha J_\theta = J_\theta P_{\theta\cdot\alpha}$, basta ver

$$P_\alpha J_i = J_i P_{(i,i+1)\cdot\alpha}. \qquad (0 < i < n)$$

Sea $f \in V$ y $\omega \in \Omega$, entonces

$$\begin{aligned}(P_\alpha J_i f)(\omega) &= \frac{1}{q(q-1)^n}\sum_{t\in A}\alpha(t)\sum_{\zeta\in\Omega_i(t\cdot\omega)}\psi(\ t\cdot\omega\vee_i\zeta\ )f(\zeta)\\ &\ \frac{1}{q(q-1)^n}\sum_{t\in A}\alpha(t)\sum_{t^{-1}\cdot\zeta\in\Omega_i(\omega)}\psi(\ t\cdot\omega\vee_i\zeta\ )f(\zeta)\end{aligned}$$

haciendo $t^{-1}\cdot\zeta = \eta$

$$(P_\alpha J_i f)(\omega) = \frac{1}{q(q-1)^n}\sum_{t\in A}\alpha(t)\sum_{\eta\in\Omega_i(\omega)}\psi(\ t\cdot\omega\vee_i t\cdot\eta\ )f(t\cdot\eta),$$

pero de la proposición 1.1 se sigue $t\cdot\omega\vee_i t\cdot\eta\ = t_{i+1}^{-1}t_i\ \omega\vee_i\eta$, si $t = (t_1,\ldots,t_n)$. Y luego $t\cdot\omega\vee_i t\cdot\eta\ = \omega\vee_i h_s^i(\eta)$, con $s = t_{i+1}^{-1}t_i$. Haciendo $h_s^i(\eta) = \mu$, se tiene

$$(P_\alpha J_i f)(\omega) = \frac{1}{q(q-1)^n}\sum_{t\in A}\alpha(t)\sum_{\mu\in\Omega_i(\omega)}\psi(\ \omega\vee_i\mu\ )f(((i,i+1)\cdot t)\cdot\mu),$$

reordenando y haciendo $r = (i,i+1)\cdot t$, se obtiene

$$(P_\alpha J_i f)(\omega) = \frac{1}{q}\sum_{\mu\in\Omega_i(\omega)}\psi(\ \omega\vee_i\mu\ )\frac{1}{(q-1)^n}\sum_{r\in A}((i,i+1)\cdot\alpha)(r)f(r\cdot\mu),$$

luego

$$P_\alpha J_i = J_i P_{(i,i+1)\cdot\alpha}. \qquad (0 < i < n)$$

■

Con el abuso de notación $\mathcal{I}_\alpha = \mathcal{H}_\alpha$, se sigue de la proposición anterior y corolario 2.7 que para todo $\alpha \in \hat{A}$ vale

$$J_\theta \in \mathcal{H}_\alpha \Leftrightarrow \theta \in K_\alpha. \tag{3.30}$$

En consecuencia

Proposición 3.18 *La familia* $\{J_\theta \,|\, \theta \in K_\alpha\}$ *es una* $\mathbb{C}$*-base de* $\mathcal{H}_\alpha$.

Demostración. Se sigue de 3.29 y proposición 3.14.

■

Ahora para m partición de n, se define $\kappa(m)$ como

$$\kappa(m) := \{(\kappa_i, \kappa_{i+1})| \ \kappa_{i+1} - \kappa_i > 1, \ 0 \leq i < s\},$$

donde $(\kappa_0, \dots \kappa_s)$ son las sumas parciales de m.

Luego si α es carácter standard de $\hat{A}$ de tipo m, entonces es claro que el subgrupo estabilizador K_α de α en $\mathfrak{S}$ está generado por

$$\Sigma(\alpha, m) := \{(i+1, i+2), \dots, (j-1, j) \mid (i,j) \in \kappa(m)\} \tag{3.31}$$

Así, si α es carácter standard de $\hat{A}$ de tipo m, entonces de la proposición anterior se deduce que $\mathcal{H}_\alpha$ está generada, como álgebra, por la familia

$$\{Id, \ J_i \mid (i, i+1) \in \Sigma(\alpha, m)\}.$$

Luego

Teorema 3.19 *Para α carácter standard de $\hat{A}$ de tipo m, la familia anterior genera $\mathcal{H}_\alpha$ y se tiene*

$$\begin{aligned} &J_i^2 = Id - q^{-2}P_i && \\ &J_iJ_jJ_i = J_jJ_iJ_j && si\ |i-j| = 1 \\ &J_iJ_j = J_jJ_i, && si\ |i-j| > 1, \end{aligned}$$

donde $(i, i+1), (j, j+1) \in \Sigma(\alpha, m)$.

■

De modo análogo a como se obtiene (3.30) se establece

$$B_\theta \in \mathcal{H}_\alpha \Leftrightarrow \theta \in K_\alpha.$$

Y por consiguiente la familia

$$\{B_\theta \mid \theta \in k_\alpha\}$$

es una $\mathbb{C}$-base de $\mathcal{H}_\alpha$.

De esto último, y como K_α está generado por $\Sigma(\alpha, m)$ y (3.24) se obtiene

Proposición 3.20 *Si α es carácter standard de tipo m, entonces la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathcal{H}_\alpha$ está generada por la familia*

$$\{Id,\ B_i \mid (i, i+1) \in \Sigma(\alpha, m)\},$$

y se tiene las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} &B_i^2 = qId + (q-1)B_i && \\ &B_iB_jB_i = B_jB_iB_j && si\ |i-j| = 1 \\ &B_iB_j = B_jB_i, && si\ |i-j| > 1, \end{aligned}$$

donde $(i, i+1), (j, j+1) \in \Sigma(\alpha, m)$.

■

Observación 3.21 *Nótese que para* $\mathcal{H}_1$ *los operadores* B_θ $(\theta \in \mathfrak{S})$ *son los elementos de la base standard del álgebra de Hecke de* G *respecto a* B. *Y la proposición en este caso es el resultado clásico obtenido por N.Iwahori, ver [5].*

Comentarios

1. Dos puntos que resta dilucidar urgentemente en este trabajo son:

- El espacio $\underline{V}$. Puesto que $\underline{V}$ se entrelaza sólo con los elementos de la serie pincipal genérica, los cuales admiten realizaciones geométricas simples, cabe preguntarse si no es posible dar una descripción geométrica (elemental) de $\underline{V}$.

- Teniendo presente la generalización, razonable a nuestro entender, del operador J descrito en la introducción, abordar la construcción de la Transformada de Fourier Parcial para $Gl_n(k)$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Un resultado clásico en teoría de representaciones de grupos es:

Si G es un grupo finito con BN-par, entonces hay un isomorfismo entre el álgebra de Hecke de G respecto a B, y el álgebra de grupo del grupo de Weyl de G.

Este resultado fue demostrado primero por J. Tits, ver [4], pero no mostrando un isomorfismo explícito.

Luego G. Luzstig, usando esencialmente los polinomios de Kazhdan-Luzstig, da un isomorfismo explícito entre ambas álgebras, el cual está definido a partir de la base standard del álgebra de Hecke. Ver [7].

Ahora en virtud del teorema 2.21 es plausible conjeturar que los operadores de Fourier-Grassmann permitan definir un isomorfismo (natural) entre el álgebra de grupo $\mathbb{C}[\Gamma]$, y el álgebra de Hecke $\mathcal{H}$. La idea es que si se logra establecer dicho isomorfismo, éste permita recuperar y estudiar desde otra perspectiva el resultado de J. Tits.

Cabe destacar que el isomorfismo dado por G. Luzstig es de $\mathcal{H}$ en $\mathbb{C}[\Gamma]$, mientras que el isomorfismo que nosotros pretendemos construir es en el otro sentido.

æ

Bibliografía

[1] Barnabei M., Brini A., Rota. G-C, *On the Exterior Calculus of Invariant Theory,* J. Algebra **96**, 1985, 120-160.

[2] Bourbaki N., *Elements de Mathématique, Algèbre Multilinéaire,*Hermann Prais, 1970.

[3] Carter R., *Some aspects of the representation theory of finite groups of Lie Type,* Notes of U. Oxford, 1977.

[4] Curtis C-W, Reiner, *Methods of Representations Theory,* II, Wiley, New York, 1987.

[5] Iwahori N., *On the structure of a Hecke ring of a Chevalley group over a finite field,* J. Fac. Sci Univ., Tokio, **10**, 1964, 215-236.

[6] Kilmoyer R., *Principal Series Representations of Finite Chevalley Groups,* J. Algebra, **51**, 1978, 300-319.

[7] Lusztig G., *On a theorem of Benson and Curtis,* J. Algebra, **71**, 1981, 400-498.

[8] Serrre J-P,*Représentations lineáres des groupes finis,* Herman, Paris, 1978.

[9] Soto-Andrade J., *Produits Scalaires L^2-Generalises,* Notas de la Sociedad de Matematica de Chile, **1**, 1988, 83-93.

[10] Soto-Andrade J., *Sur la construction des représentations des groupes classiques, in Analysis, Geometry and Probability,* 121-146, Marcel Decker, New York, 1985.

[11] Soto-Andrade J., *Metodos Geométricos en Teoría de Representaciones de Grupos,* Lectures Notes for IX ELAM, Santiago, 1988.

[12] Steinberg R., *A Geometric Aproach to the Representations of the full Linear Group over a Galois field,* Trans. Amer. Math. Soc., *71*, 1951, p. 274-282.

[13] Yokonuma T., *Sur la structure de anneaux de Hecke d'un groupe de Chevallley fini,* C.R. Acad. Sc. Paris, *264* 20 février 1967, p. 344-347.

[14] Weil A., *La cyclotomie Jadis et naguère,* Seminaire Bourbaki, *452*, 1973/74.

[15] Zaddach A., *Algebra de Grassmann y Geometría Proyectiva,* U. de Tarapaca, Arica, Chile, 1987.

æ