ESTUDIO DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETARDO EN ESPACIOS DE BANACH

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas.
Facultad de Ciencias

por

Cecilia Donoso Concha
Noviembre del 2003

Director de Tesis: Dr. Manuel Pinto Jiménez

Co-Director de Tesis : Dr. Humberto Prado C.

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por la candidata.

CECILIA ANGÉLICA DONOSO CONCHA.

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Matemática en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 7 de Mayo del 2004.

Director de Tesis:

Dr. Manuel Pinto ....

Co-Director de Tesis:

Dr. Humberto Prado ....

Comisión de Evaluación de la Tesis:

Dr. Rodrigo Bamón ....

Dr. Claudio Fernández ....

Dr. Sergei Trofimchuk ....

A mis hijos, Sebastián, Amanda y Camilo

Agradecimientos

Quiero agradecer a quienes hicieron posible el desarrollo de este doctorado:

A CONICYT por haberme otorgado una Beca durante los primeros cuatro años.

A la Vice-Rectoría Académica de la Universidad de Chile por haber financiado parcialmente el desarrollo de la Tesis.

A MECESUP por haber financiado el último año de este trabajo.

A mi Director de Tesis, Dr. Manuel Pinto, por su apoyo permanente, por el tiempo que gastó en la revisión de esta Tesis y por sus valiosos aportes y sugerencias.

A mi Co-Director de Tesis, Dr. Humberto Prado, por su apoyo.

Al Dr Samuel Castillo por sus valiosos comentarios y sugerencias.

Un especial agradecimiento al Dr. Rolando Pomareda, por la fé que tuvo en mi trabajo, y por haber creado la instancias para que pudiera terminarlo.

A la comisión examinadora de la Tesis Dr Sergei Trofimchuk, Dr Rodrigo Bamón y Dr Claudio Fernández por el tiempo que ocuparon en su lectura y por sus valiosas sugerencias.

Al Profesor Andrés Carrillo por su apoyo como Director del departamento de Matemática en la UTEM.

A mi amigo Fernando Córdova por su ayuda con el Latex.

Al Profesor Luis Orozco por su apoyo permanente.

A mi compañero Ivan por permanecer a mi lado en los momentos buenos y en los no tan buenos.

A mi madre cuya vocación de abuela permitió que desarrollara mi trabajo con tranquilidad.

A mi hermana Valeria, quien dejó sus liensos y pinceles para escribir estas frías fórmulas.

A mi hijo Sebastián por hacer que la vida sea más fácil.

Índice General

Resumen

En este trabajo hacemos un estudio sobre existencia y comportamiento asintótico de soluciones débiles de los sistemas diferenciales con retardo $Z'(t) = A(t)Z(t) + R(t)(Z(t) - Z(t - r(t)))$ y $Z'(t) = A(t)Z(t) + R(t)Z(t - r(t))$ en un espacio de Banach E. Obtenemos versiones de los Teoremas asintóticos de Levinson y de Hartman-Wintner respectivamente para estos sistemas. Suponiendo que la ecuación homogénea abstracta $X'(t) = A(t)X(t)$ posee una tricotomía del tipo Levinson o del tipo Hartman-Wintner, según corresponda, estudiamos las ecuaciones con retardo como versiones perturbadas de este sistema homogéneo. Establecemos condiciones de integrabilidad a la perturbación $R(t)$ y al retardo $r(t)$ para obtener resultados sobre existencia y comportamiento asintótico. Los resultados obtenidos son aplicados a ecuaciones con retardo de tipo escalar y matricial en espacios de dimensión finita y para $A(t)$ constante en dimensión infinita. Finalmente determinamos condiciones sobre el espectro de $A(t)$ que garantizan la tricotomía de Hartman-Wintner de la ecuación homogénea, y conseguimos así una versión espectral del Teorema de Hartman para ecuaciones con retardo. Los resultados principales del trabajo son obtenidos usando el Teorema del punto fijo de Schauder-Tychonoff.

Abstract

In this work we study the existence and the asymptotic behaviour of mild solutions of the delayed linear differential systems $Z'(t) = A(t)Z(t) + R(t)(Z(t) - Z(t - r(t)))$ and $Z'(t) = A(t)Z(t) + R(t)Z(t - r(t))$ on a Banach space E. For both systems, we obtain versions of the asymptotic Levinson's and Hartman-Wintner's Theorems respectively. By assuming that the homogeneous differential equation $X'(t) = A(t)X(t)$ has either a Levinson or a Hartman-Wintner tricotomy, depending on wich correspond, we study the delay equations as if they were perturbed versions of this abstract homogeneous differential system. We establish integrability conditions for both the perturbation $R(t)$ and the delay $r(t)$ to obtain results regarding the existence and asymptotic bahaviour of mild solutions. In finite dimensional space the results are applied to scalar and matrix delay equations, while in infinite dimensional space, we apply the result with $A(t)$ constant. Finally we determine conditions on the spectrum of $A(t)$ that guarantee the Hartman-Wintner tricotomy for the homogeneous differential equation wich lead us to a spectral version of the Hartman-Wintner Theorem for delay systems. The main results of this work are obtained by using the Schauder-Tychonoff's fixed point Theorem.

Introducción

La teoría de ecuaciones diferenciales en espacios abstactos es una interesante área del análisis tanto en si misma como en sus variados campos de aplicaciones. Observando ciertos fenómenos nos preguntamos como describir analíticamente lo que estamos viendo, como se comportará mas tarde y que elementos intervendrán en ese comportamiento futuro. Si en un determinado sistema diferencial un vector $X(t)$ (finito o infinito dimensional) representa el estado del sistema en un instante t y la razón de cambio de $X(t)$ depende sólo de t y de $X(t)$ obtenemos una ecuación diferencial. Éstas y posteriormente las ecuaciones en derivadas parciales, permitieron durante muchos años modelar fenómenos y dieron respuesta a un sin número de preguntas en diversas áreas de la ciencia. No obstante, con el avance de la tecnología, los cálculos experimentales han sido cada vez mas precisos y los nuevos modelos han mostrado que en muchos casos el comportamiento de un fenómeno, tanto en el presente como en el futuro, está fuertemente influenciado por su pasado. Aquellas ecuaciones diferenciales en que se encuentra implícita esta situación y la dependencia con el pasado está dada en la variable estado y no en su derivada, son llamadas ecuaciones diferenciales funcionales con retardo. Si bien hacia finales del siglo XVIII Bernoulli y Laplace ya habían encontrado ecuaciones con retardo, no ha sido sino en los últimos sesenta años que el tema ha despertado mayor interés y la investigación ha cobrado fuerza y continuidad.

Las raíces de nuestra investigación están en el problema propuesto por R. Bellman en 1965 acerca de determinar el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación escalar

$$u'(t) = au(t - r(t)), \tag{1}$$

para $a > 0$, cuando la función retardo $r(t)$ es no negativa, continua y $r(t) \to 0$ si $t \to \infty$. Si $u_0(t)$ es una solución de (1), ¿bajo qué condiciones de $r(t)$ esta solución es asintótica a alguna solución $v_0(t)$ de la ecuación ordinaria $v'(t) = av(t)$?

K. Cooke [9], suponiendo que $r \in L^1[t_0, \infty)$ demostró la existencia de una solución que satisface la estimación

$$u_0(t) = e^{at}(c + o(1)) \tag{2}$$

cuando $t \to \infty$, donde c es una constante. Recíprocamente, probó que para toda constante c existe una solución $u_0(t)$ de (1) que satisface (2).

Uno de los resultados mas notables acerca de integración asintótica para sistemas diferenciales ordinarios es el Teorema de Levinson [35], publicado en 1946. En este trabajo se considera el sistema diferencial lineal de $n \times n$,

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{3}$$

y el sistema perturbado

$$Y'(t) = (A(t) + R(t))Y(t), \tag{4}$$

donde $A(t)$ es una matriz diagonal $A(t) = diag(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$, que satisface para un k fijo la hipótesis espectral dicotómica relativa a $\lambda_k(t)$:

$$\int_s^t Re(\lambda_i(\xi) - \lambda_k(\xi))d\xi \leq K_1,$$

ó

$$\int_s^t Re(\lambda_i(\xi) - \lambda_k(\xi))d\xi \geq K_2,$$

para todo $i \neq k$, donde K_1, K_2 son constantes y $t \geq s$. Sobre la perturbación, se pide que $|R(\cdot)| \in L^1\,[t_0, \infty)$. El resultado es la existencia de una solución $Y_0(t)$ del sistema (4), definida en el intervalo $[t_0, \infty)$ y que satisface la fórmula asintótica,

$$Y_0(t) = \exp(\int_{t_0}^t \lambda_k(\xi)d\xi)(e_k + o(1)), \tag{5}$$

si $t \to \infty$. Este resultado fué un gran aporte en el tema, y dió origen a diversos resultados posteriores. Entre los trabajos más importantes que le precedieron se destaca el Teorema de Hartman y Wintner [26], publicado en 1955. En este trabajo se plantea la misma forma para el operador $A(t)$, y supone que algún vector propio $\lambda_k(t)$ de $A(t)$ se encuentra aislado de los restantes, en el sentido que para algún $\eta > 0$,

$$|Re(\lambda_i(t) - \lambda_k(t))| > \eta, \text{ si } i \neq k.$$

En este punto la condición sobre los valores propios es más exigente que en Levinson, de hecho ésta implica la anterior. Para la perturbación la condición es menos exigente, suponiendo que $|R(\cdot)| \in L^p\,[t_0, \infty)$ para algún $1 \leq p \leq 2$. Al igual que en el Teorema de Levinson, se obtiene la existencia de una solución $Y_0(t)$ del sistema (4), que satisface la fórmula asintótica

$$Y_0(t) = \exp(\int_{t_0}^t \lambda_k(\xi) + e_k^T R(\xi) e_k d\xi)(e_k + o(1)), \tag{6}$$

siendo e_k el $k-$ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{C}^n$ y e_k^T su vector transpuesto. El término relativo a $R(\xi)$ no aparece en la fórmula asintótica (5), lo que no resulta extraño puesto que $|R(\cdot)| \in L^1[t_0, \infty)$. La primera demostración del Teorema de Hartman es bastante complicada, Harris y Lutz [25] en 1977 dieron una nueva demostración bastante mas sencilla que la primera, aplicando el Teorema de Levinson. Para ello usaron un cambio de variable lineal transformando el sistema en estudio a un nuevo sistema adaptable a las condiciones de Levinson. Puede considerarse este trabajo como el primero en el que realmente se muestra la importancia de este teorema y de sus aplicaciones [18], [35], [12].

Castillo y Pinto [7] extendieron el resultado de Hartman-Wintner suponiendo que $A(t)$ y $R(t)$ son matrices localmente integrables en $[t_0, \infty)$ y que la ecuación (3) posee una $\lambda_k(t)-$tricotomía exponencial (hipótesis (**H5**)). Este resultado es aplicado al caso en que $A(t)$ está escrita en su forma de Jordan.

Los Teoremas de Levinson y de Hartman-Wintner también han sido estudiados para sistemas de ecuaciones con retardo.

C. Donoso [14] estudió el sistema lineal

$$Z'(t) = A(t)Z(t - r(t)) \tag{7}$$

cuando $A(t)$ es una matriz de $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$, $r(t)$ es una función continua, no negativa y $r(t) \to 0$ si $t \to \infty$. Suponiendo que $\Phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema lineal (3) se determinan soluciones $Z_0(t)$ de la ecuación con retardo (7) tal que para algún vector constante $c \neq 0$, $c \in \mathbb{C}^n$,

$$Z_0(t) = \Phi(t)(c + o(1)) \tag{8}$$

para todo t suficientemente grande. En este trabajo también se estudian soluciones $Z_0(t)$ del sistema (7) cuando la matriz $A(t) = \Lambda(t) + R(t)$ donde $\Lambda(t)$ es una matriz diagonal que satisface la condición de dicotomía de Levinson. Se demuestra la fórmula asintótica en (8).

Cassell y Hou [5] estudiaron el sistema funcional

$$W'(t) = \Lambda(t)W(t) + L(t, W_t),$$

donde $\Lambda(t)$ es una $n \times n$ matriz diagonal que satisface las condiciones del Teorema de Hartman-Wintner. Para cada $t \in [t_0, \infty)$, $L(t, \cdot)$ es una función lineal acotada de $C([-\tau, 0], \mathbb{C}^n)$ en $\mathbb{C}^n$ ($\tau > 0$ constante). El resultado se obtiene estableciendo ciertas funciones lineales de $L(t, \cdot)$ cuyas normas están en $L^p(t_0, \infty)$ para algún $1 \leq p \leq 2$.

Castillo [6] investigó la validez de los Teoremas de Levinson y de Hartman-Wintner en espacios de Banach abstractos. Suponiendo que las soluciones de la ecuación (3) están únicamente determinadas por un operador de evolución $\{\Phi(t,s)\}_{t \geq s}$ (ver Definición 1). Si esta ecuación posee una $\lambda_k(t)-$tricotomía (ordinaria o exponencial según corresponda) y la perturbación $|R(t, \cdot)| \in L^p[t_0, \infty)$ ($p = 1$ ó $1 \leq p \leq 2$), demuestra la existencia de una solución débil $Y_0(t)$ de la ecuación (4) (Definición 4), que satisface la fórmula asintótica

$$Y_0(t) = \exp(\int_{t_0}^{t} \lambda_k(\xi)\, d\xi)(\hat{e} + o(1)) \tag{9}$$

cuando $t \to \infty$. Este resultado lo aplica para obtener versiones funcionales de ambos teoremas para un sistema del tipo

$$\begin{aligned} y'(t) &= L(t, y_t) + R(t, y_t) \\ y_t(\theta) &= y(t+\theta), \end{aligned} \tag{10}$$

donde $\theta \in [-\tau, 0], \tau > 0$ y $|R(t,\cdot)| \in L^p[t_0, \infty)$, con $p = 1$, en el caso Levinson y $1 \leq p \leq 2$ en el otro. $L(t,\cdot)$ es una función lineal acotada de $\mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{C}^n)$ en $\mathbb{C}^n$.

No se conocen versiones de los Teoremas de Levinson ni de Hartman-Wintner para ecuaciones diferenciales con retardo en espacios de Banach abstractos. Ese es el objetivo central de esta Tesis. El trabajo está dividido en dos capítulos cuyos contenidos se señalan a continuación.

En el Capítulo 1 estudiamos el sistema lineal

$$Z'(t) = A(t)Z(t) + R(t)\left(Z(t) - Z(t - r(t))\right). \tag{11}$$

en un espacio de Banach abstracto $(E, \|\cdot\|)$. Suponemos que la ecuación (3) posee una $\lambda_0(t)-$ tricotomía ordinaria (hipótesis **(H2)**) y que $|R(\cdot)|\, r(\cdot) \in L^1$, asumiendo la existencia de una solución $X_0(t)$ del sistema homogéneo, demostramos que existe una solución $Y_0(t)$ del sistema perturbado (11) que se comporta asintóticamente como $X_0(t)$. Este resultado lo aplicamos al caso en que la ecuación (3) es autónoma, es decir $A(t) = A$, es independiente de t y el operador A es acotado (Corolario 1). Cerramos el capítulo con un ejemplo en el que mostramos que la condición $r(t)$ acotado es necesaria para garantizar el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema (11). Para esto tomamos una ecuación escalar con $A(t) = a$ constante y el retardo $r(t)$ no acotado (en nuestro ejemplo se cumple además que $|R(t)| \to 0$, si $t \to \infty$). Probamos usando un sencillo argumento que ninguna solución de (11) puede ser asintótica a una solución de (3).

En el Capítulo 2 estudiamos el sistema abstracto con retardo

$$Z'(t) = A(t)Z(t) + R(t)Z(t - r(t)), \tag{12}$$

suponiendo que el sistema no perturbado (3) posee una $\lambda_0(t)-$tricotomía exponencial (hipótesis **(H5)**). Si la función $|R(\cdot)| \in L^p[t_0, \infty)$, con $1 < p \leq 2$ y $r(\cdot) \in L^1[t_0, \infty)$ demostramos que para una solución dada $X_0(t)$ del sistema (3), existe una solución débil $Y_0(t)$ del sistema (12) que se comporta asintóticamente como $X_0(t)$ por una función exponencial de la perturbación (Teorema 2). En la sección 2 aplicamos este teorema al caso en que la ecuación es escalar (Corolario 2). Establecemos condiciones de acotamiento local para la función $A(t)$ que garantizan el cumplimiento de las hipóteisis **(H3)**,**(H4)**, y **(H5)** del Teorema 2. Aplicamos nuestro resultado para el caso en que $A(t)$ es una $n \times n$ matriz en $\mathbb{C}$, escrita en su forma de Jordan y $\lambda_0(t)$ es un valor propio simple de $A(t)$, para cada t. La condición de tricotomía exponencial es reemplazada por una $\lambda_0(t)-$tricotomía del tipo Hartman-Wintner relativa a los valores propios de $A(t)$ (hipótesis **(H5)'**). En la última sección de este capítulo enfocamos el problema desde una perspectiva espectral. Esto es, suponiendo que E es un espacio de Hilbert, determinamos condiciones sobre el espectro $\sigma\left(A(t)\right)$ de $A(t)$, de modo que una $\lambda_0(t)-$tricotomía de Hartmann-Wintner sea suficiente para tener una $\lambda_0(t)-$tricotomía exponencial. Para esto hacemos uso de la teoría de reductibilidad para operadores acotados dada por Daleckii [11].

Nuestra hipótesis básica es la existencia de una familia de evolución $\{\Phi(t,s)\}_{t\geq s}$ que resuelve únicamente el sistema diferencial abstracto (3). Así toda solución $X_0(t)$ de este sistema que satisface la condición inicial $X_0(t) = X_0$ se escribe de manera única como $X_0(t) = \Phi(t,s)\,X_0$. Suponemos también que esta familia de operadores satisface la condición local "$\theta-$Lipschitz" (Definición 2). Esta propiedad es equivalente al acotamiento del operador A en el caso que la ecuación (3) es autónoma [20], y también se cumple para algunos operadores de tipo $(\phi, K)-$sectoriales [45].

Los resultados son obtenidos mediante la construcción de operadores lineales cuya formulación nos permite determinar claramente el comportamiento asintótico de sus puntos fijos. Estos operadores son definidos sobre una determinada clase de funciones continuas, cuya caracterización requiere de un estudio previo sobre el conjunto imagen del operador. Nuestra principal herramienta será el Teorema del punto fijo de Schauder -Tychonoff [16].

El problema de existencia y comportamiento asintótico de soluciones débiles de sistemas diferenciales con retardo en espacios abstractos, ha originado distintas corrientes de investigación, tanto en sistemas lineales (ver por ejemplo [43], [22], [34], [45]), como en sistemas no lineales ([30], [47], [50], [51]).

Capítulo 1

Teorema de Levinson para sistemas con Retardo en Espacios de Banach.

Consideremos un espacio de Banach $E = (E, \|\cdot\|)$ con una norma $\|\cdot\|$. Para un subespacio D de E denotamos por $\mathcal{L}(D, E)$ al espacio de las transformaciones lineales de D en E. Un operador $A \in \mathcal{L}(D, E)$ se dice acotado si la norma operador uniforme $|A| = \sup_{\|\varphi\|=1} \|A\varphi\|$ es finita. $\mathcal{B}(E)$ es el subespacio de $\mathcal{L}(D, E)$, de las transformaciones lineales acotadas, en caso que $D = E$ los escribimos $\mathcal{B}(E)$ y $\mathcal{L}(E)$ respectivamente. Para una función $Z : [t_0, \infty) \to E$, siendo $t_0 \geq 0$, denotaremos por $\Delta Z(t) = Z(t) - Z(t - r(t))$.

En este capítulo estudiaremos el sistema lineal abstracto con retardo,

$$Z'(t) = A(t) Z(t) + R(t) \Delta Z(t), \tag{1.1}$$

donde $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia de operadores lineales en E con dominio común $D \subseteq E$. $R(\cdot) \in \mathcal{C}_b([0, \infty), \mathcal{B}(E))$, el espacio de las funciones operadores de $[0, \infty)$ en $\mathcal{B}(D, E)$, acotadas en t, $r : [t_0, \infty) \longrightarrow [0, \mu]$, es una función continua, $\mu \leq 1$ y $r(t) \longrightarrow 0$ si $t \longrightarrow \infty$. Nuestro propósito es obtener una versión del Teorema de Levinson (ver [35],[18], [14]) para el sistema lineal con retardo (1.1) . Si la función $X_0(t) = \exp\left(\int_s^t \lambda_0(u)\, du\right) \hat{e}$ es una solución del sistema (1.2) para una cierta función λ_0 apropiada y suponiendo que esta ecuación posee una tricotomía ordinaria, bajo ciertas condiciones de integrabilidad y acotamiento para de la función $|R(\cdot)| r(\cdot)$, vamos a demostrar que el sistema (1.1) tiene una solución débil $Y_0(t)$ y que esta solución se comporta asintóticamente como la función $X_0(t)$.

Para obtener los resultados principales en este capítulo y en el siguiente usaremos el Teorema del punto fijo de Schauder-Tychonoff y el Teorema de Arzelá-Ascoli, los que enunciamos a continuación.

Teorema (Schauder-Tychonoff): *Sea $\mathcal{E}$ un espacio vectorial topológico, Hausdorff, localmente convexo y completo. Sea $\mathcal{S}$ un subconjunto de E no vacío, cerrado y convexo, y sea $\mathcal{N}$ un operador continuo en $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{N}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ y $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ es relativamente compacto en $\mathcal{E}$. Entonces $\mathcal{N}$ tiene un punto fijo en $\mathcal{S}$.*
La demostración de este teorema puede verse en [16] o [19].

Teorema (Arzelá-Ascoli) *Sea $\mathcal{F}$ una familia equicontinua de funciones de un espacio separable X en un espacio métrico Y. Sea $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathcal{F}$ tal que para todo $x \in X$ la clausura de $\{f_n(x)\,/0 \leq n < \infty\}$ es compacto. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{n_k \geq 1}$ que converge puntualmente a una función f y la convergencia es uniforme en compactos.*

La demostración de este teorema puede verse en [44]. A continuación estableceremos algunos hechos que necesitaremos en este capítulo y en el siguiente.

Definición 1 *Una familia de operadores lineales en dos parámetros, acotados $\{\Phi(t,s)\}_{t\geq s}$ en $E, 0 \leq s \leq t$ se llama una familia de evolución (o un sistema de evolución) si se satisfacen las dos condiciones siguientes:*

(a) $\Phi(s,s) = I, \quad \Phi(t,r)\,\Phi(r,s) = \Phi(t,s)$ *para* $0 \leq s \leq r \leq t.$

(b) $(t,s) \longrightarrow \Phi(t,s)$ *es fuertemente continua para* $0 \leq s \leq t.$

Consideremos el sistema diferencial lineal abstracto (homogéneo asociado a la ecuación (1.1)), que también llamaremos una $(D,E)-$ ecuación diferencial abstracta,

$$X'(t) = A(t)\,X(t)\,, \tag{1.2}$$

definida para t en un intervalo $[t_0,\infty)$, donde $A(\cdot) \in \mathcal{C}([t_0,\infty), \mathcal{L}(D,E))$. Una función $X : [t_0,\infty) \longrightarrow E$ es una solución (solución clásica) de (1.2) si es continua en $[t_0,\infty)$, $X(t) \in D$ para todo $t \geq t_0, X$ es continuamente diferenciable en (t_0,∞) y satisface la ecuación (1.2). Diremos que la familia de evolución $\{\Phi(t,s)\}_{t\geq s}$ resuelve la (D,E)-ecuación (1.2) si para cada $X_s \in D$, la función $X(t) = \Phi(t,s)\,X_s$ es la única solución de (1.2) tal que $X(s) = X_s$ definida para todo $t \geq s$. En este caso llamaremos a $\Phi(t,s)$ su operador de Cauchy. El espacio E es llamado espacio fase de la ecuación.

Observación 1 En el caso en que la ecuación (1.2) es autónoma, es decir $A(t) = A$ es independiente de t,Si A es cerrado y con dominio denso en E, la familia de evolución $\{\Phi(t,s)\}_{t\geq s}$ que resuelve (1.2) está dada por $\Phi(t,s)\,X_s = T(t-s)\,X_s$, siendo A el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores acotados en E (ver [20],[39]).

Consideremos las siguientes hipótesis:

(H1): Supongamos que las soluciones de la ecuación (1.2) están determinadas únicamente por una familia de evolución $\{\Phi(t,s)\}_{t\geq s}$ de operadores acotados en E.

Observación 2 De la hipótesis **(H1)** podemos deducir que $\Phi(t,s)\, D \subseteq D$.

Definición 2 *Diremos que una familia de evolución* $\{\Phi(t,s)\}_{t\geq s}$ *es* $\theta-$ *Lipschitz para algún* $\theta \in (0,1]$, *si existe una constante* c *mayor que cero tal que para todo* $X \in E$, *y* $0 < |t-s| \leq 1$,

$$\|\Phi(t,s)\, X - X\| \leq c\, |t-s|^{\theta}\, \|X\|. \tag{1.3}$$

La propiedad dada en (1.3) es local con respecto a t y a s, de este modo no resulta restrictiva para el operador. Por otra parte si el operador A es cerrado y sectorial de tipo (ϕ, K), y $\Phi(t,s)$ es el operador de Cauchy de la ecuación (1.2), se puede demostrar que bajo ciertas condiciones de la resolvente de $A(t)$, $\{\Phi(t,s)\}_{t\geq s}$ es θ-Lipschitz (ver [45]).

Una solución del sistema (1.1) definida para $t \geq t_0, (t_0 \geq 0)$ está determinada por una función inicial g, definida en un intervalo inicial $[\tau, t_0]$ donde tomamos

$$\tau = \inf_{t\geq t_0} (t - r(t)).$$

Denotaremos por $\mathcal{C} = \mathcal{C}([\tau,\infty), E)$ al espacio de las funciones continuas de $[\tau,\infty)$ en E dotado de la topología de la convergencia uniforme en compactos (también llamada c-topología) y por $I_t = [t - r(t), t]$ si $t \geq t_0$. Para una función $f \in \mathcal{C}$, para cada subintervalo compacto I de $[\tau,\infty)$, denotamos por $\|f\|_I = \sup_{t\in I} \|f(t)\|$

1.1 Teorema de Levinson para Ecuaciones con Retardo

En esta sección obtendremos una versión del Teorema asintótico de Levinson para el sistema con retardo (1.1).Vamos a considerar las siguientes hipótesis:
(H2):

- Existen proyecciones $P_i(\cdot) \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathcal{B}(E))$, $(i = 1,2)$ y una proyección constante y unidimensional $P_0 : E \longrightarrow E$ con $ImP_0 =< \widehat{e} >$, $\widehat{e} \in D$, tal que $|P_i(t)|$ es acotada como función de t, $P_1(t)$, P_0, y $P_2(t)$ son complementarias y tales que para todo $t \geq s$:

$$\Phi(t,s)\, P_1(s) = P_1(t)\, \Phi(t,s). \tag{1.4}$$

- Existe una función $\lambda_0 : [t_0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ localmente integrable y existe una familia de funciones $\{h(t,s)\}_{t\geq s}$ a valores reales, tal que $h(t,s) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$ para cada s, y $h(t,s) = h(t,t')\, h(t',s)$ si $s \leq t' \leq t$ para las que se satisface,

$$|\Phi(t,s)\, P_1(s)| \leq K h(t,s) \left| \exp \int_s^t \lambda_0(u) du \right|. \tag{1.5}$$

- Se cumple la igualdad,

$$\Phi(t,s)\,\widehat{e} = \exp\left(\int_s^t \lambda_0(u)\ du\right)\widehat{e}. \tag{1.6}$$

- La restricción $\Phi(t,s)_| : P_2(s)E \to P_2(t)E$ es invertible, (en este caso podemos definir $\Phi(t,s)$ para $s \geq t$ como $\Phi(t,s) = \Phi(s,t)_|^{-1}$) y se satisface

$$|\Phi(t,s)\,P_2(s)| \leq K\left|\exp\left(\int_s^t \lambda_0(u)du\right)\right|, \text{ para } t \leq s. \tag{1.7}$$

(H3) : La familia de evolución $\{\Phi(t,s)\}_{t\geq s}$ es $1-$Lipschitz para alguna constante c mayor que cero. Esto es, para todo $X \in E$,

$$\|\Phi(t,s)\,X - X\| \leq c\,|t-s|\,\|X\|, \tag{1.8}$$

si $0 < |t-s| \leq 1$.

Observación 3 Cuando la familia de evolución $\Phi(t,s)$ está determinada por un C_0-semigrupo de operadores en la forma $\Phi(t,s)\,X = T(t-s)\,X$, para cada $X \in E$ y el generador infinitesimal $\dot{T}(0)$ es acotado, $\Phi(t,s)$ es $1-$Lipschitz (ver sección ejemplos y aplicaciones). Notemos además que en este caso $\Phi(t,s)$ es invertible en E para todo $t \geq s$.

(H4): Para una función λ_0 localmente integrable supondremos la condición:

$$\sup_{t\in[0,\infty)}\left|\int_{t-r(t)}^t \lambda_0(u)\,du\right| = m < \infty. \tag{1.9}$$

Definición 3 *Diremos que la ecuación (1.2) posee una λ_0-tricotomía ordinaria si su operador de Cauchy $\Phi(t,s)$ satisface la hipótesis* **(H2)**. *Si las proyecciones $P_i(t)$ no dependen de t, se dice que posee una λ_0-tricotomía con proyecciones fijas. En caso que $\lambda_0 = 0$ se dirá simplemente una tricotomía ordinaria.*

Definición 4 *Diremos que una función $Z = Z(\cdot, g) \in \mathcal{C}$, es una solución débil de la ecuación (1.1) en $[\tau,\infty)$ con función inicial $g(t)$ si $Z(t)$ satisface, para $t \geq t_0$*

$$\begin{aligned} Z(t) &= \Phi(t,t_0)\,Z_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t,s)\,P_1(s)\,R(s)\,\Delta Z(s)\,ds \\ &\quad - \int_t^\infty \Phi(t,s)\,P_2(s)\,R(s)\,\Delta Z(s)\,ds, \quad y \qquad (1.10)\\ Z(t) &= g(t), \qquad para \qquad t \in [\tau, t_0], \qquad (1.11) \end{aligned}$$

donde $g : [\tau, t_0] \to D$ es una función continua y $g(t_0) = Z_0$.

A continuación veremos el resultado principal de este capítulo.

Teorema 1 *(Levinson para un sistema de ecuaciones con retardo) Consideremos el sistema lineal (1.1) y supongamos que se satisfacen las hipótesis* **(H1)**, **(H2)**, **(H3)** **(H4)** *y para algún* $t_0 \geq 0$, $R(t) : E \rightarrow E$, *es compacto para todo* $t \geq t_0$,

$$\sup_{s \geq t_0} |R(s)| = \Theta, \tag{1.12}$$

siendo Θ *constante,* $\Theta \leq \frac{1}{4(1+e^m)e^m}$, *y*

$$|R(\cdot)|\, r(\cdot) \in L^1[t_0, \infty). \tag{1.13}$$

Si $r(t) \rightarrow 0$ *cuando* $t \rightarrow \infty$ *entonces existe una solución débil* Z_0 *de (1.1) definida en* $[\tau, \infty)$ *que satisface la fórmula asintótica:*

$$Z_0(t) = \exp(\int_{t_0}^{t} \lambda_0(u)du\ )\,(\widehat{e} + o(1)), \tag{1.14}$$

para $t \geq t_0$ *y* t_0 *suficientemente grande.*

Demostración : Vamos a Considerar los siguientes elementos técnicos :

Sea $\tau = \inf_{t \geq t_0}(t - r(t))$ y sea $t_1 \geq t_0$ tal que $t_1 - r(t_1) = t_0$ y para todo $t > t_1$, $t - r(t) > t_0$. Notemos que $t_1 = t_0 + r(t_1) \leq t_0 + \mu$, de modo que $[t_0,t_1] \subset [t_0,t_0 + \mu]$.

Denotaremos por $\varphi(t) = q(t)^{-1} q(t - r(t))$, $\sup_{t \geq s \geq t_0} h(t,s) = N$ y $\tilde{N} = \max\{1, N\}$. De la condición **(H4)** deducimos que

$$\varphi(t) \leq e^m. \tag{1.15}$$

Sean $g : [\tau, \infty) \rightarrow D$ una función continua tal que $g(t_0) = \widehat{e}$,

$$\sup_{t \geq \tau} \|q(\cdot)^{-1} g(\cdot)\| < \infty \tag{1.16}$$

y L una constante positiva que satisface

$$L \geq \max\left\{2, \frac{3ce^m}{K}, \|q(t)^{-1} g(t)\|_{[\tau,t_0]}\right\}. \tag{1.17}$$

Para aplicar el Teorema del punto fijo de Schauder, vamos a tomar el espacio vectorial topológico $\mathcal{E} = \mathcal{C}$, dotado de la topología de la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de $[\tau, \infty)$. Este espacio es de Hausdorff, localmente convexo, completo y metrizable (ver [16] [19]). El subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathcal{E}$ lo definimos a continuación.

Definición 5 *Denotaremos por $\mathcal{S} = \mathcal{S}(L)$ al subconjunto de $\mathcal{C}$ definido en la siguiente forma: $Z \in \mathcal{S}$ si*

(i) $Z(t) = g(t)$ para todo $t \in [\tau, t_0]$

(ii) $q(t)^{-1} \|Z(t)\| \leq L$, si $t \geq \tau$

(iii) $q(t)^{-1} \|\Delta Z(t)\| \leq KLr(t)$, $t \geq t_1$

donde la función g satisface (1.16).

$\mathcal{S}$ es cerrado, convexo y acotado, esta condición es necesaria para aplicar el Teorema de Schauder (ver Lema 1). Definamos el operador,

$$\begin{aligned} M: \ & \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C} \\ & Z \longrightarrow MZ = Y, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} Y(t) &= g(t), \quad \tau \leq t \leq t_0, && (1.18) \\ Y(t) &= \Phi(t, t_0)\,\widehat{e} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s) P_1(s) R(s) \Delta Z(s)\, ds \\ &\quad - \int_{t}^{\infty} \Phi(t,s) P_2(s) R(s) \Delta Z(s)\, ds, && (1.19) \end{aligned}$$

para $t \geq t_0$.

Vamos a probar que M tiene un punto fijo en $\mathcal{S}$. Para ello debemos demostrar que $M(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$, M es continua en la c-topología y que $M(\mathcal{S})$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}$.

a) $M(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$

Sea Y en $M(\mathcal{S})$, entonces existe una función Z en $\mathcal{S}$ tal que $Y = M(Z)$. $Y(t)$ deberá satisfacer las condiciones (i), (ii), y (iii) en la Definición 5.

La condición (i) se satisface por la formulación de Y en (1.18).

Para probar (ii), tomemos $t \geq \tau$. Si $t \in [\tau, t_0]$, (ii) se obtiene directamente de la desigualdad en (1.17).

Si $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned}
\|Y(t)\| &\leq \|\Phi(t,t_0)\widehat{e}\| + \int_{t_0}^{t} \|\Phi(t,s)P_1(s)R(s)\Delta Z(s)\|ds \\
&\quad + \int_{t}^{\infty} \|\Phi(t,s)P_2(s)R(s)\Delta Z(s)\|ds \\
&\leq q(t) + Kq(t)\int_{t_0}^{t} h(t,s)q(s)^{-1}|R(s)|\,\|\Delta Z(s)\|ds \\
&\quad + q(t)K\int_{t}^{\infty} q(s)^{-1}|R(s)|\,\|\Delta Z(s)\|ds \\
&\leq q(t)\left[1 + K\int_{t_0}^{t} h(t,s)|R(s)|q(s)^{-1}\|\Delta Z(s)\|ds\right] \\
&\quad + q(t)K\int_{t}^{\infty} |R(s)|q(s)^{-1}\|\Delta Z(s)\|ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq q(t)\left[1 + K\tilde{N}\int_{t_0}^{t_1} |R(s)|q(s)^{-1}(\|Z(s)\| + \|Z(s-r(s))\|)\,ds\right] \\
&\quad + q(t)K\int_{t_1}^{\infty} |R(s)|q(s)^{-1}\|\Delta Z(s)\|ds \\
&\leq q(t)\left[1 + K\tilde{N}\int_{t_0}^{t_1} |R(s)|q(s)^{-1}\|Z(s)\|ds\right] \\
&\quad + q(t)LK\tilde{N}\int_{t_0}^{t_1} |R(s)|q(s)^{-1}q(s-r(s))\,ds \\
&\quad + q(t)K^2L\int_{t_1}^{\infty} |R(s)|r(s)\,ds \\
&\leq Lq(t)\left[\frac{1}{L} + K\tilde{N}(1+e^m)\sup_{s\in[t_0,t_1]}|R(s)|r(t_1) + K^2\int_{t_1}^{\infty}|R(s)|r(s)\,ds\right]
\end{aligned}$$

$$\leq Lq(t)\,. \tag{1.20}$$

Esta última desigualdad se obtiene considerando las condiciones (1.12), (1.13), (1.17) y que $r(t) \to 0$ si $t \to \infty$. Luego Y satisface (ii) para todo $t \geq t_0$.

Falta verificar que Y satisface (iii). Sea $t \geq t_1$, escribamos

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \Phi(t,t_0)\widehat{e} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)P_1(s)R(s)\Delta Z(s)\,ds \\
&\quad - \int_{t}^{\infty} \Phi(t,s)P_2(s)R(s)\Delta Z(s)\,ds \\
&= J_1(t) + J_2(t) + J_3(t)\,,
\end{aligned}$$

donde los $J_i(t), i = 1, 2, 3$ son los tres últimos sumandos en $Y(t)$. Ahora estimamos las diferencias:

$$\|\Delta Y(t)\| = \|Y(t) - Y(t - r(t))\| \leq \sum_{i=1}^{3} \|J_i(t) - J_i(t - r(t))\|. \tag{1.21}$$

Para el primer término en esta suma, de la condición **(H3)**:

$$\begin{aligned}
\|J_1(t) - J_1(t - r(t))\| &= \|\Phi(t, t_0)\widehat{e} - \Phi(t - r(t), t_0)\widehat{e}\| \\
&= \|\Phi(t, t - r(t))\Phi(t - r(t), t_0)\widehat{e} - \Phi(t - r(t), t_0)\widehat{e}\| \\
&\leq cr(t)\left|\exp\int_{t_0}^{t-r(t)}\lambda_0(u)\,du\right|\|\widehat{e}\| \\
&\leq cq(t)\,r(t)\,e^{m} \\
&\leq \frac{1}{4}KLq(t)\,r(t).
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Para el segundo sumando de (1.21):

$$\begin{aligned}
&\|J_2(t) - J_2(t - r(t))\| \\
\leq\ &\int_{t_0}^{t-r(t)} \|\Phi(t, t - r(t))\Phi(t - r(t), s)P_1(s)R(s)\Delta Z(s) \\
&-\Phi(t - r(t), s)P_1(s)R(s)\Delta Z(s)\|\,ds \\
&+\int_{t-r(t)}^{t}\|\Phi(t, s)P_1(s)R(s)\Delta Z(s)\|ds \\
&= I_2^{(1)} + I_2^{(2)},
\end{aligned} \tag{1.23}$$

donde $I_2^{(i)}, i = 1, 2.$ son las integrales en la última desigualdad. Ahora estimamos estas dos integrales por separado. Con respecto a la primera integral en (1.23), en virtud de **(H2)** y **(H3)**,

$$\begin{aligned}
I_2^{(1)} &\leq cr(t)\int_{t_0}^{t-r(t)}\|\Phi(t - r(t), s)P_1(s)R(s)\Delta Z(s)\|ds \\
&\leq r(t)Kc\int_{t_0}^{t-r(t)} h(t - r(t), s)\left|\exp\int_{s}^{t-r(t)}\lambda_0(u)\,du\right||R(s)|\|\Delta Z(s)\|ds.
\end{aligned}$$

Debemos considerar dos casos.
Caso 1: Si $t - r(t) \leq t_1$

$$\begin{aligned} I_2^{(1)} &\leq cq(t)\, r(t)\, K\tilde{N} \int_{t_0}^{t-r(t)} \varphi(t)\, |R(s)|\, q(s)^{-1} \|\Delta Z(s)\| ds \\ &\leq c\varphi(t)\, q(t)\, r(t)\, \tilde{N}KL\mathrm{sup}_{s\in[t_0,t_1]} |R(s)|\, (1+\varphi(s))\, r(t_1)\,. \\ &\leq \frac{1}{4}\, q(t)\, r(t)\, KLc\tilde{N}r(t_1) \end{aligned} \tag{1.24}$$

Caso 2: Si $t - r(t) \geq t_1$,

$$\begin{aligned} I_2^{(1)} &= cKr(t)\, q(t)\, \varphi(t) \\ &\quad \left[N \int_{t_0}^{t_1} q(s)^{-1} |R(s)|\, \|\Delta Z(s)\| ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1}^{t-r(t)} h(t-r(t), s)\, q(s)^{-1} |R(s)|\, \|\Delta Z(s)\| ds \right] \\ &\leq cr(t)\, q(t)\, e^m K \left[\tilde{N}\mathrm{sup}_{s\in[t_0,t_0+\mu]} |R(s)|\, (1+\varphi(s)) r(t_1) + K\tilde{N} \int_{t_1}^{\infty} |R(s)|\, r(s)\, ds \right], \end{aligned}$$

así de (1.12)

$$\leq r(t)\, q(t)\, K\frac{L}{4} \left[c\tilde{N}r(t_1) + 4e^m\tilde{N}K \int_{t_1}^{\infty} |R(s)|\, r(s)\, ds\right], \tag{1.25}$$

en ambos casos (1.24) y (1.25) vemos que $I_2^{(1)}$ satisface la desigualdad en (1.24).
Con respecto a la segunda integral de (1.23),

$$I_2^{(2)} \leq K \int_{t-r(t)}^{t} h(t,s)\, |R(s)| \left|\exp \int_s^t \lambda_0(u)\, du\right| \|\Delta Z(s)\| ds,$$

nuevamente consideramos dos casos :

Caso 1: Si $t_0 \leq t - r(t) \leq t_1 \leq t$,

$$\begin{aligned} I_2^{(2)} &\leq q(t)\, K \int_{t-r(t)}^{t_1} h(t,s)\, |R(s)| \left|\exp(\int_s^t \lambda_0(u)du - \int_{t_0}^t \lambda_0(u)du)\right| \|\Delta Z(s)\| ds \\ &\quad + q(t)\, K \int_{t_1}^{t} h(t,s)\, |R(s)|\, q(s)^{-1} \|\Delta Z(s)\| ds \\ &\leq Kq(t)\, h(t,t_1) \int_{t-r(t)}^{t_1} h(t_1,s)\, |R(s)|\, q(s)^{-1} \|Z(s)\| ds \end{aligned}$$

$$+Kq(t)\,h(t,t_1)\int_{t-r(t)}^{t_1} h(t_1,s)\,|R(s)|\,q(s)^{-1}\,\|Z(s-r(s))\|q(s-r(s))^{-1}\,q(s-r(s))\,ds$$

$$\begin{aligned}
&+q(t)\,K^2L\int_{t_1}^{t} h(t,s)\,|R(s)|\,r(s)\,ds\\
\leq\ & LKq(t)\,h(t,t_1)\,(1+\varphi(s))\mathrm{sup}_{s\in[t_0,t_1]}\,|R(s)|\,r(t)\\
&+q(t)\,K^2Lr(t)\,\mathrm{sup}_{s\in[t_1,t]}h(t,s)\,\mathrm{sup}_{s\in I_t}\,|R(s)|\,r(s)
\end{aligned}$$

$$\leq KLq(t)\,r(t)\left[h(t,t_1)\,(1+e^m)\sup_{s\in[t_0,t_1]}|R(s)|+K\sup_{s\in[t_1,t]}h(t,s)\sup_{s\in I_t}|R(s)|\,r(s)\right]. \tag{1.26}$$

Caso 2 : Si $t-r(t)\geq t_1$,

$$\begin{aligned}
I_2^{(2)} &\leq Kq(t)\int_{t-r(t)}^{t} h(t,s)\,|R(s)|\,q(s)^{-1}\,\|\Delta Z(s)\|ds\\
&\leq K^2Lq(t)\,r(t)\sup_{s\in I_t}h(t,s)\sup_{s\in I_t}|R(s)|\,r(s)\,.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

De (1.26) y (1.27) obtenemos que

$$I_2^{(2)}\leq KLq(t)\,r(t)\left[h(t,t_1)\,(1+e^m)\sup_{s\in[t_0,t_0+\mu]}|R(s)|+\sup_{s\in I_t}h(t,s)\sup_{s\in I_t}|R(s)|\,r(s)\right]. \tag{1.28}$$

De (1.13) y puesto que $r(t)\to 0$, y $h(t,t_1)\to 0$, si $t\to\infty$, podemos elegir un t_0 suficientemente grande tal que la suma de los términos entre paréntesis de los lados derechos en (1.27) y en (1.28) sean menores o iguales que $1/3$, de aquí que

$$\|\Delta J_2(t)\|\leq KLq(t)\,r(t)\,\frac{1}{3}. \tag{1.29}$$

Por otra parte,

$$\|J_3(t)-J_3(t-r(t))\|$$

$$\begin{aligned}
=\ & \left\|\int_t^\infty \Phi(t,s)\,P_2(s)\,R(s)\,\Delta Z(s)\,ds-\int_{t-r(t)}^\infty \Phi(t-r(t),s)\,P_2(s)\,R(s)\,\Delta Z(s)\,ds\right\|\\
\leq\ & \int_{t-r(t)}^{t}\|\Phi(t-r(t),s)\,P_2(s)\,R(s)\,\Delta Z(s)\,\|ds\\
&+\int_t^\infty \|\Phi(t,t-r(t))\,\Phi(t-r(t),s)\,P_2(s)\,R(s)\,\Delta Z(s))\\
&-\Phi(t-r(t),s)\,P_2(s)\,R(s)\,\Delta Z(s)\|\,ds\\
=\ & I_3^{(1)}+I_3^{(2)}.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Para la primera integral de (1.30) tenemos,

$$I_3^{(1)} \leq q(t)\, K \int_{t-r(t)}^{t} q(s)^{-1} \varphi(t) \, |R(s)| \, \|\Delta Z(s)\| ds.$$

Caso 1: Si $t - r(t) \leq t_1$, entonces

$$\begin{aligned} I_3^{(1)} &\leq K\varphi(t)\, q(t) \int_{t-r(t)}^{t_1} |R(s)|\, q(s)^{-1} \|\Delta Z(s)\| ds \\ &\quad + Kq(t)\,\varphi(t) \int_{t_1}^{t} |R(s)|\, q(s)^{-1} \|\Delta Z(s)\| ds \\ &\leq KLq(t)\,\varphi(t) \left[(1+\varphi(s)) \int_{t-r(t)}^{t_1} |R(s)| \;\, ds + K \int_{t_1}^{t} |R(s)|\, r(s)\, ds \right]. \end{aligned}$$

Como $t_1 \geq t - r(t) \geq t_0$ y $t \geq t_1$ entonces $t_1 - (t - r(t)) \leq (t_1 - t) + r(t) \leq r(t)$, tenemos

$$\begin{aligned} &\leq KLq(t)\,\varphi(t)\, r(t) \sup\nolimits_{s\in[t_0,t_1]} |R(s)|\, (1+\varphi(s)) \\ &\quad + KLq(t)\,\varphi(t)\, K\sup\nolimits_{s\in I_t} |R(s)|\, r(s)\, (t - t_1), \end{aligned}$$

y $r(t) \geq t - t_1$ por lo tanto,

$$\begin{aligned} I_3^{(1)} &\leq KL\varphi(t)\, q(t)\, r(t) \left[\sup\nolimits_{s\in[t_0,t_1]} |R(s)|\, (1+\varphi(s)) + K\sup\nolimits_{s\in I_t} |R(s)|\, r(s)\right] \\ &\leq KLq(t)\, r(t) \left[\frac{1}{4} + e^m K \sup_{s\in I_t} |R(s)|\, r(s) \right]. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Caso 2 : Si $t - r(t) > t_1$,

$$\begin{aligned} I_3^{(1)} &\leq Kq(t) \int_{t-r(t)}^{t} \varphi(t)\, |R(s)|\, q(s)^{-1} \|\Delta Z(s)\| ds. \\ &\leq KLq(t)\, r(t)\, e^m K \sup_{s\in I_t} |R(s)|\, r(s). \end{aligned} \tag{1.32}$$

Por lo tanto de (1.31) y (1.32), tenemos que

$$I_3^{(1)} \leq KLq(t)\, r(t) \left[Ke^m \sup_{s\in I_t} |R(s)|\, r(s) + \frac{1}{4} \right]. \tag{1.33}$$

Con respecto a la segunda integral de (1.30), de la condición **(H3)** tenemos,

$$\begin{aligned} I_3^{(2)} &\leq cr(t) \int_t^{\infty} \|\Phi(t-r(t),s) P_2(s) R(s) \Delta Z(s)\| ds \\ &\leq cr(t) K \int_t^{\infty} |R(s)| \left| \exp \int_s^{t-r(t)} \lambda_0(u) du \right| \|\Delta Z(s)\| ds \\ &\leq Kcq(t) r(t) \int_t^{\infty} |R(s)| \varphi(t) q(s)^{-1} \|\Delta Z(s)\| ds. \end{aligned}$$

Como $t \geq t_1$, de (ii) para $Z(t)$ se cumple que

$$I_3^{(2)} \leq K^2 cLq(t) r(t) e^m \int_{t_1}^{\infty} |R(s)| r(s) ds. \tag{1.34}$$

Elegimos un t_0 apropiado tal que la suma de los términos entre paréntesis de los lados derechos de (1.33) y (1.34) sea menor o igual a $1/3$, y por lo tanto

$$\|J_3(t) - J_3(t-r(t))\| \leq KLq(t) r(t) \frac{1}{3}. \tag{1.35}$$

De (1.22), (1.29), y (1.35) obtenemos:

$$q(t)^{-1} \|\Delta MZ(t)\| \leq q(t)^{-1} \textstyle\sum_{i=1}^{3} \|J_i(t) - J_i(t-r(t))\| \leq LKr(t),$$

para todo $t \geq t_0$, así $MZ(t)$ satisface (iii), y por lo tanto $M(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$.

b) M es continua en la c-topología.
Como $\mathcal{C}$ es metrizable, basta probar que M es secuencialmente continua. Sea $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathcal{S}$ tal que $Z_n \longrightarrow Z$ uniformemente en cada subconjunto compacto de $[\tau, \infty)$. Sea K un compacto de $[\tau, \infty)$, vamos a considerar los siguientes casos :

i) $K \subseteq [\tau, t_0]$

ii) $K \cap [\tau, t_0] \neq \emptyset$ y $K \cap [t_0, \infty) \neq \emptyset$

iii) $K \cap [\tau, t_0] = \emptyset$

En el caso **i)**, para todo $t \in K$, por definición,

$$\|MZ_n(t) - MZ(t)\| = \|g(t) - g(t)\| = 0,$$

luego no hay nada que probar. Si $K \cap [\tau, t_0] \neq \emptyset$ y $K \cap [t_0, \infty) \neq \emptyset$ podemos escribir

$$K = \Xi + \overline{V},$$

donde $\Xi = K \cap [\tau, t_0]$ y $V = K - [\tau, t_0]$. Ξ y $\overline{V}$ son compactos de $[\tau, \infty)$ y si $t \in \Xi$

$$\|MZ_n(t) - MZ(t)\| = 0,$$

luego

$$\|MZ_n - MZ\|_K = \|MZ_n - MZ\|_{\overline{V}}.$$

Así sólo consideramos el caso **iii**). Entonces suponemos que $K \cap [\tau, t_0] = \emptyset$. Existe una constante $a \geq t_0$ tal que $K \subset [t_0, a]$, y para todo $t \in K$,

$$\begin{aligned}
\|MZ_n(t) - MZ(t)\| &\leq \|\int_{t_0}^{t} \Phi(t,s) P_1(s) R(s) (\Delta Z_n(s) - \Delta Z(s)) ds\| \\
&\quad + \|\int_{t}^{\infty} \Phi(t,s) P_2(s) R(s) (\Delta Z_n(s) - \Delta Z(s)) ds\| \\
&\leq K \int_{t_0}^{a} h(t,s) q(s)^{-1} q(t) |R(s)| \|\Delta Z_n(s) - \Delta Z(s)\| ds \\
&\quad + q(t) K \int_{t}^{\infty} q(s)^{-1} |R(s)| \|\Delta Z_n(s) - \Delta Z(s)\| ds. \\
&= I_n(t) + J_n(t). \qquad (1.36)
\end{aligned}$$

En este caso $I_n(t)$ y $J_n(t)$ son las dos integrales en la última desigualdad.

Podemos escribir,

$$\|\Delta Z_n(s) - \Delta Z(s)\| \leq \|Z_n(s) - Z(s)\| + \|Z_n(s - r(s)) - Z(s - r(s))\|.$$

Realizando cálculos análogos a los que hicimos para mayorar $\|\Delta Y(t)\|$, con respecto a la primera integral $I_n(t)$ de (1.36), puesto que $Z_n \to Z$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N_1 = N_1(\varepsilon)$ tal que

$$I_n(t) \leq$$

$$2KN \sup_{t\in[t_0,a]} \left| e^{\int_{t_0}^{t} \lambda_0(u) du} \right| \sup_{s\in[t_0,a]} \left| e^{-\int_{t_0}^{s} \lambda_0(u) du} \right| |R(s)| (a - t_0) \|Z_n - Z\|_{[\tau,a]}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (1.37)$$

para todo $n \geq N_1$. Para la segunda integral $J_n(t)$ denotemos por

$$H_n(t) = q(t)^{-1} |R(t)| \|\Delta Z_n(t) - \Delta Z(t)\|.$$

Notemos que si $t \leq t_1$,

$$\int_t^{\infty} H_n(s) ds = \int_t^{t_1} H_n(s) ds + \int_{t_1}^{\infty} H_n(s) ds$$

y

$$\int_t^{t_1} H_n(s)\,ds \leq \int_{t_0}^{t_1} H_n(s)\,ds \leq \sup_{s\in[t_0,t_1]} q(s)^{-1}|R(s)|\,\|\Delta Z_n - \Delta Z\|_{[\tau,t_1]} r(t_1)\,.$$

Si $n \to \infty$ esta integral tiende a cero. Entonces vamos a suponer que $t \geq t_1$. En este caso,

$$H_n(t) \leq q(t)^{-1}|R(t)|\left(\|Z_n(t-r(t)) - Z(t-r(t))\| + \|Z_n(t) - Z(t)\|\right).$$

Como $Z_n \to Z$ uniformemente en compactos cuando $n \to \infty$, entonces $\|Z_n(t) - Z(t)\| \to 0$ si $n \to \infty$, luego $H_n(t) \to 0$ para cada $t \geq t_1$. Así tenemos convergencia puntual de $H_n(t)$. Por otra parte, de la condición (iii) para $Z(t)$ en $\mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} H_n(t) &\leq q(t)^{-1}|R(t)|\,\|\Delta Z_n(t)\| + q(t)^{-1}|R(t)|\,\|\Delta Z(t)\| \\ &\leq 2KL\,|R(t)|\,r(t)\,, \end{aligned}$$

y

$$\int_t^{\infty} H_n(s)\,ds \leq \int_{t_0}^{\infty} H_n(s)\,ds.$$

De la condición (1.14) resulta que $\{H_n\}_{n\geq 1}$ está dominada por una función en $L^1[t_0,\infty)$ y por el Teorema de la convergencia dominada resulta que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{\infty} H_n(s)\,ds = 0.$$

Por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tal que

$$K\sup_{t\in[t_0,a]}\left|\exp\int_{t_0}^{t}\lambda_0(u)\,du\right|\int_{t_0}^{\infty} q(s)^{-1}|R(s)|\,\|\Delta Z_n(s) - \Delta Z(s)\|ds < \tfrac{\varepsilon}{2},$$

para todo $n \geq N_2$. Así para $\varepsilon > 0$ tomamos $N = \max\{N_1, N_2\}$ y tenemos :

$$\|MZ_n(t) - MZ(t)\| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n \geq N,$$

luego M es continuo en $\mathcal{S}$.

c) Vamos a probar que $M(\mathcal{S})$ es relativamente compacto en $\mathcal{S}$.

Como $\mathcal{C}$ es metrizable, basta demostrar que $M(\mathcal{S})$ es relativamente secuencialmente compacto. Sea $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en $M(\mathcal{S})$. Vamos a probar que $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente en cada subintervalo compacto de $[\tau,\infty)$. Para esto usaremos el Teorema de Arzelá-Ascoli enunciado al comienzo del capítulo. Debemos probar que $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ es equicontinua y que para todo $t \geq t_0$ $\{Y_n(t)\}_{n\geq 1}$ es relativamente compacto en E.

■ $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ es equicontinua.

Cada Y_n es continua en $[\tau,\infty)$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(t',\varepsilon,n)$ tal que si

$$|t-t'|<\delta \qquad \text{entonces} \qquad |Y_n(t)-Y_n(t')|<\varepsilon.$$

Vamos a probar que $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ es equicontinua en cada subintervalo compacto de $[t_0,a]$. Sea $t\in K\subset[t_0,a]$, para cada n tenemos

$$\begin{aligned}
\|Y_n(t)-Y_n(t')\| &\leq \|\left(\exp\int_{t_0}^{t}\lambda_0(u)\,du-\exp\int_{t_0}^{t'}\lambda_0(u)\,du\right)\hat{e}\| \\
&+\|\int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)P_1(s)R(s)\Delta Z_n(s)\,ds-\int_{t_0}^{t'}\Phi(t',s)P_1(s)R(s)\Delta Z_n(s)\,ds\| \\
&+\|\int_{t}^{\infty}\Phi(t,s)P_2(s)R(s)\Delta Z_n(s)\,ds-\int_{t'}^{\infty}\Phi(t',s)P_2(s)R(s)\Delta Z_n(s)\,ds\| \\
&=\sum_{i=1}^{3}\|J_n^{(i)}(t)-J_n^{(i)}(t')\|. \qquad (1.38)
\end{aligned}$$

Sin perder generalidad podemos suponer que $t'<t$. Para el primer término de (1.38),

$$\begin{aligned}
\|J_n^{(1)}(t)-J_n^{(1)}(t')\| &\leq c\,|t-t'|\left|\exp\int_{t_0}^{t}\lambda_0(u)\,du\right| \\
&\leq c\sup_{t\in[t_0,a]}\left|\exp\int_{t_0}^{t}\lambda_0(u)\,du\right||t-t'| \\
&= c\|q\|_{[t_0,a]}\,|t-t'|. \qquad (1.39)
\end{aligned}$$

Para el segundo término,

$$\begin{aligned}
&\|J_n^{(2)}(t)-J_n^{(2)}(t')\|\leq \\
&c\,|t-t'|\int_{t_0}^{t'}\|\Phi(t',s)P_1(s)R(s)\Delta Z_n(s)\|ds \\
&+K\int_{t'}^{t}h(t,s)\left|\exp\int_{s}^{t}\lambda_0(u)\,du\right||R(s)|\,\|\Delta Z_n(s)\|ds. \qquad (1.40)
\end{aligned}$$

Ahora vamos a considerar dos casos:

Caso 1: Si $t'<t\leq t_1$

$$\|J_n^{(2)}(t)-J_n^{(2)}(t')\|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \ c\,|t-t'|\,K\int_{t_0}^{t'} h\,(t',s)\left|\exp\int_{s}^{t'}\lambda_0\,(u)\,du\right|\,|R\,(s)|\,\|\Delta Z_n\,(s)\,\|ds \\
&\quad +KNL\,(1+e^m)\,q\,(t)\int_{t'}^{t}|R\,(s)|\,ds \\
&\leq \ cKN\,|t-t'|\,L\,(1+e^m)\,q\,(t')\int_{t_0}^{t_1}|R\,(s)|\,ds \\
&\quad +KNL\|q\|_{[t_0,t_1]}\,(1+e^m)\,\mathrm{sup}_{s\in[t',t]}\,|R\,(s)|\,(t-t') \\
&\leq \ \|q\|_{[t_0,t_1]}LcKN\,|t-t'|\,\mathrm{sup}_{s\in[t_0,t_1]}\,|R\,(s)|\,(1+e^m)\,r\,(t_1) \\
&\quad +\|q\|_{[t_0,t_1]}KNL\,(1+e^m)\,\mathrm{sup}_{s\in[t_0,t_1]}\,|R\,(s)|\,|t-t'|\,.
\end{aligned}
$$

De (1.12) deducimos que:

$$
\leq |t-t'|\,\|q\|_{[t_0,t_1]}LKN\,[cr\,(t_1)+1]\,. \tag{1.41}
$$

Caso 2: Si $t_1 \leq t' < t$, entonces

$$
\|J_n^{(2)}\,(t)-J_n^{(2)}\,(t')\,\| \leq
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad c\,|t-t'|\left[KNL\,(1+e^m)\,q\,(t')\int_{t_0}^{t_1}|R\,(s)|\,ds\right. \\
&\quad \left.+\,LNK^2q\,(t')\int_{t_1}^{t'}|R\,(s)|\,r\,(s)\,ds\right] \\
&\quad +LK^2Nq\,(t)\int_{t'}^{t}|R\,(s)|\,r\,(s)\,ds \\
&\leq \ c\,|t-t'|\,\left[KN\|q\|_{[t_0,t_1]}L\,(1+e^m)\,\mathrm{sup}_{s\in[t_0,t_1]}\,|R\,(s)|\,r\,(t_1)\right. \\
&\quad \left.+\,LNK^2\|q\|_{[t_1,t']}\int_{t_1}^{t'}|R\,(s)|\,r\,(s)\,ds\right] \\
&\quad +LK^2N\,|t-t'|\,\|q\|_{[t',t]}\mathrm{sup}_{s\in[t',t]}\,|R\,(s)|\,r\,(s) \\
&\leq \ |t-t'|\,\left[cKN\|q\|_{[t_0,t_1]}L\,(1+e^m)\,\mathrm{sup}_{s\in[t_0,t_1]}\,|R\,(s)|\,r\,(t_1)\right. \\
&\quad \left.+cLNK^2\|q\|_{[t_0,a]}\int_{t_1}^{a}|R\,(s)|\,r\,(s)\,ds\right] \\
&\quad +LK^2N\|q\|_{[t_0,a]}\mathrm{sup}_{s\in[t_1,a]}\,|R\,(s)|\,r\,(s)\,|t-t'|\,.
\end{aligned} \tag{1.42}
$$

De (1.12) tenemos :

$$
\begin{aligned}
&\leq \ |t-t'|\,\left[cKN\|q\|_{[t_0,t_1]}Lr\,(t_1)+LK^2N\|q\|_{[t_0,a]}c\int_{t_1}^{a}|R\,(s)|\,r\,(s)\,ds\right. \\
&\quad \left.+LK^2N\|q\|_{[t_0,a]}\mathrm{sup}_{s\in[t_1,a]}\,|R\,(s)|\,r\,(s)\right]\,.
\end{aligned} \tag{1.43}
$$

Entonces de (1.41) y (1.42) obtenemos,

$$\begin{aligned}
&\|J_n^{(2)}(t) - J_n^{(2)}(t')\| \leq \\
&|t-t'|\, KN\|q\|_{[t_0,t_1]} L\left[r(t_1)\, c + cK\int_{t_1}^{a} |R(s)|\, r(s)\, ds\right. \\
&\left. +K\sup_{s\in[t_1,a]} |R(s)|\, r(s)\right]. \qquad (1.44)
\end{aligned}$$

Para el tercer término de la suma en (1.38)

$$\begin{aligned}
&\|J_n^{(3)}(t) - J_n^{(3)}(t')\| \leq \\
& c\,|t-t'| \int_{t'}^{\infty} \|\Phi(t',s)\, P_2(s)\, R(s)\, \Delta Z_n(s)\|ds \\
& +K\int_{t'}^{t} \left|\exp\int_s^t \lambda_0(u)\, du\right| |R(s)|\, \|\Delta Z_n(s)\|ds \\
\leq\;& cK\,|t-t'| \int_{t'}^{\infty} \left|\exp\int_s^{t'} \lambda_0(u)\, du\right| |R(s)|\, \|\Delta Z_n(s)\|ds \\
& +K\int_{t'}^{t} \left|\exp\int_s^t \lambda_0(u)\, du\right| |R(s)|\, \|\Delta Z_n(s)\|ds.
\end{aligned}$$

Caso 1: Si $t' < t < t_1$,

$$\begin{aligned}
\leq\;& c\,|t-t'|\, \left[KL(1+e^m)\,\|q\|_{[t_0,t_1]}\sup_{s\in[t_0,t_1]} |R(s)|\, r(t_1)\right. \\
& \left. +LK^2\|q\|_{[t_0,t_1]}\int_{t_1}^{\infty} |R(s)|\, r(s)\, ds\right] \\
& +K\|q\|_{[t_0,t_1]} L(1+e^m)\sup_{s\in[t_0,t_1]} |R(s)|\, |t-t'| \\
\leq\;& |t-t'|\, KL\|q\|_{[t_0,t_1]}\left[cr(t_1) + cK\int_{t_1}^{\infty} |R(s)|\, r(s)\, ds + 1\right]. \qquad (1.45)
\end{aligned}$$

Caso 2: Si $t_1 \leq t' < t$,

$$\begin{aligned}
\|J_n^{(3)}(t) - J_n^{(3)}(t')\| \;\leq\;& c\,|t-t'|\, K^2\|q\|_{[t_0,a]} L\int_{t_1}^{\infty} |R(s)|\, r(s)\, ds \\
& +K^2 L\int_{t'}^{t} q(t)\, |R(s)|\, r(s)\, ds \\
\leq\;& c\,|t-t'|\, K^2\|q\|_{[t_0,a]} L\int_{t_1}^{\infty} |R(s)|\, r(s)\, ds \\
& +K^2 L\|q\|_{[t_0,a]}\sup_{s\in[t_0,a]} |R(s)|\, r(s)\, |t-t'|
\end{aligned}$$

$$= |t - t'|\, K \|q\|_{[t_0,a]} L \left[Kc \int_{t_1}^{\infty} |R(s)|\, r(s)\, ds + K \sup_{s\in[t_0,a]} |R(s)|\, r(s) \right]. \qquad (1.46)$$

De (1.45) y (1.46), tenemos que para todo t, t',

$$\| J_n^{(3)}(t) - J_n^{(3)}(t') \| \leq$$
$$|t - t'|\, K \|q\|_{[t_0,a]} L \left[cr(t_1) + 1 + cK \int_{t_1}^{\infty} |R(s)|\, r(s)\, ds \right.$$
$$\left. + K \sup_{s\in[t_0,a]} |R(s)|\, r(s) \right]. \qquad (1.47)$$

Las estimaciones obtenidas en (1.39), (1.44) y (1.47) no dependen de n, y si denotamos por

$$N(a) = \tfrac{c}{KL} + (1+N)\left(cr(t_1) + \int_{t_0}^{\infty} |R(s)|\, r(s)\, ds \right) + 2K \sup_{s\in[t_0,a]} |R(s)|\, r(s),$$

dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{N(a)\|q\|_{[t_0,a]} KL}$, de tal modo que si

$$|t - t'| < \delta, \text{ se cumple que } |Y_n(t) - Y_n(t')| < \varepsilon,$$

para todo $n \geq 1$. Por lo tanto $\{Y_n(t)\}_{n\geq 1}$ es equicontinua en K para todo K compacto de $[t_0, \infty)$. Por otra parte si escribimos

$$K = (K \cap [\tau, t_0]) \cup (K \cap [t_0, \infty)),$$

y si $t \in K \cap [\tau, t_0]$, $Y_n(t) = g(t)$ para cada n y como $g(t)$ es continua, por lo tanto $\{Y_n(t)\}_{n\geq 1}$ es equicontinua en K.

■ $\{Y_n(t)\}_{n\geq 1}$ es relativamente compacto en E, para cada $t \in [t_0, \infty)$.

Denotaremos por $B[0, \nu]$ la bola cerrada en E de centro 0 y radio ν. De la condición ii) para $Z_n(s)$ dada en la Definición 5, tenemos que para cada $s \geq t_0$, $Z_n(s) \in B[0, q(s)L]$ y puesto que $R(s)$ es compacto, $R(s)(B[0, q(s)L])$ es relativamente compacto en E, entonces la sucesión $\{R(s)Z_n(s)\}_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente en E, $\{R(s)Z_{n_k}(s)\}_{k\geq 1}$. Por otra parte $Z_{n_k}(s - r(s)) \in B[0, q(s - r(s))L]$ y por lo tanto la sucesión $\{R(s)Z_{n_k}(s - r(s))\}_{k\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente en E, $\{R(s)Z_{m_l}(s - r(s))\}_{l\geq 1}$. De aquí que la sucesión $\{R(s)\Delta Z_{m_l}(s)\}_{l\geq 1}$ es convergente en E.

Como los operadores $\Phi(t,s)P_1(s)$ y $\Phi(t,s)P_2(s)$ son continuos para todo $t \geq s$ y $s \geq t$ respectivamente, las sucesiones $\{\Phi(t,s)P_1(s)R(s)\Delta Z_{m_l}(s)\}_{l\geq 1}$ y $\{\Phi(t,s)P_2(s)R(s)\Delta Z_{m_l}(s)\}_{l\geq 1}$ convergen en E cuando $l \to \infty$.

Consideremos ahora la subsucesión de $\{Y_n(t)\}_{n\geq 1}$ dada por:

$$\begin{aligned} Y_{m_l}(s) \;&=\; \Phi(t,t_0)\hat{e} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)P_1(s)R(s)\Delta Z_{m_l}(s)ds \\ &\quad - \int_{t}^{\infty} \Phi(t,s)P_2(s)R(s)\Delta Z_{m_l}(s)ds. \end{aligned}$$

Para cada t fijo denotemos por

$$F_{m_l}(s) = \|\Phi(t,s)P_1(s)R(s)\Delta Z_{m_l}(s)\| \ \text{ si } \ t \geq s,$$

y por

$$G_{m_l}(s) = \|\Phi(t,s)P_2(s)R(s)\Delta Z_{m_l}(s)\| \ \text{ si } \ s \geq t.$$

Si $t \in [t_0, t_1]$, de (1.5) y las condiciones de ΔZ_n dadas en la Definición 5, tenemos:

$$F_{m_l}(s) \leq K\tilde{N}Lq(t)\,|R(s)|\,.$$

Si $s \in [t_1, \infty)$ y puesto que $t \geq s$, entonces:

$$F_{m_l}(s) \leq K^2\tilde{N}Lq(t)\,|R(s)|\,r(s).$$

Definamos la función

$$F(s) = \begin{cases} K\tilde{N}Lq(t)\,|R(s)| & \text{si } \ s \in [t_0, t_1] \\ \\ K^2\tilde{N}Lq(t)\,|R(s)|\,r(s) & \text{si } \ s \in (t_1, \infty) \end{cases}$$

Entonces $F_{m_l}(s) \leq F(s)$ para todo m_l y para cada $s \geq t_0$, y de las condicióнes (1.12) y (1.13) tenemos que $F(\cdot)$ pertenece a $L^1[t_0, \infty)$. Por otra parte, si $s \in [t_0, t_1]$,

$$G_{m_l}(s) \leq KL(1+e^m)q(t)\,|R(s)|\,,$$

y si $s \geq t_1$

$$G_{m_l}(s) \leq K^2L\tilde{N}q(t)\,|R(s)|\,r(s).$$

Definamos la función:

$$G(s) = \begin{cases} KLq(t)(1+e^m)\,|R(s)| & \text{si } \ s \in [t_0, t_1] \\ \\ K^2\tilde{N}Lq(t)\,|R(s)|\,r(s) & \text{si } \ s \in (t_1, \infty) \end{cases}$$

Tenemos que $G_{m_l}(s) \leq G(s)$ para todo $m_l \geq 1$ y en cada $s \geq t_0$, y $G(\cdot) \in L^1[t_0, \infty)$. Podemos aplicar el Teorema de la convergencia dominada para funciones en espacios de Banach (ver [46]), y por lo tanto las integrales

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)P_1(s)R(s)\Delta Z_{m_l}(s)ds \ \text{ y } \ \int_{t}^{\infty} \Phi(t,s)P_2(s)R(s)\Delta Z_{m_l}(s)ds$$

son convergentes, de donde concluímos que $\{Y_{m_l}(t)\}_{m_l \geq 1}$ es convergente, y por lo tanto $\{Y_n(t)\}_{n \geq 1}$ tiene clausura compacta para cada $t \geq t_0$. Aplicando el Teorema de Arzelá-Ascoli concluímos que la sucesión $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ tiene una subsucesión $\{Y_{m_l}\}_{m_l \geq 1}$ que converge puntualmente en $[t_0, \infty)$ y uniformemente en subconjuntos compactos de $[t_0, \infty)$. Por lo tanto toda sucesión en $\overline{M(\mathcal{S})}$ tiene una subsucesión convergente y como $\overline{M(\mathcal{S})}$ es cerrado, deducimos que es compacto. Por lo tanto M tiene un punto fijo en $\mathcal{S}$.

Sea Z en $\mathcal{S}$ tal que $MZ = Z$, entonces Z es una solución débil del sistema (1.1) definida para $t \geq t_0$, tal que $Z(t) = g(t)$ para $t \in [\tau, t_0]$ y Z satisface

$$q(t)^{-1}\|Z(t)\| \leq L,$$

si $t \geq \tau$. Por otra parte, para cada $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\lambda_0(u)\,du\right)Z(t) &= \\
\widehat{e} + \exp\left(-\int_{t_0}^{t}\lambda_0(u)\,du\right)&\int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)P_1(s)R(s)\Delta Z(s)\,ds \\
-\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\lambda_0(u)\,du\right)&\int_{t}^{\infty}\Phi(t,s)P_2(s)R(s)\Delta Z(s)\,ds \\
&= \widehat{e} + I_1(t) - I_2(t).
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Con respecto a la primera integral de (1.48) tenemos que,

$$\begin{aligned}
\|I_1(t)\| &\leq \left|\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\lambda_0(u)\,du\right)\right|\int_{t_0}^{t}\|\Phi(t,s)P_1(s)\|\,|R(s)|\,\|\Delta Z(s)\|ds \\
&\leq K\int_{t_0}^{t}h(t,s)\left|\exp\left(\int_{s}^{t}\lambda_0(u)\,du\right)\right|\left|\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\lambda_0(u)\,du\right)\right||R(s)|\,\|\Delta Z(s)\|ds \\
&\leq K\int_{t_0}^{t}h(t,s)\left|\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\lambda_0(u)\,du\right)\right||R(s)|\,\|\Delta Z(s)\|ds \\
&\leq K\int_{t_0}^{t_1}h(t,s)\,|R(s)|\,q(s)^{-1}\left(\|Z(s)\| + \|Z(s-r(s))\|\right)ds \\
&\quad +K\int_{t_1}^{t}h(t,s)\,|R(s)|\,q(s)^{-1}\|\Delta Z(s)\|ds
\end{aligned}$$

$$\leq 2LKN(1+e^{m})\,h(t,t_1)\int_{t_0}^{t_1}|R(s)|\,ds + K^2LN\int_{t_0}^{t}|R(s)|\,r(s)\,ds. \tag{1.49}$$

Como $h(t,t_1) \to 0$ si $t \to \infty$, esta última expresión tiende a cero. Luego para cada $\varepsilon > 0$ podemos elegir un t_0 suficientemente grande tal que

$$\|I_1(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.50}$$

para $t \geq t_0$. Por otra parte :

$$\begin{aligned}
\|I_2(t)\| &\leq \left|\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\lambda_0(u)\,du\right)\right|\int_{t}^{\infty}\|\Phi(t,s)P_2(s)\|\,|R(s)|\,\|\Delta Z(s)\|\,ds \\
&\leq K\int_{t}^{\infty}|R(s)|\,q(s)^{-1}\|\Delta Z(s)\|ds \\
&\leq K^2L\int_{t_1}^{\infty}|R(s)|\,r(s)\,ds,
\end{aligned}$$

entonces para $t \geq t_0$,

$$\|I_2(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.51}$$

Así de (1.50) y (1.51) tenemos que,

$$\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \lambda_0(u)\,du\right) Z(t) = \widehat{e} + o(1).$$

Y por lo tanto

$$Z(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda_0(u)\,du\right) \cdot (\widehat{e} + o(1)),$$

si $t \to \infty$ que es lo que queríamos demostrar.

Lema 1 *Sea $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ el conjunto dado en la Definición 5, entonces $\mathcal{S}$ es convexo, cerrado y acotado en $\mathcal{C}$.*

Su demostración es sencilla y directa por lo que será omitida (ver [14]).

1.2 Ejemplos y aplicaciones.

En esta sección veremos aplicado el Teorema 1, demostrado en la sección anterior en dos situaciones distintas. En la primera parte estudiaremos el caso en que el operador $A(t)$ es constante e igual a un operador A acotado para todo t y el C_0-semigrupo genedo por A está dotado de una λ_0-tricotomía ordinaria con proyecciones fijas y λ_0 es constante. Finalizamos el capítulo viendo un ejemplo que muestra la necesidad de que el retardo $r(t)$ sea acotado para garantizar el comportamiento asintótico de las soluciones en la ecuación (1.2).

1.2.1 El caso $A(t)$ constante.

Supongamos que en la ecuación (1.2) $A(t) = A$ para todo t y que A es un operador lineal y acotado en E. En este caso podemos definir la familia de operadores,

$$T(t) = \exp tA = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{t!}, \tag{1.52}$$

donde la convergencia de esta serie tiene lugar en $\mathcal{B}(E)$. La familia de operadores $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ forma un C_0-semigrupo y A es su generador infinitesimal, esto es $A = \dot{T}(0)$. Las funciones $t \to T(t)$ y $t \to T(t)X$ están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ y $X \in E$, y son diferenciables. La función $X(t) = T(t-s)X_s$ es la única solución del problema de valores iniciales (o problema de Cauchy abstracto):

$$\begin{aligned} X'(t) &= AX(t), \qquad \text{para } t \geq s \\ X(s) &= X_s, \end{aligned} \tag{1.53}$$

(ver por ejemplo [20], [27], [39]). Consideremos ahora la E-ecuación abstacta con retardo,

$$Z'(t) = AZ(t) + R(t)\Delta Z(t), \tag{1.54}$$

para la que tenemos el siguiente resultado:

Corolario 1 *Supongamos que A es un operador lineal acotado en E, y que para algún $t_0 \geq 0$ el operador $R(s) : E \to E$ es compacto para todo $s \geq t_0$ y se satisfacen las condiciones (1.12) y (1.13). Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ el C_0-semigrupo generado por A. Si la función $r(t)$ tiende a 0 cuando $t \to \infty$, y se satisface la hipótesis de λ_0-tricotomía:*

(H2)' *Existen proyecciones acotadas $P_i \in \mathcal{B}(E)$ $(i = 0, 1, 2)$, complementarias, tales que $ImP_0 = \langle \hat{e} \rangle$ (donde $\hat{e}$ es un vector unitario en E) y hay constantes $K > 0$ y $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, tales que,*

a) $P_1 T(t) = T(t) P_1.$

b) $|T(t-s) P_1| \leq Kh(t-s) \left| e^{\lambda_0 (t-s)} \right|$, *para todo $t \geq s$ y $\{h(t-s)\}_{t\geq s}$ es una familia de funciones a valores reales, tal que $h(t-s) \to 0$ si $t \to \infty$ para cada s, y $h(t-s) = h(t-k) h(k-s)$ si $s \leq k \leq t$.*

c) $T(t) \hat{e} = \hat{e} e^{\lambda_0 t}.$

d) $T(t) : P_2 E \longrightarrow P_2 E$ *satisface* $|T(t-s) P_2| \leq K \left| e^{\lambda_0 (t-s)} \right|$, *para $s \geq t$.*

Entonces existe una solución Z_0 del sistema (1.54) definida en un intervalo $[t_0, \infty)$ que satisface la estimación:

$$\left| e^{-\lambda_0 (t-t_0)} \right| \| Z_0(t) \| \leq L,$$

siendo $L > 0$ una constante, para $t \geq t_0$, t_0 suficientemente grande y se cumple además la fórmula asintótica

$$Z_0(t) = e^{\lambda_0 (t-t_0)} (\hat{e} + o(1)).$$

Demostración: Para aplicar el Teorema 1 a la ecuación (1.54) tomamos $A(t) = A$, para todo t. Podemos definir la familia de operadores lineales en dos parámetros $\Phi(t,s) X := T(t-s) X$ para cada $X \in E$ y obtenemos un operador de Cauchy para el sistema autónomo (1.53). Como $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0- semigrupo en E, se puede verificar directamente que $\Phi(t,s)$ satisface la condición **(H3)**. Más aún, cuando A es acotado, las condiciones **(H1)** y **(H3)** son equivalentes. Si definimos la función $\lambda_0(t) = \lambda_0$ para todo t, como $r(t) \leq 1$, vemos que la condición **(H4)** se cumple tomando $m = 1$, luego sólo debemos comprobar la hipótesis **(H2)**. Como $T(t)$ satisface **(H2)'**, tomamos la familia de proyecciones en E,

$$P_i(t) = T(t) P_i T(t)^{-1},$$

para $i = 1, 2$ y $t \geq t_0$. Claramente $P(t)^2 = P(t)$ y $|P(t)|$ es acotada en cada t. Además $P_0 T(t) = T(t) P_0$, ya que

$$\begin{aligned} P_0 T(t) &= P_0 T(t)(P_0 + P_1 + P_2) \\ &= P_0 T(t) P_0 + P_0 T(t) P_1 + P_0 T(t) P_2 \\ &= P_0 T(t) P_0 = (I - P_1 - P_2) T(t) P_0 = T(t) P_0. \end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado **(H2)'**- a) y d). Por otra parte,

$$P_1(t) + P_2(t) + P_0 = T(t)(P_1 + P_2 + P_0) T(t)^{-1} = I.$$

La hipótesis **(H2)**- c) se obtiene directamente reemplazando $\Phi(t,s)$ por $T(t-s)$ y usando **(H2)'**- c). Para verificar **(H2)**- a), notemos que de(**(H2)'**-a),

$$\begin{aligned} \Phi(t,s) P_1(s) &= T(t-s) T(s) P_1 T(s)^{-1} = T(t) P_1 T(s)^{-1} \\ &= P_1(t) T(t-s) = P_1(t) \Phi(t,s). \end{aligned}$$

Con repecto a las condiciones b):

$$\begin{aligned} |\Phi(t,s) P_1(s)| &= \left|T(t-s) T(s) P_1 T(s)^{-1}\right| = \left|T(t) P_1 T(s)^{-1}\right| \\ &= |T(t-s) P_1| \leq Kh(t-s) |\exp \lambda_0 (t-s)|. \end{aligned}$$

Con respecto a d), puesto que $T(t)$ es invertible para todo t,

$$\begin{aligned} T(t-s) P_2(s) &= T(t-s) T(s) P_2 T(s)^{-1} \\ &= T(t) P_2 T(t)^{-1} T(t-s) = P_2(t) T(t-s). \end{aligned}$$

De aquí que $\Phi(t,s) : P(s) E \longrightarrow P(t) E$. Tenemos que,

$$\begin{aligned} |\Phi(t,s) P_2(s)| &= \left|T(t-s) T(s) P_2 T(s)^{-1}\right| \\ &= \left|T(t) P_2 T(s)^{-1}\right| = |T(t-s) P_2| \leq K e^{\lambda_0 (t-s)}, \end{aligned}$$

para $s \geq t$. Por lo tanto se satisface **(H2)**, lo que demuestra el corolario.

Aplicando el Corolario 1 podemos demostrar el siguiente resultado:

Corolario 2 *Supongamos que A es un operador lineal compacto en E, con $|A| \leq \frac{1}{4^3}$. Si el C_0- semigrupo de operadores $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ cuyo generador infinitesimal es A satisface la condición* **(H2)'**, *la función $r \in L^1[t_0, \infty)$, y $r(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Entonces para la E-ecuación diferencial con retardo:*

$$Z'(t) = AZ(t - r(t)),$$

se obtienen los mismos resultados que en el Corolario 1.

Cerramos este capítulo viendo un ejemplo en el que mostramos que las condiciones de acotamiento e integrabilidad (1.12) y (1.14) respectivamente, no son suficientes para garantizar el comportamiento asintótico de las soluciones, ni aún para el caso en que $A(t)$ es constante.

1.2.2 Ejemplo r(t) no acotado.

Consideremos la ecuación escalar

$$z'(t) = az(t) + \frac{1}{t^2}(z(t) - z(t - \ln t)), \tag{1.55}$$

donde $a < -2$ es una constante. En este caso estamos tomando el espacio $E = \mathbb{C}$, $A(t) = a$, y $R(t) = 1/t^2$. Vamos a elegir el retardo $r(t) = \ln t$, no acotado. Notemos que $t - r(t) \geq 0$ y $t - r(t) \longrightarrow \infty$ si $\mathrm{t} \longrightarrow \infty$. La ecuación homogénea asociada a (1.55)

$$x'(t) = ax(t) \tag{1.56}$$

tiene solución única $x(t) = e^{at}x_0$ para cada x_0 en $\mathbb{C}$. Supongamos que z_0 es una solución de (1.55) tal que $z_0(t) \sim e^{at}$, es decir $z_0(t) = e^{at}(1 + \mathrm{o}(1))$ si tomamos $y(t) = e^{-at}z_0(t)$, entonces $y(t) \sim 1$. Derivando $y(t)$ obtenemos,

$$y'(t) = -ae^{-at}z_0(t) + e^{-at}z_0'(t),$$

luego $y(t)$ es solución de la ecuación:

$$y'(t) = \frac{1}{t^2}y(t) - t^{-a-2}y(t - \ln t), \tag{1.57}$$

de aquí que $y'(t)$ es continua en $(0, \infty)$ y ya que $y(t) \to 1$ si $t \to \infty$, tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} y'(t) = -\infty,$$

lo que nos lleva a una contradicción. Por lo tanto la ecuación (1.55) no puede tener soluciones asintóticas a las soluciones de $x'(t) = ax(t)$.

Notemos que la condición de integrabilidad (1.10) no es suficiente para garantizar que $z(t) \sim x(t)$.

Capítulo 2

Teorema de Hartman para sistemas con retardo en espacios de Banach

En este capítulo nos proponemos estudiar la existencia de soluciones débiles del sistema lineal con retardo

$$\begin{aligned} Z'(t) &= A(t)\,Z(t) + R(t)\,Z(t - r(t)), \text{ si } t \geq t_0. \\ Z(t) &= g(t), \text{ para } t \in [\tau, t_0] \end{aligned} \tag{2.1}$$

y su comportamiento asintótico. Suponiendo que $A(t) \in \mathcal{L}(D, E)$ para todo $t \geq t_0$, $R(\cdot) \in \mathcal{C}([t_0, \infty), \mathcal{B}(E))$ para algún $t_0 > 0$, $r(t) : [t_0, \infty) \to [0, 1]$ es continua y $r \in L^1[t_0, \infty)$. Para una función $\varrho(\cdot) \in L^p_{loc}([t_0, \infty), \mathbb{R})$, denotaremos por $\|\varrho\|_{p,[a,b]} = \left(\int_a^b |\varrho(u)|^p \, du\right)^{1/p}$. A través de todo este capítulo supondremos que la hipótesis **(H1)** (Capítulo 1) se satisface para el sistema lineal homogéneo (1.2) del Capítulo 1. Vamos a considerar las siguientes hipótesis:

(H5):

- Existen proyecciones $P_i(\cdot) \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathcal{B}(E))$ $(i = 1, 2)$ y una proyección constante P_0, con $ImP_0 = <\widehat{e}>, \widehat{e} \in D$, tales que las P_i son complementarias y acotadas como funciones de t. Además satisfacen

$$A(t)\,P_i(t) = P_i(t)\,A(t), \qquad i = 1, 2. \tag{2.2}$$

- Existe una función localmente integrable $\lambda_0 : [t_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que,

$$A(t)\,\widehat{e} = \lambda_0(t)\,\widehat{e}, \tag{2.3}$$

  es decir, $\lambda_0(t)$ pertenece al espectro puntual $\sigma_p(A(t))$ de $A(t)$ y $\widehat{e}$ es un vector propio común para todo t.

- Si $\Phi(t,s)$ es una familia de evolución que resuelve la ecuación (1.2) supondremos que la restricción $\Phi(t,s)_| : P_2(s)E \longrightarrow P_2(t)E$ es invertible (en este caso para $s \geq t$ se define $\Phi(t,s)_| = \Phi(s,t)^{-1}$) y que existen constantes α y $K > 0$ tal que

$$|\Phi(t,s)P_1(s)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}\left|\exp\int_s^t \lambda_0(u)du\right|, \text{si } t \geq s \geq \sigma, \tag{2.4}$$

$$|\Phi(t,s)P_2(s)| \leq Ke^{-\alpha(s-t)}\left|\exp\int_s^t \lambda_0(u)du\right|, \text{para } s \geq t \geq \sigma. \tag{2.5}$$

(H6) $|R(\cdot)| \in L^p[\sigma,\infty)$, para algún $1 < p \leq 2$. Con respecto a la condición (2.4) y (2.5) tenemos la siguiente definición:

Definición 6 *Diremos que la ecuación (1.2) posee una λ_0-tricotomía exponencial si se satisface la condición **(H5)**. Si las proyecciones $P_i(t)$ son independientes de t, diremos que posee una λ_0-tricotomía exponencial con proyecciones fijas. Si $\lambda_0 = 0$, hablaremos simplemente de una tricotomía exponencial.*

De **(H6)** y dado que $ImP_0 =< \widehat{e} >$, hay una función $r_0 \in L^p[\sigma,\infty)$ tal que

$$P_0R(t)\widehat{e} = r_0(t)\widehat{e}. \tag{2.6}$$

De la hipótesis **(H1)** y de (2.3), deducimos que

$$X_0(t) := \exp(\textstyle\int_{t_0}^t \lambda_0(u)du)\widehat{e} = \Phi(t,t_0)\widehat{e}$$

es la única solución de la ecuación (1.2) que satisface $X_0(t_0) = \widehat{e}$.

Vamos a escribir la ecuación (2.1) en la forma

$$Z'(t) = (A(t) + R_0(t))Z(t) - R_0(t)\Delta Z(t) + \widehat{R}(t)Z(t - r(t)), \tag{2.7}$$

donde $R_0(t) = P_0R(t)$ y $\widehat{R}(t) = R(t) - R_0(t)$. El sistema homogéneo que asociamos a la ecuación (2.7) ès:

$$Y'(t) = (A(t) + R_0(t))Y(t). \tag{2.8}$$

Para este sistema supondremos la siguiente hipótesis:

(H7): Existe una familia de evolución $\{U(t,s)\}_{t\geq s}$ que resuelve la ecuación (2.8) tal que:

- Para todo $X \in E$ y $t \geq s$ se satisface la fórmula de variación de parámetros,
$$U(t,s)X = \Phi(t,s)X + \int_s^t \Phi(t,u)R_0(u)U(u,s)Xdu. \tag{2.9}$$
- La restricción $U(t,s)_| : P_2(s)E \to P_2(t)E$ es invertible. En este caso definimos para $s \geq t$, $U(t,s) = U(s,t)_|^{-1}$.

Clement [8] y Rhandi [43], demostraron que cuando $A(t) = A$, bajo ciertas condiciones sobre la resolvente de A, existe una única familia de evolución $\{U(t,s)\}_{t\geq s}$ que resuelve la ecuación (2.8), y satisface la fórmula en (2.9).

En el siguiente lema veremos que la condición θ-Lipschitz del operador de Cauchy del sistema (1.2) dada en la Definición 2, se mantiene invariante bajo perturbaciones en L^p del operador $A(t)$.

Lema 2 *Supongamos que $\Phi(t,s)$ es el operador de Cauchy de la ecuación (1.2) y que $U(t,s)$ es una familia de evolución que satisface la hipótesis **(H7)**. Si existe un θ, $\frac{p-1}{p} \leq \theta \leq 1$ y una constante $c_1 > 0$, tal que para $0 < t-s \leq 1$,*

$$\|\Phi(t,s)X - X\| \leq c_1\|X\|(t-s)^\theta, \tag{2.10}$$

para todo $X \in E$. Entonces existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|U(t,s)X - X\| \leq c\|X\|(t-s)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{2.11}$$

Demostración: Para cada $X \in E$ y $0 < t-s \leq 1$, de (2.10) tenemos,

$$\begin{aligned}\|\Phi(t,s)X\| &\leq \|\Phi(t,s)X - X\| + \|X\| \\ &\leq c_1\|X\|(t-s)^\theta + \|X\| \\ &\leq (c_1+1)\|X\|.\end{aligned}$$

Por otra parte de la fórmula en (2.9),

$$\begin{aligned}\|U(t,s)X - X\| &\leq \|\Phi(t,s)X - X\| + \int_s^t \|\Phi(t,u)R_0(u)X\|du \\ &\quad + \int_s^t \|\Phi(t,u)R_0(u)(U(u,s)X - X)\|du \\ &\leq c_1\|X\|(t-s)^\theta + (c_1+1)\|X\|\int_s^t |R_0(u)|\,du \\ &\quad + (c_1+1)\int_s^t |R_0(u)|\,\|U(u,s)X - X\|du\end{aligned} \tag{2.12}$$

Con respecto a la primera integral de (2.12),

$$\begin{aligned}\int_s^t |R_0(u)|\,du &\leq \left(\int_s^t |R_0(u)|^p\,du\right)^{1/p}\left(\int_s^t du\right)^{\frac{p-1}{p}}\\ &\leq \|R_0\|_p (t-s)^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

Como $1 < p$ y $\frac{p-1}{p} \leq 1, (t-s)^{\theta} \leq (t-s)^{\frac{p-1}{p}}$, luego,

$$\begin{aligned}\|U(t,s)X - X\| &\leq \|X\|(t-s)^{\frac{p-1}{p}}(c_1 + (c_1+1)\|R_0\|_p)\\ &\quad + (c_1+1)\int_s^t |R_0(u)|\,\|U(u,s)X - X\|du.\end{aligned}$$

Si $c_p = c_1 + (c_1+1)\|R_0\|_p$, tenemos que,

$$\begin{aligned}\frac{\|U(t,s)X - X\|}{(t-s)^{\frac{p-1}{p}}} &\leq \|X\|c_p +\\ &\quad (c_1+1)\int_s^t |R_0(u)|\,\frac{\|U(u,s)X - X\|}{(u-s)^{\frac{p-1}{p}}}\left(\frac{u-s}{t-s}\right)^{\frac{p-1}{p}} du\end{aligned} \tag{2.13}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{\|U(t,s)X - X\|}{(t-s)^{\frac{p-1}{p}}} &\leq \|X\|c_p +\\ &\quad (c_1+1)\int_s^t |R_0(u)|\,\frac{\|U(u,s)X - X\|}{(u-s)^{\frac{p-1}{p}}}du.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Por otra parte tenemos que para $s \leq u \leq t, 0 < t-s \leq 1$

$$\begin{aligned}\int_u^t |R_0(\sigma)|\,d\sigma &\leq \int_s^t |R_0(\sigma)|\,d\sigma \leq \int_s^{s+1} |R_0(\sigma)|\,d\sigma\\ &\leq \left(\int_s^{s+1} |R_0(u)|^p\,d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_s^{s+1} du\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \|R_0\|_p.\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall (ver [23], Lema 3.1, pag. 15) en la desigualdad (2.14) obtenemos,

$$\frac{\|U(t,s)X - X\|}{(t-s)^{\frac{p-1}{p}}} \leq \|X\|c_p e^{(c+1)\|R_0\|_p}, \tag{2.15}$$

donde $c = c_p e^{(c_1+1)\|R_0\|_p}$, de (2.15) tenemos lo que queríamos.

Definición 7 *Diremos que una función* $Z = Z(\cdot, g) \in \mathcal{C}$ *es una solución débil de la ecuación (2.1) definida en* $[\tau, \infty)$ *con función inicial* $g \in \mathcal{C}([\tau, t_0], D)$*, tal que* $g(t_0) = \hat{e}$*, si* $Z(t) = g(t)$ *para* $t \in [\tau, t_0]$ *y satisface la ecuación integral,*

$$\begin{aligned} Z(t) &= U(t, t_0)\widehat{e} - \int_{t_0}^{t} U(t, s) R_0(s) \Delta Z(s)\, ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} U(t, s) P_1(s) \widehat{R}(s) Z(s - r(s)) ds \\ &- \int_{t}^{\infty} U(t, s) P_2(s) \widehat{R}(s) Z(s - r(s)) ds \end{aligned} \tag{2.16}$$

para $t \geq t_0$.

Vamos a probar que la ecuación (2.1) tiene una solución débil. Al igual que en el capítulo anterior lo haremos usando el Teorema del punto fijo de Schauder en el espacio $\mathcal{C}$. Pero antes debemos considerar algunos resultados que nos serán útiles y cuyas demostraciones pueden encontrarse en [6].

2.1 El teorema principal del capítulo.

En esta sección demostramos el resultado principal de este capítulo. Para ello necesitaremos establecer algunos hechos previos que pasamos a enunciar.

Lema 3 *Sea* $\varrho \in L^p([\sigma, \infty), \mathbb{R}^+)$, $p \geq 1$ *una función continua. Para* $t \geq 0$ *y* $\alpha > 0$ *sean*

$$\psi(t) = \int_0^t \varrho(s) e^{\frac{-\alpha}{2}(t-s)} ds \quad y \quad \zeta(t) = \int_t^\infty \varrho(s) e^{\frac{-\alpha}{2}(s-t)} ds.$$

Entonces,

i) $\psi(t) \to 0$ *y* $\zeta(t) \to 0$ *si* $t \to \infty$.

ii) $\psi(\cdot)$ *y* $\zeta(\cdot)$ *pertenecen a* L^q *si* $q \geq p$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lema 4 *Sean* $\zeta \in L^p[\sigma, \infty)$, $d > 1$ *y* $\alpha > 0$. *Entonces existe un* t_0 *suficientemente grande tal que, para* $t \geq s \geq t_0$, *se tiene*

$$\left| \exp \int_s^t \zeta(u) du \right| \leq d e^{\frac{\alpha}{2}(t-s)}.$$

En los siguientes lemas, estamos suponiendo que se satisfacen las condiciones **(H5)** y **(H6)**. Denotaremos por $\lambda = \lambda_0 + r_0$, y entonces $\lambda : [t_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ es localmente integrable.

Lema 5 *Sea $U(t,s)$ como en la hipótesis **(H7)**, entonces tenemos que*

$$U(t,s)\,P_0 = \exp(\int_s^t \lambda(u)du)P_0, \tag{2.17}$$

y para $i = 1, 2$, se satisface la ecuación

$$U(t,s)\,P_i(s) = \Phi(t,s)\,P_i(s) +$$
$$\exp(\int_s^t \lambda(u)du)\int_s^t R_0(v)\exp(-\int_s^v \lambda(u)du)\Phi(v,s)\,P_i(s)\,dv. \tag{2.18}$$

Observación 4: La igualdad en (2.17) también se puede escribir como

$$U(t,s)\,\widehat{e} = \widehat{e}\exp(\textstyle\int_s^t \lambda(u)du).$$

Lema 6 *Para σ suficientemente grande, existe $d \geq 1$ tal que*
i) $\left|\exp(-\int_s^t \lambda(u)du)\Phi(t,s)\,P_1(s)\right| \leq de^{\frac{-\alpha}{2}(t-s)}, \quad t \geq s \geq \sigma.$
ii) $\left|\exp(-\int_s^t \lambda(u)du)\Phi(t,s)\,P_2(s)\right| \leq de^{\frac{-\alpha}{2}(s-t)}, \quad s \geq t \geq \sigma.$

Lema 7 *Existe una constante $K > 1$ tal que: ,*
i) $|(I-P_0)\,U(t,s)\,P_1(s)| \leq K\left|\exp(\int_s^t \lambda(u)du)\right| e^{\frac{-\alpha}{2}(t-s)}$ *para $t \geq s$.*
ii) $|P_0U(t,s)\,P_1(s)| \leq K\left|\exp(\int_s^t \lambda(u)du)\right| \int_s^t |R(\xi)|\,e^{\frac{-\alpha}{2}(\xi-s)}d\xi$ *para $t \geq s$.*
iii) $|U(t,s)\,P_2(s)| \leq K\left|\exp(\int_s^t \lambda(u)du)\right| \left|e^{\frac{\alpha}{2}(t-s)} + \int_t^s R_0(\xi)\,e^{\frac{\alpha}{2}(\xi-s)}d\xi\right|$ *si $s \geq t$.*

A continuación presentamos el resultado central de este capítulo.

Teorema 2 *Supongamos que el operador de Cauchy $\Phi(t,s)$ de la ecuación (1.2) es $\theta-$Lipschitz para algún $\theta \in (0,1]$, satisface la hipótesis **(H5)** y la función $\lambda = \lambda_0 + r_0$ cumple **(H4)**. Además supondremos que $R(t) : E \to E$ es compacto para todo $t \geq \sigma$, para algún σ y se satisfacen **(H6)** y **(H7)**. Si $r \in L^1[\sigma,\infty)$ y $r(t) \in [0,1]$, para todo t, entonces existe una solución débil Z_0 de la ecuación (2.1) definida en $[t_0,\infty)$, para algún $t_0 \geq \sigma$ satisface la fórmula asintótica*

$$Z_0(t) = \exp(\int_{t_0}^t \lambda(u)du)\,(\widehat{e} + o(1)), \tag{2.19}$$

para $t \geq t_0$.

Demostración: Sea $t_0 \geq \sigma$, $\tau = \inf\limits_{t \geq t_0} (t - r(t))$ y $t_1 = sup\{t/t - r(t) = t_0\}$. Para una función $R(\cdot)$ tal que $|R(\cdot)| \in L^p$, denotaremos por

$$\begin{aligned}
\psi(t,R) &= \int_0^t |R(\xi)| \, e^{-\frac{\alpha}{2}(t-\xi)} d\xi, \\
\zeta(t,R) &= \int_t^\infty |R(\xi)| \, e^{-\frac{\alpha}{2}(\xi-t)} d\xi,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
q(t) &= \left| \exp \int_{t_0}^t \lambda(u) du \right|, \\
\varphi(t) &= \left| \exp(-\int_{t-r(t)}^t \lambda(u) du) \right| = q(t)^{-1} q(t - r(t)).
\end{aligned}$$

Sea $g : [\tau, \infty) \to D$ una función continua tal que $g(t_0) = \widehat{e}$ y $\sup\limits_{t \geq \tau} \|q(\cdot)^{-1} g(\cdot)\| < \infty$. Elijamos una constante $L > 0$, de modo que

$$L \geq max \left\{ 2, \ \frac{e^m c}{2K}, \ \|q(t)^{-1} g(t)\|_{[\tau, t_0]} \right\} \tag{2.20}$$

Para aplicar el Teorema de Schauder necesitaremos definir el siguiente subconjunto de $\mathcal{C} = \mathcal{C}([t_0, \infty), E)$

Definición 8 *Denotaremos por $\mathcal{S} = \mathcal{S}(L)$ al subconjunto de $\mathcal{C}$ definido en la forma, $Z \in \mathcal{S}$ si,*

(i) $Z(t) = g(t)$, *para* $t \in [\tau, t_0]$.
(ii) $q(t)^{-1} \|Z(t)\| \leq L$, *si* $t \geq \tau$.
(iii) $q(t)^{-1} \|\Delta Z(t)\| \leq KLr(t)^{\frac{p-1}{p}}$, *para* $t \geq t_1$.

El conjunto $\mathcal{S}$ es convexo, cerrado, y acotado en $\mathcal{C}$ (Lema 8).

Ahora definimos sobre $\mathcal{S}$ el operador

$$\begin{aligned}
M : \ & \mathcal{S} \to \mathcal{C} \\
& Z \to MZ = Y,
\end{aligned}$$

donde $MZ(t) = g(t)$ si $t \in [\tau, t_0]$ y para $t \geq t_0$, $MZ(t)$ está definido por el término derecho de la ecuación en (2.16). Vamos a probar que M tiene un punto fijo en $\mathcal{S}$.

Debemos probar :

a) $M(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$.

b) M es continua en la c-topología.

c) $M(\mathcal{S})$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}$.

a) Sea Y en $M(\mathcal{S})$ y $Z \in \mathcal{S}$ tal que $Y = MZ$. Si $t \in [\tau, t_0]$, $Y(t) = MZ(t) = g(t)$ por definición. Luego sólo hay que probar que $Y(t)$ satisface (ii) y (iii).

Con respecto a (i), si $t \in [\tau, t_0]$,

$$q(t)^{-1} \|Y(t)\| = q(t)^{-1} \|g(t)\| \leq L.$$

Para $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned} \|MZ(t)\| &\leq \left|\exp \int_{t_o}^{t} \lambda(u) du\right| + \int_{t_0}^{t} |U(t,s) R_0(s)| \|\Delta Z(s)\| ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} |U(t,s) P_1(s)| \|\widehat{R}(s) Z(s-r(s))\| ds \\ &\quad + \int_{t}^{\infty} |U(t,s) P_2(s)| \left|\widehat{R}(s)\right| \|Z(s-r(s))\| ds \\ &= q(t) + \Sigma_{i=1}^{3} \widehat{I}_i(t). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Vamos a estimar cada término de la suma en (2.21) por separado. Debemos tener en cuenta para los siguientes cálculos que para toda función $|R(\cdot)| \in L^p[\sigma, \infty)$ y para todo $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un t_0 suficientemente grande ($t_0 \geq \sigma,$) tal que $\|R\|_{p,[t_0,\infty)} < \varepsilon$.

Para la primera integral en (2.21) tenemos,

$$\begin{aligned} \widehat{I}_1(t) &= \int_{t_0}^{t} |U(t,s) R_0(s)| \|\Delta Z(s)\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \left|\exp(\int_{s}^{t} \lambda(u) du)\right| |R_0(s)| \|\Delta Z(s)\| ds. \end{aligned}$$

Debemos considerar dos casos.

Caso 1: Si $t_1 \leq t$

$$\begin{aligned} \widehat{I}_1(t) &\leq \int_{t_0}^{t_1} \left|\exp(\int_{s}^{t} \lambda(u) du)\right| |R_0(s)| \|Z(s)\| q(s)^{-1} q(s) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \left|\exp(\int_{s}^{t} \lambda(u) du)\right| |R_0(s)| \|Z(s-r(s))\| q(s-r(s))^{-1} q(s-r(s)) ds \\ &\quad + \int_{t_1}^{t} \left|\exp(\int_{s}^{t} \lambda(u) du)\right| |R_0(s)| \|Z(s)\| q(s)^{-1} q(s) ds \\ &\leq q(t)(1+e^m) L \int_{t_0}^{t_1} |R_0(s)| ds + q(t) LK \int_{t_1}^{t} |R_0(s)| r(s)^{\frac{p-1}{p}} ds \\ &\leq Lq(t) \left[(e^m+1) \|R_0\|_{p,[t_0,\infty)} r(t_1)^{\frac{p-1}{p}} + K \|R_0\|_{p,[t_1,\infty)} \|r\|_1^{\frac{p}{p-1}}\right]. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Caso 2: Si $t \leq t_1$, entonces

$$\widehat{I}_1(t) \leq Lq(t)(1+e^m)\|R_0\|_{p,[t_0,\infty)} r(t_1)^{\frac{p-1}{p}},$$

y por lo tanto también vale (2.22) y para algún t_0 suficientemente grande, la suma en (2.22) es menor o igual a $\frac{1}{4}$, y para $t \geq t_0$,

$$\widehat{I}_1(t) \leq \frac{L}{4}q(t). \tag{2.23}$$

Para la segunda integral $\widehat{I}_2(t)$ en (2.21),

$$\begin{aligned}\widehat{I}_2(t) &\leq \int_{t_0}^{t} |(I-P_0)U(t,s)P_1(s)| \left|\widehat{R}(s)\right| \|Z(s-r(s))\|ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} |P_0U(t,s)P_1(s)| \left|\widehat{R}(s)\right| \|Z(s-r(s))\|ds \\ &= \widehat{I}_2^{(1)}(t) + \widehat{I}_2^{(2)}(t).\end{aligned} \tag{2.24}$$

Con respecto a la suma en (2.24) también debemos considerar dos casos.

Caso1: Si $t \geq t_1$,

$$\begin{gathered}\widehat{I}_2^{(1)}(t) = \\ K\int_{t_0}^{t_1}\left|\exp(\int_s^t \lambda(u)du)\right| e^{\frac{-\alpha}{2}(t-s)}\left|\widehat{R}(s)\right| \|Z(s-r(s))\| q(s-r(s))^{-1}q(s-r(s))ds \\ +K\int_{t_1}^{t}\left|\exp(\int_s^t \lambda(u)du)\right| e^{\frac{-\alpha}{2}(t-s)}\left|\widehat{R}(s)\right| (\|\Delta Z(s)\| + \|Z(s)\|)\, q(s)^{-1}q(s)\,ds \\ \leq KLq(t)e^m\int_{t_0}^{t_1}\left|\widehat{R}(s)\right| e^{\frac{-\alpha}{2}(t-s)}ds \\ +q(t)K^2L\int_{t_1}^{t}\left|\widehat{R}(s)\right| e^{\frac{-\alpha}{2}(t-s)} r(s)^{\frac{p-1}{p}}\,ds + q(t)KL\int_{t_1}^{t}\left|\widehat{R}(s)\right| e^{\frac{-\alpha}{2}(t-s)}ds \\ \leq Lq(t)\left[Ke^m\|\widehat{R}\|_{p,[t_0,t_1]} r(t_1)^{\frac{p-1}{p}} + K(K+1)\psi(t,\widehat{R})\right],\end{gathered} \tag{2.25}$$

y

$$
\begin{aligned}
&\widehat{I}_2^{(2)}(t) \\
\leq\ & q(t)\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_s^t |R_0(\xi)|\, e^{\frac{-\alpha}{2}(\xi-s)}d\xi\right)\left|\widehat{R}(s)\right| \|Z(s-r(s))\| q(s-r(s))^{-1} q(s-r(s))ds \\
&+K\int_{t_1}^{t}\left|\exp\int_s^t \lambda(u)du\right|\left(\int_s^t |R_0(\xi)|\, e^{\frac{-\alpha}{2}(\xi-s)}d\xi\right)\left|\widehat{R}(s)\right| \|\Delta Z(s)\| q(s)^{-1} q(s)\, ds \\
&+K\int_{t_1}^{t}\left|\exp\int_s^t \lambda(u)du\right|\left(\int_s^t |R_0(\xi)|\, e^{\frac{-\alpha}{2}(\xi-s)}d\xi\right)\left|\widehat{R}(s)\right| \|Z(s)\| q(s)^{-1} q(s)\, ds \\
\leq\ & KLq(t)\, e^m\int_{t_0}^{t_1}\left|\widehat{R}(s)\right|\left(\int_s^\infty |R_0(\xi)|\, e^{\frac{-\alpha}{2}(\xi-s)}d\xi\right)ds \\
&+K^2 q(t)L\int_{t_1}^{t}\left|\widehat{R}(s)\right|\left(\int_s^\infty e^{\frac{-\alpha}{2}(\xi-s)}|R_0(\xi)|\, d\xi\right) r(s)^{\frac{p-1}{p}}\, ds \\
&+Kq(t)\,L\int_{t_1}^{t}\left|\widehat{R}(s)\right|\left(\int_s^\infty |R_0(\xi)|\, e^{\frac{-\alpha}{2}(\xi-s)}d\xi\right)ds
\end{aligned}
$$

$$
\leq Lq(t)\left[\, e^m \|\widehat{R}\|_{p,[t_0,t_1]} r(t_1)^{\frac{p-1}{p}} + K(K+1)\,\|\widehat{R}\|_{p,[t_1,\infty)}\, \|\zeta(\cdot, R_0)\|_{\frac{p}{p-1}}\right]. \tag{2.26}
$$

Caso 2: Si $t \leq t_1$,

$$
\widehat{I}_2(t) \leq Lq(t)\left[Ke^m \|\widehat{R}\|_p\, r(t_1)^{\frac{p-1}{p}} + e^m\, \|\widehat{R}\|_{p,[t_0,t_1]} \|\zeta(\cdot, R_0)\|_{\frac{p}{p-1}}\right]. \tag{2.27}
$$

De las desigualdades obtenidas en (2.25), (2.26) y (2.27) podemos encontrar un t_0 suficientemente grande tal que para $t \geq t_0$,

$$
\widehat{I}_2(t) \leq \frac{L}{4} q(t). \tag{2.28}
$$

Notemos que para $t \geq t_1$

$$
\begin{aligned}
&\left|\exp(\int_s^t \lambda(u)du)\right| \|Z(s-r(s))\| \\
\leq\ & \left|\exp(\int_s^t \lambda(u)du)\right| (\|\Delta Z(s)\| + \|Z(s)\|)\, q(s)^{-1} q(s) \\
=\ & q(t)\,(\|\Delta Z(s)\| q(s)^{-1} + \|Z(s)\| q(s)^{-1}) \\
\leq\ & Lq(t)\,(Kr(s)^{\frac{p-1}{p}} + 1).
\end{aligned}
$$

Finalmente estimamos el término $\widehat{I}_3(t)$. Usando la última desigualdad tenemos,

Caso 1: Si $t \le t_1$,

$$
\begin{aligned}
&\widehat{I}_3(t)\\
\le\ & \int_t^{t_1} \left|\exp(\int_s^t \lambda(u)du)\right| e^{\frac{\alpha}{2}(t-s)} \left|\widehat{R}(s)\right| \|Z(s-r(s))\|\, ds\\
&+K\int_t^{t_1} \left|\exp(\int_s^t \lambda(u)du)\right| \|Z(s-r(s))\| \left|\widehat{R}(s)\right| (\int_t^s |R_0(\xi)|\, e^{\frac{\alpha}{2}(\xi-s)}d\xi)ds\\
&+KLq(t)\int_{t_1}^{\infty}(e^{\frac{\alpha}{2}(t-s)}+\int_t^s |R_0(\xi)|\, e^{\frac{\alpha}{2}(\xi-s)}d\xi)\left|\widehat{R}(s)\right|(Kr(s)^{\frac{p-1}{p}}+1)ds\\
\le\ & KLq(t)e^m\left[\int_t^{t_1}\left|\widehat{R}(s)\right| e^{\frac{\alpha}{2}(t-s)}ds+\int_t^{t_1}\left|\widehat{R}(s)\right|(\int_t^s |R_0(\xi)|\, e^{\frac{\alpha}{2}(\xi-s)}d\xi)ds\right]\\
&+Kq(t)L\int_{t_1}^{\infty} e^{\frac{\alpha}{2}(t-s)}\left|\widehat{R}(s)\right|(r(s)^{\frac{p-1}{p}}K+1)ds\\
&+\int_{t_1}^{\infty}\left|\widehat{R}(s)\right|\left(\int_t^s |R_0(\xi)|\, e^{\frac{\alpha}{2}(\xi-s)}d\xi\right)\left(Kr\,(s)^{\frac{p-1}{p}}+1\right)ds\\
\le\ & e^m KLq(t)\left[\|R\|_{p,[t_0,t_1]}r\,(t_1)^{\frac{p-1}{p}}+\int_t^{t_1}\left|\widehat{R}\,(s)\right|\psi(s,R_0)ds\right]\\
&+Kq(t)L(K+1)\left[\zeta(t,\widehat{R})+\int_{t_1}^{\infty}\left|\widehat{R}(s)\right|\psi(s,R_0)ds\right]\\
\le\ & Lq(t)e^m K\|\widehat{R}\|_{p,[t_0,t_1]}r(t_1)^{\frac{p-1}{p}}+e^m K\|\widehat{R}\|_{p,[t_0,t_1]}\|\varphi(\cdot,R_0)\|_{\frac{p-1}{p}}\\
&+K\,(K+1)\,\zeta(t,\widehat{R})+(K+1)\,K\|\widehat{R}\|_{p,[t_1,\infty)}\|\psi\,(\cdot,R_0)\,\|_{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

Caso 2: Si $t_1 \le t$,

$$
\widehat{I}_3\,(t) \le Lq\,(t)\left[K\,(K+1)\left(\zeta(t,\widehat{R})+\|\widehat{R}\,\|_{p,[t_1,\infty)}\,\|\psi\,(\cdot,R_0)\|_{\frac{p-1}{p}}\right)\right].
$$

En este caso también $\widehat{I}_3\,(t)$ satisface la desigualdad en (2.29), de aquí que

$$
\widehat{I}_3\,(t) \le q\,(t)\,\frac{L}{4} \tag{2.30}
$$

para todo $t \ge t_0, t_0$ apropiado. Luego de (2.23), (2.28) y (2.30) obtenemos que existe un t_0 suficientemente grande tal que

$$
\|MZ\,(t)\,\| \le q\,(t)\,L,
$$

para todo $t \ge t_0$. Probaremos ahora la condición iii). Escribiremos la suma en (2.16) en la forma

$$Z\,(t) = U\,(t,t_0)\,\widehat{e} + \textstyle\sum_{i=1}^{3} I_i\,(t),$$

donde $I_i(t)$ es la i-ésima integral de la suma en el orden respectivo. Entonces para todo $t \geq t_1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|MZ\,(t) - MZ(t-r\,(t))\| \;&\leq\; \|U\,(t,t_0)\,\widehat{e} - U(t-r\,(t)\,,t_0)\widehat{e}\| \\ &\quad + \sum_{i=1}^{3} \|I_i\,(t) - I_i(t-r(t))\|. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Para el primer término en (2.31) tenemos, del Lema 2,

$$\begin{aligned} \|U\,(t,t_0)\,\widehat{e} - U(t-r\,(t)\,,t_0)\widehat{e}\| \;&\leq\; cr\,(t)^{\frac{p-1}{p}}\,\|U(t-r\,(t)\,,t_0)\widehat{e}\| \\ &\leq\; cr\,(t)^{\frac{p-1}{p}}\,q(t-r(t)) \\ &\leq\; cr\,(t)^{\frac{p-1}{p}}\,e^m q\,(t) \\ &\leq\; \frac{L}{2}Kr\,(t)^{\frac{p-1}{p}}\,q\,(t)\,. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Para el primer término de la sumatoria en (2.31),

$$\begin{aligned} \|I_1\,(t) - I_1(t-r\,(t))\| \;&\leq\; cr\,(t)^{\frac{p-1}{p}} \int_{t_0}^{t-r(t)} \|U(t-r\,(t)\,,s)R_0\,(s)\,\Delta Z\,(s)\,\|ds \\ &\quad + \int_{t-r(t)}^{t} \exp(\int_s^t \lambda(u)du)\,|R_0\,(s)|\,\|\Delta Z\,(s)\,\|ds\,. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Vamos a considerar dos casos.

Caso 1: Si $t_0 \leq t - r\,(t) \leq t_1 \leq t,$

$$\begin{aligned} \|\Delta I_1\,(t)\,\| \;&\leq\; Lcr\,(t)^{\frac{p-1}{p}}\,q(t-r\,(t))\,(1+e^m) \int_{t_0}^{t_1} |R_0\,(s)|\,ds \\ &\quad + Lq\,(t)\,(1+e^m) \int_{t-r(t)}^{t_1} |R_0\,(s)|\,ds \\ &\quad + q\,(t)\,LK \int_{t_1}^{t} |R_0\,(s)|\,r\,(s)^{\frac{p-1}{p}}\,ds. \end{aligned}$$

Por otra parte, como $t - r\,(t) \leq t_1 \leq t,$ luego $t_1 - t + r\,(t) \leq r\,(t)$ y $t - t_1 \leq r\,(t)$. Además $r\,(t) \leq 1,$ entonces $r\,(t)^{\frac{p-1}{p}} \geq r\,(t)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &\leq\; Lr\,(t)^{\frac{p-1}{p}}\,q\,(t)\,ce^m\,(1+e^m)\,\|R_0\|_{p,[t_0,\infty)} r\,(t_1)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\quad + Lr\,(t)^{\frac{p-1}{p}}\,q\,(t) + (1+e^m)\,\|R_0\|_{p,[t_0,\infty)} + \|R_0\|_{p,[t_0,\infty)} K. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Caso 2: Si $t_0 \leq t_1 \leq t - r(t) \leq t$, entonces,

$$\begin{aligned}
&\|\Delta I_1(t)\| \\
\leq\ & Lcr(t)^{\frac{p-1}{p}} [\int_{t_0}^{t_1} \left|\exp \int_s^{t-r(t)} \lambda(u)du\right| |R_0(s)| (q(s) + q(s - r(s)))\, ds \\
& + q(t - r(t)) \int_{t_1}^{t-r(t)} |R_0(s)| r(s)^{\frac{p-1}{p}} ds] \\
& + KLq(t) \int_{t-r(t)}^{t} |R_0(s)| r(s)^{\frac{p-1}{p}} ds \\
\leq\ & Lr(t)^{\frac{p-1}{p}} q(t) \Big(ce^m (1 + e^m) \|R_0\|_{p,[t_0,t_1]} r(t_1)^{\frac{p-1}{p}} \\
& + (ce^m \|r\|_1^{\frac{p}{p-1}} + K) \|R_0\|_{p,[t_1,\infty)} \Big) .
\end{aligned}$$

En ambos casos 1 y 2, podemos elegir un t_0 de modo que si $t \geq t_0$,

$$\|\Delta I_1(t)\| \leq r(t)^{\frac{p-1}{p}} q(t) \frac{L}{6}. \tag{2.35}$$

Ahora vamos a estimar

$$\begin{aligned}
\|\Delta I_2(t)\| \leq\ & \Big\| \int_{t_0}^{t} U(t,s) P_1(s) \widehat{R}(s) Z(s - r(s)) ds \\
& - \int_{t_0}^{t-r(t)} U(t - r(t), s) P_1(s) \widehat{R}(s) Z(s - r(s)) ds \Big\| \\
\leq\ & \Big\| \int_{t_0}^{t-r(t)} U(t,s) P_1(s) \widehat{R}(s) Z(s - r(s)) \\
& - U(t - r(t), s) P_1(s) \widehat{R}(s) Z(s - r(s)) ds \Big\| \\
& + \int_{t-r(t)}^{t} \|U(t,s) P_1(s) \widehat{R}(s) Z(s - r(s))\| ds \\
\leq\ & cr(t)^{\frac{p-1}{p}} L \int_{t_0}^{t-r(t)} |U(t - r(t), s) P_1(s)| \left|\widehat{R}(s)\right| q(s - r(s)) ds \\
& + L \int_{t-r(t)}^{t} |U(t,s) P_1(s)| \left|\widehat{R}(s)\right| q(s - r(s)) ds.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Usando en (2.36) la desigualdad

$$|U(t,s) P_1(s)| \leq |(I - P_0) U(t,s) P_1(s)| + |P_0 U(t,s) P_1(s)|,$$

y de i) y ii) del Lema 8, para la primera integral de (2.36) obtenemos,

$$\begin{aligned}
&\leq c_1 KLr\,(t)^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_{t_0}^{t-r(t)} \left|\exp\int_s^{t-r(t)} \lambda(u)du\right| e^{\frac{-\alpha}{2}(t-r(t)-s)} \left|\widehat{R}\,(s)\right| q(s-r\,(s))ds \right.\\
&\quad \left. + \int_{t_0}^{t-r(t)} \left|\exp\int_s^{t-r(t)} \lambda(u)du\right| \left(\int_s^t |R_0\,(\xi)|\, e^{\frac{-\alpha}{2}(\xi-s)}d\xi\right) \left|\widehat{R}\,(s)\right| q(s-r\,(s))ds\right]\\
&\leq KLc_1 r\,(t)^{\frac{p-1}{p}}\, q\,(t)\, e^{m+1} \int_{t_0}^t \left|\widehat{R}\,(s)\right| e^{\frac{-\alpha}{2}(t-s)}ds\\
&\quad + r\,(t)^{\frac{p-1}{p}}\, KLq\,(t)\, e^m \int_{t_0}^{t-r(t)} \left|\widehat{R}\,(s)\right| \left(\int_s^t |R_0\,(\xi)|\, e^{\frac{-\alpha}{2}(\xi-s)}d\xi\right) ds\\
&\leq KLr\,(t)^{\frac{p-1}{p}}\, q\,(t) \left[e^{m+1} c_1 \psi(t,\widehat{R}) + e^m \|\widehat{R}\|_{p,[t_0,\infty)} \|\zeta(\cdot, R_0)\|_{\frac{p}{p-1}}\right],
\end{aligned} \tag{2.37}$$

y la segunda integral en (2.36),

$$\begin{aligned}
&\leq LK \int_{t-r(t)}^t \left|\exp(\int_s^t \lambda(u)du)\right| e^{\frac{-\alpha}{2}(t-s)} \left|\widehat{R}\,(s)\right| q(s-r\,(s))ds\\
&\quad + LK \int_{t-r(t)}^t \left|\exp(\int_s^t \lambda(u)du)\right| \left(\int_s^t |R_0\,(\xi)|\, e^{\frac{-\alpha}{2}(\xi-s)}d\xi\right) \left|\widehat{R}\,(s)\right| q(s-r\,(s))ds\\
&\leq LKe^m q\,(t) \left[\int_{t-r(t)}^t \left|\widehat{R}\,(s)\right| ds + \|R_0\|_{p,[t_0,\infty)} \int_{t-r(t)}^t \left|\widehat{R}\,(s)\right| (t-s)^{\frac{p-1}{p}}\, ds\right]\\
&\leq LKe^m q\,(t)\, r\,(t)^{\frac{p-1}{p}} \left[\|\widehat{R}\|_{p,[t_0,\infty)} + \|R_0\|_{p,[t_0,\infty)} \|\widehat{R}\|_{p,[t_0,\infty)}\right].
\end{aligned} \tag{2.38}$$

De (2.37) y (2.38) tenemos que

$$\|\Delta I_2(t)\| \leq \frac{L}{6} q(t) r\,(t)^{\frac{p-1}{p}}, \tag{2.39}$$

para $t \geq t_0$.

Si $U(t,s)X = Y$, luego $X = U(s,t)Y$, entonces, para $s \geq t$, y puesto que $U(t,s)$ es $\frac{p-1}{p}$-Lipschitz, entonces para $0 < |t-s| \leq 1$,

$$\|U(t,s)X - X\| = \|Y - U(s,t)Y\| \leq c\,|t-s|^{\frac{p-1}{p}}\, \|U(t,s)X\|.$$

De aquí que, para todo $X \in E$,

$$\begin{aligned}
& \|U(t,s)P_2(s)X - U(t-r(t),s)P_2(s)X\| \\
= & \left\|U(s,t)^{-1}P_2(s)X - U(s,t-r(t))^{-1}P_2(s)X\right\| \\
= & \left\|U(s,t)^{-1}P_2(s)X - U(t,t-r(t))^{-1}U(s,t)^{-1}P_2(s)X\right\| \\
\leq & \; cr(t)^{\frac{p-1}{p}} \left\|U(t,t-r(t))^{-1}U(s,t)^{-1}P_2(s)X\right\| \\
= & \; cr(t)^{\frac{p-1}{p}} \left\|U(s,t-r(t))^{-1}P_2(s)X\right\| \\
= & \; cr(t)^{\frac{p-1}{p}} \|U(t-r(t),s)P_2(s)X\| .
\end{aligned}$$

Entonces, en el tercer sumando de (2.31) tenemos,

$$\begin{aligned}
& \|I_3(t) - I_3(t-r(t))\| \\
= & \; \| \int_t^\infty U(t,t-r(t))U(t-r(t),s)P_2(s)\,\widehat{R}(s)\,Z(s-r(s))ds \\
& - \int_t^\infty U(t-r(t),s)P_2(s)\,\hat{R}(s)\,Z(s-r(s))ds \\
& + \int_{t-r(t)}^t U(t-r(t),s)P_2(s)\,\widehat{R}(s)\,Z(s-r(s))ds\| \\
\leq & \; cr(t)^{\frac{p-1}{p}} \int_t^\infty |U(t-r(t),s)P_2(s)| \left|\widehat{R}(s)\right| \|Z(s-r(s))\|ds \\
& + \int_{t-r(t)}^t |U(t-r(t),s)P_2(s)| \left|\widehat{R}(s)\right| \|Z(s-r(s))\|\,ds \\
= & \; I_3^{(1)}(t) + I_3^{(2)}(t).
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned}
& |U(t-r(t),s)P_2(s)| \left|\widehat{R}(s)\right| \|Z(s-r(s))\| \\
\leq & \; LK \left|\exp\int_s^{t-r(t)} \lambda(u)du\right| \Big[e^{\frac{\alpha}{2}(t-r(t)-s)} \\
& + \int_{t-r(t)}^s |R_0(\xi)|\,e^{\frac{\alpha}{2}(\xi-s)}d\xi\Big] \left|\widehat{R}(s)\right| q(s-r(s))\,ds \\
\leq & \; LKq(t)\,\varphi(t)\,\varphi(s) \left|\widehat{R}(s)\right| \left[e^{\frac{\alpha}{2}(t-s)} + \int_{t-r(t)}^s |R_0(\xi)|\,e^{\frac{\alpha}{2}(\xi-s)}d\xi\right] \\
\leq & \; LKq(t)\,e^{2m} \left[\left|\widehat{R}(s)\right| e^{\frac{\alpha}{2}(\xi-s)} + \left|\widehat{R}(s)\right| \int_{t-r(t)}^s |R_0(\xi)|\,e^{\frac{\alpha}{2}(\xi-s)}d\xi\right].
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Mayorando la primera integral en (2.40) por el término en (2.41) obtenemos

$$\begin{aligned}
I_3^{(1)}(t) &\leq LKq(t)\, e^{2m}[\zeta(t,\hat{R}) + \int_{t_0}^{\infty} \left|\widehat{R}(s)\right| \left(\int_{t-r(t)}^{s} |R_0(\xi)|\, e^{\frac{\alpha}{2}(\xi-s)} d\xi\right) ds] \\
&\leq \int_{t}^{\infty} \left|\widehat{R}(s)\right| \left(\int_{t_0}^{s} |R_0(\xi)|\, e^{\frac{\alpha}{2}(\xi-s)} d\xi\right) ds \\
&\leq LKq(t)\, e^{2m}[\zeta(t,\hat{R}) + (\int_{t_0}^{\infty} \left|\widehat{R}(s)\right|^p ds)^{1/p} \|\varphi(\cdot,R_0)\|_{\frac{p}{p-1}}].
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$I_3^{(1)}(t) \leq LKq(t)\, e^{2m}[\zeta(t,\hat{R}) + \left\|\hat{R}\right\|_{p,[t_0,\infty)} \|\varphi(\cdot,R_0)\|_{\frac{p}{p-1}}]. \tag{2.42}$$

Analogamente, usando (2.41) en (2.40) obtenemos para $I_3^{(2)}(t)$:

$$\begin{aligned}
I_3^{(2)}(t) \leq\ & LKq(t)\, e^{2m}[\int_{t-r(t)}^{t} \left|\widehat{R}(s)\right| e^{\frac{\alpha}{2}(t-s)} ds \\
&+ \int_{t-r(t)}^{t} \left|\widehat{R}(s)\right| \left(\int_{s-r(s)}^{s} |R_0(\xi)|\, e^{\frac{\alpha}{2}(\xi-s)} d\xi\right) ds].
\end{aligned}$$

Para esta última desigualdad tenemos, en la primera integral,

$$\begin{aligned}
\int_{t-r(t)}^{t} \left|\widehat{R}(s)\right| e^{\frac{\alpha}{2}(t-s)} ds &\leq e^{\frac{\alpha}{2}} \left(\int_{t-r(t)}^{t} \left|\widehat{R}(s)\right|^p ds\right)^{1/p} r(t)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq e^{\frac{\alpha}{2}} \|\widehat{R}\|_{p,[t_0,\infty)} r(t)^{\frac{p-1}{p}},
\end{aligned} \tag{2.43}$$

y para la segunda,

$$\textstyle\int_{s-r(s)}^{s} |R_0(\xi)|\, e^{\frac{\alpha}{2}(\xi-s)} d\xi \leq \int_0^s |R_0(\xi)|\, e^{\frac{-\alpha}{2}(s-\xi)} d\xi \to 0,$$

si $s \to \infty$. Luego podemos elegir un t_0 suficientemente grande de modo que para todo $s \geq t_0$,

$$\textstyle\int_{t_0}^{s} |R_0(\xi)|\, e^{\frac{-\alpha}{2}(s-\xi)} d\xi \leq 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{t-r(t)}^{t} \left|\widehat{R}(s)\right| \left(\int_{t-r(t)}^{s} |R_0(\xi)|\, e^{\frac{-\alpha}{2}(s-\xi)} d\xi\right) ds &\leq \int_{t-r(t)}^{t} \left|\widehat{R}(s)\right| ds \\
&\leq \|\widehat{R}\|_{p,[t_0,\infty)} r(t)^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

De aquí que

$$I_3^{(2)}(t) \leq LKq(t)\, r(t)^{\frac{p-1}{p}} e^{2m}(e^{\frac{\alpha}{2}}+1)\|\widehat{R}\|_{p,[t_0,\infty)},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\|\Delta I_3(t)\| &\leq LKq(t)\, r(t)^{\frac{p-1}{p}}[ce^{2m}\zeta(t,\hat{R})+ \\ &\quad ce^{2m}\|\widehat{R}\|_{p,[t_0,\infty)}\|\varphi(\cdot,R_0)\|_{\frac{p}{p-1}}+(1+e^{2m+\varepsilon/2})\|\widehat{R}\|_{p,[t_0,\infty)}] \\ &\leq \frac{L}{6}Kq(t)\, r(t)^{\frac{p-1}{p}}, \end{aligned} \tag{2.45}$$

para $t \geq t_0$, t_0 apropiado. De (2.32), (2.35), (2.39) y (2.45), elegimos un t_0 suficientemente grande de modo que

$$\|MZ(t) - MZ(t-r(t))\| \leq LKr(t)^{\frac{p-1}{p}} q(t),$$

para todo $t \geq t_0$.

b)Ahora vamos a probar que M es secuencialmente continuo.

Sea $\{Z_n\}$ una sucesión en $\mathcal{S}$ tal que $Z_n \to Z$ uniformemente en compactos de $[\tau,\infty)$. Sea $K \subset [\tau,\infty)$ un compacto. Podemos suponer que $K \cap [\tau,t_0) = \emptyset$ y $K \subset [t_0,a]$, para algún $a \geq t_0$. Para cada $t \in K$,

$$\begin{aligned} &\|MZ_n(t) - MZ(t)\| \\ \leq\ & \int_{t_0}^{t} \|U(t,s)\, R_0(s)\,(\Delta Z_n(s) - \Delta Z(s))\|ds \\ &+\int_{t_0}^{t} \|U(t,s)\, P_1(s)\,\widehat{R}(s)\,(Z_n(s-r(s)) - Z(s-r(s)))\|ds \\ &+\int_{t}^{\infty} \|U(t,s)\, P_2(s)\,\widehat{R}(s)\,(Z_n(s-r(s)) - Z(s-r(s))\|ds \\ =\ & \sum_{i=1}^{3} K_{in}(t). \end{aligned} \tag{2.46}$$

En (2.46) K_{in} (para $i=1,2,3$), son las tres integrales que aparecen en la última desigualdad. Tenemos que,

$$\|\Delta Z_n(t) - \Delta Z(t)\| \leq \|Z_n(t) - Z(t)\| + \|Z_n(t-r(t)) - Z(t-r(t))\|,$$

entonces, para la primera integral $K_{1n}(t)$ de (2.46)

$$\begin{aligned} K_{1n}(t) &\leq \int_{t_0}^{a}\left|\exp\int_s^t \lambda(u)du\right| |R_0(s)|\,(\|Z_n(s) - Z(s)\| \\ &\quad +\|Z_n(s-r(s)) - Z(s-r(s))\|)\, ds \\ &\leq 2\|Z_n - Z\|_{[t_0,a]}\int_{t_0}^{a}\left|\exp\int_s^t \lambda(u)du\right| |R_0(s)|\, ds. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe un $N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\begin{aligned} &K_{1n}(t) \leq \\ 2\|Z_n - Z\|_{[t_0,a]}\|R_0\|_{p,[t_0,a]}&(a-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\|q\|_{[t_0,a]}\|q^{-1}\|_{[t_0,a]} \\ &< \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned} \tag{2.47}$$

para todo $n \geq N_1$.

En la segunda integral de (2.46) tenemos,

$$K_{2n}(t) \leq K\int_{t_0}^{a}\left|\exp\int_s^t \lambda(u)du\right| e^{\frac{-\alpha}{2}(t-s)}\left|\widehat{R}(s)\right| \|Z_n(s-r(s)) - Z(s-r(s))\|ds$$
$$+K\int_{t_0}^{a}\left|\exp\int_s^t \lambda(u)du\right|\left(\int_s^t |R_0(\xi)|\, e^{\frac{-\alpha}{2}(\xi-s)}d\xi\right)\left|\widehat{R}(s)\right| \|Z_n(s-r(s))-Z(s-r(s))\|ds$$

$$\begin{aligned} \leq\ & \|Z_n - Z\|_{[t_0,a]}K\|q\|_{[t_0,a]}\|q^{-1}\|_{[t_0,a]}\int_{t_0}^{a} e^{\frac{-\alpha}{2}(t-s)}\left|\widehat{R}(s)\right| ds \\ & +\|Z_n - Z\|_{[t_0,a]}K\|q\|_{[t_0,a]}\|q^{-1}\|_{[t_0,a]}\int_{t_0}^{a}\left|\widehat{R}(s)\right|\left(\int_s^t |R_0(\xi)|\, e^{\frac{-\alpha}{2}(\xi-s)}d\xi\right) ds \\ \leq\ & K\|q\|_{[t_0,a]}\|q^{-1}\|_{[t_0,a]}\|Z_n - Z\|_{[t_0,a]}\left(\|\widehat{R}\|_{p,[t_0,a]}(a-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\right. \\ & \left. +\|\widehat{R}\|_{p,[t_0,a]}\|\zeta(\cdot, R_0)\|_{\frac{p}{p-1}}\right). \end{aligned} \tag{2.48}$$

En (2.48) podemos tomar $N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$K_{2n}(t) \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $n \geq N_2$, $t \in [t_0, a]$.

Con respecto a la tercera integral en (2.46),

$$K_{3n}(t) \leq$$
$$K\int_t^{\infty}\left|\exp\int_s^t \lambda(u)du\right| e^{\frac{\alpha}{2}(t-s)}\left|\widehat{R}(s)\right| \|Z_n(s-r(s)) - Z(s-r(s))\|ds$$
$$+K\int_t^{\infty}\left|\exp\int_s^t \lambda(u)du\right|\left(\int_t^s |R_0(\xi)|\, e^{\frac{\alpha}{2}(\xi-s)}d\xi\right)]\left|\widehat{R}(s)\right| \|Z_n(s-r(s)) - Z(s-r(s))\|ds$$
$$\leq Kq(t)\int_t^{\infty} e^{\frac{\alpha}{2}t}H_n(s) + R_n(s)\,ds, \tag{2.49}$$

donde

$$H_n(s) = q(s)^{-1} e^{\frac{-\alpha}{2}s} \left|\widehat{R}(s)\right| \|Z_n(s - r(s)) - Z(s - r(s))\|$$

y

$$R_n(s) = q(s)^{-1} \left|\widehat{R}(s)\right| \left(\int_0^s |R_0(\xi)| e^{\frac{\alpha}{2}(\xi - s)} d\xi\right) \|Z_n(s - r(s)) - Z(s - r(s))\|.$$

En cada $s \geq t_0$, $H_n(s) \to 0$ y $R_n(s) \to 0$ si $n \to \infty$, por que $\|Z_n(s - r(s)) - Z(s - r(s))\| \to 0$ uniformemente en compactos. Luego $H_n(s) + R_n(s) \to 0$ puntualmente. Por otra parte

$$H_n(s) \leq e^{\frac{-\alpha}{2}s} \left|\widehat{R}(s)\right| 2Le^m, \tag{2.50}$$

y

$$R_n(s) \leq \left|\widehat{R}(s)\right| \psi(s, R_0) 2Le^m. \tag{2.51}$$

Los términos en (2.50) y (2.51) están en $L^1[t_0, \infty)$ y por lo tanto podemos aplicar el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_t^\infty H_n(t)\, dt &\leq \int_{t_0}^\infty \lim_{n\to\infty} H_n(t)\, dt = 0\ , \text{ y} \\
\lim_{n\to\infty} \int_t^\infty R_n(t)\, dt &\leq \int_{t_0}^\infty \lim_{n\to\infty} R_n(t)\, dt = 0.
\end{aligned}$$

Entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $N_3 = N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$K_{3n}(t) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $n \geq N_3$, y $t \in [t_0, a]$. Si $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, para cada $n \geq N$

$$\sup_{t\in[t_0,a]} \|MZ_n(t) - MZ(t)\| < \varepsilon,$$

y por lo tanto M es continua en $\mathcal{S}$.

c) $M(\mathcal{S})$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}$.

Basta probar que $M(\mathcal{S})$ es relativamente secuencialmente compacto. Al igual que en la demostración del Teorema 1 probaremos ésto usando el Teorema de Arzelá-Ascoli. Sea $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en $M(\mathcal{S})$, y sea $Z_n \in \mathcal{S}$ tal que $Y_n(t) = MZ_n(t)$, para $t \geq \tau$. Debemos probar que $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ es equicontinua y que en cada $t \geq t_0$, $\{Y_n(t)\}_{n\geq 1}$ es relativamente compacto en E.

■$\{Y_n\}_{n\geq 1}$ es equicontinua.

Sean $t', t \in K$, y supongamos que $K \cap [\tau, t_0] = \emptyset$. Sin perder generalidad, supondremos que $t' < t$.

$$\|Y_n(t) - Y_n(t')\| \leq \left\|(\exp \textstyle\int_{t_0}^{t} \lambda(u)du - \exp \int_{t_0}^{t'} \lambda(u)du)\widehat{e}\right\|$$

$$\begin{aligned}
&+ \quad \|\int_{t_0}^{t} U(t,s)\, R_0(s)\, \Delta Z_n(s)\, ds - \int_{t_0}^{t'} U(t',s)\, R_0(s)\Delta Z_n(s)\, ds\| \\
&+ \quad \|\int_{t_0}^{t} U(t,s)\, P_1(s)\, \widehat{R}(s)\, Z_n(s - r(s))ds - \int_{t_0}^{\infty} U(t',s)\, P_1(s)\, \widehat{R}(s)\, Z_n(s - r(s))ds\| \\
&+ \quad \|\int_{t}^{\infty} U(t,s)\, P_2(s)\, \widehat{R}(s)\, Z_n(s - r(s))ds - \int_{t'}^{\infty} U(t',s)\, P_2(s)\, \widehat{R}(s)\, Z_n(s - r(s))ds\|
\end{aligned}$$

$$= \|U(t,t_0)\,\widehat{e} - U(t',t_0)\,\widehat{e}\| + \sum_{i=1}^{3} \|J_i(t) - J_i(t')\|. \tag{2.52}$$

Para el primer término en (2.52), del Lema 2, tenemos

$$\begin{aligned}
\|U(t,t_0)\,\widehat{e} - U(t',t_0)\,\widehat{e}\| &\leq c\,|\,t - t'|^{\frac{p-1}{p}}\, q(t') \\
&\leq c\,|\,t - t'|^{\frac{p-1}{p}}\, \|q\|_{[t_0,a]}.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Para $i = 1$ en la suma de (2.52),

$$\begin{aligned}
\|J_1(t) - J_1(t')\| \;\; &\leq \;\; c\,|\,t - t'|^{\frac{p-1}{p}} \int_{t_0}^{t'} \|U(t',s)\, R_0(s)\, \Delta Z_n(s)\,\| ds \\
&\quad + \int_{t'}^{t} \|U(t,s)\, R_0(s)\, \Delta Z_n(s)\,\| ds.
\end{aligned}$$

De (2.20) tenemos,

$$\begin{aligned}
&\leq \;\; c\,(e^m + 1)\, L\|q\|_{[t_0;a]}\,|\,t - t'|^{\frac{p-1}{p}} \int_{t_0}^{t'} |R_0(s)|\, ds \\
&\qquad + L\|q\|_{[t_0,a]}\,(e^m + 1) \int_{t_1}^{t} |R_0(s)|\, ds \\
&\leq \;\; (e^m + 1)\, L\|q\|_{[t_0,a]}\|R_0\|_p \left(c\,|\,t - t'|^{\frac{p-1}{p}}\,(a - t_0)^{\frac{p-1}{p}} + |\,t - t'|^{\frac{p-1}{p}}\right) \\
&= \;\; |\,t - t'|^{\frac{p-1}{p}}\, \|q\|_{[t_0,a]} M_1,
\end{aligned} \tag{2.54}$$

donde $M_1 = \|R_0\|_p L(e^m+1)(c(a-t_0)^{\frac{p-1}{p}}+1)$.

Con respecto al segundo sumando en (2.52),

$$\begin{aligned}
\|J_2(t)-J_2(t')\| &\leq c|\,t-t'|^{\frac{p-1}{p}} L\int_{t_0}^{t'} |U(t',s)P_1(s)|\left|\widehat{R}(s)\right| q(s-r(s))ds \\
&\quad + L\int_{t'}^{t} |U(t,s)P_1(s)|\left|\widehat{R}(s)\right| q(s-r(s))ds \\
&\leq KL|\,t-t'|^{\frac{p-1}{p}}\|q\|_{[t_0,a]}\left(e^{m+1}c_1\|\varphi(\cdot,\hat{R})\|_{[t_0,a]}+e^m\|\widehat{R}\|_{p,[t_0,a]}\|\zeta\|_{\frac{p}{p-1}}\right) \\
&\quad + LKe^m\|q\|_{[t_0,a]}|\,t-t'|^{\frac{p-1}{p}}\left[\|\widehat{R}\|_{p,[t_0,a]}+\|R_0\|_{p,[t_0,a]}\|\widehat{R}\|_p\right] \\
&\leq |\,t-t'|^{\frac{p-1}{p}}\|q\|_{[t_0,a]}LKe^m(c_1\|\varphi(\cdot,\widehat{R})\|_{[t_0,a]} \\
&\quad + \|\widehat{R}\|_p(1+\|\zeta\|_{\frac{p}{p-1}})+\|R_0\|_p\|\widehat{R}\|_p) \\
&= |\,t-t'|^{\frac{p-1}{p}}\|q\|_{[t_0,a]}M_2,
\end{aligned} \tag{2.55}$$

donde $M_2 = LKe^m(c_1\|\varphi(\cdot,\widehat{R})\|_{[t_0,a]}+\|\widehat{R}\|_p(1+\|\zeta\|_{\frac{p}{p-1}}+\|R_0\|_p))$.

Para la última diferencia tenemos,

$$\begin{aligned}
&\|J_3(t)-J_3(t')\| \\
&\leq LK\|q\|_{[t_0,a]}|\,t-t'|^{\frac{p-1}{p}}ce^{2m}(\|\zeta\|_{[t_0,a]}+\|\widehat{R}\|_p\|\varphi(\cdot,R)\|_{\frac{p}{p-1}}) \\
&\quad + LK\|q\|_{[t_0,a]}|\,t-t'|^{\frac{p-1}{p}}ce^{2m}\|\widehat{R}\|_p\left(e^{2m+\varepsilon/2}+1\right) \\
&= |\,t-t'|\,\|q\|_{[t_0,a]}M_3,
\end{aligned} \tag{2.56}$$

$M_3 = LK\left[ce^{2m}(\|\zeta\|_{[t_0,a]}+\|\widehat{R}\|_p\|\varphi(\cdot,R)\|_{\frac{p}{p-1}})+\|\widehat{R}\|_p\left(e^{2m+\varepsilon/2}+1\right)\right]$. De las desigualdades en (2.53), (2.54), (2.55) y (2.56) puesto que M_1, M_2, y M_3 son constantes que no dependen de n, entonces para $\varepsilon > 0$ podemos elegir un δ :

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{\|q\|_{[t_0,a]}(c+M_1+M_2+M_3)},$$

tal que si $|t-t'| < \delta$ entonces $|Y_n(t)-Y_n(t')| < \varepsilon$, luego $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ es equicontinua en K . Por otra parte, si $K \subset [\tau,\infty)$ y $t \in [\tau, t_0]$, $Y_n(t) = g(t)$ para todo n. Así, hemos probado que $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ es equicontinua en $[\tau,\infty)$.

■ $M(\mathcal{S})$ es relativamente compacto en E, para todo $t \geq t_0$.

Notemos que como el operador $R(t)$ es compacto para todo $t \geq t_0$ y P_0 es acotado, entonces $P_0R(t)$ es compacto y por lo tanto el operador $\widehat{R}(t) = R(t) - P_0R(t)$ es también compacto.

Para un $\nu \geq 0$ denotaremos por $B[0,\nu] = \{X \in E/\|X\| \leq \nu\}$. De la condición ii) para $Z_n(s)$ dada en la Definición 8, para cada n, $Z_n(s) \in B[0, q(s)L]$, luego la sucesión $\{R(s)Z_n(s)\}_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente, $\{R(s)Z_{n_k}(s)\}_{k\geq 1}$. Repitiendo el argumento deducimos que la sucesión $\{R(s)Z_{n_k}(s-r(s))\}_{k\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente en E, $\{R(s)Z_{m_l}(s-r(s))\}_{l\geq 1}$, de aquí que $\{\widehat{R}(s)\Delta Z_{m_l}(s)\}_{l\geq 1}$ es convergente en E. Como $U(t,s)$ y $P_i(s)$, $i = 1,2$ son acotados, resulta que las sucesiones $\{U(t,s)R_0(s)\Delta Z_{m_l}\}_{l\geq 1}$ y $\left\{U(t,s)P_i(s)\widehat{R}(s)Z_{m_l}(s-r(s))\right\}_{l\geq 1}$ son también convergentes en E. Ahora vamos a considerar la subsucesión de $\{Y_n(t)\}_{n\geq 1}$:

$$\begin{aligned} Y_{m_l}(t) &= U(t,t_0)\hat{e} + \int_{t_0}^{t} U(t,s)R_0(s)\Delta Z_{m_l}(s)ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} U(t,s)P_1(s)\hat{R}(s)Z_{m_l}(s-r(s))ds \\ &\quad - \int_{t}^{\infty} U(t,s)P_2(s)\hat{R}(s)Z_{m_l}(s-r(s))ds. \end{aligned}$$

Denotemos por

$$\begin{aligned} D_{m_l}(s) &= \|U(t,s)R_0(s)\Delta Z_{m_l}(s)\| \qquad \text{para} \quad t \geq s \geq t_0, \\ F_{m_l}(s) &= \left\|U(t,s)P_1(s)\hat{R}(s)Z_{m_l}(s-r(s))\right\| \quad \text{si} \quad t \geq s \geq t_0 \quad \text{y} \\ I_{m_l}(s) &= \left\|U(t,s)P_2(s)\hat{R}(s)Z_{m_l}(s-r(s))\right\| \quad \text{para} \quad s \geq t. \end{aligned}$$

Si $t \in [t_0, t_1]$, y ya que $s \leq t$, de (2.22) y ii) en la Definición 8, tenemos que

$$D_{m_l}(s) \leq Lq(t)(1+e^m)\left|R_0(s)\right|.$$

Si $s \in [t_1, t]$, entonces

$$D_{m_l}(s) \leq KLq(t)\left|R_0(s)\right| r(s)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Definamos la función:

$$D(s) = \begin{cases} Lq(t)(1+e^m)\left|R_0(s)\right| & t \in [t_0,t_1] \\ KLq(t)\left|R_0(s)\right| r(s)^{\frac{p-1}{p}} & s \in [t_1,t] \end{cases}$$

Tenemos que $D_{m_l}(s) \leq D(s)$ para todo m_l, en cada $s \geq t_0$, y de **(H6)** deducimos que $D(\cdot) \in L^1[t_0,t]$. Aplicando el Teorema de la convergencia dominada tenemos que

$$\lim_{m_l\to\infty} \int_{t_0}^{t} U(t,s)R_0(s)\Delta Z_{m_l}(s)ds$$

existe en E. Analogamente podemos estimar $F_{m_l}(s)$ definiendo la función:

$$F(s) = \begin{cases} KLq(t)e^{m}\left|\hat{R}(s)\right|(e^{-\frac{\alpha}{2}(t-s)}+\zeta(s,R_0)) & \text{si } t_0 \le s \le t \\ KLq(t)\left|\hat{R}(s)\right|(1+Kr(s)^{\frac{p-1}{p}})(e^{-\frac{\alpha}{2}(t-s)}+\zeta(s,R_0)) & \text{si } t_1 \le s \le t. \end{cases}$$

De (2.25) y (2.26) tenemos que para cada $s \in [t_0,t]$, $F_{m_l}(s) \le F(s)$, y puesto que $F(\cdot) \in L^1[t_0,t]$, entonces

$$\lim_{m_l\to\infty} \int_{t_0}^{t} U(t,s)P_1(s)\hat{R}(s)Z_{m_l}(s-r(s))ds$$

existe cuando $m_l \to \infty$.

Con respecto a $I_{m_l}(s)$, definimos la función

$$I(s) = \begin{cases} LKq(t)e^{m}\left|\hat{R}(s)\right|(e^{\frac{\alpha}{2}(t-s)}+(K+2)\psi(s,R_0)) & \text{si } s \in [t,t_1] \\ LKq(t)\left|\hat{R}(s)\right|(e^{\frac{\alpha}{2}(t-s)}+\psi(s,R_0))(r(s)^{\frac{p-1}{p}}K+1) & \text{si } s \ge t_1. \end{cases}$$

Usando las estimaciones en (2.29) para $I_{m_l}(s)$ obtenemos que para cada s, $s \ge t \ge t_0$, $I_{m_l}(s) \le I(s)$ y puesto que $I(\cdot) \in L^1[t,\infty)$ deducimos que

$$\lim_{m_l\to\infty} \int_{t}^{\infty} U(t,s)P_2(s)\hat{R}(s)Z_{m_l}(s-r(s))ds$$

existe en E. Por lo tanto la sucesión $\{Y_{m_l}(t)\}_{m_l\ge1}$ converge para cada t fijo, de donde obtenemos que $\{Y_n(t)\}_{n\ge1}$ tiene clausura compacta en cada $t \ge t_0$. Aplicando el Teorema de Arzelá-Azcoli concluímos que la sucesión $\{Y_n\}_{n\ge1}$ tiene una subsucesión $\{Y_{m_l}\}_{m_l\ge1}$ que converge puntualmente en cada $t \ge t_0$ y uniformemente en subconjuntos compactos de $[t_0,\infty)$. Por lo tanto $\overline{M(S)}$ es compacto en $\mathcal{C}$. Luego el operador M tiene un punto fijo Z_0 en $\mathcal{S}$ y $Z_0(t)$ es una solución débil de la ecuación (2.1).

Sea $Z_0 \in \mathcal{S}$ tal que $MZ_0 = Z_0$, de la ecuación (2.16) tenemos que para $t \ge t_0$,

$$\begin{aligned}
&\exp(-\int_{t_0}^{t}\lambda(u)\,du)Z_0(t) \\
= {}& \widehat{e}+\exp(-\int_{t_0}^{t}\lambda(u)\,du)\int_{t_0}^{t}U(t,s)\,R_0(s)\,\Delta Z_0(s)\,ds \\
&+\exp(-\int_{t_0}^{t}\lambda(u)\,du)\int_{t_0}^{t}U(t,s)\,P_1(s)\,\widehat{R}(s)\,Z_0(s-r(s))ds \\
&-\exp(-\int_{t_0}^{t}\lambda(u)\,du)\int_{t_0}^{t}U(t,s)\,P_1(s)\,\widehat{R}(s)\,Z_0(s-r(s))ds \\
= {}& \widehat{e}+K_1(t)+K_2(t)-K_3(t)\,. \qquad (2.57)
\end{aligned}$$

En (2.57) los términos $K_i(t)$ son las integrales que figuran en la última igualdad. A continuación probaremos que $K_i(t) \to 0$ si $t \to \infty$, para $i = 1,2,3$.

Para el primer término:

$$\|K_1(t)\| \leq q(t)^{-1} \int_{t_0}^{t} |U(t,s)\, R_0(s)|\, \|\Delta Z_0(s)\| ds,$$

usando (2.23) tenemos:

$$\leq L\left[(e^m+1)\, \|R_0\|_{p,[t_0,\infty)} r(t_1)^{\frac{p-1}{p}} + K \|R_0\|_{p,[t_1,\infty)} \|r\|_1^{\frac{p}{p-1}}\right]. \tag{2.58}$$

Para el segundo sumando en (2.57), de las desigualdades en (2.24) y (2.25) tenemos que

$$\begin{aligned} \|K_2(t)\| \;\leq\; & Le^m \, \|\widehat{R}\|_{p,[t_0,t_1]} r(t_1)^{\frac{p-1}{p}} (K+1) \\ & + LK(K+1)\left(\psi(t,\hat{R}) + \|\widehat{R}\|_{p,[t,\infty)} \|\zeta(\cdot,R_0)\|_{\frac{p}{p-1}}\right). \end{aligned} \tag{2.59}$$

Finalmente de (2.26) tenemos para la última integral de (2.57),

$$\|K_3(t)\| \leq LK(K+1)\left(\zeta(t,\widehat{R}) + \|\widehat{R}\|_{p,[t_1,\infty)} \|\psi(\cdot,R_0)\|_{\frac{p-1}{p}}\right). \tag{2.60}$$

Dado $\varepsilon > 0$, para t_0 suficientemente grande, los términos de (2.58), (2.59) y (2.60) son menores que ε si $t \geq t_0$, y por lo tanto

$$\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \lambda(u)du\right) Z(t) = \widehat{e} + o(1),$$

y obtenemos la fórmula asintótica

$$Z(t) = \left(\exp \int_{t_0}^{t} \lambda(u)du\right) (\widehat{e} + o(1)).$$

Completamos así la demostración del Teorema 2. Cerramos esta sección con el lema acerca de las propiedades del conjunto $\mathcal{S}$. Su demostración es sencilla y directa de modo que será omitida (ver [14]).

Lema 8 *Sea* $\mathcal{S} \subseteq C$ *definido por,* $Z \in \mathcal{S}$ *si*

i) $Z(t) = g(t)$, si $\tau \leq t \leq t_0$
ii) $q(t)^{-1} \|Z(t)\| \leq L$,para $t \geq \tau$
iii) $q(t)^{-1} \|Z(t) - Z(t - r(t))\| \leq KLr(t)^{\frac{p-1}{p}}$ *si* $t \geq t_1$, *y* $1 < p \leq 2$.
Entonces $\mathcal{S}$ *es cerrado, convexo y acotado en* C.

2.2 Ejemplos y Aplicaciones

En esta sección veremos dos aplicaciones del Teorema 2. Estudiamos primero la ecuación con retardo (2.1) en el caso en que el espacio E es de dimensión finita y luego obtendremos una versión matricial para este teorema.

2.2.1 El caso escalar

A continuación vamos a suponer que el espacio de Banach $E = \mathbb{C}$, la ecuación (2.1) es ahora escalar y la escribimos como

$$\begin{aligned} z'(t) &= a(t)z(t) + b(t)z(t - r(t)), \text{ si } t \geq t_0. \\ z(t) &= g(t), \text{ si } t \in [\tau, t_0]\,. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Las soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (2.61):

$$x'(t) = a(t)x(t),$$

son de la forma

$$x(t) = \Phi(t,s)x_0 = \exp(\textstyle\int_{t_0}^t a(u)du)x_0,$$

para cada $x_0 \in \mathbb{C}$.

Para la ecuación (2.61) tenemos el siguiente corolario del Teorema 2:

Corolario 3 *Supongamos que existe un σ suficientemente grande tal que se cumplen las siguientes hipótesis:*

i) $\sup\limits_{t\geq\sigma} \|a\|_{p,[t,t+1]} = a < \infty.$

ii) $b(\cdot) \in L^p[\sigma,\infty)\,, 1 < p \leq 2.$

iii) $r(\cdot) \in L^1[\sigma,\infty)$ *y* $r(t) \to 0$ *si* $t \to \infty.$

Entonces la ecuación (2.61) tiene una solución z_0 definida en $[t_0,\infty)$ para algún t_0 suficientemente grande tal que se satisface la fórmula asintótica

$$z_0(t) = (1 + o(1)) \exp \textstyle\int_{t_0}^t (a(u) + b(u))du,$$

cuando $t \to \infty$.

Demostración: Notemos de i) que para $0 < t - s \leq 1$, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\begin{aligned} |\Phi(t,s) - 1| &= \left|\exp(\int_s^t a(u)du) - 1\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\int_s^t |a(u)|\, du)^k \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \|a\|_{p,[s,t]}^k (t-s)^{\frac{k}{q}} \leq (t-s)^{\frac{1}{q}} e^a. \end{aligned}$$

De aquí que $\Phi(t,s)$ es $\frac{1}{q}$-Lipschitz y $U(t,s) = \exp \int_{t_0}^t (a(u) + b(u))du$ satisface la hipótesis **(H7)**. La condición **(H4)** se satisface tomando $m = a + \|b\|_p$. Finalmente **(H5)** se verifica con $P_0 = I$, y $\lambda_0(t) = a(t)$.

Ejemplo:

Consideremos la ecuación,

$$z'(t) = \frac{\ln t}{t^2} z(t) + \frac{\cos t}{t} z(t - \frac{1}{t^{\vartheta}}), \tag{2.62}$$

definida para $t > 0$, siendo la constante $\vartheta > 1$.

De acuerdo al último corolario, tomando $a(t) = \dfrac{\ln t}{t^2}$ y $b(t) = \dfrac{\cos t}{t}$, concluímos que la ecuación (2.62) tiene una solución de la forma:

$$z_0(t) = t^{\ln t} \exp(\int_{t_0}^{t} \frac{\cos u}{u} du)(1 + o(1)),$$

para todo $t \geq t_0, t_0$ suficientemente grande.

En la siguiente sección aplicaremos el Teorema 2 para el caso en que la ecuación (1.2), es una matriz de $n \times n$, escrita en su forma de Jordan.

2.2.2 A(t) matriz.

Supongamos que $A(t) \in M_n(\mathbb{C})$ para cada t, en este caso el espacio de Banach $E = \mathbb{C}^n$. Vamos a suponer que la matriz $A(t)$ se escribe en la forma de Jordan:

$$A(t) = \bigoplus_{i=1}^{k-1} J_{n_i}(\lambda_i(t)) \bigoplus \lambda_k(t) I_\sigma \bigoplus_{i=k+1}^{m} J_{n_i}(\lambda_i(t)),$$

donde cada

$$J_{n_j}(\lambda_j(t)) = \begin{bmatrix} \lambda_j(t) & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_j(t) \end{bmatrix},$$

es una matriz de $n_j \times n_j$ y $\lambda_j(t)$ es un valor propio de $A(t)$ para cada j de multiplicidad n_j. Vamos a suponer que para algún λ_k fijo existe un $\eta > 0$ tal que para todo $t \geq t_0 \geq 0$ se satisface

(H5)':

$$\begin{aligned} Re(\lambda_j(t) - \lambda_k(t)) &< -\eta < 0, \quad j = 1, \ldots, k-1. \\ Re(\lambda_j(t) - \lambda_k(t)) &> \eta > 0, \quad j = k+1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3 *Consideremos el sistema lineal con retardo (2.1) y supongamos que la matriz $A(t)$ satisface la condición* ***(H5)'*** *y la hipótesis*

(H4)'*: Existe un $\beta > 0$ tal que para todo $t \geq t_0$, $\|\lambda_i\|_{p,[t,t+1]} < \beta < \infty$, para todo $i = 1, \ldots, m$.*

Si $R(t) = (r_{ij}(t)) \in M_n(\mathbb{C})$, $|R(\cdot)| \in L^p[t_0, \infty)$, para algún $1 < p \leq 2, r(t) \leq 1$ y $r \in L^1[t_0, \infty)$, entonces el sistema (2.1) tiene una solución $Z_0(t)$ definida para $t \geq t_0$, tal que

$$Z_0(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda_k(u) + r_{\sigma\sigma}(u)du\right)(e_k + o(1)),$$

cuando $t \to \infty$, donde $\sigma = n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + 1$.

Demostración: Aplicaremos el Teorema 2 a la ecuación (2.1). Para esto vamos a tomar las proyecciones,

$$P_1 = \bigoplus_{i=1}^{k-1} I_{n_i}, \quad P_2 = \bigoplus_{i=k+1}^{m} I_{n_i}, \text{ y } P_0 = I_\sigma, \tag{2.63}$$

donde $ImI_\sigma = gen\langle e \rangle$ y $ImI_{n_i} = gen\{e_l / \sum_{j=1}^{i-1} n_j < l < \sum_{j=1}^{i-1} n_j + n_i\}$. El operador solución del sistema (1.2) es de la forma,

$$\begin{aligned}
\Phi(t,s) &= \bigoplus_{i=1}^{k-1} \exp(\int_s^t \lambda_i(u)du) \exp((t-s)J_{n_i}(0)) \bigoplus \exp(\int_s^t \lambda_k(u)du) I_\sigma \\
&\quad \bigoplus_{i=k+1}^{m} \exp(\int_s^t \lambda_i(u)du) \exp((t-s)J_{n_i}(0)).
\end{aligned}$$

Con respecto a la condición **(H5)** para P_0, P_1 y P_2 definidas en (2.63), (2.2) se verifica trivialmente. Para probar (2.3), tomemos la constante $\alpha = \frac{\eta}{2}$. Por **(H5)'** tenemos que

$$\begin{aligned}
|\Phi(t,s)P_1| &= \left| \bigoplus_{i=1}^{k-1} \exp(\int_s^t \lambda_i(u)du) \exp((t-s)J_{n_i}(0)) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} \left| \exp(\int_s^t \lambda_i(u)du) \right| |\exp((t-s)J_{n_i}(0))|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp(\int_s^t Re\lambda_k(u)du)\sum_{i=1}^{k-1}\exp(Re\int_s^t \lambda_i(u)-\lambda_k(u)du)\,|\exp((t-s)J_{n_i}(0))| \\
&\leq (k-1)\exp(\int_s^t Re\lambda_k(u)du)e^{-\eta(t-s)}\sum_{i=1}^{k-1}|\exp((t-s)J_{n_i}(0))|,
\end{aligned}$$

notemos que

$$|\exp((t-s)J_{n_i}(0))| \leq p_{n_i-1}(t-s),$$

donde $p_{n_i-1}(t-s)$ es un polinomio en $(t-s)$ de grado a lo mas n_i-1. Puesto que para todo $\eta>0$ existe un $m_1>0$ tal que

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k-1} p_{n_i-1}(t-s) \leq m_1 e^{\eta(t-s)},$$

de aquí que

$$\begin{aligned}
|\Phi(t,s)P_1| &\leq m_1\exp(\int_s^t Re\lambda_k(u)du)e^{-\frac{\eta}{2}(t-s)} \\
&\leq (k-1)m_1e^{-\alpha(t-s)}\left|\exp(\int_s^t \lambda_k(u)du)\right|, \qquad (2.64)
\end{aligned}$$

para $t\geq s$.

Si $s\geq t$ obtenemos,

$$|\Phi(t,s)P_2| \leq \exp(\textstyle\int_s^t Re\lambda_k(u)du)\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n}\exp(Re\textstyle\int_s^t \lambda_i(u)-\lambda_k(u)du)\ \ |\exp(t-s)J_{n_i}(0)|$$

podemos encontrar un $m_2>0$ tal que

$$\leq (n-k)m_2e^{-\alpha(s-t)}\left|\exp(\int_s^t \lambda_k(u)du)\right|. \qquad (2.65)$$

Si $K=\max\{(n-k)m_2,(k-1)m_1\}$, de (2.64) y (2.65), (2.3) está satisfecha.

Sólo nos falta verificar que $\Phi(t,s)$ es θ-Lipschitz para algún $\theta\in(0,1]$. Si $X\in\mathbb{C}^n$, y $0<|t-s|\leq 1$,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(t,s)X-X\| \leq\ & \left\|\bigoplus_{i=1}^{k-1}\exp(\int_s^t\lambda_i(u)du)\exp((t-s)J_{n_i}(0))X-I_{n_i}X\right\| \\
&+\left\|\exp(\int_s^t\lambda_k(u)du)I_\sigma X-I_\sigma X\right\| \\
&+\left\|\bigoplus_{i=k+1}^{m}\exp(\int_s^t\lambda_i(u)du)\exp((t-s)J_{n_i}(0))X-I_{n_i}X\right\|
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k-1}\left(\left|\exp(\int_s^t \lambda_i(u)du)I_{n_i}-I_{n_i}\right|+\left|\sum_{l=1}^{n_i}(t-s)^l\frac{J_{n_i}(0)^l}{l!}\right|\left|\exp(\int_s^t \lambda_i(u)du)\right|\right)\|X\|$$
$$+\left|\exp(\int_s^t \lambda_k(u)du)-1\right|\|X\|$$
$$+\sum_{i=k+1}^{n}\left(\left|\exp(\int_s^t \lambda_i(u)du)-1\right|+\left|\sum_{l=1}^{n_i}(t-s)^l\frac{J_{n_i}(0)^l}{l!}\right|\left|\exp(\int_s^t \lambda_i(u)du)\right|\right)\|X\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k-1}\left(\left|\exp(\int_s^t \lambda_i(u)du)-1\right|+\sum_{l=1}^{n_i}\frac{|t-s|^l}{l!}\exp(\int_s^t Re\lambda_i(u)du)\right)\|X\|$$
$$+\left|\exp(\int_s^t \lambda_k(u)du)-1\right|\|X\|$$

$$+\sum_{i=k+1}^{n}\left(\left|\exp(\int_s^t \lambda_i(u)du)-1\right|+\exp(\int_s^t Re\lambda_i(u)du)\sum_{l=1}^{n_i}\frac{|t-s|^l}{l!}\right)\|X\|. \quad (2.66)$$

Por otra parte,

$$\left|\exp(\textstyle\int_s^t \lambda_i(u)du)-1\right| \leq \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\left|\int_s^t \lambda_i(u)du\right|^l}{l!} \leq \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\left(\int_s^{s+1}|\lambda_i(u)|^p du\right)^{\frac{l}{p}}|t-s|^{\frac{l}{q}}}{l!}.$$

De **(H4)'** obtenemos para la última desigualdad,

$$\leq |t-s|^{\frac{1}{q}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\beta^l}{l!}|t-s|^{\frac{l-1}{q}} \leq |t-s|^{\frac{1}{q}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\beta^l}{l!} \leq |t-s|^{\frac{1}{q}}e^{\beta}.$$

Con respecto al término

$$\begin{aligned}\exp(\int_s^t Re\lambda_i(u)du)\sum_{l=1}^{n_i}\frac{|t-s|^l}{l!} &\leq \exp(\int_s^t Re\lambda_i(u)du)\,|t-s|^{\frac{1}{q}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{|t-s|^{l-\frac{1}{q}}}{l!}\\ &\leq e^{\beta+1}|t-s|^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Tenemos entonces,

$$\begin{aligned}\|\Phi(t,s)X-X\| &\leq me^{\beta+1}|t-s|^{\frac{1}{q}}\|X\|+(m-1)e^{\beta+1}|t-s|^{\frac{1}{q}}\|X\|\\ &\leq c_1|t-s|^{\frac{1}{q}}\|X\|,\end{aligned}$$

donde $c_1 = me^{\beta}+(m-1)e^{\beta+1}$.

Si $U(t,s)$ es una matriz fundamental del sistema perturbado (2.8) claramente se satisface la fórmula en (2.9). Aplicando el Teorema 2 obtenemos lo que queríamos.

2.3 Versión espectral

En esta sección determinaremos condiciones sobre el espectro del operador $A(t)$ para que la ecuación abstracta (1.2) (Capítulo 1) posea una tricotomía exponencial. Para ello utilizaremos algunos hechos previos acerca de la teoría de reductibilidad. Los resultados que presentamos sin demostración son conocidos y sus demostraciones pueden verse en [6] y [11]. A lo largo de esta sección supondremos que $A(t)$ es acotado para cada $t \in [\sigma, \infty) = I_\sigma$, para algún $\sigma \geq 0$.

Lema 9 *Sean $P_i : I_\sigma \to \mathcal{L}(E)$, para $i = 1, \ldots, N$, una familia de proyecciones complementarias acotadas y diferenciables en t. Sea $S(t)$ una solución de la ecuación diferencial en $\mathcal{L}(E)$:*

$$
\begin{aligned}
S'(t) &= (\sum_{i=1}^{N} P_i'(t)P_i(t))S(t) &\quad (2.67)\\
S(\sigma) &= I. &\quad (2.68)
\end{aligned}
$$

Entonces para $s, t \in I_\sigma$ se cumple,

$$S(t)S(s)^{-1}P_i(s) = P_i(t)S(t)S(s)^{-1}, \text{para } i = 1, \ldots, N. \quad (2.69)$$

En el siguiente lema nos restringiremos a un espacio de Hilbert E. Con la misma notación que en el lema anterior tenemos:

Lema 10 *Sea E un espacio de Hilbert con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que induce la norma $\|\cdot\|$ en E. Definamos*

$$\hat{S}(t) = S(t)Q(t)^{-1},$$

donde $Q(t)$ es un operador lineal tal que $Q^2(t) = S^*(t) \left[\sum_{i=1}^{N} P_i^*(t)P_i(t)\right] S(t)$. Sea V un operador solución del problema de valor inicial

$$
\begin{aligned}
V'(t) &= \frac{1}{2}\left[Q(t)'Q(t)^{-1} - Q(t)^{-1}Q(t)'\right] V(t).\\
V(\sigma) &= I.
\end{aligned}
$$

Si definimos

$$\tilde{S}(t) = \hat{S}(t)V(t),$$

entonces se cumple:

i) $\hat{S}(t), \hat{S}(t)^{-1}, \tilde{S}(t)$ y $\tilde{S}(t)^{-1}$ son acotados como funciones de t.

ii) Para $t, s \in I_\sigma$

$$\hat{S}(t)\hat{S}(s)^{-1}P_i(s) = P_i(t)\hat{S}(t)\hat{S}(s)^{-1},$$
$$\tilde{S}(t)\tilde{S}(s)^{-1}P_i(s) = P_i(t)\tilde{S}(t)\tilde{S}(s)^{-1},$$

para $i = 1, \ldots, N$.

iii) Existe una constante $\tilde{c} > 0$ *tal que*

$$\left|\tilde{S}'(t)\right| \leq \tilde{c}\left[\sum_{i=1}^{N} P_i'(t)P_i(t)\right].$$

Observación: En este caso los operadores adjuntos están considerados según el producto interno $\langle\phi,\psi\rangle_0 = \sum_{i=1}^{n}\langle P_i(\sigma)\phi, P_i(\sigma)\psi\rangle$ que induce la misma topología que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (ver [49]). Además el operador $Q^2(t)$ es positivo (ver [11])

Lema 11 *Sean* $P_i(\cdot) : I_\sigma \to \mathcal{B}(E)$, $i = 1, \ldots, N$ *y* $\tilde{S}(t)$ *como en el Lema 10. Si* $A(\cdot) : I_\sigma \to \mathcal{L}(E)$ *un operador lineal acotado en* E *tal que*

$$A(t)P_i(t) = P_i(t)A(t)$$

para $i = 1, \ldots, N$, *entonces:*

i) Si en la ecuación (1.2) hacemos el cambio de variable $X(t) = \tilde{S}(t)\zeta(t)$, obtenemos la ecuación

$$\zeta'(t) = (B(t) - \tilde{S}^{-1}(t)\tilde{S}'(t))\zeta(t) \tag{2.70}$$

donde $B(t) = \tilde{S}^{-1}(t)A(t)\tilde{S}(t)$.

ii) Si A *es diferenciable, también lo es* B *y en ese caso existe una constante* $\alpha > 0$ *tal que*

$$|B'(t)| \leq \alpha\left|\sum_{i=1}^{N} P_i'(t)P_i(t)\right|,\ t \in I_\sigma.$$

Definición 9 *Diremos que un conjunto de operadores acotados* $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(E)$ *es compacto, si dada una sucesión* $\{B_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ *existe una subsucesión* $\{B_{n_k}\}_{k\geq 1}$ *y un* $B_\infty \in \mathcal{F}$ *tal que* $\|B_{n_k} - B_\infty\| \to 0$ *si* $k \to \infty$.

Definición 10 *Diremos que una familia de conjuntos* $\{\lambda_i(t)\}_{i=1}^{m_t}$, $m_t \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *posee una* $\lambda_k(t)-$ *tricotomía de Hartman-Wintner (* $k \leq m_t$, *fijo e independiente de* t *) si existe un* $\eta > 0$, *tal que*

$$Re(\lambda_i(t) - \lambda_k(t)) > \eta,\ i = 1, \ldots, k-1.$$
$$Re(\lambda_i(t) - \lambda_k(t)) < -\eta,\ i = k+1, \ldots, m_t,$$

para todo $t \in I_\sigma$.

Notemos que si en la ecuación (2.1) hacemos la sustitución $Z(t) = \tilde{S}(t)\zeta(t)$, para $\tilde{S}(t)$ definido en el Lema 10, obtenemos la ecuación con retardo,

$$\zeta'(t) = \tilde{A}(t)\zeta(t) + \tilde{R}(t)\zeta(t - r(t)), \tag{2.71}$$

donde $\tilde{A}(t) = B(t) + C(t)$, $B(t) = \tilde{S}(t)^{-1}A(t)\tilde{S}(t)$, $C(t) = -\tilde{S}(t)\tilde{S}'(t)$, y $\tilde{R}(t) = \tilde{S}(t)^{-1}R(t)\tilde{S}(t - r(t))$. En la siguiente proposición se establecen condiciones para que la ecuación homogénea asociada a la ecuación (2.71):

$$\zeta'(t) = \tilde{A}(t)\zeta(t), \tag{2.72}$$

tenga una $\lambda_k(t)-$tricotomía exponencial.

Proposición 1 *Sea E un espacio de Hilbert con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que induce la norma $\|\cdot\|$ en E. y sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(E)$ compacto. Supongamos que:*

i) $A(t) \in \mathcal{F}$, es diferenciable para todo $t \in I_\sigma$ y $|A'(t)| \leq \rho$, $\rho \geq 0$, suficientemente pequeño.

ii) El espectro $\sigma(A(t))$ de $A(t)$ satisface las dos condiciones siguientes:

a) Es numerable e igual al espectro puntual,

$$\sigma(A(t)) = \sigma_p(A(t)) = \{\lambda_i(t)\}_{i=1}^{m_t},$$

con $m_t \in \mathbb{N}$ y posee una $\lambda_k(t)-$ tricotomía de Hartman- Wintner ($k \leq m_t$ para $t \in I_\sigma$)

b) $\lambda_i(t)$ es acotado para $i = 1, \ldots, k$.

iii) $\lambda_k(t)$ es un polo de la resolvente de $A(t)$, $R(\lambda, A(t)) = (\lambda I - A(t))^{-1}$ *y existe $\hat{e} \in E$ tal que*

$$A(t)\hat{e} = \lambda_k(t)\hat{e},$$

para todo t.

Entonces la ecuación (2.72) posee una $\lambda_k(t)-$tricotomía exponencial.

La demostración de esta proposición se puede encontrar en [6].

Observación: Notemos que una $\lambda_k(t)-$tricotomía de Hartman-Wintner establece que en cada t, $\lambda_k(t)$ es un punto aislado del espectro $\sigma_p(A(t))$, y puesto que la función $\lambda \to (\lambda I - A(t))^{-1}$ es analítica en el conjunto resolvente $\rho(A(t))$ de $A(t)$, entonces $\lambda_k(t)$ es una singularidad aislada de $R(\lambda, A(t))$. Como $\lambda_k(t)$ es un polo simple de $R(\lambda, A(t))$, es decir de multiplicidad 1, la proyección espectral se puede escribir como

$$P_0(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} R(\lambda, A(t))d\lambda, \tag{2.73}$$

donde γ_0 es una curva de Jordan rectificable tal que,

$$\sigma(A(t)) \cap Int\ \gamma_0 = \{\lambda_k(t)\}.$$

En este caso de *iii)* se obtiene que el rango $RanP_0(t) = \langle \hat{e} \rangle$,

$$E = KerP_0(t) \bigoplus RanP_0(t), \tag{2.74}$$

y además $P_0(t)$ conmuta con $A(t)$ (ver por ejemplo [15]). Notemos también que como la familia $\{\lambda_i(t)/t \geq \sigma\}_{i=1}^{k}$ es acotada y hay un $\eta > 0$ tal que,

$$|Re(\lambda_i(t) - \lambda_k(t))| > \eta,$$

si $i \neq k$, entonces existen curvas de Jordan rectificables γ_0 y γ_1 tales que

$$\begin{array}{rcl} \sigma(A(t)) \cap Int\gamma_0 &=& \{\lambda_k(t)\}, \\ \sigma(A(t)) \cap Int\gamma_1 &=& \{\lambda_i(t)\}_{i=1}^{k-1}, \end{array}$$

y $Int\gamma_1 \cap Int\gamma_0 = \emptyset$. Para las proyecciones

$$P_1(t) = \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} R(\lambda, A(t)) d\lambda,$$

$P_0(t)$ según (2.73) y $P_2(t) = I - P_0(t) - P_1(t)$, se demuestra la Proposición 1.

Teorema 4 *Consideremos la ecuación diferencial abstracta con retardo*

$$\begin{array}{rcl} Z'(t) &=& A(t) Z(t) + R(t) Z(t - r(t)), \ si\ t \geq t_0. \\ Z(t) &=& g(t), \ para\ t \in [\tau, t_0], \end{array} \tag{2.75}$$

en un espacio de Hilbert E con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que induce la norma $\|\cdot\|$ en E. Supongamos que existe un $\sigma > 0$ tal que $R(t) \in \mathcal{L}(E)$ es compacto para todo $t \geq \sigma$, el operador $A(t)$ satisface las hipótesis de la Proposición 1 y se cumplen las siguientes condiciones :

i) $|R(\cdot)| \in L^p[\sigma, \infty)$, *para algún* $p \in (1, 2]$.

ii) La familia de evolución $\{\Phi(t,s)\}_{t \geq s}$ satisface la hipótesis ***(H7)*** y es $\theta-$Lipschitz para algún θ, $\frac{1}{q} < \theta \leq 1$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

iii) $r(\cdot) \in L^1[\sigma, \infty)$.

Entonces la ecuación (2.75) tiene una solución $Z_0(t)$ definida en $[\sigma, \infty)$ tal que

$$Z_0(t) = \exp(\int_{t_0}^{t} \lambda_k(u) + r_0(u) du)(\hat{e} + o(1)), \tag{2.76}$$

donde $r_0(t)$ está determinada por la ecuación,

$$P_0(t) R(t) \hat{e} = r_0(t) \hat{e}$$

y $P_0(t)$ en (2.73).

Demostración Haciendo la sustitución $Z(t) = \tilde{S}(t)\zeta(t)$ en la ecuación (2.75) obtenemos la ecuación (2.71), vamos a demostrar que esta ecuación satisface las condiciones del Teorema 2.

Con respecto a la condición **(H1)** para la ecuación (2.72), si $X(t) = \Phi(t,s)X_s$ resuelve en forma única la ecuación ordinaria (1.2), podemos definir la familia de operadores en E

$$\tilde{\Phi}(t,s)X = \tilde{S}(t)^{-1}\Phi(t,s)\tilde{S}(s)X,$$

para $t \geq s$ y $X \in E$ $\{\tilde{\Phi}(t,s)\}_{t\geq s}$ es una familia de evolución en E. En efecto, para cada $t \geq t' \geq s \geq \sigma$,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}(t,t')\tilde{\Phi}(t',s)X &= \tilde{S}(t)^{-1}\Phi(t,t')\tilde{S}(t')\Phi(t',s)X \\
&= \tilde{S}(t)^{-1}\Phi(t,t')\tilde{S}(t')\tilde{S}(t')^{-1}\Phi(t',s)\tilde{S}(s)X \\
&= \tilde{S}(t)^{-1}\Phi(t,s)\tilde{S}(s)X = \tilde{\Phi}(t,s)X,
\end{aligned}$$

y para todo $t \geq s$, $\tilde{\Phi}(t,s)$ es acotado. Además como $\tilde{A}(t)$ es acotado, para cada $u_s \in E$, si $u_t = \tilde{\Phi}(t,s)u_s$, donde

$$\tilde{\Phi}(t,s)u_s = \tilde{S}(t)^{-1}\Phi(t,s)\tilde{S}(s)u_s, \tag{2.77}$$

determina la única solución del problema (2.72) y por lo tanto se satisface **(H1)**.

Afirmamos que $\{\tilde{\Phi}(t,s)\}_{t\geq s}$ es $\theta-$Lipschitz. En efecto notemos que, para cada $X \in E$, y $0 < |t-s| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\left\|\tilde{\Phi}(t,s)X - X\right\| &= \left\|\tilde{S}(t)^{-1}\Phi(t,s)\tilde{S}(s)X - X\right\| \\
&\leq \left|\tilde{S}(t)^{-1}\right| \left\|\Phi(t,s)\tilde{S}(s)X - \tilde{S}(t)X\right\| \\
&\leq \left|\tilde{S}(t)^{-1}\right| (\left\|\Phi(t,s)\tilde{S}(s)X - \tilde{S}(s)X\right\| + \left\|\tilde{S}(s)X - \tilde{S}(t)X\right\|) \\
&\leq \left|\tilde{S}(t)^{-1}\right| (c\,|t-s|^{\theta} \left|\tilde{S}(s)\right| \|X\| + \left|\tilde{S}(s)\right| |t-s| \, \|X\|),
\end{aligned} \tag{2.78}$$

para $t \geq s$. Del Lema 10 sabemos que $\tilde{S}(t)^{-1}$, $\tilde{S}(t)$ y $\tilde{S}'(t)$ son uniformemente acotadas en t, y por lo tanto, existe un $\tilde{c} > 0$, tal que

$$\left\|\tilde{\Phi}(t,s)X - X\right\| \leq \tilde{c}\,|t-s|^{\theta} \|X\|.$$

Ahora debemos probar que

$$\tilde{R}(\cdot) = \tilde{S}(\cdot)^{-1}R(\cdot)\tilde{S}(\cdot - r(\cdot))$$

pertenece a $L^p[\sigma,\infty)$ y que para la proyección fija $P_0 = P_0(\sigma)$, se cumple

$$P_0\tilde{R}(t)\hat{e} = r_0(t)\hat{e},$$

siendo $P_0(t)R(t)\hat{e} = r_0(t)\hat{e}$. Notemos que la compacidad del operador $\tilde{S}(s)^{-1}R(s)\tilde{S}(s-r(s))$ se deduce de la compacidad de $R(s)$ y del acotamiento de $S(s)$ en cada s. La primera propiedad es cierta debido a que $\tilde{S}(\cdot)$ es acotada en t y $R(\cdot) \in L^p[\sigma,\infty)$. En la segunda,

$$\begin{aligned} P_0\tilde{R}(t)\hat{e} &= P_0(\sigma)\tilde{R}(t)\hat{e} = P_0(\sigma)\tilde{S}(t)^{-1}R(t)\tilde{S}(t-r(t))\hat{e} \\ &= \tilde{S}(t)^{-1}P_0(t)R(t)\tilde{S}(t-r(t))\hat{e}. \end{aligned}$$

Puesto que $ImP_0(t) \subset \langle\hat{e}\rangle$ y $P_0(t)\hat{e} = \hat{e}$, entonces

$$\tilde{S}(t)\hat{e} = \tilde{S}(t)P_0(\sigma)\hat{e} = P_0(t)\tilde{S}(t)\hat{e} = \tilde{s}(t)\hat{e},$$

donde $\tilde{s}(t) \in \mathbb{C}$ para $t \geq \sigma$.

Por otra parte como $P_0'(t)\hat{e} = 0$, de la desigualdad *iii)* del Lema 10 obtenemos

$$\left|\tilde{S}'(t)\hat{e}\right| \leq c\,|P_0'(t)P_0(t)\hat{e}| = c\,|P_0'(t)\hat{e}| = 0.$$

Por lo tanto $\tilde{s}'(t) = 0$, y $\tilde{s}(t) = \tilde{s}(\sigma)$ es constante para todo $t \geq \sigma$. Así tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{S}(t)^{-1}P_0(t)R(t)\tilde{S}(t-r(t))\hat{e} &= \tilde{s}(\sigma)\tilde{S}(t)^{-1}P_0(t)R(t)\hat{e} \\ &= \tilde{s}(\sigma)\tilde{S}(t)^{-1}r_0(t)\hat{e} \\ &= r_0(t)\hat{e}, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. Por otra parte

$$\tilde{s}(t)\hat{e} = \tilde{S}(\sigma)\hat{e} = \hat{S}(t)V(\sigma)\hat{e} = \hat{S}(\sigma)\hat{e} = S(\sigma)Q(\sigma)^{-1}\hat{e} = Q(\sigma)^{-1}\hat{e},$$

luego

$$Q(\sigma)\hat{e} = \tilde{s}(\sigma)^{-1}\hat{e} \text{ y } \; Q(\sigma)^2\hat{e} = \tilde{s}(\sigma)^{-2}\hat{e}.$$

De la definición de $Q(\sigma)^2$, tenemos que

$$Q(\sigma)^2\hat{e} = S^*(\sigma)\hat{e} = \hat{e},$$

por lo tanto $\tilde{s}(\sigma)^2 = 1$. Si $\tilde{s}(\sigma) = -1$, entonces

$$\langle Q(\sigma)\hat{e}, \hat{e}\rangle = \langle -\hat{e}, \hat{e}\rangle = -1 < 0,$$

esto contradice el hecho de que $Q(\sigma)$ es un operador positivo. Luego $\tilde{s}(\sigma) = 1$, entonces $\tilde{S}(\sigma)\hat{e} = \hat{e}$. Aplicando el Teorema 2 a la ecuación (2.71) afirmamos que tiene una solución $\zeta_k(t)$, definida para $t_0 \geq \sigma$, t_0 suficientemente grande, tal que

$$\zeta_k(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda_k(u) + r_0(u)du\right)(\hat{e} + o(1)). \tag{2.79}$$

Así, $Z_k(t) = \tilde{S}(t)\zeta_k(t)$ es una solución de la ecuación (2.76) definida en $[\sigma,\infty)$. Puesto que $\hat{S}(t)\hat{e} = \hat{e}$, y $\left|\hat{S}(t)\right|$ es acotado en t, esta solución satisface la fórmula asintótica dada en (1.76) lo que completa la demostración del Teorema 4.

Bibliografía

[1] A. Ardito and P. Ricciardi , *Existence and regularity for linear partial differential equations,* Non Linear Anal. 4 (1980), 411-414.

[2] O. Arino and E. Sanchez, *Linear theorie of abstract functional differential equations retarded type,* J. Math. Anal. and Appl. **191** (1995), 547-571.

[3] C. Bernier and A. Manitius, *On semigroups in $R^n \times L^p$ corresponding to differential equations with delay,* Can. J. Math. **vol XXX 5** (1978), 897-914.

[4] J. A. Burns, T. L. Herdman and H. W. Stech, *Linear functional differential equations as semigroups on product spaces*, SIAM J. Math. Anal. **14 (1)** (1983), 98-125.

[5] J. S. Cassell and Zhanyuan Hou, *Asymptotically diagonal linear differential equations with retardation,* J. London Math. Soc. **2 (47)** (1993), 473-483.

[6] S.Castillo, " Estudio Asintótico de las Ecuaciones Diferenciales Lineales ". Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias, Univ. de Chile (1997).

[7] S. Castillo and M. Pinto, *Asymptotic Integration of Ordinary Differential Systems*, J. Math. Anal. and Appl. **218** (1998), 1-12.

[8] P.Clement, O.Diekmann, M.Gyllenberg, H.J.A.M.Heijmans, and H.R.Thieme, *Perturbation theory for dual semigroups.I.The sun reflexive case,*Math. Ann. **277** (1987), 709-725.

[9] K.L.Cooke and J.A.Yorke, *Equations modelling population growth, economic growth and gonorrhea epidemiology,*Ordinary Differential Equations, L.Weiss, Ed., Academic Press (1972) 35-55.

[10] E.A.Coddington and N.Levinson, "Theory of Ordinary Differential Equations." Tata McGraw-Hill, New Delhi (1955).

[11] L. Daleckii and M. G. Krein, "Stability of Solutions of Differential equations in Banach Spaces". Trans. of math. Monographs **43** AMS (1974).

[12] E. A. Coddington and N. Levinson,"Theory of Ordinary Differential Equations". Tata Mcgraw-Hill, New Dehli (1955).

[13] R.DATKO, *Reperesentation of solutions and stability of linear differential-difference equations in Banach space,* J.Differ. Equations **29** (1978), 105-166.

[14] C. DONOSO, "Comportamiento Asintótico de las Soluciones del Sistema Diferencial con Retardo ". Tesis de Magister, Fac. de Ciencias, Univ. de Chile (1992).

[15] H. R. DOWSON, "Spectral Theory of Linear Operators". Academic Press, London, New York, San Francisco (1978).

[16] N. DUNFORD AND J. T. SCHWARTZ, "Linear Operators I", Interscience, New York (1963).

[17] N. DUNFORD AND J. T. SCHWARTZ, "Linear Operators II", Interscience, New York (1964).

[18] M.S.P. EASTHAM, "The Asymptotic Solutions of Linear Differential Systems, Aplications of the Levinson Theorem", Clarendon, Oxford (1989).

[19] R. E. EDWARDS, "Functional Analysis", Holt, Rinehart and Winston, New York (1965).

[20] J.K.ENGEL AND R.NAGEL, "One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations", Graduate Texts in Mathematics (194), Spinger-Verlag (1999).

[21] A. FISHER AND J. M. A. M. VAN NEERVEN, *Robust stability of C_0 - semigroups and an application to stability of delay equations,* J. Math. Anal. Appl. **226** (1998), 82-100.

[22] G. GÜRING AND F.RÄBINGER, *Asymptotic properties of mild solutions of nonautonomous evolution equations to retarded differential equations*, Preprint Tulka Univ. of Tübingen (1999).

[23] J. HALE, " Functional Differential Equations", Spinger Verlag, New York, (1971).

[24] J. K. HALE AND S.M. VERDUYN LUNEL," Introduction to Functional Differential Equations", Springer Verlag, New York (1993).

[25] W. A. HARRIS, JR AND D. A. LUTZ, *A unified theory of asymptotic integration,* J. Math. Anal. Appl. **57** (1977), 571-586.

[26] P.HARTMAN AND A. WINTNER, *Asymptotic integration of linear differential equations,* Amer. Math. **77** (1955), 871-882.

[27] E.HILLE AND R.S.PHILLIPS, "Functional Analisis and Semigroups", Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.XXXI, Providence, R. I., (1957).

[28] D. HINRICHSEN AND A. J. PRITCHARD, *Robust stability of linear evolution operators on Banach spaces,* SIAM J. Control Optim **32** (1994), 1503-1541.

[29] S. Z. HUANG AND J. M. A. M. VAN NERVEN, *On small solutions of delay equations in infinite dimentions,* Integr.Equ.Oper.Theory, **31** (1998), 178-185.

[30] A. G. KARTSATOS AND M. E. PARROTT, *Convergence of the Kato approximants for evolution equations involving functional perturbations,* J. Differ. Equations **47** (1983), 358-377.

[31] T.KATO, *Nonlinear semigroups and evolution equations,* J. Math. Soc.Japan **19** (1967), 508-519.

[32] K.KUNISCH AND W.SCHAPPACHER,*Necessary conditions for partial differential equations with delay to generate semigroups,* J. Differ. Equations **50** (1983), 49-79.

[33] G.E.LADAS AND V.LAKSHMIKANTHAM, "Differential Equations in Abstract Spaces". Academic Press, New York and London (1972).

[34] Y. LATUSHKIN, T. RANDOLF, AND R. SCHNAUBELT, *Exponential dicotomy and mild solutions of nonautonomous equations in Banach spaces,* J. Dynam. Differ. Equations **10 (3)** (1998), 498-510.

[35] N.LEVINSON, *The asymptotic behaviour of systems of linear differential equations,* Amer. J. Math. **68** (1946), 1-6.

[36] S. NAKAGIRI, *On the fundamental solutions of delay-differential equations in Banach spaces,* J. Differ. Equations, **41** (1981), 349-368.

[37] S.NAKAGIRI,*Optimal control of linear retarded systems in Banach spaces,* J. Math. Anal. App., **120** (1986), 169-210.

[38] S. NAKAGIRI,*Stuctural properties of functional differential equations in Banach spaces,* Osaka J. Math **25** (1988), 353-398.

[39] A. PAZY, "Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations", Spinger-Verlag, New York (1983).

[40] M. PINTO, *Dichotomies and asymptotic formulae of solutions of differential equations,* J. Math. Anal. Appl. **195** (1995), 16-31.

[41] M. PINTO, *Nonlinear delay-differential equations with small lag,* Internat. J. Math.Sci. **20 (1)** (1997), 137-146.

[42] M. PINTO, *Asymptotic solutions of second order delay differential equations,* Nonlinear Analysis T.M.A. **28 (10)** (1997), 1729-1740.

[43] A. RHANDI, *Extrapolation methods to solve non-autonomuos retarded partial differential equations*, Studia Math. **126** **(3)** (1997), 219-233.

[44] R. L. ROYDEN, "Real Analysis", MacMillan, N.Y., 1998.

[45] R. SCHNAUBELT, *Parabolic evolution equations with asymptotically autonomous delay,* Report **02** (2001), Fachbereich Math. und Infor., Universität Halle (preprint).

[46] C. SWARTZ, "An Introduction To Functional Analysis", Marcel Dekker, Inc., N.Y.,1992.

[47] C. TRAVIS AND G. WEBB, *Existence and stability for partial functional differential equations,* Trans.Amer. Math. Soc.,**200** (1974), 395-418.

[48] N. VAN MINH, *Semigroups and stability of nonautonomous differential equations in Banach spaces,* Trans. Amer. Math. Soc. **345** **(1)** (1994), 223-241.

[49] J. WEIDMANN, "Linear Operators in Hilbert Spaces", Graduate Texts in Mathematics, Spinger-Verlag, New York. (1980).

[50] G. F. WEBB, *Functional differential equations and nonlinear semigroups in L^p space,* J. Differ. Equations **20** (1976), 71-89.

[51] G. F. WEBB, *Asymptotic stability for abstract nonlinear functional differential equations,* Proc. Amer.Math. Soc. **54** (1976), 225-230.